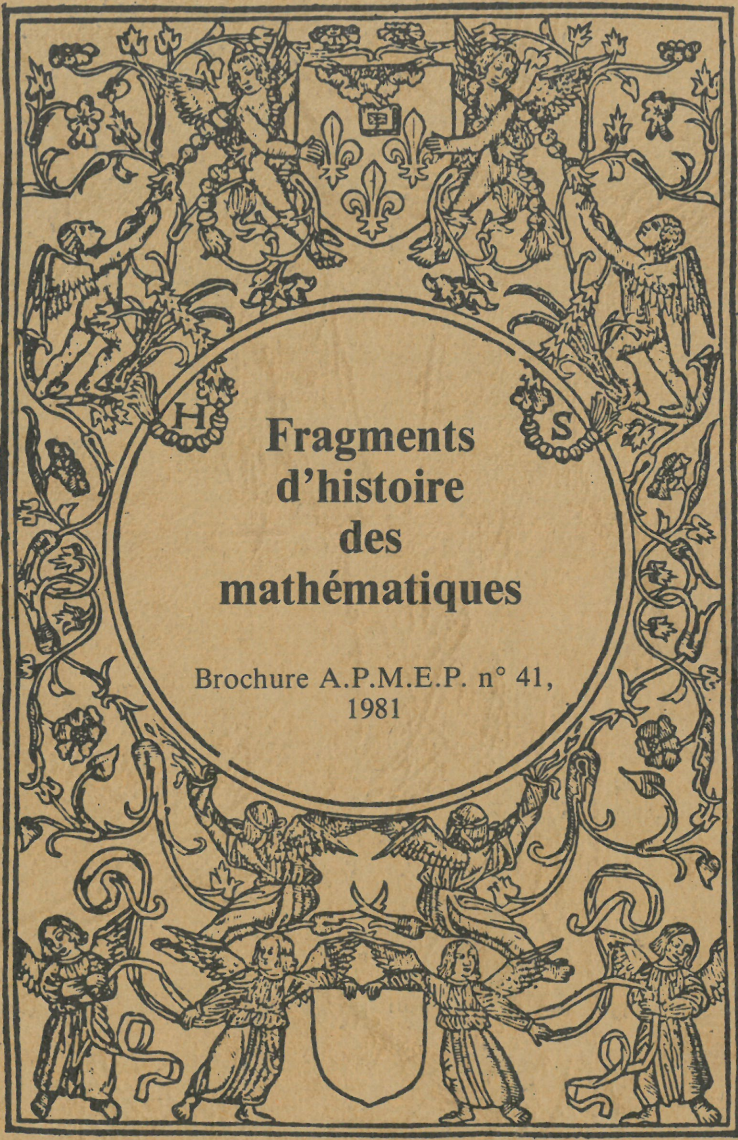


Fragments d'histoire des mathématiques

Brochure A.P.M.E.P. n° 41,
1981

¶ Insup mathematicũ opus quadripartitũ ¶ De Numeris Perfectis ¶ De Mathematicis Rosis ¶ De Geometricis Corporibus
¶ De Geometricis Supplementis

SOMMAIRE

Introduction 5

Adolf P. YOUSCHKEVITCH : Le concept de fonction jusqu'au milieu du XIX^e siècle 7

Mehdi ABDELJAOUAD : Vers une épistémologie des décimaux
A. *La contribution des Arabes à l'invention des décimaux* . .
B. *Les décimaux, d'Al-Kaši à Stevin* 69

Paulo RIBENBOIM : Historique du dernier théorème de Fermat . 99

Jean-Luc VERLEY : La controverse des logarithmes des nombres négatifs et imaginaires 121

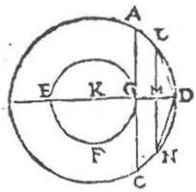
Bernard BRU : Petite histoire du calcul des probabilités 141

D^r Roger KNOTT : Histoire des notations de la théorie des ensembles 159

Bibliographie générale 169

Les "vignettes" des pages 4, 120, 158 *sont extraites d'une édition bilingue des* Eléments d'Euclide.

consistentibus, in maiore circulo polygωnum ęqualium pariúmque laterum inscribere, quod minorem circulum non tangat.

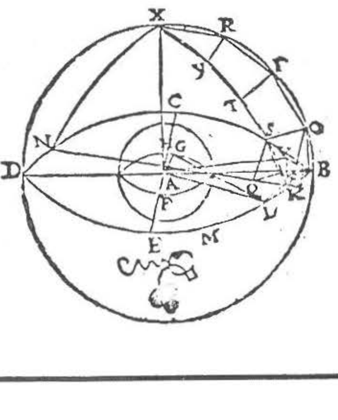


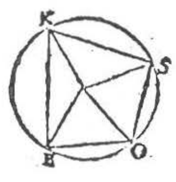
ιζ

Δύο σφαιρῶν περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον οὐσῶν, εἰς τὴν μείζονα σφαῖραν στερεὸν πολύεδρον ἐγγράψαι, μὴ ψαῦον τῆς ἐλάσσονος σφαίρας κατὰ τὴν ἐπιφάνειαν.

Probl. 2. Propo. 17.

Duabus sphæris circum idem centrum cõsistétibus, in maiore sphæra solidum polyedrum inscribere, quod minoris sphæræ superficiem non tangat.





INTRODUCTION

La mode est à l'histoire des mathématiques. Par cette brochure, l'A.P.M.E.P. sacrifie-t-elle à la mode ? Il suffit de consulter la table des matières des anciens bulletins pour s'apercevoir qu'il y a toujours eu, peu ou prou, des articles consacrés à l'histoire de notre discipline. A la lecture de ces anciens bulletins, comment ne pas avoir une pensée pour notre regretté collègue Jean ITARD, qui aurait sûrement collaboré avec joie et compétence à cette brochure ?

Cette brochure, comme toutes celles que l'A.P.M.E.P. a publiées, est destinée à nos collègues enseignant les mathématiques. Elle ne pouvait donc être ni une collection d'articles trop ponctuels ou trop spécialisés, ni un simple survol historique de l'ensemble des mathématiques qui aurait d'ailleurs fait double emploi avec des ouvrages de vulgarisation facilement accessibles. Nous nous appuyons ici sur une certaine conception de l'histoire des mathématiques comme analyse de la construction et des reprises des concepts mathématiques, des problématiques qui ont motivé cette construction et ces reprises, analyse de l'oganisation de différents secteurs mathématiques et de leurs interactions mutuelles ou avec d'autres sciences, histoire des résultats et des succès, mais aussi des recherches et des échecs, histoire des mathématiques considérée comme secteur de l'histoire de l'humanité.

Dans une telle perspective, nous aurions pu envisager l'édition de quelques textes historiques. Leur fréquentation est en effet une nécessité absolue pour tous ceux qui veulent approfondir l'étude historique de telle ou telle question, elle est même une nécessité pour nous tous afin de comprendre que l'évolution des mathématiques ne se limite pas à une accumulation stratifiée de résultats, mais qu'il y a aussi évolution des problématiques et de la "mentalité mathématique", afin aussi de mieux saisir le rapport dialectique entre la construction des concepts et la résolution des grands problèmes.

Pourtant, le volume forcément très limité de cette brochure, la nécessité qu'il y aurait eu à entourer chaque texte original d'un appareil critique, même succinct, pour replacer le texte dans son contexte, nous auraient amenés à un choix si parcimonieux qu'il en aurait perdu toute signification. Il faut souhaiter que d'autres, en d'autres lieux, offrent aux mathématiciens de langue française un équivalent de ces fameux "Source books" qui font le délice de ceux qui pratiquent l'anglais. Nous avons donc choisi une autre voie : demander à des mathématiciens contemporains de retracer l'histoire, au sens précisé plus haut, d'un grand problème, d'une théorie, d'un secteur qui a joué un rôle important, soit par son propre développement, soit par ses interactions avec d'autres secteurs des mathématiques ou de la science. Ces "Fragments d'histoire" prennent donc ainsi une coloration un peu épistémologique. Puisse une telle vision un peu "distanciée" de différentes questions donner à tous le goût de s'intéresser au développement de leur discipline et, à partir de là, les amener à introduire une perspective historique dans leur enseignement. Certains auront peut-être même envie d'aller y voir de plus près par l'étude des textes originaux.

La reconnaissance de l'A.P.M.E.P. va évidemment aux auteurs des différents articles, mais aussi à Jean-Marc BELLEMIN et Daniel DUCLOS pour un important travail de traduction, au groupe d'histoire des mathématiques de l'IREM de Dijon pour la partie iconographique et à tous ceux qui ont contribué à l'édition et à la fabrication de cette brochure.

Jean-Louis OVAERT et Daniel REISZ

Le concept de fonction jusqu'au milieu du XIX^e siècle (*)

par le professeur YOUSCHKEVITCH, Université de Moscou
traduit par Jean-Marc BELLEMIN, IREM de Dijon

1. Remarques préliminaires

Jusqu'à présent l'histoire de la "fonctionnalité" est restée insuffisamment étudiée. En réalité cet important sujet est évité, même par C. Boyer dont l'ouvrage [1] sur l'histoire des principaux concepts du calcul en est à sa troisième édition. Il va sans dire que ce travail, comme d'autres sur l'histoire des mathématiques, contient effectivement un certain nombre d'exposés sur des aspects isolés de l'évolution du concept de dépendance fonctionnelle et sur plusieurs interprétations à ce sujet. Sans mettre en doute leur valeur indiscutable et même si on les considère tous ensemble, de tels exposés n'en fournissent pas un tableau complet. De surcroît les opinions des différents auteurs divergent souvent ; elles ne s'accordent pas, en particulier, sur l'époque où est effectivement apparu le concept de fonction. Le point de vue le plus courant se trouve peut-être dans le célèbre ouvrage de D.E. Smith ([2], p. 376) qui déclarait voilà près de cinquante ans :

> "... après tout, l'idée réelle de fonctionnalité, telle qu'exprimée par l'utilisation de coordonnées, fut exposée pour la première fois clairement et publiquement par Descartes."

Cependant l'opinion de Boyer ([1], p. 156) formulée à propos de l'œuvre de Fermat, un érudit contemporain de Descartes, est que

> "... le concept de fonction et l'idée de symboles comme représentant des variables ne semble se trouver dans les travaux d'aucun mathématicien de l'époque."

En revanche, W. Hartner et M. Schramm ([3], p. 215) supposent que

> "... la question de l'origine et du développement [du concept de fonction] est habituellement traitée avec une remarquable partialité : elle est presqu'à peu près exclusivement considérée par rapport à l'analyse cartésienne qui, à son tour, est revendiquée (à tort, croyons-nous) comme étant un rejeton tardif de la scholastique "latitude des formes".

(*) Article traduit avec l'aimable autorisation des Editions SPRINGER à partir du texte anglais, paru dans "Archive for History of Exact Sciences" tome 16 (1976).

Et, plus loin,

> "... le fait de travailler avec des fonctions avait déjà atteint un haut degré de perfection à l'époque où les premières tentatives furent faites pour donner forme à une conception générale des fonctions."

Ces auteurs soutiennent que l'on peut trouver des opérations sur les fonctions dans les calculs astronomiques des anciens savants (par exemple dans ceux de Ptolémée), puis dans la science arabe et de fait dans les travaux de Al-Biruni (à qui l'article en question est consacré).

Dans un ouvrage [4] publié plus tard que celui cité plus haut et consacré à l'histoire de la géométrie analytique, C. Boyer signale d'autres exemples de "prototypes" de fonctions dans les mathématiques grecques anciennes.

Ainsi, considérant l'usage des proportions, il écrit (p. 5) :

> "C'était quelque chose d'équivalent à l'usage moderne d'équations comme expressions de relations fonctionnelles, quoique de manière beaucoup plus restrictive."

Le même auteur, ainsi que J.E. Hofmann ([5], pp. 80-81), A.C. Crombie ([6], vol. ii, pp. 88-89) et d'autres, cite des expressions géométriques de fonctions et des calculs de leurs valeurs avec la "théorie des calculations" et de la "latitude des formes" du 14ᵉ siècle. Cependant H. Wielettner ([7], p. 145) a supposé que l'idée de fonction dans cette dernière théorie [ne] contenait [pas]

> "... la représentation minimale des relations numériques entre les différentes variables."

tandis que E.T. Bell ([8], p. 32) a même crédité les mathématiciens babyloniens d'un "instinct de fonctionnalité". Enfin une opinion sur l'existence d'une idée de fonction dans les mathématiques de l'antiquité a été avancée récemment par 0. Pedersen ([9]).

Je n'allongerai pas cette liste d'opinions, certaines concordantes, certaines divergentes, parfois correctes, parfois inexactes ou pour le moins incomplètes. J'ajouterai seulement qu'en ce qui concerne le 19ᵉ siècle, la définition classique d'une fonction, contenue dans la plupart des traités d'usage courant en analyse mathématique, est habituellement attribuée soit à Dirichlet, soit à Lobatchevski (respectivement 1837 et 1834). Cependant, historiquement parlant, cette opinion générale est erronée parce que le concept général de fonction considérée comme une relation arbitraire entre des couples d'éléments, chacun pris dans un ensemble propre, fut formulée beaucoup plus tôt, vers le milieu du 18ᵉ siècle.

L'importance d'une analyse historique du concept de fonction est évidente et spécialement marquante lors des discussions actuelles sur ce concept. En m'efforçant de ne pas en faire un but, je présenterai de brèves remarques décrivant seulement les étapes principales du développement de l'idée de fonction jusqu'au milieu du 19e siècle. Comme je les vois, ces étapes sont :

(1) L'Antiquité : étape au cours de laquelle l'étude des différents cas de dépendance entre deux quantités n'a pas encore isolé les notions générales de quantités variables et de fonctions.

(2)Le Moyen-Age : étape au cours de laquelle, dans la science européenne du 14e siècle, ces notions sont pour la première fois et d'une manière précise exprimées à la fois sous une forme géométrique et mécanique, mais pendant laquelle, comme dans l'antiquité, chaque cas concret de dépendance entre deux quantités est défini par une description verbale ou par un graphe plutôt que par une formule.

(3) La période moderne : au cours de laquelle, à partir de la fin du 16e siècle et spécialement pendant le 17e siècle, les expressions analytiques de fonctions commencent à prévaloir ; la classe des fonctions analytiques, généralement exprimées au moyen de sommes de séries infinies, devenant bientôt la principale classe utilisée.

Ce fut la méthode analytique d'introduction des fonctions qui révolutionna les mathématiques et, à cause de son extraordinaire efficacité, assura à la notion de fonction une place centrale dans toutes les sciences exactes.

Néanmoins, vers le milieu du 18e siècle, cette interprétation des fonctions comme expressions analytiques, malgré toute sa fécondité, se révéla elle-même inadéquate, si bien qu'au cours de cette même période, fut introduite une nouvelle définition générale d'une fonction, qui sera plus tard universellement acceptée en analyse mathématique.

Dans la seconde moitié du 19e siècle cette définition générale ouvrit de très larges possibilités pour le développement de la théorie des fonctions mais entraîna simultanément des difficultés logiques qui, au 20e siècle, firent que l'essence même du concept de fonction dut être reconsidérée (comme le furent du reste tous les autres concepts principaux de l'analyse mathématique). La lutte entre les différents points de vue continue ; cependant, comme je l'ai exposé plus haut, je ne veux pas discuter de cette période (ou plutôt de ces deux périodes qui se rattachent respectivement à la théorie des fonctions et à la logique mathématique), qui a été décrite par A.F. Monna ([10]).

Ici je me ferai une règle de ne discuter que des fonctions d'une seule variable réelle. De telles fonctions sont introduites dans les traités modernes d'analyse mathématique sous forme d'énoncés divers ayant une signification commune. Au sens le plus général une fonction y d'une variable x, $y = f(x)$, est une relation entre des couples d'éléments de deux ensembles de nombres X et Y tels que à chaque élément x du premier ensemble X est associé un et un seul élément y du second ensemble Y, selon une règle définie. Laissant de côté les difficultés logiques inhérentes à la définition qui vient d'être donnée (1), je remarquerai seulement que la règle fonctionnelle ou "loi" peut être introduite sous différentes formes : verbalement ; par une table des valeurs de x et y ; par une expression analytique ; par un graphe, etc., assujetties à la seule condition que cette règle soit définie et, une fois donnée la valeur de x, suffisante pour trouver y.

L'idée de fonction prise dans l'un ou l'autre sens est implicitement contenue dans la loi de mesure des aires des figures les plus simples comme rectangles, cercles, etc., connue même en dehors de la civilisation et également dans les toutes premières tables (certaines d'entre elles étant des tables de fonctions de deux variables) d'addition, multiplication, division, etc., utilisées de manière à faciliter les calculs.

Il est évident que des relations entre des nombres ou, plus généralement, entre des quantités, se rencontrent à chaque pas dans le domaine de ce qui est appelé mathématiques élémentaires. Cependant ce fait trivial est stérile en ce qui concerne notre recherche sur la formation de l'idée de fonction, sa généralisation et sa compréhension graduée, la signification concrète qu'elle acquiert avec le progrès de la pensée scientifique et philosophique et, finalement le rôle qu'elle a joué au cours des différentes étapes de sa progression.

2. Les tables de fonctions et les "symptomes" des sections coniques dans l'antiquité.

Comme il a été exposé plus haut, le premier stade pour le concept de fonction est celui de l'antiquité. Même en 2000 avant J.C. les mathématiciens babyloniens utilisaient largement pour leurs calculs des tables sexagésimales de carrés et racines carrées, de cubes et racines cubiques, de même que certaines autres tables. Des tables de fonctions de deux types différents : "the step-function" et "the linear-zigzag-function", comme les appelle O. NEUGEBAUER ([12], chap. 5), furent employées dans l'astronomie babylonienne, sous le règne des SELEUCIDES, pour la compilation des éphémérides du soleil, de la lune et des planètes. Les fonctions tabulées de façon empirique devinrent après cela le fondement mathématique de tout le développement ultérieur de l'astronomie.

On trouve de nouvelles formes d'apparition du concept de fonction dans les mathématiques et les sciences naturelles grecques. Les tentatives attribuées aux premiers PYTHAGORICIENS pour déterminer les lois les plus simples de l'acoustique sont typiques de la recherche de l'interdépendance quantitative de diverses quantités physiques, comme, par exemple,

(1) On trouvera une étude de certains aspects de l'idée de fonction comme elle est présentée dans cette définition (mais non pas des difficultés mentionnées !), et également de la terminologie traditionnelle, visant un cercle plus large de lecteurs, dans l'ouvrage de Kenneth O. May ([11], pp. 253-262).

la longueur et la hauteur de la note émise par des cordes de même espèce, pincées avec des tensions égales. Plus tard, au cours de l'époque d'ALEXANDRIE, les astronomes ont développé une trigonométrie complète des cordes, correspondant à la circonférence d'un cercle de rayon fixé et, en utilisant des théorèmes de géométrie et des règles d'interpolation, ils ont calculé des tables de cordes, équivalant effectivement aux tables de sinus qui furent mises en usage par les Hindous peu de siècles plus tard. La plus ancienne table de cordes se trouve dans l'Almageste de PTOLEMEE, où figurent également de nombreuses tables astronomiques d'autres quantités, qui équivalent à des fonctions rationnelles et aussi les fonctions irrationnelles de sinus les plus simples ([9]).

Cependant les Grecs ne se sont pas limités à l'utilisation de fonctions tabulées. Le rôle principal fut joué dans la théorie des coniques par leurs "symptômes" (συμπτωματα) c'est à dire par celles des propriétés planimétriques de base des courbes correspondantes qui découlent immédiatement de leur définition stéréométrique originelle (quoique non utilisée en réalité) comme sections planes du cône. Un "symptôme" d'une section conique donnée, dirait un mathématicien moderne, représente pour chaque point de la courbe donnée une seule et même dépendance fonctionnelle entre sa demi-corde y et le segment x du diamètre conjugué avec la corde, les extrémités de ce segment étant le point d'intersection du diamètre avec la corde et le sommet correspondant.

Les géomètres de l'Antiquité décrivaient les "symptômes" verbalement et aussi au moyen "d'algèbre-géométrique" (le terme est dû à H.G. ZEUTHEN ([13], p. 7)), dans laquelle les identités et équations des deux premiers degrés étaient représentées par des égalités d'aires de certains rectangles. La signification de ces "symptômes", dont la description verbeuse de l'Antiquité semble inhabituelle à l'oreille moderne, pourrait être transcrite de manière précise dans le langage de la géométrie analytique par des équations de courbes du second ordre pour ce qui concerne leurs sommets,

$$y^2 = 2px \pm \frac{p}{a} x^2 \quad , \quad y^2 = 2px.$$

Néanmoins les occasions fournies par l'algèbre géométrique furent insuffisantes pour exprimer de façon similaire les propriétés des courbes des troisième et quatrième degrés (cissoïde et conchoïde) et celles de quelques autres courbes algébriques connues des mathématiciens grecs qui devaient définir toutes ces courbes et également certaines courbes transcendantes telles que la quadratrice et la spirale équiangulaire au moyen de constructions géométriques ou mécaniques (cinématiques) particulières.

Les mathématiciens de l'Antiquité ont introduit une classification particulière des courbes et des problèmes résolus au moyen de ces courbes. Avant EUCLIDE même ils isolèrent trois classes de "lieux géométriques" : lieux plans (επιπεδοι) — lignes droites et cercles ; lieux solides (στερεοι) — sections coniques ; et lieux linéaires (τοποι γραμμικοι) —

toute autre courbe. Il est absolument impossible d'étudier ici l'origine et la signification de cette classification, tellement éloignée de nous, étude qui débuta au 17e siècle ([14], §25).

Dans la Grèce ancienne et dans les régions hellénistiques qui devaient devenir plus tard provinces romaines, les fonctions introduites en liaison avec des problèmes mathématiques et astronomiques furent soumises à des études semblables à celles entreprises en analyse mathématique moderne. Suivant le but poursuivi, les fonctions furent tabulées en utilisant l'interpolation linéaire, et, dans les cas les plus simples, furent découvertes des limites de quotients de deux quantités infiniment petites comme, par exemple, la limite de $\sin x / x$ quand x tend vers 0.

Des problèmes de valeurs extrémales et de tangentes furent résolus par des méthodes qui équivalent à la méthode différentielle ; des aires, volumes, longueurs et centres de gravité furent calculés par des méthodes d'intégration équivalentes au calcul d'intégrales, par exemple

$$\int_0^a x\,dx \quad \text{et} \quad \int_0^a x^2\,dx.$$

En dernier lieu, des problèmes dans lesquels des racines de polynomes cubiques devaient être calculées furent résolus par l'utilisation de sections coniques (courbes du 2e degré). Dans ce but, les racines des équations correspondantes étaient considérées comme les coordonnées des points d'intersection, ou de contact, de deux courbes de cette sorte. Dans cette description j'utilise la notation et terminologie modernes, étrangères aux mathématiques de l'Antiquité. Je mets ce fait en évidence de manière aussi distincte que possible.

Le symbolisme grec jusqu'au 3e siècle environ, excepté pour l'usage des chiffres, s'est enfermé lui-même en notant les diverses quantités par des lettres différentes de l'alphabet. Aucune formule algébrique, aucune sorte d'algorithme littéral, aucune expression analytique n'ont jamais été introduites. C'est seulement dans les travaux du dernier mathématicien de la période d'Alexandrie, DIOPHANTE, et, peut-être dans ceux de ses prédécesseurs immédiats dont les noms ont été oubliés, qu'apparaissent certains signes algébriques comme par exemple les symboles pour les six premières puissances d'une quantité inconnue, un symbole pour l'égalité etc. Cependant, avec la chute de la société antique, cette notation ne fut pas développée.

3. Une notion générale de fonction dans l'Antiquité.

A part l'arriération du symbolisme qui empêcha le progrès complet des mathématiques, l'œuvre des Grecs, à la fois dans l'augmentation du nombre des dépendances fonctionnelles utilisées et dans la découverte de nouvelles méthodes pour les étudier, a été vraiment substantielle et a joué un rôle de premier plan dans le développement ultérieur des mathématiques jusqu'à la création de l'algèbre nouvelle, de la géométrie analytique et du calcul infinitésimal aux 16e et 17e siècles. Néanmoins je dois répéter qu'il n'y avait aucune idée générale de fonctionnalité dans l'Antiquité.

Le problème de savoir si les mathématiciens de l'Antiquité possédaient un concept général de fonction a été également examiné en détail par O. PEDERSEN dans son article consacré à l'Almageste de PTOLEMEE. ([9]). Tout à fait correctement, PEDERSEN remarque que, selon le système de PTOLEMEE, les positions du soleil, de la lune et des planètes sont considérées comme changeant de façon continue et périodique dans le temps ; que la détermination de ces positions est faite par PTOLEMEE au moyen de procédés standards parfois explicités par des exemples numériques ou, alternativement, formulés verbalement d'une manière tout à fait générale ; qu'enfin, ces procédés standards sont utilisés pour compiler diverses tables astronomiques, c'est-à-dire pour tabuler les fonctions correspondantes (non seulement d'une, mais même de deux et, dans plusieurs exemples, de trois variables). Remarquant que le mot "fonction" lui-même n'est pas apparu pour la première fois dans les travaux des mathématiciens de l'Antiquité mais beaucoup plus tard, PEDERSEN ([9], p. 35) pose la question suivante :

> "Mais est-il justifié, pour cette raison, de conclure qu'ils n'avaient aucune idée des relations fonctionnelles ?"

Sa propre réponse est que tout dépend de ce qu'on entend en réalité par "une fonction". Si, avec de nombreux mathématiciens du passé, on doit interpréter une fonction comme une expression analytique, alors la conclusion est que les Anciens ne connaissaient pas les fonctions.

> "Mais si, poursuit PEDERSEN (p. 36), nous concevons une fonction, non comme une formule mais comme une relation plus générale associant les éléments d'un ensemble de nombres (c'est-à-dire des instants t_1, t_2, t_3, ...) aux éléments d'un autre ensemble (par exemple certaines variables angulaires dans un système planétaire), il est évident que dans ce sens, les fonctions abondent dans tout l'Almageste. Seul le mot est absent : la chose elle-même est là et clairement représentée par les nombreuses tables de correspondance entre éléments de tels ensembles."

Je suis presque d'accord avec tout cela. Bien entendu, PTOLOMEE, comme d'autres astronomes de cette époque et des époques précédentes, savait que les coordonnées des corps célestes en mouvement changent périodiquement avec le temps, ou que, dans un cercle donné, des cordes de longueurs inégales sont en relation avec des arcs de longueurs inégales. Plus haut (cf. §2) j'ai considéré autre chose : des exemples plus anciens de fonctions étudiées par les mathématiciens grecs qui, pour ce faire, ne compilaient pas de tables. De même, deux mille ans avant PTOLEMEE, les relations tabulaires étaient bien connues des Babyloniens. Nonobstant tout cela, la littérature mathématique de l'Antiquité manque non seulement de mots équivalents au terme fonction mais encore d'une allusion à cette idée plus abstraite et plus générale qui unifie des dépendances concrètes séparées, entre des quantités ou des nombres sous quelque forme que ce soit (description verbale, graphe, table) ; ces dépendances sont considérées lorsqu'elles se présentent. La distance est grande entre "l'instinct de fonctionnalité" (BELL) et sa perception ; la même chose est vraie quant aux fonctions particulières par rapport à l'émergence du concept de fonction à tel ou tel degré de généralité. L'usage du singulier (la chose elle-même, c'est à dire la relation fonctionnelle représentée par différentes tables) par PEDERSEN en relation avec l'Almageste (cf citation supra) semble être incorrecte en ce qu'il autorise l'interprétation du passage tout entier comme impliquant que les fonctions correspondant à ces tables étaient considérées comme des exemples particuliers de relations fonctionnelles en général.

On peut trouver une situation semblable dans les mathématiques grecques considérées comme un tout. Ses procédés de calcul ou de détermination de limites concrètes individuelles ne conduisaient jamais à une formulation explicite des concepts généraux de suite, de variable, de limite, d'infiniment petit, d'intégrale ou de théorèmes généraux concernant ces objets(2).

On peut citer comme exemples les quadratures et cubatures réalisées par ARCHIMEDE. En résolvant plusieurs problèmes (détermination de l'aire d'un "tour" d'une spirale, du volume d'un sphéroïde, de l'aire d'un segment d'hyperboloïde de révolution), il a calculé en réalité une seule et même intégrale $\int_0^a x^2dx$ ou, autrement dit, la limite d'une seule et même somme de RIEMANN-DARBOUX, réalisant complètement et à nouveau pour chaque cas les procédures requises par la méthode d'exhaustion. Remarquant que d'autres problèmes résolus par ARCHIMEDE (quadrature de la parabole, détermination du centre de gravité d'un triangle) pouvaient également avoir été ramenés au calcul d'une seule et même intégrale, N. BOURBAKI ([15], p. 208) poursuit :

> "... nous ignorons jusqu'à quel point il a pris conscience des liens de parenté qui unissent les divers problèmes dont il traite (liens que nous exprimerions en disant que la même intégrale revient en maints endroits, sous des aspects géométriques variés), et quelle importance il a pu leur attribuer."

Il est impossible de répondre à cette question, mais il est évident qu'ARCHIMEDE ne pouvait manquer de remarquer que les procédés de calcul étaient identiques dans les trois premiers cas. Toutefois, même dans le cas de la seule fonction qu'il utilise, $y = x^2$, il n'a pas introduit la notion générale d'intégrale définie (cf. [16]).

(2) Une des rares exceptions est la proposition I du livre X des "éléments" d'EUCLIDE, selon laquelle (en utilisant notre terminologie), à partir d'un certain terme, chaque terme suivant d'une suite donnée $a, aq_1, aq_1q_2, aq_1q_2q_3, \ldots$ ($q_k \leqslant 1/2$; $k = 1, 2, 3 \ldots$) devient plus petit que toute quantité donnée b.

D'une façon générale, en étudiant les mathématiques de l'Antiquité, non seulement on évalue leur importance pour le développement ultérieur de cette science (ce qui est nécessaire), mais encore, et cela n'est pas rare, on élargit de manière inadmissible l'interprétation de leurs idées, en les rattachant aux notions et conceptions modernes, beaucoup plus générales. Et il arrive en réalité que, comme le FAUST de GOETHE le fait remarquer à son élève WAGNER, l'historien confonde l'esprit de l'époque avec sa propre réflexion :

"Was ihr den Geist der Zeiten heisst,
Das ist im Grund der Herren eigner Geist,
In dem die Zeiten sich bespiegeln."

("Et ce que vous appelez l'esprit de l'époque,
Est au fond la vision que les Maîtres [savants]
Veulent bien donner de ces époques.")

En particulier, cela aurait été une modernisation inadmissible de voir l'idée d'une quantité variable, au sens propre, dans les travaux de DIOPHANTE, qui utilise effectivement des substitutions pour le calcul de racines rationnelles d'équations indéterminées et dont la méthode rend effectivement possible dans de nombreux exemples de calculer une infinité de valeurs de l'inconnue du problème indéterminé. Au mieux est-il possible de parler, comme D.T. WHITESIDE ([17], p. 197), de la notion ou plutôt de l'usage effectif de "variable substituée" mais non pas de "variable complètement libre", caractéristique de l'algèbre de VIETE.

Les idées de changement et de quantité variable n'étaient pas étrangères à la pensée grecque. Les problèmes de mouvement, de continuité, de l'infini, avaient été examinés depuis l'époque d'HERACLITE ou de ZENON d'ELEE, et la plus grande partie de la "physique" ou philosophie naturelle (φυσις signifie nature) ARISTOTELICIENNE a été consacrée à l'étude de ces questions. En employant le terme "mouvement" de la matière au sens large de "changement", ARISTOTE(3) distingue trois formes principales dans le processus du monde : l'altération ou changement de qualité ; le changement de grandeur ou de quantité, par exemple la croissance ou la diminution ; et le mouvement local (motus localis), celui-ci étant la forme la plus basse du mouvement, qui accompagne nécessairement les deux autres, formes plus élevées des changements de la matière. Le mouvement local était subdivisé en mouvement uniforme, dans lequel des distances égales (segments ou arcs de cercle) sont parcourues en des temps égaux, et le mouvement "difforme" ; cependant ni la vitesse, en tant que quotient s/t, ni encore moins la vitesse instantanée, n'étaient introduites dans l'Antiquité. De là, ni le mouvement local, ni le changement quantitatif, qui ont tous les deux trouvé en définitive leur représentation dans une notion plus abstraite de quantité variable, ne devinrent objet d'étude mathématique pour les Grecs. Ce fait peut être partiellement justifié par l'influence des controverses amenées par les paradoxes de ZENON.

(3) ARISTOTE utilise le terme μεταβολή (changement) à égalité avec κινεσις (mouvement).

Le lien entre cela et la direction générale du développement de la mécanique et de l'astronomie grecques est frappant. Aucune de ces sciences ne dépasse les limites du mouvement uniforme car les mouvements irréguliers des corps célestes étaient réduits dans les systèmes antiques du monde à des combinaisons de mouvements uniformes.

Les mouvements irréguliers n'étaient pas étudiés en tant que tels. Partout où ceci était possible, les idées cinématiques étaient bannies du royaume des mathématiques pures. Les propositions isolées qu'on trouve chez EUCLIDE et dans lesquelles le mouvement et la superposition sont utilisés, aussi bien que les cas isolés de définitions cinématiques de courbes (quadratrice ou spirale équi-angulaire) ne changent pas le tableau général.

J'ai remarqué plus haut que même ceux qu'on appelle les PYTHAGORICIENS avaient jeté une lueur passagère sur les lois quantitatives de la nature. Excepté dans les modèles du système du monde, cet aspect quantitatif des lois de la nature était peu développé dans la science grecque.

Quelles que soient les causes et les circonstances idéologiques ou sociales qui amenèrent la physionomie de la science antique qui vient d'être décrite, la pensée mathématique de l'Antiquité n'a créé aucune notion générale ni de quantité variable ni de fonction. Dans le champ d'applications, principalement en astronomie, où les méthodes quantitatives de recherche subissent le plus grand développement, le but principal était la représentation, sous forme de tables, des fonctions conçues comme des relations entre des ensembles discrets de quantités constantes données, isolées dans un but pratique du continuum des valeurs numériques des quantités en relation fonctionnellement les unes avec les autres. Dans ce contexte, une similitude nous est suggérée avec la conception de la théorie des ensembles de CANTOR, dans laquelle l'idée intuitive d'une quantité variable est réduite à celle d'un ensemble de quantités constantes données auparavant. Dans tous les cas la pensée des mathématiciens Grecs, en général, était loin de la conception cinématique d'une quantité fluente, caractéristique du calcul infinitésimal des 17^e, 18^e et 19^e siècles.

4. Représentation cinématique et géométrique des relations fonctionnelles. Théorie des calculs et des Latitudes des Formes.

Survenant un certain temps après la chute de la société antique, la floraison de la science dans les pays de culture arabe n'apporte pas, aussi loin que l'on connaisse, de nouveaux développements concernant la fonctionnalité. Néanmoins, le nombre des fonctions utilisées s'accroît et les méthodes pour les étudier se perfectionnent. Ainsi sont introduites chacune des principales fonctions trigonométriques, les méthodes pour les tabuler se perfectionnent (en particulier l'interpolation quadratique est utilisée à côté de l'interpolation linéaire) ; l'étude des racines positives de cubiques au moyen des sections coniques fait des progrès essentiels. Des progrès ultérieurs sont accomplis en optique et en astronomie. Il semble qu'il y ait eu une exception que je considère comme particulièrement remarquable, à savoir l'analyse du mouvement accéléré dans le "Mas'uli Canon" (ca. 1030) d'AL-BIRUNI, qui fut précédé en partie au 9e siècle par THABIT IBN QURRA ([3], pp. 212-214 ; [17a], p. 37-38).

Néanmoins l'analyse et les idées d'AL-BIRUNI n'ont pas exercé une grande influence sur ses successeurs. La notion de fonction apparaît pour la première fois sous une forme plus générale trois siècles plus tard, dans les écoles de philosophie naturelle à Oxford et Paris. A la suite de penseurs tels que Robert GROSSETESTE et Roger BACON, ces deux écoles, qui prospèrent au 14e siècle, déclarent que les mathématiques sont le principal instrument pour étudier les phénomènes naturels. Se démarquant de la doctrine aristotélicienne de l'intension et rémission des qualités et des formes (intensio et remissio qualitatum et formarum), elles procèdent à l'étude mathématique du mouvement non uniforme, local et quantitatif.

Qualités ou formes sont des phénomènes tels que chaleur, lumière, couleur, densité, distance, vitesse, etc., qui peuvent posséder plusieurs degrés (gradus) d'intensité (intensio) et qui, d'une façon générale, changent continuement entre certaines limites données. Les intensités des formes sont considérées en relation avec leurs extensions (extensio) comme par exemple, la quantité de matière, de temps, etc. En même temps que de telles considérations, une série complète de concepts les plus importants sont introduits, par exemple vitesse instantanée ou ponctuelle (velocitas instantanea, ponctualis), accélération (intensio motu localis ou aussi velocitatio), et quantité variable, conçue comme étant un degré ou un flux de qualité (gradus qualitatis, fluxus qualitatis). Dans tout cela, une synthèse de la pensée cinématique et mathématique a joué un rôle important.

> "Toute cinématique, remarque BOURBAKI ([15], p. 292), repose sur une idée intuitive, et en quelque sorte expérimentale, de quantités variables avec le temps c'est-à-dire de fonctions du temps".

Simultanément, l'idée que les lois quantatives de la nature étaient des lois de type fonctionnel mûrissait peu à peu dans la philosophie naturelle.

La doctrine de l'intensité des formes, ou, autrement dit, la théorie des "calculations" (calculationes) et sa partie la plus importante, la cinématique, avaient été développées en Angleterre par William HEYTESBURY, Richard SWINESHEAD et d'autres, principalement dans la direction cinématique-arithmétique, alors qu'en France, où son principal représentant fut Nicole ORESME, cette doctrine se développa aussi en direction de la géométrie. Une théorie offre un intérêt spécial, c'est la théorie des configurations des qualités (de configurationibus qualitatum), ou en d'autres termes de l'uniformité et de la difformité des intensités, ou, en d'autres termes encore, la théorie des latitudes des formes (de latitudinibus formarum), développée par ORESME vers le milieu du 14e siècle.

"Toute chose mesurable, écrit ORESME ([18], pp. 164-165), excepté les nombres [qu'il interprétait, à l'image des Grecs, comme étant un ensemble d'unités] est imaginée dans une manière de quantité continue. (Omnis res mensurabilis exceptis numeris ymaginatur ad modum quantitatis continue)."

C'est pourquoi les points, lignes et surfaces dans lesquels, selon ARISTOTE, la mesure ou raison (mensura seu proportio) est trouvée initialement sont nécessaires pour mesurer ces "choses" ; dans toutes les autres choses, la mesure ou raison est étudiée par sa relation mentale avec les points, lignes et surfaces.

ORESME représente les degrés d'intensité par des segments de longueurs correspondantes, les "latitudes" (latitudo), tracés perpendiculairement à la ligne des "longitudes" (longitudo), dont les segments représentent des extensions ; la raison de deux intensités d'une certaine qualité est la même que celle des latitudes correspondantes, si bien, comme le dit ORESME lui-même, que les latitudes et les longitudes d'une certaine qualité pourraient être considérées à la place de son intensité et extension. Les extrémités supérieures des latitudes d'une qualité donnée engendrent la "ligne de l'intensité" (linea intensionis) ou, en d'autres termes, la "ligne du sommet" (linea summitatis) qui, comme le fait aussi la figure limitée par cette droite, par le segment de la droite des longitudes considéré et par les deux latitudes extrêmes, représente la qualité donnée et ses "degrés". L'angle des latitudes et de la droite des longitudes pourrait être choisi arbitrairement, bien que les latitudes soient construites le plus commodément perpendiculaires à la droite des longitudes.

Une des remarques d'ORESME devrait particulièrement attirer l'attention, à savoir, que les intensités peuvent être appelées longitudes, les extensions pouvant alors être nommées latitudes. Dans ce contexte, on considère des qualités "linéaires" dont les intensités sont distribuées parmi les points d'une droite, mais il existe aussi des qualités "de surface" (superficialis) et "corporelles" (corporalis), distribuées parmi les points d'un continuum à deux ou trois dimensions. Les qualités de surface sont représentées par des solides à base plane ; quant aux qualités "corporelles", le problème de leur représentation géométrique se présente à ORESME avec de grandes difficultés, si bien que ses remarques à ce sujet sont loin d'être claires ([18] ; voir en particulier Pt.1, ch i-iv et x).

Ainsi, ces théories, développées au 14e siècle, paraissent fondées sur une utilisation consciente d'idées générales de quantités, chacune d'entre elles étant désignée par un terme particulier. La latitude d'une "qualité" est interprétée d'une manière générale comme étant une quantité variable dépendant de sa longitude et, de même, la "ligne du sommet" est comprise comme étant la représentation graphique d'une certaine relation fonctionnelle continue ([6], Vol. II, p. 88 ; [19], p. 341). Ainsi, dans ces théories, une fonction est définie soit par une description verbale de sa propriété spécifique, soit directement par un graphe.

Dans le langage mathématique moderne, la latitude et la longitude, et aussi les demi-cordes et diamètres correspondant dans la théorie antique des sections coniques (voir §2), pourraient bien être appelées respectivement l'ordonnée et l'abscisse, avec une seule réserve, quoique essentielle : les coordonnées utilisées au 14e siècle l'étaient toujours pour les points d'une courbe donnée plutôt que pour les points arbitraires du plan. Cependant cette réserve s'applique même à DESCARTES. Il semble vrai que les coordonnées de points arbitraires n'ayant aucun lien avec une courbe donnée apparaissent pour la première fois dans le commentaire de Fr VAN SCHOOTEN sur l'édition en latin de la Géométrie de DESCARTES (publiée en 1649), dans le contexte de déduire les premières formules connues pour la transformation des coordonnées ([20], p. 191...).

La théorie de la latitude des formes est marquante par son interprétation préliminaire absolument abstraite des problèmes résolus ; aucune signification n'étant attachée à la forme concrète ou à une qualité. Mais ensuite ORESME introduit aussi une sorte de classification des principales espèces de qualités linéaires, à l'étude desquelles il se restreint lui-même essentiellement. Cette classification est la suivante : ([18], Pt. 1, ch. XI-XVI) :

(1) la qualité uniforme (qualitas uniformis) avec une latitude constante et la ligne des intensités parallèle à la ligne des longitudes. La figure correspondante est un rectangle.

(2) la qualité uniformément difforme (uniformiter difformis) : "... est celle dans laquelle si on prend trois points de la droite considérée, la raison de la distance entre le premier et le deuxième, à la distance entre le deuxième et le troisième est comme la raison de l'excès de l'intensité du premier point sur le deuxième à l'excès de celle du deuxième sur le troisième ; j'appelle le premier de ces trois points celui ayant la plus grande intensité. (Est cujus omnium trium punctorum proportio distantie inter primum et 2^m ad distantiam inter 2^m et 3^m est sicut proportio excessus primi supra 2^m ad excessum 2^m supra 3^m intensione, ita quod punctum intensiorem illorum trium voco primum.)"

A cette description verbale correspond notre équation d'une droite passant par deux points donnés (x_1, y_1) et (x_2, y_2) :

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1}$$

La ligne de l'intensité est ici représentée par l'hypoténuse d'un triangle rectangle ou, alternativement, par le côté supérieur incliné d'un quadrilatère ayant deux angles droits à la base, la différence entre ces cas étant due au fait que soit cette droite rencontre le segment donné de la ligne des longitudes à l'une de ses extrémités (dans la terminologie d'ORESME, dans ce cas la droite est terminée au "non-degré", terminatur ad non gradum, i.e. au point de latitude zéro), soit ne rencontre pas le segment donné (est terminé aux deux extrémités à un degré donné, terminatur utrobique ad gradum).

(3) les qualités difformément difformes (difformiter difformis) ; à cette catégorie appartiennent tous les autres cas. Cette catégorie, la plus grande catégorie de qualités, peut être décrite négativement (potest describi negative) comme n'appartenant ni aux qualités uniformes ni aux qualités uniformément difformes ([18], p. 194-195).

Tout d'abord ORESME distingue ici quatre espèces simples (simplex) de qualités, celles-ci étant convexes et concaves (relativement à la droite des longitudes), : des arcs de cercle ne dépassant pas le demi-cercle et aussi de manière analogue des arcs d'ellipse. (Le mot lui-même n'est pas utilisé ; ce qui était en réalité discuté était une courbe proportionnelle en altitude à une figure circulaire). Ensuite, en deuxième lieu, ORESME discute sur 63 "difformités difformes" composées (compositae) dont les lignes d'intensité comprennent deux arcs (ou plus) de courbes décrites antérieurement ou des segments de droite. Ces lignes combinées ressemblent quelque peu aux "courbes mixtes" (lineae mixtae) d'EULER (voir §9) ; ORESME utilise aussi le même terme, "mixtio".

Un constituant important de la théorie des calculations ou de la latitude des formes est l'étude de fonctions du temps. En mettant correctement en évidence la nature rudimentaire de ces études, BOURBAKI remarque qu'elles ont été manifestement réalisées "sans considérations infinitésimales" ([15] p. 217). Il n'en est cependant pas exactement ainsi. Des considérations infinitésimales sont non seulement présentes de manière latente dans les concepts de vitesse instantanée et d'accélération instantanée eux-mêmes, mais aussi utilisées explicitement dans la résolution de toute une série de problèmes tels que, par exemple, les problèmes de détermination de l'aire de certaines figures non limitées dans leur étendue, ou la vitesse moyenne de corps dont les vitesses (instantanées) changent par sauts selon une loi définie, une infinité de fois pendant un intervalle de temps donné, partagé en parties telles qu'elles forment une progression géométrique. Dans ces problèmes, la méthode principale de calcul est exactement la sommation de progressions géométriques infinies ; plus tard, dans le cadre de la même théorie, les mathématiciens ont rencontré des séries plus compliquées dont les sommes sont représentées par des quantités transcendantes (alors inconnues) qu'ils devaient approximer à la fois par excès et par défaut (A. THOMAS, en 1509).

Une réussite très importante pour la mécanique sinon pour les mathématiques a été la détermination de la vitesse moyenne d'un mouvement uniformément difforme (uniformément accéléré), malgré l'échec pour lier ce problème à celui de la chute libre des corps pesants. Ce travail, accompli pour la première fois à Oxford, est décrit dans les ouvrages de W. HEYTESBURY (en 1535 ?), R. SWINESHEAD, et J. DUMBLETON, écrits à peu près simultanément ; ils concluent que le mouvement uniformément difforme est équivalent à un mouvement uniforme ayant une vitesse égale à la vitesse d'un mouvement accéléré à l'instant milieu de sa durée[4]. Depuis que les trois savants ont travaillé au même endroit, au "Merton college" à Oxford, la littérature moderne se réfère habituellement à leurs conclusions sous le nom de "règle (ou théorème) de Merton" ([19], ch. 5).

ORESME a aussi démontré ce théorème. Il représente la distance parcourue ou la quantité proportionnelle, la vitesse (moyenne) totale (velocitas totalis), par l'aire d'un triangle ou d'un trapèze ([18], Pt. iii, ch. VII).

En réalité ORESME ([21], pp. 37-39) va plus loin et détermine que, pour une vitesse initiale nulle, la distance augmente proportionnellement au carré du temps et aussi que les distances parcourues pendant des temps égaux augmentent en proportion des nombres ajoutés (1 : 3 : 5 : 7 :...). En pratique, ORESME parvient à ces résultats tout comme GALILEE devait le faire dans son étude de la chute libre des corps pesants dans le vide (in vacuo), publié dans le "Dialogo" (en 1632) et aussi dans les "Discorsi e dimostrazioni matematiche" (en 1638). Toutefois la démonstration par GALILEE du théorème de Merton s'appuie explicitement sur la méthode des indivisibles, tandis que dans la dérivation d'ORESME, les considérations infinitésimales sont seulement implicites.

Au 15e siècle et aussi dans la première moitié du 16e, la théorie de la latitude des formes et des "calculations" jouit d'une grande renommée, particulièrement en Angleterre, en France, en Italie et en Espagne. Elle est exposée dans les cours de l'Université et ce sont non seulement des manuscrits mais encore de nombreux ouvrages imprimés qui lui sont consacrés. Néanmoins elle ne fut pas beaucoup enrichie à cette époque et, en particulier, les applications de ses méthodes à la physique et à la mécanique ne vont pas au-delà de problèmes isolés, artificiellement posés. Comme le déclare A.C. CROMBIE ([6] vol. ii, p. 89) :

> "Au 14e siècle l'idée de relation fonctionnelle se développa sans réelle dimension et seulement dans son principe".

Un examen des traits généraux de la théorie en question pourrait bien conclure que dans le développement de certains des concepts de base des mathématiques et de la mécanique, celui de fonction inclus, les philosophes "naturels" du 14e siècle sont allés plus loin dans la généralisation et l'abstraction que tous leurs prédécesseurs pris ensemble. Aussi des résultats particuliers, d'une importance fondamentale, sont obtenus : ainsi, par exemple, l'existence de figures illimitées mais ayant une aire finie, et la divergence de la série harmonique sont découverts (ORESME). Toutefois, les possibilités virtuelles fournies par les concepts nouveaux ne sont pas exploitées largement, que ce soit en mathématiques ou dans leurs applications. Les écoles d'Oxford et de Paris disposaient seulement de

(4) Un aspect particulier des recherches de SWINESHEAD est sa tentative d'étudier un mouvement rectiligne dont la vitesse est proportionnelle à la distance à partir d'un point fixe ([17], p. 217).

faibles moyens pour la recherche mathématique concrète : ni les représentants de ces écoles, ni leurs successeurs immédiats n'ont introduit de nouveauté substantielle dans les techniques de calcul, en algèbre (excepté dans la théorie des proportions et dans l'œuvre de BRADWARDINE et ORESME), en trigonométrie ou dans les méthodes de quadrature ou cubature. Une disproportion manifeste se développe entre le haut niveau des spéculations abstraites théoriques et la faiblesse de l'appareil mathématique.

Déterminer l'influence exercée par les théories des "calculations" et de la latitude des formes sur les mathématiques de l'époque moderne est un problème plutôt compliqué, les matériaux à notre disposition étant insuffisants pour une solution d'ensemble pertinente. Dans de nombreux exemples la similitude entre les concepts habituels et les résultats particuliers de ces deux théories est si grande qu'on peut difficilement l'attribuer à une coïncidence ordinaire. Plus naturellement, nous pouvons percevoir ici la persistance de traditions parfois transmises par des moyens compliqués, par exemple par migration à travers de nombreux pays. L'information pouvait avoir été transmise non seulement sous forme écrite ou imprimée mais encore au moyen de lectures ou même de conversations privées (il en existe des preuves certaines).

Un exemple est fourni par l'étude de GALILEE sur la chute libre des corps pesants. Même si la ressemblance générale de l'interprétation mathématique par GALILEE de la loi correspondant à l'interprétation par ORESME du théorème de Merton suggère une continuité des idées, cette suggestion devient certitude au regard du fait que M. CLAGETT a trouvé le théorème de Merton dans plus de 17 livres imprimés au 16e siècle.

Aussi frappante est la ressemblance de certains principes de base des mathématiques universelles de DESCARTES avec la théorie des latitudes des formes d'ORESME. Ce dont je veux parler ici est la représentation de toutes les quantités et les relations entre elles, au moyen de formes géométriques et, en dernier ressort, au moyen de segments de droite, comme l'énonce DESCARTES lui-même dans ses "Regulae ad directionem ingenii", déjà écrites en 1629. Nous ne savons pas si DESCARTES a réellement lu les travaux d'ORESME mais nous connaissons effectivement quelle importance a eu pour DESCARTES ses conversations avec son ami I. BEECKMAN, dont la familiarité avec les idées d'ORESME et en particulier avec le théorème de Merton est attestée par son journal pour l'année 1618 ([19], pp. 417-418). Ainsi, une certaine influence d'ORESME sur DESCARTES est très probable ; bien sûr cela n'est pas contredit par le lien direct qui existe entre la méthode des coordonnées de DESCARTES et les symptômes des sections coniques telles que les décrivait APOLLONIUS de PERGE(5).

(5) Ce lien a été recemment et à nouveau mis en évidence par M. SCHRAMM dans une polémique avec A.C. CROMBIE, qui suppose qu'ORESME a fait un pas pour fonder la géométrie analytique et que DESCARTES connaissait probablement les travaux d'ORESME ([22], pp. 90-91).

On pourrait aussi difficilement mettre en doute que les idées cinématiques des calculateurs anglais ont persisté en Angleterre et influencé les travaux de NEPER, BARROW et NEWTON. Nous savons en particulier que SWINESHEAD n'était pas oublié même au 17e siècle : parmi ceux qui ont lu SWINESHEAD et l'ont beaucoup admiré, on peut citer LEIBNIZ ([1], p. 88).

5. La quantité variable de DESCARTES : les fonctions algébriques.

Aussi sûr que je sois du rôle notable qu'ont joué les idées des deux écoles de philosophie d'Oxford et de Paris dans la fabrication des mathématiques de l'époque moderne, et, en particulier, dans le développement de la notion générale de fonction, je ne maintiens pourtant pas que ce rôle fut dominant, d'autant plus qu'une nouvelle interprétation de la fonctionnalité arrive au premier plan au 17e siècle.

Un rôle décisif pour le développement ultérieur de la théorie des fonctions fut joué d'une part par la croissance impétueuse des calculs mathématiques et d'autre part par la création de l'algèbre symbolique, littérale, en même temps que l'extension correspondante du concept de nombre, tant et si bien qu'à la fin du 16e siècle il embrassait non seulement le champ entier des nombres réels mais encore celui des nombres imaginaires et complexes. Ce fut là, pour ainsi dire, les préliminaires dans les mathématiques elles-mêmes à l'introduction du concept de fonction comme relation entre des ensembles de nombres, plutôt que comme des "quantités" et pour une représentation analytique des fonctions par des formules. Il suffit dans ce contexte de mentionner les progrès accomplis en trigonométrie et la découverte des logarithmes ; ce qui serait toutefois à mettre particulièrement en évidence est l'introduction de nombreux signes pour les opérations et relations mathématiques (en premier lieu, ceux de l'addition, de la soustraction, des puissances et de l'égalité) et, surtout, des signes pour les quantités inconnues et pour les paramètres, que VIETE, en 1951, note respectivement par les voyelles A, E, I,... et les consonnes B, G, D,... de l'alphabet latin. L'importance de cette notation qui, pour la première fois, a rendu possible la mise par écrit sous une forme symbolique des équations algébriques et des expressions contenant des quantités inconnues et des cœfficients arbitraires (un travail prenant aussi naissance avec VIETE) pourrait être surestimée. Cependant le créateur de l'Algèbre nouvelle n'utilisa pas sa remarquable découverte pour "faire avancer" le concept de fonction : penser en terme de fonction ne fut pas caractéristique de son esprit.

Le symbolisme de VIETE souffrait de nombreuses insuffisances et fut bientôt amélioré par nombre de savants, puis étendu au-delà du royaume de l'algèbre et utilisé dans le calcul infinitésimal. DESCARTES, NEWTON, LEIBNIZ (qui attachait une très grande importance à la sélection appropriée des signes), EULER et d'autres savants de très grande importance ont participé au processus de perfectionnement du symbolisme mathématique : ce processus se poursuit de nos jours dans toutes les branches des mathématiques.

D'autre part, dans les sciences exactes anciennes, et spécialement depuis le début du 17e siècle, la conception nouvelle des lois quantitatives de la nature (cf. §4), en tant qu'établissant des relations fonctionnelles entre des valeurs numériques de quantités physiques a acquis de plus en plus de force en même temps qu'elle devenait signe distinctif. Dans ce processus la création d'un champ de plus en plus large concernant la métrologie physique, avec l'introduction de mesures quantitatives de chaleur, pression, etc. joua un rôle important : ainsi le gain rapide dans la précision des expérimentations et des observations, apporté par l'invention de divers instruments scientifiques. Parmi les sciences, la mécanique, rejoignant l'astronomie, parvient au premier plan, et avec elle sa branche nouvelle la dynamique, bientôt rejointe par la mécanique céleste. L'étude de la relation entre le mouvement curviligne et les forces affectant le mouvement était devenu le principal problème de la science. Celui-ci donna naissance à une série de problèmes en analyse infinitésimale, dont on devait triompher par des réponses numériques.

Comme conséquence de tout cela, une méthode nouvelle d'introduction de fonctions prend naissance, pour devenir pendant longtemps la méthode principale en mathématiques et spécialement dans ses applications. Comme avant il n'est pas rare d'introduire des fonctions verbalement, par un graphe, cinématiquement et, comme avant, des tables de fonctions continuent à être largement utilisées. Cependant la méthode analytique pour introduire les fonctions au moyen de formules et d'équations arrive au premier plan dans la recherche théorique.

Il nous est possible de dire presque exactement quand ce renversement d'idées eut lieu. Même à la fin du 16e siècle les fonctions n'étaient introduites qu'au moyen des anciennes méthodes. C'est précisément de cette manière que fut introduite la fonction logarithmique (la plus importante avec les fonctions trigonométriques). J. BURGI établit ses tables de logarithmes (publiées en 1620) en partant de la relation mise en évidence plus tôt par M. STIEFEL (en 1554) mais qui était déjà connue d'ARCHIMEDE, relation entre la progression géométrique des puissances d'une quantité (par exemple q, q^2, q^3, ...) et la progression arithmétique des exposants (1, 2, 3, ...). A mesure qu'il utilisait le procédé d'interpolation pour la démontrer, BURGI comprit intuitivement que cette relation devait être continue. Cependant J. NEPER, dont les travaux furent publiés en 1614-1619, procéda en partant de la comparaison de deux mouvements rectilignes continus, l'un étant celui d'un point L se déplaçant de manière uniforme et l'autre celui d'un second point N dont la vitesse est supposée proportionnelle à sa distance à un certain point fixe[6]. Dans ce cas, la distance parcourue par le point L est le logarithme (népérien) de la distance parcourue par le point N.

(6) Cf. la note (4) sur les travaux correspondants de SWINESHEAD.

Mais alors, quinze à vingt ans seulement après cela, indépendamment l'un de l'autre, FERMAT et DESCARTES, en appliquant l'algèbre nouvelle à la géométrie, présentent tous deux la méthode analytique de l'introduction des fonctions, ouvrant ainsi une ère nouvelle en mathématiques.

Dans son "Introduction aux lieux plans et solides" (Ad locos planos et solidos isagoge), écrit un peu avant 1637 mais publié seulement en 1679, FERMAT ([23], p. 91) dit ceci :

> "Aussitôt que deux quantités inconnues apparaissent dans une ultime égalité, il y a un lieu et le point terminal de l'une des deux quantités décrit une ligne droite ou courbe".
>
> (Quoties in ultima aequalitate duae quantitates ignotae reperiuntur, sit locus loco et terminus alterius ex illis describet lineam rectam aut curvam).

Ici la fonction et l'argument sont tous deux appelés quantités inconnues, ce terme signifiant en réalité segments de droite de longueur variant de façon continue.

Utilisant les notations de VIETE et un système de coordonnées rectilignes, FERMAT écrit les équations d'une droite et, en se servant des "Coniques" d'APOLLONIUS, de certaines courbes du second degré.

L'idée d'introduire analytiquement une fonction est développée de façon plus détaillée par DESCARTES dans sa célèbre "Géométrie" ("La Géométrie" 1637). Son but principal était de ramener la résolution de tous les problèmes et équations algébriques à certains procédés standard de construction de leurs racines réelles, c'est-à-dire les segments-coordonnées des points d'intersection de courbes planes appropriées de degré le plus bas possible.

En reliant une courbe plane algébrique à une équation entre les coordonnées de ses points, les coordonnées étant considérées à nouveau comme des segments de droite, DESCARTES ([24] p. 386) écrivait :

> "Prenant successivement infinies diverses grandeurs pour la ligne y, on en trouvera aussi infinies pour la ligne x, et ainsi on aura une infinité de divers points tels que celui qui est marqué C, par le moyen desquels on décrit la ligne courbe demandée".

Ici, pour la première fois et d'une façon complètement claire, est soutenue l'idée qu'une équation en x et y est un moyen pour introduire une dépendance entre des quantités variables de manière à permettre le calcul des valeurs de l'une d'elles correspondant aux valeurs données de l'autre.

Un peu plus loin DESCARTES distingue la classe des courbes algébriques (qu'il appelle courbes géométriques). Tous les points de ces courbes, comme le remarque DESCARTES, sont en relation avec tous les points d'une droite, avec la possibilité de représenter cette relation par une équation, la même pour chaque point de la courbe donnée. N'étant pas en mesure d'écrire symboliquement n'importe quelle équation d'autres types, DESCARTES voulait parler en réalité d'équation algébrique. Appelant mécaniques les courbes non géométriques, DESCARTES introduit séance tenante sa classification, non encore parfaite, des courbes géométriques en "genres" : celles du premier genre étant décrites par des équations du second degré, celles du deuxième genre par des équations de troisième et quatrième degrés, celles du troisième genre par des équations de cinquième et sixième degrés, etc.(7)

L'introduction des fonctions sous la forme d'équations fit l'effet d'une révolution dans le développement des mathématiques. L'utilisation d'expressions analytiques, les opérations avec lesquelles elles sont effectuées suivant les règles strictement spécifiées conféra à l'étude des fonctions un statut de véritable calcul, ouvrant ainsi des horizons entièrement nouveaux. Prenant naissance au cours de l'application de l'algèbre à la géométrie, cette méthode de représentation des fonctions fut immédiatement étendue à d'autres branches des mathématiques et en premier lieu au royaume du calcul infinitésimal.

Dans des notes écrites il y a une centaine d'années mais qui ne furent publiées qu'en 1925, le grand penseur F. ENGELS ([25], p. 275) soutenait que

> "En mathématiques, la "rupture [épistémologique]" intervient avec le concept de grandeur variable chez Descartes. Et par voie de conséquence apparaissent la notion de mouvement, de dialectique en mathématiques, la nécessité du calcul différentiel et intégral, lequel se développera d'ailleurs immédiatement".

L'opinion du célèbre mathématicien H. HANKEL, exprimée à peu près à la même époque ([26] pp. 44-45) est plus que semblable à la citation précédente :

> "...alors que les Anciens, dans leur système très rigide, n'avaient ni le concept de mouvement ni celui de la représentation spatiale de la variation des grandeurs et que même dans l'étude des courbes d'origine phoronomique (*) ils n'ont utilisé ces concepts que très épisodiquement, les mathématiques nouvelles datent de l'instant où Descartes, partant de l'étude purement algébrique des équations, aboutit à l'étude des variations des grandeurs qui interviennent dans ces expressions algébriques, en les considérant comme des grandeurs évoluant de façon continue".

(7) La classification des courbes algébriques adoptée universellement, introduite par NEWTON autour des années 1670, ne fut publiée dans son "Enumération des lignes du troisième ordre" (Enumeratio linearum tertii ordinis) qu'en 1704.

(*) **NDT : Phoronomie** : "Science des lois de l'équilibre et du mouvement des corps ; mot qu'on a proposé pour remplacer mécanique" (cf Littré).

A l'époque précise de DESCARTES et FERMAT, la pensée "fonctionnelle" devient prédominante dans les travaux de création en mathématiques. En liaison avec cela, je remarque aussi en passant que la géométrie analytique de DESCARTES et FERMAT, aussi pauvre soit-elle d'abord en découverte si on la compare aux résultats de la théorie des sections coniques des Anciens, est potentiellement supérieure à la géométrie analytique d'APOLLONIUS et en diffère autant que la nouvelle algèbre symbolique est différente de l'antique "algèbre géométrique" (cf. [17] p. 294).

Au début, la liste des fonctions exprimées analytiquement était restreinte aux fonctions algébriques, et DESCARTES excluait même de sa géométrie toutes les courbes mécaniques comme n'étant pas justiciables de sa méthode d'analyse. Cependant une découverte faite un peu plus tard, au milieu du 17e siècle, de manière indépendante par P. MENGOLI, N. MERCATOR, J. GREGORY et I. NEWTON rendit possible la représentation analytique de toute relation fonctionnelle étudiée à cette époque.

Ce dont je veux parler ici est la découverte de la manière de développer des fonctions en série entière. Beaucoup d'autres expressions de fonctions furent ajoutées plus tard ; produits infinis, fractions continuées etc... Sous une forme embryonnaire l'idée qu'une expression infinie était une "fonction" n'était pas neuve, la progression géométrique infinie décroissante étant connue depuis longtemps (cf. §4), mais c'est seulement dans la seconde moitié du 17e siècle que les séries entières deviennent le moyen le plus fécond et, comme on le supposa même beaucoup plus tard, le moyen universel pour l'expression analytique et l'étude de toute fonction.

P. BOUTROUX ([27] p. 117) considère même la théorie du développement des fonctions en séries entières comme la composante la plus originale, la plus remarquable et la plus féconde des mathématiques nouvelles découvertes par NEWTON et LEIBNIZ. En tout cas et à cause précisément des séries entières, la conception d'une fonction comme une expression analytique occupa la place centrale dans l'analyse mathématique. Ce n'est pas sans raison que l'un des principaux travaux de NEWTON fut intitulé "La méthode des fluxions et séries infinies" (Methodus fluxionum et serierum infinitorum).

6. Le concept de fonction selon NEWTON (1670) et LEIBNIZ (1673-1694)

Il n'y avait pas loin entre les premières descriptions des nouveaux concepts de fonction et la formulation des définitions correspondantes qui prirent d'abord un aspect mécanique ou géométrique, à la fois à cause du poids de la tradition et parce que les méthodes du calcul infinitésimal furent créées principalement à propos de la résolution de problèmes de mécanique et de problèmes liés à la géométrie.

La fonction logarithme était une aire hyperbolique, la fonction elliptique un arc de section conique, les intégrales étaient représentées par des distances, des aires, des arcs, des volumes ; les différentielles par des segments coordonnés infiniment petits ; les dérivées par des vitesses ou les racines des côtés d'un triangle rectangle (caractéristique) infiniment petit, etc...

Une interprétation cinématico-géométrique particulièrement claire des conceptions de base de l'analyse mathématique fut donnée par NEWTON qui développa les idées exposées par son maître I. BARROW lors de conférences à Cambridge en 1664-65 mais publiées plus tard [28], et qui décrivent les conceptions du temps, du mouvement ainsi que de leur présentation géométrique, ayant pris naissance avec GALILEE et ORESME ([15], p. 220 ; [29], p. 240).

Comme BARROW, NEWTON choisit le temps comme notion universelle et interprète les variables dépendantes comme des quantités "s'écoulant" de façon continue et possédant une vitesse de changement.

Dans deux lettres à J. WALLIS, datées des 27 août et 17 septembre 1692(*), NEWTON expliquait de manière concise sa conception du calcul infinitésimal, qu'il avait commencé à développer dès les années 1664-1666. Des versions abrégées de ces lettres furent publiées en 1693 dans l'édition augmentée, en latin, du traité algébrique de WALLIS (l'édition anglaise est de 1685).

Là on peut lire que NEWTON ([30], p. 391) ramène sa méthode à la résolution de deux problèmes :

> *"Data aequatione fluentes quotcunque quantitates involvente, fluxiones invenire et vice versa. Per fluentes quantitates intelligit indeterminatas id est quae in generatione Curvarum per motum localem perpetuo augentur vel diminuuntur, et per earum fluxionem intelligit celeritatem incrementi vel decrementi"*(8).

NEWTON expose ces mêmes idées, de façon plus détaillée, dans de nombreux autres travaux, comme par exemple dans la "Méthode des fluxions et des suites infinies" déjà mentionnée plus haut, écrite en 1670 mais qui ne fut publiée en traduction anglaise d'un manuscrit latin qu'en 1736 ([32]). Evidemment même les deux principaux problèmes du calcul

* "Old style" (ancien style).
NDT : Le calendrier grégorien (1582) ne fut adopté en Angleterre qu'en 1752.

(8) Une traduction anglaise un peu libre, faite à la fin du 17e ou au début du 18e siècle, publiée en 1961 ([31], p. 222 et sq) est contenue dans le passage suivant : "*[L'illustre Mr. Newton a ramené la théorie des fluxions à deux propositions :]* 1 Any equation given wherein are flowing quantities to find the Fluxions, and ye contrary. By flowing quantities he understands Indeterminate quantities, that is which in ye Generation of a curve by local motion perpetually Encrease or Decrease, and by ye flux : he means the celerity of their Increm't or Decrem't."

infinitésimal y sont exprimés en termes de mécanique, c'est-à-dire : détermination de la vitesse d'un mouvement, étant donnée la loi de la distance, (différentiation), et aussi détermination de la distance parcourue connaissant la vitesse du mouvement (intégration d'équations différentielles et, en particulier de fonctions).

Cependant les conceptions de NEWTON tendent nettement vers une compréhension plus abstraite des termes philosophiques et mécaniques. Ainsi, en ce qui concerne le sujet universel, le temps, NEWTON dit dans sa "Méthode des fluxions" ([32a], pp. 72-73) (je cite ici la version originale, en latin, antérieure à 1670-71) :

> *"Nous ne pouvons cependant avoir aucune estimation du temps excepté en tant qu'il a été exprimé et mesuré par un mouvement local uniforme, et d'ailleurs, uniquement par des quantités de même sorte, ainsi leurs vitesses d'augmentation et de diminution peuvent aussi être comparées entre elles. Pour ces raisons, dans ce qui suit, je ne m'occuperai pas du temps, considéré ainsi formellement, mais, à partir de quantités proposées qui sont de même sorte, je supposerai que l'une d'elles augmente de façon uniforme : toutes les autres peuvent alors lui être référées comme si le temps existait, et ainsi, le nom de "temps" peut convenir et lui être conféré".*
>
> *(Cum autem temporis nullam habeamus aestimationem nisi quatenus id per aequabilem motum localem exponitur et mensuratur, et praeterea cum quantitates ejusdem tantum generis inter se conferri possint et earum incrementi et decrementi celeritates inter se, eapropter ad tempus formaliter spectatum in sequentibus haud respiciam, sed e propositis quantitatibus quae sunt ejusdem generis aliquam aequabili fluxione augeri fingam cui caetera tanquam tempori referantur adeoque cui nomen temporis analogice tribui mereatur.)*(9)

Un peu plus loin ([32a], pp. 88-91) NEWTON appelle la fluente, qui joue le rôle de variable indépendante, quantité corrélée (quantitas correlata) ; il appelle liée (relata) la quantité dépendante. Ainsi seules les notions de base sont introduites par la cinématique ; en réalité la méthode des fluxions est développée pour les fluentes, exprimées analytiquement soit sous une forme finie soit au moyen de sommes de séries infinies, ces fractions décimales de l'analyse mathématique.

---

(9) *cf. ORESME ([18], pp. 274-275) :*
... c'est pourquoi le temps ainsi défini n'est en aucune façon "multiforme" ni même vraiment "uniforme", de même que le temps ne peut être qualifié de "rapide" ou de "lent". Néanmoins on peut parler improprement de temps uniforme à partir du moment où cette durée, qui est le temps au sens où il a été défini ci-dessus, n'est pas un mouvement uniforme, c'est-à-dire régulier.
(... idcirco tempus sic dictum nullo modo est difforme nec etiam proprie uniforme, sicut etiam tempus non dicitur velox vel tardim. Verumptamen improprie tempus potest dici uniforme quoniam illa duratio que tempus est modo predicto non mensuratur proprie nisi per motum uniformen id est regularem).

Au début LEIBNIZ arrive lui aussi aux notions de base du calcul différentiel et intégral, en les développant à partir de la géométrie des courbes. Il suffit de rappeler que dès son mémoire de base sur le calcul différentiel *(Nova methodus pro maximis et minimis itemque tangentibus..., et singularis pro illis calculi genus)*, en 1684, il décrivait la différentielle (dy) d'une ordonnée d'une courbe quelconque ([33] v.p. 220) comme étant un segment dont le rapport à dx, un accroissement arbitraire de l'abscisse, est égal à celui de son ordonnée à la sous-tangente.

Le mot "fonction" apparaît pour la première fois dans les manuscrits de LEIBNIZ d'août 1673 et en particulier dans celui intitulé *La méthode inverse des tangentes ou au sujet des fonctions (Methodus tangentium inversa, seu de fonctionibus)*. Au début la détermination de sous-tangentes, sous-normales et autres segments liés à des points variables d'une courbe est traitée ici à la fois pour des courbes "géométriques" et pour des courbes "non géométriques", pour lesquelles ([34], p. 44) :

La relation entre son appliquée (ordonnée) ED et son abscisse AE est représentée par une équation connue de nous (in qua Relatio applicatae ED ad abscissam AE aequatione quadam nobis cognita explicatur).

Puis LEIBNIZ en vient à considérer le problème inverse de la détermination des ordonnées à partir d'une propriété donnée de la tangente à une courbe ou ([34], p. 47)

d'autres sortes de lignes qui, dans une figure donnée, remplissent certaines fonctions (ex aliis linearum in figura data functiones facientium generibus assumtis).

Il faudrait se rappeler que le verbe latin fungor, functus sum, fungi, signifie accomplir, exécuter, s'acquitter d'une obligation, etc...

Comme le remarque D. MAHNKE ([34], p. 47) :

LEIBNIZ n'utilise pas encore le mot fonction pour désigner la relation formelle qui relie l'ordonnée d'un point d'une courbe à son abscisse, mais, comme l'atteste le début du manuscrit, il a déjà à l'esprit le concept général de fonction qu'il désigne par le mot "relatio". Au moment où il traite du problème de l'inversion de la fonction tangente, on ne peut pas dire qu'il utilise le mot fonction dans le sens que lui donnent les mathématiciens contemporains mais plutôt dans le sens courant de fonction d'un organe dans un organisme, dans une machine. "in figura functionem facere" signifie donc par exemple : avoir un point de contact avec la courbe, être perpendiculaire à, considérer leur sous-tangente, leur sous-normale, etc..., où il faut évidemment comprendre qu'il s'agit de quelque chose qui est définie à partir d'une courbe "fonctionnant" de telle ou telle façon, par exemple le segment de tangente compris entre le point de contact et son intersection avec l'axe des abscisses.

Mais plus loin dans le même manuscrit le mot fonction prend le sens nouveau d'un terme général pour différents segments liés à une courbe donnée.

([LEIBNIZ] s'exprime plus loin dans ce manuscrit de la façon suivante : "regressus a Tangentibus aut aliis functionibus ad ordinatus" et c'est aussi dans ce sens qu'il faut comprendre l'expression "de functionibus" contenue dans le titre de ce manuscrit.)

Dans le même sens, relativement large, de la géométrie différentielle, une définition d'une fonction apparaît pour la première fois dans quelques articles de LEIBNIZ publiés en 1692 et 1694 ; là, il appelle fonction... des segments de droites c'est-à-dire obtenus par construction de droites correspondant à un point fixe et à des points d'une courbe donnée(10).

Il explique ce qu'il entend effectivement par abscisses, ordonnées, cordes, segments de tangentes et de normales coupés par des axes de coordonnées, segments de sous-tangentes et de sous-normales, etc. et dans le même sens, Jacob BERNOULLI utilise le mot fonction dans son œuvre, dans Acta Eruditorum d'octobre 1694.

Quoi qu'il en soit, une telle définition d'une fonction ne correspond à aucun contexte analytique plus large. La correspondance entre LEIBNIZ et Jean BERNOULLI (de 1694 à 1698) montre effectivement comment le manque d'un terme général pour représenter des quantités arbitraires dépendant d'une variable va bientôt amener l'usage du mot fonction dans le sens d'une expression analytique.

7. Une fonction en tant qu'expression analytique arbitraire : Jean Bernoulli (1694-1718) et Euler (1748)

Dans sa lettre du 2 septembre 1694, Bernoulli ([33], iii, p. 150) parlant à Leibniz de sa découverte du développement de n dz en série infinie

$$nz - \frac{1}{1.2}\, z\,.z.\, \frac{dn}{dz} + \frac{1}{1.2.3}\, z^3\, \frac{d\,dn}{dz^2} - \ldots$$

(que, toutefois, Leibniz connaissait), écrit :

> *par n j'entends une quantité formée d'une manière ou d'une autre à partir de [quantités] indéterminées et constantes. (per n , intelligo quantitatem quomodocunque formatam ex indeterminatis et constantibus).*

(10) Voir Leibniz : De linea ex linei numero infinitis ordinatim ductis intex se concurrentibus formata... Acta Eruditorum avril 1692 ([33] v. p. 268) : Nova calculi differentialis applicatio et usus... Acta Eruditorum juillet 1694 ([33] v.p. 306) ; Considérations qu'il y a à observer entre l'analyse ordinaire et le nouveau calcul des transcendentes, Journal des sçavants, Août 1694 ([33] v.p. 307-308). Par ex ([33], v.p. 306). "Functionem voco portionem rectae, quae, ductis ape sola puncti fixi et puncti curvae cum curvedine sua dati rectis, absciduntur".

La même année, cette découverte apparaît, exprimée dans les mêmes termes, dans un article de Bernoulli ([35], i, p. 126) dans "Acta Eruditorum". Le mot fonction n'est pas encore utilisé. Il ne figure pas non plus dans la lettre de Bernoulli du 25 août 1686 ([33] iii, p. 324) où il propose de noter

$$\overset{1}{X} \quad , \quad \overset{2}{X}$$

> *diverses quantités données d'une façon ou d'une autre par une [quantité] indéterminée x et par des constantes... [soit] de manière transcendante, soit algébriquement (quantitates diversas utcunque datas per indeterminatam x et constantes... vel algebraica, vel transcendenter).*

Jean Bernoulli utilise pour la première fois le mot fonction deux ans plus tard seulement, dans un article joint à sa lettre du 5 juillet 1698 et consacré à la solution du problème de l'isopérimètre posé par son frère Jacob : parmi toutes les courbes BFN de longueur donnée et de base BN, trouver une courbe dont les puissances quelconques des ordonnées FP engendrent les ordonnées PZ d'une (autre) courbe BZN d'aire maximale ou minimale.

En réalité Jean Bernoulli ([33], iii, pp. 506-507) généralise ce problème en supposant qu'il s'agit :

> *[de] trouver une [courbe] BFN dont les ordonnées FP élevées à une puissance donnée ou, en général, une fonction quelconque de ces ordonnées, etc.*
> *(illa [curva] BFN cujus applicatae FP ad datam potestatem elevatae seu generaliter earum quaecunque functiones etc.)*

Dans une traduction française publiée en 1706 dans les mémoires de l'Académie des sciences de Paris ([35] t1, p. 424), ce passage se trouve sous la forme suivante :

> *trouver la courbe BFN telle que, ses appliquées FP élevées à une puissance donnée, ou généralement telle que les fonctions quelconques de ces appliquées PZ, exprimées par d'autres appliquées PZ etc.*

Bernoulli n'explique pas dans quel sens il prend une fonction "quelconque" (quaecunque); malgré tout il n'aurait tout de même pas voulu dire autre chose que des expressions analytiques déjà connues à l'époque(11).

---

(11) Il semble que la première approche d'une définition générale d'une fonction en tant qu'expression "analytique" et permettant en outre à un procédé infini d'être engagé, se trouve dans la "Véritable quadrature du cercle et de l'hyperbole" (Vera circuli et hyperboles quadrature) de J. Gregory, publiée en 1667. Cet ouvrage n'étant pas disponible je décrirai la définition correspondante introduite par Gregory telle qu'elle est exposée dans l'article de M. Dehn et E. Hellinger ([36], p. 447) :

> *"nous appellons quantité x composée (compositum) d'autres quantités a, b,... si x résulte de a, b, ... par les quatre opérations élémentaires, l'extraction de racines ou par toute autre opération imaginable (quacumque alia imaginabili operatione)"*

Par ces derniers mots, Gregory voulait parler de composition de suites convergentes ; il avait lui-même introduit le terme "convergent" (convergens), en le transposant probablement à partir de l'optique, dont il s'était lui-même beaucoup occupé. Il faut remarquer que Gregory emploie le mot "terminatio" pour la limite d'une suite convergente (series convergens).

Addendum : Ayant envoyé cet article à l'éditeur, je peux maintenant ajouter le passage de l'ouvrage "Vera circuli et hyperbolae quadratura" de J. Gregory (1667) dont je suis très redevable au Dr. DT. Whiteside ([37] a, p. 9) :

Definitiones

5. *Quantitatem dicimus a quantitatibus esse compositum ; cum a quantitatum additione, subductione, multiplicatione, divisione, radicum extractione, vel quacunque llia imaginabili operatione fit alia quantitas.*
6. *Quando quantitas componitur ex quantitatum additione, subductione divisione, radicum extractione : dicimus illam componi analytice.*
7. *Quando quantitates a quantitatibus inter se commensurabilibus analytice componi possunt, dicimus illas esse inter se analyticas.*

La définition 5 correspond à la définition publiée par J. Bernoulli en 1718 (cf. § 7) ; seulement "tout autre opération imaginable" signifie plutôt pour Gregory un procédé infini général qu'il appelait notre sixième opération (nostra sexta operatio).

La définition 6 qui définit la quantité composée analytiquement (analytice), correspond, à un certain degré, à notre fonction algébrique. Il est difficile de suivre M. Baron quand elle dit ([29], p. 8) que : *"L'expression analytique a été utilisée pour la première fois par James Gregory qui définit une quantité analytique comme pouvant être obtenue par des opérations algébriques en même temps qu'avec passage à la limite"*. Le mot "analytice" est employé ici par Gregory au sens que lui donnait Viète. Comme le dit C.J. Scriba ([37] b, p. 13-14) : *"Il appelle analytique une grandeur qui peut être obtenue par un nombre fini d'opérations élémentaires"* à partir de grandeurs commensurables entre elles". (*N. du T.* Il parle des *CINQ* opérations élémentaires).

Le 29 juillet 1698, Leibniz exprime sa satisfaction de voir J. Bernoulli utiliser son terme (celui de Leibniz) "fonction" ([33], iii p. 526), après quoi les deux correspondants échangèrent quelques fois encore leurs opinions au sujet de la notation la plus adaptée pour une fonction d'une ou plusieurs variables. Tous deux étaient favorables au fait de distinguer les fonctions au moyen d'indices, non pas de la manière dont nous le faisons aujourd'hui, mais ainsi :

x^1, x^2, x ; y^1, x ; y^2 etc... ([33] iii, p. 537).

Au même endroit, Leibniz propose d'écrire dz pour le rapport dz : dx. Cette notation n'est pas restée.

Simultanément ou quelque temps avant, Leibniz introduit l'usage généralisé des mots "constante" et "variable" (12), "coordonnées" (en 1962 : [33] v, p. 268) et "paramètre" dans le sens d'une quantité ou d'un

(12) Ces deux termes vont acquérir une plus grande renommée grâce au premier traité imprimé sur le calcul différentiel écrit par l'Hospital et publié en 1696, dans lequel ([37]) les "quantités constantes" et "quantités variables" sont définies de façon précise dès le début.

segment constant arbitraire (dans un manuscrit écrit approximativement vers 1679 ([33], iii, p. 103), et, en 1692, dans un ouvrage imprimé (ibid. p. 268) etc... En dernier lieu il trouve que la terminologie introduite par Descartes ne convient pas et il la modifie. Descartes avait classé les courbes en "géométriques" et "mécaniques", excluant de manière erronée ces dernières de la géométrie comme n'étant pas susceptibles d'être étudiées par sa méthode (algébrique) : voir aussi § 5.

Au lieu de cela, Leibniz divise les fonctions et les courbes en deux classes : algébriques, celles qui peuvent être représentées par une équation d'un certain ordre ("certi gradus"), et transcendantes. Les fonctions et courbes transcendantes peuvent aussi faire l'objet d'étude et de calculs exacts, quoique de nature différente par leur représentation par des équations d'ordre indéfini ("gradus indefiniti") ou infini ([33], v, pp. 123-124 et 228 ; 1684 et 1686 respectivement), qui :

> *transcende toute équation algébrique (omnem aequationem algebraicam transcendant)* (13).

La définition de Leibniz des fonctions transcendantes comme non algébriques a été reprise dans des manuels, même encore de nos jours. Quant à la propriété intrinsèque des fonctions analytiques complexes transcendantes, elle ne sera établie qu'au milieu du 19e siècle. Néanmoins il faudra attendre vingt ans pour voir apparaître dans une publication la nouvelle définition d'une fonction. Tout ce temps, le terme fonction resta peu connu. Il est absent dans le "Mathematisches Lexicon" de Chr. Wolff, publié en 1716, dans lequel on trouve toutefois deux articles : "quantitas constans, eine unveränderliche Grösse" et "Quantitates variabiles, veränderliche Grösse". Le second article mentionne que la distinction entre les deux sortes de quantités est pour l'essentiel dans la nouvelle analyse de Leibniz ([38], colonnes 1144 et 1149-50).

L'expression d'une quantité variable au moyen d'une autre est aussi traité dans le même ouvrage, dans un autre article : "Abscissa, die Abscisse" ([38], colonnes 3-4), comme suit :

> *"Durch die Relatio der Abscisse AP zu der halben Ordinate [nous aurions préféré : "à (toute) l'ordonnée"] PM pfleget man die krummen Linien von einander zu unterscheiden".*

Quelques exemples de fonctions sont présentés dans des articles tels que "Aequatio exponentialis, eine Exponential-Gleichung" et "Aequatio indeterminata, eine undererminirte Gleichung" et encore "Aequation transcendans, eine Transcendantische Gleichung".

L'idée de relation fonctionnelle n'est même pas mentionnée dans des articles comme "Calculus differentialis, die differential-Rechnung" ou "Calculus integralis, seu sommatorius, die Integral-Rechnung". L'idée

(13) Dans le manuscrit de 1679, Leibniz ([33] iii, p. 103) appelle "analytiques" les courbes algébriques (curva analytica) ; au même endroit on trouve l'expression "courbe transcendante".

que l'analyse mathématique est une science générale des variables et de leurs fonctions, semble être due à Euler qui l'écrit dans la préface de son célèbre ouvrage : "Introductio in analysis infinitorum", achevé vers 1744 et publié en 1748 ([39]).

La première définition explicite d'une fonction comme expression analytique apparaît dans un article de J. Bernoulli : "Remarques sur ce qu'on a donné jusqu'ici de solutions des problèmes sur les isopérimètres" publié dans les mémoires de l'Académie Royale des sciences de Paris en 1718. On y trouve ([35], ii, p. 241) :

> *"Définition. On appelle fonction d'une grandeur variable une quantité composée de quelque manière que ce soit de cette grandeur variable et de constantes".*

Au même endroit, Bernoulli propose la lettre grecque φ pour la "caractéristique" d'une fonction (le terme est de Leibniz), écrivant encore l'argument sans parenthèses : $\varphi\ x$. Les parenthèses ainsi que le symbole f pour fonction sont dus à Euler qui les utilise dans son article E.45, communiqué en 1734 et publié en 1740.

Dans sa définition, Bernoulli ne donne aucune indication sur la manière de constituer des fonctions à partir de la variable indépendante. Mais à cette époque, il est évident qu'il pense en fait aux expressions analytiques des fonctions, cela étant en accord avec la tendance fondamentale dans le développement de l'analyse infinitésimale qui, conservant et même renforçant ses liens avec la géométrie, la mécanique et la physique au cours du 18e siècle, devient une discipline scientifique de plus en plus contenue elle-même dans ses propres principes.

Tous les concepts initiaux du calcul perdent graduellement leur carapace géométrique et mécanique, prennent une formulation arithmétique ou algébrique et commencent à être appréhendés comme précédant logiquement les concepts semblables des autres sciences exactes.

Le procédé qui fait de l'analyse mathématique une discipline autonome et qui au 19e siècle va tourner à une arithmétisation, fut prolongé. Tout d'abord, il asssujettit la mécanique en en faisant une partie de l'analyse mathématique : en réalité, pour Newton une fluxion d'une quantité est la vitesse de son changement ; pour Lagrange la vitesse est une dérivée de la fonction qui représente la distance en termes de temps. Du reste, Lagrange dans sa "Mécanique analytique" de 1788 déclare que la mécanique est une partie de l'analyse mathématique dont l'exposé ne requiert ni figures, ni considérations géométriques ou mécaniques en général. On assiste à une tendance similaire en ce qui concerne la relation entre l'analyse mathématique et la géométrie dont les méthodes cessent d'être appliquées non seulement pour définir, mais encore même pour illustrer les concepts de base du calcul.

Cela est authentifié par une comparaison, même la plus superficielle, entre "L'analyse des infiniment petits" de L'Hospital (publié en 1696) et les cours d'Euler et de Lagrange dans lesquels les exemples géométriques ne sont pas utilisés du tout. Bien entendu, l'intuition géométrique continue à jouer son rôle constructif, bien sûr il y a toujours des écoliers qui justifient les "théorèmes d'existence" analytiques par référence à l'évidence géométrique, et, bien entendu, la valeur éducative des analogies géométriques et mécaniques va être comprise une fois encore.

Cependant la tendance générale ne change pas, si bien que le moment venu, (quoique seulement dans la seconde moitié du 19e siècle) il devient nécessaire de définir analytiquement des notions géométriques telles que l'aire d'une surface, la longueur d'une courbe, etc., qui, auparavant semblaient être des évidences intuitives.

Le développement ultérieur essentiel du concept de fonction est l'œuvre de Leonhard Euler, l'élève de Joh. Bernoulli. Au chapitre 1 du volume 1 de son "Introductio in analysis infinitorum", en 1748 (E. 101), Euler soumet à une étude plus détaillée le concept de fonction tel qu'il était effectivement utilisé en analyse mathématique. Il commence par définir les notions initiales. Selon Euler, une constante est une quantité définie prenant toujours une seule et même valeur, tandis qu'une variable est introduite comme l'ensemble (parfois un sous-ensemble) des nombres complexes.

> *"Une quantité variable,* écrit Euler ([39], p. 17), *est une quantité indéterminée ou, si l'on veut, une quantité universelle, qui comprend toutes les valeurs déterminées".*
>
> *(Quantitas variabilis est quantitas inderminata seu universalis, quae omnes omnino valores determinatas in se complectitur).*
>
> *"Ainsi,* poursuit-il (p. 18), *une quantité variable comprend tous les nombres en elle-même, tant positifs que négatifs, les nombres entiers et fractionnaires, ceux qui sont rationnels, transcendants, irrationnels. On ne doit même pas en exclure zéro ni les nombres imaginaires".*
>
> *(Quantitas ergo variabilis in se complectitur omnes prorsus numeros, tam affirmativos quam negativos, tam integros quam fractos, tam rationales quam irrationales et transcendantes. Quin etiam cyphra et numeri imaginarii a significatu quantitatis variabilis non excluduntur).*

Dans sa définition d'une fonction, Euler suit, une fois de plus, son maître J. Bernoulli, remplaçant toutefois le mot "quantité" par "expression analytique" (ibidem) :

> *"Une fonction de quantité variable est une expression analytique composée de quelque manière que ce soit, de cette quantité et de nombres ou de quantités constantes".*
>
> *(Functio quantitatis variabilis est expressio analytica quomodocunque composita ex illa quantitate variabili et numeris seu quantitatibus constantibus.)*

particulier, les unes étant considérées comme constantes, & les autres comme variables.

2. *Une quantité variable est une quantité indéterminée, ou, si l'on veut, une quantité universelle, qui comprend toutes les valeurs déterminées.*

Une valeur déterminée quelconque pouvant être exprimée en nombre, il s'ensuit qu'une quantité variable comprend tous les nombres de quelque nature qu'ils soient. Il en est de la quantité variable, comme du genre & de l'espece à l'égard des individus ; on peut la concevoir comme embrassant toutes les quantités déterminées. Au reste, on a coutume de représenter les quantités variables par les dernieres lettres de l'Alphabet z, y, x, &c.

3. *Une quantité variable devient déterminée, lorsqu'on lui attribue une valeur déterminée quelconque.*

Elle peut donc le devenir d'une infinité de manieres, puisqu'on peut lui substituer tous les nombres imaginables. La signification d'une quantité variable ne peut être censée épuisée, qu'autant qu'on aura conçu en sa place toutes les valeurs déterminées. Ainsi une telle quantité comprend tous les nombres tant positifs que négatifs, les nombres entiers & fractionnaires, ceux qui sont rationnels, irrationnels & transcendants ; on ne doit pas même en exclure zéro, ni les nombres imaginaires.

4. *Une fonction de quantité variable est une expression analytique composée, de quelque maniere que ce soit, de cette même quantité & de nombres, ou de quantités constantes.*

Ainsi toute expression analytique, qui outre la variable z contiendra des quantités constantes, est une fonction de z. Par exemple, $a+3z$; $az-4zz$; $az+b\sqrt{aa-zz}$; c^z; &c, sont des fonctions de z.

5. *Une fonction de variable est donc aussi une quantité variable.*

En effet, comme on peut mettre à la place de la variable toutes les valeurs déterminées, la fonction recevra elle-même

une infinité de valeurs, & il est impossible d'en concevoir aucune, dont elle ne soit susceptible, puisque la variable comprend même les valeurs imaginaires. Par exemple, quoique cette fonction $\sqrt{(9-zz)}$ ne puisse donner un nombre plus grand que 3, tant qu'on mettra des nombres réels à la place de z ; cependant, en introduisant pour z des nombres imaginaires, tels que $5\sqrt{-1}$, il n'est pas possible d'assigner une valeur déterminée, qui ne puisse être déduite de la formule $\sqrt{(9-zz)}$. Au reste, il n'est pas rare de rencontrer des expressions qui ne sont que des fonctions apparentes ; car, quelque valeur qu'on donne à la variable, elles conservent toujours la même valeur, comme z^0; 1^z; $\frac{aa-az}{a-z}$. Ces expressions, sous la forme apparente de fonctions de variables, sont réellement des quantités constantes.

6. *La principale différence des fonctions consiste dans la combinaison de la variable & des quantités constantes, qui les forment.*

Elle dépend donc des opérations par lesquelles les quantités peuvent être composées & combinées entr'elles. Ces opérations sont l'Addition & la Soustraction ; la Multiplication & la Division ; l'Élévation aux Puissances & l'Extraction des Racines ; à quoi il faut ajouter encore la Résolution des Équations. Outre ces opérations, qu'on appelle algébriques, il y en a plusieurs autres qu'on nomme transcendantes : comme les exponentielles, les logarithmiques, & d'autres sans nombre, que le Calcul Intégral fait connoître.

Distinguons cependant certaines especes de fonctions ; savoir, les Multiples $2z$; $3z$; $\frac{3}{5}z$; az, &c. & les Puissances de z; comme z^2; z^3; $z^{\frac{1}{2}}$; z^{-1}; &c, quantités formées par une seule opération, & qui, comme celles qui résultent de la combinaison de plusieurs, ne laissent pas de porter de même le nom de fonctions.

7. *Les fonctions se divisent en algébriques & en transcendantes ; les premieres sont formées par des opérations algébriques*

Je vais devoir laisser de côté l'introduction par Euler des fonctions d'une variable complexe de même que celles d'une variable réelle (étape de la plus grande importance) et aussi un inconvénient formel dû au fait qu'Euler ne considère pas les constantes comme des fonctions de plein droit. Pour moi il est important qu'Euler ait été le premier à tenter de répondre à la question de savoir quelle est l'importance du terme (et son champ) : "expression analytique" ou encore quelles méthodes pour sa formation sont réellement significatives. (14).

En énumérant les opérations au moyen desquelles les expressions analytiques sont composées, Euler traite d'abord des opérations algébriques (auxquelles il ramène aussi la résolution des équations algébriques), puis il nomme diverses opérations transcendantes arrivant en particulier aux fonctions logarithmes et exponentielles et à nombre d'autres fonctions fournies par le calcul intégral, y compris l'intégration des équations différentielles.

Puis Euler caractérise les fonctions explicites et implicites, les dernières ayant pour origine la résolution d'équations, et formule des théorèmes d'existence d'une fonction inverse d'une fonction donnée et d'une fonction représentée paramétriquement (y et x étant donnés comme fonctions de z, y est une fonction de x et inversement x est une fonction de y). Dans la pratique ([39], p. 25) et à cause de l'imperfection de l'algèbre, il n'est pas toujours possible de représenter explicitement de telles fonctions :

> *"Cependant, quoi qu'il en soit, cette réciprocité des fonctions est comprise comme si toutes les équations pouvaient être résolues" (interim tamen nihilominus, quasi omnes aequationes resolvi possent, haec functionum reciprocatio perspicitur.) (15).*

Je montrerai au § 8 comment Euler classe ces dernières méthodes d'introduction des fonctions à partir de sa première définition générale d'une fonction.

Pour l'instant je remarque que la classification des fonctions d'Euler (décrite plus haut, mais, bien sûr, pas dans tous les détails) a été posée pour être utilisée entièrement.

8. Fonctions analytiques

Il semblait évidemment impossible d'énumérer les diverses méthodes pour exprimer les fonctions analytiques, si bien qu'Euler au chapitre 4 de son "Introductio" les ramène toutes à une seule, en déclarant que la forme universelle et qui, simultanément, convenait le mieux, était, pour

(14) Ce problème avait été rencontré au 17e siècle (cf. note 11) quand, à sa manière, J. Gregory avait essayé de le résoudre.

(15) Ce qui est dit ici sur les équations algébriques, tient aussi, mutatis mutandi, pour toutes les autres équations.

l'expression analytique d'une fonction, une série entière infinie de la forme :

$$A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \ldots$$

Etant, bien entendu, dans l'impossibilité de prouver que toute fonction pouvait être développée selon une telle série, il défie ([39], p. 74) :

> "... *si quelqu'un doutait, [son] doute serait supprimé par le développement lui-même de telle ou telle fonction*".
>
> *(si quis dubitet, hoc dubium per ipsam evolutionem cuiusque functionis tolletur.)*
>
> *Néanmoins, ajoute Euler, pour rendre plus large cette explication on admettra non seulement les puissances entières positives de z, mais encore toutes les puissances. Ainsi il n'y aura plus aucun doute que toute fonction de z puisse être transformée en une expression de la forme*
>
> $$Az^{\alpha} + Bz^{\beta} + Cz^{\gamma} + \ldots$$
>
> *les exposants α, β, γ, etc... désignant n'importe quels nombres.*
>
> *(Quo autem haec explicatio... denotantibus exponentibus α, β, γ, etc... numeros quoscunque.)*

Effectivement, l'écrasante majorité des fonctions utilisées à l'époque d'Euler étaient analytiques (dans notre acception de ce terme) dans leur domaine de définition tout entier, sauf peut-être pour des valeurs isolées de l'argument et, dans des cas particuliers, pouvaient avoir été développées en séries de termes contenant des puissances fractionnaires ou négatives de l'argument(16).

Il ne faut pas s'étonner que les séries entières et, dans une moindre mesure, les produits infinis et les développements en sommes de fractions partielles ou continues, soient utilisés au volume 1 de l'Introductio comme le principal instrument pour étudier les diverses classes de fonctions élémentaires.

Comme il en a été fait la remarque plus haut, les théorèmes sur l'existence de fonctions implicites ou paramétriques, selon le point de vue d'Euler, pouvaient être considérés dans le champ d'une définition générale d'une fonction. Cela, toujours selon Euler, parce qu'une équation algébrique arbitraire de degré quelconque peut se résoudre par radicaux. D'une manière plus générale, parce que chaque fonction y pouvait être représentée par une série de termes contenant des puissances de l'argument, z, cet argument pouvait être exprimé au moyen de termes en y, par "inversion" de la série ; les procédés "d'inversion" de séries avaient été introduits par Newton.

---

(16) En substance, une telle interprétation d'une représentabilité analytique est semblable à la conception de James Gregory (cf. note 11).

La définition par J. Bernoulli et Euler d'une fonction comme étant une expression analytique dont la forme la plus générale est une série entière fut acceptée par de nombreux autres mathématiciens, jusqu'à LAGRANGE qui, se référant dans sa "Théorie des fonctions analytiques" à Leibniz et Bernoulli, appelle fonction "toute expression de calcul" (17).

Au passage je remarquerai que Lagrange, comme Euler et d'autres mathématiciens du 18e siècle, considérait sans en douter que toute fonction de l'analyse mathématique pouvait être représentée par une série de termes proportionnels aux puissances réelles de la variable indépendante ; bien plus, Lagrange ([40], Pt. 1, Ch. 1) tente même de prouver que, généralement, les puissances qui interviennent sont des entiers positifs, tandis que les puissances fractionnaires ou négatives ne peuvent intervenir que seulement dans des cas correspondant à des valeurs isolées particulières de l'argument.

Ainsi une fonction, définie au début du volume 1 de l'Introductio d'Euler comme une expression analytique, est appelée, plus tard (dans notre terminologie), une fonction analytique partout sauf peut-être en des points particuliers isolés, au voisinage desquels elle peut être représentée par une série entière généralisée (voir aussi § 10).

9. Les fonctions continues et discontinues (mixtes) au sens d'Euler. La controverse au sujet des cordes vibrantes.

En réalité, seules les fonctions analytiques sont étudiées dans le volume 1 de l'Introductio. Cependant Euler savait que des fonctions d'une espèce différente existaient. Cela est l'objet d'une remarque au début du volume 2 de l'Introductio qui est consacré principalement à la théorie des courbes planes. De la même façon qu'une courbe correspond à une fonction de x, les courbes sont représentées par des fonctions de x, dit Euler, poursuivant ainsi ([41], p. 11) :

> *"A partir d'une telle idée au sujet des courbes, il s'ensuit immédiatement leur division en courbes continues et courbes discontinues ou mixtes".*
>
> *(Ex hoc linearum curvarum idea statim sequitur earum divisio in continuas et discontinuas seu mixtas).*

---

(17) Lagrange dit ([40], p. 15) :
"On appelle fonction d'une ou plusieurs quantités toute expression de calcul dans laquelle ces quantités entrent d'une manière quelconque, mêlées ou non d'autres quantités qu'on regarde comme ayant des valeurs données et invariables, tandis que les quantités de la fonction peuvent recevoir toutes les valeurs possibles. Ainsi, dans les fonctions, on ne considère que les quantités qu'on suppose variables ; sans aucun égard aux constantes qui peuvent y être mêlées."

THÉORIE DES FONCTIONS ANALYTIQUES,

CONTENANT

Les principes du Calcul différentiel, dégagés de toute considération d'infiniment petits ou d'évanouissans, de limites ou de fluxions, et réduits à l'Analyse algébrique des quantités finies.

PREMIÈRE PARTIE.

Exposition de la Théorie, avec ses principaux usages dans l'Analyse.

1. On appelle *fonction* d'une ou de plusieurs quantités, toute expression de calcul dans laquelle ces quantités entrent d'une manière quelconque, mêlées ou non avec d'autres quantités qu'on regarde comme ayant des valeurs données et invariables, tandis que les quantités de la fonction peuvent recevoir toutes les valeurs possibles. Ainsi dans les fonctions on ne considère que les quantités qu'on suppose variables, sans aucun égard aux constantes qui peuvent y être mêlées.

2. Pour marquer une fonction d'une seule variable comme x, nous ferons simplement précéder cette variable de la lettre ou caractéristique f, ou F; mais lorsqu'on voudra désigner la fonction d'une quantité déjà composée

A

2 THEORIE

de cette variable, comme x^2 ou $a + bx$ ou &c., on renfermera cette quantité entre deux parenthèses. Ainsi fx désignera une fonction de x, $f(x^2)$, $f(a + bx)$, &c. désigneront des fonctions de x^2, de $a + bx$, &c.

Pour marquer une fonction de deux variables indépendantes comme x, y, nous écrirons $f(x, y)$, et ainsi des autres.

Lorsque nous voudrons employer d'autres caractéristiques pour marquer les fonctions, nous aurons soin d'en avertir.

Le mot *fonction* a été employé par les premiers analystes pour désigner en général les puissances d'une même quantité. Depuis on a étendu la signification de ce mot à toute quantité formée d'une manière quelconque d'une autre quantité. *Leibnitz* et les *Bernoulli* l'ont employé les premiers dans cette acception générale, et il est aujourd'hui généralement adopté.

3. Considérons donc une fonction fx d'une variable quelconque x. Si à la place de x on met $x + i$, i étant une quantité quelconque indéterminée, elle deviendra $f(x + i)$; et par la théorie des séries on pourra la développer en une suite de cette forme $fx + pi + qi^2 + ri^3 + \&c.$, dans laquelle les quantités p, q, r, &c., coëfficiens des puissances de i, seront de nouvelles fonctions de x, dérivées de la fonction primitive fx, et indépendantes de la quantité i.

Il est clair que la forme des fonctions p, q, r, &c. dépendra uniquement de celle de la fonction fx; et on déterminera aisément ces fonctions dans les cas particuliers par les règles ordinaires de l'algèbre, en développant la fonction dans une série ordonnée suivant les puissances de i.

Cette terminologie, qui pour Euler revêtait une signification particulière, inusitée pour nous, fut utilisée jusqu'au moment où Bolzano (1817) et Cauchy (en 1821) attachèrent aux expressions "continu" et "discontinu" le sens généralement adopté à l'heure actuelle ; toutefois l'ancienne signification sera encore utilisée à certaines occasions.

Au sens d'Euler, continuité signifie invariabilité, immuabilité de la loi de l'équation déterminant la fonction sur tout le domaine des valeurs de la variable, alors que la discontinuité d'une fonction signifie un changement de la loi analytique, l'existence de lois différentes sur deux intervalles ou plus de son domaine. Les "courbes discontinues", explique Euler, sont composées de parties "continues" et, justement pour cette raison, appelées "mixtes ou irrégulières" (irregulares) ; aussi, appelle-t-il parfois de telles courbes "mécaniques" (mechanices). En géométrie, selon Euler, ce sont les "courbes continues" (i.e. analytiques) qui sont principalement étudiées.

Les fonctions et courbes "discontinues", ou "mixtes" du volume 2 de l'Introductio correspondent à nos fonctions analytiques par morceaux ; c'est pourquoi leur insertion dans l'analyse mathématique n'a pas apporté d'extension essentielle au concept de fonction(18).

Laissant de côté le problème de l'identification par Euler des expressions analytiques avec les fonctions analytiques (chose qu'il est, par essence, illégitime de faire), je remarque que les fonctions d'Euler, qu'elles soient continues ou discontinues (mixtes) à l'un des sens qu'il donnait à ces mots, peuvent avoir, au sens moderne, des dicontinuités en des points isolés.

Dans ses ouvrages ultérieurs, Euler, comme je le montrerai, adopte un point de vue plus large en ce qui concerne les fonctions discontinues (voir plus loin).

---

(18) Selon l'opinion exprimée récemment par Grattan-Guiness ([42], pp. 6-7) le terme eulérien de "continu" est synonyme de notre "différentiable" alors que "discontinu" correspond à notre "continu". D'autre part, A. Speiser ([42.a]) avait écrit : "Par "fonction continue" Euler, comme avant lui Leibniz, entendait une fonction spécifiée par une loi analytique, précisément comme celles que nous appelons maintenant fonctions analytiques. Elles ont la propriété d'être entièrement déterminées par une petite portion arbitraire..." Truesdell ([42b], pp. XLI-XLIII), acceptant les vues de Speiser, soutient que le contexte des équations aux dérivées partielles, dans lequel Euler introduit ses fonctions discontinues, fait comprendre qu'il considérait ces fonctions comme ne pouvant pas être différentiables seulement en des points isolés. Il écrit : *"Euler's physical universe... is piecewise smooth, still indeed "continuous" though in lesser degree than the Leibnizian."* Plus tard, Truesdell ([51], pp. 243, 247-248, 296-297, 419) apporta d'autres preuves pour montrer que, dans le contexte du problème des cordes vibrantes, Euler entendait par "fonction" (pas nécessairement continue à son sens) ce que nous pourrions appeler actuellement une fonction continue ayant une pente ou une courbure continues par morceaux. Cependant voir la note (22 a) pour l'utilisation par Euler de fonctions discontinues au sens moderne.

Toutefois, l'année même où l'Introductio fut publiée (rappelons-nous que le manuscrit fut achevé en 1744), EULER comprit que la classe des fonctions (courbes) "discontinues", loin d'être épuisée par les fonctions (courbes) "mixtes", devait être fondamentalement étendue. Comme le remarque A.I. MARKUSHEVICH ([43], pp. 108-109), EULER avait vu la nécessité d'une telle extension dès 1744, pendant ses travaux sur *"Methodus inveniendi lineas maximi minive proprietates gaudentes" (E 65),* quand il compare des courbes extrémales — solutions de problèmes de variations — avec des courbes qui diffèrent de celles-ci d'un infiniment petit au voisinage d'un ou de plusieurs points isolés.

Quoi qu'il en soit, l'élan principal pour le développement ultérieur du concept de fonction provient des travaux d'EULER sur la physique mathématique, commençant avec le célèbre problème des vibrations infiniment petites d'une corde finie, homogène, fixée à ses deux extrémités(19).

La première interprétation mathématique de ce problème, au sujet duquel les spéculations remontent à GALILEE, fut donnée par TAYLOR (en 1715), mais le premier pas décisif vers la théorie fut accompli par D'ALEMBERT dans un mémoire communiqué à l'Académie Royale des Sciences et Belles lettres de Berlin à la fin de l'année 1746 et publié dans son "Histoire" en 1749 ([45]).

D'ALEMBERT exprime les conditions de ce problème par des équations équivalentes à une équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

(forme qui apparaît explicitement dans le mémoire d'EULER E. 213 publié en 1755) et prouve que la solution générale du problème pouvait être représentée par une somme de deux fonctions arbitraires

$$y = \varphi(x+at) + \Psi(x-at),$$

qui, à cause des conditions aux limites, se réduit à

$$y = \varphi(at+x) - \varphi(at-x).$$

Dans chaque cas particulier, les fonctions apparaissant dans la solution générale sont déterminées par la forme initiale de la corde (et les vitesses initiales de ses points). Bien entendu, ces conditions initiales peuvent être diverses, mais avec fermeté, D'ALEMBERT restreint les formes

(19) L'opinion de GRATTAN-GUINESS ([42], p. 6) que la distinction faite par EULER au volume 2 de l'Introductio entre fonctions "continues" et "discontinues" est due au problème des cordes vibrantes, est plutôt douteuse. Aussi loin que je puisse le savoir, la seule correction au manuscrit de ce volume, qui était déjà entre les mains de son éditeur Suisse, M. BOUSQUET, et dont l'édition fut supervisée par J. CASTILLON, fut envoyée par EULER le 15 décembre 1744, via G. CRAMER ([44], n° 462-464). L'impression de l'Introductio, comme l'atteste une lettre de CRAMER à EULER datée du 13 août 1746 ([44] n° 467), avait commencé durant l'hiver 1746, tandis qu'en avril 1748, CASTILLON informait EULER qu'elle était achevée (ibid. n° 369).

initiales pouvant être admises pour la corde, soutenant que sans de telles restrictions, aucune solution du problème n'est possible par l'analyse mathématique. Parmi les restrictions imposées par D'ALEMBERT, l'une d'elles est particulièrement intéressante : l'hypothèse que la forme initiale de la corde est représentée par une seule et même équation sur toute son étendue, c'est à dire que la corde est "continue" au sens d'EULER.

EULER répondit bientôt au mémoire de D'ALEMBERT, dont il avait pris connaissance peu après sa communication, en présentant, le 16 mai 1748, son propre mémoire, « *De vibratione chordarum exercitatio* » *E.119, publié dans Nova Acta Eruditorum en 1749 (version française : « Sur la vibration des cordes », E.140, publié ([46], p. 50-77) par la même Acad. Roy. Berlin).*

Appréciant hautement dans son ensemble la méthode de D'ALEMBERT, il se trouve en désaccord avec lui quant à la nature des fonctions admises dans les conditions initiales (et, par conséquent, dans la solution du problème). Guidé, même dans la formulation du problème, par des considérations physiques et une profonde intuition mathématique, il écrit ([46], p. 64) :

> ... *la première vibration dépend de notre bon plaisir, puisqu'on peut, avant de lâcher la corde, lui donner une figure quelconque ; ce qui fait que le mouvement vibratoire de la même corde peut varier à l'infini, suivant qu'on donne à la corde telle ou telle figure au commencement du mouvement.*

Répétant cette affirmation dans la recherche elle-même, qui, dans sa première partie, ressemble plutôt à celle de D'ALEMBERT, EULER (p. 72) considère une

> « *courbe anguiforme, soit régulière, contenue dans une certaine équation, soit irrégulière ou mécanique* »,

c'est-à-dire sans aucune restriction imposée sur la forme de la corde. Pour un cas particulier, il fabrique une solution correspondant à la forme initiale « continue », représentée par une série trigonométrique

$$y = \alpha \sin \frac{\pi x}{l} + \beta \sin \frac{2\pi x}{l} + \gamma \sin \frac{3\pi x}{l} + \ldots, \qquad (*)$$

la corde étant fixée aux points extrémités $x = 0$ et $x = 1$

D'ALEMBERT fut en désaccord avec EULER. Ainsi commençait la longue controverse sur la nature des fonctions permises dans les conditions initiales et dans les intégrales des équations aux dérivées partielles, qui continuèrent à apparaître en nombre sans cesse croissant dans la théorie de l'élasticité, de l'hydrodynamique et en géométrie différentielle.

Bientôt la controverse prit une dimension nouvelle, avec l'entrée en scène d'un nouveau participant : D. BERNOULLI dont la contribution fut publiée en 1755. Développant le principe de superposition des modes qu'il avait introduit dans ses études antérieures, BERNOULLI maintient que la forme initiale arbitraire de la corde, ainsi que ses vibrations ultérieures, pouvaient être représentées par une série infinie de termes contenant des sinus d'angles multiples. Selon BERNOULLI, un choix judicieux des coefficients rend une telle série (de la forme (*)), aussi générale qu'une série entière ; cependant la méthode de calcul des « coefficients de FOURIER » lui restait inconnue.

EULER qui, peu avant, avait donné, dans un cas particulier, une solution de la forme (*), exclut toute possibilité de représenter sous une telle forme des fonctions "mixtes" arbitraires ou des classes étendues de fonctions, par exemple les fonctions algébriques. (Voir ses *Remarques sur les mémoires précédents de M. Bernoulli (E.213), publié en 1755 ; Éclaircissements sur le mouvement des cordes vibrantes (E.317), publié en 1760 ; sur le mouvement d'une corde qui, au commencement n'a été ébranlée que dans une partie (E.339), publié en 1767 ([46], p. 237, 385, 430, 431)*[20].

D'ALEMBERT rejeta aussi la solution de D. BERNOULLI. Néanmoins la controverse ne prit pas fin. Elle fut reprise par LAGRANGE (en 1759-1762) et, quelque temps plus tard, par d'autres mathématiciens en vue (MONGE, LAPLACE, ARBOGAST, FOURIER et d'autres).

Cette controverse, dont TRUESDELL ([51]) présente une histoire très détaillée, jusqu'en 1788, fut d'une très grande importance à la fois pour les progrès de la physique mathématique et pour le développement méthodologique des fondements de l'analyse mathématique. Pour ce qui

---

(20) EULER suppose qu'une fonction « continue » sur un intervalle est définie par une expression et une seule sur tous intervalles (comme il sera dit plus bas). Ainsi, selon EULER, une somme impaire, périodique d'une série de sinus ne peut représenter ni une fonction algébrique, ni, en règle générale, de fonctions transcendantes. Plus tard, dans son mémoire *Disquisitio ulterior super seriebus secundum multiplae cuisdam anguli progredientibus* (E.704), envoyé à l'Académie des sciences de Petersbourg le 29 mai (9 juin) 1777 et publié après sa mort, en 1798 ([47], p. 333-355), EULER déduit les formules pour les « coefficients de FOURIER » sur l'intervalle $[0, \pi]$.

Toutefois il ne prit plus part à la controverse sur la représentabilité des fonctions par des séries trigonométriques.

Un peu auparavant (en 1772, cf. [48]), D. BERNOULLI, partant d'un autre raisonnement, développe la fonction

$$y = \frac{\pi}{2} - \frac{x}{2} \qquad (**)$$

en série de sinus, remarquant très justement que le développement est valable dans l'intervalle $[0, 2\pi]$, et décrivant presque exactement le comportement de la série aux bornes et au-delà de cet intervalle. Il considère aussi quelques exemples supplémentaires.

Il est remarquable que le même développement des fonctions de la forme (**) était connu d'EULER qui, malgré la contradiction existant dans sa propre opinion, l'a inclus à la fois et dans ses « Institutiones calculi differentialis » (E.212), publiés en 1755 ([50], pt. 2, § 92), sans mentionner que le développement est valable seulement pour $0 < x < 2\pi$. Ce n'est pas le seul cas où EULER connaissait des exemples qui n'étaient pas conformes à sa conception mais qu'il se permettait de considérer comme des exceptions de peu d'importance à la règle générale.

concerne mon sujet, il est fondamental que, dès le tout début de son étude du problème des cordes vibrantes, EULER établisse la thèse que dans sa solution, les courbes de forme arbitraire pouvaient être admises, c'est-à-dire des courbes qui n'appartiennent pas à la classe des fonctions « mixtes » et généralement (dans l'opinion d'EULER) ne se conforment à aucune loi analytique.

EULER développe, avec plus de détails, ses vues sur le sujet dans son *De usu fonctionum discontinuarum in analysi* (E.322) envoyé à l'académie de Petersbourg au printemps 1763 et publié en 1767 ([52], p. 74-91). Dans ce mémoire, les fonctions «continues» sont définies, en termes d'images géométriques, en supposant non seulement que la relation entre les coordonnées de tous les points d'une telle courbe est déterminée par une seule et même loi ou équation, mais aussi que (p. 75-76) :

> « *Toutes les parties de la courbe [continue] sont attachées ensemble par le lien le plus étroit afin de rendre impossible tout changement en elles sans déranger le lien de continuité* ».
>
> *(omne curvae partes ita vinculo arctissimo inter se cohaerent, ut nulla in illis mutatio salvo continuitatis nexu locum invenire possit.)*

EULER souligne que ce dont il parle, ce n'est pas de la contiguïté ou continuité de la direction ou allure de la courbe, (*) mais exclusivement de l'unicité de la loi analytique correspondante. Ainsi les deux branches conjuguées d'une hyperbole constituent une courbe « continue ». Cette propriété essentielle des lignes « continues » qui, pour EULER, provenait directement de sa conception de la « continuité », pouvait s'exprimer autrement : toute petite partie d'une ligne (fonction) « continue » détermine cette ligne de manière unique comme un tout (cf. note (18)).

Il y a longtemps, I.YU. TIMCHENKO ([53], p. 482) remarquait :

> « dans la mesure où EULER identifie les expressions analytiques avec les fonctions qui peuvent être représentées par des séries de TAYLOR, la propriété de « continuité » correspond à la propriété d'unicité des fonctions analytiques au sens de WEIERSTRASS »(21).

Quant aux courbes discontinues, EULER les définit comme (étant) :

> « *toutes les courbes qui ne sont déterminées par aucune équation définie, de sorte que l'on a coutume de tracer par un mouvement libre de la main* ».
>
> *(omnes enim lineae curvae per nullam certam aequationem determinatae, cuiusmodi libero manus tractu delineari solent.)*

(*) (Continuitas tractu.)

(21) L'unicité du développement d'une fonction (d'une variable réelle) en série de Taylor avec l'hypothèse qu'une telle série existe, avait été établie par C. MAC LAURIN ([54], vol. 2 p. 610-611).

Encore une fois, cette « discontinuité » ne s'applique pas à l'allure de la courbe ; « discontinue » désigne aussi des courbes, même si elles se prolongent de façon continue (etiamsi continuo procedant), au sens de la « contiguïté ». Si nous ne tenons pas compte du fait empirique que les figures géométriques idéales ne peuvent pas être tracées, les fonctions « discontinues » correspondent ainsi à notre appellation arbitraire de fonctions continues par morceaux ayant des dérivées du premier et du second ordre continues par morceaux (cf. [51], p. 247)(22). Sans cette dernière condition, impliquée par la description géométrique, quoique non formulée explicitement, la « discontinuité » devient absolument arbitraire, de sorte qu'aucune partie d'une courbe « discontinue » n'a besoin d'être « continue », c'est-à-dire représentable analytiquement, et ainsi, selon EULER, analytique.

L'ampleur de la nouvelle conception d'EULER est confirmée par le fait qu'immédiatement après avoir donné une description de la classe entière des courbes « discontinues » ou « mécaniques », il mentionne (ibidem) qu'à cette classe

> *« pouvaient être attribuées aussi les lignes habituellement appelées mixtes ». (Atque huc etiam referri convenit lineas vulgo mixtas vocatas.)*

comme, par exemple, le périmètre d'un polygone (exemple considéré à de nombreuses reprises pendant la controverse au sujet des cordes vibrantes), etc.

Dans la partie suivante de son mémoire, EULER étudie le rôle des différentes espèces de fonctions en mathématique. Les fonctions « continues » sont étudiées dans les branches traditionnelles, tant de l'analyse que de la géométrie supérieure, le cas étant quelque peu différent pour le calcul intégral, découvert récemment et encore peu développé, et l'intégration d'équations contenant des différentielles de fonctions de deux ou plusieurs variables.

De même que les quantités constantes apparaissent dans les intégrales des équations différentielles habituelles, les solutions de cette espèce essentiellement nouvelle d'équations contiennent des fonctions « discontinues » absolument indéfinies et dépendant de notre volonté (ab arbitrio nostro) ([52], p. 86). EULER supposait que cela constituait exactement le principal aspect (et la principale puissance) de l'intégration des équations aux dérivées partielles, qui présente une sphère très étendue pour la recherche ultérieure. Quelque temps après, EULER consacre presque entièrement le volume 3 de ses « Institutiones calculi integralis » (E.385), publié en 1770, aux équations aux dérivées partielles, insistant vigoureusement, une fois encore, sur l'utilité des fonctions « discontinues » ([55], § 37 et 299).

(22) Dans le problème des cordes vibrantes, on suppose aussi la continuité de la corde sur tout l'intervalle de vibration.

10. La définition générale d'une fonction par EULER

Depuis que, selon EULER, les fonctions « discontinues » ne peuvent être représentées analytiquement, la définition d'une fonction donnée au volume 1 de l'Introductio et quelque peu modifiée au volume 2, était devenue trop restrictive. Si bien que, pour formuler une autre définition comprenant toutes les classes connues de relations, EULER se tourne vers une notion qui était toujours présente quoique non exprimée explicitement dans aucune méthode pour introduire des fonctions : la notion générale de correspondance entre des paires d'éléments, chacun d'eux appartenant à son propre ensemble de valeurs des quantités variables. Cette notion, qui ne fait intervenir aucune expression analytique, avait été utilisée plus d'une fois dans des raisonnements contenus implicitement dans le volume 1 de l'Introductio spécialement aux chapitres 2 et 3, dont le premier commence par la phrase suivante ([39], p. 32) :

> *« On change la forme des fonctions en introduisant une nouvelle variable à la place de la première, ou en conservant la même. »*
>
> *(Functiones in alias formas transmutantur vel loco quantitatis variabilis aliam introducendo vel eamdem quantitatem variabilem retinendo.)*

Des exemples donnés dans le même passage illustrent comment une seule et même quantité variable peut être représentée sous diverses formes.

Ainsi, une fonction de z, $u = 2 - 3z + zz$ *est la même que* $u = (1 - z)(2 - z)$, et $v = a^4 - 4a^3z + 6a^2z^2 - 4az^3 + z^4$ est transformée en une fonction beaucoup plus simple de y, à savoir $v = y^4$, par une substitution de la forme $y = a - z$, tandis qu'une fonction irrationnelle de z,

$$w = \sqrt{a^2 + z^2}$$

devient une fonction rationnelle de y

$$w = \frac{a^2 + y^2}{2y}$$

après la substitution

$$z = \frac{a^2 - y^2}{2y}$$

Il est évident que deux (ou plus) expressions analytiques possèdent une propriété commune, c'est-à-dire qu'elles établissent sous différentes formes la même correspondance entre deux ensembles de valeurs numériques de la variable z et la fonction correspondante u, v ou w.

A présent il devient nécessaire de donner cette idée « relationnelle » sous une forme aussi universelle et aussi abstraite que possible ; et c'est exactement ce que fait EULER en formulant sa nouvelle définition d'une fonction dans la préface de ses « Institutiones calculi differentialis », publiés en 1755 ([50], p. 4) :

> « *Si certaines quantités dépendent d'autres quantités de telle manière que si les autres changent, ces quantités changent aussi, alors on a l'habitude de nommer ces quantités fonctions de ces dernières ; cette dénomination a la plus grande étendue et contient en elle-même toutes les manières par lesquelles une quantité peut être déterminée par d'autres. Si, par conséquent, x désigne une quantité variable, alors toutes les autres quantités qui dépendent de x de n'importe quelle manière, ou qui sont déterminées par x, sont appelées fonctions de x.* »
>
> *(Quae autem quantitates hoc modo ab aliis pendent, ut his mutatis etiam ispsae mutationes subeant, eae harum functiones appellari solent ; quae denominatio latissime potet atque omnes modos quibus una quantitas per alias determinari potest, in se complectitur. Si igitur x denotet quantitatem variabilem, omnes quantitates, quae utcunque ab x pendent seu per eam determinantur, eius functiones vocantur.)*

Néanmoins, dans l'ouvrage lui-même, consacré au calcul différentiel, seules sont considérées les fonctions analytiques, état de fait qui permet à EULER de se passer de l'utilisation explicite du concept de limite d'une fonction (mentionné une seule fois dans la préface), en s'appuyant lui-même sur un curieux « calcul de zéros » ([56]).

Le concept eulérien de fonction exerça une influence très positive sur tout le développement ultérieur des mathématiques. Tout d'abord, il y eut le fait, d'une importance considérable, d'isoler la classe des fonctions « continues », i.e. des fonctions analytiques pouvant être représentées par des séries entières, et la découverte des principales propriétés particulières à cette classe dont jusqu'à présent je n'ai mentionné que l'unicité (caractéristique, comme cela fut découvert seulement au vingtième siècle, de la classe plus générale des fonctions quasi-analytiques).

A côté de cette propriété, EULER (ainsi que, dans une certaine mesure, D'ALEMBERT) détermine d'autres propriétés fondamentales des fonctions analytiques. Il montre ainsi (en 1755, publié en 1778) que les fonctions analytiques projettent de manière conforme une sphère sur un plan, en conservant la similarité des figures infiniment petites ; l'expression elle-même est due à F. SCHUBERT (« projectio conformis ») qui l'utilisa en 1789, après la mort d'EULER. Euler fut le premier à utiliser des quantités complexes dans les calculs d'intégrales définies et, en relation avec cela, déduisit (en 1777, publié en 1797), par des considérations analytiques générales, les équations appelées équations de CAUCHY-RIEMANN, que D'ALEMBERT avait obtenues en 1752, au cours de ses recherches sur l'hydrodynamique. Ainsi la théorie générale des fonctions analytiques du dix-neuvième siècle, avec ses trois directions développées par CAUCHY, RIEMANN et WEIERSTRASS, prend ses racines dans les travaux d'EULER et D'ALEMBERT.

L'introduction des fonctions « discontinues » arbitraires et l'étude de nombreux problèmes concernant les relations entre les propriétés intrinsèques de l'une ou l'autre des classes de fonctions d'une variable réelle et la nature des outils mathématiques utilisés pour représenter ces fonctions, ne furent pas moins importantes pour le développement ultérieur de l'analyse mathématique.

En dépit de l'opposition persistante et prolongée de D'ALEMBERT qui parfois signale des détails effectivement faibles ou insuffisamment fondés dans la conception d'EULER (les difficultés particulières furent liées au problème de la discontinuité, à notre sens du terme, de la pente et de la courbure de la corde dans sa forme initiale), cette conception se propage graduellement et de plus en plus largement. Le premier à apparaître favorable à EULER est LAGRANGE (en 1759-1762) dans ses travaux sur la propagation du son et sur les cordes vibrantes ; et, bien que « retournant sa veste » pour quelque temps du côté de D'ALEMBERT, il revient (en 1788) à sa position antérieure.

Sous certaines réserves et en y apportant certaines précisions, le point de vue d'EULER est adopté plus tard par de nombreux autres mathématiciens parmi lesquels G. MONGE, P.-S. LAPLACE, M.-J. CONDORCET et L. ARBOGAST. D'ALEMBERT lui-même, dans les dernières années de sa vie, change d'avis et admet dans les solutions des équations aux dérivées partielles d'ordre quelconque, des fonctions « discontinues » dont les dérivées jusqu'au même ordre ne font aucun « saut » (« Sur les fonctions discontinues », 1780). En réalité, D'ALEMBERT utilisait le concept de dérivation à gauche et de dérivation à droite en un point ([57]).

Il faut, en liaison avec ce qui précède, remarquer que ces discussions révèlent le besoin d'une séparation plus nette entre fonctions continues et fonctions discontinues (à notre sens), comme cela fut fait effectivement par L. ARBOGAST dans un ouvrage ([58]) concernant la nature des fonctions arbitraires qu'il faut admettre en résolvant les équations aux dérivées partielles et auquel l'Académie des Sciences de Petersbourg accorda, en 1790, le prix pour son concours de 1787.

ARBOGAST pense qu'il est possible (excepté dans le problème des cordes vibrantes où la continuité de la courbe est conditionnée par sa nature même) d'utiliser non seulement des fonctions ayant des dérivées discontinues, mais encore des fonctions discontinues en des points isolés(22a); il appelle celles-ci ([58], p. 11) «fonctions discontiguës» :

> « *parce que toutes leurs parties ne tiennent pas ou ne sont pas contiguës les unes aux autres.* »

Cependant ARBOGAST ne donne aucune définition de la continuité (ou discontinuité). Les mathématiciens du dix-huitième siècle ne ressentaient pas le besoin d'une telle définition ; lorsque cela s'avérait nécessaire, ils exprimaient verbalement la propriété importante de continuité.

Ainsi, par exemple, expliquant les méthodes du calcul approché des intégrales définies, au volume 1 de ses « Institutiones calculi integralis » (E.342), publiés en 1768, EULER écrit ([59], § 297 et 300) que le calcul de $\int Xdx$ sera d'autant plus précis que seront petits les accroissements supposés de la variable indépendante x, pourvu que les accroissements de l'intégrant X soient également petits. C'est aussi verbalement qu'EULER décrit (§ 304) le comportement d'une fonction discontinue $X = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ au voisinage du point $x = 1$, remarquant que tout accroissement petit de x donne lieu à un changement extrêmement grand de la fonction X, mais il n'utilise pas le terme de « continuité »(23).

(22a) Au moment de mettre ce papier sous presse, C. TRUESDELL attire mon attention sur le papier d'EULER (E.340) : *Éclaircissements plus détaillés sur la génération et la propagation du son et sur la formation de l'écho* (Opéra omnia, ser. III, vol. I, ed. E. BERNOULLI, R. BERNOULLI, F. RUDIO, A. SPEISER, 1926). Dans ce papier qui fut présenté à l'Académie de Berlin les 19 et 26 septembre 1765 et publié en 1767, EULER considère l'équation d'onde dans le contexte des turbulences aériennes. Là, au contraire du problème des cordes vibrantes, le problème physique ne requiert pas de solutions continues au sens moderne. Pour étudier les solutions de l'équation fonctionnelle, qu'EULER considère comme équivalente ou pouvant peut-être être remplacée par une équation aux dérivées partielles, il introduit des fonctions qui prennent la valeur 0 en tous points sauf un. Il remarque que ces fonctions forment ce qu'on appelle maintenant une base (non dénombrable) pour l'ensemble de toutes les fonctions; l'utilisation de celles-ci comme valeurs initiales pour une fonction d'onde rend possible la description concise et en termes géométriques de toute la théorie de la propagation et de la réflexion des ondes planes. Il est intéressant de remarquer aussi qu'EULER effectue ces résolutions à l'aide de diagrammes dans lesquels les fonctions des vibrations sont représentées. Cette question est expliquée en détail par TRUESDELL ([42b], p. LXI-LXII).

(23) Il faut remarquer que, dans le cas considéré, EULER interprète essentiellement l'intégrale définie comme étant la limite de la somme $\sum X(x_k) \triangle x_k$; il suppose lui-même ([59], § 902) que l'intégration peut être effectuée avec autant de précision que nécessaire, ajoutant toutefois qu'une exactitude absolue ne saurait être obtenue que si tous les $\triangle x_k$ sont infiniment petits, i.e. égaux à zéro.

Une telle conception d'une intégrale définie, ayant pris naissance avec LEIBNIZ et une formulation nouvelle avec CAUCHY, diffère de la définition de base adoptée par EULER et ses contemporains, selon lesquels l'intégrale est comprise comme étant une fonction dont la différentielle est égale à Xdx, l'intégrale définie étant égale à la différence entre les valeurs de la fonction primitive (le terme est de LAGRANGE) aux limites supérieure et inférieure de l'intégration.

Les discontinuités dans les dérivées des solutions des équations aux dérivées partielles présentent de grandes difficultés qu'il ne s'avère possible de surmonter qu'au plus haut niveau de l'analyse mathématique, tel qu'il fut atteint dans la seconde moitié du dix-neuvième siècle (cf. [51], p. 286-297). A notre époque un développement extrêmement large et très important de ce problème s'est effectué à partir de l'analyse fonctionnelle. Je veux parler ici de la théorie des solutions généralisées des équations aux dérivées partielles (en particulier de l'équation d'onde), qui s'est développée principalement entre les mains de S.-L. SOBOLEV (1936) et L. SCHWARTZ (1945). Ces fonctions généralisées (SOBOLEV) ou distributions (SCHWARTZ) sont des fonctionnelles linéaires qui ne nécessitent pas d'être différentiables au sens usuel du terme mais qui ont des dérivées généralisées.

De même que la théorie moderne des sommations des séries montre que les vues d'EULER sur l'importance et l'utilisation des séries divergentes étaient, pour l'essentiel, correctes, de même la théorie des fonctions généralisées illustre-t-elle de manière frappante l'intuition profonde et la perspicacité d'EULER en ce qui concerne les fonctions discontinues.

Néanmoins, l'état général de l'analyse mathématique au dix-huitième siècle ne permet en aucun cas à EULER, ni d'établir ses idées de manière précise (du point de vue des générations suivantes), ni de formuler des définitions exactes, ni même de lui éviter des erreurs dont certaines furent remarquées par ses jeunes contemporains eux-mêmes.

11. La critique du concept de fonction « mixte ». CHARLES (1780) et FOURIER (1807-1821)

La première des idées d'EULER à être critiquée est celle d'avoir isolé la classe des « fonctions mixtes ». Peu après sa mort, on montre que les fonctions qui sont introduites par des expressions analytiques différentes dans des régions différentes d'un intervalle fini (ou, parfois, infini) peuvent être aussi représentées par une seule et même équation. Le premier exemple de telles fonctions est donné par J. CHARLES dans son : « *Fragment sur les fonctions discontinues* », en 1780 ([60]).

C'est CAUCHY lui-même qui, beaucoup plus tard, considère que cela vaut la peine de consacrer un papier expressément à ce problème : « *Mémoire sur les fonctions continues* » ([61]), publié en 1844. Son exemple, très simple, est la fonction

$$y = \begin{cases} x, & x \geqslant 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

qui est ainsi « discontinue » mais peut, en même temps, être représentée par la seule équation

$$y = \sqrt{x^2} \quad \text{pour chaque} \quad -\infty < x < +\infty$$

et, de la sorte, est « continue ». Ainsi la discrimination entre les fonctions « continues » et les fonctions « mixtes » s'avère-t-elle d'elle-même intenable.

Cependant la critique de cette même notion dans le cadre de la théorie des séries trigonométriques fut beaucoup plus importante. Comme nous l'avons vu (cf. § 9), EULER, dans deux de ses mémoires (E.317 et E.339), refuse catégoriquement qu'il soit possible de représenter la forme initiale de la corde comme étant définie sur deux parties d'un intervalle fini donné par deux équations différentes, par une série de termes contenant des sinus d'arcs multiples.

Au début du dix-neuvième siècle, FOURIER réfute cette assertion dans ses travaux sur la théorie de la propagation de la chaleur, ce qui donne aussi naissance à la théorie générale des séries trigonométriques. En 1805, dans un fragment récemment publié par I. GRATTAN-GUINESS ([62], p. 183), FOURIER écrit même :

« *Il résulte de mes recherches sur cet objet que les fonctions arbitraires même discontinues peuvent toujours être représentées par les développements en sinus ou cosinus d'arcs multiples, et que les intégrales [des équations aux dérivées partielles] qui contiennent ces développements sont précisément aussi générales que celles où entrent les fonctions arbitraires d'arcs multiples. Conclusion que le célèbre EULER a toujours repoussée.* »

FOURIER poursuit en présentant quelques exemples illustrés de graphiques. Il développe son raisonnement de façon plus détaillée dans sa « Théorie de la propagation de la chaleur dans les solides », envoyée à l'Institut de France le 21 décembre 1807, mais qui ne fut publié que récemment, à nouveau par GRATTAN-GUINESS (voir [62]), et par la suite dans sa « Théorie analytique de la chaleur » en 1822 ([63]).

Les conclusions auxquelles parvient FOURIER en 1807 surprennent les mathématiciens de l'ancienne génération et LAGRANGE, pour sa part, s'en méfie ; d'un autre côté, après 1822, elles reçoivent un accueil enthousiaste de la part des jeunes mathématiciens.

Remontant aux traditions du dix-huitième siècle, FOURIER lui-même suppose qu'une série trigonométrique peut être utilisée pour représenter toute fonction « mixte », et n'offre aucune analyse satisfaisante du problème de représenter des fonctions par de telles séries. Néanmoins, ce problème une fois posé, il devient dans les années suivantes le sujet d'études particulières fondées sur la nouvelle conception générale du calcul, dont les éléments ont été systématiquement développés par CAUCHY dans son *Cours d'analyse... 1re partie : analyse algébrique, 1821 ([64]) et Résumé des leçons... sur le calcul infinitésimal, 1823 ([65]).*

Les coefficients de la série de FOURIER d'une fonction quelconque donnée $f(x)$ étant égaux aux intégrales des produits $f(x) \cos nx$ et $f(x) \sin nx$, la classe de telles séries s'élargit graduellement au fur et à mesure que des définitions de plus en plus générales de l'intégrale sont formulées. De même, les concepts de convergence et de sommations de séries acquièrent progressivement un contenu nouveau.

12. Une digression : La représentation analytique des fonctions.

Ici nous n'entrerons pas dans les détails des nombreuses recherches consacrées aux conditions suffisantes pour représenter des fonctions par des séries de FOURIER. Je mentionnerai que, d'après les conditions présentées par P. LEJEUNE-DIRICHLET en 1829-1837 ([66]), il s'ensuit que toute fonction bornée, si elle est considérée comme continue et monotone par morceaux sur un intervalle donné, peut être développée en une série de FOURIER qui converge vers cette fonction. Cela signifie qu'une courbe arbitraire tracée sur un intervalle donné par un mouvement libre de la main (i.e. toute fonction arbitraire "discontinue" au sens d'EULER, et bornée) peut être représentée par une unique loi analytique, la changeant ainsi en une courbe "continue". Bien entendu, toute fonction continue sur un intervalle donné ne peut pas toujours être représentée par sa série de FOURIER qui, sur cet intervalle, peut diverger en une infinité de points.

Qu'une fonction donnée puisse être représentée analytiquement ou non dépend des formes d'expressions analytiques admises. Au volume 1 de l'Introductio, EULER déclare que la forme la plus générale d'une expression analytique est une série entière engendrée par un nombre "dénombrable" (un terme moderne) d'additions et de multiplications de la variable x et un ensemble dénombrable de constantes, un procédé de passage à la limite étant autorisé(24).

Plus tard, EULER exprime de façon catégorique sa certitude que ses fonctions "discontinues" ne sont pas, généralement parlant, analytiques, expliquant en outre (par exemple dans *Eclaircissements sur le mouvement des cordes vibrantes E. 317 ([46], p. 385)* que :

> *"on regarderait fort mal à propos toutes les courbes comme renfermées dans cette équation parabolique*
>
> $$y = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \dots$$
>
> *quoiqu'on puisse faire passer cette courbe par une infinité de points donnés".*

Et il avait raison : CAUCHY prouva que même une fonction infiniment différentiable en un point donné pouvait ne pas être analytique en ce point. Son exemple,

$$F(x) = \begin{cases} \exp(-1/x^2), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

publié en 1823 dans *Résumé des leçons...sur le calcul infinitésimal* ([65]), est devenu classique(25).

---

(24). Comme cela a été mis en évidence plus haut (cf. note (11)), une telle construction fait appel aux idées de J. GREGORY.

(25). Cette fonction peut être écrite par une seule et même expression analytique, à savoir par une somme de séries partout convergentes de fonctions exponentielles de forme particulière.

Du reste, comme l'a montré A. PRINGSHEIM (en 1893), il y a une infinité de fonctions différentiables qui ne sont analytiques sur aucun intervalle.

Si le champ des expressions algébriques s'étend, le domaine des fonctions pouvant être représentées analytiquement s'élargit de manière très extraordinaire. Ainsi WEIERSTRASS montre-t-il que toute fonction continue sur un intervalle fermé peut être représentée sur cet intervalle par une somme de séries uniformément convergentes de polynomes entiers (publication de 1885). Bien plus, même des fonctions discontinues de nature très complexe, dont la classification a été développée par R. BAIRE (en 1898-99), peuvent être représentées par des sommes de séries convergentes et des séries multiples de polynomes. H. LEBESGUE appelle représentable analytiquement toute fonction qui peut être construite par un ensemble dénombrable d'additions, de multiplications et de passages à la limite appliqués selon une loi définie en ce qui concerne la variable indépendante et un ensemble dénombrable de quantités constantes.

La classification de BAIRE (telle qu'elle fut établie en 1905 par LEBESGUE) embrasse toutes les fonctions de ce type, qui sont mesurables au sens de E. BOREL. Cette loi de construction, LEBESGUE l'appelle *une expression analytique* (cf. [10]).

13. La définition générale d'EULER est reconnue : Condorcet (1778), Lacroix (1797), Fourier (1821), Lobatchevski (1834), Dirichlet (1837).

Ainsi la division entre fonctions "continues" et "discontinues" (y compris les fonctions "mixtes"), ne parvient pas à garder sa place en mathématique(26) ; d'autre part la définition générale d'une fonction due à EULER (cf. §10) est progressivement et de plus en plus largement reconnue et utilisée. Il semble que le premier à évaluer correctement l'importance de cette nouvelle définition soit CONDORCET, qui développe la conception d'EULER dans un "traité du calcul intégral", non publié, dont un manuscrit inachevé, transmis à l'Académie des Sciences de Paris en 1778-1782, est conservé, complet et avec les épreuves, à la librairie de l'Institut de France(27).

(26) Je laisse de côté la fonction $y = (-1)^x$ considérée en 1727-1728 dans la correspondance d'EULER et de J. BERNOULLI ([44], N° 190-192) et, également, au Vol. 2 de l'Introductio d'EULER ([41], §517).

Cette fonction qui est exprimée par une équation et, de ce fait, est "continue" au sens eulérien, ne prend de valeurs réelles que pour des valeurs de x telles qu'elles soient des fractions irréductibles avec des dénominateurs impairs. Au Vol. 2 de l'Introductio, EULER montre que cette fonction, qu'il appelle paradoxale, est représentée, comme nous le dirions maintenant, par deux ensembles partout denses de points isolés appartenant aux deux droites $y = 1$ et $y = -1$.

(27) Ne pas confondre avec un livre antérieur de Condorcet qui porte le même titre (Paris 1765).

ENCYCLOPÉDIE MÉTHODIQUE.

MATHÉMATIQUES,

Par MM. D'ALEMBERT, *l'Abbé* BOSSUT, DE LA LANDE, *le Marquis de* CONDORCET, CHARLES, &c.

M. DCC. LXXXV.

AVEC APPROBATION, ET PRIVILÈGE DU ROI.

FONCTION, f. f. (*Analyse.*) Les anciens géomètres, ou plutôt les anciens analystes ont appellé *fonctions* d'une quantité quelconque x les différentes *puissances* de cette quantité (*voy.* PUISSANCE); mais aujourd'hui on appelle *fonction* de x, ou en général d'une quantité quelconque, une quantité composée de tant de termes qu'on voudra & dans laquelle x se trouve d'une manière quelconque, mêlée, ou non, avec des constantes; ainsi, $x^3 + x^2$, $\sqrt{aa + xx}$, $\sqrt{\frac{aa + x^2}{bb + x^4}}$, $\int dx \sqrt{a^2 - x^2}$, &c. sont des fonctions de x.

De même $x^2 y + a y^3$, &c. est une fonction de x & de y, ainsi des autres.

Tous les termes d'une *fonction* de x sont censés avoir la même *dimension*; quand ils ne l'ont pas, c'est qu'il y a une constante sousentendue qu'on prend pour l'unité: ainsi, dans $x^3 + x^2$, on doit regarder x^2 comme égale à $a x^2$, a étant l'unité.

Quand la *fonction* n'est ni fraction ni radical, sa dimension est égale à celle d'un de ses termes. Ainsi, la *fonction* $x^3 + x^2$ est de trois dimensions.

Quand la *fonction* est une fraction, la dimension est égale à celle du numérateur moins celle du dénominateur. Ainsi, $\frac{a^3 + x^3}{a^2 + x^2}$ est de dimension 1, $\frac{a^2 + x^2}{a^3 + x^3}$ est de dimension -1, & $\frac{aa + xx}{aa - xx}$ est de *dimension nulle*. *V.* TAUTOCHRONE & INTÉGRAL.

Quand la *fonction* est radicale, sa dimension est égale à celle de la quantité qui est sous le signe, divisée par l'exposant du radical; ainsi, $\sqrt{aa + xx}$ est d'une dimension, $x \sqrt{aa + xx}$ & $\int dx \sqrt[3]{aa + x^2}$ sont de $1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$ dimensions, &c. & ainsi des autres.

Fonction homogène est une *fonction* de deux ou plusieurs variables, x, y, &c. dans laquelle la somme des dimensions de x, y, &c. est la même.

Ainsi, $x^2 y + a x^3 + b y^3$ est une *fonction* homogène; il en est de même de $\sqrt{\left(axx + \frac{b y^3}{x} + \frac{c x^4}{xx + yy}\right)}$, &c. *V.* HOMOGÈNE & INTÉGRAL.

Fonctions semblables sont celles dans lesquelles les variables & les constantes entrent de la même manière; ainsi, $aa + xx$ & $AA + XX$ sont des *fonctions* semblables des constantes a, A, & des variables x, X. (*O*)

Selon les prévisions de son auteur, ce livre aurait dû avoir cinq parties; deux seulement ont été effectivement écrites. La première de ces parties intitulée *"des fonctions analytiques"* s'ouvre sur une explication de ce qu'on entend par fonction analytique (voir [67], p. 134) :

> *"Je suppose que j'aie un certain nombre de quantités* $x,y,z,...,$ *F, et que pour chaque valeur déterminée de* $x,y,z,...$ *etc, F ait une ou plusieurs valeurs déterminées qui y répondent : je dis que F est une fonction de* $x,y,z,...$*"*

Donnant quelques exemples de fonctions implicites ou explicites introduites au moyen d'équations, CONDORCET poursuit :

> *"Enfin je sais que lorsque* x,y,z *seront déterminées, F le sera aussi, quand même je ne connaîtrais ni la manière d'exprimer F en* $x,y,z,$ *ni la forme de l'équation entre F et* x,y,z *; je saurai que F est fonction de* x,y,z*"*.

Finalement il distingue trois sortes de fonctions :

(1) les fonctions dont la forme est connue (nous dirions fonctions explicites) ;

(2) les fonctions introduites par des équations non résolues entre F et x,y,z (fonctions implicites) ;

(3) les fonctions données seulement par certaines conditions (par exemple par des équations différentielles).

Il donne quelques exemples mécaniques pour illustrer la troisième sorte, à laquelle il attribue

> *"des fonctions qui ne sont connues que parce qu'on sait en général qu'une certaine quantité sera déterminée lorsque d'autres quantités le seront"*.

Il donne à nouveau des exemples de phénomènes physiques dont la description mathématique est inconnue.

Comme nous l'avons vu, CONDORCET est le premier à utiliser le terme *"fonction analytique"* pour la description de fonctions de nature arbitraire, l'adjectif "analytique" s'appliquant à toutes les fonctions considérées en analyse mathématique. Poursuivant son exposé, CONDORCET tente de dériver formellement une série de TAYLOR pour une fonction arbitraire, presque de la manière que LAGRANGE avait utilisée, un peu plus tôt, dans son mémoire *"Sur une nouvelle espèce de calcul relatif à la différentiation et à l'intégration des quantités variables"*, publié en 1774 ([68], pp. 441-476). Il semble toutefois que le terme de "fonction analytique" soit dû en premier à CONDORCET.

Bien que le traité inachevé de CONDORCET n'ait jamais vu le jour, ses pages imprimées avaient été lues par de nombreux mathématiciens à Paris, comme l'indique S.F. LACROIX dans la préface de son cours d'analyse mathématique en trois volumes ([69]. D'ailleurs, LACROIX suit EULER et CONDORCET dans la définition d'une fonction. Remarquant tout d'abord qu'une fonction d'une quantité quelconque avait été comprise comme étant l'une quelconque de ses puissances (la même imprécision fut commise par LAGRANGE au début de sa *"Théorie des fonctions analytiques"* ([40]), puis, aussi, toute autre expression algébrique, LACROIX poursuit (p. 1) :

> *"Enfin de nouvelles idées, amenées par le progrès de l'analyse, ont donné lieu à la définition suivante des fonctions".*
>
> La définition elle-même, soulignée par l'auteur, suit immédiatement. *"Toute quantité dont la valeur dépend d'une ou de plusieurs autres quantités, est dite fonction de ces dernières, soit qu'on sache ou qu'on ignore par quelles opérations il faut passer pour remonter de celles-ci à la première".*

Le traité de LACROIX, très largement connu, contribua grandement à propager le nouveau concept de fonction. Il est vrai que dans de nombreux autres livres et manuels de cette époque l'ancienne définition d'une fonction comme étant une expression analytique est encore utilisée. Comme je l'ai mentionné (voir note (17)), c'est le cas de la "Théorie des fonctions analytiques" de LAGRANGE, dont la première publication est de 1797 et dont la seconde édition, révisée et augmentée, date de 1813. Pour l'essentiel, la même interprétation du concept de fonction est implicite dans "l'Analyse algébrique" de CAUCHY (1821) quoique, dans la définition elle-même, le terme "expression analytique" ne soit pas utilisé(28).

Contrairement à l'opinion de M. KLINE ([70], p. 950) qui soutient qu'une expression analytique n'est pas nécessaire à CAUCHY, et à l'opinion de F.A. MEDVEDEV ([71], p. 238), je suppose que CAUCHY pensait en réalité ici uniquement aux fonctions exprimées analytiquement. Ceci est sous-jacent à la fois dans sa formulation où il mentionne à deux reprises qu'*on conçoit d'ordinaire* que les fonctions sont *exprimées au moyen de variable indépendante,* et par la séparation qu'il fait (à la suite de la définition) entre les fonctions explicites et implicites, les dernières étant caractérisées par le fait que les équations que la variable indépendante et elles satisfont ne sont pas résolubles algébriquement.

Mais à cette époque et assez rapidement, la définition générale d'EULER est acceptée par trois savants de la plus grande envergure, en relation, dans les trois cas, avec leurs recherches sur la théorie des séries trigonométriques. En premier lieu, on trouve une telle définition dans la "Théorie analytique de la chaleur" de FOURIER, publiée en 1821 ([63], p. 500) :

> *"En général, la fonction f(x) représente une suite de valeurs ou ordonnées dont chacune est arbitraire".*

---

(28) La définition de CAUCHY ([64], ch. I, §1) est :
"Lorsque des quantités variables sont tellement liées entre elles que, la valeur de l'une d'elles étant donnée, on puisse en conclure les valeurs de toutes les autres, on conçoit d'ordinaire ces diverses quantités exprimées au moyen de l'une d'entre elles, qui prend alors le nom de variable indépendante et les autres quantités exprimées au moyen de la variable indépendante sont ce qu'on appelle des fonctions de cette variable".

Immédiatement après, FOURIER se répète lui-même, soutenant qu'il ne suppose pas ces ordonnées sujettes à une loi commune ; elles succèdent les unes aux autres de n'importe quelle manière que ce soit, et chaque ordonnée peut être considérée comme donnée individuellement. J'effleurerai plus bas le sens implicitement utilisé par FOURIER (et d'autres mathématiciens), en parlant de la nature "arbitraire" d'une dépendance fonctionnelle.

A la suite de cette définition laconique de FOURIER dont les travaux acquièrent tout de suite une grande renommée, LOBATCHEVSKY et DIRICHLET publient des définitions beaucoup plus prolixes. Dans son article "Sur la convergence des séries trigonométriques", en 1834, LOBATCHEVSKY écrit ([72], p. 48) :

> *"La conception générale exige qu'une fonction de x soit appelée un nombre qui est donné pour chaque x et qui change graduellement en même temps que x. La valeur de la fonction peut être donnée soit par une expression analytique, soit par une condition qui donne un moyen pour tester tous les nombres et sélectionner l'un d'eux ; ou, finalement, la dépendance peut exister mais reste inconnue".*

Puis, déclarant, bien qu'aucun exemple contradictoire ne soit encore connu, que la prétendue possibilité de représenter analytiquement toute fonction n'est rien de plus qu'une affirmation arbitraire, LOBATCHEVSKY conclut (p. 44) :

"Il semble impossible de mettre en doute ou bien la vérité que toute chose au monde peut être exprimée par des nombres, ou bien l'exactitude du jugement que tout changement et relation en loi est représenté par une fonction analytique. Néanmoins une vue large de la théorie permet l'existence d'une dépendance seulement au sens où les nombres, en relation l'un avec l'autre, peuvent être considérés comme s'ils étaient donnés ensemble. Pour cette raison, LAGRANGE, dans son "Calcul des fonctions"(29), avec lequel il souhaitait remettre à sa place le calcul différentiel, porta atteinte à la généralité du concept autant qu'il pensait gagner dans la rigueur de jugement".

La tendance à inclure aussi dans le concept de fonction, des dépendances hypothétiques telles qu'elles pouvaient s'avérer ne pas être représentables analytiquement est ainsi exprimée de manière absolument sans équivoque. Mais alors, et parce que le terme "graduellement" utilisé par LOBATCHEVSKY signifie continûment, au sens de CAUCHY, la définition de LOBATCHEVSKY, prise littéralement, concerne, et cela de façon assez inattendue, uniquement des fontions continues.

---

(29) Dans ses "Leçons sur le calcul des fonctions" (1801, 2e ed. 1806, [73]), LAGRANGE donne la même définition d'une fonction que celle qu'il avait lui-même donnée plus tôt dans sa "Théorie des fonctions analytiques" (cf. note (17)).

La même chose est vraie en ce qui concerne la définition que DIRICHLET donne, en 1837, dans son mémoire : *"Uber die Darstellung ganz willkürlicher Funktionen durch Sinus und Cosinusreihen" (Sur la représentation de fonctions quelconques par des séries de sinus et de cosinus)*, dont je citerai maintenant le passage entier qui s'y rapporte ([66], pp. 135-136) :

> *"Désignons par a et b deux valeurs fixes et par x une grandeur variable, située entre a et b. Si à tout x correspond une valeur finie y = f(x) qui varie de façon continue lorsque x varie lui-même de façon continue de a à b, nous dirons que y est une fonction continue pour cet intervalle. Ici, il n'est pas du tout nécessaire que y s'exprime en fonction de x selon une même loi sur tout l'intervalle ; il n'est même pas nécessaire d'envisager une expression algébrique explicite entre x et y. D'un point de vue géométrique, c'est à dire en envisageant x et y comme abscisse et ordonnée d'un point et où à chaque valeur de x de l'intervalle considéré correspond une valeur et une seule de y, la continuité d'une fonction est à mettre en parallèle avec le fait que la courbe soit d'un seul tenant. Cette définition ne prescrit en aucune façon aux différentes parties de la courbe une quelconque propriété commune et on peut se représenter les différents raccordements de manière totalement arbitraire, ou même s'imaginer une courbe simple tracée graphiquement, sans aucune contrainte préalable. Il résulte de cela qu'une telle fonction ne sera définie sur tout un intervalle que si chacune de ses parties est soit donnée graphiquement, soit mathématiquement. Par contre si elle n'est définie que sur une partie de l'intervalle, alors elle reste totalement libre de prendre ou de ne pas prendre n'importe quelles valeurs arbitraires sur la partie restante de l'intervalle".*

En substance, les définitions de LOBATCHEVSKY et DIRICHLET sont identiques, la seule différence étant que DIRICHLET pense qu'il est nécessaire d'ajouter une explication géométrique. Leur nature tout à fait générale en ce qui concerne les fonctions continues et leur possibilité d'être directement généralisées en incluant les fonctions discontinues sont absolument évidentes.

Depuis que ces auteurs ont considéré des fonctions discontinues, la restriction de leurs définitions aux fonctions continues au sens de CAUCHY semble très surprenante : les fonctions (ou dérivées) ayant des points isolés de discontinuité sont explicitement incluses dans les conditions suffisantes pour représenter une fonction par une série de FOURIER, comme l'ont établi LOBATCHEVSKY et DIRICHLET eux-mêmes. Quant à DIRICHLET, nous lui sommes aussi redevables du célèbre exemple d'une fonction discontinue en chaque point de l'intervalle $0 \leqslant x \leqslant 1$:

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ pour les valeurs rationnelles de } x \\ 1 \text{ pour les valeurs irrationnelles de } x \end{cases}$$

Pourquoi ces savants ont-ils pensé tous les deux qu'il était opportun de restreindre leur définition aux fonctions continues ? L'explication la plus naturelle en a été donnée par MEDVEDEV ([71], pp. 242-243) : la classe des fonctions à peine isolée, les fonctions continues au sens de CAUCHY deviennent immédiatement d'une importance extrême, et c'est précisément cette classe qu'il est nécessaire de libérer de la restriction de la représentation analytique, d'autant plus que, même plus tard, certains savants comme, par exemple, V.YA. BUNYAKOBSKY ([74], p. 246) et G.G. STOKES ([75], p. 240) ont identifié la continuité au sens de CAUCHY avec la continuité au sens d'EULER.

H. BURKHARDT remarque que c'est seulement en 1841 que A. COURNOT formule une définition d'une fonction avec le degré de généralité qui est communément attribué à DIRICHLET et, plus tard, à la fois à DIRICHLET et à LOBATCHEVSKY(30). L'attribution à DIRICHLET est due à HANKEL dont l'ouvrage fut publié en 1870. La "Théorie des fonctions" de COURNOT (t.1, Paris, 1841) s'avérant indisponible, je citerai ses paroles telles que les donne BURKHARDT ([76], p. 968) :

> *"Nous concevons qu'une grandeur peut dépendre d'une autre sans que cette dépendance soit de nature à pouvoir être exprimée par une combinaison des signes de l'algèbre".*

Un peu plus loin, COURNOT (ibidem) suggère qu'il est possible

> *"d'imaginer une théorie qui aurait pour objet la discussion des propriétés générales des fonctions".*

14. La fonctionnalité chez HANKEL.

Il est évident, comme il vient d'être mentionné, qu'un concept d'une aussi grande généralité est dû en réalité à la fois à LOBATCHEVSKY et à DIRICHLET. Cependant, ni le livre de COURNOT, ni l'article de LOBATCHEVSKY ne jouissent, à cette époque, d'une grande popularité, comme en témoigne H. HANKEL dans *"Untersuchunger über die unendlich oft oszillierenden und unstetigen Funktionen"* ([26], publ. 1870). Ayant présenté un bref essai historique, HANKEL donne alors des remarques préliminaires sur le concept de fonction, formulant la définition suivante ([26], p. 49) :

> *"On dit que y est fonction de x si à chaque valeur de x d'un certain intervalle correspond une valeur bien définie de y sans que cela exige pour autant que y soit définie sur tout l'intervalle par la même loi en fonction de x, ni même que y soit définie par une expression mathématique explicite de x".*

---

(30) Dans ses commentaires sur l'œuvre de LOBATCHEVSKY, G.I. LUNZ ([72], pp. 15-16) interpréte la définition citée comme concernant toute fonction. Selon LUNZ, le mot "graduellement" est utilisé ici par LOBATCHEVSKY au sens de "consécutivement" plutôt que "continûment" (au sens de CAUCHY) ; cette interprétation, comme l'a mis en évidence MEDVEDEV ([71], pp. 235-236), est plutôt douteuse.

("Eine Funktion heißt y von x, wenn jedem werte der veränderlichen Größe x innerhalf eines gewissen Intervalles ein bestimmter Wert von y entspricht; gleichviel, ob y in dem ganzen Intervalle nach demselben Gesetze von x abhängt oder nicht; ob die Abhängigkeit durch matematische Operationen ausgedräckt werden kann oder nicht").

HANKEL poursuit et ajoute (ibidem) qu'il appellera cette définition du nom de DIRICHLET

"parce que cette définition, qui a détrôné toutes les conceptions plus anciennes, est fondamentale dans ses travaux sur les séries de FOURIER".

HANKEL appelle également cet ancien concept "la conception eulérienne" (p. 48), rappelant les fonctions "continues" et "discontinues" de l'Introductio. Puis, page 53, HANKEL qualifie sa définition en disant qu'*une valeur bien définie* de y n'inclut pas le cas d'une discontinuité infinie et donne une définition coïncidant presque avec la partie de l'original, précédant le point-virgule. Dans cette forme exacte ou dans une forme semblable, la définition générale d'une fonction fut incluse dans les cours d'analyse mathématique, à la fin du 19e siècle et au 20e siècle.

On doit remarquer que HANKEL formule sa définition avec prudence ; ne reproduisant pas la définition de DIRICHLET, il se limite lui-même en remarquant que sa propre définition est la pierre angulaire des "travaux sur les séries de FOURIER" de DIRICHLET.

HANKEL a tellement contribué à cette étude des fonctions discontinues qu'il pouvait difficilement ne pas remarquer que la définition de DIRICHLET lui-même devait créer avec les fonctions continues un état de choses qui ne devait être mis en évidence qu'à notre époque seulement, par A. CHURCH ([77]), A. OSTROWSKY ([78]) et d'autres auteurs.

15. Le rôle historique de la définition générale d'EULER.

Ainsi, il semble que pour HANKEL, le point le plus important soit l'esprit de la définition de DIRICHLET plutôt que sa forme littérale. D'autre part, en opposant à la définition de DIRICHLET, "la conception eulérienne", HANKEL s'est effectivement trompé.

Comme il a été montré plus haut (voir §10), le concept eulérien de fonction a subi en réalité une évolution essentielle, et si un nom quelconque doit être lié à la définition d'une fonction comme correspondance univoque, ce doit être EULER. EULER est celui dont le concept, décrit en 1755, fut développé par de nombreux savants, LOBATCHEVSKY et DIRICHLET inclus.

Une considération particulière sur la nature arbitraire des relations fonctionnelles et leur représentabilité analytique est justifiée.

En premier lieu, les différentes notions utilisées quant au degré d'arbitraire et au type de comportement des fonctions sont caractéristiques des différentes époques et des différentes générations de mathématiciens. Bien qu'EULER, LACROIX ou FOURIER n'aient jamais rencontré de fonctions telles que la fonction discontinue due à DIRICHLET(31), et mentionnée plus haut (voir §13), leur concept de fonction en tant que correspondance arbitraire était pour *leur* époque aussi général que le fut le concept de DIRICHLET à *son* époque à lui. Et pour cette raison, DIRICHLET lui-même n'a pas imaginé de fonctions telles que celles qui seront introduites à l'époque de G. CANTOR, BAIRE, BOREL et LEBESGUE.

En second lieu, comme il a été dit (voir §12), le problème de la possibilité de représenter analytiquement des fonctions apparut comme étant beaucoup plus complexe que cela avait été supposé par les mathématiciens jusqu'au début du 20e siècle. Il fut nécessaire de contourner l'obstacle de la représentabilité analytique pendant une longue période, commençant avec EULER et prenant fin avec DIRICHLET et COURNOT. Mais dès lors, des classes de plus en plus étendues de fonctions furent mises à jour, en premier lieu celles qui obéissaient aux conditions de DIRICHLET dans la théorie des séries de FOURIER ; puis les fonctions continues et même celles de nature plus générale sont alors représentées au moyen de l'une ou l'autre des méthodes analytiques.

U. DINI, dans ses *"Fondamenti per la teorica delle funzione di variabili reali"* (publiés en 1878, édition allemande, 1892), demande tout à fait pertinemment ([79], p. 49) :

> *"Si le problème de savoir si une fonction y peut être définie analytiquement ou non est compatible avec toute la généralité de la définition de la notion de fonction, c'est-à-dire la donnée de y par une ou plusieurs expressions mathématiques finies ou infinies de la variable x sur un certain intervalle".*

D'autre part, ajoute DINI, le niveau courant des connaissances mathématiques devant être pris en compte, il est à peu près impossible de donner une réponse tout à fait satisfaisante à sa question.

Comme on l'a remarqué plus haut (cf. §12), LEBESGUE, en 1905, apporte une réponse positive à cette question en ce qui concerne toutes les fonctions mesurables, donnant en même temps un exemple d'une fonction ne pouvant pas être représentée analytiquement dans ce sens-là.

Je suis obligé de laisser de côté le problème connexe de la légitimité des constructions de BAIRE et de LEBESGUE, en butte, plus tard, aux critiques du point de vue de "l'effectivisme", du "constructivisme" et d'autres directions des fondements des mathématiques.

---

(31) A ce sujet, il est néanmoins instructif de se rappeler la fonction "paradoxale" d'EULER, $y = (-1)^x$ (cf. note (26)).

Si le rejet de la possibilité de représentation analytique s'est révélé, dans un sens, illusoire, quelle est alors l'importance de la définition d'EULER de 1755 ? De même, quelle est l'importance des définitions qui s'en sont dégagées ? Le côté faible de la définition d'EULER n'a pas échappé à l'attention de HANKEL qui, pour sa part, la considère comme *"une définition purement nominale" (reine Nominal-définition)* ([26], p. 49), mettant en évidence que les fonctions ainsi définies de façon universelle ne possèdent aucune propriété commune d'aucune sorte.

La réponse appropriée à la question qui vient d'être posée est donnée par le développement lui-même de la théorie des fonctions. Avec le temps, le champ des fonctions considérées, s'élargissant de plus en plus, subit des changements essentiels. Les expressions analytiques composées au moyen d'opérations de calcul relativement simples ayant été presque l'unique sujet d'étude pendant à peu près deux siècles, elles n'ont jamais perdu de leur importance. Mais alors, le temps passant, il devient nécessaire d'étudier les différentes classes de fonctions (continues, différentiables, à variations finies, discontinues en certain points, mesurables, etc.), introduites par l'une ou l'autre des propriétés fondamentales qui définissent la structure toute entière d'une classe donnée, indépendamment de l'hypothèse que les fonctions de cette classe peuvent être représentées analytiquement.

Comme l'a formulé N.N. LUZIN dans son livre *"Intégrales et séries trigonométriques"* publié en 1915 ([80], p. 50) :

"La principale différence entre les méthodes d'étude des fonctions à l'intérieur du cadre de l'analyse mathématique et [sinon] de la théorie des fonctions est que l'analyse classique déduit les propriétés d'une fonction quelconque à partir des propriétés des expressions analytiques et des formules par lesquelles cette fonction est définie, tandis que la théorie des fonctions détermine les propriétés d'une fonction en partant des propriétés qui, à priori, distinguent la classe de fonctions considérée."

Il est également important de remarquer qu'à l'intérieur de la théorie des fonctions, les descriptions verbales du comportement des fonctions sur l'un ou l'autre des ensembles de valeurs de la variable indépendante deviennent d'usage général.

Comme il en a été fait mention plus haut, la logique mathématique moderne a découvert des difficultés essentielles, inhérentes à la définition universelle et, partant, non algorithmique d'une fonction. En 1972 même, H. WEYL soutient tout à fait correctement ([81], p. 8) que

> *Personne n'a jamais su expliquer ce qu'est une fonction. Mais "une fonction f est définie si par un moyen quelconque on peut associer à un nombre a, un nombre b... On dit alors que b est la valeur de la fonction f pour la valeur a de l'argument".*
> *(Niemand kann erklären, was eine Funktion ist. Aber : "Eine Funktion f ist gegeben, wenn auf irgendeine bestinunte gesetzmäs-*

sige Weise jeder reelen Zahl a eine Zahl b zugeordnet ist... Man sagt dann, b sei der WERT der Funktion f für den Argumentwert a)

Ainsi deux fonctions définies de manières différentes sont considérées comme identiques si, pour toutes les valeurs possibles de a, les valeurs correspondantes de b coïncident. L'opinion des mathématiciens diverge sur le sens des mots *"auf irgendeine bestinunte gesetzmässige"* (soulignés par moi, non par H. WEYL). Toutefois, la définition générale (nominale) d'une fonction par EULER, qui devient nécessaire dès le milieu du 18ᵉ siècle, a été utilisée avec succès — pour emprunter une expression prononcée pour une autre occasion — comme "ein Medium freien Werdens" (Médium pour un libre devenir) pour des constructions de plus en plus complexes dans la théorie des fonctions et a également ouvert de nouveaux horizons dans le développement de nombreuses branches de l'analyse mathématique et de ses applications. Les difficultés mêmes, inhérentes à la définition, ont joué un rôle positif dans la formulation et l'étude de nombreux problèmes sur les fondements des mathématiques et la logique mathématique.

Addenda

1°) Alors que cet article était presque complet, j'ai reçu le *"Tagungsbericht, Problemgeschichte der Mathematik 22-9. bis 28-9-1974, Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach, BRD"*.

A partir de cette source, j'ai lu que le sujet central de la conférence était le développement du concept de fonction, auquel presque la moitié des rapports est consacré. Le premier rapport, remis par le Dr. Karin REICH, est un résumé de la version originale de cet article : *"Bericht über einen Aufsatz von A.P. Juschkewitsch zur Geschichte des Funktionsbegriffs"*. Les autres rapports sur le sujet sont ceux de C.J. SCRIBA, E.M. BRUINS, C.O. SELENIUS, I. SCHNEIDER, O. VOLK, I. GRATTAN-GUINESS et H. GERICKE. Les participants à la discussion finale étaient H. GERICKE, G. HIRSCH, J.J.M. BOS et d'autres.

Les résumés de ces rapports, publiés dans le "Tagungsbericht", sont trop concis pour être pris en compte ici, et je peux seulement espérer que les rapports eux-mêmes seront publiés. Je regrette également que l'une des sources mentionnées dans le rapport de SCRIBA, à savoir S. BOCHNER : *"The rise of functions"* (Rice Univ. Studies 56 (1970), n° 2, 3-21 (1971)), me demeure inconnue.

2°) Qu'il me soit permis de remercier Monsieur Jean-Marc Bellemin pour l'excellente traduction qu'il a réalisée à partir de la version anglaise de mon article, le mettant ainsi à la disposition des professeurs de mathématiques de langue française.

Bibliographie

1. C.B. Boyer, *The History of the Calculus and its Conceptual Development* (1939). N.Y., 1959 (3rd ed.).
2. D.E. Smith, *History of Mathematics*, v. 1 (1923). N.Y., 1958.
3. W. Hartner & M. Schramm, *Al-Biruni and the theory of the solar apogee: an example of originality in Arabic Science.* In: *Scientific change*, ed. by A.C. Crombie. London, 1963, 206–218.
4. C.B. Boyer, *History of Analytic Geometry*. N.Y., 1956.
5. J.E. Hofmann, *Geschichte der Mathematik*, Bd. I, 2. Aufl. Berlin, 1963.
6. A.C. Crombie, *Augustine to Galileo*, v. I–II, 2nd ed. London-Melbourne-Toronto, 1959–1961.
7. H. Wieleitner, *Der "Tractatus de latitudinibus formarum" des Oresme. Bibl. Mathematica*, 3. F., Bd. 13 (1912/13), 115–145; see also his *Über den Funktionsbegriff und die graphische Darstellung bei Oresme. Ibid.*, 3. F., Bd. **14**, 193–243 (1914).
8. E.T. Bell, *The Development of Mathematics* (1940), 2nd ed. N.Y.-London, 1945.
9. O. Pedersen, *Logistics and the Theory of Functions. Arch. Intern. d'Hist. d. Sciences*, **24**, N. 94, 29–50. (1974).
10. A.F. Monna, *The Concept of Function in the 19th and 20th Centuries, in Particular with Regard to the Discussions between Baire, Borel and Lebesgue. Arch. for Hist. of Exact Sciences*, **9**, 57–84 (1972).
11. Kenneth O. May, *Elements of Modern Mathematics.* 2nd Printing. Reading, Mass.-Palo Alto-London, 1962.
12. O. Neugebauer, *The Exact Sciences in Antiquity.* 2nd ed. Providence. R.I., 1957.
13. H.G. Zeuten, *Die Lehre von den Kegelschnitten im Alterum* (1886). 2nd ed. Hildesheim, 1966.
14. H.G. Zeuten, *Histoire des mathématiques dans l'antiquité et le moyen age.* Ed. française, revue et corrigée par l'auteur. Paris, 1902 (1st ed. Köbenhavn, 1893).
15. N. Bourbaki, *Eléments d'histoire des mathématiques.* 2e éd. revue, corrigée, augmentée. Paris, 1969.
16. A.P. Youschkevitch, *Remarques sur la méthode antique d'exhaustion.* In: *Mélanges Alexandre Koyré, I*, Paris, 1964, 635–653.
17. D.T. Whiteside, *Patterns of Mathematical Thought in the later Seventeenth Century. Arch. for History of Exact Sciences*, **1**, N 3, 179–388 (1961).

17a. O. Schirmer, *Studien zur Astronomie der Araber.* Sitzungsber. d. Phys.-Med. Sozietät zu Erlangen, Bd. 58 (1926).

18. *Nicole Oresme and the Medieval Geometry of Qualities and Motions. A Treatise on the Uniformity and Difformity of Intensities known as Tractatus de configurationibus qualitatum et motuum.* Ed. by M. Clagett. Madison, Milwaukee & London 1968. – Russ. ed. by V.P. Zoubov in *Istoricomathematicheskie issledovania*, vol. XI, 601–731 (1958).
19. M. Clagett, *The Science of Mechanics in the Middle Ages.* Madison, 1959.

20. *Geometria à* RENATO DES CARTES *Anno* 1637 *Gallicè edita; nunc autem ... in linguam Latinam versa et commentariis illustrata, Opera atque studio* FRANCISCI à SCHOOTEN ... Lugduni Batavorum, 1649.
21. NICOLE ORESME, *Quaestiones super geometriam Euclidis*, ed. by H. L. L. BUSARD, 2 Vols., Leiden, 1961.
22. SCHRAMM, M., *Steps Towards the Idea of Function: A Comparison Between Eastern and Western Science of Middle Ages. History of Science*, 4, 70–103 (1965).
23. *Oeuvres de Fermat*, éd. P. TANNERY & CH. HENRY, t. I, Paris, 1891.
24. *Oeuvres de Descartes*, éd. CH. ADAM & P. TANNERY, t. VI, Paris, 1903.
25. F. ENGELS, *Dialektik der Natur*. Berlin, 1958.
26. B. BOLZANO, *Rein analytischer Beweis* ... H. HANKEL, *Untersuchungen über die unendlich oft oszillierenden und unstetigen Funktionen* (1870). Hg. von FH. E. B. JOURDAIN, Leipzig, 1905 (First ed. as "Gratulationsprogramm" der Tubinger Universität, 1870).
27. P. BOUTROUX, *L'idéal scientifique des mathématiciens*. Paris, 1920.
28. I. BARROW, *Lectiones geometricae*. London, 1670; *Lectiones mathematicae*. London, 1683.
29. MARGARET E. BARON, *The Origins of the Infinitesimal Calculus*. Pergamon Press, 1969.
30. J. WALLIS ... *De Algebra Tractatus Historicus et Practicus. Operum Mathematicorum Volumen alterum*. Oxoniae, 1693.
31. *The Correspondence of Isaac Newton*, vol. III. Ed. by H. W. TURNBULL. Cambridge, 1961.
32. I. NEWTON, *The Method of Fluxions and Infinite Series, with its Application to the Geometry of Curve-Lines*. Translated ... by JOHN COLSON. London, 1736.
32a. *The Mathematical Papers of Isaac Newton*, Vol. III, 1670–1673. Ed. by D. T. WHITESIDE with the assistance ... of M. A. HOSKIN & A. PRAG. Cambridge, 1969.
33. LEIBNIZENS *mathematische Schriften*, hsg. von C. I. GERHARDT, I–VII. Berlin-Halle, 1849–1863.
34. D. MAHNKE, *Neue Einblicke in die Entdeckungsgeschichte der höheren Analysis*. Abh. Preuss. Akad. Wiss. Phys.-Math. Kl., 1925, NI (1926).
35. JOH. BERNOULLI, *Opera omnia*, I–IV. Lausannae et Genevae, 1742.
36. M. DEHN & E. HELLINGER, *On James Gregory's "Vera Quadratura"*. In: *James Gregory Tercentenary Memorial Volume*, ed. by H. W. TURNBULL. London, 1839, 468–478.
37. G. F. DE L'HOSPITAL, *Analyse des infiniments petits pour l'intelligence des lignes courbes*. Paris, 1696.
37a. J. GREGORY, *Vera circuli et hyperbolae quadratura* ... Patavii [Padua, 1667].
37b. CHR. J. SCRIBA, *James Gregory frühe Schriften zur Infinitesimalrechnung*. Giessen, 1957.
38. CHR. WOLFF, *Mathematisches Lexicon* (1716), hsg. von J. E. HOFMANN. Hildesheim, 1965.
39. LEONHARDI EULERI *Opera Omnia*, ser. I, vol. VIII, ed. A. KRAZER & F. RUDIO, 1922.
40. *Oeuvres de J. L. Lagrange*, publiées par J. A. SERRET, t. IX. Paris, 1881.
41. LEONHARDI EULERI *Opera omnia*, ser. I, vol. IX, ed. A. SPEISER, 1945.
42. I. GRATTAN-GUINNESS, *The Development of the Foundations of Mathematical Analysis from Euler to Riemann*. Cambridge, Mass.-London, 1970.
42a. A. SPEISER, *Über die diskontinuirlichen Kurven*, pp. XXI–XXIV of the editor's introduction, LEONHARDI EULERI *Opera omnia*, ser. I, vol. XXV, 1952.
42b. C. TRUESDELL, editor's introduction, LEONHARDI EULERI *Opera omnia*, ser. II, vol. 13, 1956.
43. А. И. Маркушевич, Основные понятия математического анализа и теории функций в трудах Эйлера. — Леонард Эйлер. Сборник статей ... Москва, 1958, 98–132.
44. LEONHARDI EULERI *Opera omnia*, ser. IV-A, vol. I, ed. A. JUŠKEVIČ, V. SMIRNOV & W. HABICHT, 1975.
45. J. D'ALEMBERT, *Recherches sur la courbe que forme une corde tendue mise en vibration; Suite des recherches ... Hist. Acad. Sci. Berlin* (1747) 1749, 214–249.
46. LEONHARDI EULERI *Opera omnia*, ser. II, vol. X, ed. F. STÜSSI & H. FAVRE, 1947.
47. LEONHARDI EULERI *Opera omnia*, ser. I, vol. XVI-I, ed. C. BOEHM, 1933.
48. D. BERNOULLI, *De indole singulari serierum infinitarum quas sinus vel cosinus angularum arithmetice progredientium formant, earumque summatione et usu. Nov. Comm. Ac. Petrop.*, XVII (1772) 1773, 3–23.
49. LEONHARD EULER und CHRISTIAN GOLDBACH. *Briefwechsel* 1729–1764, hsg. von A. P. JUŠKEVIČ & E. WINTER. Berlin, 1965.
50. LEONHARDI EULERI *Opera omnia*, ser. I, vol. X, ed. G. KOWALEWSKI, 1913.
51. C. TRUESDELL, *The Rational Mechanics of Flexible or Elastic Bodies*. 1638–1788. In: LEONHARDI EULERI *Opera omnia*, ser. II, vol. II-2. Turici 1960.

52. LEONHARDI EULERI *Opera omnia*, ser. I, vol. XXIII, ed. H. DULAC, 1938.
53. И. Ю. Тимченко, Основания теории аналитических функций, ч. I, т. I. Одесса, 1899.
54. C. MACLAURIN, *A Treatise of Fluxions*, vol. I-II. Edinburgh, 1742.
55. LEONHARDI EULERI *Opera omnia*, ser. I, vol. XIII, ed. F. ENGEL et L. SCHLESINGER, 1914.
56. A. P. YOUSCHKEVITCH, *Euler und Lagrange über die Grundlagen der Analysis. – Sammelband ... zu Ehren des 250. Geburtstages Leonard Eulers ...*, ed. K. SCHRÖDER. Berlin, 1959, 224-244.
57. J. D'ALEMBERT, *Opuscules mathématiques*, vol. VIII. Paris, 1780, 302-308. See also
See also А. П. Юшкевич, К истории спора о колеблющейся струне (Даламбер о применении "разрывных" функций). Историко-математические исследования, XX, 1975, 221-231.
58. L. ARBOGAST, *Mémoire sur la nature des fonctions arbitraires qui entrent dans les intégrales des équations aux différentielles partielles.* St. Pétersbourg, 1791.
59. LEONHARDI EULERI *Opera omnia*, ser. I, vol. XI, ed. F. ENGEL & L. SCHLESINGER, 1913.
60. J. CHARLES, *Fragment sur les fonctions discontinues. Mémoires de mathématiques et de physique présentés par divers savants.* Paris, 1785, 585-588.
61. A. L. CAUCHY, *Oeuvres complètes*, I sér., vol. VIII, 145-160.
62. I. GRATTAN-GUINNESS in collaboration with J. R. RAVETZ, *Joseph Fourier*. 1768-1830. Cambridge, Mass.-London, 1972.
63. J. B. FOURIER, *Oeuvres*, v. I, publié par G. DARBOUX. Paris, 1888.
64. A. L. CAUCHY, *Oeuvres complètes*, 2 sér., vol. III, Paris, 1897.
65. A. L. CAUCHY, *Oeuvres complètes*, 2 sér., vol. IV. Paris, 1899.
66. P. G. LEJEUNE-DIRICHLET, *Gesammelte Werke*, Bd. I. Berlin, 1889 (*Sur la convergence des séries trigonométriques qui servent à représenter une fonction arbitraire entre des limites données* (1829), 117-132; *Über die Darstellung ganz willkürlicher Funktionen durch Sinus- und Cosinusreihen* (1837), 133-160.
67. A. P. YOUSCHKEVITCH, *La notion de fonction chez Condorcet*. In: *For Dirk Struik*. Ed. by R. S. COHEN, J. J. STACHEL & M. W. WARTOFSKY. Dordrecht-Holland, Boston-U.S.A., 1974, 131-139.
68. J. L. LAGRANGE, *Oeuvres*, t. III, Paris, 1869, 441-476.
69. S. F. LACROIX, *Traité du calcul différentiel et du calcul intégral*, t. I, Paris, 1797; 2ᵉ éd., Paris, 1810.
70. M. KLEIN, *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*. New York, 1972.
71. Ф. А. Медведев, Об определении понятия функции у Лобачевского и Дирихле. Историко-математические исследования, XX, 1975, 232-245.
72. Н. И. Лобачевский, Полное собрание сочинений, т. У. Москва-Ленинград, 1951.
73. J. L. LAGRANGE, *Oeuvres*, t. X. Paris, 1884.
74. В. Я. Буняковский, Лексикон чистой и прикладной математики, т. I. Санкт-Петербург, 1839.
75. G. G. STOKES, *On the critical values of the sums of periodic series*, 1848. In: *Mathematical and Physical Papers*, v. I. Cambridge, 1880.
76. H. BURKHARDT, *Trigonometrische Reihen und Integrale. 28. Exkurs betreffend die Entwicklung des Begriffs einer willkürlichen Funktion. Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften*, Bd. II, T. I, 2 Hälfte. Leipzig 1904-1916, 958-971.
77. A. CHURCH, *Introduction to Mathematical Logic*, v. 1-2. Princeton, 1952-1956.
78. A. OSTROWSKI, *Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung*, Bd. *I*. Basel und Stuttgart, 1965.
79. U. DINI, *Grundlagen für eine Theorie der Funktionen einer veränderlichen reellen Größe*. Deutsch. bearb. von G. LÜROTH und A. SCHEPP, Leipzig, 1892.
80. Н. Н. Лузин, Интеграл и тригонометрический ряд. Редакция и комментарии Н. К. Бари и Д. Е. Меньшова. Статьи Н. К. Бари, В. В. Голубева и Л. А. Люстерника. Москва-Ленинград, 1951.
81. H. WEYL, *Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft*. München-Berlin, 1927.

Institute for History of Science and Technology
Moscow 103012

Vers une épistémologie des décimaux

par Mehdi ABDELJAOUAD,
Ecole Normale Supérieure de Tunis.

A. La contribution des Arabes à l'invention des décimaux *

I. INTRODUCTION

Dans un exposé, présenté en avril 1977 à Tunis, Guy Brousseau affirmait : "l'épistémologie des décimaux reste à faire. Elle est difficile à cause de l'éparpillement sur quinze ou vingt siècles des faits à prendre en considération. A chaque "étape" on croit qu'il n'y a qu'un pas à franchir mais il ne l'est pas et c'est rarement faute d'avoir essayé. Il faut comprendre ce que ce pas avait d'inconcevable et souvent aussi de ce qu'il faisait perdre par rapport à l'état précédent..." [B]

En nous appuyant sur les documents disponibles, nous avons rencontré Al-Kaši (1427) que tous les historiens des sciences créditent de l'invention des décimaux et Al-Uqlidisi qui, dès 952, les utilise dans un ouvrage qui vient récemment d'être découvert (1). Nous avons alors tenté d'analyser les obstacles à la découverte puis au développement des décimaux chez les Arabes.

II. TERMINOLOGIE

II.1 - *La numération ğumal*

C'est un système de numération utilisé par les Arabes à partir du VIII^e siècle. Il est basé sur la succession des lettres de l'alphabet. La base

* *NDLR. Cet article a été publié sous une forme voisine dans* **Miftah-Al-Hissab,** *bulletin de liaison et d'information de l'Association Tunisienne des Sciences Mathématiques, n° 50 (Juin 1978).*

(1) Dans son article [S], Saïdan permet une étude critique de l'ouvrage d'Al-Uqlidisi. Ce travail est paru sous le titre "The Arithmetic of Al-Uqlidisi", by A.S. Saydan, D. Reidel, Dordrecht, 1978.

de cette numération est 10 et il y a neufs nœuds pour les centaines et un nœud [غ] pour 1000 (2).

noeuds des unités	ا 1	ب 2	ج 3	د 4	ه 5	و 6	ز 7	ح 8	ط 9
noeuds des dizaines	ي 10	ك 20	ل 30	م 40	ن 50	س 60	ع 70	ف 80	ص 90
noeuds des centaines	ق 100	ر 200	ش 300	ت 400	ث 500	خ 600	ذ 700	ض 800	ظ 900

Les nombres qui ne figurent pas dans ce tableau sont obtenus par composition selon les règles habituelles de l'écriture arabe. Ainsi

25 s'écrit	كه	2 000	بغ
205 s'écrit	ره	20 005	بغه
2 025 s'écrit	بغكه	20 000	كغ
20 205 s'écrit	كغره	1 978	غظعح

C'est un système additif non positionnel et qui ne possède pas de symbole pour représenter zéro.

Il nous faut ici signaler la description minutieuse (3) de ce système par G. Guittel [G].

(2) L'ordre des lettres numérales n'est pas le même chez les Arabes d'Orient (Machrik) et les Arabes d'Occident (Maghrib). C'est à partir de 60 que des différences apparaissent :

Lettres	س	ص	ش	ض	ظ	غ
Machrik	60	90	300	800	900	1000
Maghrib	300	60	1000	90	800	900

(3) Dans son livre, "Histoire Comparée des Numérations Ecrites", G. Guittel [G] décrit 24 systèmes de numérations écrites et les classe selon une hiérarchie ayant à son sommet les numérations écrites de position. Selon cette classification, seule la numération indienne — que les Arabes ont transmis à l'Europe — est considérée comme de conception vraiment moderne.

L'auteur omet volontairement d'étudier la numération arabe de position et ne développe que superficiellement l'histoire de la numération écrite chez les Arabes. Ce choix — que l'auteur justifie du point de vue théorique — laisse le lecteur sur sa faim. Une recherche définitive sur la numération écrite chez les Arabes reste à entreprendre. G. Guittel se penche, par contre, sur la numération alphabétique arabe : la numération ǧumal (qu'elle désigne par Arabe 1).

Le caractère passionné de l'auteur se retrouve dans son ouvrage et en rend la lecture très attrayante malgré son sujet très technique. Cependant, le chapitre consacré à la numération ǧumal laisse transpercer une certaine animosité contre les Arabes du Moyen-Age. Cette animosité entraîne — nous semble-t-il — des erreurs d'analyse. Par exemple, lorsque l'auteur s'évertue pendant de longues pages à expliquer les complexités de la graphie arabe pour en déduire que cette complexité bloque l'évolution du système ǧumal vers un système de numération de position, elle ne se rend pas compte qu'avec Al-Ǧili, la numération ǧumal est un parfait système (au sens de Guittel) de numération de position, sexagésimal avec zéro médial, terminal et opérateur et de plus représentant les rationnels positifs.

L'auteur fait remarquer, en particulier, que la valeur numérale des lettres de l'alphabet arabe, lorsqu'elles sont prises dans leur ordre classique, est surprenante.

En effet, dans cet ordre ت suit ب et ج suit ث , ce qui donne

ا	ب	ت	ث	ج	ح	خ	د	ذ	ر
1	2	400	500	3	8	600	4	700	200

G. Guittel démontre que la valeur numérale des lettres a pour origine l'ordre de l'alphabet phénicien, ce qui a entraîné que l'alphabet numéral arabe ne tient pas compte du tracé des lettres ni de leurs caractères phonétiques particuliers. Cette difficulté a nécessité l'emploi d'une technique de mémorisation des valeurs des lettres grâce à des mots mnémotechniques :

أبجد هوز حطى كلمن سعفص قرشت ثخذ ضظغ

II.2 - *Le calcul des Indiens ou arithmétique indienne*

Il s'agit de la numération de position à base 10 utilisée pour représenter les nombres entiers naturels.

On ne connaît pas les symboles utilisés par Al-Khawarizmi qui est le premier mathématicien arabe à avoir écrit un exposé clair sur cette numération.

Les symboles qu'on retrouve dans les plus anciennes copies de Miftah al-hisab sont très proches de ceux utilisés de nos jours au Moyen-Orient :

١ ٢ ٣ ٤ ٥ ٦ ٧ ٨ ٩ ٠

Les arithméticiens du Maghreb et d'Andalousie ont utilisé des symboles plus proches de ceux utilisés, de nos jours, en Occident :

(chiffres gubar)

II.3 - *Le calcul des astronomes*

Il s'agit du système sexagésimal complet, c'est-à-dire, la représentation des entiers naturels et des nombres fractionnaires (et l'approximation des irrationels positifs) en base 60.

Ce système, clairement expliqué par Kusyar ibn Labban *al-gili* (début du XI^e^ siècle), utilise la numération ǧumal aménagée pour représenter les entiers de 1 à 59, selon le tableau suivant :

ي 10	ط 9	ح 8	ز 7	و 6	ه 5	د 4	ج 3	ب 2	ا 1
ك 20	يط 19	يح 18	يز 17	يو 16	يه 15	يد 14	يج 13	يب 12	يا 11
ل 30	كط 29	كح 28	كز 27	كو 26	كه 25	كد 24	كج 23	كب 22	كا 21
م 40	لط 39	لح 38	لز 37	لو 36	له 35	لد 34	لج 33	لب 32	لا 31
ن 50	مط 49	مح 48	مز 47	مو 46	مه 45	مد 44	مج 43	مب 42	ما 41
	نط 59	نح 58	نز 57	نو 56	نه 55	ند 54	نج 53	نب 52	نا 51

ce qui permet d'effectuer les calculs en utilisant des fractions sexagésimales dans la tradition babylonienne. Ce système aborde le zéro (médial et terminal) et devient un système de numération à base soixante pouvant représenter les entiers mais aussi les fractions.

Dans ce système, un nombre sera noté $a_{-2}\, a_{-1}\, a_0\, a_1\, a_2$ où les a_i seront des entiers inférieurs ou égaux à 59 et il sera égal à

$$\frac{a_{-2}}{(60)^2} + \frac{a_{-1}}{60} + a_0 + 60\, a_1 + (60)^2\, a_2$$

II.4 - *La numération mixte*

Cette numération se développe dans de nombreux ouvrages arabes à partir du IX^e^ siècle. Les entiers sont représentés en une numération de position à base 10 (donc en arithmétique indienne) et pour les parties fractionnaires, on utilise les minutes, les secondes et les tierces, c'est-à-dire une base sexagésimale.

Cette numération allie le dynamisme de l'arithmétique indienne et les possibilités formidables qu'elle permet pour calculer avec des grands nombres avec la tradition babylonienne du calcul sexagésimal. Ainsi, on peut utiliser les tables astronomiques ou trigonométriques classiques sans procéder à des conversions souvent pénibles.

La seule complication qu'offre ce système ne se présente que lorsque l'on veut affiner les calculs et augmenter leur précision.

Déjà des mesures données avec une précision de l'ordre des tierces entraînent de grands efforts dans les calculs puisque, en numération mixte, il est traditionnel d'exprimer les ordres supérieurs (degrés -minutes - secondes) en tierces, effectuer les calculs en arithmétique indienne et reconvertir le résultat en sexagésimal.

II.5 - *Les décimaux. Inventer les décimaux*

Chaque fois que nous utilisons l'une de ces expressions nous entendons la représentation décimale - de position à base 10 - généralisée aux réels positifs.

III. VERS UNE CHRONOLOGIE DES DECIMAUX CHEZ LES ARABES (*)

Siècle	Auteur	Oeuvre
IXᵉ	*Al-Khawarizmi* (780-850)	Première description claire de l'arithmétique indienne en arabe.
	Al-Kindi (mort en 873)	Excellente description de l'arithmétique indienne.
Xᵉ	*Al-Farabi* (870-950) "Kitab ihsa al-ulum"	Généralisation du concept de nombre aux rationnels et aux irrationnels positifs
	Al-Uqlidisi (mort après 952) "Kitab al-Fusul Fi-l-hisab al-hindi"	Première utilisation des fractions décimales.
	Abu'l-Wafa (934-998) "Kitab Fi ma yahtagu ilayhi al kuttab min ilm al-hisab"	N'utilise pas le système décimal. Les nombres sont écrits en toutes lettres. Développe une théorie des fractions considérées comme nombres
	Al-Karagi (mort en 1019) "Kitab al-Kafi Fi-l-hisab"	N'utilise pas les chiffres indiens. Considère les quantités irrationnelles comme des nombres.
XIᵉ	*Kusyar-ibn-Labban al gili* (971-1042)	Premier traité complet sur le calcul des astronomes
	Umar al-Khayyam (1048-1122)	Développe une théorie générale du nombre en rupture avec les concepts de nombres chez les anciens.
XIIIᵉ	*Nasr ad-din al-tusi* (1201-1274)	Continue l'œuvre de Umar-al-Khayyam. Son "Exposé d'Euclide" est paru à Rome en arabe en 1594 et en latin en 1657.
	Al-Kaši (mort en 1429)	Première description des décimaux.

(*) Pour nous, l'expression "les Arabes" veut dire les peuples d'expression arabe ou de religion musulmane ayant prospéré entre le VIIIᵉ et le XVᵉ siècle.

IV. LA CONTRIBUTION D'AL-UQLIDISI

IV.1 - Al Uqlidisi est le premier mathématicien arabe à utiliser les décimaux. Inconnu jusqu'à tout récemment, Al-Uqlidisi a été découvert en 1966 par A.S. Saydan [S]. Abu-l-Hasan Ahmad ibn Ibrahim al-Uqlidisi a écrit en 952 à Damas "Kitab al-Fusul fi-l-hisab al-hindi". Saydan étudie une copie de cet ouvrage datant de 1157.

Al-Uqlidisi indique dans l'introduction de son ouvrage qu'il a tenté d'inclure dans son arithmétique indienne toute l'arithmétique connue de ses contemporains, qu'elle soit d'origine indienne, grecque (rumi) ou arabe. Il justifie cet emploi universel des chiffres en disant que c'est "plus facile, plus rapide et nécessite peu de précautions... et en particulier moins d'efforts de mémorisation".

IV.2 - Ce qui est remarquable dans Kitab al-Fusul, c'est l'usage naturel des décimaux. "A l'aide du principe que la moitié de un est un nombre on peut remplacer un demi par 0,5" dit-il, et il procède alors au calcul de 19 : 2^5, ce qui donne :

$$\overline{19} \to \overline{9'5} \to \overline{4'75} \to \overline{2'375} \to \overline{1'1875} \to \overline{0'59375}$$

Il est très à l'aise dans les calculs où interviennent les puissances de dix, il n'hésite pas à multiplier ou à diviser un nombre par dix en le déplaçant d'un rang vers la gauche ou la droite.

Il insiste, en plusieurs endroits, sur la nécessité de marquer la place des unités par un signe pour faire apparaître la partie fractionnaire.

(Il faut remarquer que tous ses nombres sont surmontés par un trait).

Lorsqu'il veut exprimer en toutes lettres un résultat, la partie fractionnaire du *nombre* est exprimée sous forme d'une fraction décimale. "2'35" se lit "2 unités" et "35 de cent". L'auteur ajoute : "c'est-à-dire un quart et un dixième ($\frac{35}{100} = \frac{1}{4} + \frac{1}{10}$).

IV.3 - L'auteur sent le besoin, tout le long de l'ouvrage, de justifier l'usage de l'arithmétique indienne à la place de l'arithmétique rumi ou arabe classique.

Il associe, d'une manière explicite, le calcul indien à l'usage de la planche à calculer (takht). Il énumère les avantages et les inconvénients du takht :

Avantages :

1) Le calculateur peut abandonner son calcul à tout moment puis revenir sans perturber les résultats.
2) Le coût du takht est peu élevé.
3) Son usage est aisé et les résultats sont rapidement obtenus.

Inconvénients :

1) L'usage de la planche à calculer évoque les scribes qui l'emploient et rappelle surtout la caste des astrologues ambulants qui exercent leur art au coin des rues et sur la place du marché.
2) Les mains se salissent à cause du sable qu'on doit balayer pour effacer la planche et les doigts peuvent se blesser.

Pour éviter les inconvénients de la planche à calcul, Al-Uqlidisi indique qu'on peut s'en passer et n'utiliser que le papier et l'encre.

Enfin, pour ceux qui craignent encore l'usage des chiffres, il suggère de les remplacer par les neuf premières lettres de l'alphabet grec (et ainsi donner l'illusion de faire des calculs à la manière rumi) ou par les neuf premières lettres de l'alphabet arabe (4).

V. LA CONTRIBUTION D'AL-KAŠI

V.I - Né à Kashan (en Perse) dans la deuxième moitié du XIV^{e} siècle, Ǧamšid Ghiyāth ad-Din *Al-Kaši* fut mathématicien et astronome. Il dirigea l'observatoire de Samarkande et rédigea plusieurs ouvrages scientifiques. Il mourut à Samarkande le 22 juin 1429.

La renommée d'Al-Kaši vient de ses traités d'astronomie, mais ce qui nous intéresse c'est son traité de mathématiques ("Miftah al-hisab" : la Clé de l'arithmétique) écrit en 1427 et dans lequel il a rassemblé l'ensemble des mathématiques élémentaires connues à son époque et a introduit en particulier les décimaux.

Dans ce manuel, Al-Kaši insiste sur les principes qui l'ont guidé : "Nous avons, écrit-il, simplifié les méthodes, guidé par notre intuition personnelle, nous libérant de ce qui est enregistrés dans les livres". Il signale pour chaque notion, ce qui est usuel, ce qu'il a lui-même inventé ou amélioré, et ce que, étant tombé dans l'oubli, il a réintroduit en le rajeunissant. Il se crédite de l'invention des décimaux et, dans une lettre à son père, il donne, non sans vanité, une liste impressionnante de ses autres découvertes scientifiques [K].

Miftah al-hisab est composé de cinq livres :

I. L'arithmétique indienne ;
II. Le calcul des fractions ;
III. Le calcul des astronomes ;
IV. Les mesures ;
V. La détermination des grandeurs inconnues à l'aide de l'algèbre.

---

(4) Youschkevitch signale dans [Y] qu'un document byzantin du XV^{e} indique que "les Turcs font les multiplications et les divisions selon un procédé particulier de calcul. Ils ont introduit leurs fractions, depuis qu'ils règnent dans notre pays".

Le procédé consiste à transformer des fractions ordinaires en fractions décimales. L'auteur anonyme utilise les lettres numérales grecques. Ainsi 2492,375 est notée

β δ θ δ | γ ζ ε

Ce manuel rassemble donc l'ensemble des connaissances de base nécessaire aux débutants, qu'ils soient destinés à devenir astronomes ou marchands.

V.2 - Parcourons Miftah al-hisab et découvrons l'intérêt que porte Al-Kaši aux décimaux :

Après avoir, dans l'introduction, clairement défini le concept de nombre de telle manière qu'il recouvre l'ensemble des réels positifs, il annonce au début du livre II qu'il a découvert des fractions particulièrement intéressantes : ce sont des fractions dont les dénominateurs sont des puissances de dix et à qui il donne le nom de fractions décimales. Au lieu de noter ces nombres à la manière traditionnelle, c'est-à-dire à trois niveaux, le premier niveau pour la partie entière, le second pour le numérateur de la partie fractionnaire et le troisième pour son dénominateur, il utilise une nouvelle notation, plus concise et plus pratique pour les calculs.

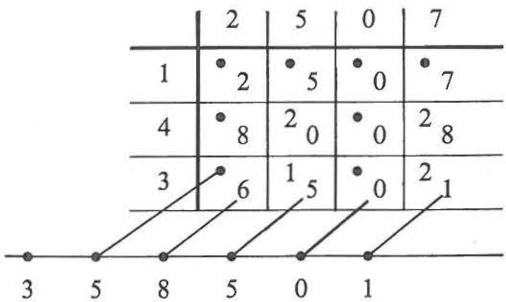
Ainsi, au lieu de noter

$$\begin{array}{c} 358, \\ 501 \\ 1000 \end{array}$$

il propose 358/501 qui se lit 358 unités et 501 dixièmes du 3[e] ordre, car il dénomme les fractions décimales dixième $(\frac{1}{10})$, dixième du 2[e] ordre $(\frac{1}{100})$, etc.

Mais c'est dans sa discussion de la multiplication des nombres fractionnaires qu'Al-Kaši invite le lecteur à écrire les nombres fractionnaires sur une ligne en séparant la partie entière de la partie fractionnaire en utilisant deux couleurs différentes, d'effectuer le produit comme si les nombres en présence étaient des entiers et une fois le résultat obtenu, de retrouver la partie entière à l'aide de la règle $10^{-n} \times 10^{-m} = 10^{-n-m}$.

L'exemple suivant est alors explicitement traité :



Ce qui donne $25{,}07 \times 14{,}3 = 358{,}501$.

Dans le livre III, Al-Kaši consacre un chapitre à l'arithmétique des décimaux dont il montre la similitude complète avec l'arithmétique des astronomes. A cette occasion, il insiste sur la facilité des calculs avec les décimaux.

Il est intéressant de relire à ce propos le passage concernant les décimaux et traduit par M. Souissi [S] :

"Comme nous avons déterminé le rapport de la circonférence au diamètre dans notre "risala al muhitya" avec une précision atteignant le 9e ordre, nous avons cherché à convertir ce résultat en nombres indiens afin que le calculateur non initié à la pratique des astronomes ne soit pas en difficulté.

Nous avons pris pour dénominateur de la fraction de la circonférence 10 000 répété 5 fois.

Il s'agit là d'un nombre abstrait : tout se passe comme si on avait divisé l'unité en dix parties égales, chacune de ces parties en dix, et ainsi de suite indéfiniment ; nous avons nommé les premières parties dixièmes, les suivantes dixièmes du 2e ordre, puis du 3e ordre et ainsi de suite. Les ordres des nombres entiers et les ordres des différentes parties présentent entre eux un rapport constant comme dans le calcul des astronomes. Nous avons dénommé ces parties fractions décimales. Nous devons inscrire les dixièmes ou unités du 1er ordre à droite des unités (entières), celles du 2e ordre à droite des premières, celles du 3e ordre à droite de celles du 2e, et ainsi de suite.

La partie entière et la partie décimale forment une seule ligne.

Les opérations sur ces nombres : multiplication, division, extraction des facteurs premiers et autres, suivent la méthode des astronomes... On reconnaît également les différents ordres selon le même procédé : l'ordre des unités (entières) est zéro : les dizaines et les dixièmes sont d'ordre un, les centaines et les unités décimales suivantes sont d'ordre deux, les milliers et les millièmes d'ordre 3, etc.

L'ordre du produit de deux facteurs simples est la somme de leurs ordres respectifs si les deux facteurs sont du même côté par rapport aux unités entières, c'est leur différence s'ils sont de part et d'autre des unités...

Pour convertir les nombres entiers du système sexagésimal en nombres indiens, on multiplie les nombres de l'ordre le plus fort par 60, on ajoute le résultat aux unités de l'ordre immédiatement inférieur et ainsi de suite".

Après avoir expliqué la nature des décimaux, Al-Kaši énonce toutes les règles de conversion d'un type de fractions à l'autre.

Ainsi, pour transformer le nombre "376 dixième d'ordre 3" (c'est-à-dire 0,376) en une fraction sexagésimale, il propose :

1. Multiplier 376^{III} par 60, on obtient 22 et 560^{III}
2. Multiplier 560^{III} par 60, on obtient 33 et 6^{III}
3. Multiplier 6^{III} par 60, on obtient 36.

La réponse est alors $22' \; 33'' \; 36'''$.

Plusieurs tableaux de conversion sont ajoutés aux textes.

Al-Kaši ne se contente pas de définir les décimaux mais il utilise cette numération en plusieurs endroits dans Miftah al-hisab. Ainsi nous les avons rencontrés dans les livres II et III et nous les retrouvons dans les calculs de surfaces : plusieurs exemples sont traités dans les deux numérations et l'auteur précise qu'il veut amener le lecteur à s'exercer sur les différentes méthodes et à vérifier ses résultats.

Enfin, dans le livre V, pour illustrer les règles de résolution de certains problèmes d'algèbre, il utilise des nombres fractionnaires notés soit en numération décimale soit en numération sexagésimale.

V.3 - Pour terminer ce paragraphe concernant la contribution d'Al-Kaši à la découverte des décimaux, nous voudrions citer Youschkevitch [Y] (p. 74) :

"Les tentatives d'introduction des fractions décimales remontent à une époque antérieure à celle d'Al-Kaši. On fait état de leur utilisation en Chine. Bien qu'il en ait probablement entendu parler, Al-Kaši en revendique tout de même la paternité. Il est certain en tout cas que c'est lui qui, le premier, a clairement expliqué la théorie de ces fractions, les a utilisées couramment et a décrit les opérations les concernant...".

VI. VERS UNE EPISTEMOLOGIE DES DECIMAUX

VI.1 - Nous avons, dans les paragraphes précédents, survolé la chronologie des décimaux chez les Arabes et étudié les contributions d'Al-Uqlidisi et d'Al-Kaši dans ce domaine. Ceci nous amène à nous poser un certain nombre de questions : Quelle nécessité a fait naître les décimaux ? Peut-on imaginier un système de numération simple, utile et vivant sans les décimaux ? Quels obstacles ont empêché leur découverte et quels facteurs l'ont accélérée ?

Pour tenter de répondre à ces questions nous allons essayer de caractériser ce qui est constitutif des décimaux, étudier ce qui a pu soit freiner soit accélérer leur découverte et enfin les obstacles qui en ont entravé le développement. Notons cependant, dès à présent, que la complexité des facteurs en présence, l'influence des uns sur les autres, les données incomplètes et insuffisantes perturbent l'analyse et nous obligent à des simplifications nécessairement arbitraires.

VI.2 - Une première réponse à ces questions est évidente : on ne peut concevoir les décimaux avant d'avoir conçu une écriture décimale pour les nombres entiers. Ici, nous distinguons entre les fractions décimales qui ne sont que des fractions particulières et l'écriture décimale des réels positifs. Or, la représentation décimale des entiers naturels n'est pas une nécessité. La base 10 peut être remplacée par 60 (comme chez les Babyloniens) ou par 20 comme dans d'autres civilisations.

Ce qui nous paraît aujourd'hui, c'est que la numération de position à base 10 est, comme le dirait G. Bachelard, une numération qui "pense toute seule" et devient "opératrice de phénomènes". Son adoption par certaines écoles mathématiques d'Inde a permis de grands progrès dans les techniques calculatoires.

Cela, certains mathématiciens de l'Ecole de Bagdad l'ont vite compris et au lieu de conserver la numération grecque en usage chez leurs contemporains, ils ont proposé l'adoption du système de numération de position à base dix. Nous retrouvons la prise de conscience du caractère fécond de cette numération chez Al-Khawarizmi dans sa présentation du système : "nous avons décidé, dit-il, d'exposer la manière de compter des Indiens à l'aide de neuf caractères et de montrer comment, grâce à leur simplicité et leur concision, ces caractères peuvent exprimer tous les nombres. Nous faciliterons ainsi la tâche de celui qui veut apprendre l'arithmétique c'est-à-dire aussi bien les grands nombres que les petits et tout ce qui s'y rapporte..."

Nous devons insister ici sur le fait que l'arithmétique indienne ne fut pas systématiquement adoptée par les mathématiciens du VIII^e^ au X^e^ siècle. Au contraire, des mathématiciens aussi célèbres qu'Abu-l-Wafa ou Al-Karagi ne suivent pas cette voie (ils désignent les nombres par leurs noms et non par des symboles) et d'autres, tels qu'Al-Gili, utiliseront le système sexagésimal de position basé sur la numération ǧumal.

Les historiens des sciences ne s'expliquent toujours pas les raisons du rejet des chiffres indiens par de nombreux mathématiciens arabes. La découverte et l'assimilation de la science hellène ont-elles repoussé les techniques indiennes comme trop peu justifiées ? L'usage de l'arithmétique indienne fut-il associé à l'appartenance à quelques sectes mal vues, comme le suggère Cantor ? Ou bien, doit-on suivre Al-Uqlidisi qui, déjà au X^e^ siècle, notait l'aversion de ses contemporains pour l'arithmétique indienne et qui l'expliquait par son identification à l'usage de la planche à calculer qui, lui, est associé à des catégories sociales peu respectées (les scribes et les astrologues ambulants) ? Le texte suivant d'Al-Biruni (XI^e^ siècle) pourrait mieux nous éclairer sur les sentiments des savants arabes vis-à-vis de l'Inde :

"Les Indiens, écrit Al-Biruni dans l'introduction à son "Histoire de l'Inde", n'ont pas eu, comme les Grecs, de philosophes qui aient dégagé, dans leurs écrits, la matière purement scientifique, ils n'ont presque pas d'ouvrage qui ne soit un véritable fatras où se mêlent, en vrac et en désordre, toutes sortes de croyances populaires... L'esprit d'autorité est maître chez eux. C'est pourquoi j'affirme, pour ma part, ne pouvoir comparer leurs livres de calculs et de mathématiques qu'à des pierreries mélangées à des débris de poteries, à des perles éparpillées parmi de la fiente de chameau... ; pour eux, les deux espèces ont une valeur équivalente ; c'est qu'on ne trouve pas de cas où ils se soient attachés à établir un fait ou à fournir la démonstration d'un raisonnement...".

Ce dont nous sommes certains c'est que cette compétition entre différents systèmes de numération durera plusieurs siècles.

Le caractère expérimental de l'arithmétique indienne, pendant cette période de compétition, entraîne que, souvent, elle n'est adoptée que partiellement. Seuls les naturels sont notés en base dix. Lorsqu'il est nécessaire de faire intervenir des fractions, on utilise les minutes et les secondes.

VI.3 - Un autre obstacle va bloquer l'apparition des décimaux : le concept de nombre.

En effet, l'influence de la Grèce et de sa conception générale du monde va déterminer pendant longtemps chez les Arabes leur approche du nombre. Du VIII^{e} au X^{e} siècle, la plupart des mathématiciens arabes concevaient les nombres comme étant les multiples de l'unité. L'unité, elle-même, n'étant pas considérée comme un nombre. De même, les fractions ne sont pas des nombres mais des opérateurs sur les nombres. Ainsi, un quart n'est pas une fraction de l'unité (qui est indivisible) mais une partie de quatre.

Des considérations philosophiques et théologiques sont invoquées pour justifier cette conception du nombre et il faudra attendre une remise en question radicale de ces concepts pour faire évoluer la numération décimale.

Cette remise en question commencera avec le philosophe Al-Farabi qui est le premier à faire correspondre aux grandeurs rationnelles des "nombres" dits "rationnels" et aux grandeurs incommensurables des "nombres" dits "irrationnels". Puis au XI^{e} siècle, Al-Baghdadi représente le produit de deux segments par un segment et non par un rectangle (comme l'enseignait Euclide) et enfin, Umar al-Khayyam (1077) introduit explicitement une arithmétique sur une nouvelle catégorie de nombres qu'il conçoit "non comme une ligne, une surface, un corps ou un temps, mais une grandeur que l'esprit abstrait de tout et qui appartient aux nombres...".

Comme le dit Youschkevitch [Y] (p. 83) : "les mathématiciens des pays islamiques ne se contentèrent pas, comme les Indiens, d'utiliser les nombres irrationnels, ils en firent un objet d'études théoriques.

Pour cela, ils utilisèrent la théorie des proportions des mathématiciens grecs, l'analysèrent, la critiquèrent et développèrent ensuite leur propre théorie en étendant la notion de nombre à l'ensemble des nombres réels positifs".

L'élargissement du concept de nombre aux réels positifs va justifier une arithmétique élargie aux réels positifs et donc va entraîner la nécessité d'une unification de la numération à partir du système le plus simple.

Un siècle après Al-Khawarizmi et une génération après Al-Farabi, se trouvent réunis chez Al-Uqlidisi, le concept de nombre élargi aux rationnels, dépassant les a-priori philosophiques (il n'a pas peur de diviser l'unité), la maîtrise de l'arithmétique indienne et sa volonté d'universalisation du système de numération de position à base 10 à toute l'arithmétique. Toutes ces considérations l'amènent à utiliser naturellement les décimaux. Pour lui, un nombre fractionnaire est, d'abord, un nombre entier divisé par une certaine puissance de dix, c'est donc un nombre que l'on a déplacé vers la droite sur la planche à calculer. Les décimaux ne sont pas systématiquement utilisés ; ils n'apparaissent que lorsque leur usage facilite les calculs de certaines racines carrées ou cubiques.

Pourquoi l'œuvre d'Al-Uqlidisi est-elle restée inconnue ? Pourquoi, une fois les obstacles à leur découverte supprimés, les décimaux ne se sont-ils quand même pas développés ?

VI.4 - Le dépassement du premier obstacle décrit plus haut (l'adoption de l'arithmétique indienne) n'a pas entrainé dans la science arabe la liquidation de tout ce qui préexistait.

Bien au contraire, la découverte - à travers les traductions ou lors des voyages - par les savants arabes de nombreux systèmes de numération ayant fait leurs preuves et ayant répondu à des besoins divers pendant des siècles a entraîné chez eux une certaine circonspection. On voit ainsi les différents systèmes se développer parallèlement ou se chevaucher.

Certains, comme Abu-l-Wafa, n'utilisent pas l'arithmétique indienne mais ne désignent les nombres que par leurs noms, d'autres utilisent la numération alphabétique grecque et enfin un grand nombre de savants s'attachent à la numération ǧumal.

Nous allons étudier l'évolution de chacun de ces systèmes et le rôle qu'il a joué dans le développement des décimaux.

Remarquons que la désignation des nombres par leurs noms laisse rapidement la place à la numération plus facile inspirée de l'arithmétique indienne ou du ǧumal. Il en est de même pour la numération basée sur l'alphabet grec.

L'évolution du système ǧumal nous intéresse plus particulièrement. Nous allons voir comment ce système a pu éviter de se scléroser en s'adaptant à un système complet de numération de position sexagésimale, et arriver ainsi — à cause de son caractère parfaitement adapté aux besoins des longs calculs — à concurrencer sérieusement les décimaux.

VI.5 - Remplaçant la numération alphabétique grecque, la numération ǧumal sera basée sur les mêmes principes. G. Guittel signale dans [G] trois facteurs principaux qui ont amené l'essoufflement de ce système vers la fin du XI[e] siècle :

— Complexité de la nomenclature pour les nœuds relatifs aux grands nombres (rappelons que يجغثعوغشمج représente le nombre 13 576 343).
— Insécurité des calculs dues au désordre des valeurs numérales des lettres : 400 (ـتـ) vient juste après 2 (ـبـ) et précède 500 (ـثـ),...
— Confusions et erreurs qui s'introduisent dans les calculs en raison des points diacritiques dont l'oubli ou l'ajout ne peuvent être corrigés par le contexte.

Ces obstacles ont amené une double évolution du système ǧumal :

La première : Le système ǧumal originel avec ses vingt-huit symboles continuera à représenter les nombres dans les situations statiques (dater un événement, un monument, un poème ou numéroter les pages d'un livre ou les paragraphes d'un chapitre,...). Cet usage du ǧumal a survécu jusqu'à la fin du XIX[e] siècle. Signalons à ce propos l'article [Ya] de M. Yalaoui décrivant l'évolution du système ǧumal au Maghreb (5).

La seconde évolution : le système ǧumal est intégré, avec Al-Gili, dans un système complet de numération de position sexagésimale. Il

(5) Dans son article "hisab al ǧumal aù at tarikh bi hùrùf" [Ya], Yalaoui étudie les séquelles de la numération ǧumal dans la poésie et l'art arabes contemporains.

Se développant, à son début, dans les milieux d'astrologues, devins, mages et autres jeteurs de sort, la numération ǧumal est devenue un code que seuls quelques initiés connaissaient. Cependant, on la trouve aussi chez les historiens maghrebins qui l'utilisent pour dater les événements. Yalaoui cite plusieurs exemples maghrebins retrouvés à la fin de poèmes de circonstance ou gravés sur des pierres tombales et des constructions publiques.

Le poète est obligé de concilier trois contraintes :
— le respect des règles de la versification
— donner à chaque lettre sa valeur numérale conventionnelle
— grouper les lettres dans des mots, dont la succession possède une signification compte tenu du contexte.

Ces contraintes sont assez difficiles à concilier entre elles. Les adeptes de la numération ǧumal sont alors souvent amenés soit à observer les règles de la métrique, soit à introduire un terme qui n'a aucune signification pour compléter la valeur cherchée, soit enfin à donner une valeur non conventionnelle à une ou plusieurs lettres. Dans tous les cas, ils préviennent le lecteur que la phrase qui suit est codée en introduisant le mot "arrikh" qui veut dire "dater" ou l'un de ses dérivés et en ajoutant sous chaque mot sa valeur numérale.

devient alors dynamique et permet d'éviter les obstacles signalés plus haut grâce à l'adoption de deux conventions, l'une concernant le dessin de la lettre ج et l'autre les points diacritiques (6).

Ainsi, les grands nombres sont aisément représentés en numération de position surtout avec l'adoption du zéro (médial, terminal et opérateur). Un nombre est alors une succession de syllabes de deux lettres au maximum et il est d'autant plus grand que le nombre de syllabes est grand. Une bonne table de multiplication des soixante premiers entiers reste nécessaire.

D'autre part, il n'y a plus d'insécurité des calculs dues au désordre des valeurs puisque seuls quatorze nœuds sont retenus.

(ن م ل ك ى ط ح ز و ه د حـ ـ أ)

et la confusion due aux points diacritiques est atténuée car ج est remplacée par ـحـ et ne peut donc plus être confondue avec ح. يـ ne peut pas être confondue avec بـ bien que leurs points diacritiques soient supprimés parce que ـ en début de syllabe est toujours un يـ et en fin de syllabe, c'est un ـب.

Enfin le point diacritique de ن est maintenu pour ne pas le confondre avec يـ .

Cette évolution du système ǧumal en un système de numération sexagésimale complet le transforme en un système parfait de numération, utilisé principalement par les astronomes (7).

VI.6 - Le franchissement du second obstacle décrit plus haut (l'élargissement du concept de nombre aux réels positifs) est comme nous l'avons vu nécessaire à l'apparition des décimaux mais ce n'est pas une condition suffisante à leur développement.

Il ne suffisait pas, en effet, d'avoir une idée plus large des nombres, il fallait aussi accepter de changer un grand nombre d'habitudes et abandonner une terminologie et des techniques de calculs héritées de traditions millénaires, l'une, d'origine égyptienne (l'emploi des fractions unitaires) et l'autre, d'origine babylonienne (l'usage des fractions sexagésimales).

(6) Les points diacritiques ont été utilisés pour enseigner la numération de position aux Arabes. Ainsi les dizaines sont surmontées d'un point, les centaines de deux points, etc.

3 0 2 7 s'écrira ش خ ٧

Cet usage particulier des points diacritiques a été retrouvé dans un manuscrit arabe du XI[e] siècle et est signalé par le même Néophytos (XII[e]).

(7) Cette évolution dynamique ne se retrouve pas chez les poètes et les artistes du Maghrib qui utilisent les 28 nœuds, comme nous le voyons dans [Ya].

VI.7 - L'emploi des fractions unitaires est adapté à tous les calculs de la vie quotidienne. Artisans, arpenteurs, notaires ou marchands apprennent à transformer toute fraction en une somme de fractions unitaires dont le dénominateur ne dépasse pas dix (appelées "principales") ou en une somme de produits de telles fractions.

Ainsi, $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ est "exprimable" et c'est, pour eux, plus "élégant" et plus utile que "3 de 4" (c'est-à-dire 3/4). Certaines fractions principales ont un nom spécifique : la fraction $\frac{1}{6}$ est un danaq, un tasuğ est le quart d'un danaq et la "saira" le quart du tasuğ. Les manuels d'arithmétique enseignent les règles et les techniques de conversion nécessaires pour mener à bien les calculs avec ces fractions (par exemple, Al-Kaši donne dans Miftah al-hisab la table de multiplication des danaq, tasuğ et saira et leur consacre plusieurs développements).

Nous ne pouvons imaginer les difficultés qu'engendre l'adoption des décimaux qu'en suivant les nombreux paragraphes et tableaux que consacre Al-Kaši aux techniques de conversion des fractions unitaires en fractions décimales et les efforts didactiques qu'il est obligé de déployer pour montrer l'intérêt de ces conversions. Nous pouvons aussi comprendre la répulsion que peut engendrer un système dans lequel des fractions simples deviennent compliquées sinon inexprimables (un danaq devient "un dixième et 6 dixièmes de dixième et 6 dixièmes d'ordre 3 et ainsi de suite). N'est-ce pas trop demander pour un résultat minime ?

VI.8 - Alors que la tradition égyptienne s'est perpétuée dans les calculs de la vie pratique, la tradition babylonienne s'est, quant à elle, maintenue dans les calculs savants et en particulier en astronomie.

Une fois l'usage des fractions sexagésimales adopté et perfectionné avec l'introduction du zéro, leur abandon devint presque impossible. Cette tradition est restée si bien ancrée qu'elle s'est perpétuée en grande partie jusqu'à nos jours.

Al-Khawarizmi et les savants de Bagdad continueront à utiliser les degrés, les minutes, les secondes et les tierces. Pour effectuer un calcul avec ces fractions, il fallait reconvertir en tierces, effectuer les calculs en arithmétique indienne puis reconvertir le résultat en sexagésimal.

Ces procédés, qui nous semblent compliqués, ne doivent pas nous surprendre outre mesure puisque la plupart de nos contemporains les utilisent fréquemment chaque fois qu'ils opèrent sur des mesures de temps ou d'angles.

Les savants arabes n'ont pas éprouvé le besoin en astronomie d'abandonner un système de numération en usage depuis les Babyloniens : les calculs et les modes de présentation des résultats (mesures et observations astronomiques - tables diverses,...) étant déjà bien élaborés et utilisables.

Cependant, le perfectionnement des techniques utilisées dans les observations, les erreurs trouvées dans les travaux de leurs prédécesseurs, la nécessité de maîtriser les calculs aptes à améliorer les résultats ont amené les savants arabes à adopter une arithmétique sexagésimale intégrant le zéro (des Indiens) et permettant d'effectuer tous les calculs sur les nombres, qu'ils soient grands et petits, entiers ou fractionnaires, et d'atteindre une précision dans leurs calculs jamais atteinte auparavant (8).

Avec Al-Ğili, les astronomes arabes ont développé une arithmétique qui, du point de vue de sa conception théorique, est un système complet de numération de position et possède tous les avantages du système décimal, bloquant ainsi ce dernier dans son développement.

VI.9 - Le système de numération décimale restera donc bloqué dans son développement. Il se heurtera à la résistance à un changement qui impliquerait de la part du commun et de l'homme de sciences trop d'efforts d'adaptation et d'assimilation. On passera de la maîtrise des décimaux chez Al-Uqlidisi comme technique transposée à l'écrit à partir de la planche à calculer, à leur théorisation chez Al-Kaši, comme représentation des réels positifs.

Al-Kaši est à l'aise avec les décimaux, non seulement comme représentation des nombres fractionnaires, mais comme outil facilitant les calculs. Nous réalisons, avec Al-Kaši, que tous les obstacles ont été franchis et qu'il en a pris conscience : l'héritage de Umar al-Khayyam est assimilé et les nombres dans leur généralité sont définis en quelques lignes ; l'arithmétique indienne est appréciée et explicitement généralisée à tous les nombres ; le principe du système de numération de position appliqué au système sexagésimal est adapté aux décimaux et l'auteur est conscient de l'importance du nouveau système qu'il décrit, puisque non seulement il lui donne un nom mais surtout il affirme être le premier à l'avoir inventé.

Enfin, ne négligeons pas sa volonté didactique qui est particulièrement illustrée par les nombreuses utilisations des décimaux dans des calculs où traditionnellement d'autres systèmes interviennent.

(8) Dans "Al-Risal al-Muhitya", Al-Kaši fixe la valeur de π avec une exactitude extraordinaire : il donne cette valeur en notation sexagésimale (au neuvième ordre)

$$\pi = 3, 8, 29, 44, 0, 47, 25, 53, 7, 25$$

et convertit ce résultat en "calcul indien" :

$$\pi = 3, 1415926535897932$$

Un siècle plus tard, Viète (1590-1603) calculait π avec une précision moindre.

VII. CONCLUSION

Nous avons étudié les obstacles à l'apparition des décimaux, le principal obstacle étant la résistance au développement de l'arithmétique indienne ; nous avons montré comment, une fois ces obstacles aplanis, avec Al-Uqlidisi, véritable précurseur qui maîtrise les décimaux mais qui ne se rend pas compte de leur importance, d'autres obstacles en ont bloqué le développement et nous avons enfin reconnu chez Al-Kaši le véritable inventeur d'une théorie des décimaux.

Que sont devenus les décimaux après Al-Kaši ? Se sont-ils développés dans la science arabe et ont-ils remplacé définitivement les autres systèmes ? Y a-t-il un lien entre Al-Kaši et S. Stevin ?

BIBLIOGRAPHIE

(L'ouvrage de A. Youschkevitch [Y] contient une excellente bibliographie sur les mathématiques arabes.)

[B] *Guy Brousseau,* Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques in "La problématique et l'enseignement de la mathématique". Publication de la C.I.E.A.E.M. (1976).

[G] *G. Guittel,* Histoire Comparée des Numérations Ecrites. Paris (Flammarion), 1975.

[K] *Al-Kaši,* Miftah al-hisab, Le Caire, 1967.

[L] *M. Levey and M. Petruck,* Principles of Hindu Reckoning, Madison-Milwakee.

[S] *A. Saïdan,* The earliest extant arabic arithmetic. Isis, 57, 1966.

[S_1] *A.S. Saïdan* : The Arithmetic of Al-Uqlidisi, D. Reidel, Dordrecht, 1978.

[Se] *Fuat Sezcin,* Geschichte de Arabischen Schrifttums, Band V, Mathematik, Leiden E.J. Brill, 1974.

[So] *Mohamed Souissi,* La langue des mathématiques en arabe, Tunis, 1968.

[St] *Georges Sarton,* History of the Decimal Idea, Isis, 1935, 23 : 152-244.

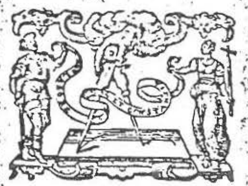
[Ya] *M. Yalaoui,* "Hisab al ğumal au at-tarikb bil huruf", Annales de l'Université de Tunis, 971.

[Y] *Adolf Youschkevitch,* Les Mathématiciens arabes (VIII^e au XV^e siècle), Paris (Vrin), 1976.

THIENDE

Leerende door onghehoorde lichticheyt allen rekeningen onder den Menschen noodich vallende, afveerdighen door heele ghetalen sonder ghebrokenen.

Beschreven door SIMON STEVIN *van Brugghe.*



TOT LEYDEN,
By Christoffel Plantijn.
M. D. LXXXV.

ARGUMENT.

LA Disme a deux parties, Definitions, & Operation. En la premiere partie se declarera par la premiere Definition, quelle chose soit Disme; Par la seconde, troisiesme & quatriesme, que signifie Commencement, Prime, Seconde, &c. & nombres de Disme.

En l'operation se declarera par quatre propositions, l'Addition, Soubstraction, Multiplication, & Division des nombres de Disme, Dequoy l'ordre se peut representer succinctement par telle table :

La Disme a deux parties.
- *Definitions, comme quelle chose soit*
  - *Disme.*
  - *Commencement.*
  - *Prime, Seconde, &c.*
  - *Nombre de Disme.*
- *Operation de*
  - *l'Addition.*
  - *Soubstraction.*
  - *Multiplication.*
  - *Division.*

A la fin du precedent sera encore appliqué une Appendice, declarant l'usage de la Disme par quelques exemples és choses.

SECONDE PARTIE DE LA DISME DE L'OPERATION.

PROPOSITION I, DE L'ADDITION.

ESTant donnez nombres de Disme à ajouster : Trouver leur somme :

Explication du donné. Il y a trois ordres de nombres de Disme, desquels le premier 27 ⓪ 8 ① 4 ② 7 ③, le deuxiesme 37 ⓪ 8 ① 7 ② 5 ③, le troisiesme 875 ⓪ 7 ① 8 ② 2 ③.

Explication du requis. Il nous faut trouver leur somme. *Construction.* On mettra les nombres donnez en ordre comme ci joignant, les aioustant selon la vulgaire maniere d'aiouster nombres entiers, en ceste sorte:

			⓪	①	②	③
		2	7	8	4	7
		3	7	6	7	5
8	7	5	7	8	2	
9	4	1	3	0	4	

Donne somme (par le 1 probleme de l'Arithmetique) 941304, qui sont (ce que demonstrent les signes dessus les nombres) 941 ⓪ 3 ① 0 ② 4 ③. Ie di, que les mesmes sont la somme requise. *Demonstration.* Les 27 ⓪ 8 ① 4 ② 7 ③ donnez, font (par la 3e definition) $27\frac{8}{10}$, $\frac{4}{100}$, $\frac{7}{1000}$, ensemble $27\frac{847}{1000}$, & par mesme raison les 37 ⓪ 6 ① 7 ② 5 ③ vallent $37\frac{675}{1000}$, & les 875 ⓪ 7 ① 8 ② 4 ③ feront $875\frac{782}{1000}$, lesquels trois nombres, comme $27\frac{847}{1000}$, $37\frac{675}{1000}$, $875\frac{782}{1000}$, font ensemble (par le 10e probleme de l'Arith.) $941\frac{304}{1000}$, mais autant vaut aussi la somme 941 ⓪ 3 ① 0 ② 4 ③, c'est

c'est donques la vraye Somme, ce qu'il falloit demonstrer. *Conclusion.* Estant donques donnez nombres de Disme à ajouster, nous avons trouvé leur Somme; ce qu'il falloit faire.

Extrait de la Disme de Simon Stevin, 1585

B. Les décimaux, d'Al-Kaši à Stevin

1. Introduction

Dans son "History of the Decimal Idea" (S 2), Georges Sarton affirme que le mathématicien hollandais S. Stevin est réellement le seul inventeur des fractions décimales. Il ajoute : "Hence, even if decimal fractions were used previously by other men, it was Stavin — and no other — who introduced them into the mathematical domain".

Présentant une chronologie — presque complète (1) — des décimaux, Sarton montre que vers la fin du XVIe siècle l'idée décimale est "dans l'air" mais que seule la contribution de Stevin a été déterminante dans le développement ultérieur des mathématiques. A. Koyré reprend dans "La Science Moderne, la renaissance" le même discours.

Nous allons, dans cette note, présenter une lecture différente de la chronologie des décimaux, où le crédit attribué à Stevin ne prédominera pas, et où certaines certitudes seront remises en question.

2. Deux "inventions" des décimaux

2.1. Dans la première partie (A) de cette étude, j'analyse les facteurs qui ont encouragé l'invention des décimaux chez les arabes et ceux qui ont freiné leur développement. Je montre, en particulier, que la réunion des deux facteurs suivants a été indispensable à l'apparition des décimaux :

a) Une parfaite connaissance de l'arithmétique indienne, c'est-à-dire de la numération décimale de position pour les entiers et la maîtrise des opérations effectuées sur les nombres ainsi notés.

b) Un élargissement du concept de nombre, non seulement à l'unité, mais à tous les rationnels, ce qui permet d'utiliser les fractions dans tous les calculs.

2.2. Ces deux facteurs se sont trouvés réunis dans l'esprit d'Al-Kaši qui, de plus, a appréhendé de façon approfondie le système sexagésimal complet. C'est, d'ailleurs, par analogie avec ce système qu'il invente les décimaux, les définit et montre la validité de leur usage dans les mêmes conditions que pour les entiers. Son manuel "Miftah al-hisab" rédigé en 1427 montre, sans aucun doute possible, qu'Al-Kaši comprend l'intérêt, l'importance et l'usage de ce qu'il appelle son "invention" (2).

---

(1) Dans sa chronologie des décimaux, Sarton donne une place importante aux précurseurs européens de Stevin, mais ne cite d'Al-Kaši que sa "Risala almuhitiya". Il ignore certainement "Miftah al-hisab" d'Al-Kaši et ne peut connaître Al-Uqlidisi, qui n'a été découvert qu'en 1966 par A.S Saydan [S].

(2) Il est difficile d'accepter de parler de l' "invention des décimaux" même dans le cas d'Al-Kaši. En effet, les histo riens des Sciences pensent qu'Al-Kaši connaissait les pratiques décimales des Chinois.

2.3. On retrouve, un siècle et demi après Al-Kaši, une même maîtrise de l'arithmétique indienne dans l'œuvre de S. Stevin qui, lui aussi, unifie la notion de nombre et la généralise aux fractions et aux irrationnels.

S'inspirant, peut-être, des nombres géométriques et des multinomies (3) — c'est-à-dire les polynomes — il réinvente les décimaux. Dans son traité "La Disme" (Leyden 1585), il définit les décimaux et propose "d'expédier par nombres entiers sans rompuz (c'est-à-dire sans fractions) tous comptes se rencontrant aux affaires des hommes" ; chaque décimale est suivie de son ordre inscrit dans un cercle.

Ainsi 365,435 est noté par Stevin 365 ⓪ 4 ① 3 ② 5 ③

Cette notation est en retrait (4) par rapport à celle d'Al-Kaši qui, rappelons-le, séparait la partie fractionnaire de la partie entière par un trait vertical ou inscrivait au-dessus de chaque décimale son ordre ou se contentait d'indiquer l'ordre de la dernière décimale.

Stevin est conscient du rôle simplificateur que peuvent jouer les décimaux dans tous les calculs et il engage ses contemporains à en user dans toutes leurs activités. C'est certainement à ce titre que son rôle de précurseur est indéniable et que son génie est à admirer.

2.4. Plus de cent cinquante années séparent "Miftah al-hisab" de "La Disme". Peut-on montrer que Stevin a été influencé directement ou indirectement par Al-Kaši ? Qu'est-il advenu de l'idée décimale, la notation et les techniques de calculs inventées par Al-Kaši ? Sont-elles retombées dans l'oubli ? Cela ne serait pas surprenant. N'avons-nous pas vu dans (A) que les obstacles au développement des décimaux sont si grands qu'ils peuvent venir à bout de l'idée décimale pendant plusieurs siècles (d'Al-Uqlidisi au X^{e} siècle à Al-Kaši au XV^{e} siècle) : en a-t-il été de même après Al-Kaši ?

Pour pouvoir tenter de répondre à ces questions, il nous faut, d'abord, rappeler quelques données historiques.

---

(3) Les multinomies sont notées par Stevin d'après une notation imitée de Bombelli (1530-1572) :

3 ③ + 5 ② + ① + 136 ⓪ veut dire $3x^3 + 5x^2 + x + 136$

Il suffit alors de remplacer 1 par $\frac{1}{10}$, 2 par $\frac{1}{100}$ etc. pour noter le nombre décimal 136,153.

(4) Il faut cependant signaler la remarque de Brousseau donnant une interprétation pédagogique à ce retrait "... Il me semble au contraire qu'il s'agit d'un choix commandé par des raisons didactiques. L'exposant devait rester marqué comme indicateur de l'unité pour permettre le lien encore nécessaire à la fois avec la pratique des calculs de l'époque et avec la théorie des polynomes..." (p. 70).

3. L'héritage d'Al-Kaši

3.1. La première moitié du XV^{e} siècle a vu l'émergence et l'apogée de l'école de Samarcande sous le règne d'Ulug Bek. Al-Kaši y eut une influence incontestée et incontestable. Elle fut dirigée après sa mort (1429)* par le savant et astronome Al-Kussi.

Lorsque le prince Ulug Bek fut assassiné par l'un de ses fils en 1449, les savants ne furent plus protégés ni encouragés par le nouveau pouvoir. Ils se dispersèrent alors vers de nouveaux foyers culturels et scientifiques. C'est la fin de l'école de Samarcande.

A la même époque, l'empire turc se constituait et se stabilisait, La prise de Constantinople (1453) eut un retentissement énorme en Europe et en Asie, en pays de Chrétienté et en pays d'Islam. Dès son installation à Constantinople — qui deviendra Istambul —, le sultan Mohamed Le Conquérant y attirera les savants et les intellectuels musulmans les plus renommés. Ce siècle d'or de l'empire Ottoman aura sa capitale à Istambul où se rencontreront Chrétiens, Juifs et Musulmans.

La Turquie héritera de l'école de Samarcande.

3.2. Al-Kaši est lu en Turquie. Son livre "Miftah al-hisab" (La clé de l'arithmétique) est retranscrit plusieurs fois (il existe encore aujourd'hui à la Bibliothèque Yopkapi d'Istambul des copies de ce livre dont l'une a été retranscrite à Istambul même en 1468). Plusieurs auteurs publient aussi des analyses des travaux d'Al-Kaši.

Al-Kussi, quant à lui, s'installe en Turquie et y reprend ses travaux et son enseignement scientifique. Il écrit, en particulier, une "risala l'fatihiya" (traité introductif à la cosmographie) qu'il dédicace au sultan Mohamed le Conquérant. Son œuvre sera lue, retranscrite et largement commentée.

D'autre part, les tables astronomiques d'Ulug Bek terminées en 1440 et écrites en persan sont traduites à Istambul et enseignées.

Enfin Miram Salabi diffuse dans différentes villes turques les travaux des maîtres de l'école de Samarcande en les admirant. Or, Salabi est le petit-fils de l'un des savants les plus illustres de Samarcande, Qadi Zâda ar-Rumi, mort en 1436.

3.3 Dans un recueil byzantin d'un auteur anonyme du XV^{e} siècle, cité par Youschkevitch (Y), on lit : "Les Turcs font les multiplications et les divisions selon un procédé particulier de calcul. Ils ont introduit (leurs) fractions depuis qu'ils règnent dans notre pays." Ce témoignage écrit atteste avec assez de sérieux que l'innovation due à Al-Kaši a dû être diffusée et enseignée en Turquie dans la seconde moitié du XV^{e} siècle. Les exemples que l'on trouve dans ce recueil byzantin sont clairs. Le produit

* Certains datent de 1436 la mort d'Al-Kaši

des nombres décimaux 153,5 et 16,25 est calculé exactement comme nous le ferions aujourd'hui. Les chiffres utilisés ne sont pas indo-arabes mais ce sont les neuf premières lettres numérales grecques.

Le zéro est représenté par un point. Enfin la partie fractionnaire est séparée de la partie entière par une barre verticale. Ainsi 153,5 est noté

$$\alpha\epsilon\gamma \,|\, \epsilon$$

3.4. Les notations d'Al-Kaši pour les décimaux se retrouvent dans les travaux du mathématicien juif, Elijah Ben Abraham Misrahi (1455-1525) qui a vécu à Istambul. Son manuscrit "Sefer ha-mispar" imprimé en 1525 expose des techniques de conversion des fractions sexagésimales en fractions décimales.

3.5. Enfin l'astronome ottoman Taqi ad-Din Ben Maarouf publie dans Kharitat-ad-durar (1585) des tables décimales de sinus et de tangentes.

3.6. Si l'idée décimale — telle qu'elle a été codifiée par Al-Kaši — a pu influencer les savants en Europe, elle ne peut l'avoir fait que par l'intermédiaire de la science ottomane. Or, deux traces des éléments de transmission existent encore aujourd'hui. L'une est très vague et l'autre assez tardive. En effet, la première vient du fait que le manuscrit byzantin cité plus haut (3.3.) a été amené à Vienne en 1562. Il a pu attirer l'attention de quelque mathématicien averti. Mais ce n'est là que conjecture gratuite. La seconde apparaît dans le livre "De planis triangulis" (Venise 1592) de G.A. Magini (1557-1617) qui utilise des décimaux avec une virgule séparant la partie entière de la partie fracionnaire et explique comment convertir les fractions sexagésimales en décimales en se référant explicitement à Misrahi et en lui attribuant l'invention de ces méthodes.

Il est clair que toute hypothèse de pénétration de l'idée d'Al-Kaši en Europe basée seulement sur ces deux éléments serait bien fragile à démontrer.

Pourtant, on ne peut que s'interroger sur l'origine du bourgeonnement puis de l'éclosion soudaine de l'idée décimale un peu partout en Europe dès le début du XVI[e] siècle.

4. La réinvention des décimaux en Europe

4.1. N'est-ce pas Christoph Rudolff, mathématicien et auteur du premier manuel d'arithmétique en langue allemande (1625), qui utilise dans son livre "Exempel Büchlin" (Augsburg 1530), des décimaux admettant la barre comme séparatrice ?

Exempel Büchlin

Rechnung belangend. darbey / ein nutzliche Instruction / wöllicher gestaldt die vergleychnus / der Elnmaß durch den Zirckel / der Pfund durch abwegen / der Thrayd / Weyn / vnd Olmaß rc. Durch abfechtenn der Müntz / durch ganghafften yren werde / gegen einander zůerlernen vñ ergründē sey. Zů Wien in Osterreych / durch Christoffen Růdolff / seynē schůlern zů sonderer übüg auch allen handthierungen personen zů nutz vnd gůtem verfertigt.

M. D. XXX.

375. 1875.
fl. 393|75 hauptgůt vñ gewin des erstē jars.
196875
413|4375 Andern
20671875
434|109375 Dritten
2170546875
455|81484375 Vierdten
227907421875
478|6055859375 Fünfften
23930279296875
502|535865234375 Sechsten
2512679326171875
527|66265849609375 Sibenden
263831329248046875
554|0457914208084375 Achteten
27702289571044921875
581|748080991943359375 Neündtē
2908740409059716796875
fl. 610|83548504154052734375 Zehētē
ß 6|68788033232421875000
₰ 20|61640996972656250000.

72 Die 120 fl tragē 2 jar p̄ hauptgůt zins vnd zinszins 132 fl 2 ß 12 ₰. Bringt zinß vñ zinszins 12 fl 2 ß 12 ₰. Darnach die 250 fl tragē 3 jar Hauptg. zins vñ zinszinß 289 fl 3 ß 7 ₰ $\frac{1}{2}$. Vnd ist halber zins des vierdtē jars 7 fl 1 ß 26 ₰ 1

ספר המספר
להחכם האלהי מוהר"ר
אליה המזרחי ז"ל
בקושטנטינא
קרית אדוננו המלך הגדול והאדיר
שולטאן שולימאן
ירום הודו ויתנשא · בשנת פתים עפרים לתלכן :

בבית נעיר סתתקקים קטן התלמידים
גרשם בן קהו"ר משה בן החכם התמלב הרר
ישראל נתן סונצין בן שמואל בן הר"ר משה ז"ל
ושנה נלחם בעיר פיזט עד הרמע פרא יואן
די קלםיפטור אשר גרש אותי עם כל חילו משם :
והוא היה דור הקמיסר לאהר"ר משה משמירים סנוכר
בתוספות תעקך · שנת כי טר ריתי בארץ נכרים

מאמר שני שער שני פרק ראשון

785043	00989
	60
0	59340
	60
35	60420
	60
36	24000
	60
14	40000
	60
24	00000

ואולם

Dans un calcul d'intérêts, il montre qu'un capital de 375 fl. devient au bout de dix ans

610 | 83548504154052734375

un nombre décimal ayant 20 chiffres après la virgule qui est dans ce cas une barre. Ses longs calculs montrent que, bien qu'il n'expose nulle part la théorie des décimaux, Rudolff en comprend bien le principe et en maîtrise la pratique.

Il est admis que l'influence générale de Rudolff au XVIe siècle est grande, en particulier sur les travaux de Stevin.

4.2. Avec le mathématicien français Viète, l'usage des fractions décimales est explicitement encouragé. En effet, dans son "Universales Inspections" (Paris 1579), Viète dit :

> "En mathématiques les soixantièmes et les soixantaines doivent être d'un usage rare ou nul. Au contraire, les Millièmes et les Mille, les centièmes et les centaines, les dizièmes et les dizaines, et les progressions du même genre, ascendantes ou descendantes, doivent être d'un usage fréquent ou constant."

Cette déclaration, six ans avant la Disme de Stevin, montre que l'idée décimale n'était pas seulement "dans l'air" comme le dit Sarton, mais elle était encouragée et pratiquée par un certain nombre de mathématiciens de l'époque.

Viète écrit les nombres décimaux en séparant chaque tranche de mille par une virgule et écrit la partie décimale en caractères plus petits tout en la soulignant.

$125,992,\underline{106}$ représente chez lui 125 992,106

(Il est intéressant de remarquer le caractère didactique de cette notation qui permet de sous-entendre un dénominateur décimal.)

Ailleurs, dans le même ouvrage, Viète utilise une barre verticale comme séparatrice.

4.3. Bien que Stevin publie en 1585 "La Disme" en latin et en français, il ne semble pas avoir eu une influence, directe ou indirecte, sur un certain nombre d'auteurs. Ceux-ci utilisent les décimaux avec la notation de Viète, de Rudolff, de Misrahi ou d'Al-Kaši et non celle de Stevin. Ainsi en est-il de Magini (Venise 1592) qui s'inspire explicitement de Misrahi.

De même, le père jésuite Christophe Clavius (1537-1612) publie un traité sur l'Astrolabe (Rome 1593) dans lequel les tables de sinus sont décimales et les parties fractionnaires sont séparées par un point.

Le Suisse Joost Bürgi (1552-1632), horloger, astronome et inventeur utilise un zéro qu'il place sous le dernier entier pour séparer les parties entière et fractionnaire. Ainsi, pour lui

$14\underset{0}{1}4$ veut dire 141,4

Bürgi sera cité en 1616 par Kepler comme l'inventeur des décimaux. Remarquons que Bürgi découvrira en 1610 — indépendamment de Napier — les logarithmes.

Enfin, il faut citer Johann Hartmann Beyer (1563-1625). Lui aussi publie — en 1603 — un livre dans lequel l'idée et la pratique décimales sont appelées par lui "le calcul mécanique". Il déclare avoir eu l'idée en 1597 en transposant au système décimal complet les méthodes de calcul des astronomes qui utilisent un système sexagésimal complet.

Sarton s'interroge longuement sur l'influence de Stevin sur Beyer. Ce dernier ne semble pas mentionner Stevin dans ses travaux et insiste sur l'originalité de son travail. Bien que Sarton reste sceptique, il est difficile de le suivre. En effet, l'analyse de l'idée décimale telle qu'elle apparaît chez Stevin montrerait que sa justification viendrait d'une analogie avec les polynomes, d'où la notation qu'il utilise.

Alors que Beyer, tout comme Viète et comme Al-Kaši, justifie les décimaux à partir du calcul des astronomes. Sa notation pour les décimaux est exactement celle proposée par Al-Kaši : il place au dessus de chaque chiffre son ordre (325,25 est noté $3\ 2\ 5\ \overset{I}{2}\ \overset{II}{5}$) et plus souvent il ne marque que la dernière décimale, le marquage se faisant en chiffres romains.

4.4. L'éclosion de l'idée décimale au XVIe siècle a, sans aucun doute, été couronnée par "La Disme" de Stevin (et accessoirement par Beyer) qui ont eu le mérite d'avoir été les défenseurs conscients et les propagandistes résolus de la pratique décimale.

Stevin a, en outre, eu le génie d'en dramatiser l'importance en en illustrant l'utilité dans des domaines divers et distincts. Son exercice d'arithmétique-fiction, à la fin de "La Disme", le montre comme le précurseur certain de notre monde métrique contemporain. L'idée décimale a eu la chance de pouvoir être largement diffusée au XVIe et XVIIe siècles grâce à l'apparition du livre imprimé et surtout grâce à la découverte, par Napier et Briggs, des logarithmes décimaux, qui consacrera la victoire définitive du "calcul à la plume", c'est-à-dire de l'arithmétique indienne.

5. Conclusion

5.1. Les mathématiciens européens de la fin du XVe siècle et du XVIe siècle ont-ils connu la pratique décimale des Turcs, issue de l'enseignement de l'école de Samarcande ?

A la lecture de ce qui précède, on ne peut ni le nier, ni l'affirmer.

5.2. Le nier impliquerait que l'idée décimale s'est réinventée au XVIe siècle en Europe. C'est bien cette thèse que retiennent les historiens des sciences. Pour eux l'idée décimale en Europe aurait pour source deux courants :

— Un premier courant issu des tentatives de calculs assez précis des racines carrées ou cubiques. Ces techniques, déjà utilisées aux X^e et XI^e siècles par les mathématiciens arabes, sont illustrées par exemple dans l'œuvre de John de Meurs de Lisieux (Paris 1343) qui, en calculant $\sqrt{2}$, remarque que ce nombre est égal à

$$\frac{1}{1000}\sqrt{2\,000\,000} = \frac{1}{1000}\,1414 = 1 \quad 24'50\,''24''$$

et il ajoute : "On peut dire que la racine de 2 est une unité quatre dizièmes un centième et quatre dixmillièmes".

Cette même technique est améliorée dans les œuvres de J. Von Gemunden (m.1442), Peurbach (m.1461), Regiomontanus (1467), Borghi (1484), Pellizati (1492) et Rudolff (1525).

— Un deuxième courant issu de l'utilisation du système sexagénisal complet. Cette technique est illustrée dans les tables Alphonsines et dans les œuvres de Levi ben Gershon (m.en 1344) ou de Mordecai Courtino (m.en 1482) qui utilisent la barre verticale pour séparer la partie fractionnaire de la partie entière, toutes deux notées en sexagésinal.

5.3. Nier complètement l'influence des Turcs nous laisse insatisfaits et comme d'autre part nous ne pouvons affirmer le contraire, nous tenterons seulement d'expliquer ce qui a pu se passer :

— Ou bien les mathématiciens de l'époque connaissaient l'origine turque de la pratique décimale mais ont volontairement omis d'en mentionner l'origine.

Deux raisons, au moins, peuvent militer pour une telle omission.

La première viendrait d'une pratique expliquée par E.P. Goldschmidt dans son livre "Medieval Texts and their First Appearance in Print". Il décrit l'auteur médiéval dans son cabinet de travail : "... Ayant conçu le projet d'écrire un livre,... il se met en quête d'autres ouvrages sur des sujets analogues,... ; trouve-t-il quelque chose qu'il croit pouvoir utiliser qu'il en recopie les passages utiles ou même des chapitres entiers sur des feuilles de vélin qu'il garde dans sa cellule pour s'en servir en temps utile..." (p. 90). Goldschmidt ajoute : "... L'indifférence des érudits du Moyen-Age à l'identité précise des auteurs dont ils étudiaient les livres ne fait pas de doute..." (p. 116).

Cette habitude des auteurs du Moyen-Age était déjà dénoncée par de Thou (1553-1617) qui écrit à propos du mathématicien contemporain Clavius "... Il ne faisait que copier les œuvres d'autrui, taisant le Nom des Auteurs, où il puisait, sans que de son côté il y apportât d'autre industrie que de ramasser, de ranger et d'éclaircir ce qui était répandu en divers endroits des livres dont il se servait, et qui n'y était pas écrit avec tout l'ordre et toute la clarté que l'on eût pu souhaiter..."

(Ce jugement, qui se voulait sévère envers Clavius, nous apparaît comme étant le meilleur hommage qu'on puisse présenter à un bon pédagogue qui a rendu de grands services à la science.)

La deuxième raison qui aurait pu militer pour l'omission de l'origine turque de la pratique décimale, c'est qu'elle vient d'un pays ennemi, sinon barbare et qui en plus, est contemporain. Ce devait être difficile d'accepter de mentionner l'origine turque de l'idée décimale surtout après la prise de Constantinople. Mais ce qui gêne dans cette thèse, c'est que la culture et la science arabes n'avaient pas encore totalement perdu de leurs prestiges aux XVe et XVIe siècles comme nous le prouve l'influence attestée sur certains de ses contemporains européens du mathématicien arabe Al-Qalasadi (m.1474).

On peut penser que ceux parmi les mathématiciens qui avaient réellement assimilé l'arithmétique indienne ont considéré que la pratique décimale des Turcs n'était qu'un prolongement naturel du "calcul à la plume" et l'ont utilisé naturellement sans avoir besoin de citer des sources.

5.4. A l'issue de cet article, il est intéressant d'affirmer la nécessité d'une analyse plus approfondie des textes concernés pour pouvoir tenter de réellement conclure.

BIBLIOGRAPHIE

(B) IREM de Bordeaux : Compte rendu et Analyse de Travaux sur la numération (1977).

(C) A.C. CROMBIE : Histoire des Sciences (400 à 1650), P.U.F.

(D.I.) Pierre DEDRON et Jean ITARD : Mathématiques et mathématiciens - Magnard (1959).

(S 1) Georges SARTON : "Simon Stevin of Bruges", I.S.I.S., 1934, 21 : 241-303.

(S 2) Georges SARTON : "History of the Decimal Idea", I.S.I.S., 1935, 23 : 152-244.

(S) A.S. SAYDAN : The arithmetic of Al-Uqlidisi, Dordrecht/Boston, 1978.

(T) Histoire générale des Sciences (P.U.F.)
Tome 1 : La Science antique et médiévale
Tome 2 : La Science moderne

(Y) Adolf P. YOUSCHKEVITCH : Les Mathématiques arabes (VIIIe XVe siècles), Vrin (1976).

Pierre de Fermat
1601 - 1665

Historique du dernier théorème de Fermat*

par Paulo RIBENBOIM
(Queen's University, Kingston, Canada)
traduit par Daniel DUCLOS, Université de Lyon I

Le problème

Pierre de Fermat (1601-1665) était un juge français qui vécut à Toulouse. C'était un esprit universel qui s'est intéressé à la poésie, au droit mais essentiellement aux mathématiques. Sa principale préoccupation était la résolution d'équations en nombres entiers. Il a étudié par exemple les équations du type :

$$X^2 - d.Y^2 = \pm 1$$

dans lesquelles d est un entier positif (qui n'a pas de facteurs carrés). Il a trouvé une infinité de solutions. Il a aussi découvert quels étaient les entiers naturels n que l'on pouvait écrire comme somme de deux carrés, à savoir ceux qui vérifient la propriété suivante : tout diviseur premier p de n congru à 3 (mod 4) doit diviser n avec un exposant pair.

Voici ce que Fermat écrivit dans la marge du livre de Bachet sur les travaux complets de Diophante :

"Il est impossible d'écrire un cube comme somme de deux cubes, une puissance quatrième comme somme de deux puissances quatrièmes, et ainsi de suite, excepté pour la puissance 2. J'ai trouvé une démonstration mais la marge de ce livre est trop petite pour qu'elle puisse y tenir."

Cet exemplaire est maintenant perdu mais ce texte apparaît pour la première fois en 1670 dans l'édition des travaux de Fermat que son fils Samuel de Fermat a édité à Toulouse.

Dans le volume II de l'"Histoire de la Théorie des Nombres" de Dickson, il est dit que l'affirmation de Fermat a été faite à peu près en 1637. Tannery (en 1883) mentionne une lettre de Fermat à Mersenne (pour Sainte-Croix) dans laquelle il lui demandait de trouver deux cubes dont la somme soit un cube et deux puissances quatrièmes dont la somme soit une puissance quatrième.

* Cet article est la version française, très enrichie, d'un article paru en 1976 dans "The Mathematical Intelligencer" (N° 11) que les éditions Springer nous ont aimablement autorisés à traduire. Ce texte est devenu en 1979 la première des *13 Lectures on Fermat's Last Theorem*, de P. Ribenboim, chez Springer.

Cette lettre se trouve, avec la date de juin 1638, dans le volume 7 de la "Correspondance du Père Marin Mersenne" (1962) ; voir aussi Itard (1948).

Ce même problème a été posé à Frénicle de Bessy (1640) dans une lettre à Mersenne, et à Wallis et Brouncker dans une lettre à Digby (1657), mais Fermat ne faisait pas allusion à la démonstration qu'il en avait faite.

Voici la formulation du problème de Fermat en langage contemporain.

Si n est un entier naturel plus grand que 2, l'équation $x^n + y^n = z^n$ n'a pas de solutions en nombres entiers tous différents de 0.

On n'a trouvé aucune démonstration de cette assertion dans les documents de Fermat. Cependant il démontra que les équations

$$x^4 - y^4 = z^2 \qquad \text{et} \qquad x^4 + y^4 = z^4$$

n'avaient pas de solutions en nombres entiers différents de 0. Il faut remarquer que c'est une des deux uniques démonstrations que fit Fermat en théorie des nombres et qui furent conservées (1). Toutes les autres affirmations de Fermat se sont révélées exactes à quelques exceptions près. C'est pour cette raison que ce problème s'appelle "le dernier théorème de Fermat" en dépit du fait qu'il n'a jamais été démontré.

Le cas le plus connu d'erreur qu'ait fait Fermat fut d'affirmer que les nombres $F_n = 2^{2^n} + 1$ étaient toujours premiers. Cependant, Euler a montré que F_5 n'était pas premier. Sierpiński et Schinzel ont également détecté d'autres erreurs de Fermat.

Les mathématiciens se sont posés la question de savoir si Fermat avait la démonstration de ce théorème. Peut-être un moment s'est-il laissé abuser et a-t-il cru avoir une telle preuve ? En dépit de son honnêteté et de sa franchise à reconnaître les imperfections de ses conclusions, il est néanmoins difficile aujourd'hui de comprendre pourquoi les mathématiciens les plus notables n'arrivent pas à retrouver la démonstration de Fermat.

Pour illustrer la bonne foi de Fermat, voici un extrait de sa lettre du 18 octobre 1640 à Frénicle de Bessy :

"Mais je vous advoue tout net (car par advance je vous advertis que comme je ne suis pas capable de m'attribuer plus que je ne scay, je dis avec même franchise ce que je ne scay pas) que je n'ay peu encore démonstrer l'exclusion de tous diviseurs en cette belle proposition que je vous avois envoyée, et que vous m'avez confirmée touchant les nombres 3, 5, 17, 257, 65 537, etc. Car bien que je réduise l'exclusion à la plupart des nombres, et que j'aye même des raisons probables pour le reste, je

(1) L'autre démonstration, incomplète mais très intéressante, a été mise en évidence et reproduite par Hofmann (1943, pages 41-44). Fermat a montré que les seules solutions en entiers du système $x = 2y^2 - 1$, $x^2 = 2z^2 - 1$ sont $x = 1$ et $x = 7$.

n'ay peu encore démonstrer nécessairement la vérité de cette proposition, de laquelle pourant je ne doute non plus à cette heure que je faisois auparavant. Si vous en avez la preuve assurée, vous m'obligerez de le ma communiquer : car après cela rien ne m'arrestera en ces matières''.

Egalement dans une lettre à Pascal (29 août 1654), Fermat propose le même problème.

''Au reste, il n'est rien à l'avenir que je ne vous communique avec toute franchise. Songez cependant, si vous le trouvez à propos, à cette proposition : les puissances carrées de 2, augmentées de l'unité, sont toujours des nombres entiers :

$$2^2 + 1 = 5,\ 2^{2^2} + 1 = 17,\ 2^{2^3} + 1 = 253,\ 2^{2^4} + 1 = 65\,537,$$

sont premiers, et ainsi à l'infini. C'est une proposition de la vérité de laquelle je vous réponds. La démonstration en est très malaisée, et je vous avoue que je n'ai pas pu encore la trouver pleinement ; je ne vous la proposerais pas pour la chercher si j'en étais venu à bout.''

Remarquons au passage que Pascal écrit à Fermat :

''Je vous tiens pour le plus grand géomètre de toute l'Europe''.

De part sa réputation de mathématicien, il est hautement improbable que Fermat ait pu affirmer son théorème simplement parce qu'il avait réussi à le démontrer sur les petits exposants.

Pourtant, Gauss croyait que les résultats de Fermat étaient pour la plupart des extrapolations faites à partir de cas particuliers. Gauss écrivait en 1807 : ''L'arithmétique a ceci de particulier, c'est que la plupart des beaux théorèmes se découvrent de façon inductive alors que les démonstrations ne se font qu'avec des difficultés extrêmes. Ainsi ce fut le grand mérite d'Euler que d'avoir démontré des théorèmes que Fermat avait découvert semble-t-il par induction''.

Gauss n'avait pas la plus haute estime pour ce genre de problèmes bien que lui-même eût donné une démonstration valable pour l'exposant 3. Le 31 mars 1816, il écrivit à Olbers à propos du récent concours mathématique de l'Académie des Sciences de Paris concernant le théorème de Fermat :

''Je vous sais infiniment gré de vos nouvelles concernant le Prix de Paris. Cependant, j'avoue que le théorème de Fermat est un résultat isolé qui m'intéresse assez peu, car je pourrai trouver une foule d'autres petites propositions du même type dont on ne saurait pas si elles sont démontrables ou non''.

Pour essayer de prouver le théorème de Fermat pour tout entier n au moins égal à 3, nous faisons les remarques suivantes : Si le théorème est vrai pour un entier m, et si n est un multiple de $m (n = l.m)$, alors le théorème subsiste pour n. Autrement dit, si x, y, z sont des entiers non nuls, et si $x^n + y^n = z^n$, alors $(x^l)^m + (y^l)^m = (z^l)^m$, ce qui contredit l'hypothèse. Puisque tout entier n au moins égal à 3 est un multiple de 4 ou d'un nombre premier p autre que 2, il suffit de prouver la conjecture de Fermat pour $n = 4$ et pour tout nombre premier p autre que 2.

Il est d'usage de considérer deux cas. Nous dirons que le *premier cas* du théorème de Fermat est vrai pour l'exposant p s'il n'existe pas d'entiers x, y, z tels que p ne divise pas x, y, z et $x^p + y^p = z^p$.

Le *deuxième cas* est vrai lorsqu'il n'existe pas d'entiers x, y, z, tous différents de 0, tels que p divise x, y, ou z, pgcd $(x,y,z) = 1$ et $x^p + y^p = z^p$.

II - Premières tentatives de démonstration

On savait déjà depuis l'antiquité que la somme des carrés de deux entiers pouvait être égale au carré d'un autre entier. Puisque Pythagore a démontré que les mesures a, b, c des côtés d'un triangle rectangle satisfont à la relation $a^2 + b^2 = c^2$, cela signifie qu'il existe de tels triangles dont les côtés sont mesurés par des nombres entiers.

Mais la situation devient différente lorsqu'il s'agit de la puissance troisième, ou quatrième, ou d'une puissance supérieure.

Comme nous l'avons déjà dit, Fermat a donné une démonstration dans le cas de la puissance quatrième. Sa méthode est très ingénieuse ; Fermat l'a appelée *méthode de la descente infinie*. Elle est bâtie sur le modèle suivant : Si une certaine équation $f(X,Y,Z) = 0$ a des solutions en nombres entiers a, b, c par exemple avec $c > 0$, la méthode consiste à chercher une autre solution en nombres entiers a', b', c' avec $0 < c' < c$. En répétant cette procédure un certain nombre de fois, on trouvera une solution en nombres entiers a'', b'', c'' avec $0 < c'' < 1$ ce qui est absurde. Cette méthode utilise le bon ordre de l'ensemble des nombres naturels.

Ce problème de Fermat a suscité de plus en plus l'intérêt des mathématiciens et les plus brillants esprits se mirent également au travail.

Euler fut le premier à résoudre le cas $n = 3$. En supposant que $z^3 = x^3 + y^3$, il écrivit $z^3 = 2a(a^2 + 3b^2)$ où $2a$ et $(a^2 + 3b^2)$ sont premiers entre eux ou ont un diviseur commun égal à 3. On est conduit à étudier les nombres impairs $a^2 + 3b^2$ qui sont des cubes (a et b premiers entre eux), la forme de leurs diviseurs et à en déduire le résultat en utilisant la méthode de descente infinie. Les propriétés requises pour les nombres $a^2 + 3b^2$ devraient être déduites d'une étude délicate sur la divisibilité et étaient absentes de la démonstration publiée dans le livre d'Algèbre d'Euler (1822). Cette démonstration, avec la même lacune, fut reproduite par Legendre. Plus tard, des mathématiciens intrigués par ces omissions furent capables sans trop de difficultés de refaire la démonstration sur des bases plus solides. Dans le langage actuel, les nombres $a^2 + 3b^2$ sont des normes dans le corps $\mathbf{Q}(\sqrt{-3})$ ($\mathbf{Q}$ étant le corps des rationnels) et les propriétés requises sont la conséquence du théorème de l'unicité de la décomposition qui est vrai dans ce corps.

Gauss a indiqué une autre démonstration dans le cas $n = 3$, mais cette démonstration n'était pas "rationnelle" car elle faisait intervenir les nombres complexes, ceux qui sont engendrés par la racine cubique de l'unité :

$$\zeta = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2},$$

autrement dit des éléments de $\mathbf{Q}(\sqrt{-3})$.

Il a utilisé intentionnellement les propriétés arithmétiques de ce corps : l'idée sous-jacente était d'appeler "entiers" des nombres de la forme $\dfrac{a + b\sqrt{-3}}{2}$ où a et b sont des nombres tous deux pairs ou tous deux impairs. Il fallait ensuite définir les critères de divisibilité, les entiers premiers, et utiliser l'unicité de la décomposition d'un entier en produit de puissances de nombres premiers. Il est ainsi apparu de nouvelles propriétés. Tout d'abord $\pm \zeta$ et $\pm \zeta^2$ sont des diviseurs de 1 puisque $\zeta^3 = 1$, et, pour cela, ils ne peuvent pas être pris en compte dans les propriétés de divisibilité. On devra donc modifier ces propriétés en les énonçants à des unités près. De plus, l'unicité de la décomposition en facteurs premiers, qui était jusqu'alors admise et utilisée, n'était en aucun cas immédiate ; en fait elle devenait fausse. Nous y reviendrons plus tard.

La démonstration de Gauss fut une des premières incursions dans la théorie des corps de nombres, c'est-à-dire les ensembles de nombres complexes qui s'obtiennent à partir des racines de polynômes au moyen des opérations rationnelles d'addition, soustraction, multiplication et division.

En 1820, des mathématiciens distingués, français et allemands, se passionnèrent pour la démonstration du théorème de Fermat.

En 1825, G. Lejeune-Dirichlet présenta à l'Académie des Sciences de Paris un article dans lequel il démontrait le théorème dans le cas $n = 5$. En fait, sa démonstration était incomplète, comme le fit remarquer Legendre qui fournit une autre démonstration. Ensuite Dirichlet a complété son article qui est paru dans le Journal de Crelle en 1828.

La démonstration de Dirichlet fait intervenir des nombres de la forme $a^2 - 5b^2$. Il analyse avec soin la nature de ceux de ces nombres qui sont des puissances cinquièmes lorsque a et b sont impairs, ou lorsque a et b n'ont pas la même parité et 5 ne divise pas a, 5 divise b et a et b sont premiers entre eux. De nos jours, ces propriétés résultent de l'arithmétique dans $\mathbf{Q}(\sqrt{5})$, car le théorème d'unicité de la décomposition est encore vrai dans $\mathbf{Q}(\sqrt{5})$.

En 1832, Dirichlet a établi le théorème pour $n = 14$.

Un pas important a été franchi par Lamé qui, en 1839, a démontré le théorème pour $n = 7$. Peu de temps après, Lebesgue a simplifié considérablement cette démonstration et est arrivé à son but en utilisant astucieusement l'identité :

$$(X+Y+Z)^7 - (X^7+Y^7+Z^7)$$
$$=7(X+Y)(X+Z)(Y+Z)[(X^2+Y^2+Z^2+XY+YZ+ZX)^2+XYZ(X+Y+Z)]$$

que Lamé avait déjà utilisée.

Alors qu'on étudiait les cas particuliers des petits exposants, Sophie Germain, mathématicienne française, démontra un théorème remarquable.

Auparavant, Barlow puis Abel mirent en évidence certaines relations que devaient vérifier x, y et z en supposant que $x^p + y^p = z^p$ (x,y,z non tous nuls). Sophie Germain démontra que :

Si p est un nombre premier impair tel que $2p + 1$ soit également premier, alors le premier cas du théorème de Fermat est véfifié pour p. Ces résultats furent communiqués par lettre à Legendre et Cauchy puisque les traditions de l'Académie empêchaient les femmes de présenter leurs découvertes en personne.

Il y a beaucoup de nombres premiers p tels que $2p + 1$ soit premier aussi. Toutefois, même aujourd'hui, on ne sait pas s'il y a une infinité de tels nombres.

En utilisant les idées de Sophie Germain, Legendre démontra le théo-ıème suivant :

Soient p et q deux nombres premiers impairs distincts et supposons que les deux conditions suivantes soient réalisées,

1 p n'est congru modulo q à aucune puissance $p^{\text{ième}}$

2 La congruence $X^p + Y^p + Z^p \equiv 0 \pmod{q}$ n'a aucune solution x, y, z, à moins que q ne divise xyz.

Alors, le premier cas du théorème de Fermat est valable pour p.

Ce résultat étant acquis, Legendre généralisa le théorème de Sophie Germain de la façon suivante :

Si p est un entier premier tel que $4p + 1, 8p + 1, 10p + 1, 14p + 1$ ou $16p + 1$ soit aussi premier, alors le premier cas du théorème de Fermat est valable pour l'exposant p.

Il s'ensuit donc que le premier cas du théorème de Fermat s'est trouvé démontré pour tous les premiers p plus petits que 100.

III - Le grand théorème de Kummer

Vers 1840, et au cours des années qui suivirent, Cauchy et Lamé travaillaient sur les valeurs de polynômes en racines de l'unité pour trouver une démonstration du théorème de Fermat valable pour des exposants quelconques. Déjà en 1840, Cauchy publia un long mémoire sur la théorie des nombres qui n'était pas directement relié au problème de Fermat. En

1847, Lamé présenta à l'Académie une "démonstration" du théorème et son article fut publié en entier dans le Journal de Liouville. Pourtant Liouville fit remarquer que la démonstration n'était pas valable car Lamé avait supposé tacitement que la décomposition en facteurs irréductibles de certaines expressions polynomiales en les racines $n$ièmes de l'unité était unique.

Il est intéressant de remarquer que Lamé avoue avoir utilisé les nombres complexes sur une suggestion de Liouville lui-même, alors que Cauchy prétendait qu'il était en train d'obtenir les mêmes résultats. En effet, pendant cette année, Cauchy fit 18 communications à l'Académie sur les nombres complexes, ou plus précisément sur les polynômes radicaux. Il essaya de prouver ce qui revient à l'algorithme euclidien, donc à l'unicité de la décomposition des entiers cyclotomiques.

En supposant que ces propriétés restaient valables, il obtint des résultats faux. Par la suite, il reconnut son erreur. Cependant on peut dire, en toute impartialité, que le procédé suivi par Cauchy l'a mené au résultat que Kummer a retrouvé en utilisant une terminologie et des notations plus appropriées. Voici un résultat remarquable de Cauchy (C.R. Acad. Sc. Paris - 25 - 1847 - p. 181) redécouvert plus tard par Genocchi et Kummer : si le premier théorème de Fermat est faux pour l'exposant p, alors la somme :

$$1^{p-4} + 2^{p-4} + \dots + \left(\frac{p-1}{2}\right)^{p-4} \text{ est un multiple de } p.$$

Aux environs de 1847, les mathématiciens étaient avertis de la subtilité et de l'importance de l'unicité de la décomposition des entiers cyclotomiques en facteurs irréductibles.

En Allemagne, Kummer s'est consacré à l'étude des corps cyclotomiques et très vite il s'est aperçu que le théorème de l'unicité de la décomposition n'était pas valable en général dans le corps $\mathbf{Q}(\zeta_p)$; la première fois que cela a eu lieu, c'était pour $p = 23$. C'est alors qu'il a pensé sauvegarder ce théorème, quitte à introduire un autre type de nombres. Voici un extrait d'une lettre de Kummer à Liouville :

"Encouragé par mon ami M. Lejeune-Dirichlet, je me permets de vous envoyer quelques copies d'une thèse que j'ai écrit il y a trois ans à l'occasion du centenaire de l'Université de Königsberg, ainsi qu'une thèse de mon étudiant et ami M. Kronecker, géomètre jeune et distingué. Dans ces mémoires, que je vous prie d'accepter en signe de ma plus haute estime, vous trouverez développées certaines questions concernant la théorie des nombres complexes racines de l'unité (c'est-à-dire solutions de l'équation $r^n = 1$) qui ont été récemment l'objet d'un débat à votre illustre Académie à l'occasion de la tentative de démonstration du théorème de Fermat par M. Lamé.

En ce qui concerne la proposition "Les nombres complexes composés peuvent se décomposer en facteurs premiers de façon unique", dont

COMPTE RENDU

DES SÉANCES

DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.

SÉANCE DU LUNDI 1er MARS 1847.

PRÉSIDENCE DE M. ADOLPHE BRONGNIART.

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS

DES MEMBRES ET DES CORRESPONDANTS DE L'ACADÉMIE.

M. le Président annonce la perte douloureuse que l'Académie vient de faire dans la personne de M. Benjamin Delessert, décédé le 1er mars 1847.

A l'occasion du procès-verbal, M. Milne Edwards présente les observations suivantes :

« Dans notre dernière séance, M. Serres m'a adressé quelques remarques à l'occasion de la présentation des Mémoires de MM. Prevost, Lebert et Baudement; n'ayant pu avoir communication de l'article dans lequel mon savant collègue se proposait de résumer ses observations, j'ai cru devoir ajourner l'impression de ma réponse. Aujourd'hui que j'ai sous les yeux cet article, il me semble inutile de reproduire ma réplique; car, pour le lecteur des *Comptes rendus,* elle ne paraîtrait pas avoir été motivée par l'argumentation de mon savant collègue. »

.....» Le théorème de Fermat, pour $n > 3$, n'est qu'un cas particulier de celui qui vient d'être démontré; car si A et B sont des entiers, ou s'ils se réduisent à α_0, β_0, M sera entier, ainsi que C, k, μ; mais μ', μ'',..., $\mu^{(n-1)}$ seront toujours des nombres complexes : seulement, leur produit devra être un module entier, c'est-à-dire que μ, μ',..., $\mu^{(n-1)}$ devront être les sous-facteurs d'un nombre entier de la forme $Y^2 \pm nZ^2$; enfin, les relations telles que (11) seront encore nécessaires, et la conclusion d'impossibilité sera la même. »

Observations de M. Liouville.

« Dans la communication qu'il vient de faire à l'Académie, M. Lamé a bien voulu déclarer qu'il a suivi une idée dont je lui avais fait part autrefois : celle d'introduire des nombres complexes dérivés de l'équation binôme $r^n - 1 = 0$ dans la théorie de l'équation $x^n - y^n = z^n$, pour essayer d'en conclure l'impossibilité de cette dernière équation, soit en nombres entiers ordinaires, soit même en nombres complexes de la forme indiquée. Une telle idée n'a rien de neuf en soi, et a dû se présenter naturel-

MÉCANIQUE APPLIQUÉE. — *Système de chemins de fer à roues motrices horizontales.* (Note de M. SEGUIER.)

M. le baron Seguier place sous les yeux de ses collègues, des modèles de locomotive et de wagon d'enrayage appropriés à son système de chemin de fer à roues motrices horizontales; en les faisant plusieurs fois fonctionner sur un plan incliné très-rapide, il fait comprendre comment, à l'aide de son dispositif mécanique, la cause d'adhérence des roues motrices sur la voie peut être trouvée dans la résistance même du convoi. Il fait aussi remarquer que le même principe de construction permet d'établir un frein aussi puissant que sûr, agissant de lui-même ou à la volonté d'un garde-frein, toutes les fois que cela est nécessaire. M. Seguier croit avoir ainsi pratiquement justifié les propositions qu'il avait eu l'honneur de formuler devant l'Académie, dans ses précédentes communications à l'occasion des chemins de fer.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Démonstration générale du théorème de Fermat, sur l'impossibilité, en nombres entiers, de l'équation $x^n + y^n = z^n$; par* M. LAMÉ.

« On sait qu'il suffit de démontrer cette impossibilité pour les cas où l'exposant n est un nombre premier. On possède des démonstrations particulières, relatives aux exposants 3, 5, 7; elles sont fondées sur la décomposition en deux facteurs du premier membre de l'équation. Mais quand on passe aux exposants 11, 13, 17, 19, etc., on se trouve arrêté par la trop grande inégalité des deux facteurs. Je cherchais depuis longtemps un genre de démonstration, applicable à tous les cas, et qui fût en quelque sorte indépendant de la grandeur de l'exposant, lorsque, il y a quelques mois, j'en causai avec M. Liouville; il me parut convaincu que la propriété négative, énoncée par Fermat, devait dépendre de certains facteurs complexes, récemment étudiés par les géomètres qui s'occupent de la théorie des nombres. C'était une nouvelle voie que je n'avais pas explorée; je l'ai suivie, et je suis parvenu au mode de démonstration que je vais exposer, et qui me paraît justifier la prévision de M. Liouville.....

lement aux géomètres d'après la forme du binôme $x^n - y^n$. Je n'en ai d'ailleurs déduit aucune démonstration satisfaisante, et, à vrai dire, je ne me suis même jamais occupé sérieusement de l'équation $x^n - y^n = z^n$. Toutefois, quelques essais me portaient à croire qu'il faudrait d'abord chercher à établir pour les nouveaux nombres complexes un théorème analogue à la proposition élémentaire pour les nombres entiers ordinaires, qu'un produit ne peut être décomposé en facteurs premiers que d'une seule manière. L'analyse de M. Lamé me confirme dans ce sentiment; elle a besoin, ce me semble, du théorème dont je parle: et pourtant je ne vois pas que notre confrère soit entré, à ce sujet, dans les détails que la matière paraît exiger. N'y a-t-il pas là une lacune à remplir? Je soumets cette observation à notre confrère, mais en exprimant la ferme espérance qu'il viendra à bout de toutes les difficultés, et qu'il obtiendra un nouveau et plus éclatant triomphe dans cette question épineuse où il s'est déjà tant distingué. Je rappellerai, en terminant, que depuis M. Gauss, et même depuis Euler et Lagrange, les géomètres se sont souvent occupés de nombres complexes. Le tome XVII de nos Mémoires renferme un grand travail de M. Cauchy, où ceux de ces nombres qui se rattachent à l'équation $r^n - 1 = 0$, jouent un rôle important. Mais pour le point spécial que j'ai signalé tout à l'heure, c'est surtout dans un article de M. Jacobi (*Journal de Mathématiques*, tome VIII, page 268), que l'on pourra trouver des renseignements utiles. »

A la suite de la lecture faite par M. Lamé, M. CAUCHY prend aussi la parole et rappelle un Mémoire qu'il a présenté à l'Académie dans une précédente séance (19 octobre 1846), et qui a été paraphé, à cette époque, par l'un de MM. les Secrétaires perpétuels. Dans ce Mémoire, M. Cauchy exposait une méthode et des formules qui étaient, en partie, relatives à la théorie des nombres, et qui lui avaient semblé pouvoir conduire à la démonstration du dernier théorème de Fermat. Détourné par d'autres travaux, M. Cauchy n'a pas eu le temps de s'assurer si cette conjecture était fondée. D'ailleurs, la méthode dont il s'agit était très-différente de celle que M. Lamé paraît avoir suivie, et pourra devenir l'objet d'un nouvel article.

PHYSIOLOGIE. — *Sur la découverte du siége distinct de la sensibilité et de la motricité; par* M. FLOURENS.

vous regrettez avec raison l'utilisation dans la démonstration (démonstration qui est d'ailleurs incomplète en d'autres points), je puis vous assurer qu'elle ne s'applique pas en général aux nombres complexes de la forme :

$$a_0 + a_1 r + a_2 r^2 + \dots + a_{n-1} r^{n-1}.$$

Il est cependant possible de sauvegarder ce théorème en introduisant une autre catégorie de nombres complexes que j'appelle *nombres complexes idéaux*. Les résultats de mes recherches dans ce domaine ont été communiqués à l'Académie de Berlin et publiés dans les Sitzungsberichte (Mars 1846). Un mémoire sur le même sujet paraîtra bientôt dans le Journal de Crelle. J'ai considéré depuis longtemps les applications de cette théorie à la démonstration du théorème de Fermat et j'ai réussi à en déduire l'impossibilité de l'équation $x^n + y^n = z^n$ à partir de deux propriétés du nombre premier n, de sorte qu'il ne me reste plus qu'à montrer que ces propriétés sont valables pour tous les nombres premiers. Dans le cas où ces résultats vous intéresseraient, vous pouvez les trouver publiés dans les Sitzungsberichte de l'Académie de Berlin ce mois-ci''.

Le théorème que Kummer mentionne dans sa lettre représente une avance substantielle par rapport à ses prédécesseurs.

Les nombres idéaux correspondent aux ''diviseurs'' d'aujourd'hui. Dedekind a considéré la notion équivalente d'*idéaux* qui sont des ensembles I d'entiers algébriques du corps des entiers cyclotomiques possédant les propriétés suivantes :

$0 \in \mathrm{I}$;

si $\alpha, \beta \in$ alors $\alpha + \beta \in \mathrm{I}$;

si $\alpha \in \mathrm{I}$ et si β est un entier cyclotomique quelconque alors $\alpha\beta \in \mathrm{I}$.

On peut multiplier les idéaux de la façon naturelle.

Chaque entier cyclotomique engendre un idéal principal constitué de tous les éléments $\beta\alpha$ où $\beta \in \mathrm{A}$ (A étant l'ensemble des entiers cyclotomiques).

Si tous les idéaux sont principaux, il y a factorisation unique dans ce corps, la réciproque étant également vraie.

Dans le cas où tous les idéaux n'étaient pas principaux, Kummer a voulu ''mesurer'' en quelque sorte l'existence d'idéaux non principaux. Il a donc considéré deux idéaux non nuls I et I$'$ comme équivalents lorsque I$'$ est constitué de tous les produits des éléments de I par un élément non nul quelconque du corps. Ainsi il n'y a qu'une classe d'équivalence lorsque tous les idéaux sont principaux. Kummer a démontré qu'il n'y en avait qu'un nombre fini dans chaque corps $\mathbf{Q}(\zeta_p)$.

Soit h_p le nombre de ces classes.

Si p ne divise pas h_p alors p est appelé un premier *régulier*. Dans ce cas, si l'idéal I^p est un idéal principal, alors I est lui-même un idéal principal. Toutefois, le principal résultat utilisé par Kummer est le lemme suivant :

Si p est un premier régulier autre que 2, si ω est une unité de l'anneau A des entiers cyclotomiques de $\mathbf{Q}(\zeta_p)$ et s'il existe un entier m tel que $\omega - m \in A(1 - \zeta)^{p-1}$, alors ω est la $p$ième puissance d'une autre unité.

La démonstration de ce lemme requiert des méthodes d'analyse profondes. Armé de la sorte, Kummer a démontré que le théorème de Fermat était valable pour tout exposant p qui était un premier régulier.

C'est ce théorème que Kummer a mentionné dans sa lettre à Liouville.

Au début, Kummer a cru qu'il existait une infinité de premiers réguliers. Mais au fur et à mesure que le temps passait, il s'est rendu compte que cette affirmation était loin d'être évidente. En fait elle n'est pas encore démontrée.

Le lecteur peut consulter un article récent de Edwards qui contient des discussions sur la genèse du théorème de Kummer et même des rumeurs concernant des lacunes dans une démonstration de Kummer.

IV - Entiers premiers réguliers

Pour décider de la régularité d'un premier, il est nécessaire d'évaluer le nombre des classes d'équivalence des idéaux du corps cyclotomique. Kummer réussit à trouver des formules pour évaluer h_p ; ces formules étaient assez bonnes pour rendre possible le calcul avec des exposants p relativement élevés. De cette façon il trouva que 37, 59, 67 étaient irréguliers ; ce sont en réalités les seuls qui soient inférieurs à 100.

Un fait intéressant dans cette étude est l'apparition des nombres de Bernoulli. On voit ainsi, dans la déduction de la formule du nombre de classes d'idéaux, des expressions du type :

$$1^k + 2^k + \ldots + (n-1)^k$$

qui devaient être calculées pour des grandes valeurs de k et de n. Il est aisé dans un premier temps de montrer qu'il existe un polynôme unique $S_k(X)$ à coefficients rationnels, de degré $k+1$, avec coefficient principal $\frac{1}{k+1}$ et tels que pour tout $n \geqslant 1$ sa valeur soit

$$S_k(n) = 1^k + 2^k + \ldots + n^k$$

Ces polynômes s'obtiennent de proche en proche et peuvent s'écrire :

$$(k+1)S_k(X) = X^{k+1} - \binom{k+1}{1}B_1X^k + \binom{k+1}{2}B_2X^{k-1} + \ldots + \binom{k+1}{k}B_kX.$$

Les coefficients B_1, B_2,... B_k avaient été découverts par Bernoulli. En fait Euler avait déjà étudié ces nombres et trouvé qu'on pouvait les construire en considérant l'inverse formel de la série

$$\frac{e^X - 1}{X} = 1 + \frac{1}{2!} X + \frac{1}{3!} X^2 + \frac{1}{4!} X^3 + \ldots$$

c'est-à-dire la série

$$\frac{X}{e^X - 1} = 1 + \frac{B_1}{1!} X + \frac{B_2}{2!} X^2 + \frac{B_3}{3!} X^3 + \ldots$$

On retrouve également cette série dans le développement de Taylor de la fonction cotangente

$$\operatorname{cotg} x = i + \frac{1}{x} \cdot \frac{2ix}{e^{2ix} - 1} .$$

On voit aisément que $B_k = 0$ pour tout entier k impair ($k \neq 1$).

Voici les premiers nombres de Bernoulli :

$B_1 = -1/2$; $B_2 = 1/6$; $B_4 = -1/30$; $B_6 = 1/42$; $B_8 = -1/30$ $B_{10} = 5/66$; $B_{12} = -691/2730$; $B_{14} = 7/6$; $B_{16} = -3617/510$; $B_{18} = 43867/798$. Le numérateur devient vite très grand ; ainsi $B_{34} = 2577687858367/6$.

Les nombres de Bernoulli ont des propriétés arithmétiques fascinantes mais nous ne les évoquerons pas maintenant. Mentionnons simplement leurs relations avec les fonctions *zéta* de Riemann.

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \text{ (pour } s > 1).$$

On a la formule suivante :

$$B_{2k} = (-1)^{k-1} \frac{2.(2k)!}{(2\pi)^{2k}} \zeta(2k) \text{ pour } k \geqslant 1.$$

Au cours de son étude, Kummer a montré qu'un entier premier p est régulier si et seulement si p ne divise aucun des numérateurs des nombres de Bernoulli B_2, B_4, ... B_{p-3}. Au vu des résultats acquis, il était raisonnable de supposer qu'il existait une infinité d'entiers premiers réguliers. En fait, ils apparaissent avec beaucoup plus de fréquence que les premiers irréguliers. Toutefois, cette conjecture semble même très difficile à prouver. [Paradoxalement, en 1915, Jensen a démontré de façon simple qu'il y avait une infinité d'entiers premiers irréguliers.]

Telle était la situation dans les années 1850. Le théorème était démontré pour des entiers premiers réguliers ; les nombres de Bernoulli étaient intervenus et la question principale demeura : comment procéder pour les exposants premiers irréguliers ?

V - Les travaux de Kummer sur les entiers premiers irréguliers

Kummer a commencé d'étudier en 1851 le cas où les exposants (de l'équation de Fermat) étaient des nombres premiers irréguliers. Pour cela, il fit des recherches profondes sur l'anneau des entiers cyclotomiques, en espérant en déduire les résultats escomptés.

Il n'est pas possible de rendre compte en si peu de place des considérations techniques de Kummer qui sont pour le moins étonnantes. Nous nous contenterons simplement de mentionner les points fondamentaux. Il a d'abord fait une étude soignée des périodes du polynome cyclotomique

$$\Phi_p(X) = X^{p-1} + X^{p-2} + \dots + X + 1.$$

Si q est un entier premier, $q \neq p$, si f est l'ordre de q (mod p), si $p-1 = fr$, et g est une racine primitive (mod p), Kummer a considéré les r périodes de f termes chacune $\eta_0, \eta_1, \dots \eta_{r-1}$ (déjà utilisées par Gauss).

Par exemple, $\eta_0 = \zeta + \zeta^{g^r} + \zeta^{g^{2r}} + \dots + \zeta^{g^{(f-1)r}}$, les autres périodes étant conjuguées à η_0.

Si A est l'anneau des entiers cyclotomiques, si A$'$ est l'anneau des entiers du corps $K' = \mathbf{Q}(\eta_0) = \dots = \mathbf{Q}(\eta_{r-1})$, Kummer montra que A était un module libre sur A$'$, de base $\{1, \zeta, \dots \zeta^{f-1}\}$ et que $A' = Z[\eta_0, \dots, \eta_{r-1}]$ est un groupe abélien libre de base $\{\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_{r-1}\}$. Il étudia également la décomposition de l'entier premier p dans l'anneau A$'$. Alors, Kummer a démontré le beau théorème qui dit que le groupe de classes d'idéaux du corps cyclotomique est engendré par les classes d'idéaux premiers dont la norme est un nombre premier.

Voici un autre outil utilisé dans cette étude : les fonctions cyclotomiques que Jacobi a été le premier à introduire. Si q est un entier premier impair du type $q = kp + 1$, si h est une racine primitive (mod q), ζ une racine primitive $p$ième de l'unité, η une racine primitive $q$ième de l'unité posons :

$$< \zeta , \eta > = \sum_{t=1}^{q-1} \zeta^{ind_h(t)} \eta^{(t)}$$

dans laquelle $\mathrm{ind}_h(t)$, l'indice de t (par rapport à h et q) est l'unique entier s, $1 \leqslant s \leqslant q-1$, tel que $t \equiv h^s$ (mod q) .

Pour tout entier d, posons :

$$\Psi_d(\zeta) = \sum_{t=1}^{q-2} \zeta^{ind_h(t) - (d+1) ind_h(t+1)}$$

Si Q est l'idéal de A engendré par q et $h^k - \zeta$ (où $q = kp + 1$) alors Q est un idéal premier de norme q, $Aq = \prod_{i=0}^{p-2} \sigma^i(Q)$ (où σ est un générateur du groupe de Galois).

Le principal résultat se rapporte à certains produits de conjugués de Q qui sont des idéaux principaux.

$$A < \zeta, \eta >^p = \prod_{i=0}^{p-2} \sigma^i(Q)^{g_{\pi-i}}$$

avec $g_e \equiv g^e (\mathrm{mod}\, p)$ et $\pi = \dfrac{p-1}{2}$; et si

$$I_d = \{ i \,|\, 0 \leqslant i \leqslant p-2,\ g_{\pi-i+ind_g(d)} > p \}$$

$$\text{alors } A\, \Psi_d(\zeta) = \prod_{i \in I_d} \sigma^i(Q)$$

Ces résultats ont servi à établir les congruences de Kummer :

Si x, y, z, sont des entiers premiers entre eux deux à deux, non multiples de p, tels que $x^p + y^p + z^p = 0$ alors

$$(Az)^p = A(x^p + y^p) = A(x + y) \sum_{k=0}^{p-2} A(x + \zeta^{g^k} y)$$

où g est une racine primitive mod p. Les idéaux $A(x+y) = I_0 p$ et $A(x+\zeta^{g^k}y)$ sont des puissances $p$ièmes d'idéaux, à savoir $A(x+y) = J_0^p$, $A(x+\zeta^{g^k}y) = J_k^p$ (J_k^p étant un conjugué de J_0). Pour chaque valeur de d, $1 \leqslant d \leqslant p-2$, et de I_d défini précédemment, $\prod_{i \in I_d} \sigma^i(J_0)$ est un idéal principal, appelons-le $A\alpha$, où $\alpha = F(\zeta)$ et $F(X)$ est un polynôme à coefficients dans $\mathbf{Z}$ et de degré au plus égal à $p-2$. On écrit alors :

$$\prod_{i \in I_d} (x + X^{g^i} y) = X^m [F(X)]^p + \Phi_p(X)\, M(X)$$

où $M(X) \in \mathbf{Z}[X]$.

En considérant ces polynônes comme des fonctions de la variable réelle $t > 0$, en posant $t = e$ et en choisissant convenablement la branche de la fonction logarithme, alors :

$$\sum_{i \in I_d} \log(x + e^{vg^i} y) = mv + \mathrm{p} \log F(e^v) + \log \left[1 + \frac{\Phi_p(e^v)\, M(e^v)}{e^{mv}\, [F(e^v)]^p} \right]$$

Si $D^n G$ désigne la dérivée $n$ième de $G(v)$ au point $v = 0$, alors Kummer a montré que pour $2s = 2,4,\dots\ p-3$ ($p \neq 2,3$), les congruences ci-dessous sont vraies :

$$[D^{p-2s} \log(x + e^v y)]\, B_{2s} \equiv 0\ (\mathrm{mod} p).$$

(B_{2s} désigne le nombre de Bernoulli d'indice $2s$).

Puisque $D^j \log(x + e^v y) = \dfrac{R_j(x,y)}{(x+y)^j}$ ($R_j(X,Y)$ est un polynôme homogène de degré total j, divisible par YX^j) en écrivant

$$R_j(X,Y) = X^j \, P_j(T)$$

il vient $P_{p-2s}(t)B_{2s} \equiv 0 \pmod{p}$ pour $2s = 2,4,\ldots p-3$.

Les polynômes $P_j(T)$ sont calculables par récurrence.

Avec ces congruences, Kummer a amélioré son résultat antérieur :

Si p divise le numérateur d'au plus un des nombres de Bernoulli B_2, $B_4,\ldots$, B_{p-3}, alors le premier cas du théorème de Fermat est valable pour p.

En 1905, Mirimanoff a généralisé ce résultat de Kummer de la façon suivante :

Si p ne divise pas le numérateur de l'un des nombres de Bernoulli suivants : B_{p-5}, B_{p-5}, B_{p-7}, B_{p-9} alors le premier cas du théorème de Fermat est vrai pour l'entier p.

Ce théorème est un exemple d'un "tour de force" ; toutefois, dû aux énormes calculs avec les nombres de Bernoulli, son application est limitée.

Il devenait de plus en plus clair qu'il faudrait utiliser des méthodes plus puissantes pour arriver à progresser dans ce domaine.

Plus tard, il y a eu le travail sensationnel de Wieferich et Mirimanoff au début de ce siècle, et l'utilisation par Furtwängler de la théorie des corps de classes pour simplifier ces résultats.

VI - D'autres résultats intéressants

En 1856, Grünert a étudié les valeurs des solutions éventuelles de l'équation de Fermat.

Il a démontré que si , y, z sont des entiers non nuls, tels que $x^n + y^n = z^n$, avec $0 < x < y < z$, alors nécessairement $x > n$. C'est simple à démontrer. Si par exemple $p = 101$, la plus petite solution non triviale, si elle existe, fera intervenir des nombres plus grands que 102^{101}.

En définitive, si on veut démontrer ou infirmer le théorème de Fermat, on devra manipuler de très grands nombres.

En 1894, Wendt, suivant les traces de Sophie Germain, a démontré un théorème intéressant. Considérons les déterminants W_n de la matrice "cyclique"

$$\begin{pmatrix} 1 & \binom{n}{1} & \binom{n}{2} & & \binom{n}{n-1} \\ \binom{n}{n-1} & 1 & \binom{n}{1} & \cdots & \binom{n}{n-2} \\ \binom{n}{1} & \binom{n}{2} & \binom{n}{3} & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Ce déterminant est égal à : $W_n = \prod_{j=0}^{n-1} [(1 + \zeta_j)^n - 1]$

avec $\zeta_0 = 1$ et $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_{n-1}$ racines $n$ièmes de l'unité.

Wendt a démontré que : "si p est un entier impair premier, si $h \geqslant 1$ est tel que $q = 2hp + 1$ est premier, si q ne divise pas W_{2h}, et si $p^{2h} \not\equiv 1$ (mod$q$) alors le premier cas du théorème de Fermat est vrai pour la valeur p".

Voici une première étape de la démonstration.

Si x,y,z sont des entiers non multiples de q et si $x^p + y^p + z^p \equiv 0$ (mod$q$) alors q divise W_{2h}.

Cela nous conduit donc au problème suivant : si p et q sont des entiers premiers impairs, la congruence $X^p + Y^p + Z^p \equiv 0$ (mod q) a-t-elle pour solution des entiers x,y,z non multiples de q ?

Evidemment, cela dépend de p et de q.

Si, étant donné p, il existe une infinité d'entiers premiers q tels que l'équation ci-dessus n'a pas les solutions demandées, alors le théorème de Fermat est faux pour la valeur p.

Toutefois, en 1909, Dickson a démontré que cette hypothèse était fausse. En effet, si $q \geqslant (p-1)^2 (p-2)^2 + 6p - 2$, alors l'équation ci-dessus a une solution satisfaisant aux hypothèses demandées.

La même année, Hurwitz a généralisé ce théorème dans un très joli article en dénombrant les solutions de l'équation :

$$\alpha_1 X_1^p + \alpha_2 X_2^p + \ldots + \alpha_n X_n^p \equiv 0 \pmod{q} .$$

Tout cela conduit à nouveau vers des recherches profondes concernant le nombre des zéros des polynômes sur un corps fini, qui se rattachent à l'hypothèse de Riemann.

VII - La Médaille d'Or et le Prix Wolfskehl

En 1816, puis en 1850, l'Académie des Sciences de Paris a proposé d'offrir une médaille d'or et un prix de 3 000 francs au mathématicien qui démontrerait le théorème de Fermat. En 1856, les membres du jury étaient Cauchy, Liouville, Lamé, Bertrand et Chasles.

Voici le rapport de Cauchy :

"Onze mémoires ont été remis au Secrétariat. Mais aucun d'eux n'a résolu la question proposée. Seulement les Commissaires ont remarqué dans la pièce inscrite sous le n° 2 une solution nouvelle du problème dans le cas spécial développé par Fermat lui-même, où l'exposant est le nombre 4.

"Ainsi, après avoir été plusieurs fois remise au concours, la question en est restée au point où l'a laissée M. Kummer. Toutefois, les sciences mathématiques n'ont qu'à se féliciter des travaux que le désir de la résoudre à fait entreprendre aux géomètres, spécialement à M. Kummer ; et les Commissaires pensent que l'Académie prendrait une détermination utile et honorable si, en retirant la question du concours, elle adjugeait la médaille à M. Kummer pour ses belles recherches sur les nombres complexes composés de racines de l'unité et de nombres entiers."

En 1908, le très important Prix Wolfskehl, d'un montant de 100 000 Marks fut proposé dans des conditions analogues par le "Königliche Gesellschaft der Wissenschaften" de Göttingen (Allemagne).

"En vertu des pouvoirs qui nous ont été conférés par Dr Paul Wolfskehl, décédé à Darmstadt, nous avons décidé d'offrir un prix de cent mille marks à la personne qui sera la première à démontrer le théorème de Fermat.

Dans son testament, Dr Wolfskehl a fait remarquer que Fermat (OEuvres, Paris 1892 – Vol. 1. P. 291 – Observation 2) affirmait, mutatis mutandis, que l'équation $x^\lambda + y^\lambda = z^\lambda$ n'avait pas de solutions en entiers pour tout entier premier impair λ. Ce théorème doit être démontré, soit en suivant les idées de Fermat, soit en complétant les recherches de Kummer (Journal de Crelle - Vol XL page 130 ; Abhandlungen der Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1857) pour tous les exposants λ où l'équation a un sens. (Voir Hilbert, Theorie der algebraischen Zahlkörper 1894-5, et Enzyklopädie der Mathematischen Wissenschaften (1900-1904), I.C. 4b-page 713).

On devra suivre la procédure suivante :

Le Königliche Gesellschaft der Wissenschaften de Göttingen décidera en toute liberté de la personne à qui on remettra le prix. Cet organisme refusera tout manuscrit écrit uniquement dans le but d'obtenir le prix. Il ne prendra en considération que les mémoires parus sous forme de monographie dans des journaux périodiques ou qui sont en vente dans les librairies. Les auteurs de tels mémoires devront en faire parvenir au moins cinq exemplaires au jury.

Sera exclu du concours tout travail publié dans une langue inconnue des membres du jury. Cependant les auteurs de tels travaux auront la possibilité de fournir une traduction dans la langue requise, pourvu qu'elle soit aussi fidèle que possible.

La société décline toute responsabilité pour le non-examen de documents qui n'auraient pas été portés à sa connaissance, de même que pour les erreurs qui résulteraient du fait qu'un auteur ou une partie du travail seraient inconnus de la Société.

La Société conserve le droit de décision, dans le cas où plusieurs personnes auraient trouvé la solution du problème, ainsi que dans le cas où la solution serait un travail d'équipe. Elle serait souveraine pour le partage éventuel du prix.

La remise du Prix ne pourra pas avoir lieu avant les deux années qui suivent la publication du travail du lauréat, cela pour permettre aux mathématiciens de tous pays de faire connaître leurs objections éventuelles concernant la validité de la solution publiée.

Dès que le prix sera décerné, le lauréat en sera informé et les résultats seront publiés partout où le prix a été annoncé pendant l'année précédente. L'attribution de ce prix ne fera l'objet d'aucune contestation ultérieure.

Le paiement de ce prix au lauréat sera effectué dans les trois mois qui suivront son attribution, par le Caissier de l'Université de Göttingen ou alors en un endroit quelconque que les lauréats désigneront, mais à leurs risques et périls.

La date limite d'attribution de ce prix est fixée au 13 septembre 2007.

Le concours est déclaré ouvert à partir de ce jour, suivant les clauses énumérées ci-dessus.

Göttingen, le 27 juin 1980
Die Königliche Gesellschaft der Wissenschaften

Un rectificatif daté de 1958 établit que le prix de 100 000 Marks a été réduit à 7 600 Marks en vertu de la dévaluation de la monnaie.

Dr. F. Schlichting, de l'Institut de Mathématiques de l'Université de Göttingen, a été assez aimable pour me fournir les dernières informations concernant le "Wolfskehl Prize".

Göttingen, 23 mars 1974

Cher Monsieur,

Vous voudrez bien m'excuser pour le retard que j'ai eu pour répondre à votre lettre. Je vous joins une copie de l'annonce officielle qui précise le réglement du concours et une note de l'Académie qu'on envoie habituellement aux personnes désireuses de concourir pour le prix (actuellement légèrement supérieur à 10 000). On n'a pas vraiment compté le nombre total des solutions qui ont été reçues. Au cours de la première année (1907-8), 627 "solutions" ont été enregistrées à l'Académie et actuellement la correspondance atteint 3 mètres de hauteur sur ce problème. Au cours des dernières décades, le secrétariat de l'Académie a travaillé de la façon suivante : le courrier était d'abord réparti en deux : 1. Le courrier complètement absurde qui était retourné immédiatement à ses auteurs. 2. Le courrier qui avait des allures mathématiques. Ce second paquet est envoyé au département de Mathématiques pour être ensuite lu par des *assistants*. Pour l'instant je suis la victime. Il y a environ 3 ou 4 lettres auxquelles il faut répondre chaque mois. Il y a d'ailleurs des envois curieux, par exemple celui qui a envoyé la première moitié de la solution en promettant la seconde si on lui payait 1000 DM d'avance, ou encore un autre qui m'avait promis 10 % de ses droits d'auteur à venir sur ses publications futures ainsi que sur ses interviews radio et T.V. lorsqu'il serait célèbre ; il fallait pour cela que je le défende dès à présent auprès du jury, sinon, il menaçait d'envoyer mon manuscrit à une Université Soviétique pour nous priver de la gloire de l'avoir découvert. De temps à autre aussi quelqu'un arrive à Göttingen et insiste pour être reçu personnellement.*

En gros, toutes les "solutions" sont d'un niveau mathématique assez élémentaire (utilisant des notions de mathématiques du lycée ou quelquefois des concepts non assimilés de théorie des nombres) mais peuvent être cependant très compliquées à comprendre. Socialement, les auteurs sont souvent des personnes d'un niveau d'études techniques, qui n'ont pas réussi dans leur métier et qui cherchent le succès avec la démonstration du problème de Fermat. J'ai fait passer quelques manuscrits à des docteurs qui ont diagnostiqué dans certains cas une schizophrénie avancée.

Une des dernières volontés de Wolfshehl était que l'Académie fasse publier chaque année, dans les principaux périodiques mathématiques, une annonce mentionnant l'existence de ce prix. Au bout de quelques années, les périodiques commencèrent à refuser car ils commençaient d'être noyés sous l'envoi de manuscrits absurdes. Jusqu'à maintenant, le meilleur avantage a été apporté par une des clauses, permettant l'utilisation des intérêts que produirait la somme originelle de 100 000 DM et c'est de cette façon que les directeurs du département de Mathématiques de Göttingen (Klein, Hilbert, Minkowski) ont pu inviter Poincaré en 1910 pour six conférences à Göttingen.

Depuis 1948, cependant, la somme résiduelle n'a pas été touchée.

J'espère que ces informations vous seront profitables et je reste à votre disposition pour des renseignements complémentaires.

Sincèrement vôtre
F. Schlichting

* N.D.T. - Dans les universités allemandes, la fonction d'assistant est voisine de celle des universités françaises.

BIBLIOGRAPHIE

Nous ne citons que les ouvrages en rapport direct avec l'aspect historique de l'article.

? FERMAT, P. Lettre à Mersenne, pour Sainte-Croix (Septembre 1936 ?, 1637 ?, Juin 1638 ?). Oeuvres, III, pages 286-292. Gauthier-Villars, Paris 1896.

1640 FERMAT, P. Lettre à Mersenne (Mai ? 1640). Oeuvres, II, pages 194-195. Gauthier-Villars, Paris, 1894.

1640 FERMAT, P. Lettre à Frénicle de Bessy (18 octobre 1640). Oeuvres, II, pages 206-212. Gauthier-Villars, Paris 1894.

1654 FERMAT, P. Lettre à Pascal (29 août 1654). Oeuvres, II, pages 307-310. Gauthier-Villars, Paris, 1894.

1657 FERMAT, P. Lettre à Digby (15 août 1657). Oeuvres, II, pages 342-346. Gauthier-Villars, Paris, 1894.

1807 GAUSS, C.F. Journal des Savants de Göttingen, 10 mars 1807.

1816 GAUSS, C.F. Letter to Olbers (March 21, 1816). Oeuvres, X_i, pages 75-76. G. Teubner, Leipzig, 1917.

1839 LAME, G. Mémoire sur le dernier théorème de Fermat. C.R. Acad. Sci. Paris, 9, 1839, 45-46.

1839 CAUCHY, A. & LIOUVILLE, J. Rapport sur un mémoire de M. Lamé relatif au dernier théorème de Fermat. C.R. Acad. Sci. Paris, 9, 1839, 359-364. Réimprimé en Œuvres Complètes, (1), 4, 499-504. Gauthier-Villars, Paris, 1897.

1840 LAMÉ, G. Mémoire d'analyse indéterminée démontrant que l'équation $x^7 + y^7 = z^7$ est impossible en nombres entiers. J. Math. Pures et Appl., 5, 1840, 195-211.

1844 KUMMER, E.E. De numeris complexis, qui radicibus unitatis et numeris integris realibus constant. Acad. Albert. Regiomont. gratulatur Acad. Vratislaviensis, 12, 1847, 185-212. Réimprimé en Collected Papers, vol. I, edited by A. Weil. Springer Verlag, Berlin, 1975.

1847 CAUCHY, A. Diverses communications. C.R. Acad. Sci. Paris, vol. 24, 1847, pages 407-416, 469-483, 516-530, 578-585, 633-636, 661-667, 996-999, 1022-1030, 1117-1120, and vol. 25, 1847, pages 6, 37-46, 46-55, 93-99, 132-138, 177-183, 242-245. Réimprimé en Œuvres Complètes, (1), 10, 231-285, 290-311, 324-350, 354-368. Gauthier-Villars, Paris, 1897.

1847 KUMMER, E.E. Extrait d'une lettre de M. Kummer à M. Liouville. J. Math. Pures et Appl., 12, 1847, 136. Réimprimé en Collected Papers, vol. I, edited by A. Weil. Springer Verlag, Berlin, 1975.

1847 LAMÉ, G. Démonstration générale du théorème de Fermat sur l'impossibilité en nombres entiers de l'équation $x^n + y^n = z^n$. C.R. Acad. Sci. Paris, 24, 1847, 310-314.

1847 LIOUVILLE, G. Remarques à l'occasion d'une communication de M. Lamé sur un théorème de Fermat. C.R. Acad. Sci. Paris, 24, 1847, 315-316.

1847 LAMÉ, G. Mémoire sur la résolution en nombres complexes de l'équation $A^5 + B^5 + C^5 = 0$. J. Math. Pures et Appl., 12, 1847, 137-171.

1847 LAMÉ, G. Mémoire sur la résolution en nombres complexes de l'équation $A^n + B^n + C^n = 0$. J. Math. Pures et Appl., 12, 1847, 137-171.

1847 LAMÉ, G. Mémoire sur la résolution en nombres complexes de l'équation $A^n + B^n + C^n = 0$. J. Math. Pures et Appl., 12, 1847, 172-184.

1847 LAMÉ, G. Note au sujet de la démonstration du théorème de Fermat. C.R. Acad. Sci. Paris, 24, 1847, 352.

1847 LAMÉ, G. Second mémoire sur le dernier théorème de Fermat. C.R. Acad. Sci. Paris, 24, 1847, 569-572.

1847 LAMÉ, G. Troisième mémoire sur le dernier théorème de Fermat. C.R. Acad. Sci. Paris, 24, 1847, 888.

1856 CAUCHY, A. Rapport sur le concours relatif au théorème de Fermat. Commissaires MM. Bertrand, Liouville, Lamé, Chasles, Cauchy rapporteur). C.R. Acad. Sci. Paris, 44, 1856, page 208.

1860 SMITH, H.J.S. Report on the Theory of Numbers, Part II, Art. 61 "Application to the Last Theorem of Fermat". Report of the British Association for 1859, 228-267. Collected Math. Works, vol. I, 131-137. Clarendon Press, Oxford, 1894. Réimprimé par Chelsea Publ. Co., New York, 1965.

1883 TANNERY, P. Sur la date des principales découvertes de Fermat. Bull. Sci. Math., sér. 2, 7, 1883, 116-128. Réimprimé en Sphinx-Œdipe, 3, 1908, 169-182.

1910 HENSEL, K. Gedächtnisrede auf Ernst Eduard Kummer. Festschritt zur Feier des 100. Geburtstages Eduard Kummers, 1-37. Teubner, Leipzig, 1910. Réimprimé en Collected Papers, vol. I, edited by A. Weil. Springer Verlag, Berlin, 1975.

1912 Bekanntmachung (Wolfskehl Preis). Math. Annalen, 72, 1912, 1-2.

1929 VANDIVER, H.S. & WAHLIN, G. Algebraic Numers, II. Bull. Nat. Research Council, 62, 1928. Réimprimé par Chelsea Publ. Co., New York, 1967.

1937 BELL, E.T. Men of Mathematics. Simon & Schuster, New York, 1937.

1943 HOFMANN, J.E. Neues über Fermats zahlentheoretische Herausforderungen von 1657. Abhandl. Preuß. Akad. Wiss., 1943, n° 9, Berlin (1944).

1948 ITARD, J. Sur la date à attribuer à une lettre de Pierre Fermat. Revue d'Histoire des Sciences et de leurs Applications, 2, 1948, 95-98.

1959 SCHINZEL, A. Sur quelques propositions fausses de P. Fermat. C.R. Acad. Sci. Paris, 249, 1959, 1604-1605.

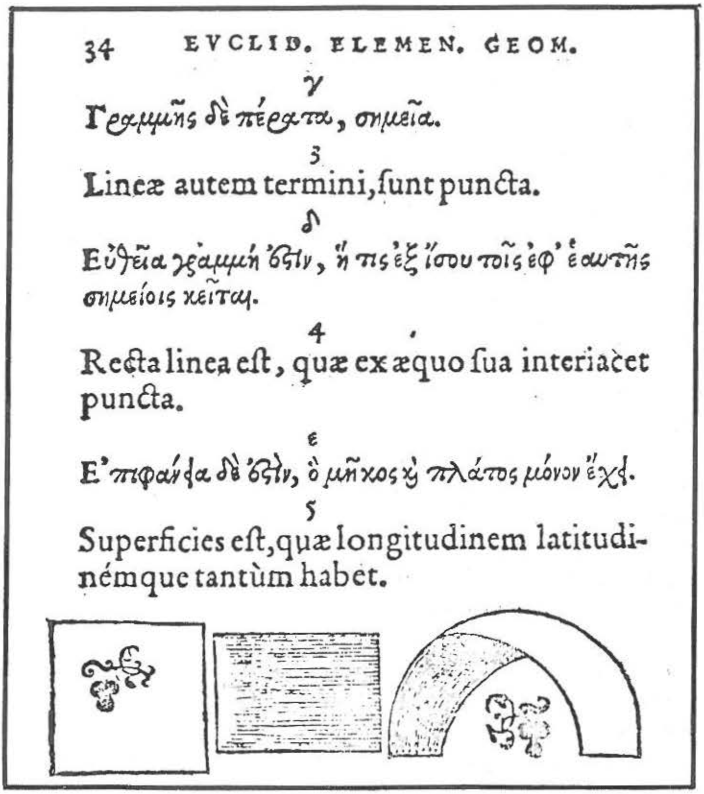
1961 BELL, E.T. The Last Problem. Simon & Schuster, New York, 1961.

1962 DE WAARD, C. Correspondance du Père Marin Mersenne. Volume 7, pages 272-283. Editions du Conseil National de la Recherche Scientifique, Paris, 1962.

1966 NOGUÈS, R. Théorème de Fermat, son Histoire. A. Blanchard, Paris, 1966.

1975 EDWARDS, H.M. The background of Kummer's proof of Fermat's last theorem for regular primes. Arch. for History of Exact Sciences, 14, 1975, 219-236.

1977 MAZUR, B. Review of Kummer's Papers, "Collected Works", volumes I, II. Bull. A.M.S., 83, 1977, 976-988.



34 EVCLID. ELEMEN. GEOM.

γ

Γραμμῆς δὲ πέρατα, σημεῖα.

3

Lineæ autem termini, ſunt puncta.

δ

Εὐθεῖα γραμμή ἐστιν, ἥτις ἐξ ἴσου τοῖς ἐφ' ἑαυτῆς σημείοις κεῖται.

4

Recta linea eſt, quæ ex æquo ſua interiacet puncta.

ε

Ἐπιφάνειά δέ ἐστιν, ὃ μῆκος καὶ πλάτος μόνον ἔχει.

5

Superficies eſt, quæ longitudinem latitudinémque tantùm habet.

G.W. LEIBNIZ
(1646 - 1716)

Jean I BERNOULLI
(1667-1748)

La controverse des logarithmes des nombres négatifs et imaginaires*

par Jean-Luc VERLEY, Université Paris VII

Introduits par les algébristes italiens de la Renaissance pour récupérer les solutions réelles des équations algébriques par l'intermédiaire de formules de résolution non applicables dans le champ réel, les nombres complexes furent utilisés avec une confiance croissante jusqu'au milieu du XVII^{e} siècle. L'un des adeptes les plus fervents de ces « nombres impossibles » fut le mathématicien flamand Albert GIRARD qui, dans *L'invention nouvelle en algèbre* (1629), énonce le principe de permanence suivant lequel on peut appliquer au champ complexe toutes les identités obtenues dans le champ réel. On retrouve tout au long du XVIII^{e} siècle ce « recours aux raisons tirées de la généralité de l'algèbre » : les techniques de manipulations des premiers algébristes utilisaient exclusivement la structure de corps de l'ensemble des nom-

---

* NDLR - Cet article a déjà été publié par la Régionale Parisienne de l'A.P.M.E.P. dans ses *Chantiers de Pédagogie Mathématique,* n° 34 (septembre 1975).

bres complexes et ce concept de « généralité de l'algèbre » est la reconnaissance implicite de cette structure de corps commune aux réels et aux complexes, avec aussi, bien sûr, le principe du prolongement analytique qui ne sera pas énoncé correctement avant WEIERSTRASS.

Dans la seconde moitié du XVII^e siècle apparaissent les premiers développements en série des fonctions élémentaires. La notion de convergence n'étant pas encore dégagée (on sait qu'il faudra pour cela attendre le début du XIX^e siècle avec GAUSS, ABEL et CAUCHY), les calculs sont en fait effectués dans l'anneau des séries formelles : les propriétés des fonctions élémentaires s'obtiennent par des manipulations algébriques et les techniques de différentiation et d'intégration du calcul infinitésimal ont un caractère formel. Connue sous le nom d'*Analyse algébrique*, cette étude des algorithmes illimités de nombres réels ou complexes et celle des méthodes spéciales permettant de représenter, à l'aide de tels algorithmes, les fonctions élémentaires sera le cœur des recherches des analystes du XVIII^e siècle.

Ce traitement algébrique, dénué de préoccupations de convergence, introduisit systématiquement les nombres complexes dans l'étude des fonctions élémentaires : sachant que, pour x réel, on a :

$$e^x = \sum \frac{x^n}{n!},$$

alors e^z, pour z complexe, *est* la série $\sum \frac{z^n}{n!}$. C'est ainsi que LEIBNIZ, voulant montrer que Log (—1) ne peut pas être réel (cf. infra, Sentiment de M. LEIBNIZ, Raison 1), écrit la série donnant Log $(1 + x)$ pour $x = -2$, soit :

$$-2 - \frac{2^2}{2} - \frac{2^3}{3} - \ldots;$$

la série ne pouvant avoir ni une somme positive ni une somme négative, c'est-à-dire ne pouvant représenter un nombre réel, LEIBNIZ en conclut tout naturellement que c'est un nombre imaginaire... L'objection d'EULER à cette argumentation repose aussi sur la considération d'une belle série divergente!

Au XVIII^e siècle, les analystes s'habituèrent ainsi à manipuler indifféremment des arguments réels ou complexes, non seulement dans les expressions rationnelles mais également dans les fonctions trigonométriques et exponentielles. Au début du siècle, DE MOIVRE, par une utilisation systématique de la trigonométrie, met en évidence les liens entre la recherche des racines des nombres complexes et la division d'un arc de circonférence en parties égales : on remarquera dans le texte ci-dessous avec quel brio EULER utilise ces techniques. Toute la première moitié du siècle est jalonnée de ces formules remarquables, dont une grande partie est due à EULER, dans lesquelles le passage aux arguments complexes fait apparaître de profondes analogies entre les diverses fonctions élémentaires.

L'extension au cas complexe de la fonction logarithme allait, pour la première fois, faire apparaître un phénomène qui était resté caché tant que l'argument était réel, celui des fonctions multiformes. Si on cherche un nombre complexe $Z = X + iY$ tel que $e^{X+iY} = x + iy$, pour $z = x + iy \neq 0$, il résulte immédiatement de la périodicité de la fonction exponentielle complexe que si Z_0 est une solution, alors, pour tout entier relatif k, le nombre complexe $Z = Z_0 + 2k\pi i$ est encore solution. Plus précisément, si

$$z = |z| (\cos t + i \sin t),$$

on aura la solution générale :

$$Z = \operatorname{Log} |z| + it + 2k\pi i,$$

où $\operatorname{Log} |z|$ est le logarithme habituel du nombre positif $|z|$. Si l'on convient d'appeler logarithme de z tout nombre Z obtenu ci-dessus, alors la relation fonctionnelle $\operatorname{Log} zz' = \operatorname{Log} z + \operatorname{Log} z'$ n'est vraie que pour un choix convenable des déterminations de ces logarithmes.

En fonction du *principe de permanence* dans le passage du réel au complexe, on ne mettait pas en doute, au début du XVIII^e siècle, l'*existence* d'une *fonction* (donc univoque!) L, définie pour tout nombre complexe non nul et possédant les propriétés du logarithme réel, à savoir :

(*i*) C'est la fonction réciproque de l'exponentielle, soit $e^{L(z)} = z$.

(*ii*) Elle vérifie l'équation fonctionnelle du logarithme :

$$L(zz') = L(z) + L(z').$$

(*iii*) Elle vérifie l'équation différentielle habituelle :

$$dL = \frac{dz}{z};$$

à vrai dire cette équation différentielle ne sera considérée, comme on le verra ci-dessous, que pour z réel, positif ou négatif.

C'est ainsi que la décomposition des fractions rationnelles en éléments simples, très utilisée par LEIBNIZ et Jean BERNOULLI, fait apparaître des « *différentielles de logarithmes imaginaires* » de la forme $\frac{dx}{x + a + bi}$. Dans une lettre de 1702, Jean BERNOULLI ramène la « quadrature du cercle » aux logarithmes imaginaires

$$\frac{dz}{1 + z^2} = \frac{1}{2}\frac{dz}{1 + iz} + \frac{1}{2}\frac{dz}{1 - iz};$$

effectuant dans cette expression le changement de variable imaginaire $z = i\frac{t - 1}{t + 1}$ qui donne $\frac{dz}{1 + z^2} = \frac{i}{2}\frac{dt}{t}$, il obtiendra par intégration la valeur remarquable $\operatorname{Log} i = \frac{1}{2}\pi i$. EULER, dans le texte ci-dessous, fait plusieurs fois allusion à ce résultat qui avait beaucoup impressionné les contemporains.

(1707 - 1783)

Dans le contexte précédent, les déterminations des *valeurs* explicites des logarithmes des nombres réels négatifs conduisaient à d'insolubles contradictions et donnèrent lieu à une mémorable controverse épistolaire, dont EULER analyse les éléments, entre LEIBNIZ et Jean BERNOULLI dans les années 1712-13. On retrouvera, dans chacune des raisons invoquées, la référence à une des trois propriétés (*i*), (*ii*), (*iii*). Ce qui suit est constitué de très larges extraits de la deuxième version du texte d'EULER (écrit directement en français par son auteur); les arguments 2 et 3 de BERNOULLI reposent sur des propriétés géométriques qu'il prête à la courbe $y = \operatorname{Log} x$ et ont été omis.

Les difficultés et contradictions rencontrées ne pouvaient être « dénouées » que par la reconnaissance du caractère multiforme du logarithme complexe, ce qui constituait une rupture par rapport au principe de permanence, une cassure épistémologique par rapport aux conceptions leibniziennes. EULER explique avec beaucoup de détails comment « il répond à chaque nombre une infinité de logarithmes »; tout nombre réel positif a une infinité de logarithmes complexes dont un seul est réel : c'est le passage au complexe qui fait apparaître la situation générale. Ce mémoire d'EULER est aussi le premier où apparaît clairement la notion générale de mesure d'un angle, définie à un multiple entier de 2π près. Sous forme moderne, la démonstration d'EULER pour trouver les logarithmes de $x = \cos t + i \sin t$, c'est-à-dire les solutions de l'équation $e^y = x$, x donné précédemment, consiste à résoudre d'abord l'équation « approchée » :

$$\left(1 + \frac{y}{n}\right)^n = \cos t + i \sin t,$$

qui admet les n solutions :

$$y_n^{(k)} = n \cos\left(\frac{t}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) - 1 + in \sin\left(\frac{t}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right);$$

il fait alors tendre n vers l'infini pour chaque k fixé, d'où les solutions

$$y^{(k)} = i(t + 2k\pi).$$

La manière dont EULER manipule ici les infiniment petits et grands est très caractéristique des débuts du calcul infinitésimal et déconcertante pour le lecteur moderne habitué à la rigueur weierstrassienne.

L'absence des concepts ensemblistes, et des notations correspondantes. rendait difficile l'interprétation de l'équation fonctionnelle (*ii*) mais il est frappant de voir avec quelle clarté EULER décrit la situation. Le signe « = » a au moins trois significations dans ce texte. L'*égalité* habituelle entre nombres complexes. L'*inclusion* ensembliste qu'EULER définit parfaitement en disant qu'il prend, dans les égalités $2 \operatorname{Log} a = \operatorname{Log} a^2$ et $2 \operatorname{Log} (-a) = \operatorname{Log} a^2$, « le signe de $=$ pour marquer que les valeurs de $2 \operatorname{Log} a$ ou de $2 \operatorname{Log} (-a)$ se rencontrent parmi les valeurs de $\operatorname{Log} a^2$ ». Quelques lignes plus bas, on trouve la définition de l'*addition ensembliste* qui donne tout son sens à l'équation fonctionnelle et permet d'écrire :

$$\operatorname{Log} a^2 = \operatorname{Log} a + \operatorname{Log} a = \operatorname{Log} (-a) + \operatorname{Log} (-a),$$

l'égalité étant cette fois l'*égalité ensembliste*.

Bien que le mémoire d'EULER soit pour nous d'une remarquable clarté, il ne convainquit pas tous ses contemporains; d'Alembert, par exemple, ne parvint pas à concevoir la multivocité. Ce mémoire montrait aussi que l'expression u^v, pour u et v complexes, a, en général, une infinité de valeurs. Par manque de notations convenables, les fonctions multiformes furent encore l'objet de considérations embrouillées jusqu'au début du XIX^e^ siècle.

J.-L. VERLEY.

Extraits de « de la controverse entre MM. Leibniz et Bernoulli sur les logarithmes des nombres négatifs et imaginaires

Mémoires de l'Académie des Sciences de Berlin [5] *(1749), 1751, p. 139-179.*
EULER, Opéra (1), *17*, 195-232.

Quoique la doctrine des logarithmes soit si solidement établie que les vérités qu'elle renferme, semblent aussi rigoureusement démontrées que celles de la Géométrie, les Mathématiciens sont pourtant encore fort partagés sur la nature des logarithmes des nombres négatifs et imaginaires; et quand on ne trouve pas cette controverse fort agitée, la raison en est apparemment qu'on n'a pas voulu rendre suspecte la certitude de tout ce qu'on avance dans les parties pures de la Mathématique, en développant devant les yeux de tout le monde les difficultés et même les contradictions auxquelles les sentimens des Mathematiciens sur les logarithmes des nombres négatifs et imaginaires sont assujettis. Car, bien que leurs sentimens puissent être fort differens sur des questions qui regardent la Mathematique appliquée, où les diverses manieres d'envisager les objets et de les ramener à des idées precises peuvent donner lieu à des controverses réelles, on a toujours prétendu que les parties pures de la Mathematique étoient entierement délivrées de tout sujet de dispute, et qu'il ne s'y trouvoit rien dont on ne fût en état de démontrer ou la vérité ou la fausseté.

Comme la doctrine des logarithmes appartient sans contredit à la Mathematique pure, on sera bien surpris d'apprendre qu'elle ait été jusqu'ici assujettie à des controverses tellement embarrassées que, de quelque parti qu'on se déclare, on tombe toujours en des contradictions qu'il semble tout à fait impossible de lever. Cependant, si la vérité doit se soutenir partout, il n'y a aucun doute que toutes ces contradictions, quelque ouvertes qu'elles paroissent, ne peuvent être qu'apparentes, et qu'il n'y sauroit manquer des moyens pour sauver la vérité, quoique nous ne sachions point de quel endroit nous puissions tirer ces moyens.

Cette controverse sur les logarithmes des nombres négatifs et imaginaires se trouve agitée avec assez de force dans le Commerce litteraire (1) entre M. LEIBNIZ et M. Jean BERNOULLI. Ces deux grands Mathematiciens, à qui nous sommes pour la pluspart redevables de l'Analyse des infinis, furent tellement partagés sur cet article

(1) *Virorum celeberr.* GOR. GUL. LEIBNITII et IOHAN. BERNOULLII, *Commercium philosophicum et mathematicum*, t. 2, ab anno 1700 ad annum 1716. Lausannae et Genevae 1745, p. 269, 276, 278, 282, 287, 292, 296, 298, 303, 305, 312, 315. A. G.

qu'il n'y avoit pas moyen de les mettre d'accord là dessus, quoique l'un et l'autre n'ait eu en vue que la vérité, et qu'ils fussent également éloignés de soutenir leurs sentimens avec opiniatreté. Mais chacun a trouvé dans le sentiment de l'autre tant de contradictions, que ç'auroit été une complaisance trop outrée, si l'un avoit changé son sentiment en faveur de l'autre. Car il faut remarquer que les contradictions que ces deux Grands hommes se reprochoient, étoient réelles, et point du tout du nombre de celles qui ne paroissent telles qu'à la partie opposée, entêtée de son propre sentiment.

Pour mettre donc cette remarquable controverse dans tout son jour, j'exposerai ici séparément les sentimens de M. BERNOULLI et de M. LEIBNIZ; j'y ajouterai ensuite tous les argumens dont chacun s'est servi pour maintenir son sentiment, et enfin je détaillerai les objections qu'on peut faire, tant contre les argumens que contre chaque sentiment même, et je ferai sentir en toutes leurs forces toutes les contradictions auxquelles l'un et l'autre de ces deux sentimens est assujetti, afin qu'on soit d'autant mieux en état de juger combien il doit être difficile de découvrir la vérité et de la garantir contre toutes les objections, aprés que les deux plus grands hommes y ont travaillé en vain.

SENTIMENT DE M. BERNOULLI

M. BERNOULLI *soutint que les logarithmes des nombres négatifs étoient les mêmes que ceux des nombres affirmatifs, ou que le logarithme du nombre négatif* $-a$ *étoit égal au logarithme du nombre affirmatif* $+a$. *Ainsi le sentiment de* M. BERNOULLI *porte qu'il y a* $l-a = l+a$.

M. LEIBNIZ a donné occasion à cette déclaration de M. BERNOULLI, lorsqu'il avança que la raison de $+1$ à -1 ou de -1 à $+1$ étoit imaginaire, puisque le logarithme ou la mesure de cette raison, c'est-à-dire le logarithme de -1, qui est l'exposant de cette raison, étoit imaginaire. Là dessus, M. BERNOULLI déclara qu'il n'étoit point de même avis, et qu'il croyoit même que les logarithmes des nombres négatifs étoient non seulement réels, mais aussi égaux aux logarithmes des mêmes nombres pris positivement. M. BERNOULLI fortifia aussi son sentiment par les raisons suivantes.

1. RAISON

Pour prouver que $l-x = l+x$, quelque nombre qu'on marque par x, il recourt aux differentiels; et puisque le differentiel de $l-x$ est $\frac{-dx}{-x}$ ou $\frac{dx}{x}$, de même que celui de $l+x$, il en conclut que ces quantités mêmes $l-x$ et $l+x$, dont les differentiels sont égaux, doivent être égales entr'elles, et partant qu'il est $l-x = l+x$.

. . . .

4. RAISON

Puisqu'il est certain, par la nature des logarithmes, que le logarithme d'une puissance quelconque p^n est égal au logarithme de la racine p multiplié par l'exposant n, ou que $lp^n = nlp$, il s'ensuit que prenant pour p un nombre négatif $-a$, il y aura $l(-a)^n = nl(-a)$. Soit $n = 2$, et il sera $l(-a)^2 = 2l(-a)$. Or, parce que $(-a)^2 = a^2$, nous aurons $l(-a)^2 = la^2 = 2la$; d'où il s'ensuit que $2l(-a) = 2la$, et partant $l-a = l+a$. Cela se montre plus promtement de cette maniere : Puisque $(-a)^2 = (+a)^2$, il sera $l(-a)^2 = l(+a)^2$, ou bien $2l-a = 2l+a$, et par conséquent $l-a = l+a$.

1. Objection

M. Leibniz opposa contre la premiere raison, que la régle de differentier le logarithme d'une quantité variable x, en divisant le differentiel de x par la quantité même x, n'avoit lieu, que lorsque x marquoit une quantité positive, de sorte qu'on se trompoit en posant le differentiel de $l - x$ égal à $\frac{-dx}{-x}$ ou à $\frac{dx}{x}$. Or, il faut avouër que cette objection est non seulement extrèmement foible, n'étant soutenue par aucune raison valable, mais qu'elle renverseroit tout à fait le calcul differentiel des logarithmes. Car, comme ce calcul roule sur des quantités variables, c'est-à-dire sur des quantités considérées en général, s'il n'étoit pas vrai généralement qu'il fût $d.lx = \frac{dx}{x}$, quelque quantité qu'on donne à x, soit positive ou négative, ou même imaginaire, on ne pourroit jamais se servir de cette règle, la vérité du calcul differentiel étant fondée sur la généralité des régles qu'il renferme. Or M. Leibniz n'auroit pas eu besoin de se tenir à cette objection pour maintenir son sentiment, puisqu'il auroit pu attaquer la raison de M. Bernoulli par une objection beaucoup plus forte que voilà.

2. Objection

M. Bernoulli voulant prouver par l'égalité des differentiels qu'il étoit $l - x = l + x$, prouveroit par le même raisonnement que $l2x = lx$; car le differentiel de $l2x$ est $\frac{2dx}{2x} = \frac{dx}{x}$, tout comme celui de lx. Et partant, si le raisonnement de M. Bernoulli étoit juste, il s'ensuivroit que non seulement $l - x = l + x$, mais aussi que $l2x = lx$ et en général $lnx = lx$, quelque nombre que marque n; conséquence que M. Bernoulli lui même n'accorderoit jamais. Or, on sait que lorsque les differentiels de deux quantités variables sont égaux, il n'en suit pas davantage que ce que ces quantités variables diffèrent entr'elles d'une quantité constante; et on n'en sauroit conclure qu'elles fussent égales. Ainsi, quoique le differentiel de $x + a$ soit $= dx$ aussi bien que celui de x, la conséquence seroit bien fausse, si l'on en vouloit conclure que $x + a = x$. Par cette raison, il est donc clair que, puisque le differentiel de $l - x$ et de $l + x$ est le même $\frac{dx}{x}$, les quantités $l - x$ et $l + x$ ne diffèrent entr'elles que d'une quantité constante, ce qui est également évident, vu que $l - x = l - 1 + lx$. Et de là on comprend aussi aisément que, puisque $lnx = lx + ln$, le differentiel de lnx doit être égal au differentiel de lx. Il est vrai que M. Bernoulli suppose $l - 1 = 0$, de même qu'il est $l1 = 0$, de sorte qu'il seroit $l - x = lx + l - 1 = lx$. Mais comme c'est précisément ce que M. Bernoulli veut prouver par ce raisonnement, on voit bien que cette supposition ne peut pas être admise.

. . . .

6. Objection

Je passe à la quatrieme raison de M. Bernoulli, qui est sans doute la plus forte; car on ne sauroit révoquer en doute aucun article qui y sert de fondement, sans renverser les principes les mieux établis de l'Analyse et de la doctrine des logarithmes. Car on ne sauroit nier que $(-a)^2 = (+a)^2$, donc il n'y a aucun doute que leurs logarithmes ne soient égaux, c'est-à-dire $l(-a)^2 = l(+a)^2$. Ensuite, il est également certain qu'il est en général $lp^2 = 2lp$, donc il y a $l(-a)^2 = 2l - a$ et $l(+a)^2 = 2l + a$;

et partant, il sera sans contredit $2l - a = 2l + a$. Les moitiés de ces deux quantités seront donc aussi incontestablement égales entr'elles et, par conséquent, il sera $l - a = la$, tout comme M. BERNOULLI le soutient.

Mais si ce raisonnement est juste, on en tirera aussi d'autres conséquences que personne, et encore moins M. BERNOULLI, ne sauroit accorder; car on prouvera de la même façon que les logarithmes des quantités imaginaires seroient aussi bien réels que ceux des nombres négatifs. Car, il est certain que $(a\sqrt{-1})^4 = a^4$, donc il sera aussi $l(a\sqrt{-1})^4 = la^4$, et de plus $4l(a\sqrt{-1}) = 4la$, par conséquent $l(a\sqrt{-1}) = la$. Outre cela, puisqu'il est $\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}a\right)^3 = a^3$, il sera $l\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}a\right)^3 = la^3$, et partant $3l\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}a = 3la$, donc $l\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}a = la$, ce qu'on ne sauroit admettre sans renverser toute la doctrine des logarithmes.

Il seroit donc, selon le systeme de M. BERNOULLI, non seulement $l-1 = l1 = 0$, mais aussi $l\sqrt{-1} = 0$, $l-\sqrt{-1} = 0$ et $l\frac{-1+\sqrt{-3}}{2} = 0$. Or, M. BERNOULLI ayant si heureusement réduit la quadrature du cercle aux logarithmes des nombres imaginaires, si le logarithme de $\sqrt{-1}$ étoit $= 0$, toute cette belle découverte seroit fausse, par laquelle il a fait voir que le rayon est à la quatrieme partie de la circonference, comme $\sqrt{-1}$ à $l\sqrt{-1}$. Donc, posant le rapport du diametre à la circonference $= 1 : \pi$, il sera $\frac{1}{2}\pi = \frac{l\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}}$ et partant $l\sqrt{-1} = \frac{1}{2}\pi\sqrt{-1}$, ce qui seroit absurde, s'il étoit $l\sqrt{-1} = 0$. Il n'est pas donc vrai que $l\sqrt{-1} = 0$, d'où il faut conclure que quelque solide que paroisse la quatrieme raison, elle doit être sujette à caution, puisqu'il en suivroit aussi bien $l\sqrt{-1} = 0$ que $l-1 = 0$. Par conséquent, on ne peut pas dire que le sentiment de M. BERNOULLI soit suffisamment prouvé.

Il est ici fort étonnant que, soit qu'on embrasse le sentiment de M. BERNOULLI, ou qu'on le rejette, on tombe également en des embarras insurmontables, et même en des contradictions. Car, si l'on soutient que $l-a = l+a$ ou $l-1 = l+1 = 0$, on est obligé d'avouër qu'il est aussi $l\sqrt{-1} = 0$, puisque $l\sqrt{-1} = \frac{1}{2}l-1$. Or il seroit non seulement absurde de soutenir que les logarithmes des quantités imaginaires ne soient pas imaginaires, mais il seroit aussi faux que $l\sqrt{-1} = \frac{1}{2}\pi\sqrt{-1}$, ce qui est néanmoins rigoureusement prouvé. Ainsi, en se déclarant pour le sentiment de M. BERNOULLI, on tombe en contradiction avec des vérités très solidement établies.

Posons que le sentiment de M. BERNOULLI soit faux, et qu'il n'y ait point $l-1 = 0$; car c'est à quoi se réduit le sentiment de M. BERNOULLI; et on sera obligé d'accuser de fausseté quelcune des opérations sur lesquelles le raisonnement de la quatrieme raison est fondé; ce qu'on ne pourra faire non plus sans tomber en contradiction avec d'autres vérités démontrées. Pour rendre cela plus évident, soit $l-1 = \omega$, et s'il n'est pas $\omega = 0$, son double 2ω ne sera non plus $= 0$, or 2ω est le logarithme du quarré de -1, lequel étant $= +1$, le logarithme de $+1$ ne seroit plus $= 0$, ce qui est une nouvelle contradiction. De plus, $-x$ est aussi bien $= -1 \cdot x$ que $= \frac{x}{-1}$, donc $l-x = lx + l-1 = lx - l-1$; il seroit donc $l-1 = -l-1$, sans qu'il fût $l-1 = 0$; or c'est une contradiction de dire qu'il soit $+a = -a$ sans qu'il soit $a = 0$.

Soit donc qu'on dise l'une ou l'autre de ces deux choses, ou que le sentiment de M. BERNOULLI est vrai ou qu'il est faux, on se plonge également dans le plus grand embarras, ayant à combattre avec des contradictions ouvertes. Cependant, il faut absolument, ou que ce sentiment soit vrai ou qu'il soit faux, et il ne paroit point d'autre parti à prendre. Quel moyen donc de se tirer d'affaire et de saûver la vérité contre de si grandes contradictions? Je passe à l'examen du sentiment de M. LEIBNIZ.

SENTIMENT DE M. LEIBNIZ

M. LEIBNIZ *soutint que les logarithmes de tous les nombres négatifs, et à plus forte raison ceux des nombres imaginaires, étoient imaginaires; ou, puisque* $l-a = la + l-1$, *il soutint que* $l-1$ *étoit une quantité imaginaire.*

J'ai déjà remarqué que M. LEIBNIZ soutenoit que la raison de $+1$ à -1 ou de -1 à $+1$ étoit imaginaire, puisque le logarithme de cette raison ou $l-1$ étoit imaginaire. On voit bien que toutes les objections faites contre le systeme de M. BERNOULLI servent à fortifier ce sentiment, et que les raisons alléguées pour le sentiment de M. BERNOULLI doivent être contraires à celui de M. LEIBNIZ. Cependant, on peut apporter des raisons particulieres pour confirmer le sentiment de M. LEIBNIZ, qui seront le sujet de mon examen qui suit.

1. RAISON

Ayant fait voir que le logarithme du nombre $1 + x$ est égal à la somme de cette serie

$$l(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{6}x^6 + \text{etc.},$$

d'où l'on voit d'abord, que si $x = 0$, il doit être $l1 = 0$, maintenant pour avoir le logarithme de -1, il faut mettre $x = -2$, d'où l'on obtient

$$l-1 = -2 - \frac{1}{2}\cdot 4 - \frac{1}{3}\cdot 8 - \frac{1}{4}\cdot 16 - \frac{1}{5}\cdot 32 - \frac{1}{6}\cdot 64 - \text{etc.}$$

Or, il n'y a aucun doute que la somme de cette serie divergente ne sauroit être $= 0$; donc, il est certain que $l-1$ n'est pas $= 0$. Le logarithme de -1 sera donc imaginaire, puisqu'il est d'ailleurs clair qu'il ne sauroit être réel, c'est-à-dire ou positif ou négatif.

2. RAISON

Soit $y = lx$, et posant e pour le nombre dont le logarithme $= 1$, dont la valeur approchée est, comme on sait, $e = 2{,}718281828459$, puisqu'il sera $yle = 1lx$, on en tirera $x = e^y$. Ainsi le logarithme du nombre x étant l'exposant d'une puissance de e qui est égale au nombre x, il est clair qu'aucun exposant réel d'une puissance de e ne sauroit produire un nombre négatif, et partant, pour que e^y devienne $= -1$, ni $y = 0$, ni aucun nombre réel mis pour y sauroit remplir cette condition. Et posant en général pour x un nombre négatif $-a$, dont on suppose le logarithme $= y$, l'équation $e^y = -a$ sera toujours impossible, ou la valeur de y imaginaire.

3. Raison

Puisqu'en général la valeur de e^y s'exprime par cette serie infinie

$$e^y = 1 + \frac{y}{1} + \frac{y^2}{1 \cdot 2} + \frac{y^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{y^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{y^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \text{etc.},$$

qui est toujours convergente, quelque grand nombre qu'on mette pour y, de sorte que les objections tirées de la nature de suites divergentes, comme dans la premiere raison, ne trouvent pas lieu ici, ainsi le logarithme du nombre x étant posé $= y$, on aura

$$x = 1 + \frac{y}{1} + \frac{y^2}{1 \cdot 2} + \frac{y^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot} + \frac{y^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \text{etc.},$$

et partant, si y marque le logarithme de -1, ou qu'il soit $x = -1$, on aura cette égalité

$$-1 = 1 + \frac{y}{1} + \frac{y^2}{1 \cdot 2} + \frac{y^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{y^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \text{etc.},$$

à laquelle, comme il est d'abord clair, ne sauroit satisfaire la valeur $y = 0$, vu qu'il en résulteroit $-1 = +1$. Par conséquent, il est certain que le logarithme de -1 n'est pas $= 0$.

Je me contente d'avoir apporté ces trois raisons, puisque les autres argumens par lesquels on peut confirmer le sentiment de M. Leibniz, sont déjà contenus dans les objections faites contre le systeme de M. Bernoulli. Cependant, ces trois raisons que je viens d'exposer, sont sujettes aux objections suivantes.

1. Objection

Contre la premiere raison, on dira d'abord que l'accroissement continuel des termes qui sont tous négatifs, de cette suite

$$-2 - \frac{1}{2} \cdot 4 - \frac{1}{3} \cdot 8 - \frac{1}{4} \cdot 16 - \frac{1}{5} \cdot 32 - \frac{1}{6} \cdot 64 - \text{etc.}$$

n'est pas une marque sure que la somme de cette suite ne sauroit être $= 0$. Car si cette serie geometrique

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + x^7 - x^7 + x^8 - \text{etc.}$$

donne pour le cas $x = -2$ celle-cy :

$$-1 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + \text{etc.}$$

et pour le cas $x = -3$ celle-cy :

$$-\frac{1}{2} = 1 + 3 + 9 + 27 + 81 + 243 + \text{etc.},$$

pourquoi, dira-t-on, ne seroit il pas possible que la somme d'une serie dont les termes croissent, ayant partout le même signe, ne fût $= 0$. Pour en donner un exemple, on n'a qu'à ajouter à la derniere serie termes pour termes celle-cy :

$$\frac{1}{2} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \text{etc.}$$

et on aura effectivement :

$$0 = 2 + 2 + 10 + 26 + 82 + 242 + 730 + \text{etc.}$$

Donc, si la somme de cette serie est $= 0$, quelle absurdité seroit-il donc de soutenir qu'il fût aussi :

$$0 = -2 - \frac{1}{2} \cdot 4 - \frac{1}{3} \cdot 8 - \frac{1}{4} \cdot 16 - \frac{1}{5} \cdot 32 - \frac{1}{6} \cdot 64 - \text{etc.},$$

et partant, la premiere raison n'est pas convaincante.

2. Objection

La seconde raison est telle qu'on pourroit aussi s'en servir pour prouver le sentiment opposé. Car, puisqu'il y a $x = e^y$ supposant y le logarithme du nombre x, toutes les fois que y est une fraction ayant pour dénominateur un nombre pair, il faut avouër qu'alors la valeur de e^y et partant aussi de x, est aussi bien négative qu'affirmative. Ainsi, si $\frac{m}{2n}$ est un logarithme, le nombre x qui lui répond étant $e^{m:2n} = \sqrt{e^{m:n}}$, sera tant affirmatif que négatif; de sorte que dans ce cas, tant x que $-x$ aura le même logarithme $\frac{m}{2n}$. Donc, puisque les logarithmes ne sont pas des nombres rationels, et par conséquent équivalens à des fractions dont les numérateurs et dénominateurs sont infiniment grands, on pourra toujours regarder les dénominateurs comme des nombres pairs; il s'ensuit que le même logarithme qui convient au nombre positif $+x$ conviendra aussi au nombre négatif $-x$.

3. Objection

La troisieme raison est sans doute la plus forte, puisqu'elle semble exclure absolument les nombres négatifs du nombre de ceux à qui répondent des logarithmes réels. Car il est clair que, quelque nombre réel qu'on mette pour y, la valeur de cette serie :

$$x = 1 + \frac{y}{1} + \frac{y^2}{1 \cdot 2} + \frac{y^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{y^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \text{etc.}$$

ne sauroit jamais devenir négative, de sorte qu'aucun logarithme réel ne sauroit répondre à un nombre négatif. Cependant, cette serie n'étant vraie qu'entant qu'elle découle de la formule finie e^y, les objections précedentes ont ici également lieu. Car, si e^y peut donner un nombre négatif, il importe fort peu, si la serie qui lui est égale en donne aussi un ou non? Pour reconnoitre cela, on n'a qu'à considérer une formule radicale, comme $\frac{1}{\sqrt{(1-x)}}$, qui est aussi bien $\frac{+1}{\sqrt{(1-x)}}$ que $\frac{-1}{\sqrt{(1-x)}}$, quoique la serie égale :

$$(1-x)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 + \text{etc.}$$

ne donne que sa valeur affirmative, quelque nombre qu'on mette pour x.

M. LEIBNIZ ne manqueroit pas de répondre à ces objections; et comme la premiere ne prouve pas le contraire de son sentiment, et qu'elle ne rend que douteuse la premiere raison, il ne perdroit rien de renoncer à cette premiere raison, et de s'en tenir principalement aux autres. Car, au fond, la seconde objection ne détruit point son sentiment qui se réduit uniquement à prouver que $l-1$ n'est pas $=0$; or la seconde objection ne porte aucune atteinte à cela, vu que si e^y doit être $=-1$, l'exposant y ne sauroit être aucune fraction de la forme $\frac{m}{2n}$, pour que le signe radical puisse fournir une valeur négative. Car on conviendra aisément que, soit qu'on mette pour y un nombre affirmatif plus grand que zéro, ou un nombre négatif quelconque pour y, la valeur de la puissance e^y ne devient jamais $=-1$. Donc, si y n'est pas imaginaire, il faudroit qu'il fût $e^y=-1$ dans le cas $y=0$. Mais dans ce cas s'évanouit toute ambiguïté de signes, qui pourroit avoir lieu à cause des signes radicaux, et il est indubitablement $e^0=+1$. Et si l'on vouloit dire qu'on pût regarder 0 comme $\frac{0}{2}$, et e^0 comme $\sqrt{e^0}=\sqrt{1}$, dont la valeur seroit aussi $=-1$, ce seroit une exception fort foible, puisque par la même raison on prouveroit que $-a=+a$; car, posant $a=a^2=\sqrt{a^2}$, on en tireroit aussi bien $a=-a$ que $a=+a$. Pour prévenir ces sortes de conséquences fausses, on n'a qu'à remarquer qu'une telle expression $a^{\frac{m}{2n}}$ n'a deux valeurs, l'une affirmative et l'autre négative, que lorsque la fraction $\frac{m}{2n}$ est réduite à ses plus petits termes, et que le dénominateur demeure encore un nombre pair. Ainsi, comme la valeur de ces puissances, a^1, a^2, a^3, a^4, etc., n'est pas ambiguë, aussi celle-cy a^0 ne sauroit être ambiguë. Il est donc toujours $a^0=+1$, ce qui suffit pour détruire la seconde objection; et la troisieme n'a aucune force qu'entant que la seconde subsiste.

Il paroit donc que le sentiment de M. LEIBNIZ est mieux fondé, puisqu'il n'est pas contraire à la découverte de M. BERNOULLI, qu'il est :

$$l\sqrt{-1} = \frac{1}{2}\pi\sqrt{-1},$$

puisque M. LEIBNIZ soutient que le logarithme de -1, et à plus forte raison celui de $\sqrt{-1}$, est imaginaire. Mais, en adoptant le sentiment de M. LEIBNIZ, on se jette dans les difficultés et contradictions susmentionnées. Car, si $l-1$ étoit imaginaire, son double, c'est-à-dire le logarithme de $(-1)^2=+1$, le seroit aussi, ce qui ne convient pas avec le premier principe de la doctrine des logarithmes, en vertu duquel on suppose $l+1=0$.

De quelque coté donc qu'on se tourne, soit qu'on embrasse le sentiment de M. BERNOULLI ou celui de M. LEIBNIZ, on rencontre toujours de si grands obstacles à maintenir son parti, qu'on ne se sauroit mettre à l'abri des contradictions. Cependant, il semble que si l'un de ces deux sentimens est faux, l'autre doit nécessairement être vrai, et qu'il n'y a point de milieu à choisir. Voilà donc une question extrèmement importante, qui est d'établir la doctrine des logarithmes de telle sorte qu'elle ne soit plus assujettie à aucune contradiction.

Mais, aprés avoir bien pesé les contradictions qui se trouvent de part et d'autre, on sera porté à croire qu'une telle conciliation est une chose tout à fait impossible; et les ennemis des Mathematiques ne manqueront pas d'en tirer des conséquences fort facheuses contre la certitude de cette science. Car, quand les Pyrrhoniens ont attaqué toutes les sciences, on conviendra aisément qu'il s'en faut beaucoup que les objections qu'ils ont apportées contre aucune science, approchent seulement, à l'egard de leur solidité, des objections que je viens d'exposer contre la doctrine des logarithmes.

Cependant, je ferai voir si clairement, qu'il n'y restera plus le moindre doute, que cette doctrine est solidement établie, et que toutes les difficultés susmentionnées ne tirent leur origine que d'une seule idée peu juste; de sorte que, dès qu'on rectifiera cette idée, toutes ces difficultés et contradictions, quelque fortes qu'elles ayent pu paroitre, s'evanouïront d'abord, et alors toute cette doctrine des logarithmes se soutiendra si bien, qu'on sera en état de résoudre aisément toutes les objections qui ont paru irrésolubles auparavant. Sans ce dévelopement, qui a pourtant été inconnu jusqu'ici aux Mathematiciens, je ne sai pas de quel oeil on devroit envisager la doctrine des logarithmes : d'un coté, on devroit avouër qu'elle est vraie et aussi solidement établie qu'aucune autre partie de l'Analyse; or, de l'autre coté, on ne sauroit disconvenir que cette même doctrine seroit assujettie à des contradictions auxquelles il seroit impossible de répondre. On seroit par conséquent obligé d'avouër que la Mathematique, et même l'Analyse, renferme des mystéres incomprehensibles à nos esprits. Ensuite, si ces mystéres n'ont été tels qu'à cause d'une seule idée qui n'étoit pas entierement exacte, on en tirera cette conséquence fort importante, qu'il est extrèmement dangereux de juger des choses dont on ne se peut former que des idées imparfaites : or il est bien certain que, hormis les Mathematiques, le nombre des idées distinctes et complettes est fort petit.

DENOUEMENT DES DIFFICULTES PRECEDENTES

Il faut d'abord avouër que si l'idée que MM. Leibniz et Bernoulli ont attachée au terme de logarithme, et que tous les Mathematiciens ont eue jusqu'ici, étoit parfaitement juste, il seroit absolument impossible de délivrer la doctrine des logarithmes des contradictions que je viens de proposer. Or, l'idée des logarithmes étant tirée de leur origine, dont nous avons une parfaite connoissance, comment seroit-il possible qu'elle fût défectueuse? Lorsqu'on dit que le logarithme d'un nombre proposé est l'exposant de la puissance d'un certain nombre pris à volonté, laquelle devient égale au nombre proposé, il semble qu'il ne manque rien à la justesse de cette idée. Cela est aussi bien vrai; mais on accompagne communément cette idée d'une circonstance qui ne lui convient point : c'est qu'on suppose ordinairement, presque sans qu'on s'en apperçoive, qu'à chaque nombre il ne répond qu'un seul logarithme, et pour peu qu'on y réfléchisse, on trouvera que toutes les difficultés et contradictions dont la doctrine des logarithmes sembloit embarrassée, ne subsistent qu'entant qu'on suppose qu'à chaque nombre ne répond qu'un seul logarithme. Je dis donc, pour faire disparoitre toutes ces difficultés et contradictions, qu'en vertu même de la définition donnée, il répond à chaque nombre une infinité de logarithmes; ce que je démontrerai dans le theoreme suivant.

THEOREME

Il y a toujours une infinité de logarithmes qui conviennent également à chaque nombre proposé; ou, si y marque le logarithme du nombre x, je dis que y renferme une infinité de valeurs différentes.

DEMONSTRATION

Je me bornerai ici aux logarithmes hyperboliques, puisqu'on sait que les logarithmes de toutes les autres especes sont à ceux-cy dans un rapport constant; ainsi, quand le logarithme hyperbolique du nombre x est nommé $= y$, le logarithme tabulaire de ce même nombre sera $= 0{,}4342944819 \ldots y$.

Or, le fondement des logarithmes hyperboliques est que, si ω signifie un nombre infiniment petit, le logarithme du nombre $1 + \omega$ sera $= \omega$, ou que $l(1 + \omega) = \omega$. De là il s'ensuit que $l(1 + \omega)^2 = 2\omega$, $l(1 + \omega)^3 = 3\omega$ et en général :

$$l(1 +)\omega^n = n\omega.$$

Mais, puisque ω est un nombre infiniment petit, il est evident que le nombre $(1 + \omega)^n$ ne sauroit devenir égal à quelque nombre proposé x, à moins que l'exposant n ne soit un nombre infini. Soit donc n un nombre infiniment grand et qu'on pose

$$x = (1 + \omega)^n$$

et le logarithme de x, qui a été nommé $= y$, sera $y = n\omega$. Donc, pour exprimer y par x, la premiere formule donnant $1 + \omega = x^{\frac{1}{n}}$ et $\omega = x^{\frac{1}{n}} - 1$, cette valeur étant substituée pour ω dans l'autre formule produira :

$$y = nx^{\frac{1}{n}} - n = lx.$$

D'où il est clair que la valeur de la formule $nx^{\frac{1}{n}} - n$ approchera d'autant plus du logarithme de x, plus le nombre n sera pris grand, et si l'on met pour n un nombre infini, cette formule donnera la vraie valeur du logarithme de x. Or, comme il est certain que $x^{\frac{1}{2}}$ a deux valeurs différentes, $x^{\frac{1}{3}}$ trois, $x^{\frac{1}{4}}$ quatre et ainsi de suite, il sera également certain que $x^{\frac{1}{n}}$ doit avoir une infinité de valeurs differentes, puisque n est un nombre infini. Par conséquent, cette infinité de valeurs differentes de $x^{\frac{1}{n}}$ produira aussi une infinité de valeurs differentes pour lx, de sorte que le nombre x doit avoir une infinité de logarithmes. C. Q. F. D.

De là, il s'ensuit que le logarithme de $+1$ n'est pas seulement $= 0$, mais qu'il y a encore une infinité d'autres quantités dont chacune est également le logarithme de $+1$. Cependant, on comprend aisément que tous ces autres logarithmes, hormis le premier 0, seront des quantités imaginaires; de sorte que, dans le calcul, on est en droit de ne regarder que 0 comme le logarithme de $+1$, tout de même que lorsqu'il s'agit de la racine cubique de 1, on ne se sert que de 1, quoique ces quantités imaginaires $\frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}$ et $\frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}$ soient également des racines cubiques de 1. Mais quand on veut comparer le logarithme de 1 avec les logarithmes de —1, ou de $\sqrt{-1}$, qui sont tous, à ce que je ferai voir dans la suite, imaginaires, il faut considérer le logarithme de 1 dans toute son étenduë; et alors toutes les difficultés et contradictions rapportées cy-dessus disparoitront d'elles mêmes. Car, soient α, β, γ, δ, ε, ζ, etc., les logarithmes imaginaires de l'unité, qui lui répondent aussi bien que 0, et on comprendra aisément qu'il peut être $2l-1 = l+1$, quoique tous les logarithmes de —1 soient imaginaires; car pour satisfaire à l'équation $2l-1 = l+1$, il suffit que le double de tous les logarithmes de —1 se trouvent parmi les logarithmes imaginaires de +1. De même, puisque $4l\sqrt{-1} = l+1$, chaque logarithme de $\sqrt{-1}$ multiplié par 4 se doit rencontrer dans la serie α, β, γ, δ, ε, ,ζ etc. Ainsi, les égalités $2l-1 = l+1$ et $4l\sqrt{-1} = l+1$ se peuvent maintenir, sans qu'on soit obligé de soutenir qu'il soit ou $l-1 = 0$ ou $l\sqrt{-1} = 0$, comme M. Bernoulli a prétendu. Mais tout cela sera mis dans tout son jour, quand je déterminerai actuellement tous les logarithmes de chaque nombre proposé, ce qui sera le sujet des problemes suivans.

PROBLEME 1

Déterminer tous les logarithmes qui répondent à un nombre affirmatif proposé +a quelconque.

. . . .

PROBLEME 2

Déterminer tous les logarithmes qui répondent à un nombre négatif quelconque —a.

. . . .

Par conséquent, tous les logarithmes de —1 seront

$$\pm\pi\sqrt{-1},\ \pm 3\pi\sqrt{-1},\ \pm 5\pi\sqrt{-1},\ \pm 7\pi\sqrt{-1},\ \pm 9\pi\sqrt{-1}, \text{ etc.}$$

Donc, si nous posons $l+a = \mathrm{A}$, ou que A marque le logarithme réel du nombre positif $+a$, tous les logarithmes du nombre négatif $-a$ seront :

$$\mathrm{A}\pm\pi\sqrt{-1},\ \mathrm{A}\pm 3\pi\sqrt{-1},\ \mathrm{A}\pm 5\pi\sqrt{-1},\ \mathrm{A}\pm 7\pi\sqrt{-1}, \text{ etc.}$$

dont le nombre est infini. C. Q. F. T.

De là, il est clair que tous les logarithmes d'un nombre négatif quelconque sont imaginaires, et qu'il n'y a aucun nombre négatif dont un de ses logarithmes soit réel. M. Leibniz a eu donc raison de soutenir que les logarithmes des nombres négatifs étoient imaginaires. Cependant, puisque les nombres affirmatifs ont aussi une infinité de logarithmes imaginaires, toutes les objections de M. Bernoulli contre ce sentiment perdent leur force. Car, quoiqu'il soit $l-1 = \pm(2\lambda-1)\pi\sqrt{-1}$, le logarithme de son quarré sera $l(-1)^2 = \pm 2(2\lambda-1)\pi\sqrt{-1}$, expression qui se trouve parmi les logarithmes de +1, de sorte qu'il demeure vrai que $2l-1 = l+1$, quoique nul des logarithmes de —1 se trouve parmi les logarithmes de +1. Soit A le logarithme réel du nombre positif $+a$ et que p marque en général tous les nombres pairs et q tous les impairs entiers, et ayant en général :

$$l+1 = \pm p\pi\sqrt{-1} \qquad \text{et} \qquad l-1 = \pm q\pi\sqrt{-1}$$

et

$$l+a = \mathrm{A}\pm p\pi\sqrt{-1} \qquad \text{et} \qquad l-a = \mathrm{A}\pm q\pi\sqrt{-1},$$

d'où l'on voit que :

$$l(-a)^2 = 2l - a = 2A \pm 2\pi\sqrt{q-1}.$$

Or, $2q$ étant $= p$ et $2A$ le logarithme réel de a^2, on voit que $2A \pm p\pi\sqrt{-1}$ est la formule générale des logarithmes de a^2; ainsi il est $l(-a)^2 = la^2$ ou bien $2l - a = 2l + a$, sans qu'il soit $l - a = l + a$; ce qui seroit sans doute contradictoire, si les nombres $+a$ et $-a$ n'avoient qu'un seul logarithme; car alors on auroit raison de conclure qu'il fût $l - a = l + a$, s'il étoit $2l - a = 2l + a$. Mais, dès qu'on tombe d'accord que tant $-a$ que $+a$ ont une infinité de logarithmes, cette conséquence, toute nécessaire qu'elle fût auparavant, n'est plus juste, puisque pour qu'il soit $2l - a = 2l + a$, il suffit que les doubles de tous les logarithmes de $-a$ se rencontrent dans les logarithmes de $+aa$. Ce qui peut arriver, comme nous voyons, sans qu'aucun des logarithmes de $-a$ soit égal à aucun des logarithmes de $+a$.

Il faut cependant avouër que toutes les valeurs de $2l - a$ sont differentes des valeurs de $2l + a$, vu qu'il est :

$$2l + a = 2A \pm 2p\pi\sqrt{-1} \qquad \text{et} \qquad 2l - a = 2A \pm 2q\pi\sqrt{-1},$$

où $2p$ marque un nombre pairement pair, et $2q$ un nombre impairement pair quelconque. Mais il faut remarquer que les logarithmes de $+a^2$, comme d'un nombre affirmatif dont le logarithme réel est $= 2A$, sont compris dans cette formule générale $la^2 = 2A \pm p\pi\sqrt{-1}$, où p marque un nombre pair quelconque sans en excepter zero. Cela remarqué, il est clair que toutes les valeurs de $2l - a$ sont comprises dancelles de la^2, aussi bien que celles de $2l + a$. Ainsi, quoiqu'on puisse dire que $2l - a = la^2$ et $2l + a = la^2$, prenant le signe de $=$ pour marquer que les valeurs de $2l - a$ ou de $2l + a$ se rencontrent parmi les valeurs de la^2, on ne sauroit dire, à la vérité, qu'il soit $2l - a = 2l + a$. Néanmoins, comme dans les formules $l + a = A \pm p\pi\sqrt{-1}$ et $l - a = A \pm q\pi\sqrt{-1}$ les nombres p et q sont indéterminés, rien n'oblige qu'en doublant ces logarithmes on prenne pour p et q les mêmes nombres. Ainsi, pour faire ces multiplications dans toute leur étenduë, que p, p', p'', p''', etc., marquent des nombres pairs quelconques égaux ou inégaux et q, q', q'', q''', etc., des nombres impairs égaux ou inégaux entr'eux, ces duplications se feront de la maniere suivante :

$$\begin{array}{rl} l + a = & A \pm p\pi\sqrt{-1} \\ l + a = & A \pm p'\pi\sqrt{-1} \\ \hline 2l + a = & 2A \pm (p + p')\pi\sqrt{-1}, \end{array} \qquad \begin{array}{rl} l - a = & A \pm q\pi\sqrt{-1} \\ l - a = & A \pm q'\pi\sqrt{-1} \\ \hline 2l - a = & 2A \pm (q + q')\pi\sqrt{-1}. \end{array}$$

Ici maintenant $p + p'$ marquant la somme de deux nombres pairs quelconques et $q + q'$ la somme de deux nombres impairs quelconques, tant $p + p'$ que $q + q'$ marquera un nombre pair quelconque; et partant, il sera $p + p' = q + q'$, donc $2l - a = 2l + a$. Par conséquent, dans ce sens, on pourra soutenir qu'il est $2l - a = 2l + a$, sans qu'il soit $l - a = l + a$.

. . . .

PROBLEME 3

Déterminer tous les logarithmes d'une quantité imaginaire quelconque.

Solution

Il est démontré que toute quantité imaginaire, quelque compliquée qu'elle soit, se réduit toujours à cette forme $a + b\sqrt{-1}$, où a et b sont des quantités réelles. Je pose maintenant :

$$\sqrt{(aa + bb)} = c$$

et $\frac{a}{\sqrt{(aa+bb)}}$ et $\frac{b}{\sqrt{(aa+bb)}}$ seront le cosinus et le sinus d'un certain angle qu'il sera aisé de trouver par les tables. Soit donc cet angle $= \varphi$, qui marque en même tems la quantité de l'arc de cercle qui est sa mesure, le sinus total étant posé $= 1$. On aura donc :

$$a = c \cos \varphi \qquad \text{et} \qquad b = c \sin \varphi,$$

et la formule imaginaire dont il faut chercher tous les logarithmes sera :

$$a + b\sqrt{-1} = c\,(\cos \varphi + \sqrt{-1} \cdot \sin \varphi)$$

ou, puisque c est un nombre affirmatif, soit C son logarithme réel, et on aura :

$$l(a + b\sqrt{-1}) = \mathrm{C} + l(\cos \varphi + \sqrt{-1} \cdot \sin \varphi).$$

Il s'agit donc de chercher tous les logarithmes de la quantité imaginaire $\cos \varphi + \sqrt{-1} \cdot \sin \varphi$, laquelle étant mise pour x, ses logarithmes seront les valeurs de y tirées de cette équation :

$$\left(1 + \frac{y}{n}\right)^n - x = 0,$$

n marquant un nombre infini. Mais pour pouvoir comparer cette équation avec la forme générale $p^n - q^n = 0$, je remarque que :

$$x = \cos \varphi + \sqrt{-1} \cdot \sin \varphi = \left(1 + \frac{\varphi\sqrt{-1}}{n}\right)^n,$$

dont la vérité est suffisamment prouvée ailleurs. Car on sait que :

$$\cos \varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{1 \cdot 2} + \frac{\varphi^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{\varphi^6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} + \text{etc.}$$

et :

$$\sin \varphi = \varphi - \frac{\varphi^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{\varphi^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \text{etc.}$$

Or, puisque n est un nombre infini, il sera :

$$\left(1 + \frac{\varphi\sqrt{-1}}{n}\right)^n = 1 + \frac{\varphi\sqrt{-1}}{1} - \frac{\varphi^2}{1 \cdot 2} - \frac{\varphi^3\sqrt{-1}}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{\varphi^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{\varphi^5\sqrt{-1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \text{etc.}$$

d'où il est clair que :

$$\left(1 + \frac{\varphi\sqrt{-1}}{n}\right)^n = \cos \varphi + \sqrt{-1} \cdot \sin \varphi.$$

Nous aurons donc :

$$p = 1 + \frac{y}{n} \qquad \text{et} \qquad q = \frac{1 + \varphi\sqrt{-1}}{n}$$

pour l'équation à résoudre $p^n - q^n = 0$. Mais, ayant vu déjà que chacune des racines de cette équation est contenuë dans cette formule générale :

$$p = q\left(\cos\frac{2\lambda\pi}{n} \pm \sqrt{-1} \cdot \sin\frac{2\lambda\pi}{n}\right),$$

prenant pour λ tous les nombres entiers, ou affirmatifs ou négatifs, il sera pour notre cas :

$$1 + \frac{y}{n} = \left(1 + \frac{\varphi\sqrt{-1}}{n}\right)\left(\cos\frac{2\lambda\pi}{n} \pm \sqrt{-1} \cdot \sin\frac{2\lambda\pi}{n}\right)$$

et parce que, à cause du nombre n infini, il est :

$$\cos\frac{2\lambda\pi}{n} = 1 \qquad \text{et} \qquad \sin\frac{2\lambda\pi}{n} = \frac{2\lambda\pi}{n},$$

il sera

$$1 + \frac{y}{n} = \left(1 + \frac{\varphi\sqrt{-1}}{n}\right)\left(1 \pm \frac{2\lambda\pi}{n}\sqrt{-1}\right),$$

ce qui donne :

$$y = \varphi\sqrt{-1} \pm 2\lambda\pi\sqrt{-1},$$

d'où tous les logarithmes de la formule $\cos\varphi + \sqrt{-1} \cdot \sin\varphi$ seront :

$$\varphi\sqrt{-1},\ (\varphi \pm 2\pi)\sqrt{-1},\ (\varphi \pm 4\pi)\sqrt{-1},\ (\varphi \pm 6\pi)\sqrt{-1}, \text{ etc.}$$

et les logarithmes de la formule imaginaire $a + b\sqrt{-1}$, posant :

$$c = \sqrt{(aa + bb)} \quad \text{et} \quad \operatorname{tang}\varphi = \frac{b}{a}, \quad \text{ou} \quad \cos\varphi = \frac{a}{c} \quad \text{et} \quad \sin\varphi = \frac{b}{c}$$

et de plus :

$$lc = C,$$

seront :

$$C + \varphi\sqrt{-1},\ C + (\varphi \pm 2\pi)\sqrt{-1},\ C + (\varphi \pm 4\pi)\sqrt{-1},\ C + (\varphi \pm 6\pi)\sqrt{-1}, \text{etc.}$$

C. Q. F. T.

De là, il est clair que tous les logarithmes d'une quantité imaginaire sont aussi imaginaires; car, lorsque ou $\varphi = 0$ ou $\varphi = \pm 2\lambda\pi$, qui sont les cas où quelcun de ces logarithmes pourroit devenir réel, cela ne peut arriver que lorsque $\operatorname{tang}\varphi = \frac{b}{a} = 0$; il seroit donc $b = 0$, et la quantité $a + b\sqrt{-1}$ cesseroit d'être imaginaire. Donc, si l'on prend p pour signifier chaque nombre pair, ou affirmatif ou négatif, tous les logarithmes de la quantité imaginaire $a + b\sqrt{-1}$ seront renfermés dans cette formule générale :

$$C + (\varphi + p\pi)\sqrt{-1},$$

où C est le logarithme réel de la quantité affirmative $\sqrt{(aa + bb)} = c$, et l'arc ou l'angle φ est pris tel qu'il est sin $\varphi = \frac{b}{c}$ et cos $\varphi = \frac{a}{c}$. Or, puisqu'il y a une infinité d'angles qui conviennent au même sinus $\frac{b}{c}$ et cosinus $\frac{a}{c}$, qui sont tous compris dans la formule $\varphi + p\pi$, on pourroit omettre le terme $p\pi$, et dire que le logarithme de $a + b\sqrt{-1}$ est en général $= C + \varphi\sqrt{-1}$; puisque cet angle φ renferme déjà tous ces angles. Cependant, si l'on prend pour φ le plus petit angle affirmatif qui répond au sinus $\frac{b}{c}$ et au cosinus $\frac{a}{c}$, la formule générale des logarithmes de $a + b\sqrt{-1}$ sera $= C + (\varphi + p\pi)\sqrt{-1}$.

Si l'angle φ est tel, qu'il tient une raison commensurable avec π ou la circonference du cercle, ce sera toujours une marque qu'une certaine puissance de la quantité imaginaire $a + b\sqrt{-1}$ devient réelle. Car soit $\varphi = \frac{\mu}{\nu}\pi$, et puisqu'il est $l(a + b\sqrt{-1}) = C + \left(\frac{\mu}{\nu}\pi + p\pi\right)\sqrt{-1}$, il sera :

$$l(a + b\sqrt{-1})^{\nu} = \nu C + (\mu + \nu p)\pi\sqrt{-1},$$

d'où l'on voit que si $\mu + \nu p$ est un nombre pair ou seulement μ pair, la puissance $(a + b\sqrt{-1})^{\nu}$ sera un nombre réel affirmatif, et même $= c^{\nu} = (\sqrt{(aa + bb)})^{\nu}$; or si $\mu + \nu p$ ou seulement μ est un nombre impair, la puissance $(a + b\sqrt{-1})^{\nu}$ sera un nombre négatif $= -c^{\nu}$.

Jusqu'ici, on auroit pu croire qu'il seroit indifferent de donner à π quelque valeur que ce soit, puisqu'il ne paroissoit rien, ni dans les logarithmes des nombres affirmatifs $l + a = A \pm p\pi\sqrt{-1}$, ni dans ceux des nombres négatifs $l - a = A \pm q\pi\sqrt{-1}$, d'où nous puissions comprendre pourquoi la lettre π dût plutôt marquer la demi-circonference d'un cercle décrit du rayon $= 1$ que tout autre nombre. Mais à présent, où il s'agit des logarithmes des nombres imaginaires, la raison en devient évidente; puisqu'il faut comparer l'angle φ à π, de sorte que si l'on donnoit à π toute autre valeur que celle de deux angles droits, les formules deviendroient fausses, et ne seroient plus d'accord avec celles que nous avons trouvées pour les nombres affirmatifs et négatifs.

. . . .

Ces exemples suffisent pour faire voir que l'idée des logarithmes que je viens d'établir est la véritable, et qu'elle est parfaitement d'accord avec toutes les opérations que la théorie des logarithmes renferme, de sorte qu'on n'y rencontre plus aucune difficulté, et que toutes les contradictions auxquelles cette doctrine paroissoit assujettie, disparoissent entierement. Par conséquent, la grande controverse qui partagea autrefois MM. Leibniz et Bernoulli, est à present parfaitement décidée, ensorte que ni l'un ni l'autre ne trouveroit plus le moindre sujet de refuser son consentement.

. . . .

Petite histoire du calcul des probabilités.

par Bernard BRU, Université de Paris VI

"Tout marche en suivant des lois et rien ne marche en suivant des lois"
(NOVALIS, Cahiers de FREIBERG, 1798-1799).

"Le calcul des probabilités ne me semble avoir été réellement, pour ses illustres inventeurs, qu'un prétexte commode à d'ingénieux et difficiles problèmes numériques... Quant à la conception philosophique sur laquelle repose une telle doctrine, je la crois radicalement fausse et susceptible de conduire aux plus absurdes conséquences... C'est la notion fondamentale de la probabilité évaluée, qui me semble directement irrationnelle et même sophistiqué : je la regarde comme essentiellement impropre à régler notre conduite en aucun cas, si ce n'est tout au plus dans les jeux de hasard... Les applications utiles qui semblent lui être dues, le simple bon sens, dont cette doctrine a souvent faussé les aperçus, les avait toujours clairement indiquées d'avance."

(Auguste COMTE. Cours de Philosophie positive, 27e leçon 1844)

"Les contacts entre les habitants d'une grande ville sont tellement nombreux qu'on ne saurait s'étonner s'il se produit quelquefois entre eux des frictions d'un caractère général sans gravité. Il m'est arrivé récemment d'assister à l'une de ces rencontres dépourvues d'aménité qui ont lieu en général dans les véhicules destinés aux transports en commun de la région parisienne aux heures d'affluence. Il n'y a d'ailleurs rien d'étonnant à ce que j'en aie été le spectateur, car je me déplace fréquemment de la sorte..." ainsi commence la version probabiliste des "exercices de style" de Raymond QUENEAU dont le thème général est la description d'une rencontre sur la ligne S (Contrescarpe-Champerret) à une heure d'affluence.

Il existe donc une façon particulière de voir les choses, que l'on peut appeler, pour simplifier, probabiliste. Cette façon n'est bien sûr pas nouvelle ; le but de cet article est de le rendre manifeste.

Depuis quelques temps, paraissent, en France, des ouvrages très savants sur l'histoire et les sciences ; il n'est pas question de rivaliser ici avec eux.

Comme le fait comprendre QUENEAU (qui fut aussi mathématicien), la description probabiliste consiste, essentiellement, à considérer chaque événement particulier, non pas isolément, mais dans un ensemble d'événements de même type ; le calcul des probabilités, quant à lui, tente d'extraire de ce mode de description un ordre, une structure, une logique qui le fasse fonctionner et le rende efficace.

Depuis toujours on a dressé des statistiques de toutes sortes et on s'en est servi : la prospérité de l'Egypte pharaonique dépendait aussi des observations régulières de l'amplitude des crues du Nil, Rome établissait des recensements très précis des ressources et des populations ; on s'est même aperçu récemment que certaines prescriptions talmudiques sur la construction du Temple reposaient sur l'observation que les erreurs de longueurs sont "distribuées" symétriquement autour d'une valeur moyenne ; c'est déjà l'amorce d'une théorie mathématique des erreurs (voir, à ce sujet, RABINOWITCH, Arch. for History of Sciences, 1975).

En Occident, c'est à partir de la Renaissance et du développement considérable du commerce maritime, des assurances et des banques que des statistiques furent dressées et utilisées systématiquement.

Cependant, les premiers concepts probabilistes clairement dégagés naquirent, non de l'étude et de l'exploitation des statistiques commerciales, mais de celle des jeux de hasard. Cela s'explique très naturellement : d'une part les jeux de hasard sont beaucoup plus simples, conceptuellement, que les phénomènes économiques ou sociaux décrits par les données statistiques, d'autre part les jeux de hasard sont les objets privilégiés de la description probabiliste parce qu'on ne peut les décrire autrement. Comme dit le poète, "un coup de dés jamais n'abolira le hasard" et l'étude scientifique approfondie d'*un* coup de dés n'a jamais conduit à d'autres conclusions ; la seule chose à faire est d'observer une longue suite de coups de dés et alors seulement de conclure ; c'est bien là, par définition, la description probabiliste.

Les jeux de hasard, comme les statistiques, ont existé de tout temps et en tout pays ; la Bible, par exemple, en apporte de nombreux témoignages : c'est à l'aide des "sorts sacrés" (une sorte de jeu de pile ou face) que certaines décisions importantes étaient prises, par exemple le partage d'Israël entre les 12 tribus (JOSUE 13-21). Dès la première dynastie, environ 3500 ans avant notre ère, on jouait aux dès en Egypte, etc.

Il semble, par ailleurs, parfaitement évident que les principales lois des jeux de hasard, l'extrême irrégularité des résultats individuels et au contraire la régularité des fréquences d'apparition des résultats dans leur ensemble, ont été connues, depuis toujours, au moins des prêtres et des joueurs. Comment expliquer, sinon, le rôle fondamental que les jeux de hasard ont joué et continuent à jouer dans les méthodes de divination (Dieu surprend toujours mais il est juste en moyenne) et dans les règlements de partages litigieux (plutôt que de se laisser mourir, l'âne de Buridan aurait mieux fait de jouer à pile ou face pour décider s'il boirait avant de manger ou l'inverse, et c'est ce que la sagesse populaire a toujours fait) ? Comment expliquer, sinon, la popularité des jeux de hasard (l'intérêt est toujours renouvelé, mais en moyenne le jeu est équitable) ?

La géométrie du hasard

A partir du XVᵉ siècle on voit apparaître en Occident (ailleurs et avant on ne sait pas, c'est une énigme historique classique(1)) les premiers dénombrements des possibilités des jeux de hasard les plus courants, par exemple compter les différents résultats possibles au jeu de passe-dix où l'on jette 3 dès, problème qui donna lieu à une polémique célèbre ; le résultat est-il 216 (les dés sont distinguables), est-ce 56 (les dés sont indistinguables), est-ce autre chose ? (problème du grand Duc de Toscane). Mais la chose la plus remarquable est que, d'emblée, on ait fait le rapprochement entre le nombre de résultats réalisant une figure donnée en une partie (on obtient par exemple une somme de 10 points en jetant 3 dés de 27 façons différentes) et la fréquence d'apparition de cette figure au cours d'une longue suite de parties ; le fait semble en tout cas avoir été clair pour CARDAN (1501-1576) dans son livre posthume "De ludo aleae", le premier ouvrage occidental consacré au calcul des probabilités et pour GALILEE (1564-1642) dans l'énoncé qu'il donne du problème du grand duc de Toscane. Ce rapprochement s'est sans doute imposé naturellement aux hommes de la Renaissance qui raisonnaient le plus souvent par analogie comme au temps de la scholastique et en même temps découvraient les premières lois de la physique : les jeux de hasard sont soumis à l'ordre des nombres, le calcul des probabilités était né.

CARDAN est tout à fait représentatif des savants errants de la Renaissance ; mathématicien, il donne la solution par radical de l'équation du 3ᵉ degré ; médecin, il développe une théorie de la génération et un système d'analogies entre monde animal et végétal (voir à ce sujet le livre de François JACOB "La logique du vivant") ; joueur, il s'attaque aux principaux problèmes de jeux posés à l'époque ; il ne résout pas le problème des partis posé dès le XVᵉ siècle, mais on trouve dans son livre les premières utilisations des règles d'addition (axiome d'additivité) et de multiplication (axiome de conditionnement et d'indépendance) ; on y trouve également la règle de CARDAN qui peut s'interpréter comme la première évaluation asymptotique d'une probabilité. Il est vraisemblable qu'il ne publia pas son livre écrit, dit-il, dès 1526, pour préserver non pas ses gains au jeu — il était déjà trop bon probabiliste pour espérer y faire fortune —, mais plutôt sa gloire de mathématicien ; la compétition scientifique était à l'époque extrêmement vive ; les méthodes n'étaient jamais publiées ; seuls les résultats l'étaient et CARDAN, sans doute conscient de la puissance de ses méthodes, se garda bien d'en faire profiter ses contemporains.

---

(1) L'énigme n'est pas si grande qu'on le prétend ; la même situation se rencontre en théorie des groupes : 4000 ans avant J.C. les architectes égyptiens connaissaient les lois et la classification des symétries du plan et de l'espace ; or la théorie des groupes, abstraction naturelle des symétries ornementales (la géométrie des symétries), est apparue encore plus tard que la théorie des probabilités. Voir à ce sujet H. WEYL, Symmetry, Princeton 1952.

Et voici l'année 1654 ; dans un échange de lettres, PASCAL et FERMAT résolvent de deux façons différentes le problème des partis ; ils élargissent ainsi considérablement les méthodes de leurs prédécesseurs, FERMAT en réduisant le problème à celui d'un jeu où tous les résultats sont parfaitement symétriques et "donc" ont la même chance de se réaliser, PASCAL en faisant, pour la première fois semble-t-il, un raisonnement de symétrie, non plus dans l'espace des résultats possibles comme CARDAN, GALILEE ou FERMAT, mais dans le temps, le jeu se renouvelant dans le temps de façon régulière (le rythme du hasard) ; c'est là une des méthodes de base du traitement des promenades aléatoires et des chaînes de MARKOV qui sera exploité systématiquement à compter de cette date jusqu'à maintenant. Ils introduisent également, implicitement, la notion de gain espéré d'un joueur que Pascal, toujours ironique, utilisera dans l'argument du pari : dans un jeu à deux issues (Dieu existe, Dieu n'existe pas), même si la probabilité de gagner (Dieu existe) est extrêmement faible (soit p), comme le gain associé est infini, le jeu vaut la peine d'être joué car l'espérance de gain ($p \times \infty + (1-p)x$) est infinie.

PASCAL semble avoir saisi dès 1654 l'importance considérable de sa découverte : le hasard est géométrisable, la description probabiliste s'ordonne à l'intérieur d'une géométrie, c'est-à-dire, au sens où l'entend PASCAL ("De l'esprit géométrique..."), un certain nombre de termes primitifs non définis et de principes admis par tout le monde (les géomètres) à partir desquels on donne des définitions précises et on déduit des propositions de façon démonstrative. A aucun endroit PASCAL n'indique quels principes (axiomes) fondent la géométrie du hasard, comme il la nomme, et son projet d'écrire un traité sur ce thème avec FERMAT n'aboutira pas. En effet, comme il l'écrit à FERMAT dans sa dernière lettre de 1660 : "Pour vous parler franchement de la géométrie, je la trouve le plus haut exercice de l'esprit mais en même temps je la connais pour si inutile, que je fais peu de différence entre un homme qui n'est que géomètre et un habile artisan". Il concluait qu'il n'avait de temps ni de force à perdre en des choses si peu importantes. Il mourut en 1662.

Nous sommes restés sans doute trop longtemps sur l'épisode PASCAL-FERMAT, mais PASCAL donna aux probabilités leur vrai point de départ ; il influença profondément la fin de son siècle, notamment HUYGENS, LEIBNIZ et Jacques BERNOULLI. De tous "les probabilistes", c'est sûrement la personnalité la plus forte et d'une certaine façon la plus moderne. (PASCAL n'aurait sans doute pas aimé se voir traiter de probabiliste, qui aurait été synonyme au XVII^{e} siècle de casuiste, voire de jésuite : "Que serait-ce que les jésuites sans la probabilité et que la probabilité sans les jésuites ?" (Pensée 981).

HUYGENS (1629 - 1695) arrive en France en 1655 ; rapidement au courant des problèmes traités par PASCAL et FERMAT, il publie en 1657 un traité "De ratiociniis in ludo aleae" dans lequel il introduit explicitement et utilise la notion d'espérance mathématique, abstraction naturelle de la notion de moyenne employée couramment à l'époque en statistiques commerciales (la théorie s'enrichit de la pratique). Plus tard, il collaborera avec JAN DE WITT (1625-1672), Grand Pensionnaire de Hollande, à un programme d'applications du calcul des probabilités aux problèmes d'assurances (la théorie retourne à la pratique). Le traité de HUYGENS se termine par l'énoncé sans solutions de cinq problèmes ; le cinquième constitue une première version du problème de la ruine des joueurs, thème constant de recherche jusqu'au début du XIX[e] siècle. Il semble que le chiffre 5 ait joué un rôle important dans la vie de HUYGENS qui découvrit en France, non seulement l'extraordinaire génie de PASCAL et FERMAT, mais aussi la beauté et l'esprit non moins extraordinaires de NINON de LENCLOS (1620-1705), comme le rapporte VOLTAIRE (lettre à M. 1751) : "HUYGENS, ce philosophe hollandais qui découvrit en France une lune de Saturne, s'attacha à observer Mademoiselle NINON de LENCLOS... Il fit pour elle ces vers qui sont un peu géométriques :

Elle a 5 instruments dont je suis amoureux ;
Les deux premiers, ses mains ; les deux autres, ses yeux ;
Pour le plus beau de tous, le cinquième qui reste,
Il faut être fringant et leste".

La méthode de PASCAL, renouvellement et stationnarité dans le temps, permettait de résoudre la plupart des problèmes de jeux de l'époque et en particulier ceux de HUYGENS ; mais en 1685 Jacques BERNOULLI (1654-1705), le plus illustre membre de la famille des mathématiciens bâlois, proposa un nouveau problème auquel on ne pouvait plus appliquer le raisonnement de PASCAL, les conditions du jeu changeant à chaque instant (cassant le rythme). LEIBNIZ et lui-même publièrent, en 1690, la solution sous forme d'une série ; c'était introduire explicitement la σ - additivité des probabilités.

Les premiers théorèmes limites

A la fin du XVII[e] siècle la géométrie du hasard n'était pas loin de ressembler à celle que nous connaissons maintenant ; il faudra cependant attendre encore deux cents ans pour la compléter. Patience !

Et d'abord, personne, jusqu'à présent, n'a encore établi sur des bases solides le lien entre fréquence d'apparition d'un événement dans une suite de parties (la probabilité a posteriori, comme l'appellera BERNOULLI et la probabilité "géométrique" (a priori) calculée par raison de symétrie ; ce sera la grande œuvre de Jacques BERNOULLI dans son livre "Ars Conjectandi", publié en 1713 par son neveu Nicolas. Jacques BERNOULLI y démontre de façon parfaitement rigoureuse (chose exceptionnelle à une époque où la rigueur mathématique est assez laxiste) la loi faible des grands nombres pour le jeu de pile ou face. Il comprend que son théorème justifie les considérations intuitives et analogiques des deux siècles précédents et annonce de nombreuses applications qu'il n'aura pas le temps d'écrire. On voit mal, d'ailleurs, comment il aurait pu le faire, lorsqu'on sait les difficultés énormes rencontrées par ses successeurs dans cette entreprise.

Au début du XVIIIe siècle, MONTMORT (1678-1719), de MOIVRE (1667-1754) et Nicolas BERNOULLI (1687-1759) traiteront de nombreux problèmes de jeux, par exemple le problème des rencontres, le problème de la poule et surtout le problème de Nicolas BERNOULLI qui, semble-t-il, ne peut se traiter qu'en utilisant, au moins implicitement, un raisonnement de renouvellement à partir d'un temps (d'arrêt) aléatoire, raisonnement vraiment élucidé il y a une trentaine d'années seulement.

Mais la première moitié du XVIIIe siècle sera marquée dans l'histoire du calcul des probabilités par le théorème de de MOIVRE (1730) qui précise le théorème de BERNOULLI en donnant une évaluation asymptotique de la "loi" de l'écart entre probabilité a priori et probabilité a posteriori ; il est maintenant possible de "faire de l'estimation statistique", c'est-à-dire d'estimer, au vu d'un grand nombre d'observations, la probabilité d'un événement et de construire ainsi les premiers "modèles probabilistes" des phénomènes expérimentaux. C'est ce que Nicolas BERNOULLI avait fait dès 1712, mais de MOIVRE ne voulut jamais le reconnaître, son théorème prouvant, à ses yeux, l'existence de Dieu qui maintient d'une main ferme les fluctuations du hasard de façon à faire converger les fréquences vers la probabilité, alors que Nicolas BERNOULLI se servait de son modèle pour détruire un argument d'ARBUTHNOT sur l'action de la Divine Providence.

La probabilité des causes

Thomas BAYES (1702-1761), pasteur presbytérien, fils de pasteur presbytérien, se trouve lui aussi impliqué dans le débat sur la Divine Providence. Il publie en 1731 "Divine Benevolence or an attempt to prove that the principle End of Divine Providence and Government is the Happiness of his creatures" ; longtemps il réfléchira au problème de l'estimation des probabilités des événements naturels. Le premier, dans son œuvre posthume "Thomas BAYES essay towards solving a problem in the doctrine of chances" (1763), il cherche la "probabilité" que la probabilité d'un événement (par exemple la naissance d'une fille) soit comprise entre deux bornes fixées à l'avance(2). Son raisonnement est analogique :

(2) Pendant longtemps on a appelé la méthode de BAYES : la recherche de la probabilité des causes ; on dirait maintenant la recherche de la probabilité des modèles, car le mot "cause" avait au XVIIIe et XIXe siècles un sens probabiliste particulier, comme le fera remarquer BIENAYME : en probabilité la cause d'un événement signifie "l'état des choses, de l'ensemble des circonstances pendant lequel cet événement a une probabilité déterminée".

la probabilité d'un événement est semblable à une mesure physique sur laquelle on ne disposerait a priori d'aucune information, sinon qu'elle est comprise entre 0 et 1. Il est donc naturel de supposer que toutes les valeurs de cette probabilité sont, a priori (c'est-à-dire en l'absence de toute observation), "également probables" : la "probabilité" que la probabilité cherchée tombe dans telle ou telle région du segment (0,1) est égale, par raison de symétrie, à la longueur de la région considérée, elle est donc "bien définie". Si maintenant on observe k réalisations de l'événement considéré au cours de n observations (par exemple k filles en n naissances), la "loi" (a posteriori) de la probabilité de l'événement va changer (on dispose maintenant d'informations objectives) suivant les principes classiques de la théorie des probabilités : c'est la règle de BAYES (la vraie, l'autre sera énoncée par LAPLACE). Le calcul permet de conclure ; il fournit non seulement l'estimation cherchée, mais la loi de cette estimation, son "degré de probabilité".

Le raisonnement de BAYES s'inscrit naturellement dans l'évolution des idées probabilistes du XVIII^e^ siècle et cela pour au moins deux raisons. Au même moment et au même endroit, au sein de la Royal Society, Thomas SIMPSON (1710-1761) publie les premiers éléments d'une théorie probabiliste des erreurs de mesures, où il s'intéresse à la "loi" des erreurs, c'est-à-dire à la probabilité a priori que les erreurs tombent dans telle ou telle portion de la droite (voir plus loin). Mathématiquement, la notion de loi continue de probabilités est ainsi (à peu près) dégagée. D'autre part, depuis toujours on a "probabilisé" le monde, sans souci de géométrie ; un énoncé, une opinion, un avenir, est plus ou moins probable, au sens de plus ou moins vraisemblable, plus ou moins approuvable ("*probare*" en latin = approuver). Dès le II^e^ siècle avant J.C. on voit apparaître une école philosophique probabiliste : "Toute opinion a un certain degré de probabilité sans être jamais ni tout à fait juste ni tout à fait fausse" (jésuites, dirait PASCAL). Les tribunaux de XVIII^e^ siècle, pour démontrer une culpabilité, additionnaient des "probabilités" (quart de preuve, huitième de preuve, etc.) de façon très subtile et souvent très injuste (voir à ce sujet les grandes affaires judiciaires de l'époque). Ainsi, au XVIII^e^ siècle le mot *probabilité* est le plus souvent employé au sens de certitude ou d'incertitude partielle (la part n'étant d'ailleurs pas forcément représentée par une fraction de l'unité) et les auteurs scrupuleux appellent plutôt calcul (ou doctrine) des chances ce que nous appelons maintenant calcul (ou théorie) des probabilités.

BAYES, pour la première fois (3), va laisser déraper la probabilité — objet mathématique que la géométrie du hasard a extrait de la description probabiliste vers la probabilité au sens du dictionnaire Larousse : à une notion subjective (toutes les informations qui fondent notre intime conviction) il associe un objet mathématique (formel) : une loi de probabilité,

(3) En fait l'argument du pari de Pascal est typiquement bayésien et de nombreux auteurs des XVII^e^ et XVIII^e^ siècles, tentés par la formule du poète : "Toute pensée émet un jet de dés", ont pratiqué l'amalgame bayésien. Principalement J. Bernoulli.

et en utilise les propriétés pour remonter au réel. Formellement, mathématiquement, la méthode de BAYES permet de résoudre le problème de l'estimation des probabilités ; mais quelle est la valeur pratique du résultat obtenu, son adéquation à l'univers (extérieur à notre subjectivité) (4) ? BAYES devait sentir confusément qu'il y avait là un nouveau problème, car il ne publia pas sa méthode. Les problèmes posés par la méthode de BAYES ne sont toujours pas résolus de façon satisfaisante et il existe à l'heure actuelle des adeptes enthousiastes ou au contraire des détracteurs systématiques des méthodes bayésiennes en statistiques. En effet, on peut admettre que la probabilité d'un événement ait un sens physique (on dit objectif) ; c'est une valeur asymptotique de la fréquence de réalisations de cet événement au cours de nombreuses observations (c'est la description probabiliste) ; mais quel sens objectif donner à la probabilité que cette probabilité soit de tel ou tel ordre de grandeur ? On ne peut plus la confronter à des données expérimentales ; ce n'est donc pas une notion scientifique au sens habituel du terme (voir à ce sujet K. POPPER, "Logique de la découverte scientifique", PAYOT). Cette nouvelle sorte de probabilité est appelée, habituellement, probabilité subjective ; elle est mathématiquement identique à la probabilité de la géométrie du hasard (bien que certains extrémistes lui retirent, pour la punir, certaines propriétés, la σ -additivité par exemple) ; intuitivement elle correspond à la géométrie d'un jeu de hasard qui ne serait joué qu'une fois (Dieu existe, Dieu n'existe pas) et sur lequel on disposerait d'un certain nombre d'informations. Cette analogie formelle et intuitive peut être poussée très loin ; elle conduit à des résultats qui peuvent, eux, être confrontés à la réalité des choses (voir note (4)) ; c'est pourquoi la théorie des statistiques bayésiennes est souvent utile en pratique : elle conduit toujours à des résultats et ceux-ci sont parfois de bons résultats.

Mais, à l'époque de BAYES, le glissement de l'objectif au subjectif à travers le miroir de la géométrie du hasard, bien qu'aperçu par Condorcet, va s'opérer en douceur et LAPLACE maniera les deux types de probabilités sans crise de conscience particulière. Ce sera le mérite de COURNOT d'attirer l'attention sur le problème, 50 ans plus tard. BOOLE, quelque temps après COURNOT, ajoutera : "It would be unphilosophical to affirm that the strength of our expectation (of an event), viewed as an emotion of the mind, is capable of being referred to any numeral standard. The man of sanguine temperament builds high hopes where the timid despair and the irresolute are lost in doubt". Et POPPER (1934) concluera de façon encore plus définitive : "Je ne pense pas qu'il soit possible de construire une théorie satisfaisante de ce qu'on

(4) Il faut signaler que la méthode BAYES conduit souvent à de bons résultats pratiques, surtout dans le cas d'observations nombreuses car dans ce cas (et LAPLACE l'avait déjà remarqué) l'estimation de la probabilité ne dépend plus de la loi de probabilité définie (a priori, subjectivement) sur l'ensemble des "causes" possibles (voir note précédente pour le mot *cause*). Elle conduit également à des absurdités célèbres, par exemple le calcul par LAPLACE de la probabilité que le soleil se lève demain.

appelle traditionnellement l'induction. Je crois au contraire que pour des raisons purement logiques toute théorie de ce type doit conduire à une régression à l'infini ou employer un principe a priori qui ne peut être soumis à des tests expérimentaux'' et la théorie de l'inférence statistique, proposée par BAYES, en est un exemple caractéristique ; elle est caractéristique, aussi, d'une conception historique de la science comme système de connaissances certaines. Or, comme le souligne POPPER, ''Nous devons nous faire à l'idée que nous ne devons pas considérer la science comme un ''corps de connaissances'', mais comme un système d'hypothèses ; c'est-à-dire comme un système de conjectures ou d'anticipations qui ne peuvent en principe être justifiées, mais que nous utilisons aussi longtemps qu'elles résistent à l'épreuve des tests et à propos desquelles nous ne sommes jamais en droit de dire que nous savons qu'elles sont vraies ou plus ou moins certaines *ou même probables*''. Il faut donc nous résigner ; nous pouvons toujours formuler des hypothèses (éventuellement probabilistes), mais il ne nous est plus possible de parler valablement de la probabilité de ces hypothèses (de ces causes). Dans les cours nous évitons soigneusement ce débat ; nous développons la théorie des probabilités comme un système formel (ou presque), c'est-à-dire comme un système ''susceptible de recevoir de nombreuses interprétations'', par exemple l'interprétation objective ou l'interprétation subjective. Nous employons librement ces interprétations avec, pour seul souci, l'introduction et le maniement du calcul des probabilités, du filet probabiliste pour reprendre la célèbre formule de Novalis : ''Les théories sont des filets : seul celui qui lance, pêchera''.

Novalis nous ramène au XVIII^e siècle.

Il faut maintenant parler de Daniel BERNOULLI (1700-1782) qui fonde la mécanique statistique et construit en particulier un modèle de diffusion entre deux enceintes, premier exemple de ''chaîne de MARKOV'' qui sera traité complètement par LAPLACE un peu plus tard, de BUFFON (1707-1788) qui, dans sa grande histoire naturelle, consacre un tome à ''l'arithmétique morale'', c'est-à-dire à la description probabiliste des sociétés humaines (mortalité, natalité, mariages, etc.) ; il traite aussi le problème de franc carreau et celui dit de ''l'aiguille de BUFFON''.

Sous l'impulsion de TURGOT, qui cherchait (déjà) à rationaliser l'économie, CONDORCET (1743-1794) tente lui aussi d'utiliser les techniques probabilistes dans les questions d'arithmétique morale (voir CONDORCET commenté par RASHED, HERMANN Ed.) mais celles-ci aussi bien que celles-là ne se manient pas si facilement et les résultats obtenus par CONDORCET ne sont pas à la hauteur de son entreprise : fonder la science sociale.

B. PASCAL

P.S. LAPLACE

CONDORCET

Développement des méthodes analytiques

Dans le sillage de CONDORCET, apparaît LAPLACE (1749-1827) qui va truster de 1773 jusqu'à sa mort une grande partie de ce qui se publie en matière de probabilités. Le caractère de LAPLACE peut se résumer en peu de mots : ambition personnelle immodérée, opportunisme sans faille ; il sait abandonner ses amis à temps, ce qui lui permet de traverser sereinement la Révolution et l'Empire et de mourir, pair de France, couvert d'honneurs et de gloire. Il a cependant pour lui un sens de l'analyse dont l'histoire fournit peu d'exemples ; ce don exceptionnel lui permet de reprendre et d'amplifier tous les résultats probabilistes obtenus par ses prédécesseurs et ses contemporains (qu'il ne cite d'ailleurs pratiquement jamais, sinon pour dire ce qu'ils n'ont pas fait).

LAPLACE est l'auteur de la fameuse fausse définition de la probabilité (empruntée à CONDORCET) : nombre de cas favorables divisé par nombre de cas possibles, qui sera reprise par tous les auteurs suivants jusqu'à POINCARE compris, mais qu'il trahira, lui-même, 16 pages après l'avoir donnée dans son ouvrage monumental, "Théorie analytique des probabilités" ; cette définition n'est en effet valable que dans le cas très particulier des espaces finis uniformes (à symétries d'espace) ; or, depuis PASCAL, on traite des cas beaucoup plus généraux, ce que, bien sûr, LAPLACE savait ; c'est pourquoi, parallèlement à cette définition, il énonce un ensemble de principes valables dans tous les cas (règles d'addition, de multiplication, "règles de BAYES", etc.). LAPLACE donne une extension extraordinaire au théorème de de MOIVRE en créant la méthode de LAPLACE qui généralise la formule de STIRLING qu'utilisait de MOIVRE (qui l'avait probablement démontré avant STIRLING). Il développe de façon remarquable les méthodes de résolution des équations aux différences finies auxquelles se ramènent la plupart des problèmes de jeux, notamment par la méthode de PASCAL ; à cette occasion il utilise systématiquement les fonctions génératrices introduites déjà par SIMPSON et LAGRANGE (1736-1813). Il développe enfin un nombre considérable d'applications (statistique bayésienne, méthode du maximum de vraisemblance empruntée à Daniel BERNOULLI, théorie des erreurs, théories des rentes viagères, des assurances, etc.). On peut cependant lui reprocher d'en avoir trop fait, à tort et à travers : le but est d'arriver à tout prix à la solution (le plus souvent très ingénieuse) du problème sans se préoccuper de cohérence logique ni de validité des résultats (adéquation du réel) et l'autorité de LAPLACE est telle que ses énoncés les plus contestables seront tenus longtemps pour acquis.

Au point qu'au début de la monarchie de Juillet, ARAGO utilisera des conclusions particulièrement infondées de LAPLACE sur la probabilité des jugements pour critiquer, à la Chambre, une réforme des jurys d'assises. Et comme tout finit par se savoir, à la fin du XIX^{e} siècle, en France, les méthodes probabilistes tomberont dans un discrédit souvent total. D'autant qu'il n'est pas facile de lire une page de LAPLACE ; certaines démonstrations sont grossièrement fausses suivant les canons modernes ; elles procèdent par prolongement formel des formules quand celles-ci n'ont plus de sens ; or l'analyse moderne est en train de naître (voir les travaux de Pierre DUGAC à ce sujet).

C'est à l'époque de LAPLACE que se développe la théorie probabiliste des erreurs. Les mesures physiques ou astronomiques sont soumises à toutes sortes d'erreurs inévitables ; une mesure prise isolément n'a pas grand sens, il faut la comparer à d'autres mesures effectuées sous des conditions semblables ; il est donc fondamental de savoir de quelle façon les erreurs se comportent statistiquement, quelle sera leur "loi de facilité", comme disait LAPLACE, leur tendance à être grandes ou petites. La recherche de cette loi des erreurs et de ses conséquences, commencée par SIMPSON au XVIII^e siècle, sera poursuivie par LAPLACE qui en donnera une formule et surtout par GAUSS (1777-1855) qui comprend le rôle central de la loi qui porte son nom et la met à la base d'une théorie générale des erreurs, la méthode des moindres carrés, bien que plus tard il ait cherché à s'en affranchir. Cette méthode servira à dresser et à corriger les tables numériques (astronomie, navigation, etc.) du XIX^e siècle ; elle est enseignée encore maintenant, sans changements notables. De son côté, LAPLACE propose une autre théorie probabiliste des erreurs, la méthode de situation, moins souple mais également intéresante. Bien que les rapports entre "loi" des erreurs et probabilité n'aient pas été clairement établis (en fait il faut attendre KOLMOGOROV (1933) pour que ces notions soient placées dans un cadre mathématique cohérent) les diverses théories des erreurs constituent une première ébauche de la théorie générale des "variables aléatoires continues" et de la théorie de l'estimation.

Inflation et redressement

Dans la lignée de son maître LAPLACE, POISSON (1781-1840) pense généraliser le théorème de BERNOULLI de façon suffisante pour englober les "choses de toutes natures" : Les "choses de toutes natures sont soumises à une loi universelle qu'on peut appeler la loi des grnds nombres. Elle consiste en ce que, si l'on observe des nombres très considérables d'événements d'une même nature, dépendants de causes qui varient irrégulièrement, tantôt dans un sens, tantôt dans l'autre, c'est-à-dire sans que leur variation soit progressive dans aucun sens déterminé, on trouvera, entre ces nombres, des rapports à peu près constants". Et il donne comme exemple la stabilité d'une année sur l'autre des statistiques judiciaires (nombre d'accusés reconnus coupables, etc.). Bien que remarquable, l'énoncé mathématique de la loi des grands nombres de POISSON apparaît comme bien modeste au regard de l'interprétation triomphante qu'il en donne. Curieusement, POISSON passera à la postérité probabiliste pour sa "loi des petits nombres" qui devait constituer à ses yeux une bien petite chose au regard de cette merveilleuse loi des grands nombres. Dès la publication du livre de POISSON "Recherches sur la probabilité des jugements en matière criminelle et en matière civile", BIENAYME (1796-1678) réagit : "La variété infinie des arrangements employés par la nature pour produire très simplement des effets très complexes fait présumer qu'on découvrira des théorèmes particuliers qui régiront diverses classes de faits. Mais il ne semble pas qu'une formule analogue à celle de Jacques BERNOULLI puisse embrasser toutes les circonstances possibles". Et BIENAYME donne l'exemple du phénomène d'extinction des familles fermées (la haute aristocratie par exemple) alors que la population générale de la France augmente. Il mène ainsi la première étude complète d'une suite de variables aléatoires particulière connue sous le nom de chaîne de GALTON-WATSON (qui la redécouvrirent 30 ans après BIENAYME). La petite loi des grands nombres de POISSON n'épuise donc pas la variété des situations naturelles, la géométrie du hasard est beaucoup plus riche que prévue et ce n'est qu'un début. La suite donnera, sur ce point comme sur beaucoup d'autres, entièrement raison à BIENAYME.

C'est l'occasion de parler ici de BIENAYME (Irénée-Jules) , probabiliste exemplaire s'il en fut, à peu près inconnu en France sinon des candidats au baccalauréat qui pensent, en général, qu'il s'agit du prénom de TCHEBYCHEFF. Il faut reconnaître qu'il n'a pas eu beaucoup de chance dans sa vie ; exclu de l'Ecole Polytechnique avec toute sa promotion en 1816 par Louis XVIII pour manque de royalisme, exclu de l'Inspection des finances, en 1848 par la Seconde République pour manque d'esprit républicain, écarté de la Sorbonne en 1851, il passera sa vie à lutter, à contre-courant, pour remettre le calcul des probabilités sur ses rails, aidé en cela par son contemporain et ami COURNOT (1801-1877) dont le livre "Exposition de la théorie des chances" (1843), prochainement réédité, est pour l'époque et encore aujourd'hui un modèle de clarté et d'honnêteté.

On est loin des visions grandioses de PASCAL et de BERNOULLI : description probabiliste du monde et géométrie du hasard. Les efforts pour faire entrer de force le monde dans le moule probabiliste s'avèrent décevants. Vers 1850, en France, la situation du calcul des probabilités était plutôt délabrée. Les espérances mathématiques conduisaient trop souvent à des déceptions mathématiques (Jacques Saigey) ou à des déceptions tout court. BIENAYME et COURNOT essaieront de repartir sur des bases solides tenant compte de la réalité à décrire d'une part, et des nécessités logiques d'autre part (voir, par exemple, l'article de HEYDE et SENETA, BIOMETRIKA 1972).

A part les travaux de BIENAYME, la deuxième moitié du XIX^e siècle français ne sera plus marquée, en probabilités comme en beaucoup d'autres sciences, par aucun progrès important ; périodiquement on redécouvre des résultats bien connus des deux siècles précédents (on peut consulter les livres de J. BERTRAND (1822-1900) et H. POINCARE (1854-1912) pour s'en convaincre). Il faut signaler toutefois quelques exceptions : BRAVAIS (1811-1863) qui étudie les lois de GAUSS de dimension 2, Désiré ANDRE qui étudie les permutations aléatoires et bien sûr le grand Emile BARBIER (1839-1889) qui résout à 20 ans le problème de l'aiguille molle, disparaît à 25 ans, est retrouvé 15 ans plus tard à l'asile de Charenton par Joseph BERTRAND qui l'en fait sortir et le remet au travail (problème de BARBIER).

Mais si la France perd l'initiative au XIX^e siècle, il n'en est pas du tout de même à l'extérieur. Et d'abord en Angleterre, George BOOLE (1815-1864) publie en 1854 un chef d'œuvre : "The laws of thought", BOOLE, autodidacte, a lu, lui aussi, LAPLACE, mais, sans doute peu convaincu et en tout cas d'une rigueur trop exigeante pour pouvoir l'être, il bâtit son œuvre sur des bases radicalement nouvelles.

Il est considéré comme le fondateur des "mathématiques pures", science purement déductive (comme la concevait PASCAL). Il crée le calcul (l'algèbre) logique et, en ce qui nous concerne, s'en sert pour fonder la théorie des probabilités, car, écrit-il, les probabilités appartiennent aussi bien à la science des nombres qu'à celle de la logique : pour déterminer la probabilité d'un événement, il faut savoir comment cet événement dépend d'autres événements de probabilité connue ; or cette algèbre (ce calcul) des événements est exactement semblable à l'algèbre des énoncés ; c'est l'algèbre de BOOLE des événements.

A Saint-Pétersbourg, à la même époque, TCHEBYCHEFF (1821-1894), issu de la nouvelle école mathématique russe (OSTROGRADSKY, BUNYAKOVSKY, LOBATCHEVSKY,...) lance un vaste programme : énoncer et démontrer de façon rigoureuse des théorèmes limites analogues à ceux de BERNOULLI et de MOIVRE mais d'une plus grande généralité, car, pense-t-il (comme d'ailleurs le pensaient BERNOULLI, de MOIVRE et POISSON), le calcul des probabilités a pour but d'établir des tendances asymptotiques des phénomènes naturels. Pour sa part, il énonce une loi des grands nombres très générale et donne une nouvelle méthode de démonstration (inégalité de BIENAYME-TCHEBYCHEFF). Ce programme sera poursuivi et développé par LYAPOUNOV et MARKOV ses élèves, qui donnent au début du XX^e siècle la forme presque définitive du théorème de MOIVRE (dans le cas indépendant, et dans le cas des chaî nes de MARKOV), puis un peu plus tard par BERNSTEIN, KHINTCHINE et KOLMOGOROV qui mettront un point (provisoirement) final au programme comme nous le verrons bientôt.

Nouveaux problèmes, théories nouvelles

Vers le milieu du XIX^{e} siècle, donc, un redressement mathématique salubre sauve de la débâcle la géométrie du hasard, mais que devient dans tout çà, la description probabiliste du monde ?

Précisément, la fin du XIX^{e} siècle va en consacrer le triomphe. Tout d'abord DARWIN (1809-1882), influencé par les idées de MALTHUS (1798) sur l'évolution des populations humaines, qui, de l'énorme masse de données accumulées par des siècles d'observations, dégage une direction d'évolution soumise à des variations fortuites secondaires, vision essentiellement probabiliste. Bien que DARWIN n'ait jamais été géomètre, son influence sur le développement des statistiques théoriques est considérable. Une nouvelle école probabiliste anglaise s'édifie pendant le dernier quart du siècle, qui, cherchant à justifier les théories de DARWIN (ce qu'elle ne fit pas naturellement) fonde toute la statistique moderne ; ce sera l'œuvre de GALTON (parent de DARWIN), WELDON, EDGEWORTH, PEARSON, YULE, STUDENT, FISCHER, etc. Partant de l'étude statistique des données biologiques (la biométrique), ils retrouvent une grande partie des résultats de GAUSS en théorie des erreurs et dégagent les notions fondamentales de corrélation et de régression. Ils fondent la théorie des tests (PEARSON, STUDENT, FISCHER), la statistique des processus (YULE), etc.

Parallèlement, la fin du XIX^{e} siècle voit l'explosion de la mécanique statistique. Dès le XVIII^{e} siècle, les savants, Daniel BERNOULLI notamment, avaient compris qu'un grand nombre de concepts et de lois physiques (la densité, la pression d'un gaz, la loi de MARIOTTE, par exemple) sont de nature probabiliste, c'est-à-dire représentent l'effet moyen d'un grand nombre de petites causes invisibles individuelles. Au XIX^{e} siècle, CLAUSIUS (1822-1888) utilise systématiquement la description probabiliste en thermodynamique ; classant les molécules en groupes suivant leurs vitesses, il étudie l'évolution des tailles des différents groupes et introduit la notion d'entropie ; ces travaux sont complétés par MAXWELL (1831-1879) qui, en utilisant un raisonnement de symétrie d'espace, découvre la loi des vitesses (1859 ; c'est la première loi de probabilité de la physique).

La physique des gaz, comme les jeux de hasard, peut donc être décrite par des géométries du hasard fondées sur des considérations de symétries d'espace. BOLTZMANN (1844-1906) et GIBBS (1839-1903) vont pousser encore plus loin ces idées et introduire à la physique statistique moderne. BOLTZMANN cherche à réconcilier les deux frères ennemis de la physique, la mécanique newtonienne, essentiellement réversible dans le temps, et la thermodynamique, irréversible pour sa part (comme l'affirme la seconde loi). Les difficultés sont pourtant considérables, car la théorie de l'époque affirme qu'à l'échelon macroscopique tout devient irréversible, le chaud devient froid, et on ne revient plus en arrière. Suivant CLAUSIUS et MAXWELL, BOLTZMANN probabilise l'ensemble des états d'un système (en fait construit un modèle d'urnes du type de ceux déjà employés par D. BERNOULLI et LAPLACE) et le fait évoluer dans le temps (comme une suite de parties d'un même jeu) ; utilisant les symétries naturelles d'espace et de temps (comme PASCAL et FERMAT l'avaient fait dans l'étude du problème des partis), il aboutit à une géométrie (à un modèle probabiliste) et interprète la seconde loi de la thermodynamique comme la loi bien connue des joueurs : un événement de probabilité très faible n'a de chance de se réaliser qu'au bout d'un nombre si grand de parties (à l'échelle humaine ou géologique) qu'il peut être considéré comme physiquement impossible. GIBBS va encore plus loin ; à l'échelon atomique les notions de position et de vitesse n'ont plus de sens individuel, mais statistique ; la seule chose qui importe est de connaître leur loi de probabilité (de facilité). Enfin EINSTEIN en 1905 propose un modèle probabiliste du mouvement d'une particule soumise aux chocs incessants de ses voisines (comme dans l'autobus S) ; c'est le mouvement brownien.

Les réalisations des physiciens et des statisticiens étaient si extraordinaires qu'elles dépassaient de beaucoup les possibilités du calcul de probabilités du XIX^{e} siècle. Pour qu'elles puissent être fondées dans un ensemble logiquement cohérent, il fallait que les mathématiciens "purs" (puisque maintenant la division des tâches est effective) réussissent à raffiner et assouplir leurs géométries du hasard. C'est ce que nous allons voir pour conclure.

A la fin du siècle dernier et au début de celui-ci, BOREL (1871-1956), en étudiant les séries entières et LEBESGUE (1875-1941), en étudiant les séries de Fourier, reconnaissent les notions d'ensemble de points de mesure nulle, de tribu engendrée, de mesure des ensembles boréliens, de σ — additivité et construisent une théorie de l'intégration très générale (WIENER - (Cybernetics, Chapitre II) fait remarquer, à juste titre, que la σ — additivité est implicite dans la notion de série et qu'il n'est pas très étonnant qu'elle ait fini par s'en dégager). Très vite, les mathématiciens comprennent que la géométrie du hasard va s'en trouver bouleversée. Dès 1908, BOREL démontre la loi forte des grands nombres pour le jeu de pile ou face symétrique à l'aide du lemme de BOREL-CANTELLI qu'il démontre par la même occasion. En 1923 WIENER donne une construction mathématique correcte du mouvement brownien d'EINSTEIN. Au même moment, Paul LEVY à Paris et KHINTCHINE à Moscou fondent la théorie moderne des variables aléatoires. Enfin, en 1933, KOLMOGOROV propose une axiomatique du calcul des probabilités.

Dans cette axiomatique, implicite, sous des formes diverses, dans l'esprit de tous les géomètres depuis PASCAL, on peut voir rassemblés les axiomes de CARDAN (additivité, multiplication), de BERNOULLI (σ — additivité), de BOOLE (algèbre des événements), de BOREL (tribu engendrée et encore σ — additivité). On peut alors étudier de façon cohérente les programmes des PASCAL, BERNOULLI, BAUSS, BOOLE, TCHEBYCHEFF, etc.

Et maintenant que se passe-t-il ?

Certaines choses n'ont pratiquement pas bougé depuis PASCAL ou LAPLACE : l'arithmétique morale par exemple. A l'inverse, la physique, la technique, les mathématiques et naturellement la compétition entre les états (sinon entre les hommes) entraînent le calcul des probabilités dans une course effrénée.

En mathématiques, la description probabiliste envahit peu à peu toute l'analyse (et certaines parties de l'algèbre) : la théorie générale des processus (tirer au hasard une fonction), le calcul différentiel et intégral stochastique apparaissent comme un prolongement "naturel" de la théorie des fonctions.

En technologie "de pointe", le contrôle stochastique est omniprésent ; de même que les astronomes du XIX[e] siècle affinaient la précision de leurs tables en utilisant une théorie probabiliste des erreurs, de même les corrections de trajectoires de tous les objets, pacifiques ou non, qui circulent au-dessus de nos têtes se font à l'aide de théories probabilistes qui prennent en compte non pas "la" trajectoire mécanique, celle-ci est soumise à trop d'aléas, mais l'ensemble des trajectoires soumises aux mêmes lois mécaniques et à des aléas (par exemple, le programme Apollo mis au point à l'aide de la théorie de KALMAN-BUCY, d'une certaine façon prolongement de la théorie de GAUSS ; mais aussi le système de guidage des fusées américaines ou soviétiques). Voilà, sans doute, des applications que Jacques BERNOULLI n'avait pas prévues.

Pour conclure, nous aimerions insister sur un point qui n'apparaît peut-être pas très clairement dans cet article. Le calcul des probabilités ne s'est pas développé uniquement grâce aux idées géniales des quelques grands hommes que nous avons cités ; il aurait fallu insister sur le rôle essentiel du milieu culturel, social, etc. dans lequel ils vivaient ; mais il y faudrait tout un cours.

BIBLIOGRAPHIE

— Le livre de référence sur l'histoire du Calcul des Probabilités de CARDAN à LAPLACE est Todhunter (1865), réédité par CHELSEA.

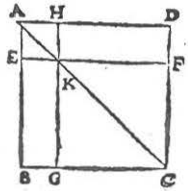
— Pour l'école russe de TCHEBYCHEFF à nos jours, consulter MAISTROV, Academic Press (19747

— Pour l'école anglaise, voir KENDALL et PEARSON, Griffin (1970).

μγ

Παντὸς παραλληλογράμμου, τῶν περὶ τὴν διάμετρον παραλληλογράμμων τὰ παραπληρώματα, ἴσα ἀλλήλοις ἐστί.

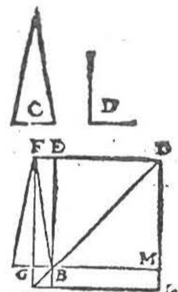
Theor.32. Propo.43.
In omni parallelogrãmo, complementa eorum quæ circa diametrum ſunt parallelogrammorum, inter ſe ſunt æqualia.



μδ

Παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τῷ δοθέντι τριγώνῳ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβαλεῖν ἐν τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ.

Proble.12. Propo.44.
Ad datam rectam lineam, dato triangulo æquale parallelogrammum applicare in dato angulo rectilineo.



με

Τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ ἴσον παραλληλόγραμμον συστήσασθαι ἐν τῇ δοθείσῃ εὐθυγράμμῳ γωνίᾳ.

Historique des notations de la théorie des ensembles *

par Dr. Roger KNOTT, University of Technology, Loughborough

traduit par Daniel DUCLOS, Université de Lyon I

Avertissement du traducteur : Dans tout l'article le mot classe est utilisé volontairement avec le sens qu'il avait à l'époque. De nos jours, le sens a "glissé" et c'est en pensant aux mots "ensembles" ou "parties" qu'il faut lire l'ensemble de ce texte.

Cette partie des mathématiques qu'on appelle généralement "théorie des ensembles" englobe deux groupes distincts de définitions et de résultats. Nous trouvons tout d'abord les concepts (parmi lesquels celui d'ensemble infini) qui sont à la base de la théorie des nombres cardinaux et de l'arithmétique transfinie ; ce fut Georg Cantor qui leur donna leur statut mathématique. Nous trouvons ensuite une série de notions de nature plus fondamentale, mettant en jeu les problèmes d'inclusion, d'appartenance, de classification, et ce sont celles-là mêmes qui figurent dans les cours de "Mathématiques Modernes" ; ce sont ces notions que nous nous proposons d'étudier dans ce qui suit.

Pour justifier l'origine de la "théorie des classes" (c'est l'ancien nom que l'on donnait à la deuxième série de concepts cités plus haut), nous devons remonter jusqu'aux Grecs.

Les Grecs ont été les premiers à faire le lien entre Mathématique et Logique... Un des textes grecs les plus importants est "l'Organon"* d'Aristote (300 av. J.C.). La thèse d'Aristote est la suivante : une démonstration peut se réduire à l'application d'un petit nombre de règles indépendantes du "sujet" de la démonstration. Autrement dit, d'après Aristote, la validité d'une démonstration tenait dans sa **forme** et non dans son **contenu** (de nos jours on parle de "Logique formelle") ; le syllogisme est une forme particulière de raisonnement et il occupe une place de choix dans l'Organon : le syllogisme type est formé de deux prémisses et d'une conclusion ; en voici un exemple :

Certains A sont B
Tout B et C

Certains A sont C

* Publié dans *Mathematics in School*, vol. 6 number 2 (mars 1977).

A, B et C sont des propriétés. La deuxième prémisse : "tout B est C" signifie qu'on affecte la propriété C à tout objet à qui on peut attribuer la propriété B. (Exemple connu : "tout homme est mortel").

Ce système de logique dû à Aristote, et le syllogisme en particulier, ont dominé la logique européenne jusque vers la moitié du XIX^e siècle. Les logiciens du Moyen-Age le remirent à l'honneur alors que, parallèlement, quelques auteurs tentaient de mettre en évidence l'incapacité du système à justifier toutes les formes de raisonnement. Beaucoup de tentatives ont donc été faites depuis le Moyen-Age afin de généraliser les concepts et les méthodes de la logique aristotélicienne.

Gottfried Wilhelm Leibnitz (1646-1716) a été le premier à donner un nouvel éclairage à la logique formelle. En effet, il pensait qu'il était possible de construire un langage symbolique capable d'exprimer toutes les "pensées" sans ambiguïté et par là même d'accepter des arguments faux. Il s'est penché sur ce projet plusieurs fois dans sa vie et, au travers de ses écrits, il est clair qu'il a essayé par deux fois de construire un tel langage. Au cours de sa seconde tentative, il a utilisé la notation AB pour la conjonction de deux notions dans certains cas et A + B dans d'autres cas. Il n'a pas semblé avoir utilisé la disjonction, excepté dans un ou deux cas isolés et alors il a écrit A + B. Toutefois, beaucoup de ses travaux sur ce sujet ne furent pas publiés de son vivant et il n'est pas sûr du tout que ses écrits aient eu beaucoup d'influence auprès des autres mathématiciens.

La plupart des auteurs désignent Georges Boole comme le créateur de la logique symbolique. Georges Boole (1815-1864), autodidacte, fut pendant de nombreuses années professeur de mathématiques à Queen's University (Cork). Boole pense que si on peut représenter simplement le langage sous forme symbolique, la logique par contre exige plus de rigueur. Cette nouvelle approche a consisté à introduire la notion de classe. Pour Boole, une classe est une construction mentale. Aussi a-t-il écrit dans son second livre de logique "The mathematical Analysis of logic" (1847) : "En admettant la notion de classe, nous sommes capables, à partir d'une collection d'objets, de séparer mentalement ceux qui appartiennent à une classe donnée et de les étudier à part de tous les autres. Ainsi, on peut envisager de répéter ce tri. L'ensemble des objets écartés du premier choix peut être à nouveau trié en y choisissant ceux qui possèdent une autre propriété."

Boole désignait par les lettres x, y, z soit le nombre de l'objet, soit une des propriétés qui le caractérisent. Il écrivait ainsi : "Décidons de représenter la classe des objets possédant une propriété par une lettre unique x". Il continuait ensuite en exposant une algèbre des classes.

Boole utilisait la notation xy pour l'intersection et $x+y$ pour la réunion de deux classes (il n'a utilisé la réunion que pour des classes disjointes). Ce concept de réunion a été généralisé par W.S. Jevons (1835-1882). C'est Boole qui a affecté le symbole 1 à la classe "pleine" (univers) et 0 à la classe "vide" ; à la partie complémentaire de x, il a associé $1-x$; lorsque la classe x était incluse dans la classe y, Boole écrivait $xy = x$ (le signe $=$ désignait une égalité d'ensembles). (De nos jours on écrit $x \cap y = x$ et on montre aisément que cela équivaut à $x \subset y$). En utilisant ces signes opérateurs, Boole a développé une théorie de l'algèbre des classes, qui, à part l'exception mentionnée plus haut, est en tout point semblable à l'"Algèbre Booléenne actuelle".

Les idées de Boole furent reprises et étendues par C.S. Pierce (1839-1914) et Ernst Schröder (1841-1902). Pierce en 1867 et A. De Morgan en 1858 ont donné des démonstrations des relations connues sous le nom de lois de De Morgan. Schröder a traité le sujet complètement dans un gros volume "Vor Lesungen über die Algebra der Logic".

Il est curieux de constater que la plupart des logiciens qui ont développé la théorie des classes n'ont pas été particulièrement intéressés par son utilisation en mathématiques. Au contraire, le but primordial de Boole et Schröder a été de développer l'Algèbre de Boole en utilisant les méthodes et les problèmes de l'algèbre des nombres. C'est à Schröder qu'on doit cette remarque : "Avec la logique symbolique, on a élaboré un instrument de travail mais on n'a rien à faire avec". Il est vrai qu'à ce niveau de développement, l'algèbre booléenne était incapable de rivaliser avec la complexité des mathématiques. Cependant l'introduction des quantificateurs et des variables par Frege et par C.S. Pierce qui traitaient formellement des phrases du type "Pour tout..." et "Il existe un..." a fait disparaître ces restrictions.

Le but principal des travaux de Frege consistait à montrer que l'arithmétique était basée sur la logique. Pour mettre ce projet à exécution, il introduisit des définitions nouvelles qui se sont révélées être très importantes dans le domaine de la logique. Cependant, le langage symbolique qu'il a utilisé n'était pas suffisamment suggestif et était trop complexe pour la typographie : il n'a eu que peu d'effets sur ses contemporains. La contribution de Frege n'a pas été vraiment reconnue avec la publication de B. Russell et A.N. Whitehead "Principia Mathematica".

Peano (1858-1932) a utilisé la logique symbolique. C'était initialement un analyste, mais comme beaucoup de ses contemporains, il s'est senti concerné par la rigueur en analyse. Il pensait qu'il n'était pas possible d'apporter plus de rigueur en analyse simplement en en "retouchant" des fragements ; au contraire, disait-il, il fallait réviser toutes les mathématiques en dehors de toute référence à l'intuition. Ce travail a commencé en 1889 dans "*Arithmeticas Principia novo methodo exposita*", puis dans "Formulaire de mathématiques" qui a paru dans cinq versions différentes entre 1894 et 1908. Ce dernier ouvrage (que Peano a récrit en collaboration avec certains de ses collègues de l'Université de Turin) fut écrit dans un langage très formel et, outre la logique, traitait d'autres domaines mathématiques. En 1888, Peano publie un petit ouvrage de géométrie "Calcolo Geometrico". Dans la première partie, consacrée à la logique symbolique, il souligne la ressemblance entre l'algèbre des classes d'une part et l'algèbre des propositions. Dans cette partie, également, Peano essaie d'établir une séparation claire entre les symboles arithmétiques et les symboles logiques. Pour les opérations logiques d'intersection, réunion, complémentaire, ensemble vide, et ensemble universel, il introduit les symboles $\cap$, $\cup$, $-A$, $\bigcirc$, ● à la place respectivement de $\times$, $+$ A_1, 0, 1 qu'utilisait Schröder.

Dans "Arithmetices principia", publiée en 1889, certains symboles sont conservés, d'autres sont abandonnés et c'est là qu'on trouve pour la première fois le symbole "$\in$" avec sa signification actuelle. Il y est fait la distinction entre "est un sous-ensemble de" et "est un élément de". Peano fait de même la distinction entre l'algèbre des classes et l'algèbre des propositions en donnant deux langages symboliques analogues mais néanmoins différents au lieu de deux interprétations distinctes du même langage. Sur un extrait de cet ouvrage, on remarque combien de symboles actuels sont utilisés ici pour la première fois.

II. Propositions

- Le symbole **P** désigne "proposition"
- Le symbole $\cap$ se lit "et", soient a et b deux propositions, alors $a \cap b$ est l'affirmation simultanée des propositions a et b deux propositions, alors a et b ; pour des besoins de concision, on écrit habituellement ab au lieu de $a \cap b$.
- Le symbole $-$ se lit "non" ; si a est une **P**, $-a$ est la négation de la proposition a.
- Le symbole $\cup$ se lit :"ou" ([vel]. Si a et b sont deux propositions alors $a \cup b$ représente la même chose que $- : -a. -b$.
- [Le symbole V signifie vrai, ou l'identité. Mais nous n'utilisons jamais ce signe. Le symbole Λ signifie faux (ou absurde)].

IV. Classes
- Le symbole K signifie "classe" ou collection d'objets.
- Le symbole $\in$ signifie "est". Donc $a \in b$ signifie "a est un b" ; $a \in$ K signifie "a est une classe" ; $a \in$ P signifie "a est une proposition".
- Au lieu de $-$ $(a \in b)$ on écrit $a - \in b$; le symbole $- \in$ signifie "n'est pas", c'est-à-dire :

44. $a - \in b = : - a \in b.$

Le symbole $a, b, c \in m$ signifie a, b et c sont m c'est-à-dire

45. $a, b, c \;' m. = : a \in m \,.\, b \in m \,.\, c \in m.$

Soit a une classe ; $-a$ désigne la classe formée des individus qui ne sont pas a.

46. $a \in \mathrm{K} \supset : x \in -a. = .x - \in a.$

Soient a et b des classes ; $a \cap b$ (ou ab) est la classe constituée des éléments qui sont à la fois a et b ; $a \cup b$ est la classe constituée des éléments qui sont a ou b.

47. $a, b \in \mathrm{K}. \supset \therefore x \in .ab : = x \in a \,.\, x \in b.$

48. $a,b \in \mathrm{K}. \supset \therefore x \in a \cup b : = : x \in a. \cap .x \in b.$

Le symbole Λ désigne la classe qui ne contient aucun objet donc

49. $a \in \mathrm{K}. \supset \therefore a = \Lambda : = : x \in a. = x\Lambda.$

[nous n'utiliserons pas le symbole V qui désigne la classe de tous les objets considérés.]
Le symbole Ɔ signifie "est contenu dans" ; ainsi a Ɔ b signifie "la classe a est contenue dans la classe b".
[L'écriture b Ɔ a pourrait signifier "la classe b contient la classe a" ; mais nous n'utiliserons pas le symbole C]
Les symboles Λ et Ɔ ont ici une signification qui diffère quelque peu de la signification donnée plus haut, mais nous pensons que cela ne créera pas trop d'ambiguïtés. Si on travaille sur les propositions, ces symboles représentent "l'absurde" et "on déduit", alors que si l'on travaille sur les classes, ils signifient "rien" et "est contenu dans".

(Repris du livre "From Frege to Gödel", Jean Van Heijenoort editor, Cambridge, Mass. Harvard University Press, Copyright ★ 1967 by the President and Fellows of Harvard College.)

Frege et Peano ont fourni les bases du plus célèbre livre de logique symbolique, "Principia Mathematica". Cet ouvrage de B. Russell et A.N. Whitehead fut publié en 3 volumes entre 1910 et 1913. Dans l'introduction, ils remercient Peano et Frege. Le chapitre 1 commence par :

"Les notations utilisées dans ce livre sont inspirées de celles utilisées par Peano".

Les auteurs introduisent ensuite leurs notations. Voici quelques extraits :

> "Le "produit logique" de deux classes α et β représente la classe des éléments qui sont éléments de l'une et de l'autre classe. On la note $\alpha \cap \beta$...
>
> De façon analogue, "la somme logique" de deux classes α et β représente la classe des éléments qui sont éléments de l'une ou de l'autre classe. On la note $\alpha \cup \beta$...
>
> La négation d'une classe α est constituée par les éléments x pour lesquels l'affirmation "$x \in \alpha$" peut être réellement niée. On peut trouver des éléments de type différent pour lesquels l'affirmation "$x \in \alpha$" n'est ni vraie, ni fausse, mais simplement dépourvue de sens. Ces objets ne sont pas des éléments de la "négation" de α.
>
> Donc la négation de α est la classe des objets d'un certain type qui ne sont pas éléments de α, c'est-à-dire la classe $\hat{x}(x \sim \in \alpha)$. On la dénomme "$-\alpha$" (et on lit "non α").
>
> Remplaçant l'implication, nous trouvons la relation *d'inclusion*. Une classe α est dite incluse (ou contenue) dans une classe β si tous les éléments de α sont éléments de β. C'est-à-dire si $x \in \alpha . \supset x . x \in \beta$. On écrit $\alpha \subset \beta$ (α est contenu dans β).

Le reste du livre est écrit presque complètement en langage mathématique comme le montre l'extrait ci-dessous (choisi au hasard).

SECTION C] THE EXISTENCE OF CLASSES 223

$*24{\cdot}47.\ \vdash : \alpha \cap \beta = \Lambda . \alpha \cup \beta = \gamma . \equiv . \alpha \subset \gamma . \beta = \gamma - \alpha$

Dem.

$\vdash . *24{\cdot}311 . \supset \vdash : \alpha \cap \beta = \Lambda . \equiv . \beta \subset -\alpha \quad (1)$

$\vdash . *22{\cdot}41 . \supset \vdash : \alpha \cup \beta = \gamma . \equiv . \alpha \cup \beta \subset \gamma . \gamma \subset \alpha \cup \beta .$

$[*22{\cdot}59 . *24{\cdot}43] \quad \equiv . \alpha \subset \gamma . \beta \subset \gamma . \gamma - \alpha \subset \beta \quad (2)$

$\vdash . (1) . (2) . \supset \vdash : \alpha \cap \beta = \Lambda . \alpha \cup \beta = \gamma .$

$\equiv . \beta \subset -\alpha . \alpha \subset \gamma . \beta \subset \gamma . \gamma - \alpha \subset \beta .$

$[*4{\cdot}3] \quad \equiv . \alpha \subset \gamma . \beta \subset \gamma . \beta \subset -\alpha . \gamma - \alpha \subset \beta .$

$[*22{\cdot}45] \quad \equiv . \alpha \subset \gamma . \beta \subset \gamma - \alpha . \gamma - \alpha \subset \beta .$

$[*22{\cdot}41] \quad \equiv . \alpha \subset \gamma . \beta = \gamma - \alpha : \supset \vdash .$ Prop

$*24{\cdot}48\ \vdash : . \xi \subset \alpha . \xi' \subset \alpha . \eta \subset \beta . \eta' \subset \beta . \alpha \cap \beta = \Lambda . \supset :$
$\xi \cup \eta = \xi' \cup \eta' . \equiv . \xi = \xi' . \eta = \eta'$

Dem.

$\vdash . *22{\cdot}73 . \quad \supset \vdash : \zeta = \zeta' . \eta = \eta' . \supset . \zeta \cup \eta = \zeta' \cup \eta' \quad (1)$

$\vdash . *22{\cdot}481 . \quad \supset \vdash : . \zeta \cup \eta = \zeta' \cup \eta' . \supset : (\zeta \cup \eta) \cap \alpha = (\zeta' \cup \eta') \cap \alpha :$

$[*22{\cdot}68] \quad \supset : (\zeta \cap \alpha) \cup (\eta \cap \alpha) = (\zeta' \cap \alpha) \cup (\eta' \cap \alpha) \quad (2)$

$\vdash . *22{\cdot}621 . \quad \supset \vdash : \zeta \subset \alpha . \supset . \zeta \cap \alpha = \zeta : \zeta' \subset \alpha . \supset . \zeta' \cap \alpha = \zeta' :$

$[*3{\cdot}47] \quad \supset \vdash : \zeta \subset \alpha . \zeta' \subset \alpha . \supset . \zeta \cap \alpha = \zeta . \zeta' \cap \alpha = \zeta' \quad (3)$

(Reproduit avec l'autorisation des éditeurs de "Principi Mathematica", par B. Russell et A.N. Withehead, Cambridge U. Press).

La grande similitude de l'algèbre des classes et de l'algèbre des propositions nous conduit à l'algèbre booléenne qui fut présentée pour la première fois par Huntington en 1904.

L'examen des textes d'algèbre booléenne font apparaître deux types de notation. La notation "arithmétique" $+$, $.$, $-$, 0, 1, que préfèrent les ingénieurs et les calculateurs scientifiques et qui est essentiellement la notation de Boole. Les mathématiciens, par contre, utilisent la notation "$\cap$ $\cup$, $'$, O, ξ, qui est essentiellement la notation de Peano et Russell O et ξ sont des modifications de la notation de Peano guidées probablement par des considérations d'ordre typographique. Le symbole $'$ est un des symboles utilisés pour noter le complémentaire ; on trouve également $\sim$ (Russell et Withehead) et (Hilbert).

Il serait impensable de présenter la théorie des classes sans évoquer les diagrammes en cercles.

Certains auteurs prétendent qu'Aristote a fait usage de représentations spatiales pour présenter les syllogismes. Ce qui est certain, c'est que des diagrammes, utilisant des formes géométriques, pour illustrer des propositions ou des syllogismes sont apparus ça et là dans les écrits des logiciens du 16[e] siècle.

La première tentative valable pour analyser les diagrammes a été l'œuvre de Leibnitz mais, comme il a été mentionné plus haut, la plus grande part de son travail n'a eu que peu de retentissement sur ses contemporains.

Le premier mathématiciens qui a rendu populaire l'usage des diagrammes en cercles a été L. Euler (1707-1783). Dans "Lettres à une princesse d'Allemagne" publié à St Pétersbourg en 1768, il écrit notamment :

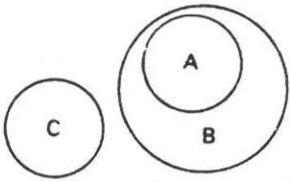
> "Ces cercles, ou mieux ces espaces, de toutes façons la forme de la figure n'a pas d'importance, sont très commodes et facilitent nos réflexions et dissipent certains mystères de la logique si difficiles à expliquer. Autrement dit, à l'aide de ces représentations, tout est rendu sensible par l'œil. On peut les utiliser pour représenter des notions assez générales..."

Euler continue ensuite et indique comment utiliser ces diagrammes, par exemple pour le syllogisme classique

Tout A est B
Aucun C n'est B

Aucun C n'est A

représenté par le diagramme



On peut également illustrer d'autres syllogismes de la même manière. Puisque chaque syllogisme met en jeu au moins trois classes, chaque diagramme d'Euler sera constitué d'au moins trois cercles.

Le mathématicien français Gergonne a également utilisé des diagrammes en logique. Il a remarqué que deux cercles pouvaient avoir, l'un par rapport à l'autre, cinq positions distinctes. En définissant pour chacune d'elles un symbole différent, il a relié ces cinq positions à des syllogismes en s'attachant uniquement à ceux qui conduisaient à une conclusion vraie.

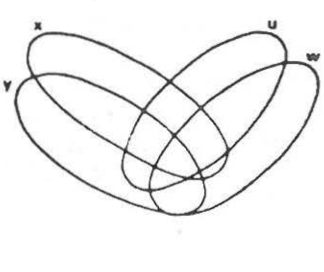
Au cours du 19^{e} siècle, on a essayé de développer la logique et surtout en utilisant divers types de diagrammes, la plupart d'entre eux dérivant du schéma d'Euler. Il est néanmoins curieux de constater que Boole lui-même n'éprouvait pas le besoin de ces diagrammes dans ses recherches ; il paraissait satisfait de ses méthodes algébriques.

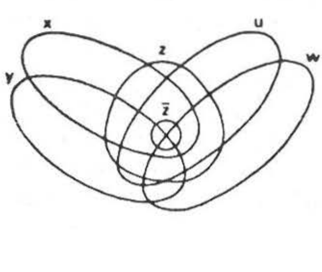
John Venn (1834-1923) également a étudié plus en détail l'utilisation des diagrammes en logique. Son livre "Symbolic logic", publié à Londres en 1851, fait le point sur les travaux de ses contemporains et de ses prédécesseurs. Voici ce qu'il écrit :

"Lorsqu'on examine l'usage qui est fait de ce qu'on peut appeler diagrammes — c'est-à-dire ceux qui distinguent les objets et les prédicats, et les différents types de propositions — on peut préciser que leur utilisation ne date pas d'Euler. Autrement dit, il a le premier familiarisé les logiciens avec ces diagrammes et le fait qu'il ait utilisé cette forme particulière de représentation a fait que son nom y est resté attaché. Leur origine véritable se situe bien plus tôt. Ainsi, De Morgan affirme (et moi-même je fais cette remarque) qu'il est lui-même "tombé" sur les schémas d'Euler avant de les avoir vus publiés.

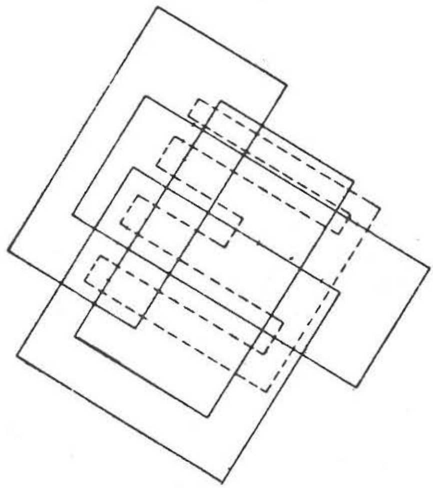
Venn affirme avoir trouvé dans 34 ouvrages, sur 60 publiés au cours du siècle précédent, une utilisation de diagrammes d'Euler. Venn n'était d'ailleurs pas très enthousiaste pour ce qui concerne l'utilisation de ce type de représentation. Il a même écrit, en parlant de ces diagrammes, qu'ils "convenaient mal, même avec les 4 propositions logiques traditionnelles qu'ils devaient illustrer". Venn reproche à ces schémas de ne prendre en compte que les relations entre deux classes et "tout système qui illustre simplement les relations mutuelles entre deux classes n'est pas suffisamment général". On doit laisser la place à diverses combinaisons possibles mettant en jeu deux, trois, quatre ou plusieurs classes ; en fait le processus doit permettre une généralisation".

Les nouveaux schémas de Venn peuvent se décrire de la manière suivante. Supposons qu'on ait n classes $X_1, X_2, \ldots X_n$. A chacune de ces classes, on associe une courbe fermée C_i qui partage chacun des intérieurs des autres courbes en deux régions. Le plan est donc partagé en 2^n régions. L'intérieur de C_i représentera la classe X_i. Chaque région représente donc des intersections ou des réunions de différents X_i ou de leurs complémentaires. Pour $n = 2$ et $n = 3$, les courbes C_i pourront être des cercles ; pour des valeurs plus grandes de n, il est plus difficile de construire de tels diagrammes ; cependant Venn, dans "Logique symbolique", suggère des schémas pour $n = 4$ et $n = 5$:



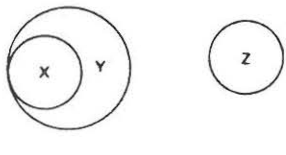


La petite ellipse qui est au centre est "extérieure à z" mais intérieure à x,y,u,w. Pour des valeurs plus grandes de n, Venn a proposé des courbes fermées en forme de peigne comme le montre la figure suivante, pour $n = 5$ et $n = 6$ (courbes tracées par M.E. Baron).

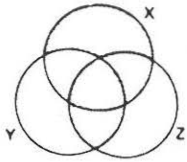


Pour représenter un ensemble donné de propositions à l'aide de ce type de schémas, Venn a proposé de hachurer les parties du diagramme qui correspondaient à des classes vides ; c'est ainsi qu'on est amené à faire un schéma particulier pour une situation donnée. Cela est illustré plus loin dans le cas du syllogisme.

> "Puisque le syllogisme est la forme de raisonnement la plus familière à un lecteur débutant, je commencerai donc par là, bien que ce soit trop simple pour servir d'exemple valable d'illustration. Prenons par exemple :
>
> Aucun Y n'est Z
> Tout X est Y
>
> Aucun X n'est Z
>
> Voici l'illustration :



Cela est aisé car pour le tracé des cercles, seules sont données des relations deux à deux ; et par conséquent, la relation entre X et Z se voit directement. Nous allons voir sur cet exemple simple (qui n'est pas très bon d'ailleurs) comment illustrer le situation décrite plus haut. Ici il est moins évident que sur le précédent diagramme que "aucun X n'est Z" :



Par contre, le schéma est plus complet car il permet de constater l'existence de quatre types d'éléments x de X. Seuls les éléments x qui sont éléments de Y mais non de Z seront pris en considération dans cette illustration. Il en serait de même pour les éléments y de Y et z de Z".

G.L. Dodgson a ajouté un dernier raffinement à la théorie de Venn ; en effet, celui-ci n'avait aucun moyen d'illustrer la classe universelle (univers). Cette situation a épouvanté Dodgson, qui écrivit en 1896 dans "Symbolic Logic" qu'il était étonné que Mr. Venn ait réservé tout le reste du plan "infini" pour le quatrième sous-ensemble (cette remarque ne vaut bien évidemment que pour le cas où nous avons affaire à deux classes). Il suggéra un rectangle pour délimiter l'univers du discours de sorte que :

"La classe qui, sous l'impulsion enthousiaste de Mr Venn, errait dans les espaces infinis s'est trouvée soudain plongée dans l'épouvante et enfermée, claquemurée dans un cachot comme les autres classes".

BIBLIOGRAPHIE GENERALE

Il s'agit ici d'éléments bibliographiques destinés à des professeurs de mathématiques et non à des spécialistes de l'histoire des mathématiques. Nous avons donc volontairement restreint notre choix à des ouvrages assez généraux, mais il n'a pas été possible de ne citer que des ouvrages en langue française compte tenu de l'intérêt exceptionnel de certains ouvrages en langue anglaise ou allemande.

Pour une bibliographie plus étendue, mais aussi pour ses articles, on se procurera auprès de son IREM :

Bulletin Inter-IREM N° 18
Histoire des mathématiques et épistémologie (1979)

Nous désignons par o les ouvrages qui nous semblent les plus indiqués pour une première approche.

A - OUVRAGES GENERAUX

Il s'agit d'ouvrages qui ne sont pas spécifiquement consacrés à l'histoire des mathématiques, mais qui contiennent néanmoins des indications historiques substantielles.

Encyclopedia Universalis (en français) (1970). Articles groupés par grands thèmes sur les mathématiques, les sciences, la philosophie... En mathématiques le niveau est en général élevé. On peut trouver quelques notices historiques et les articles comportent une bibliographie. Les références historiques sont en général imprécises.

Encyclopédie des mathématiques pures et appliquées. Paris-Leipzig (1904-1914). Sous la direction de Molke. Cette encyclopédie est historique : elle trace pour chaque thème son évolution avec références détaillées aux mémoires originaux. Elle comporte en outre de très nombreuses monographies étudiées selon le même principe. Une véritable mine...

Histoire générale des sciences (R. Taton) ; PUF ; 1956-64 ; en quatre volumes.

1. La science antique et médiévale
2. La science moderne
3. La science contemporaine : le 19e siècle
4. La science contemporaine : le 20e siècle.

Ces ouvrages contiennent une bibliographie détaillée.

B - HISTOIRE DES MATHEMATIQUES

Il s'agit d'ouvrages donnant un panorama assez général de l'évolution des mathématiques.

o O. BECKER et J.F. HOFFMANN, *Histoire des mathématiques*. Ed. Lamarre, 1956.

N. BOURBAKI, *Eléments d'histoire des mathématiques* (1960) Hermann.

o C.B. BOYER, *A History of the Mathematics* (1968), J. Wiley and Sons.

o C.B. BOYER, *The history of the calculus* (1949), Dover.

o L. DEDRON et J. ITARD, *Mathématiques et mathématiciens* (1960) Magnard.

DIEUDONNE et alii, *Abrégé d'histoire des mathématiques* (1978) Hermann.

o D.J. STRUIK, *A Concise History of Mathematics* (1948), New-York

o D.J. STRUIK, *Source book in Mathematics,* 1200-1800 (1959) Dover

o M. KLINE, *Mathematical thought from Ancient to Modern Times* (1972), Oxford. Un. Press.

J.E. MONTUCLA, *Histoire des Mathématiques* (1799-1802), Blanchard.

K.A. RYBNIKOV, *Histoire des Mathématiques*, (1960), Moscou

o D.E. SMITH, *A source Book in the History of Mathematics (1929),* Dover.

o D.E. SMITH, *History of mathematics* (1925), Dover.

o J.P. COLLETTE, *Histoire des Mathématiques,* (2 tomes), Edition du Pédagogique I.N.C., 1973.

o J. ITARD, *Histoire des Mathématiques,* Larousse, 1977.

H. MESCHKOWSKI, *Problemgeschichte der neuern Mathematik,* 1800-1950, B.I. Mannheim, 1979.

o *Historical Topics for mathematics classroom,* NCMT, 1969.

C - GRANDS SECTEURS DES MATHEMATIQUES

Ouvrages déjà un peu plus spécialisés, abordant soit un grand secteur des mathématiques, soit une époque du développement de ceux-ci.

o A. KOYRE, *Etudes galiléennes* (1939), Hermann.
Chute des corps et mouvement de la Terre de Kepler à Newton (1955). Vrin.
La révolution astronomique (1961), Hermann.

o *Du monde clos à l'univers infini* (1962). PUF, réed. "Idées" Gallimard.
Etudes newtoniennes (1964), Gallimard.

o J. DHOMBRES, *Etude épistémologique et historique des idées de nombre, de mesure et de continu* (1975). Nanta Iremica ou Cedic-Nathan 1978.

C. HOUZEL, J.-L. OVAERT, P. RAYMOND, J.-J. SANSUC, *Philosophie et calcul de l'infini* (1976), Maspéro.

o F. KLEIN, *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik zur 19. Jhrdt.* (1926), Teubner (Leipzig) (trad. Chelsea)

H. LEBESGUE, *Notices d'Histoire des mathématiques* in Enseignement Mathématique (1958). Genève.

O. NEUGEBAUER, *Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik* (1929). Springer (Berlin).

P. RAYMOND, *De la combinatoire aux probabilités* (1975), Maspéro.

X. RENOU, *L'infini aux limites du calcul* (1978). Maspéro.

Morris KLINE, *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times.* (1972), Oxford Univ. Press. Ouvrage de base sur tous les grands sujets.

Carl B. BOYER, *A history of Mathematics* (1968). John Wiley and Sons. Documentation très sérieuse. Traite surtout des périodes antérieures à 1800, sur lesquelles on peut trouver des analyses et des références assez précises. Beaucoup plus sommaire en ce qui concerne le 19ᵉ siècle.

Carl B. BOYER, *The history of calculus and its conceptual development,* (1949). Dover. Ouvrage de base pour l'histoire du calcul infinitésimal des origines à Cauchy. Références nombreuses et précises. Peu de développements concernant le 19ᵉ siècle.

Jean DIEUDONNE et alii, *Abrégé d'histoire des mathématiques* (2 vol.) (1978), Hermann. Ouvrage collectif relatif à la période 1700-1900. Articles de niveau et de conception très diverses, suivant les auteurs.

Thèmes abordés :
Jean DIEUDONNE, *Analyse mathématique au 18ᵉ siècle,*
Jean DIEUDONNE et J. GUERINDON, *Algèbre et géométrie jusqu'en 1840. Algèbre depuis 1840.*
J.L. VERLEY, *Fonctions analytiques*
W et F. ELLISON, *Théorie des nombres*
P. DUGAC, *Fondements de l'analyse* (19ᵉ siècle)
Ch. HOUZEL, *Fonctions elliptiques et intégrales abéliennes*
J. DIEUDONNE, *Analyse fonctionnelle*
P. LIBERMANN, *Géométrie différentielle*
G. HIRSCH, *Topologie*
J. DIEUDONNE, *Intégration et mesure*
M. LOEVE, *Calcul des probabilités*
M. GUILLAUME, *Axiomatique et logique.*
Bibliographies détaillées sur les mémoires originaux.

H.H. GOLDSTINE, *A history of Numerical Analysis* (1977) (New-York)

L.E. DICKSON, *History of the theory of numbers* (1919) Chelsea.

F. CAJORY, *History of mathematical notations* (2 volumes), Open Court 1974.

E. GRANT, *Source book in medieval Science*, Harvard University Press, 1974.

H. WUSSING, *Die Genesis des abstrakten Greppenbegriffes,* VEB DVW, 1969.

D - LISTE DES ARTICLES CONSACRES A L'HISTOIRE ET A L'EPISTEMOLOGIE DES MATHEMATIQUES PARUS DANS LE BULLETIN DE L'A.P.M.E.P.

N° 136. Novembre 1950, Jean Itard, A propos d'histoire des mathématiques

N° 139. Mars 1951, Jean Itard, Les fonctions logarithmiques et exponentielles.

N° 151. Octobre 1952, Jean Itard, Bibliographie d'histoire des mathématiques.

N° 165. Décembre 1954, Henri Cartan, Nombres réels et mesure des grandeurs.

N° 167. Janvier 1955, Maurice Fréchet, La méthode axiomatique.

N° 174. Décembre 1955, Jean Itard, Diophante et la tradition diophantienne.

N° 175. Janvier 1956, J.V. Poncelet, Souvenirs d'un prisonnier de guerre.
Jean Itard, L'histoire de la mécanique.

N° 176. Mars 1956, Jean Itard, Leçon inaugurale de Nicolo Tartaglia.

N° 177. Mai 1956, Jean Itard, Un peu de biographie.

N° 179. Octobre 1956, Jean Itard, Grandeur et servitude de l'histoire des sciences.

N° 180. Décembre 1956, Clairaut, Préface aux éléments d'algèbre.

N° 184. Mars 1957, Bezout, Préface à l'algèbre.
Laurent Schwartz, Langage et mathématiques.

N° 185. Juin 1957, Laurent Schwartz, Tendances des mathématiques modernes.

N° 187. Octobre 1957, Jean Itard, A propos du Lycée Fermat.

N° 188. Janvier 1958, G. Lamé, "Tout est à espérer ou tout est à craindre" (textes choisis par J. Itard).

N° 192. Juin 1958, Jean Itard, Pascal, Port-Royal et la géométrie élémentaire.

N° 196. Janvier 1959, Jean Itard, Un cours de faculté sous Louis Philippe.

N° 201. Octobre 1959, Paul René Binet, Un professeur indépendant.
H. Freudenthal, Sur la responsabilité humaine du Mathématicien.
Gilbert Walusinski, D'un Maître 30 à un Maître 35. (F. Marotte, E. Cartan).

N° 207. Juin 1960, Jean Itard, Centenaires (Oughtred, Bolyai).

N° 209. Octobre 1960, Jean Itard, Bourbaki historien.
P. Costabel, Leibniz et la dynamique.

N° 223. Juin 1962, A propos des "Livres arithmétiques d'Euclide", traduit par Jean Itard.

N° 229. Janvier 1963, G. Choquet, L'Analyse et Bourbaki.

N° 232. Octobre 1963, L. Lesieur, La vie d'Evariste Galois.

N° 233. Décembre 1963, Jean Itard, Jacques Hadamard.

N° 241. Octobre 1964, P. Couderc, Galilée et la pensée contemporaine.

N° 249. Septembre 1965, Jean Itard, Un illustre, Pierre Fermat.

N° 252. Mars 1966, Jean Itard, Aimez-vous Lagrange ?

N° 253. Juillet 1966, G. Th Guilbaud, A propos de Fermat, existence et non-unicité.
L. Félix, En mémoire d'Henri Lebesgue.

N° 254. Septembre 1966, P. Costabel, Leibniz et le sens d'une réforme mathématique.

N° 262. Mai 1968, E. Ehrhart, Un peu d'histoire des mathématiques pour nos élèves.

N° 263. Juillet 1968, Jean Itard, Hamilton et les quaternions.

N° 266. Janvier 1969, Jean Itard,
Sur le manuel de Boyer.
Sur les "Etudes newtoniennes" de Koyré.

N° 268. Mai 1969, R. Boirel et F. Salles, Un hiatus épistémologique : mathématiques pures et mathématiques appliquées.

N° 271. Novembre 1969, Jean Itard, Sur des livres d'histoire.

N° 281. Décembre 1971, A. Sorgius, La vie et l'œuvre de J.H. Lambert.

N° 287. Février 1973, P. Gagnaire, D'Euclide à Fibonacci.

N° 292. Février 1974, J. Chevrier, Matériaux pour une histoire des mathématiques : les chemins du paradis.

N° 299. Juin 1975, G. Arsac, Histoire de la découverte des logarithmes.

N° 301. Décembre 1975, G. Arsac, Nombres algébriques et nombres transcendants.

N° 303. Avril 1976, G. Bonnefoy, Histoire et épistémologie des mathématiques.

N° 311. Décembre 1977, Evariste Galois, Lettre sur l'enseignement des sciences.

N° 325. Septembre 1980, J.C. Hecquet, A propos des relations de Durrande dans le tétraèdre.

ASSOCIATION DES PROFESSEURS DE MATHEMATIQUES DE L'ENSEIGNEMENT PUBLIC

Secrétariat : 13, rue du Jura, 75013 Paris

Qu'est-ce que l'A.P.M.E.P. ?

L'A.P.M.E.P. est une association qui regroupe tous les enseignants concernés par l'enseignement des mathématiques "de la Maternelle jusqu'à l'Université". Fondée en 1909, elle regroupe aujourd'hui près de 13 000 enseignants. L'A.P.M.E.P. est un lieu d'échanges, pédagogiques et scientifiques, pour tous les enseignants de mathématiques.

Les Régionales

Dans chaque académie, il existe une section régionale de l'A.P.M.E.P. avec, très souvent, des sections départementales, voire locales. En effet, à la dispersion géographique de ses adhérents, l'A.P.M.E.P. propose un remède : la constitution d'équipes de maîtres, qui enseignent des mathématiques "de la Maternelle jusqu'à l'Université", en dehors de toute hiérarchie administrative, par-dessus les barrières officielles des divers degrés d'enseignement.

Les Journées Nationales

L'A.P.M.E.P. organise chaque année des Journées Nationales qui sont, pour les membres de l'Association, l'occasion de se retrouver. Elles ont, ces dernières années, regroupé de 500 à 800 participants autour de : Pluridisciplinarité [Orléans, 1975]. Problèmes de comportement [Rennes, 1976]. Formation Permanente [Limoges, 1977]. Problèmes, évaluation, erreur [Reims, 1978]. Enseignement, innovation, recherche [Grenoble, 1979]. En septembre 1980 (4 au 7 septembre), le thème sera : Quelle formation pour les enseignants de mathématiques ? [Bordeaux].

Les Publications

L'A.P.M.E.P. édite un bulletin (5 numéros par an) qui réunit des articles de documentation mathématique et pédagogique, et qui rapporte la vie de l'association, tant régionale que nationale. On y trouve notamment les rubriques suivantes : études, études didactiques, dans nos classes, mathématiques et société, examens et concours, manuels scolaires, évaluation, interdisciplinarité, formation des maîtres, informatique, audio-visuel, problèmes, jeux et maths, matériaux pour une documentation, un coin du ciel ...

De plus, l'A.P.M.E.P. publie toute une série de brochures. Ces brochures permettent de répondre à des demandes plus spécifiques de telle ou telle catégorie d'adhérents.
Parmi les dernières brochures parues :
Elem-Math 5 (1979) : Aides pédagogiques pour le Cours Elémentaire.
Activités mathématiques en 4^e^-3^e^, tome 1 (1979) : Ouvrage de base, avec ses textes de réflexions générales (assorties d'exemples), et la présentation de 29 activités, référencées à 2 index.
Les manuels scolaires de mathématiques (1979) : Pièce maîtresse d'une réflexion indispensable. Exemples pris dans le premier cycle... mais aisément transposables.
Pour une mathématique vivante en Seconde (1979) : 21 exemples, très variés,... et à suivre !
Pavés et bulles (1978) : Met en évidence l'efficacité d'outils mathématiques. Etablit de beaux résultats (post-bac surtout).
Calculatrices quatre opérations (1979) : Elémentaire et premier cycle.
Du quotidien à la mathématique (1979) : Une expérience en formation d'adultes (fiches de travail commentées, également utilisables dans le premier cycle).

Le Présent

L'A.P.M.E.P., association représentative des enseignants de mathématiques, agit comme telle vis-à-vis des syndicats, des associations d'enseignants, d'autres disciplines, des associations de parents d'élèves, ainsi que des Ministères de l'Education et de l'Université. Par exemple, actions à propos des programmes, ... ; intervention de novembre 1979 auprès du Ministère de l'Education (ce qui a permis d'obtenir une heure de travaux dirigés pour toutes les Secondes "Indifférenciées" de la rentrée 1981, alors qu'aucune n'était prévue).

L'Avenir

Après avoir obtenu la création des IREM (puis lutté pour leur maintien), l'A.P.M.E.P. est à la pointe du combat pour une véritable formation permanente, dont elle a défini les principes dans son Texte d'Orientation 1978 (caractère non obligatoire ; formation intégrée dans le service des enseignants ; large indépendance vis-à-vis de la hiérarchie ; ...).

Texte d'Orientation

Après les Chartes de Chambéry (avril 1968) et de Caen (mai 1972), l'A.P.M.E.P. a actualisé ses positions fondamentales par son Texte d'Orientation (1978). Les principales préoccupations des enseignants de Mathématiques y sont abordées et de nombreuses propositions, à court et à long terme, sont faites, permettant une réforme en profondeur de l'enseignement des mathématiques. [On peut se le procurer gratuitement, en écrivant au Secrétariat de l'A.P.M.E.P. (adresse ci-dessus)]

L'A.P.M.E.P. s'intéresse donc à toutes les questions qui concernent l'enseignement des mathématiques, depuis les premières initiations jusqu'aux études supérieures, sans oublier la formation permanente des non-enseignants et des enseignants. Aussi ne pouvez-vous vous désintéresser de l'A.P.M.E.P. et des possibilités d'action qu'elle vous offre.

L'A.P.M.E.P. a besoin des forces, de l'expérience et de l'action du plus grand nombre d'enseignants de mathématiques. Son efficacité, les services qu'elle vous rend ou pourrait vous rendre, tiennent au nombre et au dynamisme de ses membres. Si vous ne les avez pas encore rejoints, faites-le donc sans tarder.

Novembre 1981

Imprimerie VAUDREY-LYON

ISBN 2-902680-17-1