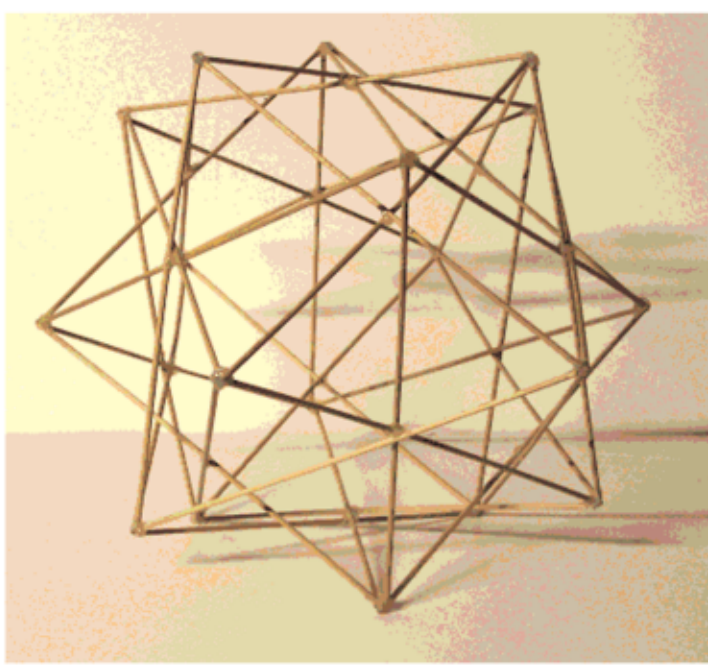
Université d'été
Saint Flour (Cantal)
22-27 août 2004

LA PLACE DES MATHÉMATIQUES VIVANTES DANS L'ÉDUCATION SECONDAIRE



Brochure APMEP n° 168
ISBN : 2-912846-46-3

A.P.M.E.P.
l'Association des Professeurs de Mathématiques
de l'Enseignement Public
26 rue Duméril – 75013
Tél. 01 43 31 34 05 – fax : 01 42 17 08 77 – mel : apmep@apmep.asso
http://www.apmep.asso.fr

Fondée en 1919, toujours dynamique, l'APMEP, c'est :

- **Une réflexion collective** sur le métier d'enseignant de mathématiques et les conditions de son exercice, de la maternelle à l'université, notamment en collège et lycée ;
- **des interventions suivies** sur l'actualité et des projets à moyen terme ;
- **des textes de base** (chartes, problématiques, prospective bac,…) pour les objectifs à long terme ;
- **un observatoire** (EVAPM) de l'impact des programmes du second degré ;
- **des publications de référence** pour apprendre, enseigner, apprendre à enseigner les mathématiques (Bulletin Vert, Plot, Brochures,…)
- **une revue pour les « débutants » : PLOT ;**
- **une information rapide des adhérents :** le BGV, un serveur internet, Publimath,…
- **des instances élues** définissant ses positions ;
- **une organisation décentralisée** en « Régionales » qui ont leurs activités propres et sont des relais entre l'organisation nationale et les adhérents de tous horizons.

L'APMEP agit :

- en réunissant en commissions et groupes de travail, sur des thèmes variés, permettant de mettre en commun leur expérience et d'élaborer critiques et propositions ;
- en adoptant sa ligne d'action en accord avec ses adhérents ;
- en la défendant auprès de toutes les instances concernées.

L'APMEP propose ainsi :

- des choix et des pistes d'action ;
- des outils pour renforcer l'efficacité de l'enseignement de cette discipline.

L'APMEP organise des :

- journées nationales, chaque année sur un site et un thème différents :
  - 2000 : Nice, *Maths en Méditerranée*
  - 2001 : Lille, *Maths au carrefour de l'Europe*
  - 2002 : Rennes, *Images des maths, maths des images*
  - 2003 : Pau : *Mathématiques de la Terre aux étoiles*
  - 2004 : Orléans, *Mathématiques et environnement*
  - 2005 : Caen, *Mathématiques à la mode de…*
- rencontres régionales
- séminaires et des « universités d'été ».

En adhérant à l'APMEP, vous pourrez :

- participer à la vie de l'association et à la définition des positions qu'elle défend ;
- contribuer à ses productions, les soutenir par la cotisation et toute implication plus poussée ;
- recevoir chez vous les informations d'actualité sur les mathématiques et leur enseignement ;
- **bénéficier de réductions importantes sur toutes les brochures qu'elle propose.**

Brochure APMEP n° 168 – n° ISBN 2-912846-46-3

Université d'été
Saint-Flour (Cantal)
22-27 août 2004

LA PLACE
DES
MATHÉMATIQUES VIVANTES
DANS
L'ÉDUCATION SECONDAIRE

Brochure APMEP n° 168
ISBN : 2-912846-46-3

Les universités d'été Animath, si bien organisés par Paul-Louis Hennequin et son équipe, sont toujours d'une richesse exceptionnelle. L'APMEP a, cette année, l'appréciable honneur - revendiqué - d'en éditer les ACTES. Elle en exprime toute sa reconnaissance aux responsables d'Animath.

Les textes ont été réunis, harmonisés et relus par Paul-Louis Hennequin que je remercie tout particulièrement et très chaleureusement.

Mes vifs remerciements vont également à Jean Barbier qui a, pour l'APMEP, apporté, avec son soin habituel, sa touche finale - considérable - à l'édition de cette brochure.

Bonne lecture à tous : les textes réunis ici en valent la peine et ... le plaisir !

Pour l'APMEP ,
Henri Bareil ,
Responsable des Publications APMEP.

SOMMAIRE

PRÉSENTATION DE L'UNIVERSITÉ D'ÉTÉ

Paul-Louis HENNEQUIN

1- Préparation

L'association ANIMATH créée il y a huit ans, s'est fixé comme objectif de promouvoir les mathématiques vivantes dans le système éducatif en développant dans les collèges et les lycées à la fois des clubs et ateliers de mathématiques et, sous le nom de « Promenades » des rencontres entre les élèves et les chercheurs En complément du travail effectué en classe, ceux-ci permettent aux élèves d'aborder les mathématiques de manière créative et de les ressentir comme source de plaisir et de passion ; l'initiation à des problématiques de recherche et à des questions actuelles est un moyen puissant pour développer la motivation et la créativité des élèves. Consciente de l'isolement des clubs existants et du caractère dispersé des initiatives, l'association a organisé en 1999 et 2001 deux Universités d'Eté permettant l'échange des expériences, la mise en commun des réussites, la réflexion sur les contenus et la conduite des ateliers périscolaires et leur articulation avec l'enseignement ainsi qu'une meilleure connaissance des ressources d'internet. Les actes (220 et 228 pages) ont été édités et sont disponibles à l'IREM de Clermont-Ferrand.

Compte tenu du caractère impératif et urgent de la promotion des mathématiques contemporaines dans le système éducatif et de la nécessaire implication des chercheurs dans cette promotion, il est apparu à ANIMATH qu'il fallait organiser une nouvelle U.E. permettant aux praticiens de la recherche et à ceux de l'enseignement de se rencontrer pour mieux se connaître et se préparer à diverses formes d'intervention en milieu scolaire (ateliers de recherche et clubs, promenades mathématiques, expositions, films et utilisation des TICE, TPE et IDD) en particulier pour mettre fin à la désaffection des jeunes vis à vis des études scientifiques .

Après un premier projet avorté en 2003, ANIMATH a réussi à mener à terme l'organisation et la tenue de cette U.E. qui a rassemblé 56 participants, chercheurs, enseignants-chercheurs, professeurs de lycée ou de collèges, inspecteurs, pour des activités variées, selon un emploi du temps très dense (9h à 22h chaque jour) ; la concentration de toutes les activités à la Maison des Planchettes, toujours aussi accueillante, a permis, en dehors des séances plénières et des ateliers, de nombreux échanges informels.

2- Programme :

Le travail s'est articulé autour de
- **Trois ateliers :** quatre matinées ont été consacrées à un travail par petits groupes ; les participants ont eu le choix, soit de travailler dans le même atelier durant toute l'U.E., soit d'observer et d'analyser le fonctionnement des trois ateliers. Ces séances ont été l'occasion d'échanges fructueux sur des problèmes, des situations, des matériels très variés .

A1 Situation de recherche pour la classe : objectifs, caractéristiques pour une dévolution à l'élève, conditions pour une gestion par l'enseignant .
A2 MATh.en.JEANS, chercher, chercher à faire, faire chercher, apprendre, faire apprendre, apprendre a faire chercher, apprendre à faire, faire, aimer, chercher à aimer, aimer chercher, apprendre à aimer chercher, etc. ,
A3 Les objets et les images en mathématiques pouvant dynamiser des clubs périscolaires .
Une partie de la matinée du vendredi 27 a été consacrée au compte-rendu de chacun de ces ateliers .
Par ailleurs Jean-Pierre Raoult a animé un groupe de travail consacré à l'analyse des chiffres sur la surmortalité en France due à la canicule de l'été 2003 (à paraître dans « Repères IREM »)

- **Quatre conférences de type « promenade »**
Sous le nom de « promenades mathématiques » ANIMATH développe la mise à la disposition des enseignants du second degré de chercheurs susceptibles de venir présenter dans les classes ce que sont les mathématiques vivantes d'aujourd'hui ; on trouvera ici quatre exemples qui ont donné lieu à une large discussion sur ce que doit être une promenade, pour le chercheur, pour le ou les professeurs, pour les élèves.

- Le passage de l'innovation mathématique dans l'enseignement.
- Arcs en ciel, soucoupes volantes,toupies, courbes elliptiques, et tout ça.
- Le lemme de Baire.
- Pourquoi le livre X d'Euclide, ou Thééthète, le Galois grec.

- **Trois conférences sur « mathématiques vivantes et éducation secondaire ».**

Chacun des trois conférenciers a apporté son point de vue et un éclairage personnel sur les contenus actuels de l'enseignement secondaire en France, leur finalité et leur évolution.

- ***Les mathématiques : démonstration, description, expérience.***
- ***Transposition didactique des mathématiques et nouvelle épistémologie scolaire***
- ***Simulation statistique et enseignement.***

- Trois exposés sur des activités de popularisation des mathématiques soutenues par des TICE. L'université d'été se devait de faire connaître des activités de popularisation des mathématiques, de mise en réseau des enseignants et d'utilisation des TICE Elles sont implantées sur des sites Internet accessibles directement.

- Bilan de 10 ans de pratique à l'université de l'expérience MATh.en.JEANS et d'actions de l'association MATH POUR TOUS
- ***Le site mathématique CultureMath, son utilisation pour garder une démarche vivante***
- ***Les vidéos du programme « mathématics » (stratégies originales de transmission des connaissances), leur traduction lilloise, le site : http ://mediamaths.asso.fr***

- **Une table ronde** : ***tensions entre programmes et démarche scientifique***

En France, les instructions officielles insistent depuis longtemps déjà, sur l'importance de l'apprentissage d'une démarche scientifique dans le cadre de l'enseignement des mathématiques. Mais les modalités d'un tel apprentissage restent à définir, compte tenu des contraintes propres au système éducatif actuel (programmes, hétérogénéité des élèves, exigences sociales de réussite pour un maximum d'élèves...). « faire comprendre » et « faire réussir » sont-ils conciliables ? et comment ?

Un débat animé a permis d'intervenir à tous les participants qui le souhaitaient.

- Activités diverses
L'après midi du dimanche 22 août a été consacrée à l'accueil des participants puis à la présentation des ateliers . Le mercredi 25 août, les participants ont pu grâce à Alain Roddier découvrir le vieux Saint-Flour, son hôtel de ville et les livres anciens de la bibliothèque municipale. Les plus courageux ont fait un footing matinal ou admiré les viaducs de Garabit et les châteaux, églises ou cascades des environs .

3) Evaluation

Il n'a pas été possible d'effectuer durant l'U.E. une évaluation en bonne et due forme, mais la dernière séance a été l'occasion, pour ceux qui restaient, d'une expression libre écrite et anonyme dont on trouvera ici les éléments, ainsi que le dépouillement par analyse des correspondances des réponses à un questionnaire.

4) Actes et suite

Il est toujours difficile de rassembler rapidement toutes les contributions à une telle manifestation et nous avons fait de notre mieux pour ne rien oublier et pour implanter les premières contributions reçues sur le site Animath.fr ; celui-ci est mis à jour et permet de voir les magnifiques illustrations en couleur , ici transcrites en noir et blanc .
Certains participants ont souhaité poursuivre les discussions ébauchées à Saint-Flour et nous sommes heureux d'ajouter ces contributions à ces actes .

LISTE DES PARTICIPANTS

ALEXANDRESCU Cristian-Inspecteur, BUCAREST - fies@jocconcurscangurul.ro,
ANDLER Martin-Pt ANIMATH, Univ.VERSAILLES - andler@math.uvsq.fr,
AUDIN Michèle-IRMA, Univ. STRASBOURG 1 - maudin@math.u-strasbg.fr,
AUDIN Pierre-MATh.en.JEANS et P. de la d., PARIS - pierre.audin@wanadoo.fr,
AVINZAC Marie-Thérèse-Lycée Ozenne, TOULOUSE - maite.avinzac@wanadoo.fr,
BARNICHON Dominique-IPR, CLERMONT - dominique.barnichon@ac-clermont.fr
BEAULIEU Marie Christine-Collège Armand, MARSEILLE - mc.beaulieu@wanadoo.fr,
BEDDOU Laurent-Univ. Luminy, MARSEILLE - beddoulaurent@hotmail.com,
BILGOT Jean-François-IPR, CLERMONT - jfbilgot@wanadoo.fr,
BONNET Pierre-Henri-Lycée Audiberti, ANTIBES - pierre-hen.bonnet@ac-nice.fr,
BOUCEKKINE Farouk -CultureMath, ENS, DESCO.PARIS - Farouk.Boucekkine@ens.fr,
BOULARAS Meriem-Collège Donzelot, LIMOGES - boularas.meriem@free.fr,
CHAUVEAU Véronique-Pte FetM, Lycée Camille Sée, PARIS - vchauvea@noos.fr,
CHEVALLARD Yves-IUFM, AIX-MARSEILLE - y.chevallard@aix-mrs.iufm.fr,
CLEMENT Gwenaelle-Collège Pablo Néruda, STAINS - gwenaelle.clement@laposte.net,
COLIN François-Ecole Marius Latour, PORTO - francoiscoco@yahoo.fr,
COUSQUER Eliane-USTL et IREM, LILLE - eliane.cousquer@wanadoo.fr,
DE CROZALS Aurélia-Collège Las Cazes, MONTPELLIER - aurelia.decrozals@freesbee.fr,
DHOMBRES Jean-CNRS, PARIS - Jean.Dhombres@damesme.cnrs.fr
DOTT Marie-Odile-Lycée Molière, PARIS - marie-odile.dott@ac-paris.fr,
DUCHET Pierre-MATh.en.JEANS et CNRS, PARIS - duchet@ccr.jussieu.fr,
DUCOURTIOUX Catherine-IUFM, CORTE - ducourtioux.catherine2@wanadoo.fr,
DURANTHON Agnès-Lycée Mme de Staël, MONTLUCON - ayanne@libertysurf.fr,
FORT Marc-Inspection Générale, PARIS - marc6fort@wanadoo.fr,
GAUDEL Francois-Lycée, BOBIGNY - fgaudel@free.fr,
GODEFROY Gilles-CNRS, PARIS - gig@ccr.jussieu.fr,
GODOT Karine-SIRC, Univ. GRENOBLE - Karine.Godot@imag.fr,

GRENIER Denise-SIRC, Univ. GRENOBLE - Denise.Grenier@imag.fr,
HELSON Pierre-Lycée T.Maulnier, NICE - helson.pierre@wanadoo.fr,
HENNEQUIN Paul-Louis-Univ. B. Pascal, CLERMONT -
Paul-Louis.Hennequin@math.univ-bpclermont.fr,
HOSPITAL Michèle-Lycée, LIMOGES - michele.hospital@wanadoo.fr,
HYVERNAUD Sylvie-Collège Donzelot, LIMOGES -
sylvie.hyvernaud@club-internet.fr
LAPSANSKA Natasa-Lycée Nerudy, PRAGUE - lapsansky@mistral.cz,
LO JACOMO François-Trésorier ANIMATH, PARIS -
francois.lojacomo@wanadoo.fr,
MARCEL Christine-Collège privé St-Victor, VALENCE -
philippemarcel@wanadoo.fr,
MUZELET Catherine-Collège privé St Macre, FISMES - muzelet@wanadoo.fr,
NOIRFALISE Annie-IREM, CLERMONT - annie.noirfalise@univ-bpclermont.fr,
NOIRFALISE Robert-IREM, CLERMONT - robert.noirfalise@oreka.com,
PAWLOWSKI Françoise-Lycée, St -ANDRE-DE-CUBZAC -
pawlfran@club-internet.fr,
PAYAN Charles-IMAG, GRENOBLE - Charles.Payan@imag.fr,
PINZUTI Marie-Elisabeth-Lycée Gay-Lussac LIMOGES -
marieelisabeth.pinzuti@wanadoo.fr,
POISARD Caroline-Univ. MARSEILLE - poisard@unimeca.univ-mrs.fr,
RAOULT Jean-Pierre-Univ. MARNE-LA-VALLÈE - raoult@math.univ-mlv.fr,
RICHARD Françoise-IUT et IUFM, GRENOBLE -
francoise.richard@univ-savoie.fr,
RICHETON Jean-Pierre-Lycée Mas de Teste, MONTPELLIER -
jpricheton.apmep@wanadoo.fr,
RODDIER Jean-Alain-Lycée, ST-FLOUR - ja.roddier@wanadoo.fr,
ROUX Dominique-Inspection Générale, PARIS -
dominique.roux@education.gouv.fr,
SCHMITT Marie-Josèphe-Lycée, CLUSES - mjo.schmitt@wanadoo.fr,
SILVY Christian-IUFM, POINTE -A-PITRE - sil.c.me@wanadoo.fr,
STROCK Jean-Marcel-Lycée, SALON-DE-PROVENCE -
jean-marcel.strock@wanadoo.fr,
TALAMONI Claude-Lycée, AULNAY-SOUS-BOIS claude.talamoni@free.fr,
TISSERON Claude-LIRDHIST, LYON - Claude.Tisseron@univ-lyon1.fr,
TIXIER Michel-Lycée Michelis, AMIENS - michel.tixier3@wanadoo.fr,
VAROUCHAS Françoise-Lycée F. Villon, PARIS -
francoise.varouchas@wanadoo.fr,
VIALANEIX Bernard-Lycée S. Weil, LE PUY -
bernard.vialaneix@ac-clermont.fr,
WINSLOW Carl-Centre de Didactique, COPENHAGUE -
winslow@naturdidak.ku.dk

ATELIERS

ATELIER 1

Situations de recherche pour la classe. Objectifs, caractéristiques pour une dévolution à l'élève, conditions pour une gestion par l'enseignant

Présentation de l'atelier 1

Claude Tisseron, LIRDHIST, Université de Lyon I

L'atelier 1 est organisé en deux parties complémentaires mais indépendantes. Elles ont en commun de proposer l'étude de situations mettant l'élève en position de chercher un problème sous sa propre responsabilité (SIRC). Le mot situation attire l'attention sur le fait qu'il ne suffit pas de donner un problème pour que l'élève le cherche sous sa responsabilité ; il y faut une règle du jeu particulière : un contrat dont l'installation pourra être facilitée par une production réalisée en groupe. Ce contrat de recherche doit inclure explicitement une forme d'intervention de l'enseignant qui le place provisoirement en position d'animateur/tuteur de la recherche. Dans cette position, ses interventions permettront à l'élève d'avancer, sans pour autant « tuer la recherche » au sens où l'élève aurait alors la piste lui permettant de résoudre rapidement. Ce mode d'intervention est assez subtil, car il s'agit tout de même d'entretenir la motivation, de faciliter la prise de conscience et l'organisation du travail fait, l'explicitation des difficultés etc. Ces modalités de travail sont bien décrites par exemple dans les travaux sur le problème ouvert : Arsac et al. (1984), et Arsac et al. (1988) et plus récemment dans des travaux sur l'organisation en classe de « problèmes longs » dont la résolution progressive prend plusieurs semaines (Aldon 1996, Aldon et Tisseron, 1998, Gardes 1998 ainsi que dans la seconde partie de l'atelier). Outre la règle du jeu particulière qui doit permettre à l'élève de s'engager sur la validité de ses productions, il faut que les connaissances supposées disponibles permettent une entrée dans le problème et la mise en place de stratégies. Pour cela, le problème lui-même doit vérifier certaines conditions pour permettre que l'élève entre dans sa recherche. De bonnes références pour ces notions de problème ouvert et de situation problème sont : Arsac et al.,1988, ou Douady 1986 pour les situations problèmes. Nous formulons ces conditions sous la forme suivante pour faire le lien avec la seconde partie de l'atelier.

1- *La question initiale est facile d'accès.* L'élève doit pouvoir s'engager dans la résolution du problème. Il peut envisager ce qu'est une réponse possible au problème, il s'en fait une idée qui le guide.

2- *Des stratégies initiales existent.* Les connaissances de l'élève sont en principe insuffisantes pour qu'il résolve immédiatement le problème, l'énoncé n'indique ni la méthode ni nécessairement le résultat à trouver si l'énoncé est ouvert, mais les connaissances de l'élève lui permettent de faire des essais.

3-*La situation doit permettre à l'élève de décider* lui-même si ses essais sont convenables ou non, les connaissances de l'élève dans la situation lui donnent des moyens de contrôle.

4-*L'étude d'une question peut renvoyer l'élève sur une nouvelle question.*

Ces formulations ne restreignent pas le contenu des mathématiques en jeu dans la recherche envisagée. *Dans la première partie de l'atelier*, nous travaillons sur des objets mathématiques scolaires donc sur lesquels les connaissances ne sont pas stabilisées de la même manière pour tous les élèves. Le lecteur verra *dans la seconde partie* de l'atelier une autre interprétation des formulations en italique relative à un choix particulier d'objet de recherche pris hors des mathématiques scolaires.
Concluons cette introduction en disant que les conditions sur le contrat et la forme du problème permettent à l'élève de s'engager sous sa responsabilité dans la recherche, les modalités particulières d'intervention de l'enseignant qui respectent le contrat d'autonomie tout en ajustant éventuellement ses interactions avec le problème lui permettent d'en rester responsable. Les didacticiens appellent *dévolution* ce processus.

Première partie de l'atelier 1

Claude Tisseron, LIRDHIST, Université de Lyon I

La première partie de l'atelier 1 avait pour objectif de permettre aux stagiaires d'étudier sous divers angles des problèmes de recherche mettant en jeu la continuité de la droite géométrique. Donc avec un enjeu de connaissances mathématiques relatif à des savoirs scolaires. Ces problèmes ont été mis en lien avec quelques aspects historiques et didactiques de la construction de ce concept.

Compte tenu du public de l'atelier, il a été proposé un travail sur qu'est-ce que c'est que " faire des maths " qui a permis de donner plus de sens au terme SIRC pour les stagiaires qui n'en avaient jamais fait.

1- Déroulement

Le premier jour,
Deux problèmes ont été recherchés par les stagiaires.
Le premier est un problème de géométrie dont l'énoncé est accessible au collège. Il est destiné à mettre en évidence certaines propriétés qui sont toujours utilisées implicitement et nécessairement lues sur la figure.
Le second problème est relatif à l'existence de points fixes éventuels pour des fonctions définies sur divers ensembles de nombres réels qui ont en commun de ne pas être continus. Ce second problème a été expérimenté avec des élèves de première S dans le cadre de l'action MATHs.en.JEANS.

Le second jour.
Une étude des travaux d'élèves sur le problème des points fixes a été présentée et commentée. Elle a mis en évidence deux phénomènes didactiques. Le premier relatif aux conceptions particulières des objets en jeu qui font accepter ou non un certain raisonnement comme une preuve ; le second relatif à l'évolution progressive des conceptions d'un élève sur la notion de continu de la droite géométrique, évolution progressive permise par la longue durée de la recherche.

Nous ne détaillons pas ces aspects qui sont accessibles par ailleurs [1]. Ce

[1] Pontille M.C., Feurly-Reynaud J., Tisseron C. (1996), *Et pourtant ils trouvent*, *Repères 24* 11-334. Une étude analogue avec des étudiants de licence de maths a été menée en 2004 : Germain B., *Le continu comme obstacle : proposition d'une situation*

travail était prévu sous la forme d'une étude en petits groupes guidée par des questions. Mais, compte tenu de la nouveauté des situations de recherche pour une partie importante des stagiaires le programme prévu a été modifié et conduit de façon plus directive. Le temps ainsi « gagné » a permis de proposer aux stagiaires une activité destinée à leur permettre de réfléchir, et d'élaborer en groupes, sur ce que c'est que " faire faire des maths aux élèves ". Leur intérêt pour cette réflexion les a amenés à faire une séance de travail supplémentaire pour terminer les compte-rendus de leurs réflexions. Les consignes précises et les productions sont ci-dessous.

2- Le premier problème : Le problème des deux cercles

L'énoncé

On considère deux cercles extérieurs C et C' (donc sans point commun) d'un même plan ; Déterminer tous les points M du plan vérifiant la propriété suivante : P(M) : toute droite passant par M rencontre au moins l'un des deux cercles (c'est à dire a au moins un point commun avec l'un des deux cercles).

Résolution

La présence de quantificateurs « imbriqués » a posé quelques difficultés à certains stagiaires. (C'est toujours le cas chaque fois que ce problème est posé). Le propos de ce problème n'est cependant pas là. Une étude « expérimentale » de la figure permet de se rendre compte que les points de certaines zones limitées par les tangentes extérieurs et intérieures (la zône AT'S' dans la figure 1) répondent à la question. Mais dans le cadre euclidien classique, il s'avère difficile d'écrire une preuve qui ressemble à une démonstration, c'est-à-dire qui s'appuie sur des énoncés explicites.

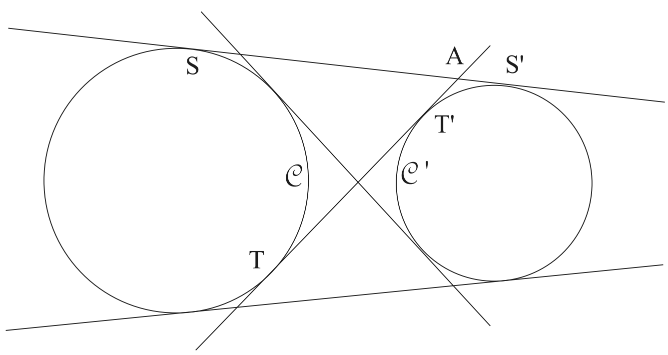


figure 1

---

fondamentale en licence. Mémoire de DEA, *Construction des savoirs scientifiques*, Université Lyon 1

Pour expliciter ces énoncés, il faut expliciter des propriétés qui sont habituellement lues sur le dessin et qui fonctionnent sur le mode de l'évidence graphique. Il s'agit de propriétés topologiques et de propriétés liées à l'ordre des points sur une droite. Nous énonçons seulement quelques une de ces propriétés ci-dessous, nous ne les démontrons pas. Elles pourraient être démontrées dans une axiomatique plus riche que celle d'Euclide comme l'axiomatique de Hilbert[2] .
Notons que lorsque les stagiaires ont pris conscience du manque de propriétés explicites, ils se sont engagés dans l'explicitation de certaines des propriétés lues sur la figure. Ce qui était l'objectif de ce problème. Les éléments ci-dessous destinés à expliciter une preuve ont été donnés en synthèse. Voici ces propriétés.

Des propriétés topologiques

T1- Une droite partage son complémentaire dans le plan en deux régions connexes disjointes.
Un cercle ou un triangle partage son complémentaire dans le plan en deux régions connexes disjointes, dont l'une est bornée. Toute ligne continue qui joint deux points dont chacun est dans une région rencontre la droite, le cercle ou le triangle. En particulier, toute droite qui rencontre une corde d'un cercle rencontre ce cercle.

T2- Toute droite contenant un point de l'intérieur d'un triangle rencontre deux côtés ou bien un côté et le sommet opposé.

*Des propriétés liées à **l'ordre des points** sur une droite*
Ces propriétés permettent de dire qu'un point est entre deux autres. Nous ne les explicitons pas davantage en général mais donnons celles qui sont utiles ici.

Lemme 1
Deux cercles extérieurs C et C' ont quatre tangentes communes. Les points de rencontre entre une tangente intérieure TT', et une tangente extérieure SS' sont à l'extérieur du segment [TT'] à l'intérieur du segment [SS'] (Cf.figure 1).

[2]G. Arsac en a produit une version facile à lire : *l'Axiomatique de Hilbert*, éd. IREM de Lyon

Lemme 2
On considère un triangle AST et deux points S' et T' comme sur la figure (T'entre T et A, A entre S et S'). Alors toute droite contenant un point du triangle AS'T' rencontre l'un des segments [S'T'] ou [ST].

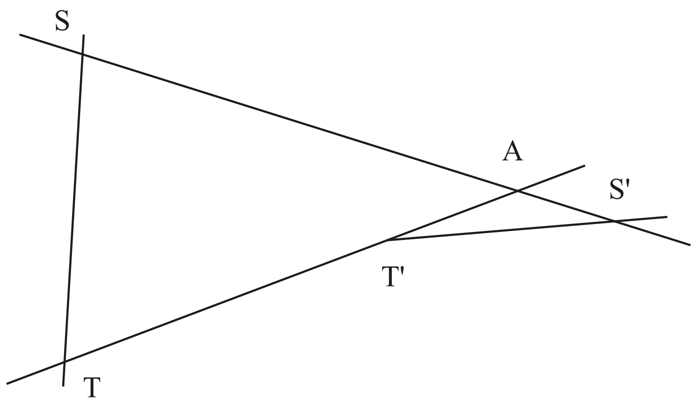


figure 2

La preuve du lemme 2 utilise T2.
Avec ces propriétés on peut rendre compte de l'expérience mentale consistant à faire tourner une droite (d) autour d'un point M du triangle AT'S' extérieur au cercle C'. Le chemin du raisonnement est le suivant (les détails des justifications se retrouvent avec les propriétés explicitées ci dessus). Si (d) ne rencontre pas le cercle C', alors (d) ne rencontre pas non plus le segment [S'T']. D'après T2, nécessairement (d) rencontre les segments [AT'] et [AS'] (éventuellement en A) et donc (d) rencontre le segment [ST] (donc C).

Qu'en conclure ?

Nous résumons le travail fait à propos de ce problème.
Du point de vue didactique, la quantité de propriétés lues implicitement sur la figure permet de voir la complexité du rapport à la figure que doit apprendre l'élève dans les classes où il apprend la démonstration en géométrie.
Du point de vue historique de la construction des connaissances mathématiques, l'usage des propriétés topologiques et d'ordre sur le registre de l'évidence implicite ont toujours fait partie de la *pratique* de la géométrie euclidienne plane. La découverte des géométries non euclidiennes a contribué à leur explicitation.

Le fait que deux lignes continues (droites ou cercles par exemple) qui « se croisent » aient un point commun relève apparemment de propriétés de continuité. En fait la situation est plus subtile comme le montrent les deux exemples suivants relatifs aux intersections de droites et de cercles.

Le plan rationnel

Considérons le plan $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, où $\mathbb{Q}$ désigne l'ensemble des rationnels. Tous les points considérés sont des couples de rationnels. La structure d'anneau de $\mathbb{Q}$ permet de définir des *droites* au sens des espaces vectoriels. Du point de vue graphique on ne peut pas distinguer ces *droites* des droites du plan usuel !
Les formules de résolution de deux équations à deux inconnues permettent aisément de se convaincre que deux droites de $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ ont toujours un point commun dans $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$. La propriété T2 ci-dessus est donc vérifiée. Par contre si on considère des cercles de $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, la propriété T1 n'est plus vraie car par exemple les cercles de rayon unité centrés en (0,0) et (0,1) se coupent en $(1/2, \sqrt{3/2})$ qui n'est pas dans $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$. Cette propriété d'intersection de deux cercles est utilisée implicitement par Euclide (livre I, proposition 1) pour démontrer l'existence d'un triangle équilatéral sur un segment donné quelconque. La continuité des lignes correspondant à l'existence des réels est bien implicitement supposée [3] dès qu'il s'agit d'intersection de cercles.

Le plan décimal

Considérons de même le plan $\mathbb{D} \times \mathbb{D}$, où $\mathbb{D}$ désigne l'ensemble des décimaux. Tous les points considérés sont des couples de décimaux. La structure d'anneau de $\mathbb{D}$ permet de définir des *droites* au sens des anneaux comme dans les espaces vectoriels. Du point de vue graphique on ne peut pas distinguer ces *droites* des droites du plan usuel ! Dans ce cas la propriété T2 pour les triangles n'est plus vérifiée. On obtient un contre exemple en considérant le triangle A(0,0), B(1,1) et C(1,0) et la *droite* (d) d'équation $y = (x + 1)/4$ qui rencontre BC en (1,1/2) mais qui croise AC en (1/3, 1/3) qui n'est pas dans $\mathbb{D} \times \mathbb{D}$.
Si on définit les côtés d'une droite par le fait que deux points sont dans

[3] Bien qu'on puisse se limiter aux nombres constructibles, comme le montre par exemple l'ouvrage de Carrega J.C. (1981) *Théorie des corps, la règle et le compas,* Herman, Paris.

des côtés différents si le segment qui les joint coupe la droite, on constate que les droites de $\mathbb{D} \times \mathbb{D}$ ne définissent pas deux côtés différents.

Un exemple chez Cauchy

La correspondance entre points d'une droite et nombres réels *via* le choix d'un repère a fait longtemps utiliser la géométrie comme une référence de propriétés relevant du numérique. Voici un exemple chez Cauchy au cours de leçons faîtes à l'école polytechnique [4]. Cette citation montre comment l'intuition géométrique est au fondement de propriétés de l'analyse. Dans son cours d'analyse de 1821, Cauchy démontre ainsi le théorème des valeurs intermédiaires :

« une propriété remarquable des fonctions continues d'une seule variable, c'est de pouvoir servir à représenter en géométrie les ordonnées de lignes droites ou courbes. de cette remarque on déduit facilement la proposition suivante :
***Théorème IV**.- Si la fonction f(x) est continue par rapport à la variable x entre les limites $x = x_o$, x=X, et que l'on désigne par b une quantité intermédiare entre f(x_o) et f(X), on pourra toujours satisfaire à l'équation f(x) = b par une ou plusieurs valeurs réeelles de x comprises entre x_o et X.*
***Démonstration**. -Pour établir la proposition précédente, il suffit de faire voir que la courbe qui a pour équation $y = f(x)$ rencontrera une ou plusieurs fois la droite qui a pour équation y=b dans l'intervalle compris entre les coordonnées qui correspondent aux abscisses x_o et X ; or, c'est évidemment ce qui aura lieu dans l'hypothèse admise » .*

Le recours au caractère d'évidence visuelle montre comment ces théorèmes d'analyse se fondent sur une certaine intuition des phénomènes géométriques. Malgré l'existence d'une définition correcte de la continuité chez Cauchy, la continuité ne peut pas être totalement exploitée car le concept de nombre réel n'est pas construit à partir de propriétés qui pourraient être mises en relation avec la continuité, cela sera fait plus tard par Dedekind. Cette absence induit le recours à l'évidence graphique de l'intuition géométrique des courbes. Au XIX^{e}, le premier mathématicien qui ait critiqué le rôle de l'intuition dans la preuve ci dessus est

[4] ces citations sont extraites de Y. Chevallard (1991), *La transposition didactique*, La pensée sauvage. p. 89 et 91

Bolzano(1781-1858). Dans un mémoire publié en 1817 (donc peu avant le cours de Cauchy cité), Bolzano avait donné une preuve du théorème des valeurs intermédiaires sans considération géométriques, en s'appuyant sur une propriété identique au critère dit « de Cauchy ». Le projet de Bolzano était justement de ne pas utiliser l'intuition géométrique pour prouver une propriété fondant une bonne partie de l'analyse. Il voulait au contraire fonder celle ci sur les nombres seulement. Faute d'une bonne définition des réels, Bolzano n'a pas fourni une preuve complète.

2- le second problème : existence de points fixes

Il s'agit de chercher un problème donné à des élèves de lycée en 93-94 à Lyon dans le dispositif MATh.en.JEANS (ce dispositif est décrit par ailleurs dans ces actes). Après la recherche du problème, le travail proposé aux stagiaires consiste à étudier les productions d'un groupe d'élèves à partir d'extraits de protocoles [5]. Cette étude a été publiée trés succintement dans (PONTILLE et al., 1996).

Le problème "existence de point fixe"(tel que posé aux élèves)

On considère une application f de 1,2,...n dans 1,2,...n où n est un naturel non nul. On suppose f croissante, montrer qu'il existe un entier k tel que f(k) = k, k est appelé point fixe.
Etudier de possibles généralisations aux cas suivants, avec f croissante :
$f\ :\ \mathbb{D}\cap[0,1]\to\mathbb{D}\cap[0,1]$ où $\mathbb{D}$ est l'ensemble des décimaux.
$f\ :\ \mathbb{Q}\cap[0,1]\to\mathbb{Q}\cap[0,1]$ où $\mathbb{Q}$ est l'ensemble des rationnels.
f : [0,1] $\to$ [0,1].
ou toute autre généralisation.

Etude du problème lui-même

Les stagiaires ont assez facilement résolu le problème dans le cas des entiers et le cas décimal qui étaient les seuls demandés. Un résumé des solution retenues est proposé ci-dessous.
1-Cas de $f\ :\ \{1,2,...,n\}\to\{1,2,...,n\}$ **croissante**
Pour montrer que f a un point fixe, on peut peut supposer que 1,2,...,

[5]Ils ont été élaborés par un groupe de l'IREM de Lyon travaillant sur l'argumentation, dont les membres étaient Serge Betton, Yves Guichard, Marie-Claude Pontille, Josette Feurly-Reynaud et Claude Tisseron.

$n-1$ ne sont pas fixes et montrer que n est fixe. Dans ce cas on a successivement $f(1) \geqslant 1$ avec $f(1)$ distinct de 1 donc $f(1) > 1$; puis $f(2) \geqslant f(1) > 1$, avec $f(2)$ distinct de 2 donc $f(2) > 2$; et par une récurence immédiate on a $f(p) > p$ pour tout $p \leqslant n-1$. On a alors $n \geqslant f(n) \geqslant f(n-1) > n-1$ donc nécessairement $f(n) = n$.
On pourrait aussi raisonner par l'absurde en supposant qu'il n'y a aucun point fixe, montrer que nécessairement n est fixe et déduire de cette absurdité qu'il y a un point fixe !

2- Cas de $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$

La première difficulté est de décider si f a toujours un point fixe et alors de tenter une preuve générale ou bien sinon, si on pense qu'il n'y a pas toujours de point fixe, de trouver un contre exemple en utilisant une fonction explicite construite à partir de fonctions connues.
Une étude dans les deux directions peut aboutir à finalement trouver un contre exemple. L'analyse des contraintes montre que (1/3,1/3) est le point de croisement non décimal de la première bissectrice et de la droite $y = (x+1)/4$, (on retrouve l'exemple du plan décimal ci-dessus). Plus généralement, si on tente de prendre un rationnel positif non décimal $p/q < 1$ comme point fixe du prolongement, il faut avoir $pa + qb = p$. Alors $a = b = p/(p+q)$ peuvent convenir dés que $p+q$ est de la forme $2^n 5^m$ avec n et m entiers positifs.

3- Cas de $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$

Pour le cas des rationnels, l'idée est la même, il faut construire une fonction croissante f de [0,1] dans lui même telle que $f(r)$ soit rationnel dès que r l'est et ayant un point fixe non rationnel. En analysant les contraintes à respecter pour f, on trouve par exemple $f(x) = (2x^2+1)/4$ comme contre exemple.

Le point de vue des élèves

Le problème a été cherché par les élèves d'octobre à mars ;
1 - Dans la première période, le problème avec les entiers a été résolu assez facilement, la seule difficulté a été de comprendre qu'une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ a un graphe constitué de points isolés (les fonctions habituellement étudiées sont de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$!).

2 - A partir de là, ces élèves ont pensé pouvoir obtenir pour le problème avec les décimaux une démonstration par généralisation de la précédente. Ils ont imaginé les décimaux de [0 ,1] comme des points « successifs très rapprochés » sur le modèle des entiers, c'est à dire un point, un espace, un point, un espace, etc., l'espace représentant l'écart entre deux décimaux ; puis ils ont cherché à faire correspondre ces points avec les entiers de 1 à n pour n assez grand. Cette recherche s'est poursuivie sans succès trois séances.
3 - Après l'abandon progressif de l'idée précédente, les élèves ont attaqué la vraie difficulté de ce problème, qui tient à la nature des nombres en jeu. Des questions de fond ont surgi, telles que « y a t-il un plus petit décimal » ou « quel est l'écart entre deux décimaux ? y en a t-il un ? » avec leur traduction dans le cadre graphique : « la ligne qui représente la fonction définie sur les décimaux peut-elle avoir des trous, et comment sont faits ces trous, s'ils existent » ?

Les extraits de protocoles étudiés se placent à ce moment-là du problème avec les décimaux, en janvier ; la partie un est extraite de la cinquième séance sur les décimaux, la partie deux est extraite de la sixième séance. La cinquième séance met en évidence les difficultés d'élèves ayant des référents différents pour accepter une preuve du fait qu'entre deux décimaux il y en a un troisième. L'un accepte une preuve graphique, le milieu de deux décimaux sur une droite est un décimal. Le second veut une preuve dans le numérique avec la définition en $k/10^n$, mais sans arriver à la produire.
Dans le protocole de la séance suivante, ce second élève va passer par plusieurs phases pour modifier sa conception des décimaux pensés comme un nombre - un espace - un nombre... (sur le modèle des entiers) à une conception où les décimaux sont pensés comme des réels particuliers et où les " trous " dans les décimaux sont des réels non décimaux. Nous renvoyons pour des détails à l'article cité.

En conclusion

L'étude des protocoles, étayée de l'analyse du problème produite par la recherche des stagiaires, a permis de mettre en évidence que les élèves pouvaient privilégier une référence géométrique ou une référence numérique comme moyen de contrôle. Cette étude permet aussi de montrer tout le travail d'approfondissement de connaissances scolaires et de leur

réorganisation éventuelle produite par une recherche de longue durée.
Sur un plan plus technique, cette étude est l'occasion d'aborder les notions de registres de représentations et de conceptions.

4- SIRC ou faire « faire des maths » aux élèves ?

Il est apparu le premier jour que plusieurs stagiaires n'avaient jamais fait de situation de recherche dans leur classe. Aussi afin de permettre un échange sur les représentations et le vécu (expérimenté ou imaginé) de cette pratique, j'ai proposé une activité de groupe pour approfondir le sens de ce que c'est que faire des maths, et faire faire des maths. Les consignes sont données en annexe 1.
Les productions des groupes ont été très intéressantes et ont donné lieu à un prolongement de l'atelier pour leur présentation. Un groupe ayant des membres chevronnés sur les SIRC a travaillé pour expliciter ce que c'est que faire des maths. L'autre groupe, constitué en majeure partie de stagiaires déclarant n'avoir jamais fait de SIRC, a conçu et proposé un dispositif. Les productions ont donné lieu à des échanges fructueux qui ont, semble-t'il, permis d'atteindre les objectifs assignés à cette activité. Les productions sont en annexes 2 et 3. Il apparaît que les problèmes de dévolution et d'évaluation sont importants pour les stagiaires n'ayant jamais fait de SIRC.

5-Le point de vue du maître : difficultés pour animer des SIRC

Pour l'agrément du lecteur des actes nous insérons ici une partie de l'article Aldon et Tisseron (1998). Cet aspect est repris et approfondi dans la seconde partie.

Maîtrise des activités de l'élève

Du point de vue du maître, le travail de l'élève n'a pas du tout la même signification dans une tâche d'exécution et dans une recherche de problème. Dans le premier cas, l'exécution est bien définie par l'énoncé, le chemin suivi par l'élève (c'est-à-dire l'usage des procédures attendues, voire des erreurs induites par la tâche) est bien anticipé et son évaluation éventuelle est aisée.
Dans une recherche de problème, les cheminements et les procédures des élèves sont plus imprévisibles pour le maître. Cette imprévisibilité peut

provenir du fait que le but à atteindre est éloigné des connaissances des élèves ou du fait que le contexte d'apprentissage de ces connaissances est différent du contexte du problème, ce qui en rend l'usage difficile et met en évidence une certaine fragilité de ces connaissances. Cette fragilité est liée au fait que les connaissances sont toujours contextualisées relativement aux situations de leur apprentissage, quelle que soit la variété de celles ci.

La mise en évidence de cette fragilité pointe la distinction entre le temps didactique et le temps de l'apprentissage. Cette distinction est évidemment bien connue du maître, en principe, mais elle est relativement prévisible au sein des activités habituelles. Plus les situations de recherche de problèmes vont permettre à l'élève d'exercer une véritable activité de recherche, plus l'activité mathématique de l'élève va échapper à l'anticipation du maître avec le risque de mise en évidence de la distance entre temps didactique et temps d'apprentissage et le fait que des savoirs réputés acquis sont encore bien fragiles comme le montre par exemple l'article cité (Pontille et al. 1996).

Par ailleurs, dans des situations ouvertes où les conjectures et procédures des élèves vont être variées voire inattendues, le maître va être éventuellement entraîné sur un terrain mathématique dont il ne contrôle pas tous les aspects, ce qui suppose de sa part l'aptitude à accepter cette position dont l'inconfort diminuera avec l'expérience des problèmes posés.

Problèmes d'évaluation du travail des élèves

L'autre difficulté est relative à l'évaluation des productions qui se situe sur un tout autre registre que le registre habituel dans la mesure où elle va prendre en compte la conduite du processus de recherche alors qu'elle porte habituellement sur son produit mis dans une forme dont les critères de conformité sont bien stabilisés. Il s'agit ici de donner vie au sein de la classe à l'objet "processus de recherche" en lui donnant un statut qu'il n'a pas habituellement. Il semble difficile pour le professeur comme pour les élèves de rendre publique une phase du travail mathématique qui relève en général de la sphère privée : le travail du professeur consistant classiquement à montrer le texte du savoir sous une forme organisée et structurée, mais pas le processus et les problématiques en ayant justifié la constitution. De ce fait les exposés éventuels des élèves risquent de ressembler à des caricatures de cours si l'objet « processus de recherche » n'a pas trouvé place dans la vie de la classe. Des approfondissements sur ces points sont apportés dans la seconde partie de l'atelier.

Bibliographie

Aldon G. (1996) Une voiture à la DERIVE, *repères* n°21
Aldon G. et Tisseron C. (1998) *Des situations pour mettre en œuvre une démarche scientifique au lycée*, Colloque sur la formation des enseignants, IUFM de Grenoble
Aldon G. et Tisseron C coord.(1996), *Actes de l'Université d'été sur la mise en œuvre d'une démarche scientifique*, juillet 1996, IREM de Lyon.
Arsac G., Germain G., Mante M., Pichod D., (1984), *La pratique du problème ouvert*, Ed. IREM de Lyon.
Arsac G., Germain G., Mante M. (1988) *Problème ouvert et situation-problème*. Ed. IREM de Lyon.
Chevallard, Y. (1995) La fonction professorale : esquisse d'un modèle didactique, in M.-J. Perrin-Glorian et R. Noirfalise (eds) *Actes de la VIII^e^ école d'été de didactique des mathématiques*, Clermont-Ferrand : IREM, pp. 83-122.
Douady R., (1986) Jeux de cadres et dialectique outil objet, *Recherches en didactique des mathématiques* 7(2).
Gardes D. (1998), *Effets à long terme d'une formation à la résolution de problèmes en*
Germain G., (2004), *Le continu comme obstacle : proposition d'une situation fondamentale en licence*. Mémoire du DEA Construction des savoirs scientifiques, Lyon, 2004.
Legrand M. (1993), Débat scientifique en cours de mathématiques et spécificité de l'analyse, *Repères 10*, 123-159.
Pontille M.C., Feurly-Reynaud J., Tisseron C.,(1996), Et pourtant ils trouvent, *Repères 24*. 11-34.

Annexe 1
Consignes pour approfondir « faire faire des maths » aux élèves

Situations : c'est quoi une situation par rapport à un énoncé ?
Comment ça se présente pour les E ? « Recherche » désigne quelle(s) forme(s) d'activité(s) pour ? »
Pour y voir plus clair voici des propositions de travail.

I - Recherche. . . *Objectif* : expliciter des indicateurs pour préciser les rapports entre faire des maths, chercher un problème, résoudre un exercice.
Votre production en groupe
Activité un
Donner 2 exemples sur lesquels vous êtes d'accord pour déclarer qu'un E fait des maths.
Donner 2 exemples sur lesquels vous êtes d'accord pour déclarer qu'un E ne fait pas des maths bien que pour la culture il semble en faire parce qu'il manipule des expressions mathématiques.
Soyez le plus précis possible : contexte, niveau, connaissances supposées, connaissances visées, organisation sociale particulière. . .
Activité deux : produire des indicateurs acceptés par le groupe. Compléter les phrases suivantes en utilisant des verbes parmi : dire, faire, savoir, savoir faire, etre, savoir être, être capable de. . .
Faire des maths pour un E c'est. . .
Chercher un problème pour un E c'est. . .
Résoudre un problème pour un E c'est. . .
Apprendre des maths pour un E c'est. . .
Savoir des maths c'est. . .
A quels « moments » au sens des « moments de l'étude » (en référence à Chevallard, 1995, présenté par ailleurs dans l'atelier) est-il pertinent, nécessaire, utile, possible de proposer une activité de recherche ?

II- Situation : Avant, pendant, après,
Comment le prof négocie, présente, gère, termine, réutilise en tout ou partie ?
Quelles conditions et contraintes pour mettre en place une SIRC (courte ou longue) ?
Quels indicateurs de l'entrée des E dans la Rech, pour le P ?
Quelles conditions et contraintes pour la gestion de la recherche ?

Quels indicateurs de la réussite, pour E, pour le P ?
Quels formes de conclusion ?
Quelles réutilisations possibles ?
Penser à quels "voyants", quels "leviers" pour P ?

N.B. : vous avez la possibilité de travailler plutôt sur I ou sur II.

Annexe 2
Réponses de stagiaires, « faire des maths »

(N.B. Les exemples fournis par les stagiaires ne sont pas joints) Il s'agit de réponses brutes après un « remue méninges ».
Faire des maths pour un élève : savoir reformuler un énoncé sous forme mathématique, résoudre un problème, conjecturer, anticiper, expérimenter, construire un contre exemple, valider, déduire, modéliser, élaborer une démarche, faire un raisonnement déductif, mobiliser ses connaissances.
Apprendre des maths pour un élève : c'est faire des va-et-vient entre cours et exercices, des manipulations.
Chercher : prendre des initiatives, utiliser une boite à outils, une boite à expériences, expérimenter.
Savoir des maths : c'est savoir son cours (intelligemment) , l'avoir compris, délimiter le champ d'application d'un théorème, avoir des expériences (avoir emmagasiné des exercices de base), savoir mobiliser, avoir compris ce qu'on a appris, être capable de dire je ne sais pas faire.

Qu'est ce qu'une situation de recherche ? Ce n'est pas un exercice du cours de maths. C'est plutôt pour des notions difficiles, permettre aux élèves de passer du temps pour s'approprier une notion. « régler un problème difficile ».
Indicateurs de réussite d'une situation de recherche.
Pour l'élève
- Bien comprendre un concept
- Voir différents cadres possibles
- « Maitriser » une notion
- Donner des consignes telles que l'élève pense qu'il a saisi une notion.

Réutilisations
Voir assez rapidement comment se réinvestissent les connaissances

Annexe 3
Réponses de stagiaires. « Situation de recherche, conditions et contraintes »

Il s'agit de réponses brutes après un « remue méninges ».

Exemple : *introduction du théorème de Thalès ou utilisation plutôt après le collège ; Pour approfondir ou s'approprier une connaissance.*

•*Contraintes* : le programme , le temps, ne pas perdre de vue les objectifs.
•*But* : mise en place d'une question très claire.
•*Dans la classe et l'horaire* on cherche à obtenir une notion précise.
SIRC courtes → contraintes de temps et de gestion de la classe.
Utilisation d'une dynamique de groupes : 2 par 2, puis 8 par 8 par exemple.

Comment faire travailler tout le monde ? Interactions , obligations ?
Prévoir une évaluation sous la forme suivante par exemple : retenir la composition du groupe et proposer la fois suivante un contrôle dans lequel la note est modifiée en fonction du travail fait dans le groupe.

Un exemple détaillé

•*Cadre* : au cours du temps scolaire.
•*But* : serait surtout de s'approprier ou d'approfondir des connaissances, donc de travailler sur le sens, la compréhension des concepts. (« régler un problème difficile » est-ce réaliste ?)
• *Ex. cité* : introduction du théorème de Thalès et de sa réciproque en $3^{\text{ème}}$.

L'activité est en 3 parties.

1- Observation de triangles en situation de thalès de façon à dégager les caractéristiques :
Sommet commun - même forme(= mêmes angles) - certains côtés parallèles - sommets alignés - côtés proprotionnels A partir de plusieurs figures dans les deux configurations typiques de Thalès.
2- Construire des triangles en situation de Thalès en complétant des figures contenant 4 points déjà placés. Par exemple trouver B' tels que OAB et OA'B' soient des triangles en position de Thalès.

On fait en sorte de suggérer les deux stratégies : proportionnalité et parallèlisme, par le choix des exemples proposés.
3- *Bilan élèves* : la variété des méthodes possibles.
4- *Bilan prof* : parallèlisme → proportionnalité : c'est Thalès
proportionnalité → parallèlisme : c'est la réciproque.
Situation courte qui peut se gérer de diverses façons, individuelle ou en groupes.

Contraintes : la pression des programmes donc du temps La gestion de la classe : organisation du travail, discipline. En particulier sur ce dernier point.

Que faire si seulement quelques élèves avancent ?
•Faire une mise en commun ponctuelle ?
•Envisager une élaboration progressive ?
•Faire des groupes de 2 qui se regroupent en groupes de 4 qui se regroupent en groupes de 8 puis exposent à la classe.

Que faire si certains élèves comptent se reposer sur les autres ?
Le groupe a proposé une évaluation individuelle courte pour laquelle la compréhension de la notion travaillée est indispensable et dont la note sera la moyenne des notes du groupe ayant travaillé ensemble.
Mais de l'avis des personnes habituées aux situation de recherche l'évaluation n'est pas quelque chose de motivant.
Le groupe a eu beaucoup de difficultés à dégager des indicateurs de réussite surtout pour l 'élève. Le prof aura par la suite plusieurs occasions de se rendre compte si la notion a été percue.

Deuxième partie de l'Atelier 1

Karine Godot et Denise Grenier
ERTé «Maths à modeler », Laboratoire Leibniz, Université Joseph Fourier, Grenoble

Le savoir scientifique se construit dans le domaine de la recherche, en particulier par la résolution de questions. Ceci nous a conduitees à étudier les possibilités d'existence et de fonctionnement d'**organisations didactiques** autour de situations de recherche. Les apprentissages visés sont essentiellement les savoirs " transversaux ", c'est-à-dire ceux intervenant dans de nombreux domaines scientifiques, tels que expérimentation, conjecture, argumentation, modélisation, définition, preuve, implication, structuration, décomposition/recomposition, induction.
Or, nous avons constaté que, d'une part, l'apprentissage de ces savoirs transversaux sont des objectifs constants déclarés « essentiels » depuis plusieurs réformes de programmes dans l'enseignement secondaire en France et que, d'autre part, il y a une difficulté intrinsèque à réaliser ces objectifs en classe.
Le type de situations que nous analysons ici fonctionne depuis longtemps dans des ateliers divers, à tous les niveaux scolaires, et sont étudiées d'un point de vue théorique depuis trois ans dans le groupe SIRC « Situations de Recherche pour la Classe », constitué de chercheurs de différents laboratoires et d'enseignants du secondaire [1]. Différents travaux de notre équipe sont liés à cette problématique, citons en particulier ceux de V. Deloustal-Jorrand (2001 et thèse en cours) sur le concept d'implication et ceux de C. Ouvrier-Buffet (2003) sur la construction de définition en mathématiques.

1. Hypothèses et questions de la recherche

En situation de recherche, le chercheur peut, et doit, pour faire évoluer sa question, choisir lui-même le cadre de résolution, modifier les règles ou en changer, s'autoriser à redéfinir les objets ou à modifier la question posée. C'est à ce type de pratiques que nous souhaitons confronter l'élève, car elles sont le fondement de l'activité mathématique. Or il semble que ce type de pratiques non seulement n'est pas usuel en classe, mais il est interdit à l'élève la plupart du temps.
Se pose alors la question des *conditions pour faire fonctionner, dans les*

[1]Pour en savoir plus : http ://mathamodeler.net

institutions didactiques, une activité mathématique de type « situation de recherche en classe », susceptible de permettre l'apprentissage de ce que nous avons appelé les savoirs « transversaux ».

Un modèle de la « Situation Recherche pour la Classe » (SRC)

Ce modèle est décrit et analysé dans Grenier & Payan (2003), nous en donnons ici l'essentiel, en particulier pour le situer par rapport au « problème ouvert » de Arsac, Germain & Mante (1988). Les SRC ont bien sûr des caractéristiques communes aux situations de Math-en-Jeans qui, elles, sont proposées dans un contexte hors classe (Audin & Duchet, 1992). Une SRC doit, pour nous, vérifier les critères suivants :
1. *Une SRC s'inscrit dans une problématique de recherche professionnelle.* Elle doit être proche de questions non résolues, car, nous faisons l'hypothèse que cette proximité à des questions non résolues - non seulement pour les élèves, mais aussi pour l'enseignant, les chercheurs- va être déterminante pour le rapport que les élèves vont construire à la situation.
2. *La question initiale est facile d'accès.* En particulier, pour que la question soit facile à comprendre par l'élève, le problème doit se situer hors des mathématiques formalisées.
3. *Des stratégies initiales* existent, sans que soient indispensables des pré-requis spécifiques.
4. *Plusieurs stratégies d'avancée* dans la recherche et plusieurs développements sont possibles, aussi bien du point de vue de l'activité mathématique (construction, preuve, calcul) que du point de vue des notions mathématiques.
5. *Une question résolue peut renvoyer à une nouvelle question.* La situation n'a pas de « fin », il n'y a que des critères de fin locaux.

Une partie de notre recherche vise à étudier les situations recherche présentées sous forme de jeu et introduites à l'aide d'un support matériel. Nous faisons l'hypothèse qu'une telle présentation peut être une aide à la dévolution du problème et cela dès l'école primaire. Ainsi, à travers les expérimentations que nous menons, nous cherchons à apporter des réponses aux questions suivantes :

- « Quel est le rôle du support matériel dans la dévolution des « situations recherche » ?
- « Quelles peuvent être les influences du support matériel sur les dé-

marches de recherche ? Quels peuvent être les apprentissages induits ? »
- Comment peut être gérée une SRC présentée sous forme d'un jeu matériel ?

Au cours des deux séances d'ateliers que nous avons menées, nous avons proposé deux situations aux participants répartis en groupe : la « roue aux couleurs » puis les « polyminos », que nous présentons ci-dessous. Chaque groupe avait, s'il le souhaitait, un support matériel à sa disposition. Après avoir cherché les différentes situations, nous avons analysé ensembles les travaux de recherche des différents groupes tant du point de vue mathématique que didactique : analyse des stratégies mises en oeuvre, des difficultés rencontrées et de l'apport du support matériel.

2 Présentation des deux situations

Les deux situations que nous avons choisi de proposer aux participants de l'UE sont parmi celles que nous avons expérimentées du primaire à l'université [2]. La première sur laquelle les participants ont cherché est celle que nous avons appelée « La roue aux couleurs. »

1 - La roue aux couleurs

Cette situation nous a été inspirée par un des problèmes parus sous la rubrique "Affaire de logique" dans le journal « Le Monde » [3] . Posé sous une forme différente, ce problème a notamment intéressé M.Gadner et G.Polya, aux dires de Gardner [4].

Enoncé proposé : le jeu de la roue aux couleurs

Un forain propose un jeu constitué de deux disques de tailles différentes, disposés de façon concentrique. Sur le plus grand disque, il pose un certain nombre de pions, n, tous de couleurs différentes.

Principe du jeu :

Le joueur doit placer sur le petit disque le même nombre de pions que sur le grand disque. Ces pions peuvent être de une, deux, trois, quatre

[2] vous trouverez d'autres situations sur notre site : http ://www.leibniz.imag.fr/LAVALISE et sur le CD Rom : « Les sept énigmes de K'stêt » édité par Génération 5.

[3] Le Monde du 10 juillet 2001

[4] Math circus, Martin Gardner, p. 106.

couleurs ou plus choisies parmi les couleurs disposées sur le grand disque par le forain.
On fait ensuite tourner le petit disque, cran par cran. Le joueur gagne si, dans chaque position du petit disque, un et un seul de ses pions est de la même couleur que celui qui lui correspond sur le grand disque.
Quelles sont toutes les façons que le joueur a de choisir et disposer ses pions pour gagner ?
L'énoncé du problème est très ouvert, puisque le nombre de pions que peut placer le forain ainsi que le nombre de couleurs que peut choisir le joueur ne sont pas fixés.

Eléments de résolution

Nous ne rentrerons pas dans une résolution complète de ce problème car il nous paraît intéressant, si vous n'avez pas participé à l'atelier, que vous aussi vous cherchiez, afin de saisir ce qu'implique de rentrer dans une démarche de recherche. Toutefois, si vous « séchez », vous trouverez en annexe un exemple de résolution rédigée par un des participants de l'atelier.
Il apparaît au regard de la résolution que le couple (n, k) constitue une variable de la tâche « recherche ». Selon ses valeurs, l'avancée dans le problème sera différente. En effet, les valeurs de cette variable peuvent être classées en deux catégories, qui correspondent à une phase de formulation et de validation différentes :

- cas où il y a plusieurs solutions : dans ce cas-là, la formulation et la validation consisteront en la donnée de solutions particulières, éventuellement complétée par l'énoncé de méthodes de construction générales
- cas où il n'y a pas de solution : la résolution comportera la formulation de la conjecture " il n'y a pas de solution " suivie d'une validation de la conjecture par le biais d'arguments mathématiques ou par l'exhaustivité des cas.

Par ailleurs, pour avancer dans le problème, il faut oublier les couleurs et considérer la position relative des pions les uns par rapport aux autres, ce qui permet l'énoncé de méthodes de construction générales. On peut introduire une variable supplémentaire, le décalage, défini différemment selon les valeurs du couple (n, k). Il s'agit par exemple, dans le cas (n, n) du décalage entre la position sur le disque extérieur et la position sur le disque intérieur et, dans le cas $(n, 2)$, du décalage entre la position sur le disque extérieur des deux couleurs choisies. On peut ainsi obtenir des arguments de preuve dans les cas où il n'y a pas de solution.

Analyse des productions des participants

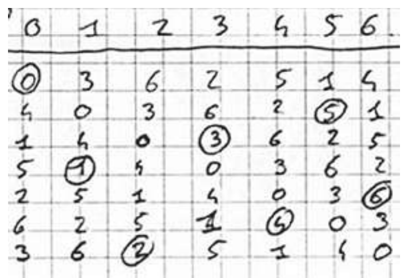
Les participants étaient répartis en 6 groupes. Dès le début, deux groupes ont choisi de ne pas utiliser le support matériel.

Stratégies de recherche

Compte tenu de l'ouverture du problème, les joueurs devaient choisir les valeurs du couple (n, k). Deux démarches de recherche sont apparues, indépendamment de l'utilisation du support :

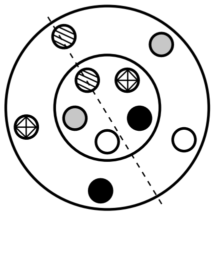
- étude progressive : étude des cas (1,1) (2,1), (2,2), (3,1), (3,2), (3,3)...etc., comportant notamment la recherche d'une, voire de plusieurs solutions, éventuellement complétée d'une méthode de construction générale pour le cas étudié.
- étude d'un cas général : (n, n) ou $(n, 2)$ ou $(n, 3)$, etc., et dans chaque cas, recherche d'une ou plusieurs solutions et généralisation, le cas plus étudié ayant été (n, n).

Les couleurs ont peu à peu été remplacées par leurs initiales puis par un codage par le biais de nombres. Les représentations des solutions ont été élaborées soit en conservant la roue soit à l'aide d'un tableau.



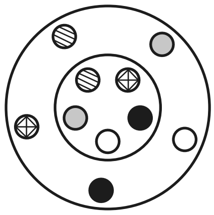
0	1	2	3	4	5	6
0	3	6	2	5	1	4
4	0	3	6	2	5	1
1	4	0	3	6	2	5
5	1	4	0	3	6	2
2	5	1	4	0	3	6
6	2	5	1	4	0	3
3	6	2	5	1	4	0

Plusieurs stratégies de recherche sont apparues. L'aspect circulaire de la roue a amené certains des groupes qui utilisaient le support matériel à chercher des solutions par le biais de considérations liées à la symétrie. Ainsi, ils ont abouti par exemple pour le cas (5,5) à :



Le codage numérique des couleurs a incité un groupe à trouver des solutions par le bais de considérations arithmétiques. Une fois les couleurs codées de 0 à n, ils ont cherché notamment à les placer en fonction de leur parité, en regroupant les pairs d'une part et les impairs d'autre part. On obtient ainsi par exemple pour (5,5) :

0 1 2 3 4
0 2 4 1 3



La majorité des groupes a finalement introduit le décalage entre la position sur le disque extérieur et celle sur le disque intérieur. Une méthode de construction générale a ensuite été énoncée : pour qu'une disposition soit solution, il faut qu'à chaque couleur soit associé un décalage différent, compris entre 0 et $n-1$, modulo n.

Difficultés rencontrées

Comme nous le supposions, trouver des solutions et des méthodes de construction générales n'a pas soulevé de grandes difficultés. Par contre, l'énoncé de la conjecture « il n'y a pas de solution » s'est avéré dans la plupart des cas plus problématique : comment être sûr qu'il n'y a pas de solution ? Deux types de questions sont apparus : soit la conjecture « il n'y a pas de solution » a été énoncée alors qu'elle était fausse, soit elle a mis longtemps a apparaître alors qu'elle était vraie ! Par exemple, plusieurs groupes qui ont étudié les cas (4,1), (4,2), (4,3) et (4,4) ont considéré qu'il n'y avait pas de solution à (4,2) alors qu'il y en a plusieurs. Ils ont cherché à le montrer par exhaustivité mais voilà, la liste des configurations qu'ils ont essayées n'était pas exhaustive, ils en avaient oublié ! Une fois le décalage introduit, la formulation de la conjecture est venue plus rapidement, accompagnée d'arguments de preuve, voire de preuves complètes comme celle que vous pourrez trouver en annexe.
Un groupe n'est pas parvenu à se détacher du support matériel. Suite à une approche progressive, il a découvert plusieurs méthodes de construction très attachées à ses stratégies de jeu, sans introduire de codage particulier ni de représentation des solutions. Hormis vers la fin du temps de recherche, où une synthèse était demandée, il ne prenait aucune note. Limité par les conditions matérielles, il n'a pas pu étudier des valeurs

de n et k élevées. La présence de ce groupe au sein de notre atelier a été pour nous très intéressante car nous y avons retrouvé de nombreux comportements que nous avions relevés chez les élèves qui ont participé à nos expérimentations préalables et que nous n'étions pas sûrs de trouver chez les enseignants.

Rôle du support

Suite à une discussion avec les participants, il apparaît que le support est une aide à la dévolution du problème. Ceux qui l'ont utilisé pensent qu'il permet de comprendre les règles du jeu et de mettre en place des stratégies de recherche. Toutefois, il peut ensuite devenir un obstacle en freinant voire en empêchant la formalisation, la mathématisation du problème initial, cela d'autant plus si aucune note n'est prise. Il a ainsi été mis en cause pour la difficulté à réaliser l'exhaustivité des positions étudiées pour le cas (4,2) : lorsque la recherche avec le support n'était pas accompagnée par un travail parallèle sur papier crayon, le support a induit l'oubli de certaines dispositions. De plus, son utilisation pour chercher des solutions devient « lourde » lorsque le nombre de pions devient important. L'étude des couples $(5, k)$ semble être une valeur décisive pour s'en détacher et chercher à formaliser.

Analogie avec ce qu'on fait des élèves de différents niveaux

Nous avons posé ce problème à des élèves de primaire (cycle 3), de $6^{\text{ème}}$, de $1^{\text{ère}}$ STI et de Deug $1^{\text{ère}}$ année (qui étaient les seuls à avoir préalablement chercher d'autres situations recherche). Chaque classe a cherché en groupes durant 4 ou 5 séances de 1 heure, chaque groupe disposait d'un support matériel. Nous pouvons considérer qu'hormis deux groupes chez les « cycle 3 » et un de $6^{\text{ème}}$ qui sont restés au stade du jeu, tous les autres sont entrés dans une démarche de recherche en mathématiques, plus ou moins élaborée.

Il n'y a pas de différences marquantes entre les dynamiques de recherche mises en place même si les niveaux scolaires sont différents, mise à part une méthode de recherche de proche en proche qui n'est apparue qu'en primaire. Plusieurs autres méthodes de construction de solution ont été proposées, quels que soient le niveau et les cas étudiés. Elles s'appuient sur les démarches de recherche. Dans les quatre classes, les décalages ont été introduits par plusieurs groupes, après 2 ou 3 séances de recherche. Toutefois, même si les méthodes découvertes sont similaires, leur formulation semble être influencée par l'utilisation ou non du support matériel.

Parmi les groupes de l'université, ceux qui ne l'ont utilisé qu'au début de leur recherche pour rapidement se tourner vers le support papier-crayon, comme les participants de l'UE, ont introduit un codage numérique des couleurs et une représentation du problème à l'aide d'un tableau, ils ont donné des méthodes de construction qui tendaient à se détacher de la description de ce qu'il faut faire, en utilisant un vocabulaire mathématique et en cherchant à généraliser. Les autres groupes, pour leur part, sont restés plus proches du commentaire d'une action. Voici par exemple, le texte d'une méthode de construction pour le cas (6,2) énoncée par un des groupes de DEUG lorsqu'il utilisait le support puis lorsqu'il s'en est détaché :

Avec support :
« on choisit deux couleurs consécutives et non opposées (par exemple R et J). On les place alternées sue la roue centrale. Si un R central arrive sur une R externe, il y a un R sur le J externe. Si un J est sur le R externe il y a un J sur le J externe. Si on choisit deux couleurs consécutives dans tous les cas, il y a un B à gauche d'un J dans la roue centrale donc on ne peut pas gagner à tous les coups. Si on choisit deux couleurs opposées (exemple B et V), on met 4 B et 2 V opposées. Si un V est sur le B alors, il y a un V sur le V et vice versa. On gagne à tous les coups. »

Sans support : *« Pour n pair, $k = 2$, on prend des couleurs avec un décalage multiple de $2 < n$ à l'extérieur et on les intercale à l'intérieur. »*

Même si ces élèves ont eu besoin de plus de temps que les participants de l'UE, tous les groupes ont émis des conjectures, qu'ils aient ou non mis en place des démarches de recherche organisées. Ceux qui ont procédé par tâtonnements ont énoncé des conjectures liées à des cas particuliers, les autres les ont complétées par de conjectures plus générales. Parmi eux, tous sont parvenus à émettre la conjecture qu'il n'y a pas de solution lorsque cela était le cas. Toutefois cela est apparu plus facilement à l'université. Nous faisons l'hypothèse que cette différence peut être due à la conception répandue chez les élèves de primaire et secondaire qu'un problème a toujours une solution, vu que cela est vrai pour la majorité des exercices qui leur sont proposés. Les étudiants de l'université, quant à eux, ont pu être confrontés à des exercices sans solution dans le cas de la résolution d'équations et ont de toute façon rencontré cette possibilité dans les situations recherche qu'ils avaient déjà étudiées.

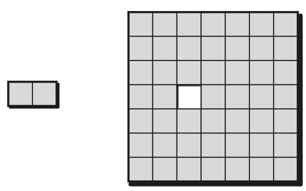
Enfin, mis à part 3 groupes de l'université, les autres se sont appuyés sur l'exhaustivité des cas (qui n'était pas toujours garantie, comme lors de l'atelier !) pour prouver l'absence de solution et ont très peu cherché des arguments de preuve.
Il n'y a donc pas de différences notoires quant à la dévolution aux élèves du problème et aux principaux résultats obtenus aux différents niveaux. Cependant, une différence majeure semble être liée à la conception que peuvent avoir les élèves sur la notion de solution. Pour le chercheur, comme pour les participants de l'UE, une solution est l'énoncé d'une forme générale. On retrouve cette idée chez les étudiants de DEUG : une fois trouvé une configuration, ils cherchaient à expliciter une méthode de construction. Pour les autres, les solutions étaient dans un premier temps associées au choix des couleurs, certains en « avaient plein plein » mais elles étaient en fait toutes identiques aux yeux du chercheur…

2- Les polyminos

Cette situation a été expérimentée dans notre équipe pendant plusieurs années et elle est maintenant régulièrement utilisée comme situation de formation dans différents modules universitaires. Une étude en est faite dans Grenier-Payan (1998). Nous en rappelons ici certains éléments.

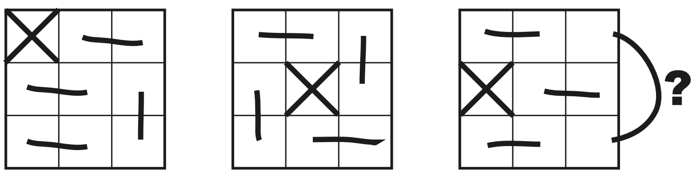
Le problème est un problème de pavage (recouvrement sans « chevauchement » ni « débordement », d'un certain ensemble de cases). La question de savoir si un polymino donné est pavable par des copies d'un même polymino plus petit est une question ouverte qui, posée de manière aussi générale, n'a aucune chance de pouvoir être résolue. Les chercheurs s'intéressent actuellement à des questions particulières, par exemple à paver des sous-ensembles de la grille carrée par des polyminos plus petits.

On se met alors d'accord sur un point de départ de la recherche, par exemple la question : peut-on paver, à l'aide de dominos, un carré privé d'une case (la case pouvant être choisie n'importe où) ?

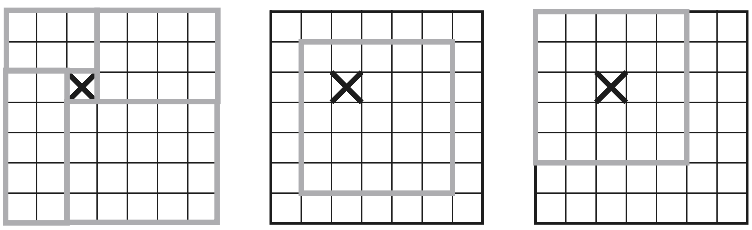


Eléments de résolution

Des stratégies initiales existent. Il suffit d'avoir une perception de l'espace qui permette d'identifier un ensemble de cases et de comprendre ce qu'est un pavage, compétences développées dès la maternelle. La notion de parité intervient fortement, mais elle n'est pas indispensable, la situation est aussi un moyen de la faire émerger ou de l'approfondir.
La dévolution du problème est immédiate : des essais de pavage sur l'exemple de départ permettre de s'approprier la question, mais sans la résoudre complètement. Si l'on veut avancer dans le problème, il est nécessaire de changer la consigne : on va travailler sur d'autres carrés plus petits (carrés 3×3 ou 5×5). Lorsqu'on ne parvient pas à paver, on peut remarquer que pour recouvrir certaines cases on n'a pas le choix ; on obtient ainsi des preuves d'impossibilité, par « forçage ».



On a constaté que pour représenter de manière simple un domino sur le carré, *les élèves vont créer leurs propres ostensifs*. Les modes de représentation choisis permettent de visualiser la relation d'adjacence entre cases, qui va jouer un rôle important dans la situation.
Le repérage, sur le carré 3×3 et éventuellement 5×5, des cases dont la suppression de l'une quelconque d'entre elles permet de paver, induit une conjecture plus générale : les cases que l'on peut enlever se situent sur la grille en alternance avec celles que l'on ne peut enlever.
Des preuves sur la possibilité de paver sont données par divers découpages, dont des découpages inductifs. Par exemple :



Les preuves d'impossibilité sont obtenues par structuration de l'objet, en jouant sur la forme colorée par les « bonnes » cases : puisqu'un domino couvre une case « noire » et une case « blanche », un polymino pavable est nécessairement « équilibré » (il contient autant de cases noires

que de cases blanches dans une bicoloration « en damier »).
Le problème a été présenté lors de l'UE sur un autre exemple : un carré 8×8 avec deux « trous ».
Les productions des participants ne seront pas décrites ici, pour deux raisons. D'une part, le temps imparti dans cet atelier pour cette situation n'a pas été suffisant pour que l'on puisse analyser comment elle peut se développer. D'autre part, les types de stratégies initiales observées sont conformes à notre analyse *a priori* développée ci-dessus : étude de petits cas, essais/erreurs, conjectures, contre-exemples, etc.

3. Les connaissances en jeu et le milieu pour une SRC

Notre recherche expérimentale le confirme, il y a des apprentissages en jeu, et ce sont ceux qui sont constitutifs de toute activité de recherche mathématique : l'argumentation, l'activité de conjecturer, celle de structurer (un objet), la preuve, la modélisation, tous plus ou moins présents selon le type de SRC choisi. C'est ce qui donne une légitimité institutionnelle à ces situations.

Les éléments du triplet (question, conjecture, preuve) sont les invariants de la SRC.
Les variables didactiques associées sont **des variables « de recherche »**, au sens où elles déterminent la compréhension et l'intérêt de la question, son ouverture à de nouvelles questions, l'élargissement des stratégies de recherche, les possibilités de transformation du problème (modélisation).
Le critère de réussite pour l'élève n'est pas, comme dans les exercices usuels, la résolution de la question (que la solution soit juste ou fausse). Dans les SRC, la résolution du problème est souvent partielle. Un critère de réussite « provisoire » peut être que l'on a émis une conjecture forte, ou simplement résolu un cas particulier.
Le critère de réussite pour l'enseignant est la reconnaissance d'apprentissages liés au savoir (question, conjecture, preuve).

4. Position des acteurs dans la situation didactique comportant une SRC

Dans une SRC, les acteurs (élèves et enseignants) sont dans des positions différentes de celles qu'ils ont l'habitude d'occuper dans une situation didactique classique.

• *L'élève est en position de chercheur* car il est dans une tâche de production de quelque chose de « nouveau » qui n'est pas seulement nouveau pour lui. Nos données expérimentales montrent que, pour l'élève, le fait de savoir qu'il cherche à résoudre un problème non résolu ou partiellement résolu, modifie le rapport qu'il a avec son activité.
• *L'enseignant est en double position de chercheur et de gestionnaire de la situation.* Pour le pôle recherche, sa position est plus proche de celle de l'élève que dans une situation classique, car il n'est pas nécessairement détenteur des solutions du problème. *Mais il est (censé être) détenteur des savoirs transversaux* et avoir des critères d'évaluation sur leur validité. C'est une position qui se révèle difficile, parce qu'il n'est pas d'usage pour un enseignant d'avoir une activité de recherche. Dans la gestion des SRC, le contrôle par l'enseignant de l'activité de l'élève se fait d'abord en fonction de l'avancée dans la résolution du problème et aussi par rapport *aux objectifs d'apprentissage*, les savoirs transversaux. Les notions mathématiques susceptibles d'apparaître comme des outils de résolution peuvent être fournies par l'enseignant.

Le « jeu d'obligations » entre l'élève et l'enseignant porte bien sur ces savoirs transversaux. Les règles de base associées sont celles habituelles du débat scientifique (Legrand, 1993).

Alors que les programmes les évoquent clairement, trois aspects fondamentaux des SRC sont absents dans les manuels et les pratiques de classe. Nous les avons décrits dans Grenier-Payan 2002, nous les reprenons ici.

- *L' « enjeu de vérité »*. En classe, ce qui est à prouver est la plupart du temps annoncé comme vrai (« démontrer que »), il n'y a plus d'enjeu de vérité, sauf si l'énoncé a un caractère très paradoxal (ce qui est très rare !). Lorsque la question de la vérité d'une affirmation est posée, cette vérité n'est un enjeu que pour l'élève (le professeur sait), ce qui enlève une part d'intérêt à la découverte. L'enjeu est alors pour lui d'apprendre, non de produire une connaissance.
- *L'aspect « social » de l'activité*. Dans une SRC, il peut y avoir un vrai enjeu social de production mathématique, même s'il est local (groupe + professeur + chercheur). Ceci est absent dans une situation didactique usuelle : seul l'élève est en situation de recherche, ce n'est pas l'ensemble du groupe qui ne sait pas et, du coup, le seul intérêt pour lui est de montrer qu'il est « capable » de retrouver la solution.

- *L'aspect « recherche »*. Dans les manuels et les pratiques enseignantes, il est explicitement déclaré que, pour résoudre un problème et aussi pour prouver, « on ne doit utiliser que les propriétés du cours ou celles d'une liste donnée ». Cette consigne, qui induit une épistémologie particulière - contestable - de la preuve, est contradictoire avec l'activité du chercheur et avec la démarche scientifique : le chercheur utilise des résultats locaux (trouvés en cours de la recherche) ou même des propriétés encore à l'état de conjectures (qui devront être prouvées ou infirmées ensuite), parce qu'elles permettent d'avancer.

5. Propositions de conditions de mise en place

Tout d'abord, nous pensons qu'il est préférable de f**aire chercher les élèves par groupes** de 3 ou 4. Le fait de travailler en groupe permet, compte tenu de nos observations préalables, le débat, l'argumentation et évite les découragements chez les élèves qui ne parviennent pas à établir des méthodes de construction et cherchent à trouver des solutions avec un nombre élevé de couleurs. De plus, il semble permettre de valoriser les élèves en difficulté, ils sont amenés à débattre avec ceux qui réussissent habituellement en mathématiques et se retrouvent là, finalement, à « connaissances égales ».
Par ailleurs, la recherche se déroulant sur plusieurs séances, nous donnons à chaque groupe une **feuille de recherche** sur laquelle les élèves peuvent consigner quand ils le veulent les résultats de leur recherche qu'ils jugent importants et sur lesquels ils peuvent s'appuyer lors des séances suivantes. Il est important de préciser qu'il n'y a pas que les résultats finaux qui doivent apparaître sur cette feuille mais aussi les essais, les résultats partiels, les conjectures énoncées même si elles ne sont pas démontrées... Nous faisons l'hypothèse que ces feuilles sont une aide à la recherche car elles permettent de faire un lien entre les différentes séances, qu'elles favorisent les phases de formulation et incitent la mise en place d'un codage. Elles semblent aider les élèves à juger ce qui est important ou pas et à ne pas être perdus d'une semaine à l'autre. De plus, elles montrent l'importance de la clarté de ce qui est noté si on veut s'en resservir.
Dans l'objectif d'inciter les élèves à décontextualiser et généraliser, il apparaît nécessaire soit de proposer, après plusieurs séances de recherche, **au moins une séance sans le support matériel**, soit de leur demander de résoudre des cas avec un nombre élevé de couleurs, soit de prévoir un temps où les groupes disposent du support mais où ils ne choisissent

pas les couleurs du forain. Alors, si le temps de recherche est limité, les méthodes de recherche par tâtonnements sont invalidées au détriment des méthodes de recherche organisées qui sont mises en valeur car plus efficaces.
D'autre part, après plusieurs séances de recherche avec le support, nous mettons en place **une séance de mise en commun** pour que les groupes communiquent leurs résultats, leurs méthodes, leurs conjectures et éventuellement débattent. Elle peut aussi être l'objet d'un mini séminaire si plusieurs classes sont impliquées dans la recherche de situations recherche.
Enfin,si l'on ne peut consacrer à ce type d'activité qu'un temps réduit et si l'on veut que les élèves avancent suffisamment dans la situation pour énoncer des conjectures, des méthodes, des preuves, on peut fermer en partie l'énoncé et orienter la recherche plus particulièrement sur l'étude de certains cas. Par exemple, pour le cas de la roue aux couleurs, les cas (n, n) ou $(n, 2)$ sont les plus intéressants car ils comportent des cas où il y a des solutions et d'autres où il n'y en a pas. Pour la situation des polyminos, le choix du problème « pavage d'un carré 8×8 à deux trous avec des dominos » ou du problème « pavage d'un carré à un trou avec des triminos » induit des stratégies et des apprentissages différents, tout en conservant une part « recherche » à la situation.

Références bibliographiques

Arsac G., Germain G., Mante M. (1988) *Problème ouvert et situation-problème*. Ed. IREM de Lyon.
Audin P., Duchet P. (1992) La recherche à l'école : Math.en.Jeans, *Séminaire de Didactique des Mathématiques et de l'Informatique*. nř121, pp. 107-131, Grenoble 1.
Deloustal-Jorrand V. (2001) Quelques aspects du concept d'implication dans l'enseignement et chez des futurs enseignants. *Petit x* n°55, ed. IREM de Grenoble.
Godot K. (2002) L*es situations recherche comme situations d'apprentissage. Etude didactique et analyse d'une situation expérimentale* (la roue aux couleurs), mémoire de DEA,UJF, 2002.
Godot K. (2003) Situations recherche et jeux mathématiques : premières analyses, *actes 12ème école d'été de didactique*, Corps, Juillet 2003, France.
Grenier D. et Payan Ch. (2003) Situation de recherche en classe : essai de caractérisation et proposition de modélisation, *cahiers du séminaire national de recherche en didactique des mathématiques,* Paris, 19 Octobre 2002.
Grenier D., Payan Ch.(1998) Spécificités de la preuve et de la modélisation en Mathématiques Discrètes, *Recherches en didactique des mathématiques,* vol. 18.2, pp. 59 -100, Ed. La Pensée Sauvage, Grenoble.
Grenier D. (1995). Savoirs en jeu dans des problèmes de combinatoire in *Différents types de savoirs et leur articulation.*, pp.235-25, Ed. La Pensée Sauvage, Grenoble.
Lakatos I. (1976). *Preuves et réfutations*. Paris : Hermann Ed., 1985.
Legrand M. (1993) Débat scientifique en cours de mathématiques et spécificité de l'analyse, *Repères IREM n°10*, pp.123-159. Topics editions.
Ouvrier-Buffet C. (2003) *Construction de définitions / construction de concept : vers une situation fondamentale pour la construction de définition en mathématiques. . Etude épistémologique et didactique de la définition. Etude théorique et expérimentale auprès d'étudiants de 1ère année d'université.* Thèse de l'Université Joseph Fourier, décembre 2003.

ANNEXE

Problème du forain et des n couleurs

François Lo Jacomo

Un forain dispose n pions de n couleurs distinctes sur un grand cercle (appelé « cercle extérieur ») comme sommets d'un polygone régulier. Est-il possible de placer sur un petit cercle concentrique (appelé « cercle intérieur »), comme sommets d'un polygone régulier, n pions de k couleurs distinctes de sorte que quelle que soit la manière de tourner le cercle intérieur, un et un seul pion de ce cercle intérieur soit en face d'un pion de même couleur du cercle extérieur ?

Réponse

Oui dans tous les cas sauf les deux cas suivants :
1) si $k = 2$ et n est premier

2) si $k = n$ ou $k = n - 1$ et k est pair.

Démonstration

Numérotons les couleurs de 0 à $n - 1$, et appelons $g(x)$ la couleur du pion qui, en position initiale, se trouve en face de la couleur x. Après une rotation de $2q\pi/n$, c'est la couleur $g(q + x)$ qui se trouve en face de la couleur x, compte tenu qu'on travaille dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. L'hypothèse signifie que pour tout q, l'équation $g(q+x) = x$ admet une et une seule solution : si l'on pose $f(x) = x - g(x)$, pour tout q, l'équation $f(q + x) = q$ admet une et une seule solution. En d'autres termes, la fonction f est bijective, alors que la fonction $x - f(x) = g(x)$ prend exactement k valeurs distinctes, les k couleurs que l'on choisit pour les pions du cercle intérieur.

Il s'agit donc de chercher les bijections f de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ dans lui-même telles que $x - f(x)$ (ou, ce qui revient au même, $f(x) - x$) prenne exactement k valeurs distinctes.

On utilisera le fait que si $f(x)$ est bijectif de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ dans lui-même, $\Sigma f(x) = 0 + 1 + ... + (n - 1) = n(n - 1)/2$. Si n est pair $(n = 2m)$, cette somme vaut $2m^2 - m$, soit m modulo n, alors que si n est impair ($n = 2m + 1$), cette somme vaut $m(2m + 1) = mn = 0$ modulo n. Dans tous les cas, f étant bijectif, $\Sigma f(x) - x = 0 \pmod{n}$.

Si $k = 2$ et n premier, le problème n'admet pas de solution. En effet, si l'on appelle a et b les deux valeurs prises, a étant prise t fois et $b\,(n - t)$ fois, $\Sigma\,(f(x) - x) = ta + (n - t)b = t(a - b) \pmod{n}$. Or n étant premier, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un corps, et pour avoir $t(a - b) = 0 \pmod{n}$, il faut soit que $t = 0 \pmod{n}$, soit que $a = b \pmod{n}$: dans un cas comme dans l'autre, il n'y a plus deux couleurs mais une seule. Par contre, si n est non premier, soit d un diviseur de n autre que 1 et n. Posons $f(x) = x + d$ si x est divisible par d, $f(x) = x$ sinon. $f(x)$ est évidemment bijective : elle permute circulairement l'ensemble des multiples de d et est l'identité sur l'ensemble des non-multiples de d. Or il est clair que $f(x) - x$ prend exactement deux valeurs : d et 0.

Si n est pair ($n = 2m$), l'hypothèse $k = n$ signifie que la fonction $f(x) - x$ est elle aussi bijective, donc que $\Sigma f(x) - x = m \pmod{n}$, ce qui n'est pas possible. Par contre, on peut avoir $k = n - 1$: il suffit que $f(x) - x$ prenne deux fois la valeur 0 et aucune fois la valeur m pour que $\Sigma f(x) - x$ soit nul modulo n, ce qui suggère au moins une solution : $f(x) = 2x$ si $x \in A = 0, ..., m - 1$, $f(x) = 2x + 1$ si $x \in B = m, ..., 2m - 1$. En effet, cette fonction f est bien bijective car elle prend toutes les valeurs paires pour $x \in A$, toutes les valeurs impaires pour $x \in B$; $f(x) - x$ s'annule en 0 et en $2m - 1$, et prend toutes les valeurs de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ hormis m.

Si n est impair, $n = 2m + 1$, pour avoir $k = n$ il suffit de choisir la fonction $f(x) = 2x$, qui est évidemment bijective de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $f(x) - x = x$ étant lui aussi bijectif. Par contre, si $k = n - 1$, soit a la valeur prise deux fois et b la valeur jamais prise, $\Sigma f(x) - x = (0 + ... + 2m) + a - b = a - b \pmod{n}$, il faudrait donc que $a - b = 0 \pmod{n}$ ce qui n'est manifestement pas possible.

Dans tous les autres cas, le problème est soluble. Commençons par le cas où k est impair, $k = 2p + 1$. Si $x \in \{0, ..., p\}$, $f(x) = 2x$; si $x \in \{p + 1, ..., 2p\}$, $f(x) = 2x - (2p + 1)$, et si $x \in \{2p + 1, ..., n\}$, $f(x) = x$. Il est clair que f est bijective, et que $f(x) - x$ prend toutes les valeurs de $-p, \cdots, 0, \cdots, p$ soit $2p + 1$ valeurs distinctes modulo n, vu que $n \geqslant k = 2p + 1$.

Si k est pair, $k = 2p$, avec $p \geqslant 2$ et $n \geqslant k+2$, partitionnons notre ensemble $\mathrm{E} = 0, ..., n-1$ en :
• l'ensemble $\mathrm{A} = \{0, ..., 2p-1\}$,
• un nombre quelconque d'ensembles B_i contenant chacun entre 2 et p+1 entiers consécutifs : $\mathrm{B}_i = q_i + 1, \cdots, q_{i+1}$ pour $1 \leqslant i < j$, avec $q_1 = 2p - 1 < \cdots < q_j = n-1$ et, pour tout i, $2 \leqslant q_{i+1} - q_i \leqslant p+1$. Ceci ne serait pas possible si n était égal à k ou $k+1$, mais dès lors que $n \geqslant k+2$, c'est facile à réaliser : on peut par exemple choisir des ensembles de p éléments jusqu'à ce qu'il reste moins de p éléments, s'il n'en reste qu'un seul on l'ajoute au dernier ensemble pour former un ensemble de $p+1$ éléments, s'il en reste au moins deux, on en fait un nouvel et dernier ensemble.

Dans l'ensemble A, on pose :
si $x \in 0, ..., p-1,\ f(x) = 2x+1$, et si $x \in \{p, ..., 2p-1\},\ f(x) = 2x-2p$. f réduite à A est manifestement une permutation de A, et sur A, $f(x)-x$ prend toutes les valeurs de $-p, \cdots, p$ sauf 0, soit $2p$ valeurs distinctes modulo n vu que $n > 2p$: appelons $\mathcal{C}$ cet ensemble.

Dans l'ensemble B_i, on pose : $f(x) = x+1$ si $x \in \{q_i+1, \cdots, q_{i+1}-1\}$, et $f(q_{i+1}) = q_i + 1$. f réduite à B_i est une permutation de B_i, de sorte que, sur l'ensemble E tout entier, f est clairement bijective. Par ailleurs, si B_i a p_i éléments, $f(x) - x$ prend deux valeurs sur B_i : 1 et $1 - p_i$. Aucune des deux n'est nulle, et toutes deux appartiennent à $\mathcal{C}$ vu que $2 \leqslant p_i \leqslant p+1$.

On en déduit que $f(x) - x$ prend exactement $2p$ valeurs distinctes sur E (les $2p$ éléments de $\mathcal{C}$), ce qui achève la démonstration.

Démarche heuristique

Il a fallu un certain temps pour s'approprier le problème et tester les premiers cas avec le jeu, notamment lorsque $n = 4$, initialement avec des erreurs (c'est en revenant dessus à la demande de Denise Grenier que l'on a constaté que (4, 3) fournissait des solutions). Le cas $k = 1$ étant d'emblée évident, c'est ensuite le cas $k = n$ pour n impair qui nous a semblé le plus immédiat : il suffit de placer les couleurs dans l'ordre inverse sur le cercle intérieur (ce qui revient à $f(x) = 2x$), Si à chaque position du cercle intérieur on associe la position de la couleur qui coïncide, aux positions successives du cercle intérieur on associe une étoile du cercle extérieur. D'autres étoiles fourniraient d'autres solutions, mais l'important est de savoir s'il existe au moins une solution, et de se rendre compte que cela ne se généralise pas à n pair car il n'existe pas de telles étoiles dans un polygone ayant un nombre pair de côtés (cf. étoile à 5 branches et étoile de David).

A cette occasion, Michel Tixier et moi sommes revenus sur $n = 3$, et on a constaté que (3, 2) ne marchait pas alors que (4, 3) marche. La démarche de Michel Tixier était d'ailleurs plus exhaustive et systématique que la mienne, car je cherchais seulement les notions qui allaient être opérationnelles pour la solution générale. J'entendais les groupes voisins utiliser l'expression « point fixe » et je me suis senti obligé de formaliser sous forme de fonction de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ dans lui-même, mais c'était difficile à mettre en place, et il a fallu longtemps pour que cette approche fonctionnelle soit pleinement opérante dans la mesure où, pour un certain nombre de cas, j'avais du mal à traduire en termes de fonctions ce que je voyais en termes de couleurs. Par exemple, pour le cas $(n, 2)$ lorsque n est pair, il était clair que je choisissais deux couleurs diamétralement opposées, à tout diamètre du cercle extérieur j'associais l'une des deux couleurs arbitrairement, cela fournissait une solution visuellement évidente mais difficile à décrire en termes de fonctions. Cela revient en fait à $f(x) = x + h(2x)$, h étant une fonction quelconque de l'ensemble des nombres pairs de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ dans lui-même, mais c'est peu avant de rédiger proprement la solution ci-dessus que j'en ai pris conscience.

Le cas $k = 2$ posait problème pour n impair, mais l'idée de l'expérimenter sur $n = 5$ me gênait, je sentais que c'était à ce stade-là qu'il fallait rompre avec l'approche exhaustive pour approfondir la formalisation. D'ailleurs, il est connu que la perception de la quantité n'est pas la même à partir de 5, on peut percevoir globalement jusqu'à 4 alors qu'à partir de 5 il faut compter. J'ai introduit d'abord $g(x)$ en plaçant sous la ligne $1, 2, \cdots n$ (ce n'est qu'après que je suis passé à $0, 1, \cdots, n-1$) la ligne : $g(1), g(2) \ldots g(n)$, puis la ligne $g(2), \ldots g(n)$, $g(1)$, etc. en faisant tourner de telle sorte que c'est $g(x) - x$ qui était bijectif. J'introduisais $f(x) = g(x) - x$, et c'est $f(x) + x$ qui devait prendre k valeurs. Ce problème de signe ne modifiait pas le raisonnement, mais cela compliquait l'explicitation de f, et cela m'a gêné jusqu'au moment de rédiger la présente solution, où j'ai décidé de faire tourner dans l'autre sens pour faire apparaître $f(x) - x$ (initialement j'avais $x - f(x)$, ce qui était moins compliqué à manipuler que $f(x) + x$, néanmoins non optimal).

Dans le cas $k = 2$ pour n impair, je raisonnais en termes ensemblistes : j'introduisais l'ensemble A des éléments pour lesquels f prenait une des valeurs a, l'ensemble B des éléments pour lesquels f prenait l'autre valeur b, et pour que $f(x) + x$ soit bijectif il fallait que A translaté de $(b - a)$ soit égal à A ; j'avais souvenir d'une démonstration qu'un tel sous-ensemble n'existait pas, sous réserve que - c'est en rédigeant que je m'en suis souvenu - cette démonstration ne marchait que pour n premier. Dès lors que n est non premier, il suffisait de partitionner le polygone extérieur en sous-polygones unicolores pour trouver facilement une solution. Exprimer cette solution en termes fonctionnels (cela revient à choisir $f(x) = x + h(dx)$ avec h quelconque de l'ensemble des multiples de d dans lui-même) m'a demandé plusieurs jours. Gilles Godefroy, à qui j'ai mentionné mon résultat, avait de son côté travaillé sur le cas $k = n$ pour n pair. Cela m'a incité à revenir sur ce cas.

J'ai assez vite vu la solution dans ce cas, liée à la somme de n entiers consécutifs qui n'est pas divisible par n lorsque n est pair. Puis, il m'est apparu que la solution pour $k = 2$ lorsque n n'est pas premier pouvait se généraliser à tous les $k \leqslant d$ si $n \geqslant d^2$ est divisible par d.

J'ai alors étudié le cas $k = n - 1$ lorsque n est pair : il suffisait de faire tomber l'argument que la somme des $f(x) - x$ était non nulle, et pour cela choisir deux fois un nombre et exclure le nombre diamétralement opposé. Cela m'a donné presque aussitôt la réponse pour $k = n - 1$ lorsque n est impair, car le fait que cela se ramenait à $a - b = 0$ semblait assez immédiat.

L'idée était alors de généraliser au cas $k = n-3$, $k = n-(2p+1) \ldots$ pour n pair, avec une fonction $f(x) = 2x$ sur la première moitié de l'ensemble E, $f(x) = 2x + 2p$ sur la seconde moitié. Les notations n'étaient pas optimales à l'époque, et je mettais un certain temps à voir l'ensemble des valeurs effectivement prises par $f(x) + x$ puisque c'est encore en ces termes que j'abordais le problème. Par ailleurs, cette démonstration ne semblait pas généralisable au cas $k < n/2$.

Très souvent, j'avais envie d'utiliser des inégalités pour décrire les sous-ensembles de E, bien que je sois conscient qu'il n'y avait pas de relation d'ordre dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Il restait à voir le cas $k = 3$ pour $n = 8$ ou n premier. Initialement, j'ai cherché en termes ensemblistes deux ensembles A et B tels que $(\mathrm{A} + a) \approx (\mathrm{B} + b) = \mathrm{A} \approx \mathrm{B}$, mais cela ne menait pas à grand-chose. Par expérimentation, je me suis rendu compte que les cas $n = 7$ et $n = 8$ n'étaient pas différents pour $k = 3$, ce qui m'a conduit au fait que $k = 3$ était soluble pour tout n, et c'est en cherchant à rédiger cette solution que je me suis pleinement approprié la formalisation en termes fonctionnels et que je me suis convaincu qu'il devait exister des fonctions simples permettant de résoudre ce problème dans tous les cas. J'ai alors construit la fonction présentée ci-dessus pour n quelconque et k impair, qui résolvait entièrement le cas k impair.

Le cas k pair m'a demandé plus de temps. J'ai voulu construire une fonction identique, mais il fallait qu'une telle fonction ne soit pas constructible dans les cas où j'avais déjà démontré que le problème n'admettait pas de solution, donc $k = 2$ et $k = n$ ou $n - 1$. Pour $k = 2$, ce n'était pas très difficile, mais pour $k = n$ ou $n - 1$, je cherchais initialement une fonction qui soit la fonction identité pour $x \in \mathrm{A}$, et je ne comprenais pas pourquoi le complémentaire de A devait avoir au moins deux éléments. Mais sur A, il n'était pas possible de construire une fonction telle que la seule valeur non atteinte par $f(x) - x$ soit autre que zéro, vu que la somme des valeurs prises par $f(x) - x$ est nécessairement nulle et $f(x)$ doit être une permutation de A. Cela m'a conduit, après quelque tâtonnement, à la solution rédigée ci-dessus.

A cours de la rédaction, j'ai encore dû optimiser des notations et placer en tête l'argument que la somme des $f(x) - x$ était nulle puisque ceci revenait à plusieurs endroits de la démonstration. Passer de la solution à la rédaction d'une solution publiable n'est pas instantané, d'autant que la seule formulation en termes clairs de l'énoncé (que je n'avais pas copié lors de la séance) n'est pas si simple que cela, et c'est une partie du travail de recherche - même s'il commence lorsque la recherche proprement dite est terminée -, d'autant que pendant la rédaction il est encore possible de trouver des difficultés que l'on avait sous-évaluées et qui, parfois, remettent en cause la démonstration.

Pour conclure, j'ai eu la sensation, dans l'après-midi qui a suivi la séance, que les résultats que j'avais démontrés étaient moins intéressants pour vous que si je vous avais donné une démonstration fausse du cas $k = 2$ pour n impair. Malgré toute l'estime que j'ai pour la « grammaire des fautes » et son intérêt didactique, cette réaction était d'une part quelque peu vexante, d'autre part quelque peu étonnante, car les démonstrations fausses, dans l'enseignement, ce n'est pas ce qui manque, et je ne vois pas ce que mes erreurs vous auraient apporté de plus que toutes celles que vous avez déjà.

ATELIER 2

MATh.en.JEANS, chercher, chercher à faire, faire chercher, apprendre, faire apprendre, apprendre à faire chercher , apprendre à faire faire, aimer, chercher à aimer, aimer chercher, apprendre à aimer chercher, etc.

Association MATh.en.JEANS ; Pierre Audin (Palais de la découverte) ;
Pierre Duchet (CNRS)
Compte rendu de l'atelier :
Pierre Audin, Pierre-Henri Bonnet, Aurelia de Crozals, Pierre Duchet,
Agnès Duranthon, Françoise Pawlowski

Situations-recherche : quelques repères théoriques

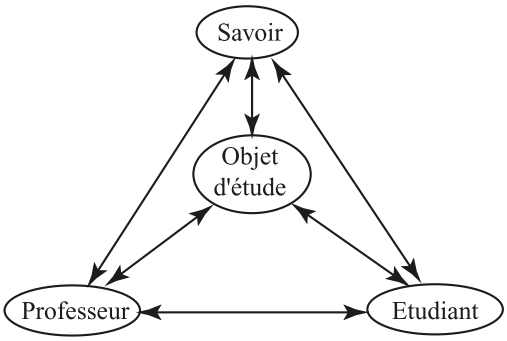
La recherche « experte » (celle des mathématiciens) et la recherche « novice » (celle des élèves dans un atelier MATh.en.JEANS) sont des activités similaires, conformes aux mêmes principes.

1) Un objet de recherche : problématique, présent, central et permanent

A la différence de l'enseignement, où *Savoir* et *rapport au Savoir* jouent des rôles dominants, la recherche s'organise autour d'un *Objet de science* (« *objet de recherche* », «*objet d'étude* »).

Objet « à » savoir et non objet « de » savoir, l'objet de savoir est un morceau de réalité (donnons pour exemple « les champs de la vallée du Nil ») qui pose question (les crues du Nil effacent les formes), autour duquel se construisent des pratiques (l'arpentage) et des savoirs (« géométrie plane »), l'objet de science est là avant son étude (objet d'ignorance et de questionnement), pendant son étude (référent et contrôle) et demeure après son étude (objet de connivence, lieu d'investissement des savoirs et de nouveaux questionnement).

Pour modéliser et comprendre le jeu des acteurs dans un atelier de recherche, il faut enrichir le modèle traditionnel de la Didactique, et au triangle « Savoir-Maître-Elève », sbstituer un tétraèdre.
N.B. Dans le dispositif MATh.en.JEANS,
« Professeur » = « enseignant + chercheur » et « Etudiant » = « Elève » alors que dans la recherche experte, « Professeur » = « directeur de recherche » et « Etudiant » = « chercheur ».



2) Une interaction directe entre l' « étudiant » et son « objet d'étude »

La confrontation entre un sujet « étudiant », qui cherche, et un objet « étudié », qui résiste, conduit à une rencontre effective. La relation sujet-objet qui se noue n'est ni soumise à la médiation du « Professeur », ni assujettie à des savoirs préalablement définis.

3) Une construction de connaissances nouvelles par un jeu de représentations

La recherche est précisément l'activité qui a pour effet, chez un sujet donné, la *transformation des représentations* qu'il se fait d'un problème en vue de le résoudre. Aux représentations initiales qui permettent à l'étudiant d'identifier l'objet de recherche, et d'investir ses premiers questionnements (questions « sources »), se substituent d'autres représentations, supposées plus opérationnelles, qui sous-tendent d'autres questions (questions « cibles »).

Les *connaissances* que se construit celui qui cherche s'appuient sur ces représentations. Elles sont soumises à validation (« expérience » de la preuve) et confrontées aux savoirs (connaissances « légales » et institutionnelles).

Exemples tirés de la situation-recherche "le jeu de Gründy" (voir le document en annexe) :
connaissance « adaptative » : le recours au concept de « type » s'adapte au fait (résistant) que la somme de deux situations de jeu gagnantes n'est ni toujours perdante ni toujours gagnante.
connaissance « de contrôle » : la définition, indirecte, de la relation « S et S' sont de même type » entre situations de jeu par la propriété « S+S' est perdante ».
connaissance « de validation » : application (fréquente) du principe de simplification d'une situation de jeu par suppression d'une situation perdante.

4) Un recours nécessaire à une démarche expérimentale

Une dimension « empirique » de la recherche apparaît déjà dans les phases exploratoires (conceptions d'enquêtes, collecte de faits, formulation de conjectures, ...). La soumission, nécessaire, des énoncés et modèles à *l'expérience de la preuve* confère à la recherche mathématique une véritable dimension expérimentale (bien que le lien expérimental soit ici de nature interne).

5) Production d'une œuvre

Les résultats de recherche (de toute nature, essais, erreurs, exemples, contre-exemples, conjectures et nouveaux problèmes, hypothèses, « îlots déductifs », conclusions, modèles, spécialisations, généralisations, démonstrations, ...) s'organisent peu à peu en « *théories locales* » (= relative à un objet particulier). Ces « organisations mathématiques locales », mises en conformité avec les critères mathématiques usuels en matière de preuve, peuvent être transmis à une communauté plus large.

Situations-recherche : connaissances et apprentissages

A la différence des situations « didactiques », où les objectifs d'apprentissage sont connus à l'avance, les situations-recherche sont, par nature, « imprédictibles » : elles mettent en scène des connaissances « locales », non désignables à l'avance et dont l'apprentissage (sous forme de savoirs,

donc) restera occasionnel.
En revanche, toute situation-recherche offrira un terrain particulièrement favorable pour l'apprentissage de savoirs « transversaux », communs à de nombreuses situations :
- *nature des mathématiques (possible/impossible ; conventions/obligations ; modèle/réalité)*
- *nature des savoirs mathématiques (qui apparaissent comme des « construits » et non comme des « arbitraires »)*
- *savoirs démonstratifs (rôle et nature des preuves, notion de démonstration, outils de raisonnement : définitions, induction, contradiction, exhaustion des cas, quantificateurs, ...)*

La connaissance scientifique émergeant des situations-recherche n'a-t-elle pas finalement tous les traits de celle à laquelle invitait récemment Michel Serres (*in* Rameaux , *éd. Le Pommier, 2004, 240 p.*) *: une connaissance* « approchée, inquiète, ignorante et naïve, obéissante à l'expérience, courant au voisinage de l'erreur, toujours à l'épreuve, changeante et patiente, légère et mobile, perdue souvent, toujours éperdue, passionnée jusqu'à la folie, résignée à des intuitions étrangères et à ne jamais savourer de victoire. » *?*

MATh.en.JEANS vécue à partir d'un exemple de sujet issu de la robotique

On veut faire faire un demi-tour à une voiture en utilisant le minimum de surface possible.
Autre version : De combien doit-on creuser une montagne pour que la voiture puisse faire demi-tour ?

Trois conseils :
- Savoir ce qu'on cherche
- Faire un problème à la fois
- Voir si le problème n'a pas des frontières ou des limites (cas particuliers du carré, du segment : est-ce plus facile ?)

Trois situations possibles lors du 1^er^ séminaire :
- *Blocage* : le rôle de l'accompagnateur est de repérer et valoriser le travail effectué. Les élèves ne doivent pas avoir peur de leurs résultats ni de leurs erreurs.
- *Explosion* : Pleins d'idées fusent dans tous les sens. Parfois, il n'y

a plus de groupes car chacun cherche son idée. C'est une situation courante. Au final, le problème est souvent évité.
- *Bouclage* : c'est rarement le cas au 1$^{\text{er}}$ séminaire. On se trouve devant un mur, les élèves s'entêtent dans une piste. Ils essaient une piste, n'y arrivent pas, recommencent au point de départ à chaque fois sans enrichissement.

Le professeur doit prendre des notes pour voir où cela coince et s'en rappeler lors des séminaires. Cela est aussi utile lorsque plusieurs sujets sont traités à la fois.

Rôle de l'élève :
- Dévolution du problème (a-t-on le droit… ?)
- Contrat didactique (sous quel contrat on fonctionne ? formulation)
- Par exemple, le problème du bouchon représenté par un cylindre. Si la hauteur est peu importante, le bouchon flotte dans l'eau dans le sens vertical. Si la hauteur est grande, le bouchon va flotter à l'horizontale. Cela s'apparente plus à un problème de physique. Où sont alors les limites ?

Il appartient au chercheur d'apporter une évaluation à ce qui a été fait. Il doit avertir les groupes qui partent vers des voies où ils ne possèdent pas les outils nécessaires.

Pour réussir à éviter le blocage, il faut mettre en valeur les recherches des élèves, leur montrer que même si c'est une fausse piste, cela va renseigner sur le problème. Les élèves s'imprègnent ainsi du sujet.

Recherche en atelier n$^{\text{o}}$ 1 :
On peut changer la forme du rectangle (par exemple un losange, un carré, un segment…).

2 « établissements », 1 professeur et 1 chercheur qui intervient aux « congrès ».

L'établissement 2 a orienté directement le problème lors du 1$^{\text{er}}$ séminaire en effectuant un demi-tour autour du centre de symétrie du rectangle et en disant qu'il s'agissait de la surface minimale balayée.

L'autre établissement avait penché pour un côté réaliste avec une voiture et n'avait donc envisagé que les cas faisables. Il s'était fixé des contraintes non imposées dans l'énoncé. Plusieurs rotations étaient donc utilisées.

Question posée à la fin du congrès « La surface parcourue par 2 rotations est-elle supérieure à la surface parcourue par la composée des deux ? ».

Recherche en atelier n^o 2 :
Recherche de contre-exemples à la conjecture précédente. La classe 1 pensait avoir trouver un contre-exemple avec le cas où le rectangles était un segment en faisant un quart de tour autour d'une extrémité puis un quart de tour autour du milieu du segment obtenu.
La surface balayée est de $\dfrac{5\,\pi\,\ell^2}{16}$ où ℓ est la longueur du segment.
La surface obtenue avec la composée des deux rotations n'a pas été trouvée (elle l'avait été mais il y avait une erreur dans les rotations). *A priori* la surface serait plus petite mais cela reste à calculer.
Démonstration non faite.
Ce problème a été posé en 1904 avec un segment. Il a fallu attendre 20 ans pour le résoudre. Le problème avec le rectangle n'a toujours pas été résolu (20 à 30 chercheurs dans le monde s'y intéressent actuellement).

Que sont les résultats ?

- Un nouveau problème
- Des contre-exemples
- Des exemples
- Une conjecture.

Il faut se poser des questions : avec une banane, le pivot ne sera pas la bonne solution, cela est dû à la forme « arrondie » de l'objet.

Qu'est-ce qui fait alors que le pivot pour le rectangle serait le meilleur ? Quelles propriétés du rectangle pourraient le justifier ?

Quels sont les apprentissages ?

- Scientificité - Preuve
- Savoir chercher
- Formulation

Quels sont les types d'évaluation possible ?

- Ecrire un article
- Faire une exposition d'affiches. . .

Dispositif habituel : 2 heures par semaine Il faut chercher des subventions auprès du conseil général... L'association MATh.en.JEANS a des fonds éventuellement pour les transports aux congrès. Prendre contact avant la fin de l'année scolaire pour l'année qui suit. On peut demander un atelier scientifique « MATh.en.JEANS » pour obtenir des subventions.

« Tétraèdre didactique » :
La recherche est une relation directe entre les élèves et l'objet. Cela change par rapport à ce qu'il se passe dans la classe.
La mission du professeur est une relation directe entre élèves et savoir.
C'est la différence profonde entre recherche et enseignement, d'où la nécessité d'un chercheur pour un travail de recherche.
Chercher un exercice d'application directe du cours est différent de chercher dans une situation de recherche.

Réussite d'une recherche :
La situation de recherche doit exister. On doit en avoir une représentation qui se modifie jusqu'à ce qu'il y en ait une qui se rapproche d'un savoir mathématique.

Présentation d'un sujet (en "atelier suicide") : Les cartes Terre-lune

Compte-rendu de la simulation du mardi après-midi :
à cette occasion, l'un d'entre nous a joué le rôle du professeur, mais pas d'intervention du chercheur pendant cette expérience.

Informations sur le sujet. (transmises oralement par Pierre Duchet au professeur volontaire pour une présentation du sujet aux autres participants).
On souhaite colorer les territoires figurant sur deux cartes, l'une terrestre, l'autre lunaire, de manière à ce que :
1) deux territoires ayant une frontière commune reçoivent des couleurs différentes.
2) les territoires appartenant à un même pays reçoivent la même couleur.
Quel est le nombre minimum de couleurs nécessaires ?

Remarques. Ce problème est ouvert, même dans le cas où chaque pays terrestre est d'un seul tenant et ne possède qu'une colonie sur la Lune. Cette version

« Terre-Lune » est une variante du « problème des m-pires" » où il s'agit de colorer les territoires d'une carte plane sous l'hypothèse que chaque « empire » est formé de *m* morceaux au plus (pour $m = 1$, on retrouve le problème des 4 couleurs.) voir par exemple Frederickson, G. N. *Hinged Dissections : Swinging & Twisting*. New York : Cambridge University Press, 2002.

Le « professeur » invite ses collègues à se répartir en deux groupes de quatre et explique (trop ?) brièvement ce que nous allons faire puis donne le sujet ;
Nous avons deux planètes, par exemple la Terre et Mars ; les états terriens ont des colonies sur Mars, en nombre fini ; combien faut-il de couleurs différentes pour colorier les cartes de la Terre et Mars de façon que deux pays qui ont une frontière commune aient des couleurs différentes et qu'en outre une métropole et ses colonies aient la même couleur ?

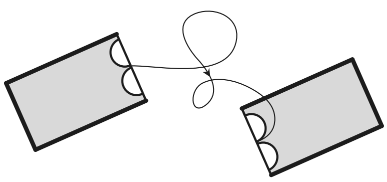
Immédiatement, les questions fusent :
« Les territoires sont-ils connexes ? » Oui.
« Deux territoires dont les frontières ont un seul point en commun doivent-ils être coloriés dans des couleurs différentes ? » Non (sinon, pensons à un disque partagé en n secteurs : il faudrait n couleurs) .
« Est-ce que l'on colorie les mers ? » Non.
« La carte est-elle plane ou sphérique ? » Léger embarras du professeur qui ne voit pas tout de suite que c'est exactement le même problème (du moins tant que l'on ne considère pas de territoire réduit à un point !) ; nous décidons que les cartes sont planes afin de pouvoir démarrer.
« Mais n'est-ce pas le théorème des quatre couleurs ? » le théorème est rappelé : il suffit de quatre couleurs pour colorier une carte de façon que deux pays qui ont une frontière commune aient des couleurs différentes (sur une surface plane ou sphérique, mais pas sur le tore où il faut sept couleurs). Ce théorème peut donc être utilisé ici.

Le « professeur » comprenant qu'il est urgent que les groupes se mettent au travail s'isole un moment dans un coin de la salle ; d'après les observateurs, il s'est écoulé 12 minutes à cet instant. La nécessité d'un séminaire n'avait pas été assez clairement explicitée au début de la séance pour les collègues qui sont extérieurs à notre groupe ; au bout de 35 à 40 minutes, le professeur annonce aux deux groupes qu'il va être temps de présenter les pistes de départ et les résultats déjà obtenus ; cet échange est positif. (Des exemples sont dessinés dont un comportant une carte où

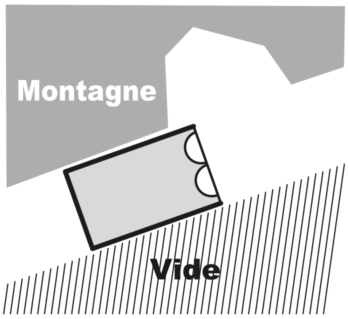
cinq couleurs sont nécessaires, un groupe a déjà envisagé de considérer des îles qui vont être morcelées en deux, puis trois, s'il y a n pays est-ce que $n-1$ couleurs suffisent ?...) Il ne reste plus que 5 minutes avant la fin de la simulation ; le professeur ne se sent pas le droit ou la compétence pour donner des instructions pour la poursuite du travail ; c'est là précisément qu'est particulièrement mis en évidence **le rôle du chercheur qui doit, à la fin de chaque séminaire, effectuer une synthèse et dégager des pistes à explorer afin de poursuivre le travail**.
Lors de la discussion qui suit nous prenons bien conscience de deux choses :
1) Le professeur ne doit pas intervenir mais il faut qu'il consigne ses observations en vue du séminaire suivant.
2) Le sujet doit être remis aux élèves par le chercheur lui-même qui les quitte aussitôt après pour ne revenir qu'aux séminaires ; les élèves doivent démarrer seuls, encouragés éventuellement par leur professeur.

Thème. ***Faire faire demi-tour à une voiture dans le moins d'espace possible.***
Une voiture est modélisée par un simple rectangle, orienté (de manière à distinguer l'avant et l'arrière). On désire déplacer ce rectangle de manière à lui faire effectuer un demi-tour : après le mouvement on retrouvera le rectangle dans la même direction générale mais tête-bêche. Tous les types de mouvements sont permis (même ceux qui du point de vue pratique ne sont pas réalistes).

Quelle est la plus petite aire qui permette de réaliser un tel demi-tour ?



Variante : ***le demi-tour sur une route de montagne***
Une route étroite bordée d'un coté par la montagne, de l'autre par le précipice. *Comment creuser la montagne le moins possible pour pouvoir faire demi-tour ?* (ou, ce qui revient au même, quelle aire minimale aurait une plateforme construite au dessus du vide et permettant le demi-tour ?)



Autre variante (non soumise à l'université d'été) On cherchera seulement les surfaces convexes permettant le demi-tour (suivant ainsi un des principes classiques de la recherche mathématique : « on cherche là où c'est éclairé » - autrement dit, lorsqu'un problème s'avère trop résistant, on en résout un autre, plus abordable !).

A quoi ça sert ? Le problème du demi-tour des rectangles est ouvert ; le cas d'un segment (rectangle de largeur nulle), posé par Kakeya en 1917, fut solutionné par Besicovitch en 1928. Ce genre de question apparaît, sous diverses formes, en robotique (cf. les exemples fameux du problème du *déménageur de piano*, et du problème du *créneau*). Comme nous l'a indiqué Martin Andler, des résultats récents de *« Géométrie sous-riemanienne »* garantissent l'existence de manœuvres pratiques (réalisables par une vraie voiture) permettant le demi-tour à l'intérieur d'une surface solution.

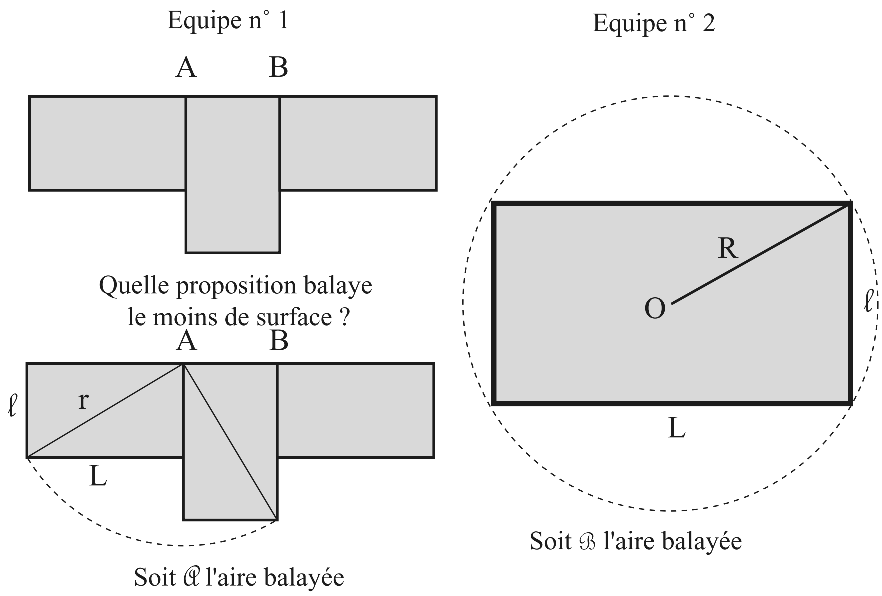
Bibliographie (sur le problème de « l'aiguille de Kakeya ») http ://www.prepas-victorhugo.com/math-p/pcsi1/General/paradoxes/kakeya.htm (Lycée V. Hugo de Caen).
Besicovitch, A. S. « On Kakeya's Problem and a Similar One.» *Math. Z.* **27**, 312-320, 1928.
Besicovitch, A. S. « The Kakeya Problem. » *Amer. Math. Monthly* **70**, 697-706, 1963.
Cunningham, F. Jr. and Schoenberg, I. J. « On the Kakeya Constant. » *Canad. J. Math.* **17**, 946-956, 1965.
Wells, D. *The Penguin Dictionary of Curious and Interesting Geometry*. London : Penguin, 1991, pp. 128-129.
Traduction française : *Le dictionnaire Penguin des curiosités géométriques*, Ed ; Eyrolles, 1996, pp. 117-118.

Deux équipes, représentant deux établissements travaillent séparément sur le sujet.

Au départ, chacun a suivi son idée ; la compréhension du problème n'était pas la même pour tous ; nous avons surtout pensé aux manœuvres d'une voiture ; nous nous sommes interrogés sur le rayon de braquage et sa définition (pour le constructeur automobile) ; nous avons mimé les manœuvres d'une voiture sur la table en utilisant un bloc-notes, envisagé de nombreux petits mouvements de faible amplitude, les mouvements d'un train sur ses rails. Puis le premier séminaire a permis au chercheur de recentrer notre travail ; nous avons opéré une première simplification consistant à ne plus considérer que les mouvements dans un plan d'un rectangle qui représente la voiture.

Après environ une demie heure de recherche les deux équipes proposent les résultats de leur recherche à l'occasion d'un premier séminaire.

Premier séminaire



$\mathcal{A} > \dfrac{1}{4}$ aire du disque de rayon r

$\mathcal{A} > \dfrac{1}{4}\pi \times \left(L^2 + \ell^2\right)$

$\mathcal{B} = \pi \times \left(\left(\dfrac{L}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{\ell}{2}\right)^2\right) = \dfrac{1}{4}\pi \times \left(L^2 + \ell^2\right)$

$\mathcal{A} > \mathcal{B}$

Questions suscitées par la première confrontation d'idées :
- Pourquoi utiliser deux rotations plutôt qu'une symétrie centrale ?
- La surface balayée par la succession de deux rotations est-elle la même que celle balayée en effectuant la rotation résultant de la composée ?
- La solution de l'équipe n°1 utilise l'emplacement de trois voitures, celle de l'équipe n°2 l'emplacement d'une voiture et d'une surface « résiduelle », qu'en est-il de cette surface résiduelle ?

Intervention du chercheur à l'issue du premier séminaire pour orienter chacune des deux équipes vers un axe de recherche émergeant des questions.

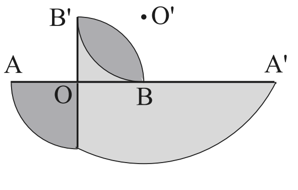
L'équipe n° 1 « part » du séminaire avec la question suivante : « La surface balayée par un segment effectuant successivement deux rotations est-elle plus grande que celle balayée par ce segment effectuant la rotation résultant de la composée des deux précédentes rotations ? »

L'équipe n° 2 travaillera sur la question suivante : « Pour quelles valeurs de ℓ et L, largeur et longueur de la voiture, a-t-on l'aire de la surface résiduelle inférieure ou égale à l'aire de la voiture ? »

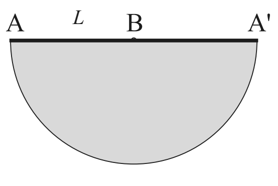
Deuxième séminaire

Equipe n° 1

Un contre-exemple



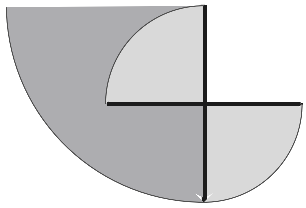
Aire balayée après une succession de deux quarts de tour :



Aire balayée après une symétrie centrale de centre B :

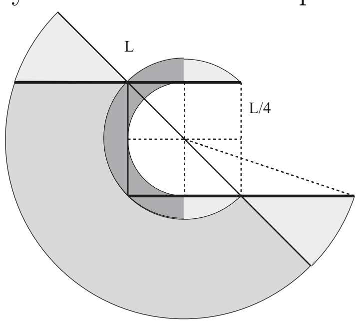
Aire balayée après une succession, de deux quarts de tour :
$A_1 = \left(\frac{4\pi}{16} - \frac{1}{4}\right) L^2$
Aire balayée après une symétrie centrale de centre B :
$A_2 = \frac{1}{2}\pi \times L^2.$
$A_2 > A_1$
Dans ce contre-exemple, l'aire balayée en effectuant une symétrie centrale est plus grande que l'aire balayée en effectuant les deux quarts de tour

aboutissant à cette symétrie centrale.
Un exemple :
Aire balayée après une succession de deux quarts de tour :



$$\mathrm{A}_1 = \frac{1}{4}\pi \times L^2 + \frac{1}{4}\pi \times \left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{5\pi \times L^2}{16}$$

Aire balayée après la symétrie centrale correspondante :



$$\mathrm{A}_2 = \frac{1}{2}\pi \times \left(\left(\frac{L}{4}\right)^2 + \left(\frac{3L}{4}\right)^2\right) - \frac{1}{2}\pi \times \left(\frac{L}{4}\right)^2 + 2 \times \varepsilon$$

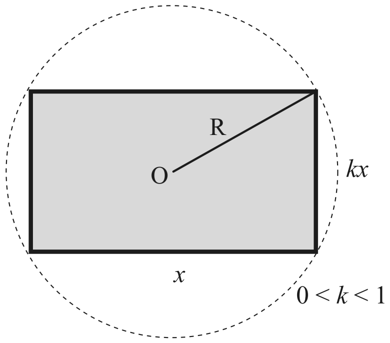
$$\mathrm{A}_2 = \frac{1}{2}\pi \times \frac{9}{16}L^2 + 2 \times \varepsilon$$

or $2 \times \varepsilon = \frac{1}{4}\pi \times \left(\frac{L\sqrt{2}}{4}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{L\sqrt{2}}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}L^2\left(\frac{1}{2}\pi - 1\right)$

Donc $\mathrm{A}_2 = \frac{5}{16} \times \pi \times L^2 - \frac{1}{16}\,L^2 = \mathrm{A}_1 - \frac{1}{16}L^2$

Dans cet exemple, l'aire balayée en effectuant une symétrie centrale est plus petite que l'aire balayée en effectuant les deux quarts de tour aboutissant à cette symétrie centrale.

Equipe n^o 2



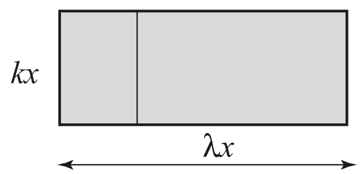
Aire balayée par la voiture : $A = \pi\left(\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{kx}{2}\right)^2\right)$.
Comparons A et le double de l'aire de la voiture : pour quelles valeurs de k, A est-elle inférieure au double de l'aire de la voiture ?
Posons $f(x) = 2 \times x \times kx - A = x^2\left(2k - \frac{\pi}{4}\left(1 + k^2\right)\right)$.
Posons $P(x) = 2k - \frac{\pi}{4}\left(1 + k^2\right)$.
On étudie son signe en fonction de k. $\Delta = \frac{16 - \pi^2}{4} > 0$.
Deux racines k_1 et k_2 :

$$k_1 = \frac{4 - \sqrt{16 - \pi^2}}{\pi} \approx 0,485$$
$$k_2 = \frac{4 + \sqrt{16 - \pi^2}}{\pi} \approx 2,061$$

Pour tout $k \in [k_1; 1]$, $P(k) \geqslant 0$ et par conséquent pour tout $x \in]0; +\infty[$, $f(x) \geqslant 0$. Lorsque le rapport entre la largeur et la longueur de la voiture est compris entre k_1 et 1, la surface balayée par la voiture en pivotant autour de son centre de gravité est inférieure ou égale à deux emplacements de voiture.

Conclusion : La solution pivot est dans ce cas là meilleure que toute solution où la position initiale et la position finale de la voiture ne se chevauchent pas.

Etudions maintenant $f(x) = \lambda \times x \times kx - A$



avec $1 \leqslant \lambda < 2$

Posons $P_\lambda(k) = \lambda k - \dfrac{\pi}{4}\left(1+k^2\right)$. On étudie son signe en fonction de k.

$\Delta = \dfrac{4\lambda^2 - \pi^2}{4}$.

$\Delta \geqslant 0 \iff 4\lambda^2 - \pi^2 \geqslant 0 \iff \lambda^2 \geqslant \dfrac{\pi^2}{4} \iff \dfrac{\pi}{2} \leqslant \lambda < 2$

Deux racines k_1 et k_2 :

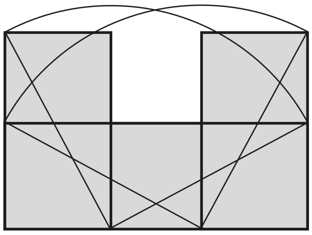
$$k_1 = \frac{2\lambda - \sqrt{4\lambda^2 - \pi^2}}{\pi}$$
$$k_2 = \frac{2\lambda + \sqrt{4\lambda^2 - \pi^2}}{\pi}$$

On remarque que k_1 et k_2 sont positifs et inverses l'un de l'autre donc l'un des deux est élément de $]0\,;1]$ ici k_1. Donc pour tout $k \in [k_1; 1]$, $P_\lambda(k) \geqslant 0$ et par conséquent pour tout $x \in]0; +\infty[$, $f_\lambda(x) \geqslant 0$. Lorsque le rapport entre la largeur et la longueur de la voiture est compris entre k_1 et 1, la surface balayée par la voiture en pivotant autour de son centre de gravité est inférieure ou égale à λ emplacements de voiture, où $\dfrac{\pi}{2} \leqslant \lambda < 2$.

Conclusion : Pour $\dfrac{\pi}{2} \leqslant \lambda < 2$, on peut trouver des valeurs de k telles que la solution pivot soit meilleure que toute solution effectuant le chevauchement donné par la valeur de λ.

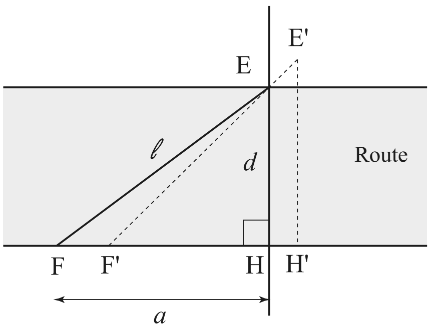
Questions suscitées par la deuxième confrontation d'idées :
- Qu'est-ce qu'un demi-tour ?
- Mais au fait quelle était la question ?

Chaque équipe repart pour quelques minutes de recherche. En vrac :
- Voiture qui pivote et recule en évitant le ravin.



- Modélisation de la voiture par un segment, plus concrètement par une aiguille qui s'attaque à la paroi rocheuse pour effectuer l'excavation. Au cours de cette dernière étape, nous avons été amenés à opérer une nouvelle simplification provisoire qui est de taille ; nous avons considéré le cas extrême d'un rectangle de largeur nulle ; alors le problème revient en quelque sorte à étudier les mouvement d'une aiguille dans un plan.

Cela a permis d'avancer et d'explorer une solution pour l'aire minimale de l'excavation qu'il faut creuser pour que l'aiguille puisse faire demi-tour (tout en restant sur la chaussée) voici une première idée ; l'aiguille est représentée par un segment [EF], le point F restant en contact avec le bord de la route opposé à l'excavation que l'on va creuser en faisant avancer l'aiguille d'un pas p suivant la direction FE, puis en ramenant F sur le bord de la route et en réitérant le procédé ; la méthode d'Euler s'applique et cela peut faire une activité pour des élèves de première S ; sinon, on peut dire que l'on recherche une courbe dont la tangente en chaque point M coupe la droite d'équation $y = -d$ en un point P tel que PM garde une longueur constante.



Indiquons les calculs : Initialement le point E est sur le bord de la route représentée ici par une bande rectiligne de largeur d ; nous prenons un repère d'origine le point E dont les axes sont respectivement parallèle et perpendiculaire à la route. L'aiguille a une longueur ℓ mais il est plus simple de poser $\ell = \sqrt{a^2 + d^2}$; ainsi l'aiguille est représentée par l'hypoténuse du triangle rectangle EFH où H est la projection de E sur le bord opposé de la route ; nous supposons maintenant que l'abscisse de

E augmente de h ; son ordonnée augmente de $\dfrac{d}{a}\,h$; le point E est en E'$\left(h, \dfrac{d}{a}\,h\right)$, le point F est venu en F' et H en H'.

Calculons maintenant F'H' :

$$\ell^2 = a^2 + d^2 = F'H'^2 + H'E'^2 = F'H'^2 + \left(d + \frac{d}{a}\,h\right)^2$$

$$a^2 + d^2 = F'H'^2 + d^2 + 2\frac{d^2}{a}\,h + \frac{d^2}{a^2}\,h^2$$

$$a^2 + d^2 - d^2 - 2\frac{d^2}{a}\,h - \frac{d^2}{a^2}\,h^2 = F'H'^2$$

$$a^2 - 2\frac{d^2}{a}\,h - \frac{d^2}{a^2}\,h^2 = F'H'^2$$

$$\sqrt{a^2 - 2\frac{d^2}{a}\,h - \frac{d^2}{a^2}\,h^2} = F'H'.$$

Nous allons désigner par f la fonction dont le graphe, pour x positif, représente le bord de notre excavation ; nous supposons que l'aiguille reste en chaque point tangente à cette courbe ; nous en déduisons que le coefficient directeur de la tangente en E' est $\dfrac{E'H'}{F'H'} = \dfrac{d + \frac{d}{a}\,h}{\sqrt{a^2 - 2\frac{d^2}{a}\,h - \frac{d^2}{a^2}\,h^2}}$.

Nous avons ainsi formé une équation différentielle dont la résolution nous réserve une bonne surprise puisqu'elle se résume à :

$$f'(x) = \frac{d + \frac{d}{a}\,h}{\sqrt{a^2 - 2\frac{d^2}{a}\,h - \frac{d^2}{a^2}\,h^2}} = \frac{\left(-\frac{a}{2d}\right)\left(-\frac{2d^2}{a^2}\,h - 2\frac{d^2}{a}\right)}{\sqrt{a^2 - 2\frac{d^2}{a}\,h - \frac{d^2}{a^2}\,h^2}}$$

$$= \frac{\left(-\frac{a}{2d}\right)\,u'}{\sqrt{u}} = \left(-\frac{a}{d}\right)\,\frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

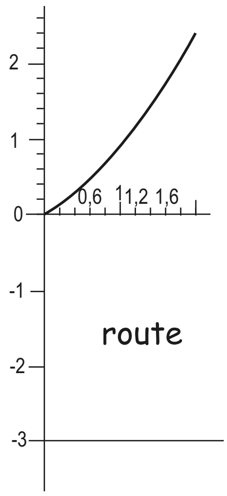
La fonction f est donc définie par :

$$f(h) = \left(-\frac{a}{d}\right)\,\sqrt{a^2 - 2\frac{d^2}{a}\,h - \frac{d^2}{a^2}\,h^2} + K$$

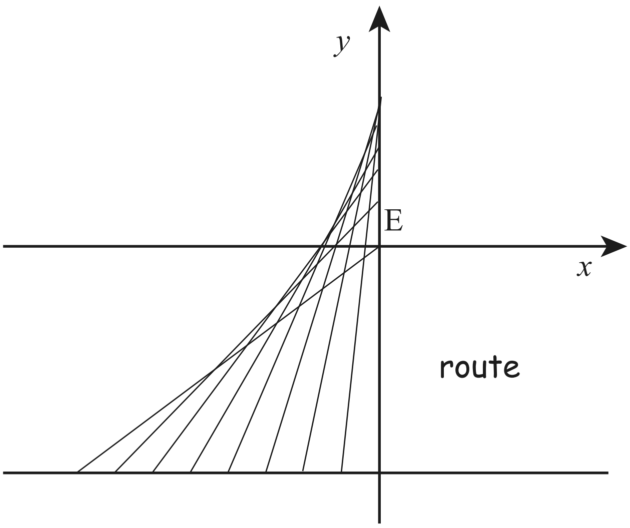
et comme, par le choix de notre origine, $f(0) = 0$, alors :

$$f(h) = \left(-\frac{a}{d}\right)\,\sqrt{a^2 - 2\frac{d^2}{a}\,h - \frac{d^2}{a^2}\,h^2}$$

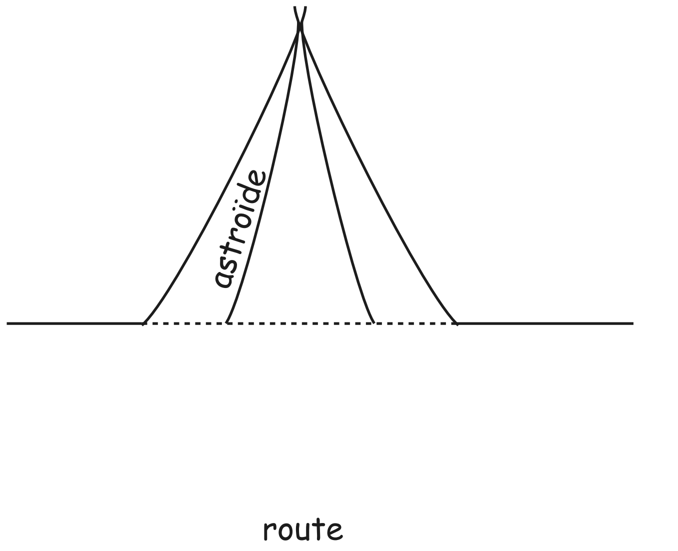
Voici une représentation de f en prenant $a = 4$ et $d = 3$.
On s'arrête lorsque l'aiguille est perpendiculaire à la route ; il n'y a plus qu'à compléter par symétrie par rapport à l'aiguille pour avoir la forme de l'excavation ; estce un minimum ?



Cette idée en fait surgir une deuxième au sein du groupe : faisons glisser l'aiguille initialement en position EF de façon que F ne quitte pas le bord de la route et que H reste fixe ; nous retrouvons un problème bien connu : celui de l'échelle qui glisse le long d'un mur, sa base restant en contact avec le plancher.



La courbe obtenue, enveloppe des diverses positions de l'aiguille EF est un arc d'astroïde (ou hypocycloïde à quatre rebroussements : voir par exemple la revue du Palais de la découverte, n^o spécial 45 de décembre 1995 co-diffusé par l'APMEP). Il reste à comparer les aires des deux surfaces obtenues suivant la longueur de l'aiguille et la largeur de la route. Dans l'exemple précédent ($a = 4$, $d = 3$) voici la forme des deux excavations obtenues, où l'on voit nettement que la deuxième idée est meilleure.



Remarque sur le travail de ces deux premières matinées : **la forme de travail adoptée a permis d'assurer rapidement la cohésion de notre groupe**.

Conclusions auxquelles nous sommes parvenus :
Une communauté scientifique se met en place lors des séminaires et du congrès (qui valident les résultats).

Il peut être utile, dans une recherche, de déterminer le problème le plus difficile que l'on sait résoudre et le problème le plus facile que l'on ne sait pas résoudre (à condition que l'on puisse hiérarchiser les problèmes).

Si l'idée que se fait un groupe du problème ne bouge pas, la recherche ne marche pas ; on continue la recherche jusqu'à obtenir une représentation qui constitue un savoir (on socialise la connaissance que l'on a acquise).

Le professeur est utile au moment d'établir et démontrer les théorèmes ou pour reconnaître le statut de ce que les élèves disent (est-ce une hypothèse, un théorème, ... ?)

Epilogue...

Il est clair que la pratique développée en ateliers nous a permis une exploration totale de la structure de M.E.J., depuis la mise en place et ses formalités administratives jusqu'au congrès.
Dans un premier temps, nous avons tenu le rôle d'élèves et avons découvert différentes phases :

- *le blocage* : il était parfois difficile de sortir de nos pratiques quotidiennes. Le problème se compliquait inutilement : conduite d'un vrai véhicule, notion mal connue de rayon de braquage, etc.
- *la mini-explosion* : relancés par le séminaire, nos esprits surchauffés inventaient toutes sortes de solutions de demi-tour...
- l*e découragement* : devant tant d'idées, quelle voie poursuivre ? Nous y perdions nos habituels repères d'enseignants, telles la simplification du problème, l'analyse correcte du sujet, l'examen des cas particuliers, comme le carré par exemple .
- *le soulagement* : il nous fallait comprendre que ce problème était en recherche, non résolu encore, et qu'ainsi la confusion apparue était fort normale.
- *l'obsession* : donner un tel énoncé présente un danger, celui d'envahir les esprits, les conversations et tout le temps libre...

En serait-il de même pour certains élèves ? Lors de la troisième matinée d'atelier, nous avons retrouvé notre statut d'enseignant pour nous livrer à l'analyse de travaux de lycéens portant sur le « Jeu de Gründy », qui oppose deux joueurs A et B sur la base d'un nombre d'allumettes. A chaque étape de la partie, il faut séparer en deux un des tas d'allumettes formés : le perdant est celui qui se verra contraint de séparer un tas en deux tas égaux. L'activité consistait en la recherche des nombres initiaux d'allumettes qui assuraient la victoire au premier joueur, quelle que soit la stratégie employée. La lecture de cette dizaine de pages nous a montré la puissance mathématique d'une pratique MeJ.

Pour étudier ce jeu, les adolescents ont du se livrer à une classification des situations rencontrées ; aucune connaissance mathématiques n'était requise pour se livrer à ce travail, n'importe quel jeune pouvait se passionner pour ce jeu et en venir aux conclusions exposées dans ce rapport.

Mais , et c'est là que ce type d'activité parait excellent ! Notre œil averti et nos connaissances en mathématiques (petites) du supérieur ont fait apparaître des notions surprenantes : relation d'équivalence, passage au quotient, travail de construction d'une opération sur les classes d'équivalence, quasi structure de groupe... et construction d'une fonction, que seul le chercheur avait repérée dans ce travail !

Ce simple constat, tout à fait imprévisible au départ de leur travail, a suffit à nous persuader de la puissance de ce type d'activité.
Et, de plus, l'aspect « jeu » a permis à ces lycéens une prestation vivante et intéressante lors du congrès MeJ.

Félicitations aux concepteurs de ce projet, qui réellement permet de faire des mathématiques vivantes, dans tous les sens de cet adjectif !

L'ensemble des professeurs, conquis et convertis...

2001 : prix adhérent : 7 €
2002 : prix adhérent : 9 €
2003 : prix adhérent : 10 €
2004 : prix adhérent : 12 €
Les 4 ensemble : 28 €
3 sur les 4 : 23 €.

Déjà quatre années d'Olympiades publiées.
Des exercices très nombreux accessibles, pour certains, dès le collège, avec de très nombreuses propositions de solutions.
Une impressionnante mine d'exercices !

ATELIER 3

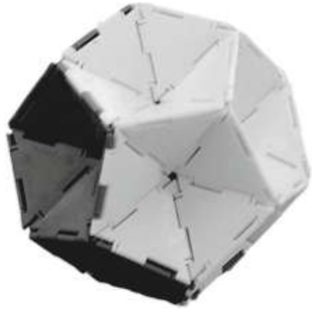
Objets mathématiques
Construction de polyèdres

François Gaudel
Professeur au lycée Louise Michel, Bobigny

Notre atelier s'est intéressé à l'utilisation d'objets pour favoriser ou susciter une activité mathématique vivante. Quatre interventions ont eu lieu, autour d'approches diverses : construction de deltaèdres et de polyèdres géants (François Gaudel), utilisation en classe entière de bouliers(Caroline Poisard) ; emploi de livres anciens, de documents historiques, d'outils logiciels (Jean-Alain Roddier) ; situations de recherche engendrées par la Valise " Maths à modeler " (Charles Payan).

On trouvera en annexe le compte-rendu global réalisé sur place par Catherine Ducourtioux, et dans ces actes, les compte-rendus des autres intervenants. Je vais dans ce qui suit présenter la partie que j'ai animée à partir de triangles en plastique permettant de fabriquer toutes sortes de deltaèdres, et de tiges de bois à l'aide desquelles nous avons construit deux polyèdres " géants ". Je m'interrogerai ensuite brièvement sur la notion d'objet mathématique, qui a été évoquée à plusieurs reprises durant cette Université d'été.

I - Activités autour des deltaèdres



Les deltaèdres sont des polyèdres dont toutes les faces sont des triangles équilatéraux. J'ai fait travailler des groupes très divers sur ces polyèdres particuliers : atelier niveau collège sur une MJC, atelier niveau Terminale scientifique en lycée ; activité en classe entière dans le primaire (CM2) et groupes de 8-11 ans avec le Service Municipal de la Jeunesse de Drancy. Enfin, j'ai présenté l'activité lors de stages pour les professeurs des écoles sur les Réseaux d'Education Prioritaire de Drancy, Aulnay-sous-Bois, et plus récemment Noisy-le-Grand.

Le matériel utilisé est constitué de quelques centaines de triangles en plastique de type « Jovo » (il existe d'autres marques, tout aussi valables), de papier (certains deltaèdres peuvent être obtenus par pliage ou par tressage), de languettes de bois type « bâtons d'esquimau », assemblées à l'aide d'agrafes et de colle ou de scotch, d'agitateurs pour cocktails collés au pistolet, de dessous de tartes en carton qui, dentelés, permettent de découper très facilement des triangles équilatéraux. (il suffit que le nombre de dents soit divisible par trois). Tout ce matériel est très peu cher, sauf les triangles en plastique qui sont cependant indispensables. L'abord de la construction de deltaèdres à l'aide de matériaux et par des méthodes variées concourt à l'apprentissage de leur nature abstraite et permet de fabriquer des formes que l'on conservera pour une exposition ultérieure.

L'activité peut commencer ainsi : on distribue des triangles en plastique, et, après avoir expliqué brièvement ce qu'est un deltaèdre, on propose d'en construire, en commençant par les plus petits possible. Très vite on voit apparaître des tétraèdres. On en fait compter les sommets, les arêtes et les faces, et on propose de continuer de façon à remplir un tableau du type :

Nombre de faces	Nombre de sommets	Nombre d'arêtes
4	4	6
6	5	9
...	...	...

Au cours de l'activité, on constate chez certains enfants une tendance à multiplier d'emblée les faces, sans chercher vraiment à en minimiser le nombre. D'autres, ou les mêmes croient nécessaire d'assembler les triangles " à plat ", avant de refermer la figure. On voit des adultes faire de même. Le décompte des faces, des sommets, des arêtes, n'est pas toujours évident et nécessite souvent la mise en valeur de symétries (beaucoup d'élèves, au début, tournent la pièce en comptant les faces, ce qui rend les résultats surprenants). Chacune de ces tendances spontanées se prête à des explications et remarques.

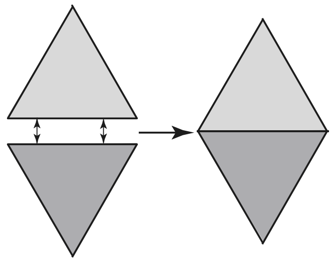
Au bout d'une dizaine de minutes, le tableau commence à se remplir. On nomme les deltaèdres d'après leurs nombres de faces : tétraèdre, hexaèdre, octaèdre, décaèdre, etc.

On obtient facilement les observations suivantes :
- Le nombre de faces est toujours pair.
- Il faut au moins 4 faces pour faire un deltaèdre.
- Il y a un seul tétraèdre (4 faces), un seul hexaèdre (6 faces), deux octaèdres, et ensuite de plus en plus de deltaèdres différents pour un même nombre de faces.
- Pour un même nombre de faces, les nombres d'arêtes et de sommets sont identiques. Par exemple les deux octaèdres ont chacun 8 faces, 6 sommets et 12 arêtes.
- Les nombres de faces, de sommets et d'arêtes constituent des suites arithmétiques de raisons 2, 1 et 3.

On notera qu'il s'agit ici de mathématiques purement expérimentales. On peut alors poser les questions suivantes :
- Pourquoi faut-il au moins quatre faces pour faire un deltaèdre ?
- Pourquoi le nombre de sommets peut-il augmenter unité par unité ?

Les réponses possibles sont simples mais pas forcément faciles à trouver ni à formuler.
- Pourquoi le nombre de faces est-il toujours pair ?

Sur cette question, on peut laisser chercher les participants à l'atelier... la réponse exige un certain degré d'abstraction car elle oblige à raisonner sur le lien qu'il y a entre les nombres de faces et d'arêtes. Ce lien apparaît évident à certains, beaucoup moins à d'autres, même une fois qu'on a dit qu'il y a trois arêtes par face et deux faces par arête. Pour qu'il soit bien clair, je le fais formaliser en distinguant les triangles, qui ont trois côtés, et les faces, qui ont des arêtes une fois assemblées. S'il y a f faces, il y a f triangles. Chaque triangle a 3 côtés, donc il y a $3f$ côtés. Mais quand on assemble les triangles, chaque arête est constituée par la fusion de deux côtés.



Donc il y a deux fois moins d'arêtes que de côtés, et comme le nombre d'arêtes est un entier, il faut que $3f$ soit pair. Le fait qu'il en découle que f est également pair présente toujours un intérêt, quel que soit le niveau des participants.

- Mais le nombre de sommets ?

Il est maintenant clair que nombre d'arêtes et le nombre de faces sont liés. Par la relation $a = 3f/2$. Mais d'où vient que le nombre de sommets en découle ? On n'a pas de raisonnement aussi simple parce que si chaque triangle à trois sommets, par contre chaque sommet peut être situé sur un nombre très variable de faces. On est donc amené à parler de la Relation d'Euler pour les polyèdres simplement connexes (bien sûr, on n'emploie pas ce vocabulaire, on explique la différence entre une bouée et un ballon) : $s-a+f = 2$ (nombre de sommets moins nombre d'arêtes plus nombre de faces égale deux) L'application de cette formule et de la précédente permet de calculer deux des grandeurs quand on connaît la troisième.

Question suivante (par exemple) :

- Est-ce que la géode est un deltaèdre ?
A partir des tentatives de construction de deltaèdres avec des triangles joints « à plat », donc à six par sommet, on fait voir qu'on s'interdit ainsi de fabriquer des « pointes », que le nombre maximum de triangles autorisés pour cela est cinq, et qu'à partir de six, il se passe des choses bizarres, qui permettent d'introduire deux notions : courbure (positive, négative), convexité. On en déduit qu'un deltaèdre convexe comporte au plus cinq faces par sommet et on propose d'essayer de construire le « plus grand » deltaèdre convexe possible, ce qui amène les participants à essayer avec cinq faces par sommet et donc à aboutir à l'icosaèdre régulier.

La géode est située à quelques kilomètres de Drancy et Bobigny. On voit sur sa surface des triangles qui ont l'air d'être équilatéraux, et pourtant elle semble convexe, sphérique, et pire, les triangles ont l'air d'être assemblés par six à leurs sommets. Naturellement, les triangles ne peuvent pas être équilatéraux. Mais est-ce qu'ils peuvent être assemblés par six ? à partir du collège on peut faire démontrer aux élèves à l'aide de la relation d'Euler que ce n'est pas possible. Et si l'on admet qu'en quelques points les triangles sont assemblés par cinq, on montre que sur une géode complètement sphérique, ces points seront au nombre de 12, comme les 12 pentagones d'un ballon de football.

Autres activités

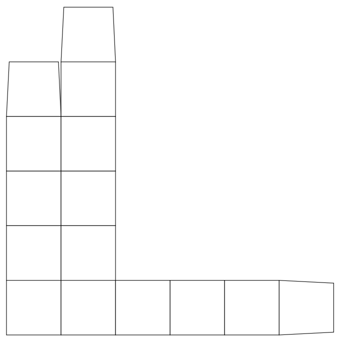
Beaucoup d'autres activités sont possibles.

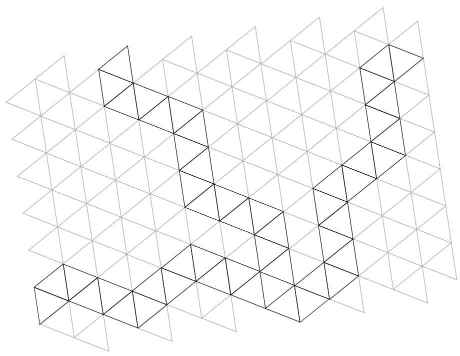
Voici celles que j'avais proposées à la rentrée 2003 dans mes ateliers de maths :

o Sujet(s) 1 : **problèmes d'existence** : étudier les nombres de faces, d'arêtes, de sommets des deltaèdres. Chercher à les dénombrer : combien y-a-t-il de deltaèdres à 4 faces, 5 faces,... 10 faces,... chercher tous les deltaèdres convexes ; chercher des deltaèdres dont tous les sommets comportent le même nombre de faces. Peut-on construire un deltaèdre dont tous les sommets comportent sept faces ?

o Sujet 2 : **problèmes de coloriage** : combien les faces d'un deltaèdres doivent-elles posséder de couleurs distinctes pour que deux faces adjacentes ne soient jamais de la même couleur ? chercher des règles ; les démontrer. Peut on colorier un deltaèdre dont tous les sommets ont le même nombre de faces, n, avec n couleurs, de telle façon que chaque sommet possède n couleurs exactement et que deux faces adjacentes soient toujours différentes. Si oui, de combien de façons distinctes ?

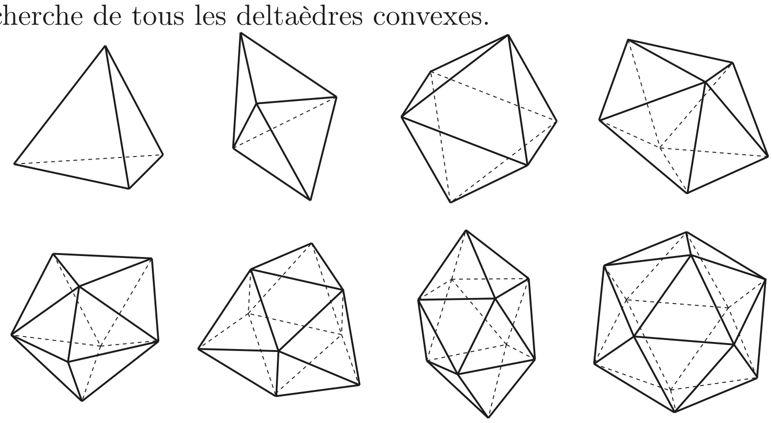
o Sujet 3 : **tressage de deltaèdres** : ci dessous, on trouve deux découpages permettant de tresser à gauche, un cube, à droite un icosaèdre. Qu'est-ce qu'un tressage ? chercher des découpages permettant de fabriquer certains deltaèdres par tressage. Est-ce toujours possible ?





Les sujets qui ont été effectivement choisis sont les suivants :

- Recherche de tous les deltaèdres convexes.



La première étape a consisté à chercher « à la main » les deltaèdres convexes, recherche qui a reçu une première confirmation. . . via Internet. Il existe huit deltaèdres convexes. Les nombres de face vont de 4 à 20 (4 à 12 sommets), avec une exception pour dix-huit faces (11 sommets).

Les quatre élèves de Terminale S composant ce groupe ont cherché à démontrer qu'il n'existe que ces huit polyèdres convexes (existence et unicité). Ils ont trouvé des résultats intéressants : après avoir démontré qu'un deltaèdre convexe ne pouvait pas avoir plus de 20 faces, ils ont remarqué et justifié le fait que le tétraèdre et l'hexaèdre sont les seuls deltaèdres convexes ayant des sommets de degré trois (c'est à dire intersection de trois faces) ; pour les autres, si l'on appelle x le nombre de sommets de degré 4 et y celui des sommets de degré 5, on a nécessairement $x + 2y = 12$, ou encore, si l'on appelle s le nombre de sommets : $x + s = 12$. Il en résulte que le nombre de sommets de degré 5 est pair. Un deltaèdre convexe à 18 faces devrait avoir 10 sommets de degré 5 et un de degré 4. La construction à partir de l'unique sommet de degré 4 ne laisse plus aucun choix, et aboutit à une impossibilité, ce qu'ils n'ont pas su cependant justifier d'une façon complètement satisfaisante, se contentant d'une preuve « pratique ».

- Coloriage des deltaèdres

Deux autres groupes ont travaillé sur le problème suivant : combien faut-il au minimum de couleurs pour colorier les faces d'un deltaèdre de façon à ce que les faces adjacentes ne soient jamais de la même couleur. Après une phase de recherche très empirique, ils ont eu du mal tout d'abord à formaliser ce qu'ils avaient trouvé. Par exemple, il paraît « évident » que quatre couleurs sont nécessaires pour colorier un tétraèdre de cette façon. Et ce genre de « preuve » par l'évidence semble suffisante dans la vie courante. Bien plus, si on arrivait à démontrer le contraire à l'aide d'une théorie quelle qu'elle soit, cela poserait certainement des questions sur la validité de cette théorie. Pourtant, si l'enseignant déclare ne pas comprendre pourquoi il est impossible de n'utiliser que trois couleurs ou moins, et demande qu'on le lui prouve, les explications deviennent assez vite confuses (les élèves l'admettent volontiers). On les voit se lancer à tour de rôle dans des déclarations qui commencent avec vigueur et finissent dans un murmure inaudible.

Ce premier obstacle passé, on remarque au bout d'un moment qu'on arrive pour tous les autres deltaèdres à se limiter à deux ou trois couleurs. Bien que manipulant beaucoup, les élèves, de collège comme de lycée, avaient du mal à discerner dans quel cas deux, dans quel cas trois couleurs étaient nécessaires. Ils ont fini par voir que lorsqu'il y avait des sommets de degré impair, trois couleurs étaient nécessaires, (suffisantes ?) puis, dans un second temps que lorsque tous les sommets étaient de degré pair, deux couleurs semblaient suffire. Ils ont démontré correctement qu'il fallait au moins trois couleurs dans le premier cas (il suffit de raisonner sur un sommet), et que d'autre part quatre couleurs suffisaient toujours : en effet si nous disposons d'un stock de quatre couleurs et colorions successivement toutes les faces dans un ordre quelconque, au moment de colorier une face, il reste toujours une couleurs disponible au moins puisqu'elle n'est adjacente qu'à trois autres faces.

La suite était plus délicate. Pour le cas de deux couleurs je les ai guidés en leur conseillant de passer au dual (et donc en leur expliquant ce que c'est) et en leur proposant une démarche portant sur la longueur des chemins d'une face à l'autre (c'est-à-dire d'un sommet du dual à un autre) : si la parité de la longueur est conservée, quel que soit le chemin suivi, alors deux couleurs suffisent toujours : ayant choisi de façon arbitraire la couleur de l'une des faces, la couleur d'une autre face sera déterminée par la parité commune aux longueurs des chemins qui la joignent à cette première face. Dire que la parité des longueurs est conservée revient à démontrer que tout circuit est de longueur paire, ce qui est vrai si tous les circuits qui correspondent aux sommets du deltaèdre sont eux-mêmes de longueur paire (et si le deltaèdre est simplement connexe). Ce n'était pas simple, mais au moins les élèves ont réfléchi là-dessus avec intérêt, et ont vu qu'un changement de point de vue peut être fructueux.

Pour le cas général (trois couleurs), je les ai également aidés, mais ils ont beaucoup mieux intériorisé et se sont montrés capables d'exposer clairement une méthode consistant, en résumé, à essayer de colorier le maximum de faces avec trois couleurs. Puis, sur l'un des coloriages présentant un maximum absolu de faces coloriées, à « déplacer » les cases non coloriées en respectant la règle d'adjacence. On montre d'abord qu'il ne peut pas y avoir plus d'une case non coloriée, puis on montre qu'on peut déplacer cette face si elle existe de façon à la colorier avec l'une des trois couleurs. Donc il ne peut y avoir de face non coloriée.

Ce problème de coloriage qui me paraissait *a priori* plus simple à aborder parce que plus intuitif dans son énoncé et plus visible dans ses conclusions que celui sur les polyèdres convexes, s'est révélé plus ardu pour les élèves, qui ont pourtant expérimenté avec beaucoup de conviction : difficultés à découvrir les conjectures à démontrer. Difficulté à formaliser des démonstrations qui leur semblaient claires (cas du tétraèdre, nécessité de 3 couleurs quand un sommet au moins est de degré impair). J'ai retrouvé dans leur démarche un empirisme, une tendance à accumuler des données sans les analyser que j'avais déjà rencontrés dans des groupes travaillant sur des sujets de recherche. Je les voyais construire beaucoup, mais je ne les voyais pas examiner les figures produites avec soin pour comprendre pourquoi c'était possible dans tel cas et pas dans tel autre. Est-ce un effet de l'enseignement ? Cela me porte en tout cas à croire que tel qu'il est fait, il réussit mieux à leur faire utiliser les notions relativement abstraites qu'on leur propose comme des règles qu'on répète, que comme des outils de connaissance.

Le résultat reste cependant positif puisque parmi ces élèves, ceux qui ont loupé leur bac sont revenus à l'atelier cet année, avec d'ailleurs un certain enthousiasme. Mais ce n'est pas exactement ce que j'attendais car l'objet n'a pas amené de lui-même les situations mathématiques intéressantes : la notion de dual ne découle pas naturellement de ce genre de problématique, et j'ai dû l'importer de l'extérieur.

Il est vrai que s'ils avaient cherché plus systématiquement, ils auraient pu avoir l'idée de regarder ce qui se passait vraiment quand on changeait les faces de couleur pour optimiser le coloriage. Mais les triangles en plastique ne s'y prêtaient pas bien car ils étaient pré-colorés. Il aurait fallu un système coloriable et effaçable. Faute de quoi, on en était réduits à des « expériences de pensée », courantes en mathématiques, certes, et même en physique, mais qui justement se passent de tout objet matériel. Par rapport à la problématique qui est d'examiner comment des objets peuvent être utilisés pour faciliter l'accès à des situations mathématiques, on voit ceci : il ne suffit pas que l'objet pose le problème pour qu'il en permette une mathématisation intéressante.

- Tressage, deltaèdres « à la Thurston »

Le sujet sur le tressage a semble-t-il inspiré un élève de sixième d'un collège voisin puisque dans le cadre de l'atelier animé par des collègues, il a trouvé une méthode de tressage tout à fait valable du tétraèdre. Je n'en dirai pas plus car je n'ai pas du tout assisté à cette activité et n'ai vu que le résultat.

La question d'un deltaèdre possédant sept faces par sommet, et donc dont chaque sommet serait le lieu d'une courbure négative est intéressante à plusieurs titres. La relation d'Euler permet de voir qu'un tel deltaèdre devrait posséder un nombre pair de trous et un nombre de faces multiple de 28. Ce problème a intéressé en 2002-2003 le groupe d'élèves qui s'est attaqué l'année suivante aux deltaèdres convexes. Cependant, sur ce sujet précis, ils ne sont pas allés au delà de la fabrication de formes curieuses, sans mise au point d'une méthode de recherche un peu systématique.

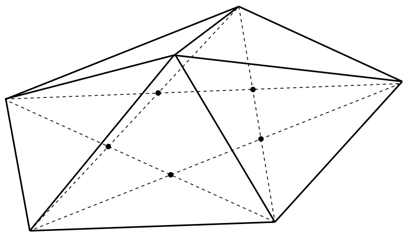
II - Construction de polyèdres géants

Trouver une méthode simple, ne demandant pas trop de soin, pour construire des polyèdres, n'est pas évident. Il existe des kits de construction, mais relativement chers et qui ont tous leurs limites. A l'occasion des rencontres CNRS-*Sciences et Citoyens* d'Ile de France, nous avions lancé un concours « triangles en folie » : il s'agissait de construire des formes mathématiques ayant un caractère esthétique intéressant, et dont la structure soit à base de triangles équilatéraux. Nous nous étions également engagés à organiser pour le forum d'ateliers scientifiques de la Région Parisienne qui se déroulait pendant ces rencontres, une animation de construction de polyèdres géants.

Le défi étant lancé, restait à trouver la méthode. Après avoir visité les magasins de bricolage du coin, et pris quelques conseils auprès d'adhérents de la Maison des jeunes versés dans le travail manuel, j'ai acheté des tiges de bois en forme de tourillon d'un mètre de long et 8 mm de diamètre (1 € environ la pièce) aux extrémités desquelles nous avons vissé sans difficulté des pitons circulaires de 2,5 × 10 mm. Assemblés à l'aide de colliers de serrage pour fil électrique, dont le prix à l'unité est négligeable si on les achète par sachets de 100 ou plus, ces tourillons nous ont permis de construire des figures. Tout ce matériel se trouve couramment dans les grandes surfaces de bricolage. Il peut être nécessaire de commander le tourillon. Avec du tourillon moins épais (6 mm) et des pitons de 2,25 × 10 (plus difficiles à trouver) on peut constituer des tiges plus courtes (50 cm) pour fabriquer des figures moins volumineuses.

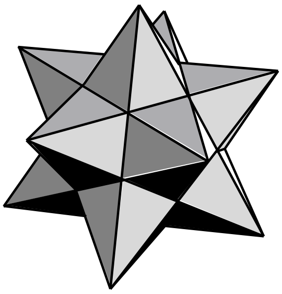
deux objets mathématiques reliés par un troisième ...
naturellement, le collier doit être serré davantage.

Que peut-on espérer faire avec ces tiges ? je présenterai les différentes figures réalisées dans l'ordre chronologique. Avec quelques animateurs et bénévoles de la MJC, nous avons tout d'abord testé le procédé en construisant un icosaèdre. Mais l'occasion étant trop belle, nous ne nous sommes pas arrêtés là. Un icosaèdre possède deux types de diagonales : celles qui passent par son centre de symétrie et joignent des sommets séparés par trois arêtes, et celles qui joignent des sommets séparés par deux arêtes.

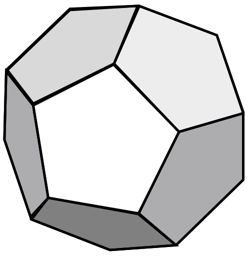


On voit ici cinq faces d'un icosaèdre formant un sommet et cinq diagonales du second type (en pointillé) qui forment un pentagone étoilé régulier et se recoupent aux sommets d'un pentagone convexe également régulier. Nous avons joint les sommets le long de ces diagonales à l'aide de cordon utilisé pour les piquets de camping, qui coulisse bien dans les pitons, et constitué ainsi à l'intérieur de notre icosaèdre un **petit dodécaèdre étoilé de Poinsot** (ses douze faces sont les pentagones étoilés de la figure ci-dessus) et un **dodécaèdre régulier convexe** (dont les douze faces sont les pentagones réguliers de la même figure).

l'objet réalisé la première fois
(moins de deux heures sont nécessaires).

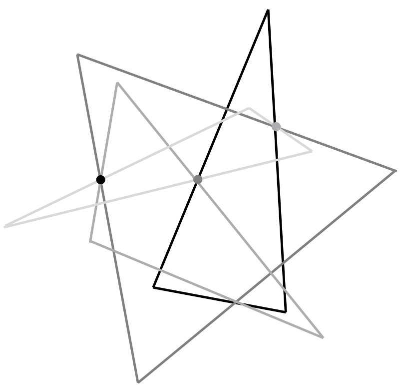


le petit dodécaèdre de Poinsot



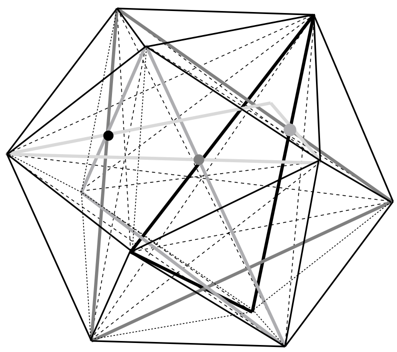
le dodécaèdre convexe qu'on peut voir à l'intérieur.

Toujours pour tester ce qui était faisable avec ce matériel, nous avons réalisé une autre figure intéressante, qui avait été l'objet d'une activité antérieure :

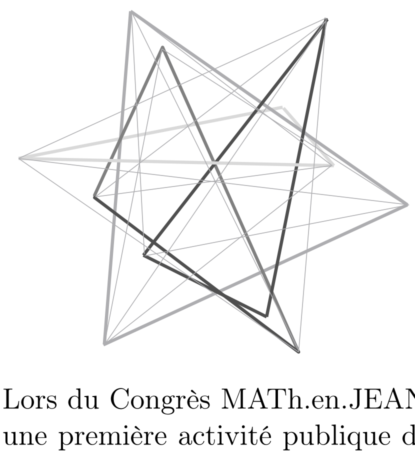


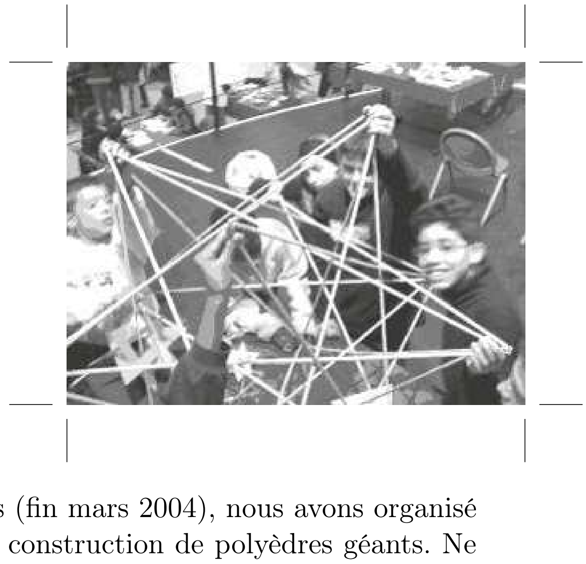
Il s'agit de quatre triangles équilatéraux. Ces triangles se coupent trois à trois en un point qui divise les côtés dans la proportion du nombre d'or.

Les quatre points d'intersection forment un tétraèdre régulier dont le groupe de rotation laisse les quatre triangles invariants. Les 12 sommets des triangles sont ceux d'un icosaèdre régulier (ce qui permet d'en comprendre la construction). En perçant les tiges au bon endroit et en les liant à l'aide de fil de nylon, on réalise l'objet sans difficulté. En libérant une intersection, on le plie et il est donc transportable.



Si on complète cet objet à l'aide de baguettes de même longueur joignant les sommets, on obtient le petit dodécaèdre étoilé de Poinsot, ce qui a toujours beaucoup de succès avec de petits groupes de jeunes :

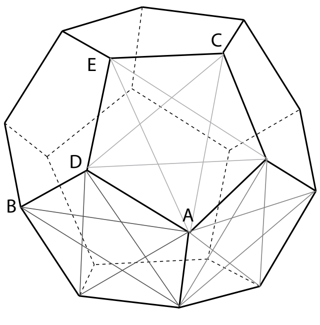




Lors du Congrès MATh.en.JEANs (fin mars 2004), nous avons organisé une première activité publique de construction de polyèdres géants. Ne pouvant construire de **dodécaèdre** régulier car les faces n'en seraient pas rigides, nous avons eu l'idée de réaliser douze pentagones étoilés qu'il est facile de rigidifier à l'aide d'un collier de serrage bien placé.

Nous avons ensuite assemblé ces pentagones, trois par sommet, et avons obtenu un figure assez spectaculaire *(photo prise lors d'une opération « Cité Sciences » en juillet)* :

Un jeune du club a alors remarqué qu'il « voyait » des cubes. Et tout le monde les a alors vus : il y avait cinq magnifiques cubes à l'intérieur de notre dodécaèdre. La question quoi vient naturellement à l'esprit est : pourquoi ? est-ce qu'on peut répondre « sur le tas » ? pour des lycéens, ou de très bons collégiens, on peut avancer l'argument suivant :



Que les segments [AB] et [AC] soient de longueurs égales, découle de la régularité du polyèdre. Pour montrer qu'ils sont orthogonaux, nous remarquons que [AC] et [DE] sont parallèles. Or les longueurs DB et DA sont égales, ainsi que les longueurs EB et EA. Donc [ED] est dans le plan médiateur de [AB], donc est orthogonal à [AB]. Ainsi, en A, on trouve deux triplets de trois segments de même longueur et orthogonaux deux à deux. Cet argument suffit à emporter la conviction, surtout si on a la figure devant soi, mais ne constitue cependant pas une preuve mathématique suffisante diront certains puisqu'il faut encore que les sommets et les arêtes se répartissent bien sur cinq cubes. Il me semble que le mot « preuve » n'est pas ici très adapté. Celui de « démonstration » serait plus exact pour caractériser ce qui manque, c'est à dire une déduction rigoureuse sur la base de définitions abstraites.

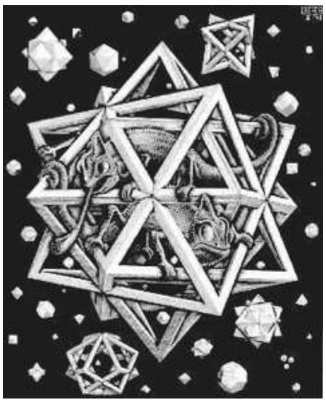
Notre plus grand polyèdre peut ensuite être construit : après avoir matérialisé le dodécaèdre convexe à l'aide de cordelette de camping, nous construisons douze « pointes » (c'est-à-dire des pyramides à base pentagonale) dont les arêtes ont toujours la même longueur de un mètre, sur les douze faces pentagonales. Nous obtenons de nouveau le petit dodécaèdre étoilé de Poinsot. On le voit ci-dessous avec de vaillants constructeurs, lors de la fête de la ville de Drancy, fin mai 2004. En joignant les sommets, nous obtenons un icosaèdre régulier.

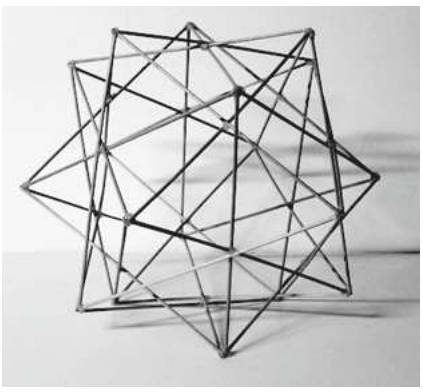
Quelques questions posées : pendant la construction des diagonales de l'icosaèdre, on s'interroge naturellement sur la possibilité d'utiliser un seul morceau de cordelette. C'est l'occasion de faire remarquer que ce n'est pas possible parce que de chaque sommet partent cinq diagonales, et de parler des sept ponts de Koenigsberg. On peut ensuite se demander si on aura assez de cette même cordelette, et donc chercher quelle longueur en est nécessaire. Cela amène à calculer la diagonale du pentagone d'arête 1, égale à $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,618$, le nombre de diagonales $(\dfrac{12 \times 5}{2} = 30)$, soit une longueur de $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \times 30 \approx 48,5471\,019\,662\,49$

Cette précision affolante nous permet d'affirmer que, puisqu'une bobine contient 40 m, deux seront nécessaires !... détail étonnant, mais qui s'explique, la longueur nécessaire pour la dernière étape de notre plus grand polyèdre est exactement la même.

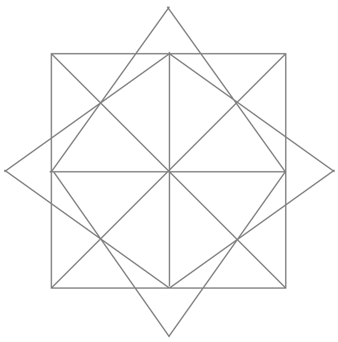
Nous avons également eu besoin de savoir si notre très grand icosaèdre tiendrait dans la salle de l'Espace avenir où se déroulent les activités du club de la MJC. J'ai donc proposé à l'un des membres du club, élève en seconde, de calculer sa hauteur prévisible. Ce qu'il a fait (à une erreur de calcul près), en utilisant notamment la longueur de la diagonale principale du cube inscrit. On trouve $\dfrac{2+\sqrt{5}}{\sqrt{3}} \approx 2,45$ m. Son résultat (une fois corrigé) n'avait pas la même forme que le mien, mais naturellement la calculatrice donnait les mêmes approximations : l'occasion de montrer qu'avec les racines carrées, des formes très différentes peuvent masquer des quantités égales... et de faire le calcul pour le démontrer.

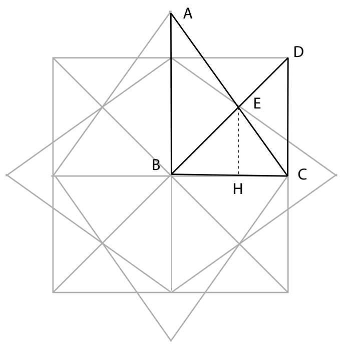
Autres objets :
j'avais donné à une élève de troisième, membre du club, une reproduction de gravure d'Escher, avec pour mission de reproduire la « cage » centrale à l'aide de baguettes collées : ci-dessous, on voit la gravure et le résultat (primé lors du concours « triangles en folie »).





Cette figure est constituée de trois octaèdres imbriqués (c'est la première chose à constater). Comme on peut le voir sur la figure pleine dessinée immédiatement à droite et en dessous de la gravure principale, il y a deux types de sommets et deux types d'arêtes. Certaines arêtes se coupent par deux en leur milieu et sont perpendiculaires (à l'intérieur du troisième octaèdre) . Les autres se coupent selon une symétrie d'ordre trois, la question pour pouvoir construire l'objet étant de savoir en quel point. Il a fallu pas mal de tâtonnements pour résoudre le problème. Nous avons projeté orthogonalement l'ensemble des trois octaèdre parallèlement à l'axe de deux sommets dont les arêtes sont complètement extérieures. On obtient la figure suivante :

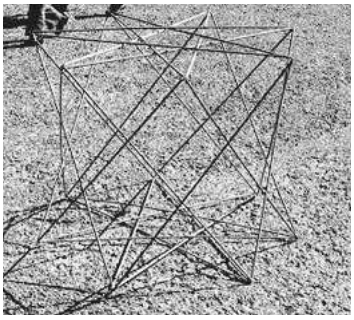




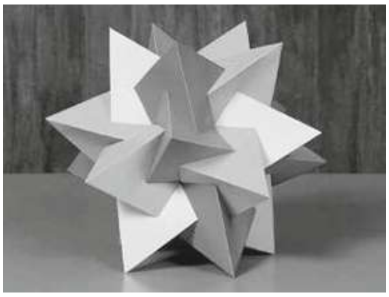
Les huit sommets extérieurs de la figure sont sur un cercle de centre B et de rayon $\frac{\sqrt{2}}{2}$, les arêtes étant toujours supposées de longueur 1. On a d'après Thalès et en tenant compte de ce que $BH = EH$: $\frac{AE}{EC} = \frac{BH}{HC} = \frac{EH}{HC} = \frac{BA}{BC} = \sqrt{2}$. On en déduit que $EC = \sqrt{2} - 1$, soit 0,414 m.

Cette figure a été réalisée à nouveau avec les tiges lors du Salon des jeux et de la Culture mathématique, place Saint-Sulpice à Paris au mois de juin, sous la direction de l'élève qui avait réalisé la maquette l'année précédente.

Pour finir, je signale deux autres possibilités au moins : construction d'antiprismes, et construction de triangles imbriqués non sécants, tenus à la distance voulue à l'aide de fils de nylon de la bonne longueur.



Un joli défi à relever serait la construction de ces cinq tétraèdres inscrits dans un dodécaèdre :



III - Quelques conclusions

Les exemples qui précèdent me paraissent montrer que certains objets se prêtent particulièrement bien à une activité et à une réflexion mathématique. Un certain nombre de conditions sont requises lorsqu'il s'agit de mettre en œuvre une pratique vivante : la manipulation ou la construction de l'objet doit être simple, attrayante, poser de façon naturelle des questions variées, et, dans toute la mesure du possible, aider à la résolution des questions posées. Il est rare que toutes ces conditions soient réunies.

Par exemple, les triangles de plastique sont parfaitement adaptés à l'exploration et la classification des différents types de deltaèdres, aux comptages qu'on peut effectuer dessus, mais beaucoup moins à l'étude de leur coloriage. Pour un autre problème de coloriage, sur un tore cette fois, j'avais donné il y a quelques années à mes élèves l'idée d'utiliser un rectangle quadrillé, et cela s'était révélé d'autant plus fécond que l'usage d'un logiciel de dessin avait permis de diminuer très rapidement le nombre de carrés, une fois la propriété cherchée trouvée.

Il n'est pas douteux que la règle et le compas, héritiers de la corde des arpenteurs égyptiens, aient joué un rôle de premier plan dans le développement des mathématiques, ni que les calculatrices et ordinateurs soient appelés à faire de même à l'avenir. Cependant, dans ce dernier cas, il y a une particularité importante : il est très difficile de savoir ce qu'on fait exactement lorsqu'on les manipule : ils se rapprochent par là des instruments utilisés dans les sciences dites « expérimentales » (physique, biologie, etc.) Pour ma part je les ai utilisés en atelier pour explorer des objets (grands nombres, pavages, fractales)... qui sans cela seraient restés inaccessibles. En l'occurrence, les élèves ont fait un peu de programmation, mais à mon sens cela n'a rien d'obligatoire.

Les tiges utilisées pour fabriquer des polyèdres et d'autres figures, ont permis d'aborder très rapidement de nombreuses propriétés géométriques et de faire des démonstrations et des calculs « sur le terrain ». Leur intérêt ne s'est donc pas limité au fait qu'elles permettaient des réalisations spectaculaires.

Un objet mathématique peut se présenter d'autres façons : c'était le cas du boulier, des documents, des casse-têtes de la valise maths à modeler, qui ont été présentés dans l'atelier. Tous nous ont amenés à faire des maths. Mais on aurait pu aussi nous donner une conjecture ou nous poser une question et nous laisser chercher, comme on le fait dans MATh.en.JEANs, ou bien encore nous donner un exercice à chercher, ce qui est quand-même l'objet mathématique manipulé le plus souvent par les élèves dans l'enseignement.

Les calculatrices, utilisées de façon intelligente, font certainement partie également des objets mathématiques. Cela fait d'ailleurs une petite trentaine d'années qu'on réfléchit à la question, et pour ce que j'en connais, elles sont aujourd'hui très largement utilisées - conformément d'ailleurs aux programmes - pour des activités très variées. Entre temps, elles ont perdu un peu de leur caractère proprement mathématique du

fait de leur banalisation pour devenir des objets d'usage courant et comme tels réputés sans mystère. Dans certaines sections, les élèves renâclent à les acheter et n'hésitent pas à sortir leur téléphone portable pour faire des calculs élémentaires !
Par ailleurs, les mathématiques constituent une science qui se prête à une abstraction rapide et poussée, et où l'on utilise peu de matériel. Ces deux caractéristiques font qu'on ne les range pas, d'habitude, parmi les sciences expérimentales. Mais, et sur ce point je pense rejoindre ce qu'a dit Martin Andler dans son exposé, la déduction n'est pas le seul mode par lequel elles se développent. L'expérience, en particulier, y intervient, sous de multiples formes. Sans minimiser la difficulté à raisonner abstraitement, qui doit être reconnue en tant que telle, il me semble qu'une des causes possibles de l'échec de certains élèves en mathématiques peut venir d'une lacune dans le lien à l'expérience. De plus, s'il est vrai que la fréquentation d'espaces abstraits finit par leur donner une vie et une beauté propres, le lien, même ténu, qui les relie à la réalité qu'ils formalisent me paraît de nature non à les appauvrir mais à les enrichir.

La recherche d'objets susceptibles d'aider à un apprentissage vivant des mathématiques me semble donc bien d'actualité. Ces objets doivent favoriser à la fois l'intérêt, la manipulation, et l'accès à l'abstraction. Joli programme !

Le boulier chinois

Caroline Poisard [1]
Doctorante à l'université de Provence
Laboratoire du Cirade
avec le soutien financier de la Région Paca

1. Introduction

L'objectif principal de cet atelier est d'étudier le boulier chinois (ou suanpan). Cette exploration permettra dans un premier temps de comprendre comment écrire un nombre et faire des opérations sur le boulier. Les questions que nous proposons pour ce travail sont : Comment ça marche ? Pourquoi ça marche ? A quoi ça sert ? Qui s'en sert ? Pour quoi faire ?
Ensuite, nous nous poserons de nouvelles questions et nous rentrerons plus précisément dans la démarche des situations recherche que développe l'équipe « *Maths à modeler* » de Grenoble [2].

Projet de recherche

Cet atelier s'inspire d'une thèse en cours en didactique des mathématiques. Pour résumer notre sujet de thèse, nous dirons qu'il se bâtit sur une « analyse didactique d'une innovation pédagogique ». L'originalité de la démarche pédagogique étudiée consiste à construire et utiliser des objets mathématiques, à les manier. Une autre particularité essentielle est que nous ne nous situons pas dans le cadre classique des observations en didactique des mathématiques, celui de la classe intra muros. Nous analysons des situations qui vivent en relation avec le milieu de la classe, mais physiquement dans un autre lieu : un centre d'animation scientifique et technique qui reçoit des scolaires.
L'enseignement qui nous intéresse est celui des mathématiques, le niveau celui du cycle 3 du primaire. Notre questionnement touche différentes strates et différents acteurs de ces pratiques d'animation, en particulier le temps des animations et leur impact sur l'activité cognitive. Quels sont les moments importants pour l'apprentissage qui se réalisent au centre ?

---

[1] poisard@unimeca.univ-mrs.fr

[2] Grenier D., Payan C., Situations de recherche en « classe », essai de caractérisation et proposition de modélisation. *Les cahiers de laboratoire Leibniz,* 92. En ligne sur le site du Laboratoire Leibniz (http ://www-leibniz.imag.fr/LesCahiers).

Quand ? Comment ? En mathématiques ou dans un autre domaine, scolaire ou non ? Existe-t-il un lien à faire entre l'école et le centre ? Qui ? Comment ? Quand ? Quels peuvent être les objets matériels intéressants pour un apprentissage du calcul ? Comment caractériser ces objets ? Quel est leur effet cognitif ? Les contraintes d'utilisation ?

Observations

Les observations ont porté (d'octobre 2003 à mai 2004) sur quatre classes de CM2 qui sont venues au centre d'animation sur le thème des instruments à calculer (entretiens enfants, instituteurs, animateurs, questionnaires enfants, films des séances au centre, expression écrite en classe après chaque séance). Cet atelier a été réfléchi en fonction des contraintes du centre et de la thématique à aborder : les mathématiques.

Chaque classe vient trois journées au centre, celle-ci est divisée en trois, deux groupes sont avec des animateurs pour construire des instruments avec divers outils (scies, perceuses électriques...) et le troisième groupe travaille avec l'instituteur. La réalisation des objets n'inclut pas une phase de réflexion sur la conception comme c'est le cas pour la démarche de projet en technologie au collège. Le double objectif de l'animation scientifique : celui de recherche de plaisir pour les enfants avec une finalité d'apprentissage est un des points délicats à produire dans de bonnes conditions. Une grosse part des explications est laissée volontairement à l'école, la démarche de l'instituteur va donc déterminer l'intérêt didactique des séances.

L'atelier sur les instruments à calculer comporte la fabrication et l'étude du boulier chinois, des bâtons à multiplier (Néper et Genaille-Lucas) et de la règle à additionner (règle à calcul pour l'addition et la soustraction).

Le temps des animations constitue un moment important de l'apprentissage où les enfants sont fortement valorisés par la réalisation d'une œuvre personnelle. Même si, l'utilisation rapide des objets pendant les animations ne semble pas permettre aux enfants une appropriation des modes de fonctionnement des instruments, ces moments sont décrits par les enfants comme " héroïques " lors des entretiens où chaque détail est mentionné et où le déroulement des séances est repris point par point ce qui montre bien une activité extraordinaire c'est à dire qui sort de l'ordinaire. Lors des séances avec l'instituteur, nous avons choisi d'étudier les instruments en posant aux enfants la question : Comment ça marche ? Pourquoi ça marche ? L'hypothèse est que l'exploration produit une activité qui s'organise bien autour d'un enseignement de mathématiques.

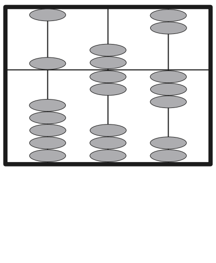
Dans l'atelier, nous allons mettre au travail les participants autour de ces mêmes questions.

2. Le boulier chinois ou suan-pan

On estime que l'usage du boulier chinois remonte au XIII^{e} siècle. Il constitue un instrument portatif (à l'inverse des abaques), d'usage simple et efficace pour les opérations élémentaires. Pour nous, le boulier est un support d'activité en mathématiques, l'utilisation que nous montrerons ici n'est pas obligatoirement celle d'une utilisation courante, machinale comme c'est le cas lorsqu'on apprend à l'utiliser en Chine ou au Japon depuis l'enfance. Le but est de comprendre pourquoi un tel objet est efficace pour faire des calculs et non pas d'apprendre par cœur les règles de son utilisation.

Comment ça fonctionne ?

On posera cette question aux participants avec un boulier chacun. Après un temps de réflexion et une mise en commun des résultats on poursuivra sur quelques exemples intéressants. Dans chaque tige le boulier chinois possède 2 quinaires (qui valent chacune cinq) et 5 unaires (qui valent chacune un) et chaque tige représente une position du système décimal : unités, dizaines, centaines, etc. en partant de la droite vers la gauche. La position zéro s'obtient lorsque les boules sont vers le cadre extérieur c'est à dire que pour marquer un nombre on ramène les boules vers le cadre intérieur afin de déplacer les unaires et les quinaires en un seul mouvement.
L'enjeu est de revisiter des savoirs en explorant le mode de fonctionnement du boulier et de se poser de nouveaux problèmes qui sortent du cadre strict de son utilisation. Regardons cet exemple :



Comment lire ce nombre écrit sur le boulier ? Comment écrire autrement 12 centaines ? Combien de possibilités a-t-on sur le boulier chinois ?

L'addition puis la soustraction

Comment réaliser une addition puis une soustraction sur le boulier ? On proposera des opérations sans puis avec retenues. Ces opérations s'effectuent par dessus, on ne garde pas de trace des calculs intermédiaires, on lit directement le résultat. Avec le boulier on voit le passage des retenues car on l'effectue à la main. Par exemple, le passage de 10 dizaines en une centaine se fait par l'échange de 10 dans la tige des dizaines avec une dans celle des centaines. Le boulier comporte une très bonne gestion des retenues, on peut commencer une opération par la gauche pour avoir un ordre de grandeur du résultat, sans avoir de soucis de retenue. Les nombres sont inscrits (ou codés) et cette inscription est dynamique, ce qui est impossible avec papier et crayon.
On peut l'écrire de cette manière :

$$\begin{array}{cccc} & 7 & 8 & 5 \\ + & 1 & 6 & 3 \\ \hline & 8 & 14 & 8 \\ \hline & 9 & 4 & 8 \end{array}$$

ou encore :

$$\begin{array}{cccc} & 7 & 8 & 5 \\ + & 1 & 6 & 3 \\ \hline & & & 8 \\ + & 1 & 4 & \\ + & 8 & & \\ \hline & 9 & 4 & 8 \end{array}$$

Peut-on réaliser $12,56 + 34,129$? Oui, il est alors nécessaire d'établir une convention pour placer les unités, par exemple la quatrième tige en partant de la droite, ce qui laisse 3 chiffres inscriptibles après la virgule. On peut donc aussi travailler avec les décimaux sur le boulier.

La non unicité d'écriture

Pour aborder ce point, nous proposerons aux participants d'inscrire 10 de trois manières différentes et de réfléchir sur la manière la plus économique. Comment et pourquoi la définir ? On rencontre une situation similaire avec les fractions que l'on apprend à écrire de façon irréductible, on a bien plusieurs manières pour écrire un même nombre : $10/2{=}5$ ou $18/12{=}3/2$. C'est le cas des radicaux et aussi des entiers, $0,9999\cdots = 1$! Enfin, une opération du type $1\,038 - 55$, montre que comme en algèbre, sur le boulier il est parfois nécessaire de décomposer une écriture pour arriver au résultat. Par exemple il faut parfois passer par $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ c'est-à-dire l'inverse de la factorisation pour trouver un résultat.

Comment faire une multiplication ?

La méthode classique s'écrit sur une feuille :

$$\begin{array}{ccc} & 3 & 7 \\ \text{x} & & 5 \\ \hline 1 & 8 & 5 \end{array}$$

On dit à l'oral ou dans sa tête : « 5 fois 7 : 35 ; je pose 5 et je retiens 3. 5 fois 3 : 15 et 3 : 18 ».

Avec le boulier, le calcul se décompose de telle manière que l'on n'a pas de retenue (le « je retiens 3 » de précédemment). Ce qui est intéressant avec cette méthode c'est que l'on voit mieux le décalage, on remonte au sens mathématique. Pour écrire la seconde ligne, on se place dans la tige de dizaines, on laisse la tige des unités vide car on va multiplier 5 unités par 3 dizaines.

$$\begin{array}{cccl} & 3 & 7 & \\ \text{x} & & 5 & \\ \hline & 3 & 5 & 5\text{x}7 \\ 1 & 5 & 0 & 5\text{x}30 \\ \hline 1 & 8 & 5 & \end{array}$$

Comment extraire une racine carrée avec le boulier ?

Calculer $\sqrt{25}$.
On utilise la propriété que la somme des n premiers nombres impairs est égale à n^2, c'est-à-dire : $\sum\limits_{i=0}^{n-1} 2i + 1 = n^2$
Dans cet exemple, $1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25 = 5^2$.
Pour ce calcul sur le boulier, on effectuera des soustractions successives en notant le nombre des soustractions effectuées : $25 - 1 = 24$, on inscrit une boule à gauche. Total de soustractions = 1.
$24 - 3 = 21$, on rajoute une boule à gauche. Total = 2.
$21 - 5 = 16$, total = 3.
$16 - 7 = 9$, total = 4.
$9 - 9 = 0$, total = 5.
Le résultat est un nombre entier et c'est 5.

3. Situations recherche

Enlever des boules

On répondra à la première question : combien peut-on enlever de boules au maximum par tige pour pouvoir calculer à la manière traditionnelle ?

Ce qui peut aussi se formuler : peut-on avoir une écriture unique de tous les nombres en base 10 ? Cette recherche nous fait (re)découvrir le boulier japonais ou soroban qui possède le nombre de boules minimales c'est à dire 4 unaires et 1 quinaire. Son apprentissage nécessite beaucoup plus de dextérité. Cette amélioration du suan-pan date des années 1950. En fait si on pousse le raisonnement du nombre minimum de boules, il suffit d'une boule par tige pour pouvoir inscrire n'importe quel nombre en binaire !

Ensuite, on formera deux groupes de travail avec une question de recherche chacun :
1- Quelles valeurs peut-on donner aux boules pour que l'on puisse écrire tous les nombres ? Etudier tous les cas.
2- Si certaines boules sont collées entre elles, peut-on encore utiliser le boulier ? Sous quelles conditions ? Si on a le choix, où peut-on placer ces boules collées pour perdre le moins de nombres possible ? Etudier tous les cas. Dans les deux points suivants, nous ne donnerons que quelques pistes de recherche afin de permettre la recherche personnelle du lecteur.

Changer la valeur des boules

Piste de recherche : pour le suan-pan, on peut donner les valeurs 2 à 6 pour les boules du bas en gardant 1 en bas. Peut-on changer la valeur des boules du bas ? Oui, on peut leur donner la valeur 2 ou 3 et 1 pour celles du haut. Quand on change de valeurs : quel est le nombre maximum inscriptible ? Quels sont ceux dont l'écriture est unique ?

Coller des boules

Piste de recherche : On prendra le cas du boulier-compteur avec 9 boules par tige. Coller 2 boules équivaut à enlever une boule. Perd-on autant de nombres si cette boule est dans les unités ou dans les dizaines ? Oui, ce phénomène n'est pas proportionnel à la taille du nombre comme on peut le penser en première analyse ! Ainsi, sur une tige on écrit 10 chiffres (de 0 à 9). Donc pour k tiges, on écrit 10^k nombres et on compte de 0 à $10^k - 1$. Raisonnons avec les nombres qu'on peut encore écrire puis on calculera la perte. Pour n boules collées dans une même tige ; avec k tiges au total, on peut inscrire $10^{k-1} \times (10 - (n-1))$, donc on perd : $10^k - 10^{k-1} \times (10 - (n-1))$ nombres. Est-ce qu'il vaut mieux perdre les boules dans toutes les tiges ou en pénaliser une seule ? Avec 3 tiges et 4 boules collées entre elles, dans une même tige, on inscrit $10 \times 10 \times 7 = 700$ nombres et on en perd $1000 - 700 = 300$. En effet, si on colle 4 boules, on perd l'écriture de 3 nombres, il en reste donc bien 7 dans une des tiges. Par contre, 2 boules collées dans 2 tiges, on peut inscrire $10 \times 9 \times 9 = 810$ et on en perd 190. Il vaut donc mieux répartir les pertes dans les tiges.

4. Conclusion

Le boulier pour qui ? Pour des élèves en difficultés, il apparaît un support adéquat pour dédramatiser le rapport aux mathématiques afin de comprendre les techniques de calcul mal maîtrisées. Certains orthophonistes l'utilisent d'ailleurs pour traiter des problèmes de dyscalculie. Pour des élèves qui maîtrisent les techniques opératoires usuelles ou pour des adultes (instituteurs. . .) il est un moyen pour retrouver le sens mathématique qui se cache derrière une technique devenue routinière.

Le boulier pour quoi ? Il est adapté pour un atelier d'animation en mathématiques (ou pour la classe) et peut-être étudié sous différents angles, trois en particulier : l'étude des techniques opératoires, l'approche pluridisciplinaire ou l'histoire du calcul. Une étude peut s'envisager sur l'analyse des techniques opératoires disponibles pour le calcul : calcul mental, calcul posé (ou papier-crayon), avec une approche historique sur la numération et les techniques de calcul, du boulier à la calculatrice. On peut aussi imaginer une approche pluridisciplinaire c'est à dire technologie et mathématiques avec la production d'instruments à calculer (boulier, réglettes à multiplier, règle à additionner) puis leur étude en classe de mathématiques. Enfin, on peut partir de questions d'histoire : Comment faisait-on sans calculatrice avant ? On développe ainsi l'histoire du calcul par les instruments à calculer en touchant en particulier les notions de calcul approché (avec la règle à calcul des ingénieurs) et calcul exact (avec le boulier des marchands ou les besoins des comptables).
Dans tous les cas l'idée est de permettre d'explorer le boulier : Comment ça marche ? Pourquoi ça marche ? A quoi ça sert ? Qui s'en sert ? Pour quoi faire ? Quels sont les calculs que l'on peut réaliser, ceux qu'on ne peut pas ? C'est à dire d'insister sur le questionnement de départ pour permettre de « créer des œuvres » , puis se poser de nouveaux problèmes.

D'autre part, ce travail s'inscrit dans une définition des mathématiques comme une science expérimentale qui se construit autour d'expériences, de réalisations matérielles, des manipulations, d'observations et de mesures comme c'est le cas en sciences physiques et en sciences de la vie et de la terre. Notre objectif est de déterminer les contraintes pour qu'un travail expérimental soit aussi un travail mathématique.

5. Quelques références sur les instruments et les machines à calculer

Aymé N., 1997, " Le boulier chinois " in Actes du colloque d'histoire des sciences : *L'Océan Indien, au carrefour des mathématiques arabes, chinoises, européennes et indiennes*, IUFM de La Réunion. En ligne : http ://www.reunion.iufm.fr/Dep/mathematiques/∼
Seminaires/ActesPDF/Ayme52.pdf

Barbin E, Le Goff J.-P., 2000, *Si le nombre m'était conté...*, ellipses, Paris (Commision Inter Irem, épistémologie et histoire des mathématiques)

Chabert J.-L., Barbin E., Guillemot M., et al, 1994, *Histoires d'algorithmes : du caillou à la puce*, Belin, collection Regards sur la science, Paris.

Cumin J., Hossenlopp J., 1994, *Le boulier : initiation*, Chiron, Paris.

Cumin J., Hossenlopp J., 1998, *Le boulier : perfectionnement*, Chiron, Paris.

Ifrah G., 1981, réed 1994, *Histoire universelle des chiffres*, Robert Laffont, Paris.

Lucas E., 1893 rééd 1979, *Récréations mathématiques III*, A. Blanchard, Paris. (En ligne sur http ://gallica.bnf.fr)

Lucas E., 1891 rééd 1991, *Théorie des nombres*, Gauthier Villars, Paris. (En ligne sur http ://gallica.bnf.fr)

Marguin J., 1994, *Histoire des instruments et machines à calculer : trois siècles de mécanique pensante*, 1642-1942, Hermann éditeurs des sciences et des arts, Paris.

Martzloff J.-C., 1987, *Histoire des mathématiques chinoises*, Masson, Paris.

Situations-Recherche

Charles Payan
IMAG - Grenoble

Premier temps

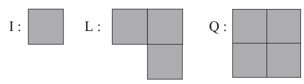
Echange autour des situations du CDRom [1] « Les 7 énigmes de K'stêt ».

Deuxième temps

Travail de recherche en groupe sur une situation-recherche particulière : « la chasse aux bêtes » [2]

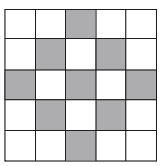
Point de départ :

On donne un support (*terrain de chasse*) : quadrillage (5 × 5 par exemple).
On choisit une « *bête* » : polymino (assemblage connexe de petits carrés) de forme donnée ou simplement de taille donnée. Par exemple :



ou des « bêtes » de taille au moins 4, 5, ...
On doit placer sur le territoire des carrés (*cartouches*) de façon à toucher toutes les bêtes. Autrement dit, sur l'espace restant, on ne doit pouvoir placer aucune bête. On se propose d'utiliser le moins de cartouches possibles.

Par exemple, ceci est une solution pour la bête **I**. Cette solution est minimale. Est-elle minimum ?



[1]édité par Génération 5
[2]On peut choisir une présentation plus pacifique

C'est aussi une solution (non minimale) pour la bête **Q** et une solution minimale pour les bêtes de taille au moins 4 et au moins 5. Ce n'est pas une solution pour la bête **L**.

Ce problème n'est pas résolu dans le cas général (support de taille quelconque) même pour de « bêtes » de taille réduite.

Les stagiaires ont travaillé en trois groupes. Un groupe a choisi de chasser la bête **L**, un autre la bête **Q**, le troisième, les bêtes de taille au moins 5.

Cette activité permet de mettre en évidence :
- le caractère **expérimental** des maths.
- les problèmes d'**optimisation** très peu présents dans l'enseignement.
- le rôle de la **preuve**, la différenciation entre *il faut* et *il suffit.*
  Ici pour avoir un résultat sur la borne sup. d'une solution optimale, il suffit d'exhiber une solution. Obtenir des résultats sur des bornes inf. est plus difficile et nécessite une preuve : on peut placer sur le territoire des bêtes disjointes (qu'il faudra bien toucher) ou de plus petits territoires pour lesquels on connaît la valeur optimale.
- et plus généralement comment mettre en œuvre une **démarche scientifique** : va et vient entre simplification et généralisation, entre conjecture, preuve, réfutation.

REMARQUE

A l'occasion de cette activité ont été abordées des discussions sur certains types de preuves (leur nature, leur rôle, leurs limites), notamment le *raisonnement par récurrence* que l'on a pu faire apparaître comme étant englobé dans l'utilisation de la notion de *contre-exemple minimal.*

De l'usage simple des livres anciens

Jean-Alain Roddier
Lycée de Haute Auvergne à Saint Flour

C'est à titre de compte-rendu de notre atelier que je vous propose de parcourir les quelques lignes qui suivent, elles sont extraites d'un livre de MDCCXL intitulé Eloges des Académiciens écrit par Monsieur de Fontenelle (secrétaire perpétuel de cette même Académie). L'idée est de montrer combien il peut être intéressant pour les élèves de lire ne serait-ce qu'une fois un tel texte sur une figure locale pour les sanflorains et incontournable pour les professeurs de Mathématiques que nous sommes : Michel Rolle.

Il est bon de noter que le caractère très littéraire du texte est certainement lié au fait que Bernard le Bovier de Fontenelle était aussi membre de l'Académie française, le « Ce qui se conçoit bien s'énonce clairement » entre ici en ligne de compte dans la capacité de l'auteur à décrire de façon aussi brillante - mais malgré tout sans complaisance - l'étendue de l'œuvre mathématique de son contemporain.

Nous donnons ici une référence bibliographique qui pourra aider à mener à bien une activité à la suite de la lecture de ce texte. Il est utile de savoir qu'une version de ce texte est disponible en ligne à partir de l'adresse Internet suivante :
http ://www.academie-sciences.fr/archives/~
doc_anciens/hmvol3521_pdf/p94_100_vol3521.pdf

« Michel Rolle nâquit à Ambert, petite ville de la basse Auvergne le 21 avril 1652. Son père, Marchand peu aisé, après lui avoir fait bien apprendre à écrire, et un peu d'Arithmetique, le mit chés un Notaire, et ensuite chés différents Procureurs du Pays ; pour le former aux affaires, et à la pratique, qui devoient être le principal fond de sa subsistance. Mais il se lassa bien-tôt de ces sortes occupations, qui en effet ne sont pas mediocrement dégoûtantes, pour qui n'y est pas appelé par la Nature, et à l'âge de 23 ans il vint à Paris avec la seule ressource d'écrire assés bien pour en pouvoir donner des leçons.

Le peu d'Arithmetique, qu'il savoit, et qui est communément joint à cette proffession, étoit une foible semence qui germa bien vîte chez lui par la bonne disposition du terroir. Il entra plus avant, et toujours plus avant dans la Science des Nombres, et enfin sans avoir eu l'intention, et presque sans *s'en apercevoir, il se trouva conduit jusqu'à l'Algebre. C'étoit là où la Nature le vouloit. Il s'enfonça dans la plus abstraite Analise, la difficulté n'étoit que de trouver du temps ; sa profession, devenüe d'autant plus necessaire qu'il étoit déja chargé de famille, l'occupoit beaucoup ; mais tout ce qu'elle pouvait lui laisser de loisir, tout ce qu'il pouvait dérober à son sommeil, la passion dominante le prenoit, et l'on sait que les passions font toujours leur part assés bonne.*

Feu M. Ozanam avoit proposé ce problême, Trouver 4 nombres tels que la difference de deux quelconques, soit un quarré, et que la somme de deux quelconques des trois premiers soit encore un quarré. Il avoit ajoûter que le moindre de ces nombres n'auroit pas moins de 50 chiffres, et qu'il ne croyoit pas qu'on en pût trouver de plus petits. M. Rolle en 1682 c'est-à-dire âgé de 30 ans, résolut le problême par quatre formules algébriques qui exprimoient les quatre nombres, et n'avoient que deux inconnuës ou indéterminées, telles qu'en supposant que la premiere étoit 1 et la seconde 2 ce qui est la plus simple des suppositions, il venoit 4 nombres conditionnés comme on les demandoit, et qui n'avoient chacun que 7 chiffres au lieu de 50 espece d'insulte savante que l'on faisoit au problême. M. Rolle donnoit de plus la maniere d'avoir 10 millions de fois mille milliars de résolutions dans lesquelles le plus grand nombres de chiffres n'auroit pas 50 chiffres, insulte infiniment redoublée. Aussitôt M. Colbert, qui avoit des espions pour découvrir le merite caché ou naissant, déterra M. Rolle dans l'extrême obscurité où il vivoit, et lui donna une gratification qui devint ensuite une pension fixe.

Encouragé par une récompense si prompte, et en quelque sorte si prévenante, et plus encore par la gloire d'un début si brillant, il se dévoüa entierement à l'Algebre, et y fit de si grands progrès, qu'en 1685 trois ans seulement après que son nom eut paru pour la premiere fois, il fut reçû dans l'Académie des Sciences pour y tenir une place qu'un autre eût peut-être eu du mal à remplir.

Il n'y a point d'habiles Mathematiciens qui ne sachent beaucoup d'Algebre, ou du moins assés pour l'usage indispensable. Mais cette Science poussée au de-là de cet usage ordinaire est si épineuse, si compliquée de difficultés, si embarassée de calculs immenses, et pour tout dire, si affreuse, que très-peu de gens ont un courage assés heroïque pour s'aller jetter dans ces abîmes profonds et tenebreux. On est plus flatté de certaines Théories brillantes, où la finesse de l'esprit semble avoir plus de part que la dureté du travail. De plus, il ne s'agit dans l'Algebre que de l'art de démêler une grandeur inconnuë *au travers de mille nuages qui la couvrent, supposé qu'on ait dessein de la connoître ; mais ce dessein, ce sont d'autres parties des Mathematiques, des interêts particuliers, pour ainsi dire, qui le font naître en certaines occasions, et on les attend pour se donner la peine d'employer l'Algebre ; ou, ce qui est encore plus court, quand l'affaire en est venuë là, on se contente de la renvoyer à l'Algebre, qui est obligé de s'en charger. M. Rolle ne la traita pas ainsi, il l'aima pour elle-même, et en brava toutes les horreurs, sans se proposer autre chose que de les surmonter : Cependant comme l'Algebre et la haute Geometrie sont devenuës inséparables, il penetra aussi jusqu'à cette Geometrie, mais il n'alla jamais jusqu'à celle qui est mêlée de Phisique, peut-être parce que l'Algebre, à laquelle il étoit fidelle, ne l'y conduisoit pas nécessairement.*

M. de Louvois, dont un des fils avoit appris de lui les Elements de Mathematique, lui donna au bureau de l'Extraordinaire des Guerres une seconde place, qui valoit mieux que celle de l'Académie, et pouvoit le mener plus loin. Il tâcha pendant quelques temps de les accorder toutes deux, et même M. de Barbezieux voulut bien lui permettre de s'absenter deux fois pour venir aux Assemblée de la Compagnie. Mais tout cela étoit forcé, il s'accabloit de travail, il prenoit trop sur son sommeil ; enfin il sentit l'impossibilité absoluë de servir à deux maîtres, et dans la necessité de choisir, il préfera celui que sa fortune ne lui conseilloit pas, mais que son goût demandoit. Il a fait encore d'autres sacrifices courageux à l'Algebre, et à sa liberté ou plutôt à l'Algebre seule, car il n'avoit besoin de liberté que pour elle. Il y a entre les Sciences et les Richesses une ancienne et irréconciliable division.

En 1690 il publia un Traité d'Algebre in-40. Ce qui en a le plus brillé, a été sa Methode des Cascades, qui résoud les Equations déterminées de tous les degrés. On approche toujours de la valeur inconnuë par des Equations différentes et successives, qui vont toujours en baissant ou en tombant d'un degré, et de-là est venu le nom de Cascades. Il enrichissoit encore le Dictionnaire de l'Algebre de quelques termes nouveaux, tels que l'Arbre de direction, l'Arbre de retour, etc. La nouveauté des choses avoit produit necessairement celle des mots.

Comme il s'étoit contenté d'exposer la Methode des Cascades sans la démontrer, il donna l'année suivante un nouvel Ouvrage, Démonstration d'une Methode pour résoudre les Egalités de tous les degrés, suivie de deux autres methodes, dont la premiere donne les moyens de résoudre ces mêmes Ega-

lités par la Geometrie, et la seconde pour résoudre plusieurs Questions de Diophante qui n'ont point été résolues. Il arrive quelquefois dans ces matieres que l'on trouve de bonnes Methodes, et qu'il n'est pas aisé d'en trouver la démonstration assés précise, ou assés claire. On voit la route qu'il faut tenir, on voit que l'on arrivera, on arrive toûjours, mais à toute rigueur on pourroit douter, et on ne forcera pas un incrédule, triomphe indispensable pour les Mathematiques. Il manquoit aux Cascades, et leur auteur leur assura. Quant aux Questions de Diophante, que la propriété des quarrés des 3 côtés du Triangle rectangle a fait naître, et qui regardent les nombres quarrés, elles ont exercé plusieurs Geometres modernes, qui en avoient encore laissé à M. Rolle une assés grande quantité des plus difficiles à résoudre. La multitude de calculs, et de combinaisons dont il avoit l'esprit plein, le rendoit singulirement propre à cette entreprise.

En 1699 il publia encore un Ouvrage intitulé, Méthode pour résoudre les questions indéterminées de l'Algebre. Il les avoit promises dans son Traité de 1690 le Journal des Savants assura qu'elles étoient les seules generales que l'on eût jusqu'alors pour résoudre par des lignes les Equations indéterminées et qu'elles étoient de plus fort utiles, et quelquefois necessaires pour résoudre aussi par des lignes toutes les Equations déterminées. On sait assés que les indéterminées expriment des Courbes, et que les déterminées se résolvent par des intersections de Courbes, ce qui fait le grand et important commerce de l'Algebre et de la Geometrie. Mais il semble que M. Rolle avoit soin d'y donner toujours beaucoup davantage à l'Algebre, et de lui faire joüer le personnage le plus considerable.

En ce temps-là le Livre de M. le M. de l'Hôpital avoit paru, et presque tous les Mathematiciens commençoient à se tourner du côté de la nouvelle Geometrie de l'Infini, jusque-là peu connuë. L'universalité surprenante des Methodes, l'élegante brieveté des démonstrations, la finesse et la promptitude des solutions les plus difficiles, une nouveauté singuliere et imprévûë, tout attiroit les esprits, et il se faisoit dans le monde Geometre une révolution bien marquée. Elle n'étoit pourtant pas absolument generale ; dans le pays même des démonstrations on trouve encore le moyen de se diviser. Feu M. l'Abbé Galois, comme nous l'avons de même dans son Eloge, ne goûtoit pas la nouvelle Geometrie, mais il étoit bien-aise de ne la combatre qu'avec le secours ou à l'abri d'un Geometre de nom, et heureusement il trouva dans M. Rolle les dispositions necessaires pour s'unir à lui. Il mit dans la societé le courage d'entreprendre la guerre, et l'art de la conduire, qui tous *deux auroient peut-être manqué à M. Rolle, et celui-ci ne fut obligé que de fournir les raisonnements. La contestation éclata dans l'Académie, qui eut d'abord la sagesse d'écouter tout, et ensuite celle d'assoupir par son autorité une dispute qui n'en devoit pas être une, du moins de la manière dont elle l'étoit ; car il pouvoit bien y avoir, et il y a certainement encore des difficultés à éclaircir dans le Sistême de la nouvelle Geometrie, mais on parloit de renverser le Sistême total, et la proposition offensoit trop les oreilles savantes.*

Quand la paix des infiniment-petits fut faite, ou le silence ordonné, M. Rolle donna son application à d'autres sujets de Geometrie, où l'Algebre dominoit toûjours ; il ne laissoit pas d'y glisser encore adroitement des accusations d'insuffisance ou même de fausseté contre le nouveau Calcul, avec lequel il ne s'est jamais bien reconcilié, et les Infinitaires étoient au guet pour ne lui rien passer qui les interessât trop. Il se mit aussi à examiner, et pour ne rien dissimuler, il attaqua ouvertement la Geometrie de Descartes sur sa merveilleuse Theorie de la construction des Egalités ; feu M. de la Hire s'en rendit le défenseur, comme Messieurs Varignon et Saurin l'étoient des Infiniment-petits. Cette matiere produisit des discussions fort fines et fort délicates, dont la plus curieuse est dans l'histoire de 1710 et il est vrai que malgré un grand zéle pour la gloire de Descartes, il falut accorder à M. Rolle quelques unes de ses prétentions, et reconnoître ce qu'on lui devoit sur des points assés importants. Il résultoit de tout cela que quand il ouvroit une matiere dans l'Académie, il sembloit que l'on dût se préparer à combattre ; une legere difference de forme dans ce qu'il proposoit eût prévenu cet inconvénient, l'objection la plus fulminante peut sans rien perdre de sa force, devenir un simple éclaircicement qu'on demande, mais il déclaroit trop nuëment et trop geometriquement le fond de sa pensée sur des Ouvrages reverés. La Geometrie n'a qu'un ton, mais peut-être feroit-elle bien elle-même d'en changer quelquefois un peu, puisqu'elle parle à des hommes.

Quelques uns soupçonnaient M. Rolle de tendre des piéges aux autres Mathematiciens par des Questions artificieusement conçûës, où il vouloit se donner le plaisir de les voir plus embarassés que la chose ne meritoit ; cependant il s'est trouvé dans des occasions importantes que ces soupçons étoient injustes, les questions très-réelles, et les solutions très-solides, témoin le cas nouveau et paradoxe de l'intersection de deux Sections Coniques en quatre points du même côté de l'axe dont nous avons parlé dans l'Histoire de 1713.

Il croyoit l'Algebre encore fort imparfaite, et susceptible d'une étenduë que *l'on ne pense pas même à y desirer. Il en meditoit des Elements tout nouveaux, mais dans ce qu'il communiquoit à l'Académie, il rapportoit quelquefois certaines choses à ces Elements inconnus, ou les supposoit, ce qui donnoit à ses Ecrits une apparence de simples Projets, et même de l'obscurité. Ses idées pouvoient se nuire les unes aux autres par leur multitude, et l'espace borné de nos Memoires ne suffisoit pas toujours pour les contenir toutes, le champ étoit trop petit pour y ranger l'Armée en bataille. C'est dommage qu'il n'ait fait ses Elements où il auroit pû se déveloper en liberté, on ne peut douter que l'ouvrage n'eût été fort considerable, et un homme capable comme lui de se sacrifier entierement à l'Algebre, n'est pas un présent que la Nature fasse tous les jours aux Sciences.*

Il eut en 1708, une attaque d'Apoplexie, dont il sortit avec tout son esprit, et presque la même force pour le travail. Mais dix ans après une seconde attaque le jetta dans une Paralisie, qui ne lui permit plus de sortir, et dont il mourut le 8 novembre 1719 âgé de 68 ans, après avoir donné toutes les marques d'une solide pieté. Ses mœurs avaient été telles que les forment un grand attachement à l'étude, et l'heureuse privation du commerce du monde. »

Les capacités extraordinaires de Monsieur de Fontenelle à manier le verbe fournissent le résultat d'un texte où l'usage de symboles mathématiques semble proscrit, cela ne cache pas pour autant la compléxité des notions mathématiques qui entrent en considération. Le problème posé par Jacques Ozanam peut cependant être développé en Lycée à partir de la classe de Première, le bulletin n$^{\mathrm{o}}$ 365 de l'APMEP propose un texte de Dominique Roux sur la résolution de ce problème par Rolle. La méthode des Cascades est - quant à elle - nettement plus complexe, en revanche le théorème de Rolle peut être proposé à titre d'exemple pour illustrer la méthode de dichotomie, voir à ce sujet les travaux de Jean-Paul Daubelcour, IREM de Lille et membre de la Commission Inter IREM Second cycle.

Utiliser GeopacW en club

Jean-Alain Roddier
Lycée de Haute Auvergne à Saint Flour

La géométrie dans l'Espace est certainement un des domaines des Mathématiques où le degré de compétences des élèves est le plus variable. Sans avoir d'informations chiffrées récentes, on peut estimer que le goût des élèves pour la géométrie dans l'Espace est d'autant plus prononcé qu'on passe du temps à leur faire étudier des situations relativement ouvertes et qui quelque part les interrogent. Cette phrase, qui peut paraître un peu simpliste et réductrice, car elle peut s'appliquer à pratiquement tous les champs des Mathématiques, trouve une résonance toute particulière lorsqu'il s'agit d'utiliser un logiciel de géométrie dans l'Espace.

En ce qui concerne le logiciel GeospacW, on peut concevoir deux types d'utilisations en classe :

- ***On utilise une figures pré-construite***. La plupart du temps seul le concepteur de la figure peut arriver à en faire une autre, et l'élève a beaucoup de mal à se l'approprier.
- ***On fournit à l'élève tous les moyens de construire la figure***. On se rend compte que non seulement il développe des compétences sur l'exercice qui lui est proposé, mais qu'il est aussi capable d'intégrer rapidement les principales fonctionnalités du logiciel.

Le fait de considérer trop souvent que GeospacW est quelque part « compliqué » conduit généralement à une utilisation de ce logiciel à partir de figures pré-construites. Ce texte propose une fiche qui montre la simplicité d'utilisation de ce logiciel et elle pourra être facilement proposée dans le cadre d'un club de Mathématiques à des élèves, ceci à partir de la classe de 4ème en collège pour la première fiche et à partir de la classe de Première en lycée pour la deuxième fiche. Ces documents sont directement exploitables en classe et peuvent être distribués tels quel.

Les deux exemples, que nous vous proposons dans ces fiches, offrent l'avantage d'arriver à construire une figure relativement complexe assez rapidement en passant en revue les principales fonctionnalités du logiciel GeospacW. On trouvera d'autre part dans la construction du cristal de Grenat de la deuxième fiche, une légitimation de l'usage du patron : La construction - fournie par le logiciel - du patron de ce polyèdre met en exergue le caractère coplanaire de certains points.

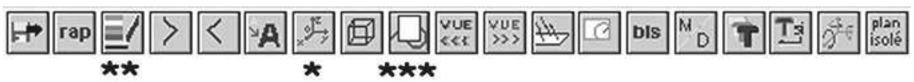
Il est bon de signaler qu'une version bridée de GeospacW est disponible en ligne à partir de l'adresse suivante :
http ://www2.cnam.fr/creem/GeospacW/Telech1.htm,
il est ainsi intéressant que les élèves téléchargent ce logiciel sur leurs ordinateurs personnels de façon à ce qu'ils puissent retravailler ce type d'activités à la maison.

Un ensemble de fiches élaborées pour des élèves de collège et de lycée ont été présentées le 5 novembre 2004 dans le cadre des travaux de la Commission Inter IREM Second Cycle. Ces fiches seront d'une part disponibles en ligne dès septembre 2005 et seront d'autre part publiées dans le courant de l'année 2005 par l'IREM de Clermont-Ferrand dans un document intitulé : « Actes des réunions de la Commission Second Cycle de l'année scolaire 2004-2005 ».

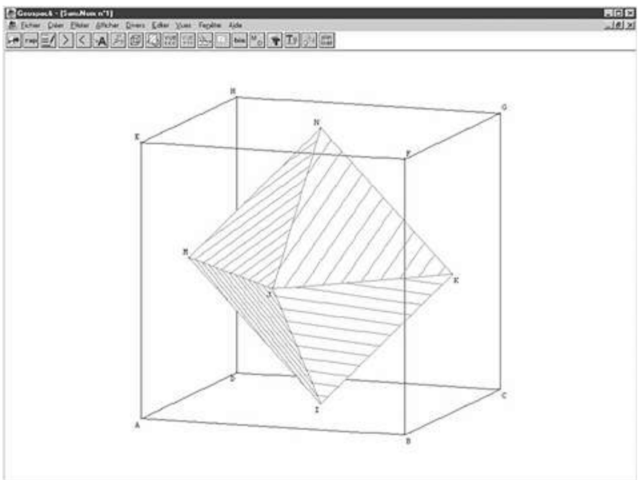
Propriété d'incidence (1$^{\text{ère}}$ étape)	Niveau : quatrième
Figure de base : cube	Niveau : quatrième
Patron	Niveau : quatrième

Enoncé élève *: On relie les centres des faces d'un cube.*
1) *Compter le nombre de faces de ce solide. Il est appelé octaèdre.*
2) *Montrer que ses arêtes sont de même longueur. Il est dit régulier.*
3) *Tracer le patron de l'octaèdre régulier.*

1$^{\text{ère}}$ étape : Construction de la figure.



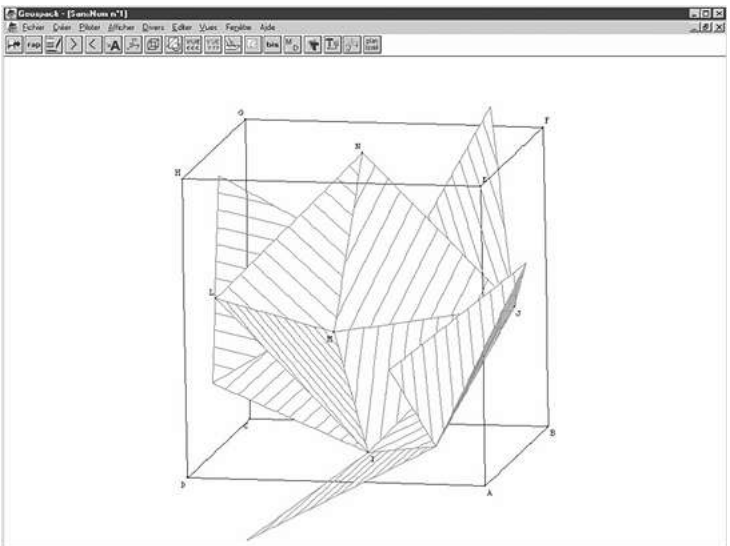
Cliquer sur l'icône marqué d'un petit repère 3D (*)
Créer/Point/Point repéré/dans l'espace définir A(2,-2,-2)
[Bis] créer de même les points B(2,2,-2) C(-2,2,-2) D(-2,-2,-2) E(2,-2,2) F(2,2,2) G(-2,2,2) H(-2,-2,2)
Créer/Solide/Polyèdre convexe/Défini par ses sommets taper la liste des sommets ABCDEFGH, l'appeler : cube.
Cliquer à nouveau sur l'icône marqué d'un petit repère 3D (*)
Cliquer sur l'icône Styles (**) puis sur la case O et sur le côté [A D].
Cliquer sur l'icône de tracé en pointillés (***).
Créer/Point/milieu créer le milieu I de [A C].
[Bis] créer de même J, K, l, M, N.
C**réer/Solide/Polyèdre convexe/Défini par ses sommets** taper IJKLMN



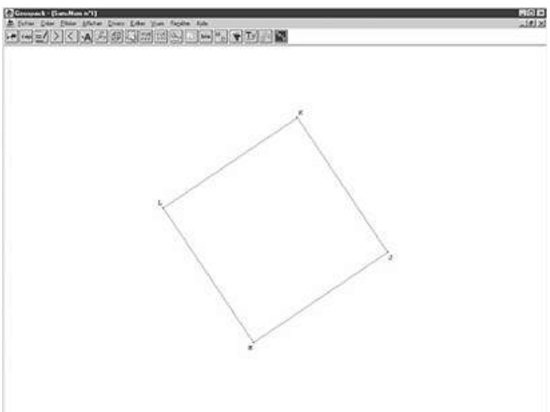
Propriété d'incidence (2$^{\text{ème}}$ étape)	Niveau : quatrième
Figure de base : cube	
Patron	

2$^{\text{ème}}$ étape : « Aide » à l'étude.
Créer/Numérique/ variable réelle dans un intervalle taper 0 1

puis a
Créer/ Solide/Patron d'un polyèdre taper octa puis a puis P
Cliquer sur l'icône Styles (**) afin de colorier et hachurer le patron



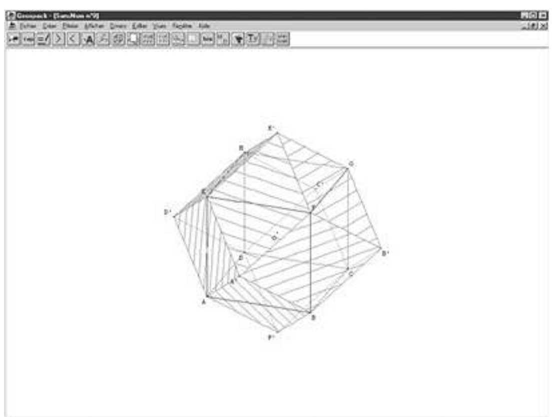
Prolongements : Etudier la nature des quadrilatères LMJK, NMIK, NJIL Montrer que les diagonales (IN), (LJ) et (MK) sont concourantes et deux à deux orthogonales. Tracer le polyèdre qui a pour sommets les centres des faces de l'octaèdre régulier.



Points coplanaires ($1^{\text{ère}}$ étape)	Niveau : première
Figure de base : cube	
Vecteurs	

Enoncé élève : *Soit ABCDEFGH un cube de centre O. On considère les symétriques A'B'C'D'E'F' du point O par rapport à chaque face du cube.*
1) Faire une figure et tracer le patron du polyèdre ABCDEFGHA'B'C'D'E'F'.
2) Montrer que chaque face est un losange. Indication : Munir l'espace d'un repère bien choisi. **$1^{\text{ère}}$ étape : Construction de la figure**

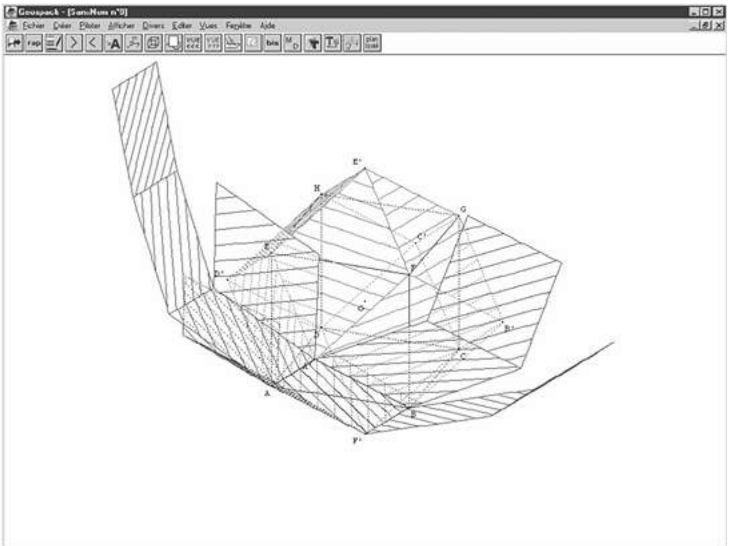
Cliquer sur l'icône marqué d'un petit repère 3D (*).
Créer/Point/Point repéré/dans l'espace définir A(2,-2,-2)
[Bis] créer de même les points B(2,2,-2) C(-2,2,-2) D(-2,-2,-2) E(2,-2,2) F(2,2,2) G(-2,2,2) H(-2,-2,2).
Créer/Solide/Polyèdre convexe/Défini par ses sommets taper la liste des sommets ABCDEFGH, l'appeler : cube.
Cliquer à nouveau sur l'icône marqué d'un petit repère 3D (*).
Cliquer sur l'icône Styles (**) puis sur la case O et sur le côté [A D].
Cliquer sur l'icône de tracé en pointillés (***).
Créer/Point/Milieu définir le centre 0 du cube.
Créer/Point/Image par une transformation/Symétrie Plane construire le point A'.
[Bis] construire les points B', C', D', E', F'.
Créer/Solide/Polyèdre convexe/Définis par ses sommets créer le polyèdre ABCDEFGHA'B'C'D'E'F' et l'appeler P.



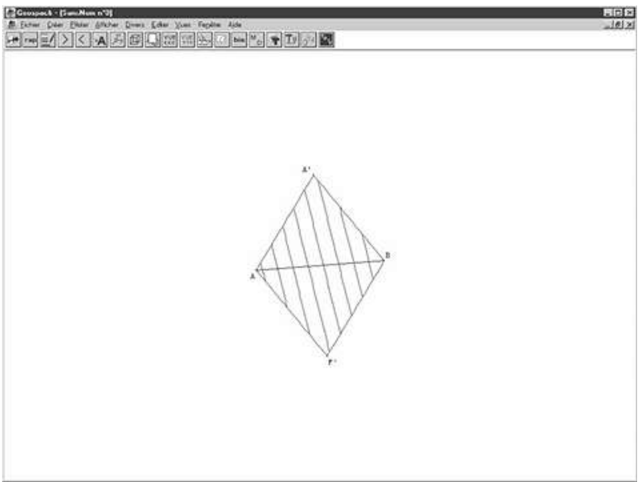
Points coplanaires (2$^{\text{ème}}$ étape)	Niveau : première
Figure de base : cube	
Vecteurs	

2$^{\text{ème}}$ étape : "Aide" à l'étude.

Créer/Numérique/variable réelle dans un intervalle l'appeler a.
Créer/solide/Patron d'un polyèdre taper P, puis a et l'appeler P1



Cliquer sur l'icône [plan Isolé] pour obtenir une seule face du polyèdre.



Annexe : Débat sur le troisième atelier

Catherine Ducourtioux
IUFM de Corte

Le jeudi soir, dans l'excitation et la fatigue, les animateurs et les participants ont livré leurs premières réflexions que je retranscris ici.

A propos de la construction de polyèdres :
Avoir à réaliser un objet a favorisé l'émergence de questions. Par exemple : comment faire avec le minimum de matériel le plus rapidement possible ? Des faces ont l'air coplanaires, le sont-elles vraiment ? De plus les participants ont exprimé le plaisir de fabriquer un bel objet en groupe.

A propos du boulier :
On a apprécié l'ouverture culturelle. On s'est heurté à la difficulté d'utiliser le boulier de manière performante. Selon Martin Andler, l'apprentissage du calcul par le boulier développerait chez les Chinois des connexions neuronales différentes de celles des Européens.

A propos du club de mathématiques d'Alain Roddier :
Est-il utile d'articuler le club et la classe ? Comment ? Pour certains, ce qu'on a vu peut etre fait en classe . Pour d'autres, le club est un espace ludique à l'école. Qu'est-ce que le club apporte de plus par rapport à la classe ? Est-ce que le club change la façon d'enseigner ? Existe-t-il des études sur un éventuel lien entre les clubs et la réussite scolaire des élèves ? Pour Alain Roddier, animer un club, c'est vouloir transmettre une passion et cela permet de faire des recherches pour le professeur. Les élèves sont moins passifs.

A propos des jeux de Charles Payan :
Ces jeux ont donné lieu à des démonstrations. On a expérimenté des méthodes de recherche : commencer par un cas simple, réfléchir par soi-même au lieu de plaquer des schémas démonstratifs.

Remarques générales :

Un début de classement des objets a été tenté :
- Des objets à construire.

- Des objets déjà construits.
- Des objets supports de problèmes (Au travers des objets, Charles Payan nous a présenté des problèmes).

Tous les objets de l'atelier sont utilisables du primaire au lycée. Il est intéressant de savoir a priori quelles questions les élèves se poseraient. La mise en situation des participants en donne une idée. On a eu l'impression de faire des maths sans en faire. Cela devrait changer le rapport aux maths chez les élèves. Les activités mises en œuvre demandent beaucoup d'adaptation. On ne peut pas plaquer directement des structures. Les élèves devraient construire une problématique avec l'objet Est-ce possible en classe ?

Certains ont déploré le manque de temps pour explorer davantage durant l'atelier. Une discussion sur le temps s'est amorcée. Plus de temps, pour faire quoi ? En tout cas, il faut préparer à fond les activités qu'on veut faire avec les élèves et prévoir du temps pour la recherche.

Amener en classe les objets tout faits est motivant, mais sous la forme : oui, c'est beau. Faire manipuler favorise le passage à l'abstaction. Cela rend tout de suite actif et met directement en relation avec les maths. Ainsi on peut penser que les élèves ne chercheront plus à répondre aux attentes du professeur comme c'est souvent le cas. Enfin cela soulève une question de fond : est-ce que les mathématiques sont dans les objets ?

CONFÉRENCES PROMENADE

TOURS DE MAIN ET MÉTHODES
Un cheminement historique sur la valeur épistémologique de la concision en mathématiques

Jean Dhombres

Je décris instinctivement ce que j'aimerais pouvoir faire : trouver les conditions du déclenchement de l'invention en mathématiques. Comme je souhaite examiner un aspect seulement de l'invention, je suis déjà prêt à échanger le mot « invention » au profit du mot « innovation ». L'invention comporte certes la découverte de quelque chose de nouveau, mais subsiste le soupçon d'une redécouverte. Comme s'il y avait un déjà là de la pensée, et une pensée simplement réactualisée par le fait d'une formulation plus heureuse que nouvelle. Gêné par cette pensée en attente qui paraît enfermer les mathématiques dans un perpétuel retour sur elles-mêmes, je vais tenter de décrire le déclenchement d'une nouveauté par l'effet concret d'un « tour de main ». Ce qui m'impose de choisir le bon « tour de main », qui peut être une habileté de calcul, une nouvelle saisie visuelle d'une configuration connue, ou une orientation dans une combinatoire de situations, mais qui doit surtout être capable de déclencher sur le champ la perception qu'une méthode a bien été trouvée. Cette piste est-elle raisonnable ? Une chose est au moins sûre : je ne cherche pas à décrire par un « tour de main » toutes les inventions ou innovations mathématiques. J'ai donc une certaine liberté.

Réflexions générales sur le « tour de main »

En effet, les épistémologues traquent autrement la découverte en mathématiques, et ils inventorient les formulations logiques des concepts ou les enchaînements de méthodes mathématiques, leurs origines comme leurs développements, en faisant le plus souvent entrer du futur dans le passé d'une idée, pour constituer une ingénierie de la découverte telle qu'elle aurait dû se faire. De sorte que ce que j'ai nommé comme un « tour de main », s'il peut bien être le symptôme d'une pensée, n'est guère pris en épistémologie comme fer de lance de la pensée, et encore moins comme un outil déclencheur. Or, si mon intérêt se porte ici sur le déclenchement, j'insiste sur sa valeur universelle dans une conscience mathématicienne. Ce qui est une façon de ne pas rendre subjective la découverte par un seul. L'exemple typique est celui de la « représentation géométrique des nombres complexes ». Mais je crains que ce que l'on en retient généralement ne soit pas le « tour de main » qui compte véritablement. Je vais donc y revenir longuement, et ainsi je préciserai ce vocabulaire un peu étonnant de « tour de main ». Les didacticiens paraissent beaucoup plus sensibles à ce que représente un « tour de main », mais élevant la dignité de la chose quand il s'agit des effets de leur discipline, ils évoquent « l'ingénierie didactique ». Ils entendent ainsi mettre en des directives pouvant réaliser le déclenchement, ce qui résulte de leurs observations scientifiques de l'apprentissage déployé dans la classe. Ces observations se développent en fait selon trois axes : l'axe orienté de ceux qui apprennent, l'axe également orienté de ceux qui enseignent et l'axe hiérarchiquement orienté du savoir mathématique. Ce que j'ai appelé un « tour de main » est donc décomposé et expliqué par ses effets de connaissance. Mais en le déployant sur les trois axes concernés, est éliminée ou plutôt bloquée l'idée de la soudaineté d'une totale compréhension, que je n'assimile surtout pas à une intuition puisque je parle d'un « tour de main ». Un exemple intéressant me paraît être la notion de fonction, moins pour sa définition en tant qu'application, que pour les propriétés qu'elle induit du fait des domaines de définition et d'arrivée. « L'histoire sanctionnée » des historiens des sciences, et j'aime cette expression de Gaston Bachelard qui rencontre l'habitude des mathématiciens n'aimant pas revenir sur des errements, est en un sens aussi une ingénierie : ses éléments résultent d'un déploiement sur le seul axe du temps des savoirs mathématiques repérés dans les textes des mathématiciens comme devant conduire à notre savoir mathématique actuel. Par trop d'analyse historique dirigée, sont encore perdues la spontanéité de la nouveauté et la soudaineté du « tour de main ». Ce dernier risque d'apparaître comme un lieu commun, aujourd'hui sans importance, et n'aura donc pas d'effet reconnu pour la compréhension. L'exemple typique de cette soudaineté me paraît être le triangle caractéristique, au début du calcul différentiel. Aussi, je dois mieux formuler ma question, afin d'éviter la confusion du « tour de main » qui serait conçu comme une ingénierie, ce que n'est pas le calcul différentiel, ou comme un appareil rhétorique, ce que n'est pas non plus l'analyse des fonctions.

Car je ne recherche pas, ici du moins, et quoique que ce soit l'usage très justifié des historiens, la façon dont une longue pratique mathématicienne - calculs et concepts liés ou problèmes sans cesse repris et retournés en tous sens -, parvient à faire une théorie. C'est la soudaineté qui m'intéresse, et jusqu'à ce point où elle peut paraître une nouveauté encore pour un lecteur d'une époque ultérieure. Le disant ainsi, je lie la nouveauté en tant que découverte historiquement datée à la nouveauté en tant que fait épistémologique mis hors histoire. N'oublions pas que la mathématique d'Euclide peut se lire sans trop de difficulté par un lecteur d'aujourd'hui, et que subsiste d'autant plus fortement la nouveauté de la démonstration du théorème de Pythagore, au livre I des *Eléments*, l'avant dernière proposition. Cette perpétuation de la nouveauté me paraît être véritablement l'objet de la phénoménologie mathématique et à la suite de Husserl un certain nombre de philosophes des mathématiques en ont parlé. Dite sans référent philosophique, ma question est de savoir comment une opération, une disposition d'écriture particulière ou de configuration, voire ce que l'on appelle souvent une astuce de calcul, peut permettre la reconnaissance qu'un geste créateur est ainsi présent. Je cherche ce qui fait dire « ha ha » selon l'expression de Martin Gardner, mais ce n'est pas précisément une *Eureka*, ou le plaisir de la résolution d'un problème. Je cherche la soudaine prise de conscience que, par un « tour de main », une méthode est mise à jour, inventée mais inscrite aussitôt dans la conscience mathématique comme une ressource utilisable ailleurs en d'autres circonstances.

Ce qui qualifie la nature du « tour de main » que je considère est de pouvoir devenir quasi instantanément un tour de pensée, sans pour autant que le « tour de main » soit relégué en tant qu'étape dépassée. On risque d'objecter que la soudaineté dont je parle est nécessairement issue d'une longue et double construction de la pensée mathématique inventive et de la pensée professorale. Mais c'est bien pour cela que j'adopte l'expression de « tour de main », car elle capitalise une expérience sans que celle-ci paraisse tendue vers le chef d'œuvre ou la solution. Et je suis d'autant plus préparé à admettre la part rhétorique de la « soudaineté », et ainsi lui enlever l'affect psychologique, en parlant mieux de la concision d'un « tour de main » : cette qualité est effectivement reconnaissable en tous temps et en tous lieux. La valeur épistémologique de la concision est de déclencher une connaissance de fait entièrement contenue dans le « tour de main ».

Ma quête épistémologique sur le « tour de main » est donc satisfaite et je vais travailler trois exemples historiques, précisément choisis pour la concision de leur formulation mathématique. Je mettrai au centre le « tour de main » le plus célèbre, celui de la « représentation géométrique des nombres imaginaires » que je vais plutôt dire comme ce qui permet algébriquement de tourner dans le plan. Mais les deux autres, moins connus peut-être, celui de L'Hôpital en 1696 sur le calcul différentiel et celui de Laplace en 1795 sur la notion de fonction, me paraissent utiles, ne serait-ce que pour faire ressortir la spécificité de la représentation géométrique. On sait que la découverte du « tour de main » de cette représentation est restée une énigme de l'histoire, ne serait-ce que par la modestie de son auteur, le Genevois Jean-Robert Argand. Mon objectif est de montrer que le " tour de main " associé est en fait le geste fondateur de l'analyse, et ce n'est pas la figuration par un schéma comme on le répète trop souvent, ou l'écriture algébrique. Elles ont bien sûr toutes les deux un rôle à jouer, mais ne portent pas justement la concision, qui est le critère retenu pour le « tour de main ».

Pour chaque cas, la démarche sera analogue. Je commencerai par des explications en langage d'aujourd'hui sur le « tour de main » en cause, les accompagnant d'une explication aussi courte que possible sur le contexte mathématique de l'époque. Viendra le texte original lui-même, court bien sûr et forcément un extrait, mais dont la lecture aura été préparée pour éviter les surprises du vocabulaire ancien. Le texte sera alors suivi d'un commentaire critique sur le rôle déclencheur de l'exemple choisi et sur la justesse de la qualification d'un « tour de main ». Pour le lecteur pressé, par une indication de tête de chapitre je repère les moments où je travaille essentiellement le « tour de main ».

Je dois ajouter encore deux précautions. L'une concerne l'histoire : j'ai limité au maximum les références à des analyses d'historiens, contrairement à ce qui est justement requis dans des publications érudites, et alors même que j'ai évidemment pris parti lorsqu'il y avait des différences d'interprétation. Les références choisies devraient pourtant suffire pour orienter le lecteur dans la vaste littérature historique, et pour qu'il se fasse une opinion par lui-même, ne serait-ce qu'en lisant plus à fond l'auteur cité. Ceci dit, j'ai chamboulé la chronologie en commençant par l'exemple de Laplace en 1795, et en finissant par l'exemple de 1696. C'est que la lecture du texte de 1696 est plus difficile pour un moderne, mais sera facilitée par les exemples précédents. L'autre précaution concerne les mathématiques, et le niveau requis pour que les exemples choisis soient véritablement utiles. Je ne dépasse pas les connaissances requises d'une première année d'université scientifique, et tente même d'en rester à une Terminale scientifique du Secondaire. Dès lors, et selon la même limitation qu'en histoire, je ne fournis pas plus de références à des développements mathématiques actuels des méthodes en cause.

Le « tour de main » sur les fonctions pour la démonstration du théorème fondamental de l'algèbre (1795)

Introduit par Descartes dans sa *Géométrie* de 1637, un texte qui accompagne le célèbre Discours de la méthode, l'outil majeur de l'algèbre est une équivalence. C'est celle qui existe entre l'écriture additive et unique d'un polynôme unitaire (c'est-à-dire dont le coefficient de plus haut degré est égal à 1) selon l'ordre décroissant des puissances et son écriture multiplicative comme produit de facteurs unitaires du premier degré, l'ordre des facteurs étant alors quelconque. Autrement dit, il y a équivalence entre

$$P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 \tag{1}$$

et

$$P(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\cdots(x - \alpha_n) \tag{2}$$

Dans les deux cas, la nature des coefficients, les a ou les α doit être précisée, et c'est justement à ce propos que Descartes introduit la distinction entre *quantités réelles* et *quantités imaginaires*. La formule (1) concerne des coefficients réels, et la formule (2) doit être « imaginée » avec des quantités qui, dira-t-on aujourd'hui, ont comme propriété d'appartenir à un corps commutatif contenant le corps des nombres réels. Au début du XVII^e^ siècle, et notamment par le fait de François Viète, le lien est connu entre les coefficients et les fonctions symétriques élémentaires des racines, et c'est en raison de ces formules que l'expression de corps n'est pas profondément anachronique. La question ne fut pas tout de suite celle de montrer que ce sur-corps commutatif était le corps des nombres complexes. Mais la réduction des quantités imaginaires aux nombres complexes est bien la question que Laplace pose en 1795 dans une leçon qu'il donne devant plus d'un millier d'étudiants à Paris, qui

devaient devenir les « instituteurs » français, toutes matières confondues. En fait, Laplace la pose en des termes qui font aussi peu que possible intervenir les nombres complexes, alors écrits comme nombres de la forme $a + b\sqrt{-1}$, a et b étant réels. Laplace entend rester dans le cadre de l'algèbre des polynômes à coefficients réels, dits ici *polynômes réels* pour faire court [1]. Ainsi, son *théorème fondamental* consiste-t-il à démontrer qu'un polynôme unitaire réel est le produit de polynômes unitaires réels du premier et du second degré. Bien sûr, il connaît les propriétés du second degré et la formule du discriminant, qui fait que l'on peut écrire un tel polynôme comme produit de polynômes unitaires complexes du premier degré. En fait, comme il est évident pour Laplace, comme pour tous les mathématiciens de son temps, qu'un polynôme unitaire réel de degré impair possède une racine réelle, donc une mise en facteur par un polynôme unitaire réel du premier degré, il ne s'intéresse qu'au cas des polynômes de degré pair. Je vais, également pour abréger, appeler *théorème de Laplace* le fait qu'un polynôme unitaire réel de degré pair est produit de polynômes unitaires réels du second degré. Voilà pour le contexte conceptuel de la preuve de 1795 qui permet à Laplace d'énoncer :
Toute équation d'un degré pair est résoluble en facteurs réels du second degré.[2]

La part combinatoire d'une récurrence

Ceci donne en particulier à nos yeux le fait que pour un tel polynôme, il y a au moins une racine complexe, et donc forcément aussi sa conjuguée puisque le polynôme est réel. Le contexte mathématique de la preuve de Laplace est celui de nombreux auteurs, Euler (1709-1783), Lagrange (1736-1813), ou de Foncenex (1734-1798), qui avaient eu l'idée pour faire apparaître les polynômes réels du second degré de raisonner par récurrence sur le degré, en groupant deux par deux *les quantités imaginaires* racines d'un tel polynôme, noté $P(x)$, de degré pair, noté $p = 2^k\ell$, où k est un entier au moins égal à 1, et ℓ un entier impair. Si on note a, b, etc., ces *imaginaires* - le but étant de les réduire à des nombres complexes - on doit

[1] Nous verrons que la belle rigueur de Laplace a aussi été un handicap.

[2] P. S. Laplace, *Séances des écoles normales recueillies par des sténographes et revues par les professeurs*, 2, Paris, an III ; *Journal de l'Ecole Polytechnique*, 1, cahier 7, 1812. Les leçons de Laplace, Lagrange et Monge ont été éditées avec un apparat critique et une annexe sur le théorème fondamental dans Jean Dhombres (éd.), *Leçons de mathématiques*, Paris, Dunod, 1992

montrer qu'il est possible de choisir au moins deux de ces racines de sorte que soit réel le polynôme $R(a,b)$ donné par $R(a,b) = x^2 - (a+b)x + ab$. C'est effectivement le choix de deux racines a et b qui fait problème, et la récurrence en tient compte, sachant que l'on a une égalité, ou indifférence d'ordre $R(a,b) = R(b,a)$. La récurrence porte en effet sur le nombre k dans l'écriture du nombre pair p, degré du polynôme $P(x)$. Pourquoi ? Tout simplement parce que le nombre de groupements par deux des p racines de $P(x)$ est évidemment $q = p\dfrac{(p-1)}{2}$, nombre de combinaisons deux à deux de p éléments, et que le passage à m fait tomber d'une unité l'entier k. Pour le voir, il suffit d'écrire

$$2^k\ell\frac{(2^k\ell - 1)}{2} = 2^{k-1}\ell\ell' = 2^{k-1}\ell"$$

où ℓ et ℓ' sont deux entiers impairs, donc leur produit $\ell"$ est aussi impair. La question revient à associer au polynôme P de degré $p = 2^k\ell$, un polynôme Q de degré $q = 2^{k-1}\ell'$ auquel s'appliquera ainsi la récurrence. Si l'on considère le polynôme unitaire Q, produit de tous les polynômes $S(a,b) = (x - (a+b+ab))$, où a et b parcourent les racines imaginées de P, on peut voir moyennant quelques connaissances d'algèbre, que Q est bien un polynôme réel. En effet, les coefficients de Q sont des polynômes à plusieurs variables, polynômes qui sont symétriques pour les variables (on disait alors seulement des fonctions, sans préciser fonction polynomiale), donc s'expriment par un polynôme (on disait plutôt algébriquement) au moyen des fonctions symétriques élémentaires. Celles-ci sont des nombres réels puisque ces fonctions symétriques élémentaires sont les coefficients du polynôme P supposés réels. En outre Q est de degré q. Il y aura par une conséquence de la récurrence une racine complexe de Q. Or par construction de Q, toutes les racines sont de la forme $a + b + ab$. Ainsi donc, pour un couple au moins $a+b+ab$ sera complexe. Comment aller plus loin et déduire que a et b seront complexes ?

Le « tour de main »

C'est là qu'intervient le « tour de main » de Laplace. Alors que ce qui précède était le contexte de sa démonstration dans la théorie algébrique de l'élimination avec des polynômes réels, et notamment des expressions symétriques algébriques sur lesquelles Lagrange avait beaucoup travaillé. Il importe de savoir que dans cette voie algébrique il y avait confusion, donc indistinction, entre fonction algébrique (moyen analytique de dépendance entre deux variables) et fonction (expression d'une dépendance). J'ai essayé de la suggérer en utilisant entre parenthèses le vocabulaire de l'époque. Laplace ne va pas se laisser prendre par cette imprécision.

Pour comprendre son « tour de main », il suffit de regarder la première étape de la démonstration par récurrence, c'est-à-dire le cas où le degré de P est $p = 2k$, où k est impair, et ainsi le degré de Q est simplement impair. Car cette fois Q possède une racine réelle, et on déduit que pour un certain couple de racines imaginaires de P, $a+b+ab$ est réel. De fait, Laplace a adopté une combinaison plus générale que $a+b+ab$. Il se donne un nombre réel arbitraire m, et ce dernier paramètre devient une variable, lui fournissant l'occasion de constituer une fonction, une fonction de choix pourrait-on dire, car non explicitée du point de vue du calcul, mais dont la présence en tant que fonction impose une propriété qui va suffire. C'est là le « tour de main ». Laplace considère les polynômes $S_m(a,b) = (x - (a + b + mab))$ et leur produit $Q_m(x) = \Pi(x - (a + b + mab))$. Rien n'est changé quant au degré impair q du produit. La démonstration de la réalité des coefficients de Q_m signale ce que Laplace retient de la théorie de l'élimination : la stabilité de certaines opérations dans le corps des nombres réels. Voilà comment il exprime son « tour de main » :

> Si $k = 1$, cette nouvelle équation dérivée de la première, sera d'un degré impair ; elle aura donc au moins une racine réelle, quelle que soit la valeur de m, et comme on peut donner à m une infinité de valeurs, on aura une infinité de fonctions de la forme $a + b + mab$, qui auront des valeurs réelles. Parmi ces fonctions, il y en aura nécessairement qui renfermeront les mêmes racines de la proposée. Soient a et b ces racines, et soient $a + b + mab$, et $a + b + m'ab$, deux fonctions dont les valeurs soient réelles ; leur différence $(m' - m)ab$ sera réelle ; ab et $a+b$ seront donc réels, ainsi que le facteur $x^2 - (a + b)x + ab$; la proposée aura par conséquent un facteur réel du second degré[3]

Il ne me faut dire en d'autres termes les choses que parce que Laplace emploie le mot « fonction » pour désigner la valeur de la fonction, le tour de main résidant dans cette création d'une fonction. Existe au moins une paire de racines imaginaires de P, notée[4] (a, b), et $a + b + mab \in \mathbb{R}$.

Le paramètre m cesse d'être muet pour devenir une variable : vient donc

[3]Par souci d'homogénéité avec les expressions qui précèdent, j'ai écrit $k = 1$ là où Laplace écrit $i = 1$

[4]$\mathbb{R}$ désigne le corps des nombres réels, $\mathbb{C}$ celui des nombres complexes, et je pourrais aussi noter $\mathbb{I}$ le surcorps des imaginaires, auquel appartiennent les racines a, b, etc.

d'être définie ce que nous appelons une fonction $\varphi : m \to (a_m, b_m)$, définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans un ensemble fini, l'ensemble des paires non ordonnées de racines *imaginaires* de P. Du coup, compte tenu de son domaine de définition et de son domaine d'arrivée, la fonction ne saurait être injective. C'est-à-dire qu'il existe deux valeurs distinctes du paramètre m réel, , telles que $\varphi(m_1) = \varphi(m_2)$. Soit avec $a_{m_1} = b_{m_2} = a$ et $b_{m_1} = b_{m_2} = b$ la double appartenance

$$a + b + m_1 ab \in \mathbb{R},$$

$$a + b + m_2 ab \in \mathbb{R}.$$

Dont on déduit, puisque $\mathbb{R}$ est un corps, que le polynôme unitaire réel du second degré

$$x^2 - (a+b)x + ab$$

se factorise dans l'expression de P

$$P(x) = \left(x^2 - (a+b)x + ab\right) R(x)$$

On aura remarqué l'usage de l'infini dans cette preuve du théorème de Laplace, ou plutôt la comparaison entre l'infini (l'ensemble des nombres réels que parcourt le paramètre m) et le fini (l'ensemble des paires non ordonnées des racines de P), qui est sans doute premier dans l'histoire des mathématiques. Cette comparaison se trouve réalisée par l'intermédiaire de la notion de fonction. La concision de la démonstration justifie *a posteriori* l'intervention *a priori* du paramètre m, mais la distance est si courte entre l'intervention du m et la conclusion que la démonstration coïncide avec la compréhension de la réussite. Voilà pourquoi j'appelle cela un appelé un « tour de main ».

Laplace n'utilise pas le vocabulaire de fonction injective, mais quand même celui de fonction, avec l'ambiguïté déjà signalée : ce qui est remarquable dans la mesure où l'existence de la fonction que nous avons notée est établie, mais certainement pas sa détermination par un calcul. Aussi, à la façon moderne depuis Cantor, cette fonction est-elle utilisée comme une correspondance, sans qu'aucune régularité analytique ne soit pensée, quel que soit le sens que l'on donne à ce mot. Laplace pourrait certes s'appuyer sur la définition d'une fonction que donnait finalement Euler (la fonction comme causalité), ou pour le même effet sur la fonction qui figure implicitement dans la démonstration par d'Alembert du théorème fondamental de l'algèbre. Mais il ne dit rien dans son cours de l'Ecole normale : c'est la façon la plus efficace pour Laplace d'introduire un nouveau sens, en le couvrant par la banalité d'un nom. On sent que la « généralité » de l'algèbre lui a facilité un tel saut qu'il ne se serait guère permis en mécanique céleste ; on constate surtout que le « tour de main » fait s'approprier d'un coup la preuve, et qu'en même temps l'on comprend le pourquoi d'une fonction.

Le contexte culturel

Le théorème fondamental de l'algèbre était-il jugé suffisamment bien démontré lorsque débutèrent, en janvier 1795, les cours de l'Ecole normale, destinée comme son nom l'indique, à normer l'enseignement ? La certitude largement partagée était qu'on ne disposait d'aucune démonstration élémentaire, car ce théorème résultait de toutes les connaissances de l'algèbre : il n'était pas fondamental, mais l'aboutissement d'une algèbre difficile. Il ne paraissait donc pas possible de le mettre au programme d'une Ecole où trois mathématiciens - Lagrange, Laplace, et Monge - officiaient devant plus d'un millier d'étudiants, destinés à leur tour à enseigner dans les écoles nouvelles d'une République nouvelle. D'autant que les auditeurs n'avaient pour la plupart aucune formation mathématique et que la majorité serait vouée à l'enseignement des matières littéraires, puisque personne n'envisageait de ne fournir qu'une éducation scientifique. Le théorème fut pourtant présenté par Laplace, et c'est sans aucun doute sa première apparition dans un contexte scolaire.

Les mathématiques avaient la faveur des étudiants français de cette époque : de toutes les matières professées dans les Écoles centrales quelques mois plus tard, les statistiques indiquent que les mathématiques furent choisies en second, après le dessin certes, mais bien avant les sciences physiques, l'histoire naturelle, les belles-lettres, la philosophie, etc. Il faut dire, chose sans précédent, qu'un élève des écoles centrales déterminait son propre curriculum[5] .Par contre, futur professorat oblige, et conception encyclopédique du savoir, les élèves de l'Ecole normale devaient tout étudier.

A devoir en conséquence ne présenter que les idées générales, donc en mathématiques les seules méthodes générales, les professeurs de l'École

[5] J. et N. Dhombres, *Naissance d'un pouvoir : sciences et savants de France (1793-1824)*, Paris, Payot, 1989.

normale étaient en outre astreints à tenir compte des plus récents développements de la science : telle était l'injonction de la « méthode révolutionnaire » supposée faire gagner beaucoup de temps dans l'apprentissage. Aussi, et c'est une autre façon de dire la « révolution », avec l'exposé d'un nouveau concept était assignée aux professeurs la tâche de montrer tout ce qui était devenu inutile, car obsolète dans la connaissance mathématique. La démonstration que donna Laplace le 1er mars 1795, parce qu'elle distingue ce qu'elle en utilise, dit de la théorie de l'élimination poursuivie au long du XVIIIe siècle juste ce qu'il est utile d'en connaître. Résumé d'une théorie parce qu'il est de démonstration concise, le théorème est à ce titre fondamental. Est aussi fondamental que la compréhension dépende d'une propriété générale des fonctions (selon les domaines de départ et d'arrivée), alors que les fonctions ne faisaient partie que du vocabulaire de l'analyse.

Les trois mathématiciens qui, parce qu'ils l'avaient eux-mêmes proposée, acceptèrent la tâche de simplification et d'innovation qui leur était demandée, n'agirent pourtant pas de la même façon et leur rivalité intellectuelle fut d'autant plus manifeste qu'ils devaient parler les uns en présence des autres, et à la suite les uns des autres. Ce fut une épreuve révolutionnaire que cette promiscuité dans le travail d'enseignement. L' « instituteur » le plus âgé, Lagrange, décide de faire un bilan, mais c'est un bilan conçu pour l'avenir. Il expose quelques algorithmes disponibles pour trouver les racines des équations polynomiales, et montre ainsi l'absence d'une méthode générale pour des racines imaginaires. L'algorithme du changement de signe, avec division par le milieu, ne vaut que pour des racines réelles. Dans sa critique, Lagrange explique pourquoi les méthodes de résolution algébrique des équations jusqu'au degré quatre conduisent à des formules qui ne peuvent être étendues au degré cinq et au-delà. En offrant une vision problématique des mathématiques, Lagrange s'oppose nettement à Laplace dont la démonstration du théorème est un achèvement qu'un « tour de main » résume. D'une façon dogmatique, ce dernier s'emploie à montrer que rien ne saurait résister à la méthode analytique. Il répond ainsi aux arguments *ad hoc* de géométrie, que Monge s'évertue à faire voir comme avantageuse avec un enthousiasme contagieux, et qu'a tentés Lagrange donnant par exemple une interprétation graphique des polynômes. Laplace est le seul à démontrer le théorème que nous poursuivons ; il est le seul à oser démontrer du difficile. C'est qu'il a obtenu du simple, ou plutôt quelque chose qui une fois perçu est inoubliable : le « tour de main ».

L'embrouillaminis algébrique du cas général

Mais je n'ai donné qu'une étape de la récurrence. Il est facile d'imaginer l'étape générale par le passage de P à Q, à condition toutefois d'interpréter la récurrence comme prouvant à chaque étape l'existence d'une racine complexe (et donc de sa conjuguée puisque l'on est resté avec des polynômes réels). Avec le polynôme Q, et l'effet de la récurrence, on peut assurer que pour deux valeurs réelles distinctes de m et pour les *mêmes* racines imaginaires, notées encore a et b de P, on a

$$a + b + m_1 ab \in \mathbb{C}$$

$$a + b + m_2 ab \in \mathbb{C}$$

Donc, comme dans le cas réel, on conclut que $a + b$ et ab sont des complexes. Toutefois Laplace ne donne pas la forme qui serait utile avec les racines complexes d'un polynôme unitaire complexe du second degré. Laplace agit donc autrement, et doit s'appuyer sur la résolution d'une équation polynomiale réelle du quatrième degré. Je ne la reprends pas ici, me contenant de citer sa conclusion pour la démonstration, gommant le passage des polynômes à leurs racines.

> Donc, toute équation d'un degré pair a un facteur du second degré ; en la divisant par ce facteur, on aura une nouvelle équation d'un degré pair, qui aura elle-même un facteur réel du second degré ; et en continuant ainsi, on décomposera l'équation entière en facteurs réels du second degré.

Alors qu'il fait une leçon peu de jours après celle de Laplace, et sur le même sujet, Lagrange ne mentionne pas la démonstration si courte de son cadet de treize ans. Dans son T*raité de la résolution des équations numériques* de 1798, Lagrange fait passer la démonstration fournie par Laplace pour une adaptation du théorème de Daviet de Foncenex, paru à Turin en 1760, dans le recueil académique fondé par le même Lagrange avant son départ pour Berlin. A Paris va circuler la rumeur que Foncenex n'était qu'un prête nom pour Lagrange.

> Laplace a donné depuis, dans les leçons de l'Ecole normale, un moyen plus simple d'établir cette vérité, en partant de l'analyse employée par Foncenex[6] .

[6] J. L. Lagrange, *Traité de la résolution des équations numériques de tous les degrés, avec des Notes sur plusieurs points de la théorie des équations algébriques*, Paris, an VI, 1797 ; nouvelle édition revue et augmentée par l'auteur, Paris, Courcier, 1808 ; [e] édition, Paris 1826 ; *Oeuvres*, 8, Paris, 1879, Note II, n° 16, p. 108

Ce jugement fait peu de cas de l'innovation du paramètre m, introduit par Laplace, et de son « tour de main ». Certes, par la méthode des indéterminées, Foncenex cherchait dans un polynôme réel de degré pair $2n$ à mettre en facteur $x^2 - ux + V$ et déterminait une équation de degré $n(n-1)$ pour u, espérant se débrouiller avec V, puis procédait par cascade. Comme u est la somme de deux racines imaginaires du polynôme initial, mais en usant du paramètre m, Laplace travaille en fait avec $u + mV$, c'est-à-dire $a + b + mab$. Je crois qu'il faut aussi voir que Lagrange avait bien introduit en algèbre la notion de fonction, et des expressions comme $a + b + ab$. Mais c'est avec un tout autre sens, qui est celui de forme, et qui lui sert si remarquablement pour expliquer la résolubilité des équations des quatre premiers degrés et justifier les difficultés pour le cinquième degré. On retrouve le mot chez Laplace, mais avec le sens plein de fonction.

Dès 1800, la démonstration de Laplace entre dans un manuel. C'est celui de Lacroix. Mais elle n'est pas dans la version élémentaire de l'algèbre : il faut attendre la deuxième volume, les Compléments, pour voir le théorème. Jean-Guillaume Garnier, qui avait été professeur d'Analyse à l'Ecole polytechnique, procède de même dans son *Analyse algébrique*. Car le théorème apparaît comme le premier résultat de la seconde section. C'est un théorème d'expression différente de celui fourni par Laplace, proche de la formulation actuelle.

> Une équation algébrique de degré quelconque, ne peut avoir que des racines réelles ou des racines imaginaires de la forme $a + b\sqrt{-1}$, a et b étant des quantités réelles.

Pourtant Garnier retrouve l'expression de Laplace à la fin de sa démonstration, et poursuit par une explication qui reste dans le seul registre de l'algèbre de polynômes réels, donc sans référence aux racines.

> Une équation de degré pair est décomposable en facteurs réels du second degré. Une équation ne peut avoir que des racines réelles ou des racines de même forme que celles du second degré.

La démonstration que fournit Garnier travaille directement sur le corps des nombres complexes. En dépit de cette cohérence, et à la manière du XVIII^{e} siècle, Garnier ne fait pas un raisonnement par récurrence en bonne et due forme, et il est alambiqué dans son explication du rôle du paramètre m, donc du « tour de main ».

> Puisqu'on peut assigner à m une infinité de valeurs différentes, on pourra donc former une infinité de ces équations dont chacune aura, au moins, une racine réelle ; et si, par exemple, la proposée est du sixième degré, on ne pourra nier que quinze fois de suite que la racine réelle qu'on trouve, ne soit la même, à la différence du nombre m, que l'une des racines réelles déjà trouvées[7].

C'est, je l'avoue, une forme d'énigme pour l'explication que j'ai fournie pour le « tour de main ». Je crois qu'elle s'explique pourtant par une sorte de maladresse épistémologique de Laplace. Il tient trop à rester en algèbre polynomiale réelle, alors que sa preuve joue et de polynômes et de la forme des racines. En effet, le choix de deux racines a et b de P, lorsqu'elles sont réelles, ne dépend pas du même raisonnement que le choix de telles racines lorsqu'elles sont complexes. Dans le cas complexe, une seule racine complexe (et non réelle) en donne une deuxième, sa conjuguée. Dans le cas de racines réelles, c'est successivement que l'on en trouve une, puis une deuxième. On a bien vérifié que Laplace s'emberlificotait dans l'équation du quatrième degré, au lieu de passer aux complexes. De même, Garnier ne fait intervenir que des polynômes réels. La netteté du « tour de main » en pâtit. Preuve que l'efficacité du « tour de main », indispensable à sa compréhension, et qui porte ici sur le domaine de la fonction, a été comme retardée par un mauvais choix de domaine, celui des réels à la première étape de la récurrence. C'est bien la preuve que le « tour de main » ne consiste pas en une simple astuce.

Le « tour de main » d'analyse pour le théorème fondamental de l'algèbre (1806-1815)

Paru sans bruit en 1806, un petit *in-octavo* dont il n'existe plus aucun exemplaire aujourd'hui, donna une forme nouvelle au théorème fondamental de l'algèbre, et sans négliger la factorisation polynomiale, focalisa l'attention sur la forme des racines. On manifestera dans cette lignée la clôture algébrique du corps des complexes, une propriété non spécifique puisque partagée par le corps des nombres algébriques. Le changement de 1806 accompagna un changement de démonstration, et disparut jusqu'au recours à un théorème préliminaire sur la ou les racines réelles de certains polynômes. Un succédané avait été trouvé. On ne sera pas étonné qu'un

[7] J. -G. Garnier, 1804, p. 6. En 1814, pour la deuxième édition de son *Analyse algébrique*, Garnier modifie la phrase : « la racine réelle obtenue, soit la même ».

raisonnement par l'absurde soit venu remplacer la démonstration d'une existence. Ce devint une habitude pour les démonstrations postérieures.

Pourtant, et donc fautive, la première preuve fournie par Jean-Robert Argand se voulait ostensive. L'existence de ce quelque chose qui était cherché - une racine complexe - paraissait pouvoir provenir de la seule nouvelle représentation d'un nombre complexe. Etait-il possible qu'un symbolisme, même géométrisé, emportât la conviction et assurât l'existence d'un objet mathématique ? Nul à cette époque ne pouvait oublier que la preuve de Laplace, pour courte qu'elle ait pu paraître, supposait néanmoins connue et maîtrisée la théorie algébrique de l'élimination. On ne pouvait mettre en cause ni la qualité de rigueur, ni la sophistication grevant d'autant cette rigueur par la présence des *imaginaires*. "« Je persiste à croire qu'il est très difficile de ramener la démonstration de ce principe à des notions purement élémentaires »[8] expliquait Bret, professeur à la faculté des sciences de l'académie de Grenoble, six ans après la parution du livre d'Argand. L'auteur n'avait pas été pris au sérieux, mais le théorème était hissé au rang des principes.

La nature d'un résultat entre algèbre et analyse

Le titre du livre de 1806 arborait la représentation des nombres complexes, mais maintenait le mot *imaginaires* alors qu'il les faisait oublier : *Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques*. Et seule la démonstration peut donner à voir que s'ouvrait une nouvelle voie, celle de l'analyse, c'est-à-dire la mise en place d'algorithmes, de raisonnements et de manipulations d'inégalités susceptibles de gérer les variations - variables, fonctions, polynômes - et de distinguer ce qui compte par rapport à ce qu'on peut négliger. Que cette construction de l'analyse ait été réalisée sur les nombres complexes, envisagés dans leur double structure, algébrique et topologique, et non pour et avec les séries, rend un peu surprenant le déroulement de l'histoire. La mémoire mathématique a en effet corrigé et avance désormais le nom de Cauchy comme fondateur de la nouvelle analyse. Elle ne peut pas être dite l'analyse complexe, du moins au sens que l'expression, porteuse d'une géométrie des courbes (où joue par exemple l'homotopie), allait prendre et même spécialiser. En 1821 d'ailleurs, Cauchy rejetait la représentation géométrique des nombres complexes proposée par Argand.

[8] Réplique de M. Bret sur le même sujet, lettre datée du 1ier avril 1813, *Annales de mathématiques pures et appliquées*, t. III, 1812/1813, p. 370.

Il avait déplacé la technique de ce dernier pour en faire une méthode de découpage des calculs, méthode trouvant son lieu d'exercice naturel dans la théorie des séries entières, et donnant sa forme à ce que l'on appelle depuis la rigueur de l'analyse des ε et des δ qui fera la gloire de Karl Weierstrass.

Parce qu'il y a eu théorisation et création antérieure de l'analyse, et quoique celle-ci soit passée par une géométrisation momentanée, bientôt reniée, on pourrait être tenté d'expliquer que le théorème d'Argand fut l'aboutissement d'une pratique. Il résulterait de l'habitude numérique des calculs sur les racines des équations, pratique issue de la théorie de l'élimination algébrique à la manière dont Lagrange l'avait théorisée en 1797 et que nous avons évoquée, et l'on aurait pu aussi bien faire mention de Legendre et de son travail d'algèbre de la division polynomiale dans son *Essai sur la Théorie des nombres* de 1798. Cette explication plausible est erronée. En se débarrassant des *imaginaires*, Argand agit sur le plan théorique tout comme Gauss dont nous ne pouvons pas trop parler ici, faute de place et parce que sa démonstration n'a rien d'élémentaire. Alors que Gauss approfondit la voie des courbes, Argand choisit la voie des découpages des quantités ; le premier va vers la topologie algébrique, et le second vers l'analyse qui se dira encore algébrique quelques années avant d'être dite l'analyse tout court.

Le programme est de suivre la démonstration d'Argand. Elle est devenue banale pour l'analyste, à l'opposé de celle de Gauss. Dire la façon dont fut installée une banalité est cependant difficile, car il faut établir une rupture dans ce qui a été représenté après coup comme le déroulement normal de la science ; il faut même échapper à l'historiographie traditionnelle sur Argand, auteur jugé mineur, sans pour autant amoindrir la vigueur de Cauchy. On est toujours trop long sur ce qui paraît évident, et on commence à voir pourquoi je tiens à parler de « tour de main ». C'est que je développe une thèse historique : le champ complexe a fixé la pratique de l'analyse, et l'analyse réelle vint donc en second.

Les circonstances

On ne sait pratiquement rien sur Jean-Robert Argand, un Suisse de Genève devenu « teneur de livres à Paris »[9], et dont le nom ne fi-

[9] C'est ce qu'indique Jules Hoüel (1823-1886) en 1874, qui le tient d'un professeur Alfred Gautier, apparemment de Genève. Il donne (pp ; v-xvi du livre cité plus loin)

gure même pas sur l'ouvrage qui dut être publié à compte d'auteur. Sa démonstration fut retrouvée quelques années plus tard, grâce aux A*nnales de mathématiques pures et appliquées* éditées à Nîmes, puis à Montpellier, par Joseph-Diez Gergonne, enseignant de l'Ecole centrale, puis professeur d'Université avant de devenir recteur[10]. Il y eut alors un grand débat sur « l'interprétation géométrique des symboles imaginaires », et une discussion large sur l'existence des objets mathématiques. Ce débat sur les « symboles », et non sur les « nombres » ou sur les quantités déclarées « impossibles », correspondit à une remise en cause de la pensée de Condillac, et il a occulté la démonstration même du théorème, notamment les autres démonstrations fautives qui en furent proposées. Ce débat, que Gergonne a délibérément et malheureusement rangé sous la rubrique *Philosophie mathématique*, donne d'autant plus de relief à la construction ultérieure de Cauchy que ce dernier ne reprit aucune de ces discussions, et trancha. Aussi, devons-nous commencer notre enquête par une mise en situation des contributeurs des Annales.

Ceux qui écrivirent dans les *Annales* inauguraient un genre qui peut se décrire comme la mathématique des professeurs. En le disant ainsi, on évite de faire passer la représentation géométrique des nombres imaginaires pour un hasard de l'histoire, dû à quelques amateurs, comme Argand, Buée, etc. Il y a bien sûr une place, encore au XIX^e^ siècle, pour les amateurs en mathématiques, place qui allait en se réduisant comme peau de chagrin. Mais pour augmenter cette place historique, il serait

---

les dates d'Argand (1768-1822), et le loue fortement, c'est-à-dire construit la postérité d'Argand, à un moment où la représentation géométrique des nombres complexes était considéré comme un passage obligé pour la compréhension de l'analyse elle-même. [R. Argand, 1971]. Il a d'ailleurs repris la démonstration d'Argand dans son p ropre cours d'analyse [J. Hoüel, *Cours de calcul infinitésimal*, 1, Paris, 1878, p. 47]. La référence devrait être au livre intitulé R. Argand, *Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques*, Paris, chez l'auteur, 1806, mais il n'existe plus aucun exemplaire. Une nouvelle édition a été réalisée par J. Hoüel à Paris en 1874, et quelques textes tirés des *Annales de mathématiques pures et appliquées* furent ajoutés. Un nouveau tirage de cette 2ème édition, avec la préface par M. J. Hoüel est augmentée d'une introduction de M. J. Itard agrégé de l'université, Paris, Librairie Blanchard, 1971. Cette édition est référencée ici par l'abréviation ARG.

[10]On dispose de la page d'envoi du livre d'Argand à Gergonne, sans doute vers 1813. La mention du libraire où son livre pouvait se trouver à la publication a été barrée par Argand, qui remplace par « chez l'auteur » ; la mention de l'imprimeur (Duminil-Lesueur, rue de Harpe, 78) est vraisemblablement l'indication du lieu où Argand travaillait.

malheureux de dérober celle qui revient aux professeurs, Gergonne, les frères Français, Servois, etc. que l'on doit distinguer des mathématiciens professionnels de ces premières années du XIX$^{\text{e}}$ siècle, académiciens notamment, tels Cauchy. C'est parce qu'il se souvient de ce rôle que Hoüel tient à fournir leurs textes, en plus de ceux d'Argand qui doit être crédité de la priorité, et fait preuve d'une grande exigence théorique, comme nous allons le voir. Avec le début du XIX$^{\text{e}}$ siècle, et en France d'abord, cette science était devenue obligatoire dans les lycées, et *ipso facto* un corps d'enseignants spécialisés se créa ; auparavant, il y avait le plus souvent versatilité des clercs, ceux-ci passant de l'enseignement des mathématiques à celui du latin et de la rhétorique, et pour les élèves ordinaires, il y avait toujours option pour les mathématiques, et jamais un enseignement obligatoire. Cette obligation nouvelle de la modernité conçue avant la révolution industrielle en France, contraignit à trouver des modèles nationaux et consensuels, car il fallait s'entendre sur l'objectif de l'apprentissage des mathématiques, en particulier sur le type de rigueur que l'on donnerait aux exposés. La rigueur se négocie toujours dans un enseignement scolaire où la mathématique devait justifier sa présence que l'expérience révolutionnaire de l'Ecole normale de l'an III avait imposée. Aussi, à la fin de son *Essai* qui porte à la fois sur l'addition des « grandeurs dirigées » et sur la multiplication des nombres complexes, Argand indiquait-il que la représentation géométrique ne possédait pas « un degré suffisant d'évidence » ; les constructions ne pouvaient en être admises que « comme des hypothèses, que leurs conséquences ou des raisonnements plus rigoureux pourront faire admettre ou rejeter »[12] . Le « tour de main » qui allait venir peut donc être vu comme une heureuse surprise.

Ce n'était pas seulement de la modestie, avec ce qu'il fallait de nostalgie en faveur de l'évidence cartésienne perdue, mais se manifestait un sens de la mathématique comme science expérimentale, c'est-à-dire une science qui tente des expériences et ébauche des constructions que l'histoire jugera. Gardons-nous de dire qu'elles sont élémentaires parce qu'elles sont dirigées vers l'école : ce serait réduire à presque rien l'intervention de Cauchy qui a dû élaborer sur la construction d'Argand, en comprendre le sens, et la réinventer pour l'incorporer dans une architecture plus vaste. Et celle-ci pénétra moins facilement l'école. C'est par un « coup de main » que Cauchy sut profiter du « tour de main » de Argand.

[12]ARG, p. 60

Sous la forme modeste du dubitatif chez Argand, on entend aussi qu'à la tradition de l'évidence, celle d'une mathématique des constats géométriques organisés par la raison déductive, Argand substituait une mathématique des opérations et du sens à trouver aux formes algébriques. Plus qu'il ne voulait justifier les secondes par la première. La réalité mathématique devint celle des nombres complexes, et les *imaginaires* furent désormais d'inutiles fictions. Venant en dernier dans cet *Essai*, et en quelques lignes seulement, analogue en cette concision à la démonstration fournie onze années plus tôt par Laplace, le théorème établissait l'efficacité de la considération de $i = \sqrt{-1}$ comme « signe de la perpendicularité ». Telle était l'expression de Buée qui, sur la seule représentation géométrique, publiait en français dans les *Philosophical Transactions of the Royal Society* la même année que Argand[13]. Dans la discussion sur les symboles, l'argument d'efficacité qu'aurait pu offrir le théorème ne fut pas utilisé. C'est sur le sens des signes que l'on s'interrogeait, et, après Condillac, sur la place même de l'algèbre dans la pédagogie des mathématiques, et plus généralement dans la pensée.

Ce n'est pas cette interrogation *philosophique* qui a donné son lieu à l'analyse ; elle fut seulement occasion pour la réflexion propre d'Argand, reprise et corrigée par Cauchy. Enjeu de la didactique des mathématiques, par sa démonstration le théorème complexe était aussi une ambition pour des mathématiques innovantes. Si l'image géométrique devait faire signe, c'est qu'un sens nouveau de la géométrie était acquis. Le signe donc ne porte pas par lui seul une signification et la modestie d'un auteur n'implique pas un aveuglement sur son originalité. Car la représentation, ou « méthode des directions » comme l'appelle Argand, est

> un moyen de recherches, qui, dans certains cas, peut être utilement employé, à cause de l'avantage qu'ont les constructions géométriques de présenter aux yeux un tableau propre à faciliter quelquefois les opérations intellectuelles[14] .

Argand reprenait à sa manière les arguments que Monge avait développés

[13]M. Buée, « Mémoires sur les quantités imaginaires », *Philosophical Transactions Roy. Soc.*,1806, 96, pp. 23-88.

[14]ARG, p. 60. Gergonne se contente de dire que le signe « purement distinctif » de la perpendicularité était dans l'air du temps. Le rappel de l'existence de l'article londonien de Buée vient de Lacroix, et il faut aussi y voir l'affirmation d'un universalisme mathématique, malgré la guerre régnant alors entre la France et l'Angleterre, et l'inéluctable victoire de celle-ci.

dans son cours de géométrie descriptive à l'Ecole normale de l'an III. Il s'impatienta donc au cours des débats des *Annales* où le signe était trop présent, et à l'heureuse suggestion de Gergonne, donna ses *Réflexions sur la nouvelle théorie des imaginaires.* Il prit alors soin de faire suivre ses réflexions « d'une application à la démonstration d'un théorème d'Analyse »[15], ajoutant que la « préférence en faveur des lignes dirigées » sur « la démarche purement analytique » se justifiait par « la démonstration du théorème d'algèbre »[16]. Il l'énonce sous la forme du théorème pour un polynôme à coefficients complexes. Et cela justifie pour lui le mot « algèbre », alors que nous avons annoncé l'analyse. Parue un demi siècle plus tôt, l'*Encyclopédie* avait certes consacré l'équivalence des deux mots, mais celle-ci allait voler en éclats, la preuve donnée par Argand ayant contribué à cet éclatement. Il en fut moins conscient que Cauchy qui l'expliqua, et exprima son refus de la « généralité » de l'Algèbre.
Analyse ou algèbre, ces deux indications sont toutes les deux opposables à la représentation de géométrie qui entoure aujourd'hui le nom d'Argand. Lui-même, en 1815, invite « le lecteur à tracer une figure, pour suivre cette démonstration »[17]. Mais il ne donne pas la figure. Certes, une figure coûtait cher à un imprimeur et à un responsable d'une revue, mais on ne peut en faire un empêchement rédhibitoire ; les figures avaient mauvaise presse chez les mathématiciens en dehors des exposés de géométrie pure, et en particulier chez les nouveaux professeurs alors même qu'ils devaient exprimer la forme canonique de cette géométrie. Ils méditaient encore la déclaration de Lagrange, qui introduisait en 1788 la *Mechanique analitique* par une déclaration de guerre aux figures[18]. Les manuels à la mode, ceux par exemple de Lacroix, ignorent donc les figures. Or le livre de 1806 présente de nombreuses figures, plus d'une vingtaine pour 78 pages : c'est seulement à l'occasion de la démonstration du théorème que le livre omet toute figure et Argand n'en rajoute pas plus pour son article de 1815. Le « tour de main » ici concerné n'est donc pas d'origine géométrique. Ou plutôt l'inspiration géométrique qu'il

[15] ARG, p. 1112. L'année précédente, Argand était revenu sur sa démonstration du théorème sur les racines d'un polynôme comme une « application à l'algèbre » de son livre, (R. Argand, « Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans des constructions géométriques », *Annales de math. pures er appli.*, IV, 1813-1814, pp. 133-147, in ARG, pp. 76-96).

[16] [R. Argand, 1814-1815, p. 207], ARG, p. 115

[17] [R. Argand, 1814-1815, p. 207], ARG, p. 121.

[18] J. L. Lagrange, *Mechanique Analitique,* Préface, Vve Desaint, Paris, 1788 ; remarque reprise dans l'avertissement à la deuxième éditiion en 1811, juste avant le débat aux *Annales.*

peut comporter n'a pas besoin d'une représentation pour se dire. Mon but est bien alors de mettre à jour cette inspiration géométrique non figurée, ou cette invention, dans un livre dont le titre porte pourtant sur la représentation. La considération du « tour de main » permet ainsi une analyse épistémologique.
Puisque nous allons du livre de 1806 à l'article de 1815, serions-nous encore tentés de leur donner deux significations distinctes ? Avancer un changement s'avère une fausse piste historique : en fait, Argand approfondit une même démarche et la clarifie. Deux idées étaient intervenues en 1806, et leur voisinage même rend difficile la séparation par l'historien, et cela fut sans doute aussi difficile pour leur inventeur. Il y a la représentation géométrique d'un "tourner autour" , que l'on peut dire de géométrie, et il y a la technique de l'analyse, que j'appelle un « tour de main ». Seule cette dernière est perfectionnée dans le texte de 1815, l'auteur dégageant sa preuve de tout jeu sur les signes.
J'ai cru utile de mettre en scène le théorème d'Argand, sans insister sur le fait que la preuve était fausse ; nous retenons que le théorème porte sur les nombres complexes conçus comme composant un tout explicable à des élèves. Mais l'historien ne doit pas tenir pour négligeable la facilité que l'on a aujourd'hui de suivre Argand à la lettre, et presque sans commentaire. Si c'est la première fois que nous lisons sans aucune gêne, c'est que le principe de la preuve d'Argand fait postérité jusqu'à nous. Est-ce étonnant, dans la mesure où il y a eu prise en compte par un monde professoral ? On sait - et les didacticiens le disent toujours - que le savoir des professeurs est celui qui disparaît le plus lentement. Malgré ses difficultés à se faire comprendre par lesquelles nous commencions, Argand a eu la chance de vivre une époque où le savoir professoral se reconstituait. Son apport est entré en douceur dans la pratique scolaire, et a été banalisé.

Nous n'aurions alors pas suffisamment rendu compte de ce mouvement continu en omettant de souligner que le débat dans les *Annales* courut sur une période bouleversée : la défaite des armées françaises, l'abdication de Napoléon, le retour des Bourbons, les Cent jours ponctués par Waterloo. Le dernier article d'Argand sort au numéro de janvier 1815, et d'autres intervenants poursuivent le débat ; ils étaient professeurs dans les écoles militaires et ont su mettre hors histoire, sinon hors politique, la science et sa transmission. C'était précisément une telle liberté qui avait été conquise pas les savants de la Révolution, et qu'il fallait sauvegarder dans tout nouveau régime. La militance mathématique de Gergonne et ses correspondants n'est bien sûr pas l'indifférence[19]. Le datant du 15 juin 1815, juste trois jours avant Waterloo, et pour le numéro des *Annales* de juillet, Gergonne rappelle les avantages du jugement parlementaire par vote sur des questions clairement exposées. Il en remontre aussi bien au Napoléon des Cent Jours qu'à Louis XVIII. Peut-on dire plus, et que la mort en 1813 de Lagrange, mathématicien mais aussi comte d'Empire, a facilité le passage à l'analyse ? On ne peut le savoir qu'en lisant Argand et les professeurs des Annales avec un œil neuf.

La démonstration

J'en arrive seulement maintenant à l'énoncé qui clôt le livre de 1806, au n$^{\text{o}}$ 31, sous la forme de la factorisation, et tient à redire que, contrairement aux preuves précédentes, les lettres $a, b, \ldots, g$, ne sont pas des nombres réels (qu'il qualifie de « primes »[20]).

On se propose, dans ce dernier article, de démontrer que tout polynôme de la forme

$$X^n + aX^{n-1} + bX^{n-2} + \cdots + fX + g$$

est décomposable en facteurs du premier degré $X + \alpha$. Parce que le théorème porte sur les nombres complexes, les coefficients du polynôme sont nécessairement des nombres complexes. Argand est le premier auteur à faire voir une telle nécessité. La preuve de la nature complexe des racines est conduite de telle sorte que ces nombres ne soient pas isolés dans le raisonnement : ils l'organisent. Bref, l'algèbre est localisée sur les complexes, et s'évanouissent les *imaginaires.* Comme s'évanouit la possibilité d'un recours au théorème des valeurs intermédiaires, faux pour un polynôme complexe.

L'énoncé du théorème étant fourni, Argand se contente d'indiquer qu'il suffit de prouver qu'existe un « nombre qui, pris pour X, rende égal à

[19] Quelques remarques sur les élections, les assemblées délibératives, et le système représentatif, *Annales de mathématiques pures et appliquées*, t. V, 1815-1816, p.1-11.

[20] Ce vocabulaire n'a pas connu de suite. En choisissant « prime » au lieu de « réel » (adopté depuis Descartes), Argand signifiat que les complexes, qu'il appelle encore imaginaires, étaient aussi utiles que les « primes ». Il y a cohérence du langage utilisé : « quantité médiane » pour nombre imaginaire pur, « quantité intermédiaire » pour $a + ib$ lorsque a et b ne sont pas nuls. Les « primes » ont seuls une structure de corps, à condition de réunir négatifs et positifs, ce que Argand a fait.

zéro le polynôme proposé »[21], le nombre X ne pouvant qu'être complexe. La référence est minimale : si la démonstration donnée se veut complète, sans avoir à présupposer une connaissance profonde de la théorie de l'élimination, il y a quand même de l'algèbre polynomiale présupposée. Mais cette algèbre polynomiale est désormais sur les complexes. Cauchy se débarrassera d'une telle référence car il aura construit l'algèbre des séries entières complexes.

Argand fixe aussi une notation fonctionnelle, et il donne à voir un jeu entre le plan de la variable et le plan de la fonction. Et, en ce cas, il est possible de voir l'influence de Lagrange, qui insistait dans ses cours de l'Ecole normale sur le graphe d'une fonction polynôme. Mais il restait sur l'axe réel et Argand travaille sur le plan complexe.

Il note le polynôme par Y, et sa valeur en $X = p + ri$ est notée $Y_{(p+ri)}$. Cette notation prête à confusion pour nous aujourd'hui. En ce sens que, pour Argand, p et i sont des « nombres pris à volonté, et r exprime un rayon en direction ou une racine de l'unité indéterminée ». Bref, p et i paraissent être des complexes quelconques, mais r est ce que nous notons i, et aussi bien $e^{2i\pi k/n}$, où $1 \leqslant k \leqslant n$, n et k étant entiers. Ce léger décalage par rapport aux notations d'aujourd'hui ne peut que rendre plus attentif à l'élaboration de la preuve, et à ce lent passage vers le nombre complexe en tant que tel, à partir des r particuliers qui interviennent d'abord. Car il faudrait prendre $q(= ri)$ comme nombre complexe quelconque. C'est bien ce que à quoi Argand va aboutir. La maladresse de l'écriture ρi est donc révélatrice pour l'historien, car elle lui permet de voir survenir le module d'une part et l'argument de l'autre. Ce découpage va devenir une méthode, passant par un « tour de main ».

Forcément complexes, au profit d'autres coefficients complexes $Q, R, S, \ldots$, les coefficients, $a, b, \ldots, g$, disparaissent dans l'écriture polynomiale de $Y_{(p+ri)}$ selon les puissances[22]croissantes de ir,

$$Y_{(p+ri)} = Y_(p) + irQ + i^2r^2R + i^3r^3S + \cdots$$

Voilà tout ce qui est requis de calcul algébrique, bien sûr pensé et exprimé sur les complexes. C'est encore la formule de Taylor, construite ici

[21] ARG, p. 58. Le théorème occupe les pages 58 et 59 de la reproduction citée.

[22] Le texte indique ir. Il est pourtant écrit ri sous le signe de la fonction. Mais nous n'avons pas l'original d'Argand. Cela n'a guère d'importance puisque bientôt Argand prendra un nombre complexe quelconque i.

à partir de la formule du binôme pour des puissances entières.

Argand fait un premier recours à un argument d'analyse, c'est-à-dire à un argument de comparaison de grandeurs ; il indique que l'on peut en négliger certaines par rapport à d'autres. C'est de l'analyse infinitésimale à la plus ancienne manière du début du XVIII^e siècle. Le nombre i est particularisé.

Si l'on suppose i infiniment petit, les termes affectés de $i^2, i^3, \ldots$ disparaissent, et l'on a simplement

$$Y_{(p+ri)} = Y_(p) + irQ$$

Ce vocabulaire d'infiniment petit est illusoire, et on pourrait lire « suffisamment petit ». Serait-ce trahir Argand ? Il ne fournit d'abord aucun moyen explicite pour mesurer la petitesse d'un nombre complexe. Ce moyen, le module, va être bientôt précisé dans la preuve même.

Il adopte de façon minimale le vocabulaire du début de son *Essai*, où il distinguait la notion d'espèce ou *ordre prime* AB pour désigner les réels, l'espèce *médiane* $\overline{AB}$pour les imaginaires purs, et l'espèce ou *ordre intermédiane* $\overline{AB}$ pour toutes les autres directions. Il utilise surtout le jeu d'inversion des lettres, de $\overline{AB}$ en $\overline{BA}$, pour indiquer le changement de signe, et c'est la première ébauche de calcul vectoriel.

Il n'y a donc pas chez Argand que la représentation géométrique ; intervient l'idée vectorielle ou de « géométrie dirigée » dont Wessel s'était emparé quelques années plus tôt dans un texte en danois qui ne fut guère lu[23]. Ici, il s'agit de faire que $Y_{(p)}$ et irQ aient un argument opposé. En permettant ainsi de se placer sur une seule direction issue de l'origine 0, le raisonnement dans le plan se réduit à un calcul sur les seuls nombres réels, par évaluation de la diminution de la distance à l'origine qui est l'enjeu, et qui est appelée ici « grandeur ». Un nom allait être trouvé par Argand pour la distance, le module, qui servira aussi à mesurer la petitesse de i, mais ici i ne peut être que de façon approchée le module du nombre complexe ri. Compte tenu du choix de r dont l'argument est

[23]C. Wessel, Om Direktionens analystiske Betegning, et forsög anwendt fornemmelig til plane og sphaeriske polygoners oplösning, *Mém. Acad. Sc. Copenhague*, 1797 : *Essai sur la représentation analytique de la direction*, trad. H. G. Zeuthen, Copenhague/Paris, 1897.

seulement un sous-multiple de $2r$, il faut que i ajoute un peu de son argument pour réaliser l'exacte opposition. Cette évaluation est le début de l'analyse qui, dans cette page, est encore à l'état d'ébauche. Argand n'a aucun besoin de figure pour s'exprimer. En quelques lignes, le théorème est démontré[24] :

> Soit $\overline{KP}$ l'espèce à laquelle appartient $Y_{(p)}$. Qu'on prenne de manière que $i\rho Q$ soit de l'espèce $\overline{PK}$, c'est-à-dire du même ordre que $Y_{(p)}$, mais négative par rapport à cette dernière quantité ; il s'ensuivra que la grandeur de $Y_{(p+\rho i)}$ sera plus petite que celle de $Y_{(p)}$; par la même marche, on obtiendra une nouvelle valeur de Y, qui sera plus petite que celle de $Y_{(p+\rho i)}$, et ainsi de suite. Donc on parviendra à une valeur de X, qui donnera $Y = 0$.

Certes la concision pourrait qualifier le « tour de main », mais non seulement l'opposition de direction est insuffisamment prouvée, mais la dernière implication est fausse - une suite de nombres complexes décroissants en module n'est pas nécessairement convergente vers 0. Nous ne reconnaissons dans cette preuve aucun algorithme explicite général qui permette d'obtenir une des racines. La correction qu'il faut apporter à cette première démonstration d'Argand ne relève pas seulement de l'ordre des convergences ; il y a défaut d'analyse, et celle-ci porte en particulier sur les nombres réels (une suite décroissante de nombres réels positifs ne converge pas nécessairement vers 0).

Ceci ne doit pas cacher la double intervention des nombres complexes, l'intervention qualifiée de vectorielle qui calcule sur une direction comme s'il s'agissait de nombres réels, et l'intervention de la multiplication par un nombre imaginaire qui permet de « tourner », en l'occurrence de faire que, comme le dit Argand, le terme $i\rho Q$ soit de l'espèce $\overline{PK}$. Même s'il ne saisit pas le rôle bizarre des racines de l'unité dans cette opération ou plutôt pressent qu'il y a eu une sorte d'approximation, le lecteur ne peut que « voir » que la même démonstration ne prouverait pas que tout polynôme à coefficients réels possède au moins une racine réelle. Par ce « tourner autour », Argand fait toucher la différence entre les nombres réels et les nombres complexes, et celle-ci ne pouvait pas surgir si Argand était parti comme à l'accoutumée de considérations sur les *imaginaires*. L'on peut bien dire que le théorème d'Argand est un théorème d'algèbre sur les complexes.

[24] ARG, p. 59.

La deuxième démonstration

Dans une deuxième démonstration, fournie en 1813 à l'occasion du débat dans les Annales, toujours sans faire de figure, Argand joue nettement plus la géométrie puisque l'espèce intermédiaire est repérée par l'argument du nombre complexe. Mais l'explication est aux dépens de la rigueur, et de ce que la méthode présentait d'automatisme pour le calcul. Il réinterprète la réduction du développement à $Y_{(p+ri)} = Y_{(p)} + riQ$, et en donnant à voir les angles, il oublie l'approximation faite. Il veut convaincre, et doit s'adapter à ce que tout le monde faisait à son époque, et du coup son langage même nous paraît désuet, dès le premier verbe, c'est-à-dire à propos de la « construction de l'équation ». C'est pourtant cette construction qui fait la célébrité d'Argand !

> Construisons le second membre de cette équation suivant les règles précédentes. Soit α l'angle que fait y_p avec la ligne prise pour origine des angles ; on peut prendre ρ de manière que $i\rho Q$ fasse avec cette même ligne un angle $-\alpha$, c'est-à-dire que la direction de $\overline{i\rho Q}$ soit opposée à celle de $\overline{y_p}$ La grandeur de $Y_{p+\rho i}$ sera ainsi plus petite que celle de Y_p. On obtiendra de la même manière, une nouvelle valeur de y, plus petite que $y_{p+\rho i}$, et ainsi de suite, jusqu'à ce que y soit nul, donc, etc.[25]

Dans ce que nous décrivons comme un cheminement vers les nombres complexes, on a remarqué le jeu du surligné, avec le passage d'une signification quasiment vectorielle (dans $\overline{KP}$) à une signification symbolique dans $\overline{i\rho Q}$ et même $\overline{Y_{(p)}}$; S'il est ancêtre de la flèche, et donc la forme géométrique de la notation vectorielle, le surligné est appelé à disparaître dans la dynamique de cette démarche d'Argand. Il disparaîtra presque totalement en 1815, en tout cas ne portera plus le raisonnement.

En 1813, Argand signale qu'une explication avait déjà dû être ajoutée à sa preuve. Car elle ne convainquait pas Legendre, lequel estimait qu'il fallait tenir compte du fait que $i\rho Q$ puisse être nul. Réponse à cette objection avait été donnée dès le livre de 1806. La preuve ayant été corrigée, on peut se demander pourquoi Legendre n'a pas signalé l'ouvrage d'Argand à l'Académie[26]. Il était âgé de 54 ans en 1806, auteur célèbre des *Eléments de géométrie* de l'an II et rénovateur de la pensée

[25]ARG, p. 91. Argand est passé de la majuscule Y pour le polynôme à $y_{p+\rho i}$, et la variable apparaît toujours en indice, distinguant ainsi la valeur prise par la fonction.

[26]L'ouvrage n'apparaît pas dans les listes d'ouvrages reçus par la première classe de l'Institut en 1806.

euclidienne, donc tenant d'un type de rigueur en mathématique. Surtout si, comme Houël en 1874, on décrit l'ouvrage d'Argand comme étant « du petit nombre de ceux qui marquent une époque dans l'histoire des sciences »[27]. Nous déduisons de la seule correction faite que Legendre n'avait pas vu la faute de démonstration sur la convergence de la suite de nombres complexes. Car la rigueur exhibée par Argand est la rigueur algébrique qui se manifeste dans la théorie de l'élimination dont nous avons vu l'usage pour la démonstrations de Laplace. Argand ajoutait donc en 1806. :

> Il faut remarquer, pour l'intégrité de la démonstration, que le terme $i\rho Q$ peut devenir nul. Dans ce cas, on doit conserver le terme suivant $i^2\rho^2R$, ou, à défaut de celui-ci, $i^3\rho^3S$, et ainsi de suite. Le raisonnement sera toujours le même, puisque les puissances $\rho^2, \rho^3, \ldots$ sont des quantités de la même nature que ρ[28]

.

Cette nature, ne l'oublions pas, est celle des racines n-ièmes de l'unité et elle est insuffisante pour la validité de la preuve : Argand n'a pas encore joué la généralité du nombre complexe.

Le « tour de main »

En 1815, cette explication ne lui suffit plus ; il indique, et d'une façon toute algébrique en termes de formes, que la présence de trois termes au moins fait le succès du raisonnement prouvant la diminution du module de la valeur du polynôme. L'infinitésimal, qu'il notait i, est éliminé au profit d'un i qui désigne maintenant un nombre complexe quelconque, et a donc incorporé ρ. Cette simplification, qui correspond à une prise de conscience du rôle d'un complexe, lui fait écrire [29] le développement de $Y_{(z+i)}$ selon :

$$Y_{(z+i)} = Y_{(z)} + Ri^r + Si^s + \cdots + Vi^v + i^n \ ;$$

de manière qu'aucun des coefficients $R, S, \ldots, V$ ne soit nul, et que les exposants $r, s, \ldots, v, n$ aillent en augmentant"[30].

---

[27]Hoüel, avertissement, ARG, p. V.

[28]ARG, p. 59.

[29]On peut se demander si ce choix décisif de i pour désigner un nombre complexe quelconque n'a pas joué, en signe de mémoire au moins, pour l'utilisation de i en place de $\sqrt{-1}$ qui était le signe usuel.

[30]ARG ? P. 119 ; La notation fonctionnelle donne y_z, mais $y_{(z+i)}$ lorsque la variable est composée.

En effet, si les coefficients R, S, etc., étaient tous nuls, le théorème serait démontré, le caractère unitaire du polynôme Y faisant qu'une racine complexe évidente serait $z + \sqrt[n]{-Y_{(z)}}$. On reste donc avec trois termes au moins pour le polynôme $y_{(z+i)}$ développé selon les puissances de i, à savoir $y(p), i^n$, et au moins un autre terme de la forme Ri^r. Comme le voulait Legendre, l'écriture algébrique propre ayant bien été trouvée selon les requis de la rigueur de la théorie de l'élimination, il s'agit pour Argand de démontrer que, par un choix convenable du nombre complexe quelconque i, le module de $y_{(z+i)}$ peut être rendu moindre que celui de $y_{(z)}$. Je maintiens la notation en indice pour la variable par fidélité au texte disponible, mais soulignerai la proximité d'Argand avec note façon d'aujourd'hui en donnant plus loin les expressions des contemporains d'Argand. L'essentiel est de prouver, ajoutant alors la notation des modules qui va venir :

$$\left|Y_{(z+i)}\right| < \left|Y_{(z)}\right|$$

Tenant compte des deux paramètres réels que comporte un seul nombre complexe i, Argand organise les deux étapes séparées qui n'étaient qu'implicitement indiquées en 1806 par le choix de ri, r portant alors plutôt l'argument et i plutôt le module. Les deux étapes sont enchaînées dans un certain ordre. Cela va devenir le tour classique en analyse, ce qu'on appellera la division des ε. Il distingue la première étape, celle qui détermine la « direction » du nombre complexe i, de la seconde étape qui en détermine la « grandeur ». Argand a dépassé le surligné comme seule indication vectorielle. Est sollicitée la dimension deux du plan complexe, et sa topologie. Voilà ce que montre en effet le « tour de main ».

Pour la direction, il convient de faire que l'argument de Ri^r soit exactement opposé à celui de $y_{(p)}$; à partir d'une origine K dans le plan complexe (figure 1 qui, rappelons-le, n'est pas fournie dans l'original, comme pour mieux souligner la valeur algébrique du « tour de main »), Argand représente par $\overline{KP}$ le nombre complexe $y_{(p)}$, par $\overline{PA}$ le nombre Ri^r , et enfin $\overline{AH}$ désigne toute la somme restante, $Si^s + \cdots + Vi^v + i^n$. Il explicite les angles pour conclure que « le point A se trouvera sur la ligne PK, prolongée s'il le faut, par son extrémité K »[31] . Ceci est immédiatement convaincant.

[31]L'expression, toute euclidienne, de prolongement signifie que le point A peut se trouver à gauche de K sur la droite PK.

La direction de i étant ainsi fixée, « on peut en second lieu, la faire varier de *grandeur* » ; c'est-à-dire d'abord poser le point A entre P et K, ce qui donne un module assez petit qu'il faudrait noter d'une façon spéciale. Mais Argand n'a pas cette notation, ni indexation. Ce qui nous donne l'impression, à nous qui avons une notation, qu'il manipule des inégalités sur les nombres complexes ; de fait, la représentation géométrique corrige et l'on voit agir une distance. On la voit, mais Argand fait mieux : une fois démontré le théorème, et réfléchissant sur ce qu'il vient de faire, il nomme le *module* qui « représenterait la grandeur absolue de la ligne $a + b\sqrt{-1}$ »[32]. Argand écrit le nombre complexe général sous la forme que retiennent après lui tous les algébristes :

$$\text{(A)} \qquad \sqrt{a^2+b^2}\left[\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sqrt{-1}\right].$$

Reprenons donc la démonstration sur la « grandeur ». Parce que « les exposants $s, \ldots, v, n$ sont tous plus grands que r », il reste à faire que le module de Ri_1^r, ou comme dit encore Argand à ce moment de sa preuve, la distance de P à A, soit inférieure au module de $Si_1^s + \cdots + Vi_1^v + i_1^n$, c'est-à-dire la distance de A à H, exprimée comme $AB + \cdots + FG + GH$ en désignant les différentes quantités de la somme algébrique. Ceci fixe pour i un module plus petit que celui de i_1 de telle sorte que $PA > AH$. Le résultat s'impose d'un coup, et c'est vraiment là le lieu du « tour de main ».

> Et, par conséquent, si l'on trace un cercle de centre A et du rayon AP, le point H sera au dedans de ce cercle, et il suit des premiers éléments de Géométrie que, K étant sur le prolongement du rayon PA, du côté du centre A, on a $KH < KP$[33].

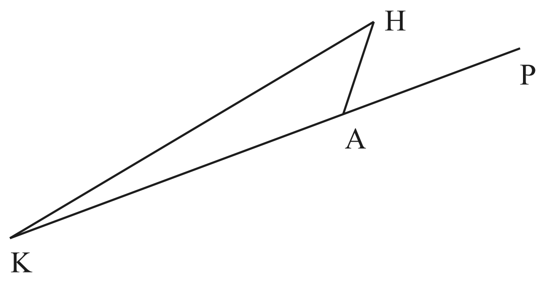


Figure 1

Argand fait aussitôt ressortir la propriété de la mesure, utilisant pour la

[32][R. Argand, 1815, p. 208], ARG, p. 122.
[33]ARG, p. 121.

première fois le mot module qui va rester dans la langue mathématique :

> Le module de la somme de plusieurs quantités n'est pas plus grand que la somme des modules de ces quantités[34].

Il propose une démonstration analytique de cette propriété à partir de l'écriture (A), faisant reconnaître l'interprétation géométrique élémentaire, qui organise la preuve en deux étapes. C'est exactement à cette propriété fondatrice qu'il se réfère en parlant des « éléments de géométrie ». Nous pensons aussitôt topologie métrique ; Argand sait ce qu'implique son calcul de comparaison des grandeurs quant au maniement des séries et des questions de convergence. Au point qu'il pourrait donner lieu selon lui, à un automatisme. La réflexion d'Argand est maintenant celle d'un épistémologue, ou aussi bien d'un professeur : dire le moteur de la démonstration, et donc distinguer une méthode, et faire savoir qu'elle est simple. Mais il hésite encore entre ce qui peut se faire « à vue, sans avoir besoin d'aucun effort d'imagination » (soulignons qu'il a éliminé les *imaginaires*), et une forme nouvelle du calcul.

> Revenons au sujet qui a donné lieu aux développements ci-dessus. On pourra demander s'il serait possible de les traduire dans le langage ordinaire de l'Analyse. Cela me paraît très probable ; mais peut-être serait-il difficile d'obtenir, par cette voie, un résultat aussi simple.

Argand parle d'Analyse, et il n'entend plus Algèbre ou même le calcul sur les symboles qu'indiquait le surligné. Il y a dénégation de l'intérêt de ces symboles : il a trouvé, avec le module, une autre voie. A son habitude « modeste », il dit laisser à des calculateurs plus habiles le soin de suivre cette autre mise en forme, qui est à nos yeux le b-a-ba de l'analyse.

C'est qu'il sait que l'étude ainsi conduite, « une démonstration purement analytique »[35] , rendrait vaine sa tentative d'une géométrie dirigée, et devine que la preuve du théorème fondamental de l'algèbre n'illustrerait plus la représentation géométrique des nombres complexes. On conçoit le dilemme de l'inventeur qui en a trop fait : il a lui-même détruit l'intérêt d'une partie de sa construction, car des techniques de l'analyse qui vont devenir standard, il ne parvient pas à dissocier la représentation géométrique des nombres complexes. Embarras de richesse ! C'est pourtant par

[34]ARG, p. 121.

[35]ARG, p. 122. La notation du module entre deux barres est due à Gauss.

le calcul et la formule (A) qu'il indique le jeu du module quant à la multiplication des complexes, qu'il nomme maintenant comme des quantités.

> Le module du produit de plusieurs quantités est égal au produit des modules de ces quantités.

Cette multiplication porte le « tourner autour » qui a permis la première étape. Cauchy tranchera, réduira, standardisera et éliminera la représentation géométrique, mais gardera le mot « module », ce qui prouve en particulier qu'il a connu le texte d'Argand.

La postérité directe d'Argand

Argand hésite à qualifier son ouvrage : avoir trouvé un résultat « dont les difficultés n'ont pas été au-dessous des forces de Lagrange lui-même », ce qui implicitement est une critique de Lagrange, ou « un petit service rendu à la science »[36], et c'est ce que Cauchy pensera. Vraisemblablement, Legendre avait le même embarras de jugement, et on tiendrait une explication pour la non présentation du résultat à l'Académie qui nous préoccupait plus tôt. La banalité de l'inégalité triangulaire avait prévenu la compréhension de Legendre, car il ne voyait que géométrie élémentaire[37] ? On ne sait pas ce qu'en pensait Lagrange, qui ne put lire les articles d'Argand dans les *Annales*, étant mort le 10 avril 1813. S'il a connu le livre de 1806, il pouvait voir que l'auteur prenait ses distances avec l'approche fournie dans le *Traité de résolution des équations numériques de tous les degrés*. En 1815, Argand répondait dans les *Annales* à Servois, professeur qui dans une lettre à Gergonne avait enfin soulevé l'objection sur la convergence vers 0 de la suite des nombres complexes indiquée en 1806 et ferraillait :

> Ce n'est point assez, ce me semble, de trouver des valeurs de x qui donnent au polynôme des valeurs sans cesse décroissantes ; il faut de plus, que la loi des décroissements amène nécessairement le polynôme à *zéro*, ou qu'elle soit telle que *zéro* ne soit pas, si l'on peut s'exprimer ainsi, l'*asymptote* du polynôme [38].

[36] ARG, p. 123.

[37] Legendre estimait peut-être que le travail d'Argand sur la diminution du module provenait de son propre calcul de 1798. Cauchy, en 1821, ne se réfère qu'à Legendre, sans mentionner Argand.

[38] Lettre de M. Servois datée de l'Ecole d'Artillerie et du Génie de la Fère du 23 novembre 1813, ARG, p. 104. R. Argand « Réflexions sur la nouvelle théorie des imaginaires, suivies d'une application à la démonstration d'un théorème d'Analyse », *Annales de math. pures et appli.*, 1814, pp. 197-209. Voir la reproduction dans ARG,

Argand répondit par la rigueur particulière que nous avons vue, mais à la façon de Lagrange, il prétendit qu'elle consistait à s'affranchir « de la considération des quantités évanouissantes » ; il suggérait malencontreusement que l'algèbre pure l'exonérait de tout défaut, alors qu'il faisait intervenir un i complexe, dans toutes sa généralité. L'objection, ou plutôt les objections que Argand retient et fait siennes, permettent l'analyse. Nous venons de voir Argand cerner d'un « tour de main » la réduction de l'expression $Y_{(z+ri)}$ à $Y_{(z)} + Ri^r$ en négligeant $Si^s + \cdots + Vi^v + i^n$; il lui faudrait assurer de même la convergence effective vers 0 de la suite de nombres complexes construite par le raisonnement de 1806, et c'est en fait là l'objection de Servois.

Argand voit en 1815 qu'un autre raisonnement évitera la preuve d'une convergence. C'est ainsi qu'intervient un raisonnement par l'absurde. La valeur de $y_{(x)}$ étant représentée par $\overline{KP}$, où K est l'origine, Argand suppose que le polynôme ne s'annule jamais sur le plan complexe, donc que P ne coïncide jamais avec K. C'est ce qui provoque la contradiction. La variable x dans le polynôme Y est maintenant employée sans réserve pour désigner un nombre complexe quelconque, et le surlignement qui désigne ce que nous appelons un vecteur est remplacé par la valeur, c'est-à-dire le module.

> Or si, dans l'infinité de valeurs dont x est susceptible, il n'y en avait aucune qui donnât lieu à cette coïncidence, la ligne $\overline{KP}$ ne pourrait jamais devenir nulle ; et de toutes les valeurs de KP, il y en aurait nécessairement une qui serait plus petite que toutes les autres [40].

Le minimum étant admis pour les valeurs du module du polynôme, le raisonnement déjà proposé en 1806 de diminution du module par une rotation convenable autour du minimum, raisonnement amélioré par la manipulation analytique des inégalités, termine la preuve par l'absurde. Mais comme il répond à une objection, Argand n'ose pas se contenter de faire allusion au raisonnement de 1806 et il fait heureusement jouer la géométrie métrique. Comme nous l'avons vu, il expose en distinguant en deux temps argument et module, les joignant par l'inégalité triangulaire qui permet de mesurer l'effet de la perturbation de termes supplémentaires, une fois que l'on a correctement « tourné » l'argument.

---

p. 117.

[40][R. Argand, 1814], ARG, p. 119.

L'existence d'un minimum n'est pas démontrée par Argand : il y a encore faute, et cette fois par insuffisance. Il faudra encore du temps pour que les problèmes d'extremum soient réglés, alors même que le calcul différentiel est né de telles questions. D'autres démontreront l'existence de ce minimum, d'autres encore règleront mieux le jeu des inégalités. Il semblerait que le premier à manifester le besoin d'une démonstration de l'existence d'un minimum fut G. Darboux, dans un article[41] paru au *Bulletin des Sciences mathématiques* en 1872. L'analyse ne s'est donc pas faite en un seul coup.

Mais c'est en direct que nous assistons avec Argand à sa mise en œuvre. Peut-on seulement parler d'essais et d'erreurs à la manière de l'épistémologue Lakatos, parce qu'il y a effort de réponse à des objections faites par d'autres enseignants de mathématiques ? Il faut plutôt souligner la décomposition d'un problème en difficultés successives, et qui peuvent être démontrées séparément, et la manipulation ordonnée des inégalités en deux étapes qui organisent une voie. Argand approfondit le sens de sa démarche ; il n'en change pas. Après celle sur la représentation en 1806, et celle de 1813 sur l'estimation de la " *grandeur* " et de la " *direction* ", les innovations en 1815 sont la concision du « tour de main » de l'inégalité triangulaire, et le raisonnement par l'absurde.

A la façon d'un repérage, le raisonnement par l'absurde sera très longtemps maintenu dans les démonstrations du théorème qui se réclament de l'analyse. Alors même qu'il n'est plus logiquement indispensable, l'analyse ayant pu intégrer le raisonnement par l'absurde dans ses constructions fondamentales, celle du théorème des valeurs intermédiaires qui est ici éclipsé, ou celle de l'existence d'un minimum pour une fonction continue sur un compact, voire plus tard dans l'établissement des propriétés des compacts. Parce qu'elle se veut constructive, la démonstration de Kneser en 1981 est une des premières à ne plus utiliser ce raisonnement par l'absurde, tout en respectant la technique de Argand.

Argand sait bien qu'en raisonnant par l'absurde il perd une détermination constructive de la racine. Et c'est ce qui empêche de situer son travail comme conséquence directe des pratiques numériques d'une classe de mathématiciens non intéressés par la théorie. Argand doit au contraire s'éloigner de telles pratiques pour réussir. Cet éloignement ne fut pas

[41] (1),3 (1872), p. 307.

facile. Argand essaie d'argumenter comme tout le monde, c'est-à-dire revient à une démonstration directe pour juger de la diminution du module, s'en sort par une référence à la notion de convergence établie par Gergonne (parce qu'elle lui paraît faire consensus). Le consensus ne viendra que plus tard, avec l'*Analyse algébrique* de Cauchy. Pourquoi ne pas dire que cette mathématique se cherche encore, et que c'est dans cette recherche même qu'elle abandonne la pensée de Condillac, et la facilité des signes. Et cet éloignement signe le reniement de la méthode de Lagrange.

En effet, que pourrait valoir une tentative « numérique » ou algorithmique de poursuivre quantitativement le calcul qui permet de négliger les termes $Si^s + \cdots + Vi^v + i^n$ afin d'assurer la convergence dont le texte de 1806 assurait la réalité ? Elle signifierait la possibilité, partant d'un point p_1 du plan complexe et de $Y(p_1)$ dont la valeur n'est pas nulle, de trouver par le jeu sur l'argument et le module, un point p_2 du plan complexe tel que non seulement le module de $Y(p_2)$ soit strictement inférieur à celui de $Y(p_1)$, mais encore que l'on ait une mesure de cette diminution. Par exemple, sous la forme d'une inégalité :

$$|Y(p_2)| \leqslant \alpha\,|Y(p_1)|, \tag{1}$$

où α désigne un nombre positif, strictement inférieur à l'unité et indépendant de p_1. Si une telle inégalité existait, on aurait fortement avancé sur la voie d'un algorithme général de calcul des racines des polynômes, car il ne resterait qu'à assurer un moyen de sélectionner les sous-suites convergentes de point p_i ainsi construits. Le calcul d'Argand montre en effet que l'on dispose d'une estimation de la norme de p_2 à partir de celle de p_1 puisque $p_2 - p_1$ est précisément le nombre noté i. Ainsi, la suite de points p_k resterait dans un disque convenable du plan complexe, et aurait donc des sous-suites convergentes. Mais il ne dispose pas de l'inégalité (1) où intervient un nombre α ($<$1). Le type d'inégalités avec α existait effectivement dans la méthode grecque d'exhaustion, avec généralement $\alpha = 1/2$, le modèle de convergence étant la convergence d'une suite géométrique. Il est vraisemblable que Argand en ait cherché la possibilité, s'inspirant de Lagrange et de Legendre, mais sans succès. Alors qu'il est possible par une analyse plus fine des fonctions puissances de réussir, comme l'indique une démonstration de 1981. Mais Argand est très ferme, et sa réflexion sur l'échec explique la contrainte du passage par un raisonnement par l'absurde :

> Il est presque superflu de s'arrêter à une objection qu'on pourrait faire à ce qui précède, en disant que, si l'on entreprenait de

> déterminer la valeur de x en suivant la marche qui est prescrite pour diminuer progressivement $y_{(x)}$, il serait possible qu'on n'y parvînt jamais, parce que la valeur de i, pourrait, dans les substitutions successives, ne diminuer que par des degrés de plus en plus petits. Le contraire ne se trouve point prouvé, en effet ; mais il n'en résulte autre chose, sinon que les considérations qui précèdent ne sauraient fournir, du moins sans de nouveaux développements, une méthode d'approximation ; et cela n'infirme aucunement la démonstration du théorème[42].

L'analyse n'est pas seulement une méthode ; elle est adaptation à une réalité mathématique rebelle à la contemplation directe que Lagrange estimait possible par l'algèbre.

L'environnement

Pour situer l'innovation de l'*Essai* d'Argand, il convient maintenant de lire les explications d'autres mathématiciens écrivant dans les *Annales.* Elles sont bien différentes des raisonnements algébriques qui suivirent la démonstration due à Euler. Et nous pouvons parler de plusieurs mirages, le mirage algébrique dont Argand a su se délivrer et le mirage fonctionnel.

Une conception qui se voulait algébrique, et de fait était fonctionnelle, a certainement handicapé les esprits en vue d'une démonstration du théorème fondamental. Cette conception avait reçu le blanc-seing de Lagrange lui-même, qui entendait définir l'algèbre comme « système d'opérations », mais le liait aussitôt au concept de fonction. Il poursuivait :

> Le tableau de ces opérations représentées par les caractères algébriques, est ce qu'on nomme en algèbre une formule ; et lorsqu'une quantité dépend d'autres quantités, de manière qu'elle peut être exprimée par une formule qui contient ces quantités, on dit qu'elle est une fonction de ces mêmes quantités[43].

Certes, la formule désigne une nature particulière de fonction, parce que doit être indiqué le moyen par laquelle on la calcule. Mais quelques lignes plus loin, est oublié le requis de la calculabilité effective et de l'indication des opérations :

---

[42]ARG, p. 121. Argand note $y'(x)$ la valeur au minimum, mais, pour simplifier, nous avons écrit $y(x)$.

[43][J.L. Lagrange, 1798, p. vj-vij].

> L'algèbre prise dans le sens le plus étendu, est l'art de déterminer les inconnues par des fonctions des quantités connues, ou qu'on regarde comme connues.

Les racines d'un polynôme apparaissent comme des "fonctions" des coefficients, et l'erreur conceptuelle, que ne commet certes pas Lagrange, est de les traiter comme des fonctions calculables au moyen des opérations élémentaires. Alors que la nature de cette calculabilité reste une question à partir du degré cinq. On mesure la différence avec la démonstration de la continuité de ces « fonctions » des coefficients après Cauchy, qui donne à cette occasion une démonstration à la Gauss du théorème de l'algèbre. L'exemple le plus net de l'erreur fonctionnelle figure dans la démonstration que pourvoit Daniel Encontre, un esprit des plus remarquables aux dires enthousiastes de son élève, Auguste Comte, qui suivait ses cours alors même que débutait le débat dans les *Annales*. Professeur renommé, Encontre était devenu doyen de la faculté des sciences de Montpellier, et un adepte sans partage des idées de Lagrange dont il ne croyait pas se départir en proposant sa démonstration qui nous étonne d'autant plus aujourd'hui qu'il a adopté une position remarquable d'algèbre polynomiale réelle.

C'est en reprenant la démonstration de Lagrange du théorème des valeurs intermédiaires qu'il débute son article, rangé par Gergonne dans la rubrique « analise élémentaire »[44] . Encontre signale qu'il veut démontrer les deux théorèmes fondamentaux de la « théorie générale des équations ». L'un est le théorème des valeurs intermédiaires, l'autre le théorème de factorisation réelle. L'adjectif « fondamental » est appelé à faire postérité[45] . Par des notes sur l'article de Encontre, Gergonne s'empresse de simplifier les expressions d'algèbre polynomiale, et comme pour mieux souligner la destination pédagogique, les deux auteurs multiplient

[44] D. Encontre, Mémoire sur les principes fondamentaux de la théorie générale des équations, *Annales math. pures et appli.*, IV, 1814, pp. 201-221. Ce texte sera référencé ici par [Encontre, 1814, p. 201].

[45] C'est Dubourguet, professeur de mathématiques spéciales au lycée impérial à Paris (actuel lycée Condorcet), qui use du mot « fondement » dans le titre d'un très court article de la deuxième année des *Annales* : Démonstration du principe qui sert de fondement à la théorie des équations (pp. 338-340). Et dans le texte il tient le même raisonnement que Encontre : « Quoique fondamental que soit ce principe, plusisieurs auteurs d'élémens d'algèbre ont négligé de le démontrer, ou ne l'ont fait que bien longtemps après avoir développé la théorie des équations ». La « démonstration » inacceptable de Dubourguet suscite plusieurs réactions, dont celle de Encontre qui donne ainsi le caractère « fondamental » au théorème.

les exemples de raisonnements qui pourraient être faits et s'avèreraient faux. Un genre scolaire, l'algèbre commutative, se met en place. Alors que Encontre est méticuleux, Gergonne ne souligne pourtant pas la nature, réelle ou complexe, des coefficients d'un polynôme, l'estimant sans doute indifférente.

Il s'agit de démontrer qu' « une équation quelconque à une seule inconnue x, étant ordonnée suivant les puissances de cette inconnue, qu'on suppose toujours entières et positives, son premier membre est nécessairement décomposable en facteurs simples de la forme réelle $x \pm a$, ou de la forme imaginaire $x \pm a \pm b\sqrt{-1}$ ». Et il suffit, puisque le théorème des valeurs intermédiaires est connu, et en un sens prouvé, de démontrer le théorème suivant, où l'expression « équation », comme chez Laplace, est mise pour polynôme réel unitaire égalé à zéro[46] .

> Toute équation qui n'a point de racines réelles, en a au moins deux imaginaires de la forme $a \pm b\sqrt{-1}$.

Une telle équation est nécessairement de degré pair, noté $2m$, et son dernier terme, le terme constant, est forcément positif, ce que Encontre désigne par T^2, T étant bien sûr réel. Il change la variable x en y, selon $x = ry$, r étant comme chez Argand une racine d'ordre $2m$ de -1 ($\rho = \sqrt[2m]{-1}$). Naturellement, y est alors racine d'un polynôme unitaire de degré $2m$, dont le terme constant est $-T^2$. Mais les autres coefficients de ce polynôme ne sont plus réels. Qu'importe, Encontre a démontré une conséquence directe du théorème des valeurs intermédiaires, un théorème déjà rencontré chez Euler, à savoir qu'une équation du type $y^{2m}+Ay^{2m-1}+By^{2m-2}+\cdots-T^2 = 0$, et dont les coefficients A, $B, \ldots, T$, sont réels, T non nul, possède deux racines réelles, une positive et une autre négative[47]. Dès lors, il « appelle » une ou l'autre des racines réelles possibles une « fonction » des coefficients de l'équation. Il poursuit en estimant que cette " fonction " subsiste, alors même que les coefficients cessent d'être réels.

> Les deux valeurs données par la fonction pourront n'être pas réelles ; mais de quelque nature qu'elles soient, il suffira de les

---

[46][D. Encontre, p. 218].

[47]La démonstration du TE tient bien sûr à l'application double du TS, puisque en 0, le polynôme est négatif, et est positif pour des valeurs suffisamment grandes en valeur absolue de la variable.

> multiplier par $\sqrt[2m]{-1}$, et nous aurons pour x[48] deux valeurs correspondantes, compliquées, à la vérité, de différentes sortes d'imaginaires ; mais qu'on pourra toujours ramener à la forme $a \pm b\sqrt{-1}$.

Voilà le mirage fonctionnel. C'est l'idée qu'une fonction définie dans certaines circonstances, c'est-à-dire pour certaines valeurs des variables, fasse automatiquement une forme partout définie, pour toutes les valeurs, réelles, complexes, et même *imaginaires*. A ce mirage, Gergonne donne en note une version formelle, le raisonnement ne portant plus, à la manière de d'Alembert, que sur un coefficient. Le point de vue fonctionnel simpliste d'Encontre était largement partagé. Si l'on part de $x^{2m} + Ax^{2m-1} + Bx^{2m-2} + \cdots + Y^2 = 0$ et fait simplement $U = T\sqrt{-1}$, il vient $x^{2m} + Ax^{2m-1} + Bx^{2m-2} + \cdots - U^2 = 0$..

> Or, si U était réel, il est démontré qu'alors il existerait au moins deux fonctions réelles de $A, B, \ldots, U$ qui pourraient être prises pour valeurs de x. Soit $x = F(A, B, \ldots, U)$ l'une de ces valeurs. Si U n'est pas réelle, elle deviendra $x = F(A, B, \ldots, T\sqrt{-1})$, et pourra cesser d'être réelle ; mais elle ne devra pas moins en résoudre l'équation proposée, et sera de plus de la forme $a \pm b\sqrt{-1}$.

La dernière assertion repose sur un lemme soi-disant démontré par Encontre, et qui n'est autre qu'un lemme de stabilité lors du passage de valeurs réelles à des valeurs complexes des fonctions. A l'erreur de considérer une fonction comme une forme existant en tant que telle, une forme algébrique, alors même qu'une existence n'a été prouvée que pour certains cas, est donc ajoutée une erreur sur la nature même de telles formes

> ***Lemme***[49] . Toute fonction dans laquelle entrent les quantités $\sqrt{-1}, \sqrt[4]{-1}, \sqrt[6]{-1}, \ldots, \sqrt[2m]{-1}$peut être ramenée à la forme $A + B\sqrt{-1}$.

La « démonstration » se contente de montrer que les nombres complexes constituent un corps, qu'il est stable par passage à l'extraction des racines de tous ordres, et ceci se fait par utilisation de la formule du binôme de Newton pour des exposants fractionnaires ($(1 + x)^\alpha = 1 + \alpha x \dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \cdots + \dfrac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + \cdots$), avec $\alpha = 1/2m$, m entier. Ce qui conduit à « retrouver » le résultat de d'Alembert sur le fait qu'une exponentielle complexe d'une variable complexe

[48]Nous avons noté y et non x dans la formule donnée.
[49][D. Encontre, 1814, p. 216].

est complexe : $\left(a+b\sqrt{-1}\right)^{c+d\sqrt{-1}}$ écrit Encontre. Ce passage à l'exponentielle paraît suffire pour la conclusion du lemme, car il n'est pas imaginé qu'il puisse y avoir d'autres types de fonctions. Encontre pourtant signale qu'on ne connaît pas la forme des « fonctions » exprimant les racines d'une équation à partir des coefficients au-delà du degré quatre. Est alors bien illusoire sa définition générale, pourtant exprimée dans le style d'Euler de la seconde période :

> Une quantité est dite fonction d'une ou de plusieurs autres, lorsque sa valeur dépend de celles qu'on attribue à ces autres quantités[50].

A la lecture de tels textes, où s'essayait une nouvelle mathématique, on comprend mieux la dureté des phrases de Cauchy en introduction de son *Analyse algébrique*.

> Les raisons [tirées de la généralité de l'algèbre], quoique assez communément admises, surtout dans le passage des séries convergentes aux séries divergentes, et des quantités réelles aux expressions imaginaires, ne peuvent être considérées, ce me semble, que comme des inductions propres à faire pressentir quelquefois la vérité, mais qui s'accordent peu avec l'exactitude si vantée des sciences mathématiques. On doit même observer qu'elles tendent à faire attribuer aux formules algébriques une étendue indéfinie, tandis que, dans la réalité, la plupart de ces formules subsistent uniquement sous certaines conditions, et pour certaines valeurs des quantités qu'elles renferment[51].

Et dès le début de son texte, il prendra soin de définir une fonction, et de préciser une classe de fonctions sur lesquelles il est possible de raisonner par passage à la limite, ce sont les fonctions continues, et une autre classe de fonctions, sur lesquelles il est possible de raisonner de manière algébrique, et ce sont les séries entières. On comprend pourquoi Cauchy ne se réfère pas aux *Annales de mathématiques pures et appliquées.* Argand, en 1815, attestait pourtant de la qualité de sa preuve, et il la singularisait sans timidité par rapport aux mirages de ses collègues des *Annales*, car ceux-ci utilisaient « des espèces d'axiomes, dont la vérité ne peut être sentie qu'autant qu'on possède déjà l'esprit du calcul algébrique ».

---

[50][D. Encontre, 1814, p. 217].

[51]A.-L. Cauchy, *Cours d'analyse de l'Ecole royale polytechnique : 1ère partie. Analyse algébrique*, Paris, 1897, p. 274 et suivantes ; réimpression de l'original de 1821, Paris, J. Gabay, 1989. p. iij.

> Le Recueil auquel je confie ces réflexions en offre en particulier, plusieurs exemples, et les discussions qui ont eu lieu à ce sujet sont un indice que les raisonnements qu'elles ont pour objet ne sont pas tout à fait sans reproches[52].

Le « tour de main » au tout début du calcul différentiel (1696)

Je simplifie à l'extrême en disant que la découverte du calcul différentiel tient, chez Leibniz écrivant son article célèbre des *Acta Eruditorum* de 1684, à la réalisation d'une proportion comme $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{MP}{PT}$ en termes de triangles semblables (figure 2), et à l'individuation de propriétés fonctionnelles pour ce que l'on appelait des *différences*, dx aussi bien que pour dy (par exemple, $d(x+y) = dx+dy, d(xy) = xdy+ydx$). Pour bien marquer la jonction de ces deux considérations mathématiques, j'utilise volontairement y à la fois pour désigner l'ordonnée d'une courbe repérée, ordonnée pouvant alors être conçue comme fonction de la variable x, et simultanément y en tant que grandeur dont il n'est pas besoin de dire de quelle variable elle dépend, comme lorsqu'elle entre dans la règle de différentiation d'une somme ou d'un produit. La force du calcul différentiel de Leibniz est de pouvoir mener des calculs sans qu'il soit besoin de toujours devoir préciser la ou les variables. Sur la courbe, PT est ce que l'on appelle la *sous-tangente*, T étant l'intersection de la droite tangente à la courbe en P avec l'axe des abscisses. De sorte qu'il est écrit « naturellement » le produit de y par une différentielle dx, sous la forme ydx, pour exprimer la sous-tangente comme un rapport.

$$PT = \frac{y\,dx}{dy} \tag{T}$$

Je n'ai pas du tout l'intention de qualifier cette jonction de propriétés opératoires et géométriques comme un « tour de main ». Bien au contraire. L'un des manques du calcul différentiel a ses débuts est l'absence de conception nette de ce qu'est une fonction, et en particulier de ce qu'est la dépendance par rapport à une variable[53]. Pourtant la fonction

[52] ARG, p. 116.

[53] Le mot *functio* apparaît dans un texte publié par Leibniz en avril 1692 aux *Acta Eruditorum*, mais la dépendance en jeu semble être aux paramètres de la courbe.

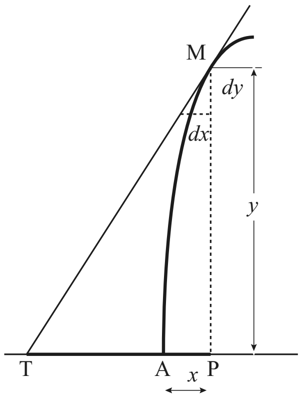


Figure 2

devint peu à peu l'objet majeur de l'analyse naissante, comme le dira explicitement Euler en 1748 dans son *Introductio in analysin infinitorum.* Je crains que les présentations contemporaines du calcul différentiel, en focalisant sur la notion de fonction, empêchent de toujours bien saisir la suspension de jugement qu'il y a dans bien des étapes de ce calcul sur les variables indépendantes : la seule chose fondamentale est la distinction entre variables et constantes. Le « tour de main » que je vais décrire est localisé sur la sous-tangente, mais a pour rôle de manifester la souplesse du calcul différentiel vis à vis des dépendances de variable, ce que j'ai appelé une suspension de jugement quant à la véritable variable indépendante. Mon propos est précisément de montrer que l'une des règles opératoires majeures du calcul différentiel, la différentielle d'une fonction de fonction, qui a du mal à être visualisée géométriquement, a pu être comprise par un « tour de main ». Je dois m'expliquer par l'histoire.

Car les circonstances historiques sont faciles à décrire. Johann Bernoulli (1667-1748) et Jacob son frère aîné (1654-1706), tous deux de Bâle, lisent l'article très elliptique de Leibniz, et parviennent à comprendre le maniement de l'outil différentiel. Ils s'exercent sur certaines courbes, comme la chaînette ou la cycloïde, et publient début 1691 dans les *Acta Eruditorum* édités à Leipzig, mais sans expliquer véritablement une théorie. Ils n'ont pas travaillé avec Leibniz. Le jeune Johann, 24 ans, part alors seul à Paris, et après quelques exposés, il lui est proposé d'expliquer le nouveau calcul à un marquis, un mathématicien renommé dans le style cartésien, le style de la géométrie analytique qui est concernée par des courbes fournies par une équation polynomiale. On est en hiver, au début de 1692, et les entretiens bi-hebdomadaires au moins, durent sans doute jusqu'en juin. Johann séjourne tout l'été 1692 dans le château du marquis de l'Hôpital, hébergé selon la tradition de la république des lettres, c'est-à-dire nourri, logé et distrait. Les explications ultérieures de Johann Bernoulli, à partir de l'automne 1692 fournies par lettres, seront rémunérées trois ou quatre années par le marquis de l'Hôpital pour trois cents livres annuelles. Les explications de Johann données au début 1692, tant sur le calcul différentiel que sur le calcul intégral, sont couchées par écrit en latin, un manuscrit qui semble avoir un peu circulé. On ne découvrira pourtant la partie différentielle qu'en un seul exemplaire au début du XX$^{\mathrm{e}}$ siècle[54]. L'Hôpital, devenu académicien des sciences pendant l'année 1693, une première pour un aristocrate d'une si grande famille à devenir « fonctionnaire » car susceptible de recevoir une pension régulière, travaille toutes ces années les « leçons » de Johann, et l'imprimerie royale au nom de l'Académie publie en 1696 une *Analyse des infiniment petits, pour l'intelligence des lignes courbes*[55]. C'est le premier manuel de calcul différentiel. Le marquis de l'Hôpital fait savoir au public qu'il accepte de reconnaître comme siennes les inventions du livre que d'autres, Leibniz ou Johann Bernoulli, voudront bien ne pas reconnaître comme leurs. La comparaison entre le manuscrit latin de Johann sur le calcul différentiel et le texte publié du marquis de l'Hôpital est passionnante[56]. Elle permet en particulier de voir ce que signifie l'appropriation intellectuelle d'une nouveauté. Cela ne prouve pas que les changements ne sont pas dus à Bernoulli lui-même au cours de ses explications à L'Hôpital, mais il y a une différence entre la résolution de problèmes dans le manuscrit latin, et la mise en place d'une théorie à laquelle on peut se référer et qui fait entrer la « révolution différentielle » dans le domaine public. Sera-t-on dès lors étonné de trouver des « tours de main » dans le texte de L'Hôpital ? J'ai choisi l'un d'entre eux, parce qu'il ne figure que dans ce texte, intervenant très tôt, à la page 16 de l'ouvrage, et parce qu'il est présenté comme un problème très général. C'est, peut-on résumer sans trop d'anachronisme, la question de trouver la tangente d'une courbe qui s'obtient comme composition de courbes, ce que nous dirions

[54]Voir l'introduction datée de 1952 de O. Spiess dans *Der Briefwechsel von Johann Bernoulli*, Bd 1, Birkhaüser Verlag, Basel, 1955, et l'édition due à P. Costabel de Malebranche, *Œuvres*, tome XVII-2, *Mathematica*, Paris, Vrin, 1979.

[55]*Analyse des infiniments petits pour l'intelligence des lignes courbes* ; Paris, Imp. Royale, 1696 ; reproduction ACL éditions, Paris, 1988.

[56]Une édition synoptique des deux textes est en cours, ainsi que l'édition du texte latin, tant sur le calcul différentiel que sur le calcul intégral, de Johann Bernoulli dans le cadre de la publication de ses œuvres complètes (Bernoulli-Edition à Bâle, chez Birkhaüser).

être une fonction de fonction. Dans l'énoncé qui suit, référé par la figure 3, les coupées AP désignent les longueurs d'arc de la courbe AP (première fonction dans notre vocabulaire) dont la tangente PT est supposée connue. La question concerne la tangente en M à la courbe AM (seconde fonction qui intervient par la donnée de la longueur PM, dite « appliquée » selon l'usage d'alors). Le lien est fait avec le calcul qui précède, l'obtention de la tangente à une courbe par la sous-tangente et au moyen de la formule repérée par (T) précédemment. Je fais suivre l'énoncé de la construction fournie, et j'ai modernisé l'orthographe, comme une certaine écriture des proportions.

> ***Problème*** : Si l'on suppose dans la proposition précédente que les coupées P soient des portions d'une ligne courbe dont l'on sache mener les tangentes PT, et qu'il faille du point donné M sur la courbe AM mener la tangente MT. Ayant mené l'appliquée MP avec la tangente PT, et supposé que la droite MT qui la rencontre en T, soit la tangente cherchée, on imagine une autre appliquée mp infiniment proche de la première, et une petite droite MR parallèle à PT. Et en nommant les données $AP = x, PM = y$, on aura comme auparavant Pp ou $MR = dx, Rm = dy$, et les triangles semblables mRM et MPT donneront $\frac{mR}{RM}(= \frac{dy}{dx}) = \frac{MP}{PT}(= \frac{y}{PT})$.
>
> Soit $\frac{y}{PT} = \frac{dy}{dx}$.

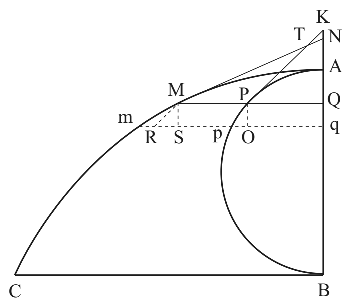


Figure 3

> On achèvera ensuite le reste par le moyen de l'équation qui exprime la relation des coupées $AP(= x)$ aux appliquées $PM(= y)$, comme on l'a vu dans les exemples qui précèdent, et comme l'on verra encore dans ceux qui suivent.

L'Hôpital donne ensuite deux exemples de calcul, avec des fonctions particulières pour y (fonction de x, variable qui est l'arc AP), et il arrive au cas de la roulette, c'est-à-dire la cycloïde. Il suffit de savoir qu'elle est cette courbe dont l'équation est $y = x$, avec les conventions adoptées. En effet la longueur de l'arc de courbe, cette fois un cercle, est $AP(= x)$ et elle est reportée comme ordonnée selon le mouvement de roulement sans glissement du cercle pour engendrer la cycloïde.

> Si la roulette est simple, l'on mène la corde AP. Je dis qu'elle sera parallèle à la tangente MT. Car le triangle MPT étant alors isocèle, l'angle externe TPQ sera double de l'interne opposé TMQ. Or l'angle APQ est égal à l'angle APT, puisque l'un et l'autre a pour mesure la moitié de l'arc AP. Et partant il est la moitié de l'angle TPQ. Les angles TMQ, APQ seront donc égaux entre eux, et par conséquent les lignes MT, AP seront parallèles.

Je localise le « tour de main » dans la simple expression « comme auparavant » dans la première citation du texte de l'*Analyse des infiniment petits* : elle identifie en effet la sous-tangente géométrique, formellement exprimée pour une courbe quelconque repérée en axes cartésiens par la formule (T), au cas où une courbe est autrement repérée[57]. L'Hôpital a remplacé le repère cartésien BC, BA, par un repère mobile PK, PM. L'efficacité du « tour de main », inséparable de celui-ci, est dans la concision par laquelle la tangente à la cycloïde en M est repérée comme parallèle à la corde du cercle AP.

La concision est due au calcul, non à une combinatoire géométrique. En effet, si l'on accepte la formule générale $PT = ydx/dy$, comme dans le cas de la cycloïde $y = x$, on a bien sûr $dy = dx$. Donc $PT = y$, et le triangle MPT est isocèle ($MP = PT$). Comme l'angle TPQ vaut deux fois l'angle TMP, et aussi bien deux fois l'angle APQ, les angles TMP et APQ sont égaux, et les droites AP et TM sont parallèles.

La concision est aussi dans la façon dont on obtient la sous-tangente PT de la courbe AM comme si la courbe AP était un axe cartésien, ou plus exactement comme si l'axe cartésien était la tangente PK à la courbe AP. C'est cela la fonction de fonction, et le résultat sur les différentielles consiste à dire que le rapport différentiel, exprimé par la sous-tangente moyennant l'intervention de l'ordonnée y dans la formule (T), ne dépend

[57]On pourrait préciser, bien sûr, les fonctions en jeu par des notations, avec $z = MQ$, $t = AQ$, et exprimer x en fonction de t, et ensuite z fonction de t (on aurait l'équation paramétrée de la cycloïde).

pas de la variable décidée comme indépendante. En représentant par x l'arc AP, et $y = PM$, on visualise dx selon le segment Pp, dy selon Rm, puisque le quadrilatère $MPpR$ est un parallélogramme. Apparaît la similitude du triangle RMm et du triangle PTM. C'est une similitude analogue, si l'on peut oser la redondance, à celle du triangle caractéristique RMm et du triangle PTM qui définit la sous-tangente dans des axes orthogonaux. Dans ce cas de repérage cartésien orthogonal, les triangles sont rectangles, mais dans le repérage généralisé, les triangles sont quelconques. Peu importe, on aura, dit L'Hôpital, « comme auparavant ».

L'expression ne fait pas jouer une identité conceptuelle : elle constate qu'avec le choix de T, une même écriture est possible pour la sous-tangente nouvellement conçue à la courbe AMC. L'outil qu'est la sous-tangente fait la preuve, à condition de bien reconnaître la fonction en jeu dans la représentation de la courbe. C'est donc une façon de dire la règle connue de dérivation des fonctions composées, ou *règle de la chaîne* $(f(g)'(x) = f'(g(x)g'(x))$.

Y a-t-il eu preuve avec ce « tour de main » ? Si l'on répond qu'il n'y a pas preuve, comment se fait-il que tout mathématicien soit convaincu d'avoir pourtant vu la règle de la chaîne ? Elle est, à moins que l'on ne préfère les différentielles, d'habitude prouvée par les dérivées et le passage à la limite qui revient à justifier ce que l'on voit formellement : $df/dg.dg/dx = d(f(g))/dx$. Le « tour de main » de L'Hôpital n'est pas formel. Il consiste à interpréter la signification de la sous-tangente à une courbe, cette formule qui a donné à Leibniz ses lois du Calcul, selon un repérage cartésien local. Il faudrait donc lire la figure suivante 4 pour interpréter la définition qui fournit la formule (T).

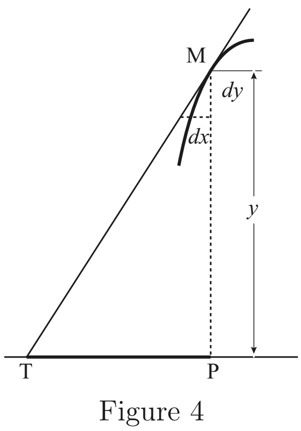


Figure 4

Conclusion

Les trois exemples ici présentés de concision mathématique déclenchant une innovation (fonction comme relation chez Laplace, découpage des variables lié à la dimension 2 du plan complexe chez Argand, ou composition des fonctions chez L'Hôpital) n'ont pas eu la même postérité mathématique. Ils ne se situent pas à des niveaux comparables dans l'exposé élémentaire mathématique actuel. Mais tous les trois résultent d'une situation d'enseignement. On l'a vu pour l'Hôpital, qui enseigne en écrivant le premier manuel de calcul différentiel « pour l'intelligence des lignes courbes » ; on l'a vu pour Laplace enseignant à l'Ecole normale de l'an III au Muséum d'histoire naturelle de Paris en 1795 ; on l'a vu avec Argand s'expliquant dans la première revue destinée à des enseignants, les *Annales de mathématiques pures et appliquées* à partir de 1813. On a donc tort de considérer que l'enseignement se méfie toujours de ce qui est nouveau et de ce qui est concis. Vérifions une fois de plus que l'histoire de l'enseignement des mathématiques peut faire partie de l'histoire des mathématiques qui est utile à l'enseignant des mathématiques. Les seuls trois « tours de main » dont j'ai parlé entraînent toujours pour le lecteur d'aujourd'hui la même conviction, alors même que l'on est habitué à d'autres preuves. Leur succès ou postérité didactique est certain, jusqu'au point de faire oublier l'auteur du « tour de main » dans la mémoire mathématique pourtant active. Au fond, ce que j'ai appelé « tour de main » tient en partie à ce que la mathématique grecque appelait un scholie. Bien sûr, de même que les *Eléments* d'Euclide ne sont pas uniquement composés de scholies, de même les « tours de main » ne peuvent pas constituer l'essentiel de l'apprentissage des mathématiques. N'a-t-on pourtant pas perdu dans l'enseignement à oublier de revenir à une forme de scholie, une fois une preuve fournie, pour en faire comprendre le ressort ou « tour de main ». On préfère souvent le donner d'emblée, et on gomme ainsi tout effet de surprise, et donc toute interrogation ? N'est-ce pas cette surprise qui provoque l'appropriation d'une méthode associée au « tour de main » ? Cette surprise est ce qu'au fond l'on veut retrouver en proposant dans les classes des jeux mathématiques. On risque cependant par le biais du jeu et de ses surprises d'oublier que l'apprenti mathématicien doit aussi pratiquer de nombreuses astuces, sans que celles-ci n'impliquent pour autant une méthode. Comment individualiser les « tours de main » porteurs immédiats d'une méthode. Ici, j'ai voulu montrer que la concision permettait de qualifier de tels « tours de main ». Je conclus que la valeur épistémologique de la concision du « tour de main », chez L'Hôpital, Laplace ou Argand, est dans l'adéquation entre un outil nouveau et une preuve. De telle sorte que l'outil fasse toute la preuve, tout en pouvant se percevoir comme séparé de la preuve et ainsi faire scholie.

Dans la si difficile question du déclenchement de l'invention en mathématique, j'ai seulement mis en évidence le rôle des outils pour la pensée mathématique qu'il faut établir en plus des objets tournés et retournés en tous sens. Pourra-t-on convenir que la différence entre outils et objets mathématiques se fasse par la dénomination d'un « tour de main » ?

ARCS EN CIEL, SOUCOUPES VOLANTES, TOUPIES, COURBES ELLIPTIQUES, ET TOUT CA

Michèle Audin
IRMA, Strasbourg 1

Comment j'ai préparé cet exposé

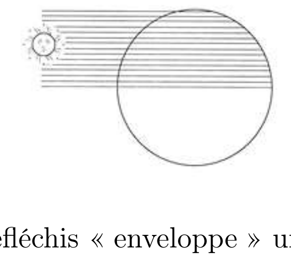
J'ai commencé par ne pas répondre « non » quand Paul-Louis Hennequin m'a demandé si je viendrais à Saint-Flour faire un exposé à des professeurs de mathématiques. Puis, en mai 2004, l'échéance approchant, j'ai eu la surprise de me voir demander par mon ami et collègue Gilles Godefroy et dans un wagon de métro bondé de la ligne 9, si je venais bien à Saint-Flour, oui, et qu'est-ce qu'il faut faire, ben, ils aiment bien qu'on leur raconte des trucs qu'ils peuvent utiliser aprés, dans leurs classes, pour faire des problèmes pour leurs élèves, ah, non, je ne ferai pas ça. Et puis, en juillet, Paul-Louis m'a demandé un résumé, et je lui en ai envoyé un, dans lequel j'expliquais surtout, de façon incontestablement (et inutilement) agressive que, ce que j'allais raconter, ça ne servirait à rien et surtout pas à faire des sujets de problèmes ou d'examen. Et enfin, il a fallu le préparer, l'exposé, alors je me suis demandé pourquoi j'ťetais aussi négative par rapport à cette proposition. J'ai réfléchi à l'expérience que j'avais des conférences, disons, « grand public ». Et j'ai préparé l'exposé qui fait l'objet du présent article et que j'ai effectivement « prononcé » à Saint-Flour à partir des notes de deux de ces conférences précédentes. Le texte lui-même raconte cet exposé, c'est-à-dire qu'il contient les figures présentées à Saint-Flour, ce que j'y ai dit, mais qu'il inclut aussi des commentaires qui font référence aux discussions nombreuses et très instructives qui ont émaillé la semaine.

1. Mise en jambes, un exposé pour l'APMEP à Strasbourg en 1988

Je suis arrivée à Strasbourg en 1987, j'étais jeune et enthousiaste. J'ai donc évidemment accepté quand on m'a demandé de faire un exposé pour les professeurs de mathématiques, d'autant plus que j'avais un bon sujet, un théorème de mathématiques, un vrai théorème, démontré par un jeune collègue russe, Chekanov, et que l'on pouvait raconter, présenter, en termes de soucoupes volantes...

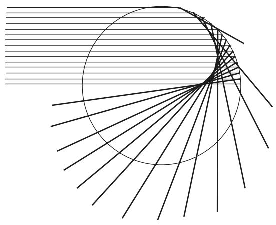
L'exposé que j'ai effectivement fait était plus technique que ce que l'on va lire ici (mais j'étais plus jeune et moins expérimentée), on pourra se reporter à la rédaction que j'en ai donné à l'*Ouvert* [2]. Voilà, en gros, ce que j'ai montré (à défaut de *dé*montrer quoi que ce soit).

Un cœur dans un bol. Ce titre poétique est dû à Myriam Audin que je remercie à nouveau pour son aide. Myriam, donc, prenait son petit-déjeuner (ça n'a pas d'importance) dans un bol (ce qui compte, c'est que le récipient soit « rond ») au soleil (ça, c'est vraiment important). Pour reproduire l'expérience, mettez-vous au soleil avec une tasse de café par exemple. Le soleil envoie des rayons (parallèles, il est loin, le soleil) se réfléchir contre la paroi de la tasse. Chaque rayon est réfléchi, en effet (et en application de la loi de Snell ou de Descartes) et, comme on le voit sur la figure suivante,



l'ensemble des rayons réfléchis « enveloppe » une courbe [1], cette courbe a la forme d'un cœur (on n'en voit que la moitié sur la figure qu'il faut compléter par une symétrie par rapport à la direction horizontale).

[1]Ce joli mot, qui évoque un mouvement d'enveloppement, est aussi le terme mathématique qui dit que l'ensemble des droites que nopus considérons ici est l'ensemble des tangentes à une certaine courbe, l'enveloppe.



Comme le remarque Ian Stewart dans la remarquable BD [14], qu'il serait idiot (et donc coupable) de ne pas citer ici, je n'ai dessiné *que* des droites et, si vous voyez la courbe que je n'ai *pas* dessinée sur cette figure, c'est parce qu'il y a concentration de l'encre le long de cette courbe. Dans le cas du bol de Myriam, il y a concentration de l'intensité lumineuse le long du cœur. Concentration de l'intensité lumineuse, ça brûle... et c'est ce que veut dire le mot « caustique » qui décrit l'ensemble des phénomènes dont il est question dans cette mise en jambes.
Il est facile de décrire la courbe par des équations paramétriques, c'est un exercice classique, repris par exemple dans le chapitre vii de [5]. Cette courbe est un arc de *néphroîde*, courbe ainsi nommée parce que sa forme évoque celle d'un rein - ce qui prouve que Myriam n'avait pas tout à fait raison [2].

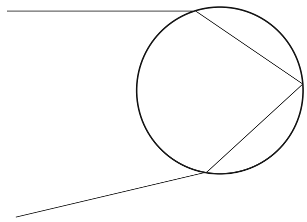
Remarque. Les caustiques sont des exemples de « singularités lagrangiennes » - je ne vais pas expliquer ce que c'est et il n'est pas nécessaire de le savoir pour continuer à lire ce que j'écris [3]. C'est une théorie qui englobe la théorie des singularités de fonctions et donc des objets très médiatisés il y a vingt ou trente ans sous le nom de *catastrophes* et fait référence aux travaux de Thom (catastrophes) et à ceux d'Arnold (singularités lagrangiennes).

Un arc en ciel dans mon cœur. J'ai déjà utilisé (toujours dans [5]) cette belle citation du Lotus bleu pour faire transition entre la

[2]La néphroïde appartient, tout comme la cardioïde, qui est la courbe à laquelle les mathématiciens reconnaissent, officiellement, la forme d'un cœur, à la grande famille des courbes cycloïdales (sous-famille des épicycloïdes), c'est-à-dire que l'on peut aussi les décrire comme lieux d'un point d'une circonférence qui roule sans glisser sur un cercle (voir par exemple [5]).

[3]Contrairement à l'usage répandu dans les articles de recherche, les traités et les manuels (et repris, de façon mécaniste et irréfléchie dans les revues de vulgarisation), dans un article destiné à un « grand public », il n'est pas indispensable de définir tous les objets de façon complètement explicite pour pouvoir en parler. J'ajouterai, en pensant en particulier au présent texte, que l'on peut espérer trouver des choses à comprendre à la ligne $n + 12$ même quand on s'est senti(e) largué(e) à la ligne n.

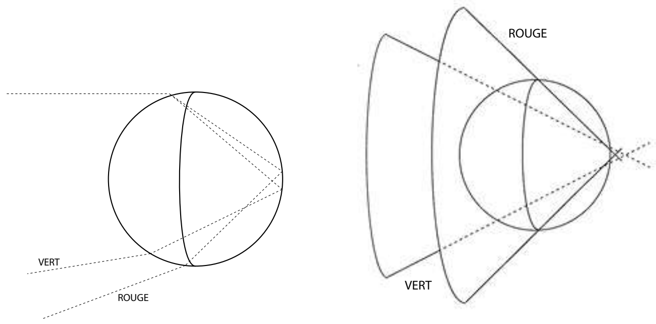
caustique du bol de café et l'arc en ciel, dont je vais rappeler maintenant la description classique. Le dispositif expérimental comprend, une fois encore, du soleil. Il faut aussi de la pluie (j'ajoute qu'il ne peut pas être trop tôt le matin ni trop tard le soir, parce que, si le soleil est trop bas, il n'y aura pas d'arc en ciel, comme le savent tous les physiciens et comme, donc, me l'ont fait remarquer Dominique Chandesris et Danielle Dowek - quant aux lecteurs naïfs, ils devraient rapidement comprendre pourquoi). Commençons par un arc en ciel monochromatique. Un rayon lumineux est réfracté par la paroi d'une gouttelette d'eau, puis réfléchi et il ressort de la gouttelette, réfracté à nouveau.



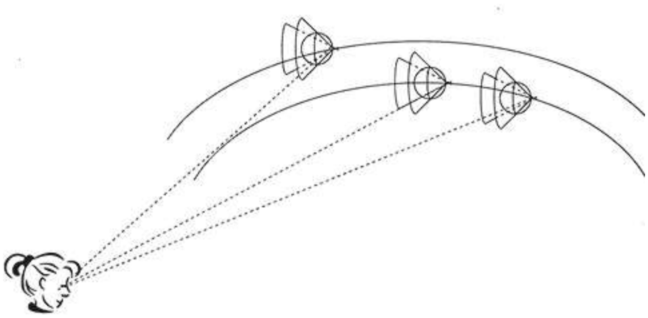
Remarque. Certains rayons sont même réfléchis deux fois, ce sont eux qui produisent le deuxième arc en ciel que l'on voit parfois à l'intérieur du premier.

Les rayons sortants enveloppent encore une courbe, une caustique, dont on peut vérifier sans mal qu'elle a une asymptote (si on se place à deux dimensions, comme sur la figure ci-dessus) ou plus exactement (en utilisant la symétrie de rotation pour passer en dimension 3) un cône asymptote. Je me contente de parler de ces éléments à l'infini parce que le rideau de pluie est loin de nos yeux et que la forme de la courbe importe peu hors de l'infini.

On sait que l'indice de réfraction entre l'air et l'eau ne dépend pas seulement de la nature de ces constituants mais aussi de la longueur d'onde de la lumière. C'est à ce moment que les différentes couleurs de la lumière blanche se séparent (la gouttelette fait office de prisme) et c'est pourquoi l'arc en ciel est si beau. La figure suivante montre deux rayons de couleurs différentes et ce qu'il en advient.



Ce sont donc en réalité différents cônes emboîtés correspondant aux différentes couleurs que nous renvoie chaque gouttelette d'eau. L'ensemble des points du plan (que constitue le rideau de pluie) d'où l'un des rayons, disons rouge, issu de la gouttelette située en ce point pénètre notre œil est un arc de cercle, comme le montre la figure suivante. On peut donc dire que l'arc en ciel est une manifestation de l'existence de caustiques (même s'il n'est pas à proprement parler une caustique).



Et les soucoupes volantes ? La forme représentée sur la figure suivante est, elle aussi, une singularité lagrangienne (je rappelle que le lecteur n'est pas sensé savoir ce qu'est une singularité lagrangienne). Ce qui la met dans la même catégorie que la caustique de la tasse de café et que les courbes produisant l'arc en ciel. Ici on voit un aspect de l'intérêt qu'il peut y avoir à créer une théorie mathématique abstraite, traitant de manière assez unifiée des objets assez différents.

C'est ce qui avait suggéré à l'astrophysicien Zeldovitch, dans les années quatre-vingt du siècle dernier, une explication du phénomène des OVNI. On accepte de croire que ceux qui disent avoir vu une soucoupe volante ont effectivement vu quelque chose, mais on se souvient que nos yeux sont susceptibles de voir différents objets, dont certains, comme les caustiques dont j'ai parlé plus haut sont créés par la manière dont la lumière se propage et par la façon dont notre œil fonctionne. Zeldovitch imaginait donc un dispositif optique naturel (nuages, air chaud, par exemple) qui produise une caustique en forme de soucoupe volante, celle qui est dessinée ici.
Mais voilà. Les caustiques de l'optique géométrique ne forment qu'une sous-classe des singularités lagrangiennes et ce que Chekanov avait démontré, un ou deux ans avant que je raconte ça pour la première fois, c'est (un « vrai » théorème qui implique) que la soucoupe volante n'est pas une caustique de l'optique géométrique : le mystère des OVNI reste entier...

Pause

Dans l'exposé fait à l'époque, je l'ai dit, il y avait de la technique. Je crois bien avoir expliqué ce qu'était une singularité lagrangienne, sans doute très vite et, sans doute par excès d'enthousiasme sur un si beau sujet, en m'excusant de raconter des choses trop difficiles pour mon auditoire... en répétant que c'était très facile ! Ce qui n'arrangeait rien. Nous avons déjà tous subi ça, des exposés auxquels nous ne comprenions rien et dont on nous expliquait que c'était au niveau DEUG première année, voire pour élèves de terminale.
Il n'est donc pas très étonnant que le public n'ait pas beaucoup réagi, ce qui m'avait beaucoup fâchée (peut-être que c'était trop dur, mais j'étais enthousiaste et j'avais beaucoup travaillé), pas beaucoup réagi, sauf pour me demander les équations paramétriques de la caustique de l'arc en ciel (celle qui a l'asymptote, ou le cône asymptote), « comme ça je pourrai la faire étudier à mes élèves ».
Par pitié, non ! Les courbes, celles qui sont belles, intéressantes pour les élèves, instructives, vous les connaissez déjà. Celle-là, elle est un peu pénible, elle n'est pas jolie, et en plus elle ne sert à rien ; la seule chose intéressante, c'est cette asymptote, que l'on voit assez vite sans avoir à faire tous ces trucs compliqués qu'on faisait faire aux élèves sur les courbes paramétriques (et dont j'espère qu'on ne le leur fait plus faire maintenant que n'importe quelle calculette un peu évoluée peut faire le plus ennuyeux à leur place).

Je suis revenue à mon point de départ. Alors, ce que je ne veux pas faire dans une promenade, je crois que je l'ai assez bien compris. Ce que je pensais faire, dans celle-ci :

- Esthétique : les mathématiques, c'est joli, montrer des choses que tout le monde (quand je dis tout le monde, je ne veux pas dire un bon étudiant de DEUG, je veux bien dire, tout le monde, peut-être pas tous les petits enfants quand même) est capable de trouver joli. Il n'y a aucun doute que c'est le cas de l'arc en ciel.
- Les mathématiques, ça a un rapport avec la réalité. L'univers dans lequel, sur lequel travaillent, auquel s'intéressent les mathématiciens, c'est le même que celui dans lequel vivent les « gens » (tous, encore une fois). Il est donc important de montrer des phénomènes.
- Les mathématiques permettent une vision unifiée d'aspects différents de la réalité, des idées venues d'un côté peuvent être utilisées d'un autre.

Je reviendrai un peu plus bas sur cette liste, ce « cahier des charges » d'une promenade mathématique.

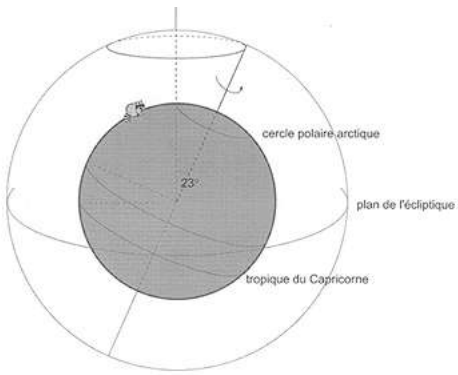
2. Randonnée à la Réunion, un exposé pour les lycéens

A l'invitation de Dominique Tournès, qui est directeur de l'IREM de la Réunion et fait un énorme travail d'animation dans ce département « ultra-périphérique » (selon la délicate terminologie de la technocratie européenne), j'ai eu l'occasion, en avril 2004, de faire un exposé « grand public » devant des élèves de terminale du lycée Antoine Roussin de Saint-Louis. Je précise que c'est un lycée de construction récente en dehors de la petite ville de Saint-Louis (connue en métropole pour avoir donné son nom à du sucre), au sud de l'île, entre les champs de canne à sucre[4]. Un lycée « normal » avec des élèves de terminale normaux (pas l'hypothétique élève de terminale « motivé » à quoi rêvent certains collègues). Un public très intimidant, donc, mais bien sûr surtout très intimidé (surtout après que Dominique leur ait expliqué que j'étais une spécialiste à la réputation internationale (!) venue de métropole pour leur raconter, à eux, des mathématiques).
Et voilà ce que je leur ai raconté (avec des parenthèses ajoutées pour le public de Saint-Flour et les éventuels lecteurs du présent texte).

[4] Contrairement à ce que je croyais, le «sucre Saint Louis » n'a rien à voir avec Saint-Louis de la Réunion.

Une toupie. J'ai commencé par sortir ma toupie rouge et par la faire tourner devant eux, plusieurs fois, en expliquant ce qu'il « fallait regarder ».

Que d'abord, on fait semblant de croire que le point (appelons-le O) sur lequel la toupie repose sur le plan horizontal est fixe. Et que donc, l'autre extrémité de son axe est astreinte à se mouvoir sur une sphère de centre O.
Que bien sûr, il y a un mouvement de rotation autour de l'axe.
Mais que ce n'est pas tout, il y a aussi un mouvement de précession. Ça, on le voit bien, sur la vraie toupie (je la relance). Et pour bien expliquer ce qu'est ce mouvement de précession, pour l'illustrer, je leur montre une autre toupie.



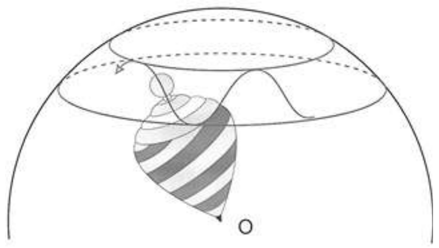
Si j'ai fait cette figure, c'est aussi parce que je suis bien contente d'être là, presque juste sur le Tropique du Capricorne, un endroit, je leur explique, où l'on peut avoir le soleil exactement au-dessus de la tête, alors qu'à Strasbourg, ça n'arrive jamais. Après la précession des équinoxes, je mentionne le fait que, peut-être, ces tropiques que je viens de définir, n'ont pas toujours été à une latitude de 23 degrés. Et c'est ce mouvement de nutation que je veux leur montrer sur la toupie.

Une parenthèse. Quel rapport, me demandera-t-on, entre toupies et caustiques ? Eh bien voilà : les caustiques sont des singularités lagrangiennes, ce qui en fait un rameau d'une branche des mathématiques appelée la géométrie symplectique. Quant aux toupies, leur mouvement est décrit par la physique et les équations de Hamilton (voir par exemple le livre [**1**] d'Arnold, encore lui), et comme on ne va pas croire que c'est un article sérieux sinon, je rappelle à ceux qui le savaient et j'informe les autres que ce qu'on appelle ainsi, c'est un système d'équations aux dérivées partielles de la forme

$$\dot{q}_1 = \frac{\partial H}{\partial p_i},\ \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i},$$

ce qui en fait aussi un rameau, à vrai dire un peu plus qu'un simple rameau, de la géométrie symplectique.
En d'autres termes, deux champs physiques apparemment très différents, l'optique géométrique et la mécanique conservative, sont décrits par un même langage mathématique, la géométrie symplectique. Je n'ai pas l'intention de définir ici ce qu'est la géométrie symplectique (je ne vois pas l'intérêt de terroriser les lecteurs ou les auditeurs en essayant d'expliquer pourquoi le bon endroit dans lequel je travaille est une variété-différentielle-munie-d'une-2-forme-différentielle-fermée-non-singulière, comme ont absolument tenu à le faire les journalistes qui sont les vrais auteurs de l'article [**8**]), il me semble plus intéressant de dire ce que je viens de dire, c'est un domaine qui est pertinent pour décrire, étudier, comprendre, à la fois les deux rameaux dont j'ai parlé. Et en particulier, le raton-laveur qui accompagne quelques-unes des figures ne devrait pas être là : nous ne sommes pas dans un inventaire à la Prévert, mais dans un exposé sur les phénomènes de la géométrie symplectique. Jusqu'à maintenant. Ensuite, on va glisser vers l'arithmétique.

La nutation expliquée par une courbe elliptique. Je reviens donc à la nutation de ma toupie, la partie du mouvement qui, dans l'analogie avec la Terre, fait « bouger » les cercles polaires et les tropiques. Je vais expliquer que l'extrémité de l'axe de la toupie est confiné entre deux cercles parallèles de la sphère sur laquelle se meut cette extrémité, comme le montre la figure suivante.



Je donne donc un nom, x, à la « cote » (on aura deviné que je préfère le mot latitude) de cette extrémité. Et je veux donc montrer que x varie entre deux nombres a et b, les latitudes des parallèles représentés sur ma sphère. Cette quantité x dépend du temps, c'est de sa variation par rapport au temps que nous parlons.
À cet endroit de l'exposé, il y a une boîte noire, les équations de la mécanique, le fait que l'énergie totale est supposée constante, que le moment de la toupie par rapport à son axe de révolution est, lui aussi, constant, et cette sorte de considérations, et de cette boîte noire sort une équation différentielle qui exprime la dérivée de x par rapport au temps[5], et qui est de la forme

$$\dot{x}^2 = x^3 + Ax^2 + Bx + C$$

où A, B, C sont des constantes qui dépendent des conditions initiales et des quantités conservées dont j'ai entamé la liste ci-dessus (comment on a lancé la toupie, sa masse, etc.).
Comme cette équation est un peu compliquée quand on y pense comme à une équation différentielle, on va oublier que c'en est une en posant $y = \dot{x}$ et en y pensant comme à l'équation

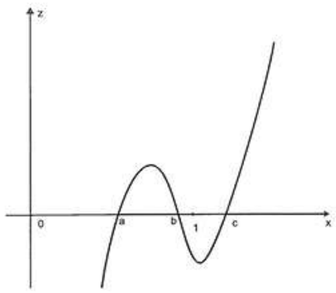
$$y^2 = x^3 + Ax^2 + Bx + C$$

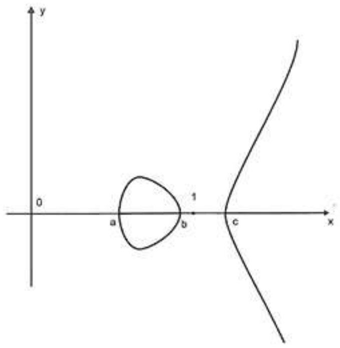
d'une courbe plane. Ça a pris un peu plus de temps avec les lycéens, mais, en gros, j'ai dessiné d'abord le graphe du polynôme de degré 3

$$z = x^3 + Ax^2 + Bx + C$$

puis la courbe qui nous intéresse elle-même.

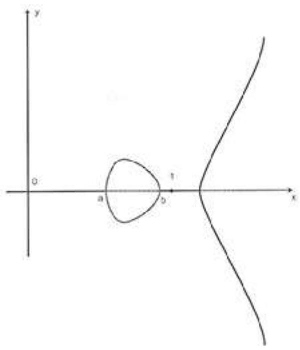
[5]Ce n'est pas *très* difficile, mais ce serait un peu long et surtout hors-sujet, de le faire ici. On trouvera le calcul complet dans [**3**], un autre article écrit pour les professeurs et qui contient aussi une partie des choses que je raconte ici.

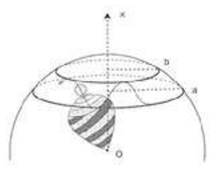




Je ne l'ai pas expliqué aux lycéens, je l'ai seulement signalé, mais mes lecteurs peuvent comprendre que, comme la toupie bouge, en effet, bouge vraiment, bouge *réellement*, eh bien il y a des valeurs de x entre 0 et 1 (bien sûr, 1 est la longueur de l'axe et le rayon de la sphère) pour lesquelles mon équation a des solutions, en d'autres termes mon polynôme a bien un graphe comme celui que j'ai dessiné, il a deux racines réelles entre 0 et 1 et une plus grande que 1. Et ma courbe a deux composantes connexes.
Et ça décrit bien ce que j'avais annoncé.

Remarque. Je n'ai pas écrit « théorème », ni « démonstration », mais j'ai bien montré (et même démontré) quelque chose, j'ai démontré en particulier que, comme je l'avais annoncé sur l'une des figures, l'extrémité de l'axe de la toupie devait osciller entre les latitudes a et b. Mais, la démonstration que j'ai donnée n'est pas complète dans la mesure où je n'ai pas fait le calcul complet amenant à l'équation de la courbe.





Deuxième parenthèse. C'est le moment de revenir sur le cahier des charges d'une telle promenade. En commentant l'exposé sur les caustiques, j'avais relevé un certain nombre de points, pour mémoire :

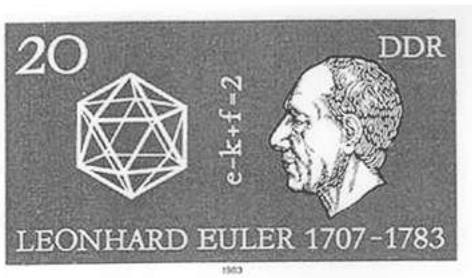
- joli (j'espère que ça l'est encore)
- phénomènes (oui)
- vision unifiée (ici on va aller de la mécanique à l'arithmétique).

Mes exigences se sont accrues, pas seulement parce que je suis devenue plus sage, mais aussi grâce à Juliette Sabbah, qui m'a incitée 'a côtoyer de près quelques manuels de mathématiques de collège. J'ai ajouté deux points à mon cahier des charges :

- Les mathématiques sont une activité humaine, c'est-à-dire faite par des êtres humains, des gens comme vous et moi, des jeunes, des vieux, des hommes, des femmes, et pas que des barbus de deux millénaires comme ceux que l'on trouve dans les manuels de collège.
- Dans un exposé de mathématiques, il faut présenter quelque chose qui s'appelle démonstration, c'est-à-dire une démonstration complète de quelque chose de relié à l'exposé.

Des mathématiciens. Les mathématiciens les plus célèbres ayant travaillé sur le mouvement d'un corps solide avec un point fixe dans un champ de gravitation constant (dont celui de la toupie est un cas particulier) sont

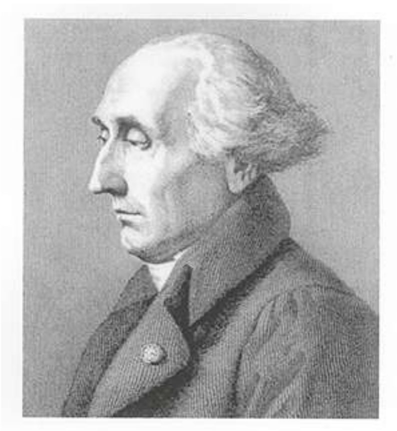
• Euler, au XVIII^{e} siècle. On le voit ici représenté avec un icosaèdre, polyèdre régulier à vingt faces triangulaires, et avec la relation entre les nombres de faces, arêtes, sommets d'un polyèdre convexe qui porte son nom.



Du point de vue qui nous intéresse, Euler a étudié le solide en question dans le cas où le point fixe coïncide avec son centre de gravité.

• Toujours au XVIII^{e} siècle mais un peu plus tard, Lagrange. Lagrange est complètement responsable du cas de la toupie (un solide avec un axe de révolution) que certains appellent parfois « toupie de Lagrange ».

Deux remarques sur Lagrange. D'abord, au cours de son étude de la toupie, il a eu à utiliser la matrice d'inertie de cet objet, une matrice symétrique qui décrit la forme du solide ; du coup, dans le cours de son étude, il a démontré (et est sans doute un des premiers à l'avoir fait) qu'une telle matrice est diagonalisable dans une base orthonormée. Ensuite, il est un des inventeurs de la géométrie symplectique (voir [**8**]).



• Enfin, dans la deuxième moitié du XIX$^{\text{e}}$ siècle, Sophie Kowalevski (car c'est ainsi que la mathématicienne russe Sonia Kovalevskaya a elle-même choisi d'écrire son nom sur le long article en français [**12**] qu'elle a publié sur le sujet (dans une revue suédoise !)).

C'est elle qui a compris l'intérêt d'utiliser l'analyse complexe pour étudier ce genre de probléme. Dans l'article cité, elle a mis en évidence des propriétés du mouvement du solide en question qui ne sont vérifiées que dans les cas déjà considérés par Euler et Lagrange ainsi que dans un autre cas, plus mystérieux et qui porte désormais le nom de « toupie de Kowalevski "». Il y aurait énormément de choses passionnantes à dire sur les mathématiques contenues dans cet article révolutionnaire (pour

des articles et ouvrages spécialisés, je renvoie à [**9**, **4**] et à [**7**, **6**] et aux références que ceux-ci contiennent).
Il y a aussi beaucoup de choses à dire sur Sophie Kowalevski qui a eu une vie romanesque (ne serait-ce que parce qu'elle a, en particulier, écrit un roman [**11**], dont une traduction en français vient d'être publiée) et surtout très courte, puisqu'elle est morte à quarante ans d'une pneumonie. Voir [**10**].

La courbe elliptique est un groupe. Une courbe d'équation

$$y^2 = x^3 + Ax^2 + Bx + C$$

est un objet que les mathématiciens appellent une « courbe elliptique » (au moins quand le polynôme du troisième degré qui figure au second membre n'a pas de racine multiple). Ce nom peut paraître étrange (après tout, une ellipse est un objet de degré 2) mais il est justifié par le fait que ce type de courbe apparaît quand on essaie par exemple d'exprimer la longueur d'un arc d'ellipse.

Remarque. Ce que nous avons fait en remarquant que la courbe elliptique issue des équations du mouvement de la toupie avait deux composantes connexes, c'est de la géométrie « algébrique » (ce qui veut dire que l'équation est un polynôme) réelle (ce qui veut dire que nous avons regardé des couples de points (x, y) réels satisfaisant à cette équation).
Il se trouve que, en plus d'être utiles pour modéliser une partie du mouvement d'une toupie, les courbes elliptiques ont des propriétés très intéressantes du point de vue de l'arithmétique. C'est ce que je vais évoquer maintenant. D'abord, elles partagent avec beaucoup d'autres ensembles la jolie propriété d'être un groupe.
Les structures algébriques ont beau avoir complètement disparu de l'enseignement secondaire, les élèves utilisent des groupes sans le savoir et rien ne m'empêche de le leur dire. Ils connaissent toutes les propriétés qui font de l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs, avec son addition, un groupe commutatif, pour mémoire :

$$\mathbb{Z} = \ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots,$$

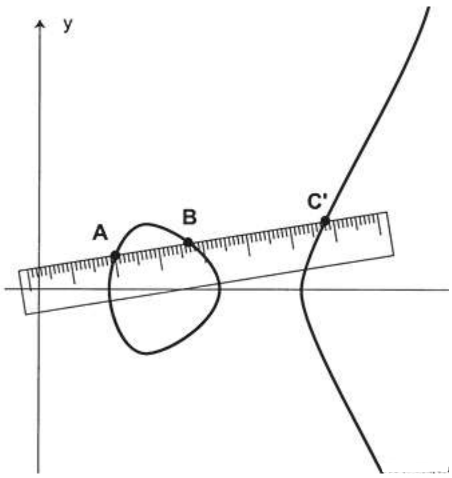
les nombres relatifs s'ajoutent et l'on sait que

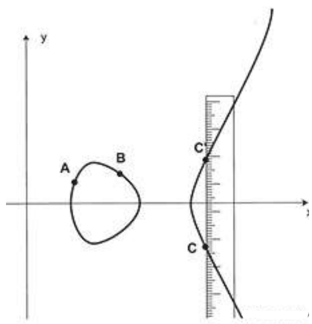
$$a + (b + c) = (a + b) + c,$$

que 0 est « neutre », c'est-à-dire que $a + 0 = a$, et que l'on a toujours

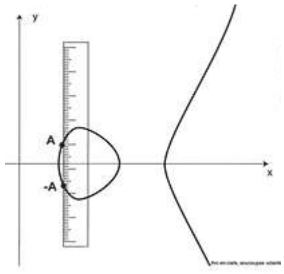
$$a + (-a) = 0.$$

Eh, bien, avec les points de la courbe elliptique, on peut faire quelque chose d'analogue : à deux points A et B, on peut associer un troisième point C de la façon suivante :
On trace la droite AB. Elle rencontre la courbe en un troisième point C' (parce qu'une équation de degré 3 qui a deux racines en a toujours une troisième). Le point C' recherché est le symétrique de C par rapport à l'axe des x. Je pose $C = A + B$ et j'ai ainsi défini une « addition » sur ma courbe.





Eh bien, elle a les mêmes propriétés que l'addition des nombres entiers, ce qui s'exprime en disant que la courbe elliptique est un « groupe » (commutatif). Pour démontrer ce fait, il faut commencer par remarquer que ce que j'ai écrit jusque là n'est pas absolument vrai. Il y a des droites qui ne rencontrent la courbe qu'en deux points. Ce sont les droites paralléles à l'axe des y et ça correspond au fait que trouver l'intersection d'une droite et de la courbe revient à résoudre une équation de degré 3... sauf pour ces droites-là, qui donnent lieu à une équation de degré 2. Comme ni mes lecteurs ni moi n'aimons les exceptions, décidons d'ajouter un point à la courbe, un point qui sera à la fois sur la courbe et sur toutes les droites « verticales », qu'il est de tradition d'appeler $-A$ (parce que c'est un « point à l'infini ») mais qu'il est plus sage ici d'appeler 0. Et ce point vérifie bien $A + 0 = A$ quelque soit le point A : c'est, comme le montre la figure, dire que le symétrique du symétrique de A est A. Et d'ailleurs, le symétrique de A mérite de s'appeler $-A$ puisque, quand on l'ajoute à A, on trouve 0.



On peut s'amuser et remarquer (et nous l'avons fait à Saint-Flour) que les points d'ordre 2 de ce groupe sont les points où la courbe rencontre l'axe des x, ou encore (et nous ne l'avons pas fait, mais nous aurions pu le faire) dire que les points d'ordre 3 sont les points d'inflexion de la courbe.

Remarque. Ce que ne m'ont pas demandé les lycéens de Saint-Louis, qui ont suivi très sagement et, m'a-t-il semblé, très attentivement, toutes ces considérations abstraites, c'est pourquoi cette addition était associative. Je n'ai pas soulevé la question avec eux, parce que je n'en avais pas le temps, il me restait des choses plus intéressantes à discuter avec eux. Bien sûr, à Saint-Flour, il y avait dans la salle des auditeurs qui « savaient » et, bon, nul n'est parfait, dans ce milieu, quand on sait quelque chose que tous les autres ne savent pas, on a envie que ça se sache. Donc, j'ai dû discuter la question de l'associativité. Démontrer l'associativité avec des sécantes à la courbe, on peut le faire. Cette démonstration n'est pas très dfficile, mais elle est trop fastidieuse[6] pour un exposé de ce genre, d'autant plus qu'elle n'apporte aucune idée intéressante. Ce qui est vraiment intéressant, c'est en utilisant la fonction P de Weierstrass, de montrer que la courbe (complexe) est en bijection (biholomorphe) avec un tore (complexe) $\mathbf{C}/\Lambda$ (où Λ est un réseau) et (c'est un théorème d'Abel) que l'addition définie sur la courbe par sécantes correspond, via cette bijection, à l'addition provenant de celle des nombres complexes... et voilà pourquoi votre fille est associative. C'est une démonstration qui ouvre sur de vraies mathématiques, significatives, vers Riemann, etc. Pour fixer le niveau de difficulté, le théorème d'Abel est quelque chose que j'aime bien donner comme sujet de mémoire à des étudiants de maîtrise un peu

[6]Comme le dit élégamment Serge Lang, dans l'exposé (oral !) rédigé dans [**13**], « si vous voulez vérifier l'aéssociativité, vous pouvez toujours courir. Si vous essayez par la force brutale, vous n'y arriverez pas. Mais c'est vrai ! » Et du coup, il ne le démontre pas, bien entendu !.

éveillés (d'aucuns diraient « motivés »). Alors voilà, cette structure de groupe (et l'identification avec le tore complexe) donne aussi des informations intéressantes mais abstraites sur le mouvement de la toupie. Je ne peux pas en parler ici, c'est trop compliqué.

Par contre, ce dont je vais parler, c'est du fait que les courbes elliptiques, en plus de servir à calculer l'arc d'une ellipse, en plus de permettre de résoudre les équations du mouvement de la toupie et d'autres en mécanique, les courbes elliptiques sont un objet assez universel en mathématiques, puisqu'elles servent aussi à faire de l'arithmétique.

Le théorème de Fermat. Il s'agit bien du très célèbre problème posé par Fermat au XVII$^{\text{e}}$ siècle. Peut-on trouver des nombres entiers a, b, c et n tels que $a^n + b^n = c^n$?

Oui, on peut, bien sûr, et voilà plein d'exemples :

- $n = 1, a$ et b quelconques, $c = a + b$...
- n quelconque, $b = 0, a = c$... on appelle ça une solution « triviale »,
- $n = 2$, par exemple $a = 3, b = 4, c = 5$, $3^2 + 4^2 = 5^2$... c'est le célèbre « triangle-3-4-5 » qui remplit tous les exercices et tous les exemples de tous les livres de troisième, non ce n'est pas tout à fait vrai, il y en a d'autres...
- L'équation est homogène (n fixé), si a, b et c sont solutions, alors ka, kb et kc sont solutions aussi. En particulier, avec $n = 2$, on trouve tous les autres triangles rectangles des exercices sur le théorème de Pythagore dans les livres de troisième, 60-80-100, etc.
- ou (avec $n = 2$), $a = 5, b = 12, c = 13$, $5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169 = 13^2$ (on m'a prétendu que l'on trouvait parfois le triangle correspondant dans certains livres) ou...

C'est là que j'ai fait aux élèves une vraie démonstration, une démonstration complète, de quelque chose de simple et de facile, que tous pouvaient suivre. La voici : On remarque que

$$(m+1)^2 - m^2 = 2m+1.$$

On part donc de n'importe quel nombre impair k, de sorte que k^2 est aussi un nombre impair, que l'on peut donc écrire $k^2 = 2m+1$. Mais alors

$$k^2 + m^2 = (m+1)^2$$

et il y a une infinité de triangles rectangles différents (non semblables) dont les côtés sont des nombres entiers[7].

Je suis d'accord que ce n'était peut-être pas très sérieux, mais bon, c'est agréable, dans un exposé, quand il y a un endroit que l'on comprend bien, non ?
Mais revenons à Fermat, qui a fait travailler énormément de gens, que je ne vais pas citer tous, bien sûr, Euler, encore lui ($n=3$),

et Gauss, le prince des mathématiciens, comme on l'appelait, représenté ici avec une gaussienne (à Saint-Flour, qui, en plus d'être le lieu où se tiennent les universités d'été d'Animath, est celui d'un célèbre séminaire de probabilités, il fallait bien ça), et même une princesse, Sophie Germain, alias Monsieur Leblanc, une vie très romanesque elle aussi, et les autres, Kummer, qui, ma foi, sur son chemin de Fermat, a inventé les idéaux et encore, plus récemment, Taniyama, du romanesque encore, cette fois, c'est pourtant un homme, Shimura, et on m'a reproché à Saint-Flour de ne pas avoir cité Weil, bien sûr, et tant d'autres...

Fermat et les courbes elliptiques. Si A, B et C sont des nombres entiers solutions de Fermat, c'est-à-dire si $A^n + B^n = C^n$, alors la courbe elliptique d'équation

$$y^2 = x^3 + (A^n - B^n)\,x - A^n B^n$$

[7]Voir aussi [**13**]

a des propriétés si particulières que... elle ne peut pas exister ! (Wiles). Démontré par Wiles en 1994, le « grand théorème de Fermat » affirme que, pour $n \geqslant 3$, la seule solution (en nombres entiers) est $a = 0$ et $b = c$ (ou $b = 0$ et $a = c$).

J'ai terminé l'exposé en montrant la célèbre photo de Wiles qui suit

et en demandant aux élèves quelle différence il y avait entre cette photo et les autres portraits de mathématiciens que j'avais montrés auparavant. Étonnamment, les élèves n'ont pas donné la réponse que j'attendais... mais à Saint-Flour, les collègues l'ont tous trouvée immédiatement. Comme quoi le bonheur (en mathématiques) est - encore aujourd'hui[8] - une idée (bien répandue chez les mathématiciens mais) neuve.

Remerciements

Je remercie Paul-Louis, Gilles, Danielle, Dominique C., Dominique T., Myriam et Juliette déjà nommés et avec eux tous les élèves de Saint-Louis et tous les participants de Saint-Flour, notamment Martin Andler et les deux Pierre (Audin et Duchet) et surtout Christine Marcel pour ses commentaires décapants qui m'ont beaucoup aidée dans la rédaction du présent texte.

Note sur la bibliographie

Il y en a pour tous les goûts... Les articles parus dans l'*Ouvert* sont en principe lisibles par les enseignants. L'article paru dans *la Recherche* n'est pas vraiment bon, pour des raisons que j'ai évoquées dans le texte, mais il est extrêmement bien illustré. Il faut lire la BD si on la trouve (à part le *Géométricon*, c'est ce que j'ai vu de mieux dans le genre). Le compte rendu de la conférence de Lang au Palais de la Découverte est

[8] Ce qui me permet, après Saint-Flour, de citer un saint laïque, Saint-Just...

toujours très agréable à lire (même si certaines affirmations provocatrices sont discutables). Le roman de Sophie K. n'est sûrement pas ce qu'elle a écrit de mieux. Le livre de Géométrie n'est pas si mal. Les autres articles et ouvrages cités sont spécialisés, lisibles par des mathématiciens plus ou moins spécialistes et sont surtout là pour montrer que ce dont je parle ici, c'est bien de mathématiques vivantes.

Références

[1] V. I. Arnold - *Méthodes mathématiques de la mécanique classique*, Mir, Moscou, 1974.

[2] M. Audin - « Soucoupes volantes et caustiques (avec point de vue sur l'arc-en-ciel) », l'*Ouvert* 54 (1989), p. 1-10.

[3] ——, « De la toupie aux courbes algébriques », l'*Ouvert* 67 (1992).

[4]—— , *Spinning tops, a course on integrable systems*, Cambridge University Press, 1996, Traduction en russe, Regular and chaotic dynamics, Moscou, 1999, traduction en japonais, Kyoritsu, 2000.

[5] ——, *Géométrie*, Espaces34 et Belin, 1998.

[6] ——, *Les systèmes hamiltoniens et leur intégrabilité*, Cours Spécialisés, vol. 8, Société Mathématique de France & EDP Sciences, 2001.

[7] ——, « Intégrabilité et non-intégrabilité de systèmes hamiltoniens, [d'après S. Ziglin, J. Morales-Ruiz, J.-P. Ramis,...] », *Séminaire Bourbaki, 2000-2001*, Astérisque **282** (2002), p. 113-135.

[8] M. Audin & P. Iglésias - « La géométrie symplectique », *la Recherche* **271** (1994), p. 1246-1252.

[9] M.Audin & R. Silhol - « Variétés abéliennes réelles et toupie de Kowalevski », *Compositio Math.* **87** (1993), p. 153-229.

[10] J. Détraz - *Kovalevskaïa : l'aventure d'une mathématicienne*, Belin, Paris, 1993.

[11] S. Kovalevskaïa - *Une nihiliste*, Phébus, Paris, 2004.

[12] S. Kowalevski - « Sur le problème de la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe », *Acta Math.* **12** (1889), p. 177-232.

[13] S. Lang - « Une activité vivante : faire des mathématiques», *Rev. Palais Découv.* **11** (1983), p. 27-62.

[14] I. Stewart - *Oh ! catastrophe*, Belin, 1982.

LE LEMME DE BAIRE

Gilles Godefroy
Institut de Mathématiques de Jussieu

Voici exactement cent ans, René Baire mettait la dernière main à la version écrite (rédigée par un jeune normalien, Arnaud Denjoy) de son Cours Peccot, enseigné au Collège de France en 1903/1904, et le 22 septembre 1904 il en signait la préface. Où en était l'analyse en ce début de vingtième siècle ?

Rappelons-nous qu'à l'époque les travaux révolutionnaires, et controversés, de Georg Cantor étaient neufs. La polémique faisait rage entre partisans et adversaires d'une théorie des ensembles encore informelle, sous la pression inquiétante des paradoxes et la question alors brûlante de la légitimité de l'axiome du choix.

Les jeunes loups de ce début de vingtième siècle s'appellent Borel, Lebesgue et Baire. Revenons quelques années en arrière pour explorer leur biographie. Émile Borel, né en 1871, est l'aîné. Fils de pasteur, il a parcouru la carrière scolaire éblouissante d'un enfant prodige, constamment premier. En 1897, trois ans après avoir soutenu sa thèse, il est déja maître de conférences à l'École Normale Supérieure, et il enseigne aux jeunes normaliens les subtilités de la théorie des fonctions d'une variable réelle, où la théorie des ensembles est fortement sollicitée. Deux de ses auditeurs vont eux aussi laisser leur nom dans l'histoire. Le premier s'appelle Henri Lebesgue, il va développer deux ans plus tard sa théorie de l'intégration tout en enseignant en classe préparatoire à l'École Centrale à Nancy. Selon ses dires, « ma théorie de l'intégration… date de l'époque où j'avais 21 heures de classe (et 23 ans il faut dire) et où je n'avais à Nancy que des collègues s'intéressant à la manille, au jacquet, mais avec lesquels je n'ai jamais parlé de science. » Le second s'appelle René Baire.

René Baire est né en 1874. Son père est tailleur, il meurt quand Baire a 16 ans. Son frère aine Henri le soutient alors financièrement dans ses études, permettant ainsi, comme l'avait fait Théo van Gogh, que s'exprime le génie de son cadet. Dès 14 ans, Baire a souffert des premiers symptomes d'une sorte de resserrement de l'œsophage, peut-être psychosomatique. Après l'agrégation, Baire est nommé professeur de mathématiques spéciales à Troyes puis à Bar-le-Duc, avant de commencer une courte carrière universitaire qu'il achèvera comme professeur à Dijon. À partir de 1914, Baire épuisé demande un congé indéfini de maladie qui s'avèrera être définitif. Assailli par les difficultés matérielles, tourmenté par les souffrances intenses que provoque ce resserrement qui l'étreint encore, il se donnera la mort en 1932.

Ce triumvirat Borel-Lebesgue-Baire qui a si profondément marqué l'analyse et en particulier l'école française, est donc constitué de chercheurs qui se sont rencontrés et ont étroitement interagi. Leurs trajectoires sont très contrastées : à la vie tragique de Baire répond la très brillante carrière de Borel, qui meurt en 1956 après avoir été député, ministre de la marine, maire de Saint-Affrique, et pour ce qui est des mathématiques maître d'œuvre et directeur de l'Institut Henri Poincaré (I.H.P.) pendant 28 ans. Henri Lebesgue se tient pour ainsi dire entre ces deux extrêmes : volontaire mais pleurnichard, il se plaint souvent auprès de Borel de ses difficultés financières et des injustices dont il se croit victime. Les 230 lettres qu'il a écrites à Borel entre 1901 et 1918 ont été retrouvées en 1998 au sous-sol de l'I.H.P. et leur lecture est à cet égard instructive. Supplanté par Baire pour le Cours Peccot de l'année 1903-1904, il écrit ainsi en octobre 1903 : « maintenant puisque nous avons parlé de la dépendance entre mes travaux et ceux de Baire, j'insiste sur ce fait que cette dépendance est très faible et que si j'ai cité souvent Baire c'est plus par camaraderie que par necessité. Il est vrai que je n'ai pas à me plaindre de la réciproque. Lorsque Baire a publié sa thèse, il connaissait ma note du *Bulletin* sur l'approximation des fonctions. J'y démontrais d'une façon très simple qu'une fonction de n variables continue par rapport à chacune d'elles est de classe $n-1$ au plus. Baire démontre dans sa thèse la même chose (ou au moins une partie de cette chose) pour $n = 3$ par un procédé très compliqué, il ne me cite aucunement et cependant nous avions parlé ensemble de ma démonstration ». Voici une « camaraderie » qu'on ne trouvera peut-être pas exemplaire. Excusons ce jeune homme, né extrêmement pauvre, qui ressentait bien mal l'existence d'une concurrence... mais il écrira encore, en 1909, vouloir « ne pas perdre sa vie en récriminations inutiles, et qu'on juge par suite risibles, comme Baire ».

Pourtant, Baire va s'enfoncer dans la misère cependant que Lebesgue est nommé au Collège de France puis à l'Académie des Sciences en 1922. Il enseignera au Collège de France jusqu'à sa mort en 1941.

La période productive de René Baire a duré environ dix ans. Elle commence à la fin de l'année 1896, pour s'achever après la rédaction des « Leçons sur les théories générales de l'analyse » publiées en 1908. En 1896, il est donc professeur de classes préparatoires à Bar-le-Duc, où il enseigne à ses élèves ce que (déja !) tout bon « prof. de taupe » doit enseigner : l'analyse la plus rigoureuse possible. Le 14 décembre 1896, dans le train qui le ramène sur Paris, il réflechit à la correction d'un devoir qu'il a donné à ses élèves : l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \qquad (1)$$

où l'inconnue f est une fonction différentiable des deux variables x et y, a pour solutions les fonctions données par $f(x,y) = \varphi(x-y)$, où φ est dérivable. Mais il sait que les dérivées partielles peuvent exister, et donc l'équation avoir un sens, sans que la fonction f soit différentiable ni même continue. Le petit monstre

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2},\ f(0,0) = 0$$

considéré par Johannes Thomae dès 1876, n'est-il pas un grand classique de l'agrégation ? Il est donc légitime de se demander quelles sont les solutions les plus générales de l'équation (1). On ne voit plus de raison pour qu'une solution f soit constante sur les droites d'équations $y = x+a$, ni même que cette fonction y soit continue puisque par exemple la fonction de Thomae n'est pas continue en $(0,0)$ sur la première bissectrice $x = y$. Mais tout de même, f ne peut pas être n'importe quoi... Oui, voici une contrainte : si les dérivées partielles existent, la fonction f est au moins *séparément* continue. En d'autres termes, si on fixe une variable à une valeur arbitraire, elle est continue en l'autre variable. Mais un peu de réflexion, quelques petits dessins, et une grosse pincée d'astuce montrent qu'une fonction séparément continue de deux variables est limite en tout point d'une suite de fonctions *globalement* continues des deux variables. En d'autre termes, il existe une suite f_n de fonctions continues telles que pour tout point(x,y) du plan, on ait

$$f(x,y) = \lim_{n\to\infty} f_n(x,y)$$

et si on se restreint à une droite d'équation $y = x + a$, on a bien sûr

$$f(x, x + a) = \lim_{n\to\infty} f_n(x, x + a)$$

ce qui montre que la restriction de f à cette droite est limite d'une suite de fonctions continues d'une variable. Nous ne sommes pas encore au bout de nos peines : René Baire sait bien sûr que la limite d'une suite de fonctions continues n'est pas necessairement continue, elle pourrait par exemple être nulle partout sauf en un point ! Il faudrait avoir une uniformité... partout c'est sans espoir, mais est-ce que la convergence est à peu près uniforme sur certains sous-intervalles ?

Les trains étaient moins rapides en 1896, mais en arrivant Gare de l'Est, monsieur Baire était sans doute encore bien songeur... C'est qu'il faudrait clairement plus de quelques heures de réflexion pour débrouiller cet écheveau. Il va y parvenir cependant, et présenter ses résultats en enseignant en 1904 le Cours Peccot intitulé « leçons sur les fonctions discontinues ». Ce cours a été réédité en 1995 par les Éditions Jacques Gabay, et on peut donc se le procurer assez facilement. Parcourons-le.

L'ouvrage commence par une justification de l'intérêt porté aux fonctions discontinues, et le premier exemple choisi par Baire est le développement en série de Fourier de la fonction $f(x) = \frac{x}{2}$ sur $]-\pi, \pi[$, donc

$$\frac{x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin(nx)}{n}$$

qui est une situation naturelle où une fonction discontinue s'écrit comme une somme, infinie bien sûr, de fonctions continues. Conscient ou non de l'analogie, Baire s'appuie donc sur la théorie des séries de Fourier, qui provient de l'équation des cordes vibrantes

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 \tag{2}$$

et dont l'étude fine a amené Cantor à considérer des ensembles fermés arbitraires de la droite et à créer la théorie des ensembles. L'équation (1), pourtant plus simple puisqu'elle est l'un des facteurs de (2) (on peut en effet factoriser les opérateurs de dérivation comme dans $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$), va inviter Baire à une démarche très similaire. Il donne encore comme exemple les limites radiales de fonctions définies sur le disque, puis développe longuement les notions de point limite et d'ensemble dérivé, et la notion d'ensemble bien ordonné qui conduit aux « nombres transfinis » de Cantor.

Cette notion était tout neuve à l'époque, et les travaux de Baire en sont sans doute la première application vraiment importante. L'exposition qu'il en fait est lumineuse, et j'invite les lecteurs à se réferer au texte original. Disons simplement que l'idée de base est qu'une récurrence doit parfois se prolonger au-delà des entiers, et pour cela être indexée par de nouveaux « nombres », comme suit :

$$1, 2, 3 \ldots\ n, \ldots\ \omega, \omega + 1, \ldots\ \omega + \omega, \ldots\ \omega^2, \ldots\ , \omega^\omega, \ldots$$

Pourquoi pas, mais on sent bien qu'on risque d'avoir des problèmes pour définir une notation cohérente. C'est le cas en effet, mais comme l'écrit Baire on peut tout de même aller de l'avant :« en résumé, un système de conventions étant établi, on peut l'étendre, mais on ne peut pas donner un système de notations qui désignerait tous les nombres de la classe II. Cela ne nous empêche pas de pouvoir raisonner sur les nombres transfinis eux-mêmes, sans savoir tous les noter ». Cantor a introduit cette notion pour comprendre la structure (en fait très délicate) des sous-ensembles fermés de la droite. Nous allons voir une situation analogue où il faut impérativement recourir à une récurrence transfinie.

Après ces longs préliminaires, indispensables aux lecteurs de l'époque comme sans doute à la plupart des lecteurs d'aujourd'hui, René Baire se lance dans les développements topologiques auxquels son nom est désormais associé. Il présente (à la page 79 d'un mémoire de 127 pages) un Lemme fondamental, que je ne résiste pas au plaisir de reproduire à l'identique, avec sa démonstration. Rappellons avant cela qu'un sous-ensemble M de la droite est non dense dans un intervalle I si, étant donné un sous-intervalle ouvert arbitraire J de I, le complémentaire $J - M$ de M dans J contient un sous-intervalle ouvert. Baire écrit :« nous dirons qu'un ensemble est de première catégorie dans un intervalle PQ s'il est constitué par la réunion d'une infinité dénombrable d'ensembles dont chacun est non dense dans PQ ». Nous disons plutôt aujourd'hui qu'un tel ensemble est *maigre*. La définition montre clairement que la réunion d'une famille dénombrable d'ensembles maigres est maigre. Revenons au Maître : « *Je dis que si G est un ensemble de première catégorie sur un segment PQ, il y a dans toute portion de PQ des* *points qui n'appartiennent pas à G*. Car G est formé d'une infinité dénombrable d'ensembles non denses $G_1, G_2, \dots, G_n, \dots$ Soit ab un intervalle pris sur PQ. L'ensemble G_1 étant non dense dans PQ, il est possible de déterminer dans ab une portion a_1b_1 ne contenant aucun point de G_1. De même, dans a_1b_1, il est possible de déterminer une portion a_2b_2 ne contenant aucun point de G_2, et ainsi de suite. Nous formons une suite d'intervalles a_1b_1, $a_2b_2, \dots$ $a_nb_n, \dots$, dont chacun est contenu dans le précédent, et tels que a_nb_n ne contient aucun point de $G_1, G_2, \dots$ G_n. Il existe un point A appartenant à tous ces intervalles. Ce point n'appartient pas à G, puisqu'il ne peut appartenir à aucun des ensembles $G_1, G_2, \dots, G_n, \dots$. La proposition est donc démontrée ».

Rapprochons ce texte de la Note aux Compte-Rendus du 29 Avril 1901 où Lebesgue définit lumineusement la mesurabilité. Là encore je ne résiste pas au plaisir de citer Lebesgue :« considérons un ensemble de points de (a, b) ; on peut d'une infinité de manières enfermer ces points dans une infinité dénombrable d'intervalles ; la limite inférieure de la somme des longueurs de ces intervalles est la mesure de l'ensemble. Un ensemble E est dit mesurable si sa mesure augmentée de celle de l'ensemble des points ne faisant pas partie de E donne la mesure de (a, b). Voici deux propriétés de ces ensembles : une infinité d'ensembles mesurables E_i étant donnée, l'ensemble des points qui font partie de l'un au moins d'entre eux est mesurable ; si les E_i n'ont deux à deux aucun point commun, la mesure de l'ensemble obtenu est la somme des mesures des E_i. L'ensemble des points communs à tous les E_i est mesurable ».

Suivant les habitudes de l'époque, Baire et Lebesgue expriment autant que possible leur pensée en français, avec un minimum de formalisme. Il n'y a d'ailleurs aucun symbole pour la réunion ou l'intersection dans leurs textes, où l'inclusion est notée comme une inégalité. Les typographes, sans doute, avaient leurs exigences au bon vieux temps des caractères en plomb... Cependant, le contraste avec un texte d'analyse d'aujourd'hui est assez frappant, et chacun est libre de se demander si nous avons gagné au change. Notons encore que toute la démonstration de Baire repose sur la méthode des segments emboîtés, comme d'ailleurs la première preuve de Cantor de la non-dénombrabilité de la droite réelle. Des élèves de l'enseignement secondaire peuvent donc être confrontés, avec quelques chances de succès, à ces arguments.

Ce « Lemme de Baire » a une postérité qui, sans doute, aurait étonné son auteur. Centenaire en pleine forme, il est encore utilisé dans les contextes les plus variés. Je vais donner maintenant quelques exemples, où il est appliqué sur la droite comme ci-dessus, sur $\mathbb{R}^n$ (ce que Baire savait faire dès 1904) ou sur des espaces métriques complets (ce qu'il aurait su faire s'il avait connu cette notion).

Rappelons-nous les motivations initiales de Baire : il s'intéresse aux fonctions qui sont limites en tout point d'une suite de fonctions continues. Dans son mémoire de 1904, il en présente une caractérisation magistrale, qu'il est légitime d'appeler le Grand Théorème de Baire. Énonçons-le maintenant, tel qu'il l'a démontré.

THÉORÈME : *Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction. Les assertions suivantes sont équivalentes :*
1) Si F est un fermé non vide arbitraire de $\mathbb{R}^n$, la restriction de f à F a au moins un point de continuité.
2) Il existe une suite f_l de *fonctions continues de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ telle que*

$$f(x) = \lim_{l \to \infty} f_l(x)$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.

La direction facile de cette équivalence est, assez naturellement, de 2) vers 1) puisqu'on part de l'existence de quelque chose. Esquissons l'argument, hélas avec quelques symboles cette fois, car en humble arrière-petit-fils mathématique de Baire je n'ai pas appris comme lui à bien m'exprimer sans formalisme... On se limite à montrer 1) dans le cas où $F = \mathbb{R}$, le cas général étant similaire. Si n et k sont deux entiers, on pose

$$F_n^k = \{x \in \mathbb{R} \ ; \ |f_\ell(x) - f_m(x)| \leqslant \frac{1}{k} \text{ si } l, m \geqslant n\}.$$

Comme leur nom l'indique les ensembles F_n^k sont fermés, et on le vérifie d'ailleurs facilement grâce à la continuité des fonctions f_n. D'après 2), on a

$$\bigcup_{n \geqslant 1} F_n^k = \mathbb{R}$$

donc d'après le Lemme de Baire, si on appelle U_n^k l'intérieur du fermé F_n^k, l'ouvert

$$O_k = \bigcup_{n \geqslant 1} U_n^k$$

est dense pour tout k, et donc à nouveau grâce au Lemme, l'ensemble

$$\Omega = \bigcap_{k \geqslant 1} O_k$$

est dense dans $\mathbb{R}$. On vérifie alors directement que tout point de Ω est un point de continuité de f. Cela provient tout simplement du fait que la convergence est localement « $\frac{1}{k}$-uniforme » sur l'ensemble O_k. Notons que cet exemple est typique d'une situation assez répandue où le Lemme est utilisé deux fois (Baire-Baire en quelque sorte...), avec des fermés puis avec leurs intérieurs.

La direction 1) implique 2) est plus difficile : il nous faut construire les fonctions f_l. Je ne vais pas m'y risquer, mais simplement esquisser la construction centrale. Sur un voisinage d'un point de continuité, une fonction est presque constante. Donc si on se donne $\varepsilon > 0$, il existe d'après 1) un ouvert U_1 non vide de $\mathbb{R} = F_0$ sur lequel la variation totale de f est inférieure à ε. Soit $F_1 = \mathbb{R} - U_1$. Si F_1 est non vide, toujours d'après 1) appliqué cette fois à F_1, il existe un ouvert U_2 tel que la variation totale de f sur l'ensemble non vide $F_1 \cap U_2$ soit inférieure à ε. On continue en appliquant 1) à $F_2 = F_1 - U_2$ s'il est non vide, et ainsi de suite... jusqu'à ce qu'on ait tout mangé, c'est-à-dire atteint l'ensemble vide. On construit donc des fermés emboîtés tels que la fonction oscille de moins de ε sur les différences successives. On obtient donc une « fonction en escalier » f_ε constante sur les ensembles $F_i \cap U_{i+1}$ et ε-proche de f. On montre que f_ε est limite d'une suite de fonctions continues et encore un peu de travail permet de montrer que c'est aussi le cas de f. **C.Q.F.D.** (ou peu s'en faut).

L'esquisse ci-dessus fait l'impasse sur le point crucial : est-ce bien clair qu'on va finalement tout manger ? Et d'ailleurs, en combien de « bouchées » va-t-on y arriver ? C'est là que le transfini de Cantor joue son rôle ! En général on n'y arrive pas en un nombre fini d'itérations, mais on y parvient toujours en un nombre dénombrable d'itérations, en allant au-delà du nombre transfini ω. Les innommables nombres transfinis de Cantor indexent donc le processus, jusqu'à la vacuité. Et on démontre que cette *récurrence transfinie* est absolument incontournable pour montrer le Grand Théorème de Baire.

Le transfini n'a jamais été tellement populaire, et de très grands chercheurs comme René Thom ont été jusqu'à dire que les objets qu'on fabrique par une récurrence transfinie n'existent pas vraiment... Je vais éviter les sujets qui fâchent et donc me limiter à évoquer quelques applications du *Lemme* de Baire, qui quant à lui n'a pas besoin du transfini. Et comme les lecteurs, s'ils sont toujours là, ont quand même bien du mérite nous allons désormais nous passer de toute démonstration !

Je vais donc réunir quelques applications du Lemme, dans quatre directions qui bien sûr ne sont pas indépendantes : limiter la pathologie, obtenir des uniformités cachées, connaître un ensemble par son complémentaire, établir des résultats d'existence.

Limiter la pathologie : cette direction concerne en particulier les motivations initiales de Baire. En utilisant la direction facile du Grand Théorème, qui ne repose comme on l'a vu que sur le Lemme, on montre en effet les choses suivantes :

- toute fonction séparément continue de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ a des points de continuité.

- il existe des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui sont continues exactement aux points irrationnels (par exemple la fonction h définie par $h(\frac{p}{q}) = \frac{1}{q},\ h(0) = 1,\ h(x) = 0$ si x est irrationnel). Cependant, si une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est continue en tout point rationnel, il y a nécessairement des points irrationnels où elle est continue.

- toute fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ qui admet des dérivées partielles en tout point a des points de différentiabilité.

- il existe des fonctions dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dont la dérivée n'est pas partout continue, comme par exemple

$$g(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right),\ g(0) = 0$$

cependant toute dérivée a des points de continuité. En effet, si f est dérivable elle est en particulier continue et si l'on écrit

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} n\left[f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x)\right]$$

on voit que la dérivée est limite d'une suite de fonctions continues. Ainsi, si un graphe admet une tangente en tout point, cette tangente varie nécessairement de façon continue en un certain nombre de points.

Gustave Choquet, élève d'Arnaud Denjoy qui rédigea le cours de 1904, a caractérisé, juste avant de soutenir sa thèse en mars 1946, les fonctions dérivées, en montrant que lorsqu'une fonction g de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ vérifiait les deux propriétés suivantes : a) être limite d'une suite de fonctions continues, b) avoir la propriété des valeurs intermédiaires, alors il existait une fonction continue strictement croissante α telle que $g \circ \alpha$ soit une fonction dérivée. Modifier un texte n'était pas facile à l'époque : la thèse contient donc l'énoncé et la démonstration d'un résultat plus faible, et le théorème général n'est indiqué que par une note en bas de la page 4.

Depuis les années 1970, les méthodes de Baire ont été appliquées avec profit à des problèmes de différentiabilité des fonctions convexes en dimension infinie. On peut dire que les fonctions convexes en dimension infinie et les fonctions continues en dimension finie sont d'une complexité similaire : ainsi, il existe sur certains espaces de Banach des fonctions convexes continues mais nulle part différentiables.

Obtenir des uniformités cachées : qu'est-ce qu'une uniformité ? En analyse, on rencontre fréquemment des expressions du type : pour tout truc T il existe un machin M tel que... et les analystes sont en général fous de joie quand ils arrivent à remplacer ce début de phrase par : il existe un machin M tel que pour tout truc T... puisqu'en effet cette deuxième expression signifie que M ne dépend pas de T, qu'il n'a qu'une seule forme ou encore qu'il est *uniforme* en T. Cette joie s'explique par le fait qu'une uniformité porte avec elle quantité de conséquences heureuses comme par exemple des résultats d'existence.

La démonstration ci-dessus de l'implication facile du Grand Théorème repose clairement sur une uniformité cachée, puisqu'on montre que la convergence des fonctions f_l est essentiellement uniforme sur de bons sous-ensembles. Voici d'autres exemples :

- Soit f une fonction indéfiniment dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que pour tout x, il existe un entier $n(x)$ tel que $f^{n(x)}(x) = 0$. Alors l'entier $n(x)$ peut être choisi indépendamment de x, en d'autres termes f est un polynôme.

- Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que pour tout x, la suite $f(nx)$ converge. Alors la fonction f admet une limite en $+\infty$ et en $-\infty$.

- Soit X un espace vectoriel normé complet, et E un ensemble de formes linéaires continues sur X. Supposons que pour tout $x \in X$, l'ensemble $\{f(x);\ f \in E\}$ soit borné. Alors il existe une constante M telle que pour tout $x \in X$ et pour tout $f \in E$ on ait $|f(x)| \leq M\|x\|$.

Des cas particuliers de ce résultat avaient été obtenus au début du vingtième siécle par divers auteurs, en utilisant ce qu'on appelle souvent la technique de la « bosse glissante ». En 1927, Banach et Steinhaus se sont aperçus que le lemme de Baire donnait une démonstration facile du cas général, ouvrant ainsi la voie aux applications des idées de Baire à l'analyse fonctionnelle.

Ce « théorème de Banach-Steinhaus » est en fait un résultat d'existence, souvent utilisé comme suit : si (f_n) est une suite de formes linéaires continues sur X telle que la suite de leurs normes soit non bornée, il existe $x \in X$ tel que la suite $(f_n(x))$ diverge. On montre par exemple ainsi qu'il existe des fonctions périodiques continues dont la série de Fourier diverge en dehors d'un ensemble maigre M de points (et pourtant le complémentaire de M est de mesure nulle, merci monsieur Carleson !).

Notons que les analystes utilisent fréquemment, dans leur recherches d'uniformité, un autre concept extrèmement puissant : la *compacité*. Le résultat le plus simple où ce concept est appliqué énonce que *toute fonction continue sur un compact est uniformément continue*. Le Lemme de Baire permet d'obtenir des uniformités dans de nombreux cas où la compacité est absente (par exemple, lorsqu'on travaille dans des espaces normés de dimension infinie, donc non localement compacts), mais il faut alors accepter de traîner un ε avec soi, alors que la compacité permet de « faire $\varepsilon = 0$ » (exemple : *toute fonction continue sur un compact atteint ses bornes*). Par exemple, la démonstration du Grand Théorème donnée plus haut peut se comparer avec le théorème de Dini, beaucoup plus simple, où la compacité (plus quelques hypothèses bien sûr) fournit la convergence uniforme, quand le Lemme ne donne qu'une convergence « localement ε-uniforme sur un ouvert dense ».

Connaître un ensemble par son complémentaire : la démonstration par l'absurde, donnée dans le livre IX des *Élements* d'Euclide, de l'existence d'une infinité de nombres premiers ne donne aucun moyen d'exhiber des nombres premiers arbitrairement grands. Tous les mathématiciens connaissent l'argument. Cependant, lorsque Cantor remarque en 1874 que l'existence de nombres transcendants résulte immédiatement du fait que l'ensemble des nombres algébriques est dénombrable alors que l'ensemble des réels ne l'est pas, son approche n'est pas universellement admise (ni même comprise). Il est pourtant bien naturel qu'un ensemble soit plus simple, mieux connu que son complémentaire : je connais (à peu près) la Belgique, est-ce pour cela que je connais le reste du monde ? Et les ouverts de $\mathbb{R}$ sont des réunions dénombrables d'intervalles, alors que leurs complémentaires les fermés sont bien plus difficiles à décrire, comme Cantor l'a compris. Baire, sans doute inspiré dans la démonstration de son Lemme par la première preuve de Cantor du caractère non dénombrable de $\mathbb{R}$, va pousser l'argument plus loin, ce qui va permettre de montrer l'existence d'objets jouissant d'une certaine propriété en ne manipulant que des exemples qui *n'ont pas* cette propriété. Le plus souvent, il s'agit d'une certaine irrégularité, qu'on approche de façon « régulière, mais de moins en moins ». Citons à ce propos Jean-Pierre Kahane dans les *Leçons de Mathématiques d'aujourd'hui*, volume 1 (Cassini, 2000) : « Les probabilités ont pour effet d'effacer les résonances, de mélanger les fréquences, de lisser les choses et de les rendre rondes. En opposition, la théorie de Baire exalte les résonances, c'est la théorie de la condensation des singularités ».

Donnons quelques exemples :

- Il existe des fonctions continues nulle part dérivables sur l'intervalle $[0, 1]$. Ce résultat s'obtient en appliquant le Lemme sur l'espace des fonctions continues sur $[0, 1]$ muni de la norme de la convergence uniforme, et en n'utilisant que des fonctions du type $P(x) + \epsilon sin(nx)$, où P est un polynôme.

- Le théorème de l'application ouverte : si T est une application linéaire continue et surjective d'un espace normé complet E sur un espace normé complet F, il existe une constante M telle que pour tout $y \in F$, il existe $x \in E$ tel que $T(x) = y$ et $\|x\| \leqslant M\|y\|$.

Une conséquence immédiate du théorème de l'application ouverte est que si T est une bijection linéaire continue entre espaces normés complets, alors son inverse T^{-1} est continue. En approfondissant la question, on parvient à montrer qu'une application linéaire explicite (en un sens précis et extrêmement large) entre espaces normés complets est automatiquement continue.

Le théorème de l'application ouverte s'utilise souvent au moyen de sa contraposée : s'il existe des éléments de F qui se relèvent arbitrairement mal à E (en ce sens que la norme des relevés est arbitrairement grande), alors il y a des éléments qui ne se relèvent pas du tout. On montre ainsi facilement qu'il y a une suite tendant vers 0 qui n'est pas la suite de coefficients de Fourier d'une fonction intégrable. En fait, l'argument démontre que « presque toutes » les suites tendant vers 0 sont comme ça. On dit en plaisantant qu'il est plus facile de gagner 1000 dollars que de gagner 1 dollar (Note personnelle : il y a malheureusement beaucoup de gens qui ont de bonnes raisons de ne pas trouver ça drôle, fin de la parenthèse), et souvent le Lemme fournit beaucoup d'objets singuliers quand on peine à en construire un seul.

Voici un truc pratique pour les chercheurs qui veulent trouver de nouvelles occasions d'appliquer le Lemme : quand un objet est construit comme somme d'une série, il y a de grandes chances qu'un argument de Baire donne l'existence de nombreux objets similaires, avec une démonstration plus simple.

Permettons-nous maintenant un petit encadré pour les spécialistes : Mazurkiewicz a montré en 1936 que l'ensemble des fonctions partout dérivables n'était *pas* un sous-ensemble borélien de l'espace des fonctions continues. Ce résultat est à rapprocher de la méthode de « totalisation » développée par Arnaud Denjoy (l'auditeur-rédacteur de Baire) pour retrouver une fonction dérivable f à partir de sa dérivée. C'est immédiat si la dérivée est continue (on intègre f'), et l'intégration marche encore si la dérivée est Lebesgue-intégrable car f est alors (non trivialement !) absolument continue. Mais lorsque la dérivée n'est pas intégrable, Denjoy doit recourir à des arguments transfinis, et le théorème de Mazurkiewicz a permis de montrer que l'usage du transfini était inévitable. Nous sommes ici en présence d'un objet assez inattendu : une bijection linéaire explicite et apparement simple (prendre la dérivée) dont l'inverse est très complexe ! Mais le résultat de Mazurkiewicz montre en particulier qu'*il n'existe pas de structure d'espace normé complet utilisable sur l'espace des fonctions dérivables*, ce qui fait toute la difficulté du problème.

Établir des résultats d'existence : montrer l'existence d'un objet mathématique est un but « auto-justifiant ». L'objet en question peut être plus ou moins important, mais chacun s'accorde à penser qu'on a progressé quand on a construit quelque chose de « neuf » (ou pour les Platoniciens impénitents, reconnu l'existence de ce qui « existait déja » mais qu'on n'avait pas encore vu). Laissons de côté cette philosophie pour donner trois exemples, qui sont très loin d'épuiser l'immense richesse du sujet, où le Lemme de Baire donne la meilleure démonstration d'existence.

- Pour tout $n \geqslant 2$, il existe des sous-ensembles fermés de $\mathbb{R}^n$ de mesure nulle, qui contiennent des segments de longueur 1 dans toutes les directions. La démonstration par le Lemme de l'existence de ces « ensembles de Besicovitch » est due à T.W. Körner, que je cite à cette occasion : « le théorème de catégorie de Baire est une trivialité profonde. Dès lors qu'on a trouvé le bon espace métrique complet, les résultats s'enchaînent sans trop d'efforts. Mais le problème consiste à trouver ce bon espace ». Ainsi, les techniques de Baire nous invitent à penser non pas en termes d'*éléments*, mais en termes d'*espaces*.

- Le théorème de Kolmogorov, qui répond au treizième problème de Hilbert, affirme que toute fonction continue f de n variables, définie sur $[0, 1]^n$, peut s'écrire comme une superposition de fonctions d'une seule variable, au sens suivant : il existe des fonctions continues g_q et $\varphi_{p,q}$ telles que

$$f(x_1, x_2, \dots\ x_n) = \sum_{q=1}^{2n+1} g_q(\sum_{p=1}^{n} \varphi_{p,q}(x_p))$$

et de plus les fonctions $\varphi_{p,q}$ sont strictement croissantes sur $[0, 1]$ et indépendantes de f. Il se trouve que la validité de ce théorème est une propriété générique (un « presque partout » au sens de Baire) des fonctions croissantes continues $\varphi_{p,q}$.

- Un théorème du type « Ramsey » s'énonce ainsi : si $\mathcal{E}$ est un ensemble « raisonnable » de suites infinies d'entiers (et tous les ensembles boréliens sont raisonnables en ce sens), il existe un ensemble infini A d'entiers dont tous les sous-ensembles infinis sont dans $\mathcal{E}$ ou un ensemble infini B d'entiers dont tous les sous-ensembles infinis sont dans le complémentaire de $\mathcal{E}$. Comme l'a montré Alain Louveau, ceci peut s'obtenir en utilisant finement les méthodes de Baire. Ce théorème peut être compris comme un résulat de théorie des graphes (infinis) : dans les graphes bichromatiques dont les sommets sont les ensembles infinis d'entiers joints par une arête si on a inclusion, on trouve des sous-graphes monochromatiques isomorphes au graphe initial quelque soit le coloriage (raisonnable). C'est cependant en analyse que ce résultat s'applique : pour n'importe quelle propriété raisonnable (P) des suites, on trouve une sous-suite dont toutes les sous-suites ont (P) ou une sous-suite dont aucune sous-suite n'a (P).

Il est plus que temps de conclure… provisoirement car les applications du Lemme de Baire s'enrichissent avec une belle régularité de plusieurs nouveautés par an, et de plus ces dernières décennies ont vu l'émergence de méthodes de la « deuxième génération » avec des théorèmes transfinis et non-linéaires du type Banach-Steinhaus ou Application Ouverte… La fin de l'histoire n'est donc pas pour demain ! Et rendez-vous à l'École de Saint-Flour de 2104 où nous fêterons le bicentenaire du Cours Peccot de monsieur René Baire.

Quelques remarques de nature pédagogique : ce texte est la version écrite d'une conférence donnée à l'École d'été de Saint-Flour, organisée du 23 au 27 Août 2004 par Paul-Louis Hennequin et l'association Animath. Je remercie vivement les organisateurs et l'ensemble des participants à cette très intéressante école pour leur aide et leurs commentaires. Michèle Audin et Marc Rogalski ont bien voulu lire une version préliminaire de ces notes, et leurs remarques ont permis de grandement l'améliorer. Je leur en suis reconnaissant.
Cette conférence était censée représenter un exemple de « promenade mathématique », selon le terme proposé par Animath pour décrire les rencontres mathématiques entre chercheurs, enseignants et élèves du secondaire. On peut légitimement se demander s'il s'agissait d'un bon exemple, voire d'un exemple de ce qu'il ne faut pas faire. Une discussion constructive s'est engagée sur ce thème après la conférence.
Comme les lectrices et lecteurs du texte ci-dessus ont pu le constater, le niveau technique varie beaucoup d'un paragraphe à l'autre. Certains passages seraient accessibles à des élèves de Terminale S, d'autres à des étudiants de Licence, quelques-uns enfin s'adressent plutôt à des chercheurs spécialisés. Malgré ces petites incursions sur des pentes plus rudes, il me semble que des agrégatifs pourraient utiliser cette « promenade » à peu près telle quelle, ainsi que des élèves de Math. Spé. dans le cadre d'un T.I.P.E. Il faudrait par contre censurer franchement ce texte pour en faire quelque chose d'utilisable dans le cadre de l'enseignement secondaire.

Il parait d'ailleurs assez difficile de faire travailler des élèves de Collège ou de Lycée sur des sujets d'analyse. L'aspect pluridisciplinaire n'est pas facile à intégrer, lorsqu'on parle d'un « $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit » quel sens physique a cette expression ? Quant à la pâte dont est faite la droite réelle, comment y mettrait-on la main ? Voici quand même une suggestion dans ce sens : l'exemple le plus simple de « système dynamique » est une suite recurrente $u_{n+1} = f(u_n)$. Des exemples très simples montrent que le comportement de la suite peut dépendre de façon très irrégulière du premier terme u_0, même si f est polynomiale. Il s'agit là d'une situation de nature expérimentale, et avec une bonne calculette les élèves comme les enseignants peuvent déja s'amuser. Pourtant le Grand Théorème n'est pas si loin : si f est continue, la limite de la suite quand elle existe est bien sûr une fonction de u_0 (en général non continue !) qui est limite de la suite de fonctions continues $f_n = f \circ f \circ \ldots \circ f$ (n fois). Attention, nous voici repartis vers l'infini, il vaut peut-être mieux dire aux jeunes « passe ton Bac d'abord, l'infini ce sera pour plus tard » ! Je ne sais pas... Qu'en pensez-vous ?

POURQUOI LE LIVRE X D'EUCLIDE ?
ou
THÉÉTÈTE, LE GALOIS GREC

Dominique Roux
Inspection Générale
Paris

1) Le livre X à travers les siècles

Le dixième livre des *Eléments d'Euclide* comprend 115 propositions et traite des irrationnels. Il constitue à lui seul le quart des *Eléments* et il est beaucoup plus obscur et complexe que les autres livres. Sa lecture est particulièrement difficile et pénible. En 1585 Stévin écrivait :
« La difficulté du livre 10 d'Euclide est à plusieurs devenue en horreur, voire jusqu'à l'appeler **la croix des mathématiciens**, matière trop dure à digérer et en laquelle n'aperçoivent aucune utilité ».
Au siècle suivant Henrion insère dans sa traduction en français du livre X de nombreux exemples numériques et scholies après avoir fait précéder ce livre de plus de cent pages d'algèbre afin de préparer le lecteur à son étude. Au dix-huitième siècle les traductions courantes ne comportent plus le livre X. Le Père Dechalles écrivait :
« Je laisse le septième, le huitième, le neuvième et le dixième livre des *Eléments* d'Euclide, parce qu'ils sont inutiles à presque toutes les parties des mathématiques. Je me suis souvent étonné qu'on les ait mis au nombre des *Eléments*, puisqu'il est évident qu'Euclide ne les a composés que pour établir la doctrine des incommensurables, laquelle n'étant qu'une **vaine curiosité**, ne devrait pas être placée entre les livres élémentaires, mais devrait former un traité particulier ».
Au dix-neuvième siècle Woepcke dit : « Rien n'est plus beau ni plus parfait, que l'ordre et le parallélisme des hexades du livre X », alors qualifié de « chef d'œuvre de la science grecque » sans que son utilité ne soit justifiée.

Entre 1910 et 1940 plusieurs savants allemands s'interrogent sur l'intérêt du livre X et concluent par : « **livre cul de sac** qui ne débouche sur rien » ou au mieux : « jeu logique non dépourvu de qualités esthétiques ». En 1947 l'avis du grand géomètre italien Beppo Levi est : « jonglerie astucieuse et sans grand intérêt ».

Il ne nous semble pas raisonnable de laisser penser qu'un traité aussi colossal et élaboré que le livre X n'aurait été rédigé que par pure fantaisie et sans objectif sérieux par les mathématiciens grecs. Il convient de s'interroger sur leur projet. Le présent travail se propose de formuler deux hypothèses qui pourraient justifier cette monumentale entreprise ; elles ne sont pas à chercher loin, mais s'expliquent par la grande amitié qui relie Platon et Théétète et qui fait que les préoccupations de l'un motivent les recherches de l'autre. Or, les références aux mathématiques dans les dialogues de Platon tournent autour de deux problèmes : d'une part l'irrationalité et en particulier l'anthyphérèse de $\sqrt{N}$ (*Théétète* 147) et d'autre part l'étude des figures régulières (*Timée* 53) et par suite le partage des polygones réguliers en triangles par des diagonales.

2) Que sait-on sur Théétète ?

Nous connaissons Théétète par au moins trois sources :

- Suidas nous dit que Théétète d'Athènes était astrologue, philosophe, disciple de Socrate et qu'il enseigna à Héraclée, enfin qu'il écrivit « les cinq solides ».
- Proclus, dans son résumé historique cite Théétète trois fois, nous le présentant comme l'un des plus importants mathématiciens de l'antiquité grecque, auteur de plusieurs découvertes qui trouvèrent place dans les *Eléments*. Nous admettrons sans revenir sur l'argumentation détaillée de Tannery ou de Gardies leur conclusion : Théétète est à l'origine des livres X et XIII des *Eléments* d'Euclide.
- Enfin Platon en fait le personnage central de deux dialogues : le *Sophiste* et le *Théétète*, par lequel (dans le témoignage de Théodore) nous apprenons que Théétète était laid, modeste, courageux, doué d'une grande mémoire, d'une aptitude à comprendre les choses les plus difficiles et qu'il fut un brillant chercheur, bref, le meilleur mathématicien de l'époque. La grande admiration de Platon pour son ami est évidente (*Théétète* 144).

Il est admis qu'à deux ans près la date de naissance de Théétète est 415 avant J.C. Nous savons d'autre part qu'il est mort de maladie à la suite de ses blessures lors d'une guerre de Corinthe. Mais il y a deux guerres possibles, l'une en 395, l'autre en 369 avant J.C. Tout le monde a pensé qu'il s'agissait de la seconde alors que, récemment, J.P. Kahane a exprimé l'avis contraire. Voici quelques arguments dans ce sens :

- Théétète a laissé une trace fulgurante de ses capacités et de son œuvre. Il avait une grande réputation mais il n'y a pas d'écrits ni de témoignages sur son âge mûr ni sur ses élèves.
- Platon fait dire à Socrate, en lui attribuant des dons divinatoires : « pourvu qu'il atteigne l'âge convenable » (*Théétète* 142).
- Tannery remarque, à partir du résumé historique de Proclus, que le seul mathématicien important cité dans la liste des académiciens est Eudoxe. Si en 387, date de la création de l'Académie, Théétète avait été vivant, il est certain que Platon l'aurait appelé en raison de la grande estime et admiration qu'il avait pour son ami.
- Dans le *Sophiste* Platon fait dire par l'étranger d'Elée, à plusieurs reprises et avec une insistance particulière : « toi qui es si jeune ».
- Selon Proclus, Euclide a directement utilisé les travaux d'Eudoxe, alors qu'il a dû achever ceux de Théétète.
- Ce que Gardies appelle « la grande fracture des Eléments d'Euclide » montre que Théétète et Eudoxe n'ont pas harmonisé leurs conceptions. En 395 Eudoxe avait 13 ans, c'était trop tôt, alors que si Théétète était mort en 369 cela aurait été possible.

En conclusion, il est hautement probable que, comme Evariste Galois, le grand mathématicien Théétète soit mort à 20 ans.

3) L'anthyphérèse périodique

La démonstration de l'irrationalité de $\sqrt{N}$ (N entier naturel non carré) du sixième siècle avant notre ère par le pair et l'impair est remplacée au siècle suivant par une preuve géométrique qui repose sur la proposition 2 du livre X, laquelle consiste à effectuer l'anthyphérèse de cette grandeur, autrement dit, son développement en fraction continue. Plutôt que de l'effectuer sur les longueurs il est plus intéressant, car aisément généralisable, de l'effectuer sur les aires. Ainsi, partant d'un rectangle de largeur 1 et de longueur $\sqrt{N}$, on lui retire autant de fois que possible des carrés ayant pour côté la largeur du rectangle et l'on recommence sur le petit rectangle ainsi obtenu et ainsi de suite, (figures 1, 2, 3). La suite des parties entières des formats de ces rectangles successifs (rapport de la longueur sur la largeur) donne le développement en fraction continue de N . Le dessin correspondant est réalisable pour $N = 2, 3, 5, \ldots, 17$, mais plus pour $N = 19$ en raison de la longueur de la période.

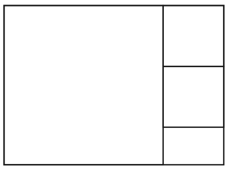


figure 1
$N = 2$

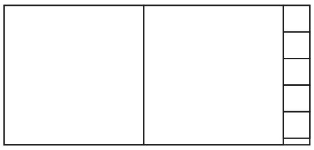


figure 2
$N = 5$

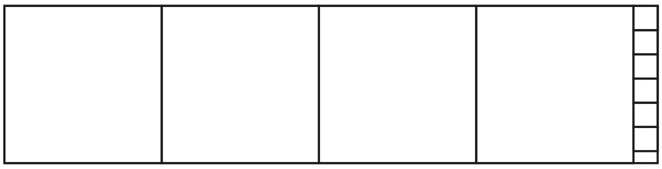


figure 3
$N = 17$

Le cas $N = 2$ n'est pas signalé dans le dialogue car ce cas ne devait plus poser de problème, ni par suite les deux cas $N = 8$ et $N = 18$ puisque $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ et $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$. Examinons le cas $N = 19$:

$$x_0 = \sqrt{19} \qquad\qquad a_0 = [x_0] = 4$$

$$x_1 = \frac{1}{x_0 - a_0} = \frac{1}{\sqrt{19} - 4} = \frac{\sqrt{19} + 4}{3} \text{ d'où } a_1 = [x_1] = 2$$

$$x_2 = \frac{1}{x_1 - a_1} = \frac{1}{\dfrac{\sqrt{19} + 4}{3} - 2} = \frac{3}{\sqrt{19} - 2} = \frac{3\left(\sqrt{19} + 2\right)}{15} = \frac{\sqrt{19} + 2}{5}$$

d'où $a_2 = 1$

$$x_3 = \frac{1}{x_2 - a_2} = \frac{1}{\dfrac{\sqrt{19} + 2}{5} - 1} = \frac{5}{\sqrt{19} - 3} = \frac{35\left(\sqrt{19} + 3\right)}{10} = \frac{\sqrt{19} + 3}{2}$$

d'où $a_3 = 3$.

$$x_4 = \frac{1}{x_3 - a_3} = \frac{1}{\dfrac{\sqrt{19} + 3}{2} - 3} = \frac{2}{\sqrt{19} - 3} = \frac{2\left(\sqrt{19} + 3\right)}{10} = \frac{\sqrt{19} + 3}{5}$$

d'où $a_4 = 1$.

$$x_5 = \frac{1}{x_4 - a_4} = \frac{1}{\dfrac{\sqrt{19}+3}{5} - 1} = \frac{5}{\sqrt{19}-2} = \frac{5\left(\sqrt{19}+2\right)}{15} = \frac{\sqrt{19}+2}{3}$$

d'où $a_5 = 2$.

$$x_6 = \frac{1}{x_5 - a_5} = \frac{1}{\dfrac{\sqrt{19}+2}{3} - 2} = \frac{3}{\sqrt{19}-4} = \frac{3\left(\sqrt{19}+4\right)}{3} = \sqrt{19}+4$$

d'où $a_6 = 8$.

$$x_7 = \frac{1}{x_6 - a_6} = \frac{1}{\sqrt{19}-4} = x_1 \text{ donc } \sqrt{19} =< 4,\ \overline{2,1,3,1,2,8} >$$

Ce calcul montre que le développement en fraction continue de $\sqrt{19}$ est périodique, donc illimité et que par suite ce nombre est irrationnel.

Dans le calcul ci-dessus on observe des simplifications qui font que le coefficient de $\sqrt{19}$ est toujours 1 et que par suite l'approximation de $\sqrt{19}$ par sa partie entière suffit pour poursuivre. Montrons que ceci est général et que si $x_0 = \sqrt{N}$(N entier naturel non carré) la suite définie par récurrence par $x_{k+1} = \dfrac{1}{x_k - a_k}$, où $a_k = [x_k]$, vérifie $x_k = \dfrac{\sqrt{N}+r_k}{s_k}$ avec r_k et s_k entiers naturels tels que l'on ait : $a_{k-1}s_{k-1} = r_k + r_{k-1}$ et $s_k s_{k-1} = N - r_k^2$ si $k > 0$.

D'une part, c'est vrai pour $k = 1$, avec $r_0 = 0, s_0 = 1$ et $r_1 = a_0$, $s_1 = N - a_0^2$.

D'autre part, ayant ces propriétés au rang k, s_k divise $N - r_k^2$ donc divise $N - r_{k+1}^2$ où l'on pose $r_{k+1} = a_k s_k - r_k$, donc il existe un entier rationnel s_{k+1} tel que $s_k s_{k+1} = N - r_{k+1}^2$ et alors

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= \frac{1}{\dfrac{\sqrt{N}+r_k}{s_k} - a_k} = \frac{s_k}{\sqrt{N} - (a_k s_k - r_k)} = \frac{s_k}{\sqrt{N} - r_{k+1}} \\ &= \frac{s_k\left(\sqrt{N}+r_{k+1}\right)}{N - r_{k+1}} = \frac{\sqrt{N}+r_{k+1}}{s_{ki+1}} \end{aligned}$$

De plus montrons par récurrence que $s_k > 0$ et $\sqrt{N} > r_k$. C'est vrai pour $k = 0$, et comme $x_k > a_k$, $\dfrac{\sqrt{N}+r_k}{s_k} > a_k$, or $s_k > 0$, donc $\sqrt{N} + r_k > a_k s_k$ soit $\sqrt{N} > r_{k+1}$.

Et puisque $s_k s_{k+1} = N - r_{k+1}^2 > 0$, on a bien $s_{k+1} > 0$.

Le fait que les r_k soient positifs échappe à la récurrence, prouvons-le par l'absurde :
Si $r_k \leqslant 0$ alors $s_{k-1} \leqslant a_{k-1}s_{k-1} = r_k + r_{k-1} \leqslant r_{k-1} < \sqrt{N}$.
Mais $1 > x_{k-1} - a_{k-1} = \dfrac{1}{x_k} = \dfrac{s_k}{\sqrt{N} + r_k} = \dfrac{\sqrt{N} - r_k}{s_{k-1}} \geqslant \dfrac{\sqrt{N}}{s_{k-1}} > 1$ contradiction. Donc $r_k > 0$.

Observons que $s_k = \dfrac{r_k + r_{k+1}}{a_k} \leqslant r_k + r_{k+1} < \sqrt{N} + \sqrt{N} = 2\sqrt{N}$, donc que les couples $(r_k,\ s_k)$ possibles sont au nombre d'au plus $\sqrt{N}.2\sqrt{N} = 2N$, ce qui prouve que la suite de ces couples est périodique à partir d'un certain rang.
Il existe deux entiers n et p tels que pour tout entier k supérieur ou égal à n, $r_k = r_{k+p}$ et $s_k = s_{k+p}$. La période p est donc inférieure à $2N$.

Les outils fournis par le livre X des *Eléments* pouvaient permettre aux géomètres grecs de réaliser des calculs équivalents à ceux qui précèdent et même de simplifier la démonstration ci-dessus. En effet, les démonstrations des propositions 112 et 113, que Bernard Vitrac signale être plus complexes que nécessaire, fournissent les coefficients des deux termes de l'*apotomé* (resp. *binomiale*) inverse de la *binomiale* (resp. *apotomé*) associée, ce qui permet d'en déduire les simplifications par s_k dans les rapports ci-dessus.

De plus les trois informations : $r_k < \sqrt{N}, s_k > 0$ et $r_k > 0$, qui ont fait l'objet de trois preuves distinctes ci-dessus, sont précisément les trois informations contenues dans les vocables *cinquième binomiale*, ou *cinquième apotomé* et sont donc données simultanément par les propositions 112 ou 113.En somme, le livre X se présente comme étant un outil sur mesure pour étudier l'anthyphérèse de $\sqrt{N}$, question qui, selon Platon, fut résolue par Théétète.

4) Une autre découverte de Théétète ?

Ce n'est peut-être pas tout, car les observations des développements en fractions continues de N pour N allant de 3 à 17 permettent de deviner d'autres propriétés remarquables :
D'une part la période commence juste après le premier terme. D'autre

part la période est constituée d'un palindrome suivi du double du premier terme.
Autrement dit on a toujours : $\sqrt{N} =< a_0, \overline{a_1, a_2, \ldots, a_2, a_1, 2a_0} >$

La clef de la preuve moderne de ce résultat, contenu dans la première publication d'Evariste Galois en 1828 (il avait 17 ans), repose sur la notion d'opposé du conjugué de x_k : $x_k = \dfrac{\sqrt{N} - r_k}{s_k}$ qui est en fait la correspondance entre *cinquième binomiale* et *cinquième apotomé*, laquelle conserve l'addition et le passage à l'inverse.

De $x_k = a_k + \dfrac{1}{x_{k+1}}$ on déduit $\dfrac{1}{x'_{k+1}} = a_k + x'_k$
et comme $s_{k-1} - r_k \leqslant a_{k-1}s_{k-1} - r_k = r_{k-1} < \sqrt{N}$ on a, pour $k > 0$, la majoration $s_{k-1} < \sqrt{N} + r_k$ qui entraîne que $x'_k = \dfrac{s_{k-1}}{\sqrt{N} + r_k}$ est strictement compris entre 0 et 1, donc que $\left[\dfrac{1}{x'_{k+1}}\right] = a_k$. Par suite, de $x_n = x_{n+p}$, qui entraîne $x'_n = x'_{n+p}$, on déduit $a_{n-1} = a_{n+p-1}$, d'où $x_{n-1} = x_{n+p-1}$, qui entraîne de la même façon $x_{n-2} = x_{n+p-2}$ et ainsi de suite jusqu'à $x_1 = x_{p+1}$.
Enfin, $x_1 = a_1 + \dfrac{1}{x_2},\ x_2 = a_2 + \dfrac{1}{x_3}, \ldots, x_p = a_p + \dfrac{1}{x_1}$,
donc $\sqrt{N} =< a_0,\ a_1,\ a_2, \ldots,\ a_p,\ x_1 >$.

Et $-x'_1 = a_1 - \dfrac{1}{x'_2},\ -x'_2 = a_2 - \dfrac{1}{x'_3}, \ldots, -x'_p = a_p - \dfrac{1}{x'_1}$, (par l'opposé des conjugués.)

D'où $\dfrac{1}{x'_2} = a_1 + \dfrac{1}{\frac{1}{x'_1}},\ \dfrac{1}{x'_3} = a_2 + \dfrac{1}{\frac{1}{x'_2}}, \ldots,\ \dfrac{1}{x'_1} = a_p + \dfrac{1}{\frac{1}{x'_p}}$ et de $\sqrt{N} = -a_0 + \dfrac{1}{x'_1}$ on obtient :
$\sqrt{N} =< a_p - a_0, a_{p-1}, a_{p-2}, \ldots, a_1, \dfrac{1}{x'_1} >$ ce qui entraîne, en tenant compte des inégalités $x_1 > 1$ et $\dfrac{1}{x'_1} > 1$, les égalités $a_p - a_0 = a_0$, $a_1 = a_{p-1},\ a_2 = a_{p-2}, \ldots,$ Cqfd.

En conclusion le livre X fournit là encore un instrument permettant de prouver un résultat qu'il était facile de conjecturer à partir d'un petit nombre d'observations numériques accessibles avec les moyens de l'époque. Ne serait-il pas extraordinaire que Théétète ait pu aborder et peut-être traiter une question qui le fut par Galois plus de 2000 ans plus tard ? Quoi qu'il en soit l'auteur du livre X était un mathématicien prodigieux si l'on en juge par la complexité et la profondeur de sa réalisation.

Le parallélisme entre ces deux mathématiciens est frappant : morts au même âge, ils se sont intéressés aux même questions algébriques, l'étude des racines de polynômes à coefficients entiers et, dans une certaine mesure, de façon semblable, à savoir sans calculer numériquement ces racines, mais en « regardant à côté », « en voyant autrement », comme disait Riemann. D'ailleurs, la conjugaison, qui est la correspondance entre la *quatrième binomiale* et la *quatrième apotomé* associée, n'est-elle pas un élément de groupes de Galois ?

5) Une lecture du dialogue de Platon

La réponse de Socrate « C'est le meilleur résultat que les hommes aient atteint, les enfants » fait suite à la dernière assertion de Théétète : « Et si on est dans les volumes on aura une autre distinction du même type » (*Théétète* 148). Cette affirmation de Platon nous laisse entendre que Théétète savait aussi démontrer l'irrationalité de $\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{3}, \ldots$, par anthyphérèse, donc qu'il savait quelque chose sur le développement en fraction continue de ces nombres. Puisque ces nombres ne sont pas des quadratiques, ce développement n'est pas périodique (théorème de Lagrange). Donc la seule possibilité qu'auraient eue les Grecs pour prouver que le développement est illimité était de montrer que les termes a_k ne sont pas bornés. Mais c'est là une question très difficile, qui malgré de nombreuses recherches n'est toujours pas résolue. On ne connaît même pas un seul nombre, en dehors des quadratiques, dont les termes du développement en fraction continue soient tous bornés.

Il faut en conclure que le texte de Platon n'est pas fiable sur le plan mathématique et que son objectif n'était pas de nous donner une leçon de mathématiques ni de nous rendre compte avec précision des découvertes de Théétète mais simplement de nous informer afin de justifier la conclusion de Socrate « Théodore n'encourra pas de poursuites pour faux témoignage », donc que Théétète est bien le brillant et exceptionnel esprit décrit par Théodore. Platon a besoin de nous annoncer que ce sont les deux meilleurs esprits de son époque qui vont dialoguer et chercher une réponse à la question : « qu'est-ce que la connaissance ? » parce que le dialogue se termine sur une impasse, les trois réponses successives sont tour à tour réfutées et donc si Socrate et Théétète réunis ne peuvent répondre c'est qu'il n'y a pas de réponse à cette question. Conclusion qui sera aussi celle de Kant dans la *Critique de la Raison Pure* : nous pouvons faire des mathématiques ou de la physique mais nous ne pourrons jamais faire de la métaphysique, c'est à dire accéder au savoir transcendantal. Ce à quoi Bergson répondra que Kant a oublié le rôle de l'intuition...

6) L'étude des figures régulières

L'étude de l'anthyphérèse de $\sqrt{N}$ ne suffit pas pour motiver tout le labeur entrepris dans le livre X car nous n'avons pas encore utilisé sa clef de voûte qui est la proposition 111 : une *apotomé* n'est pas une *binomiale*, d'où il résulte la distinction des irrationnels d'Euclide en 13 catégories et même en 25 si l'on compte les 4 hexades. Ceci pouvait servir à étudier la question de l'intersection de 3 diagonales d'un polygone régulier, question à la fois simple et naturelle, que l'auteur du livre XIII aborde par exemple dans le pentagone, et qui pouvait aussi être motivée par la chimie de Platon : dans *Timée* 53 Platon découpe les faces des polyèdres réguliers en triangles acutangles.

L'exemple du polygone régulier de 12 côtés montre (figure 4) que l'on peut avoir 4 diagonales concourantes, alors que dans celui de 15 côtés (étudié au livre IV des *Eléments*) on trouve 3 diagonales qui semblent concourantes (figure 5) et qui en réalité ne le sont pas. L'erreur relative étant en 10^{-3}, n'était pas accessible aux moyens de calculs approchés de cette époque, alors que l'utilisation de la proposition 111 permettait de prouver que les deux segments découpés sur une diagonale par les deux autres et pris à partir d'une même extrémité de cette diagonale ne sont pas égaux.

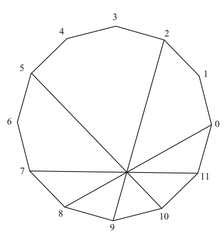


figure 4

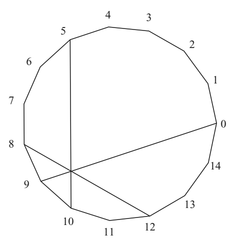


figure 5

7) Bibliographie

ARTMANN Benno. *Euclid, the creation of mathematics*, Springer 2001.
BURNYEAT Myles. *Introduction au Théétète de Platon*, Puf 1998.
CAVEING Maurice. *L'irrationalité dans les mathématiques grecques*, Septentrion 1998.
DHOMBRES Jean. *Nombre, mesure et continu*, Cedic-Nathan 1978.
DUVILLIE Bernard. *Sur les traces de l'homo mathématicus*, Ellipse 1999.
GARDIES Jean-Louis. *L'organisation des mathématiques grecques*, Vrin 1997.
KAHANE Jean-Pierre. *A propos de Théétète*, Bul. UPS 202 avril 2003.
NARCY Michel. *Le Théétète*, Garnier-Flamarion 1995.
ROUX Dominique. *Encore Théétète*, Bul. UPS 203 de juillet 2003.
SZABO Arpad. *L'aube des mathématiques grecques*, Vrin 2000.
TANNERY Paul. *La géométrie grecque*, Gabay 1887.
VITRAC Bernard. *Euclide, les Eléments*, volume 3, Puf 1998.

Fondée en 1998 à l'initiative de la SMF, avec le soutien de l'APMEP, de la SMAI, de Femmes et Mathématiques, de l'Inspection Générale de Mathématiques, de l'ADIREM... *l'association pour l'animation mathématique* Animath réunit les principales composantes de la vie mathématique française dans le but de promouvoir dans les établissements scolaires, à travers des activités périscolaires, clubs et compétitions, le plaisir de faire des mathématiques.
Animath a recensé des centaines de clubs de mathématiques qui fonctionnent dans les lycées et les collèges, et s'efforce de créer des liens notamment par l'intermédiaire du site web : **www.animath.fr**. Des bibliographies à l'usage des lycées et des collèges doivent permettre aux CDI d'enrichir leur fonds d'ouvrages mathématiques. Animath a organisé du 22 au 27 août 2004 à St Flour (Cantal) une troisième université d'été sur " la place des mathématiques vivantes dans l'éducation secondaire " dont rend compte la présente brochure. Face à la désaffection des étudiants français pour les mathématiques, notre souci est de donner une meilleure image de cette science : avec le soutien du CNRS, Animath invite lycéens et collégiens à des **promenades** mathématiques, pour découvrir avec des mathématiciens professionnels un autre aspect de la culture mathématique.
Les compétitions, par ailleurs, c'est notamment les **Olympiades** Internationales de Mathématiques auxquelles la France participe régulièrement depuis 1969. Repérer les six meilleurs lycéens et les préparer à cette épreuve redoutable, mais où la sagacité prévaut sur les connaissances, nécessite une structure appropriée : dans le cadre d'un partenariat entre l'Ecole Normale Supérieure et Thomson, l'Olympiade Française de Mathématiques prépare plusieurs dizaines d'élèves de première et terminale aux épreuves d'Olympiade. Le tutorat Animath s'adresse aux plus jeunes (seconde), et chaque année, un ou deux stages olympiques réunissent une vingtaine de ces lycéens doués et motivés. Animath s'est beaucoup investie pour que soient créées (en 2001) les Olympiades Académiques de Mathématiques : avec le Ministère (IGEN, DESCO), nous organisons la remise des prix aux lauréats nationaux, dont la plupart s'intègrent à l'Olympiade Française de Mathématiques.
Animath vit essentiellement de subventions ponctuelles, mais également des cotisations de ses membres : si vous voulez manifester votre intérêt pour nos initiatives, nous aider à les faire aboutir, adhérez... et faites profiter vos élèves motivés de nos activités olympiques en leur suggérant de nous contacter : **animath@animath.fr**, ou par l'intermédiaire du site web : **http ://www.animath.fr**.

Bulletin d'adhésion à Animath page 213.

CONFÉRENCES

Mathématiques vivantes et éducation secondaire

LES MATHÉMATIQUES : DÉMONSTRATION, DESCRIPTION, EXPÉRIENCE

Martin Andler
Laboratoire de mathématiques de Versaille (UMR CNRS 8100)
Centre d'histoire culturelle des sociétés contemporaines
et Animath

1. Introduction

Le présent texte tire son origine d'une constatation : dans l'enseignement que nous donnons à nos étudiants, et, *a fortiori* à nos élèves des lycées et collèges, les mathématiques du vingtième siècle ne sont jamais ne serait-ce que mentionnées. Un candidat moyen au CAPES n'a pas non plus entendu parler dans ses cours d'un mathématicien contemporain important (en dehors de ses propres professeurs, qui sont rarement des mathématiciens importants). Mais comment pourrions-nous faire autrement ? Parler de théorie des faisceaux, de variétés de dimension 3, de contrôle optimal - ou de Thom, von Neumann, Kolmogorov paraît impossible alors que nos étudiants ont bien du mal avec les notions les plus élémentaires.

Le fait est que dans les autres branches de la science : physique, biologie, informatique, etc. il en va différemment. Le fait est aussi que les mathématiques ne sont pas enseignées partout de la même manière. S'il y a des styles différents en mathématiques, il y a bien plus encore des styles différents dans l'enseignement des mathématiques - et par style on parle ici de contenus : plus ou moins de calculs, plus ou moins de notions abstraites.

Enfin se pose une autre question, celle de notre approche didactique, qui privilégie la déduction (le triptyque définition/théorème/démonstration).

Est-ce une nécessité, liée àla nature elle-même des mathématiques ? Nous allons tenter de montrer qu'au contraire il y a plusieurs attitudes en mathématiques, et que d'autres approches didactiques en sont possibles, toutes compatibles avec leur essence.
Notre objectif est donc de réfléchir sur l'enseignement des mathématiques dans le Secondaire, mais aussi dans le Supérieur, dans la mesure au moins où c'est là que sont formés les professeurs des collèges et lycées. Or cette réflexion, de nature universelle est rendue plus compliquée en France parce que nous assignons aux mathématiques un rôle très important, symboliquement dans les hiérarchies intellectuelles auxquelles nous adhérons et socialement par la place qu'elles jouent dans le système scolaire. On ne cherchera pas ici à déterminer ce qui est la cause première : les mathématiques doivent-elles leur place éminente à leur rôle de sélection des élites, ou jouent-elles ce rôle en raison précisément de la perception de leur importance ? On ne cherchera pas non plus à caractériser cette éminence des mathématiques en bien ou en mal, à lui assigner une valeur positive ou négative : mathématiques-dieu ou mathématiques-diable, peu importe ici.

Mais il résulte de la place des mathématiques une tradition très forte quant à leur enseignement. En témoigne l'attrait de la profession de professeur de mathématiques et la qualité du corps enseignant, ce qui est un atout considérable. Il en résulte aussi une contre-partie, qui est l'isolement par rapport aux autres disciplines (la tentation de penser les mathématiques au singulier avec un M majuscule, *la Mathématique*, alors que les autres disciplines devraient se contenter de leur statut inférieur), la difficulté de remettre en cause les manières de faire sans avoir l'impression de commettre un crime de lèse-majesté.

2. Histoire récente de l'enseignement des mathématiques

Pour situer notre démarche, il n'est pas inutile de commencer par une brève histoire récente de l'enseignement des mathématiques en France[1]. C'est dans les années 1950 qu'à la Sorbonne l'enseignement traditionnel des mathématiques, symbolisé par les manuels classiques de Goursat puis Valiron a été remplacé par un enseignement modernisé, dont les manuels de référence dans les années 1960 furent ceux de Choquet en topologie,

[1] On pourra se référer, pour une étude approfondie, à l'ouvrage *Les Sciences au lycée*, sous la direction de Bruno Belhoste, Hélène Gispert et Nicole Hulin, Vuibert-INRP 1996.

Godement en algèbre, Cartan en calcul différentiel, ou Dixmier pour le premier cycle. Simultanément le traité de référence était devenu les Eléments de mathématiques de Bourbaki.

Par le canal du jury d'agrégation, du renouvellement naturel des générations et sous l'influence de quelques professeurs de taupe éclairés, comme E. Riche, le point de vue moderne a trouvé place assez rapidement dans les classes préparatoires, comme en témoigne le succès de manuels comme celui de Ramis ou de Lelong-Ferrand et Arnaudiès dans les annt́ées 1970. Pour le secondaire, c'est la commission Lichnérowicz qui a conduit la réforme des mathématiques « modernes » à la fin des années 1960.

Les professeurs du secondaire d'aujourd'hui sont donc, dans leur grande majorité, les produits de cette conception de l'enseignement des mathématiques. Comme l'a écrit Antoine Prost[2], « la réforme des mathématiques modernes était une réponse venant "d'en haut", des milieux scientifiques, et elle était motivée par le sentiment des mathématiciens de l'époque d'un écart trop important entre ce qui était enseigné au lycée et ce qu'il était nécessaire d'enseigner dans l'enseignement supérieur. »
On sait bien maintenant que certains aspects de la réforme des mathématiques modernes étaient mal pensés sur le plan mathématique. Il y avait à l'œuvre une illusion : le point de vue des structures pouvait être donnt́é *a priori*, les exemples venant dans un deuxième temps pour illustrer les structures abstraites déjà introduites, alors qu'il est probablement plus efficace de les présenter dans un second temps, comme synthèses de propriétés déjà rencontrées sur des exemples. Nous y reviendrons. Le succès de la réforme s'est aussi heurté à un obstacle de nature sociopolitique : celui de la formation des professeurs chargés d'enseigner les mathématiques. Dans les années 1970, plus de 50% des professeurs de mathématiques n'avaient pas de formation universitaire.
Mais les programmes issus de la commission Lichnerowicz avaient une autre caractéristique : ils étaient ambitieux. Les élèves doués pour les mathématiques qui avaient en face d'eux des bons professeurs pouvaient y donner toute leur mesure.
Que s'est-il passé depuis la fin des années 1970 ? D'une part les points de vue se sont « démodernisés » : ainsi la théorie des groupes, qui avait pénétré le secondaire par la Terminale et était parvenue jusqu'en classe de

[2] « Comment faire l'histoire des réformes de l'enseignement », Les sciences au lycée, op. cit. 3.

sixième a progressivement disparu. Toute l'algèbre abstraite, la théorie des ensembles ont disparu. Mais le point de vue moderne ne se résumait pas qu'aux structures. L'ambition de Bourbaki était aussi et surtout de présenter les mathématiques de maniére complètement rigoureuse, à partir d'une base axiomatique cohérente. Dans le contexte de l'analyse, cela impliquait, dans le contexte universitaire, de présenter l'analyse à la suite de la topologie, et la topologie à la suite de la théorie des ensembles. Le nœud gordien de cette hiérarchie étant évidemment le corps des réels, dont il fallait mettre au grand jour tous les mystéres. Faut-il construire $\mathbb{R}$ avant de faire de l'analyse ? Faut-il comprendre à fond la propriété de la borne supérieure ? Faut-il ensuite donner la « bonne » définition des limites (définition par ε, δ)[3] ? Ces questions étaient et sont toujours constamment débattues dans les commissions pédagogiques de premier cycle universitaire. Mais dans l'enseignement secondaire les mêmes questions se posaient, et les programmes des années 1970 étaient du côté de la rigueur mathématique. En analyse, la décrue des programmes s'est surtout traduite par une perte de rigueur.
Autre constatation : les mathématiques enseignées dans le secondaire et au début du supérieur se sont éloignées de l'abstraction. Des énoncés commençant par : « Soit f une fonction... Soit E un ensemble... Soit G un groupe... Soit P un plan » disparaissent au profit de : « Soit f la fonction définie par $f(x) = \dots$, E l'ensemble des filles de la classe de TS3... G l'ensemble des transformations de $\mathbb{C}$ du type $az+b$... P le plan passant par M et de vecteurs directeurs... »
Je ne poursuis pas cette discussion : mon propos n'est pas de faire ici une étude complète de l'évolution des programmes de mathématiques au XX^e siècle ou de l'organisation de l'enseignement secondaire long, mais de faire comprendre deux choses :

- le contexte nostalgique des débats actuels sur l'enseignement des mathématiques : la majorité des acteurs actuels ont été élèves dans les années 1960, 1970 ou début des années 1980, et/ou enseignants durant la même période ;
- à l'intérieur de ces débats, la nécessaire distinction entre ce qui relève du *niveau* des programmes et la *manière* dont les mathématiques sont enseignées.

La nostalgie n'est pas le meilleur point de vue pour réfléchir à une

[3]Dans une discussion récente sur les programmes de Terminale, il était dit que la définition de la limite d'une suite donnée dans le programme officiel n'était pas « tout à fait la bonne », faute d'y donner de façon explicite la chanson $\forall\varepsilon, \exists N$.

question aussi délicate que l'enseignement. Il y a même là quelque chose de dangereux. En effet, nous avons tous été élèves et étudiants, dans le bon vieux temps où nous étions plus jeunes qu'aujourd'hui. Inévitablement, ce passé nous apparaît aujourd'hui paré d'atours qui ont peu à voir avec la réalité historique[4].
Avant d'en venir aux questions de pédagogie évoquées dans le deuxième point, il est absolument nécessaire de mettre en perspective ce que sont les mathématiques elles-mêmes, et en particulier aborder la question de la rigueur et de l'abstraction.

3. Que sont les mathématiques ?

3.1. La rigueur et la démonstration en mathématiques

Le consensus moderne sur ce qui constitue une démonstration mathématique rigoureuse a certes évolué au cours des siècles, depuis Euclide jusqu'à Bourbaki, en passant par Cauchy et les fondateurs de la théorie des ensembles au début du XX^{e} siècle[5], mais il est maintenant stabilisé, et ce point actuel d'équilibre doit être utilisé comme point de référence[6]. Une fois ces précautions prises, on peut discuter de la manière dont se pose la question de la rigueur en mathématiques aujourd'hui. Et on est tout de suite amené à une autre question préalable : que veut-on dire par « en mathématiques ». De quelles mathématiques parle-t-on ? De l'enseignement des mathématiques ? De la recherche en mathématiques ? Des mathématiques telles qu'elles sont faites par des personnes qui se considèrent (et qu'on considère) comme des mathématiciens ? Et alors, par des mathématiciens français, russes, américains ? Ou doit-on aussi parler des mathématiques telles que les pratiquent des physiciens théoriciens[7], des physiciens expérimentateurs ou des ingénieurs ?

[4]L'exact envers de cette nostalgie que nous éprouvons, nous qui étions bien évidemment bons élèves, au moins en mathématiques, et qui aimions cette discipline, est la haine et le rejet des mathématiques qui se manifestent bien souvent, y compris dans les discours de certains ministres.

[5]On pourra consulter sur cette question l'exposé de JC Pont au séminaire d'épistémologie des mathématiques de M. Serfati, 30 mars 2005 « Les avatars de la rigueur dans la dernière décennie du XIX^{e} siècle : axiomatique et formalisme ».

[6]Afin de dissiper tout malentendu, il faut préciser d'emblée que, pour moi comme pour la quasi-totalité des mathématiciens, la démonstration caractérise *in fine* les mathématiques comme l'expérience caractérise les sciences de la nature.

[7]Ed Witten est le physicien théoricien le plus connu aujourd'hui. Il a obtenu en 1990 la médaille Fields pour un certain nombre de ses travaux, alors même qu'il n'avait jamais véritablement démontré un théoréme.

On a commencé à faire de l'analyse au sens moderne du terme avec Newton et Leibniz au XVII^{e} siècle, puis dès le XVIII^{e} siècle on atteint, avec Euler, les Bernoulli, puis Lagrange, Laplace, Gauss des théorèmes qui sont encore pertinents aujourd'hui. Or ce n'est qu'avec Cauchy, en plein XIX^{e} siècle , qu'on a eu une définition rigoureuse des limites et de la continuité, et tout à fait à la fin de ce même siècle qu'on a su vraiment définir ce qu'étaient les nombres réels. En raison de leur non-conformité aux standards actuels de rigueur, les textes des XVIII^{e} et XIX^{e} ne seraient pas des textes mathématiques ? De fait, on n'a guère de mal à reprendre ces textes pour les réécrire de manière acceptable aujourd'hui, car les arguments essentiels des démonstrations sont déjà présents.
C'est que dans une certaine mesure, les évolutions dans l'exigence de rigueur ne sont pas l'expression d'une subite exigence d'intégrité morale et intellectuelle, mais une réponse pragmatique à des limites rencontrées dans l'avancée des mathématiques elles-mêmes, ou dans leur enseignement. On voit une combinaison des deux motivations chez Cauchy, qui est confronté d'un côté au défi posé par les séries de Fourier et de l'autre à la nécessité de publier ses Leçons à l'Ecole polytechnique[8].
Même dans le cadre relativement étroit de la recherche en mathématiques à la fin du XX^{e} siècle ou au début du XXI^{e} siècle, la réponse n'est pas si claire que l'on pourrait croire. Une controverse considérable a ainsi éclaté aux Etats-Unis en 1993 à la suite de la publication d'un article d'Arthur Jaffe et Frank Quinn « *Theoretical Mathematics : Towards a cultural synthesis of mathematics and theoretical physics* »[9]. Les auteurs, très éminents spécialistes de physique mathématique cherchaient à légitimer un niveau intermédiaire de rigueur, entre mathématiques et physique théorique. Dans un numéro ultérieur de la même revue paraissaient des réponses d'une impressionnante brochette de mathématiciens de premier plan, dont Thurston et Atiyah[10].
Ce qui est en question dans cette controverse est le statut mathématique de travaux qui ne satisfont pas complètement aux critères de ce que doit être une démonstration, Atiyah et Thurston plaidant pour une

[8] J.-C. Pont, op. cit.

[9] Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) 29 (1993) no. 3.

[10] 10Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) 30 (1994) no. 2, contenant les articles suivants : Michael Atiyah, Responses to "Theoretical Mathematics : Toward a cultural synthesis of mathematics and theoretical physics", by A. Jaffe and F. Quinn, Arthur Jaffe and Frank Quinn, Response to comments on "Theoretical Mathematics", Richard S. Palais, Editor's Column, William P. Thurston, On proof and progress in mathematics. L'article de Jaffe-Quinn et les réponses sont disponibles sur le site web de l'American Mathematical Society (http ://www.ams.org/bull). La lecture en est très instructive.

complète reconnaissance de leur statut mathématique. Ce qu'ils ont en commun est la prise en compte de la dynamique de la découverte mathématique. Atiyah plaide pour la reconnaissance de ceux qui ouvrent les voies nouvelles, même s'ils n'ont pas les moyens de mener leur démarche jusqu'au bout. Et il pense d'ailleurs qu'en général la communauté mathématique attribue en fin de compte les mérites respectifs des uns et des autres de manière équitable : « Dans le cas de la théorie de Hodge des formes harmoniques, la démonstration donnée par Hodge lui même était essentiellement défectueuse parce que sa compréhension de l'analyse dont il avait besoin était inadéquate. Des démonstrations correctes ont été données ultérieurement par de meilleurs analystes, mais cela n'a pas nui à la gloire de Hodge. Le monde mathématique estimait que l'intuition conceptuelle de Hodge compensait largement son insuffisance technique. » Thurston s'inscrit quant à lui dans la démarche quotidienne du mathématicien et de la transmission des idées. Constatant qu'il travaille dans un domaine (la géométrie en petite dimension) où « il est souvent difficile d'avoir un document qui reflète correctement la manière dont les gens pensent véritablement », il constate que d'autres modes d'expression que les démonstrations écrites dans les articles sont plus efficaces pour la transmission des idées mathématiques, en ajoutant toutefois : « Je ne prône aucun affaiblissement des critères de notre communauté sur ce qui constitue une démonstration (. . .) Je ne critique pas non plus les gens qui consacrent de l'énergie à rendre les arguments mathématiques plus explicites et plus formels. »

Citons pour terminer le mathématicien russe Vladimir Arnold : « *Les erreurs sont aussi importantes et instructives que les démonstrations. Les démonstrations sont aux mathématiques ce que l'orthographe (ou même la calligraphie) est à la poésie. Les travaux mathématiques consistent en des démonstrations autant qu'une poésie est formée de caractères d'imprimerie.* »[11]

La situation dans les mathématiques du front, celles qui sont en train de s'élaborer est donc confuse. C'est que les mathématiques ne sortent pas toutes faites de la cuisse de Jupiter, mais au contraire leur élaboration est un processus complexe et long. La question pour nous est de savoir quelles conséquences en tirer du point de vue de l'enseignement. Mais nous n'y viendrons qu'après avoir discuté de la question de l'abstraction, puis des pratiques mathématiques des non-mathématiciens.

[11] V. Arnold, "Polymathematics : is mathematics a single science or a set of arts ?" 1999.

3.2. Le problème de l'abstraction en mathématiques

Il faut distinguer trois niveaux différents d'abstraction. Le premier consiste à produire des énoncés généraux, c'est-à-dire valide pour un nombre réel, une fonction, un vecteur de $\mathbb{R}^5$, un triangle rectangle... quelconques.
L'étape suivante reste à un niveau tout à fait élémentaire, dont des exemples représentatifs sont :

- la notion de variable, c'est-à-dire la possibilité de désigner une quantité numérique par une lettre puis de la manipuler algébriquement
- la notion de fonction et de graphe, et donc la mise en place d'un dictionnaire entre une formulation algébrique (une fonction, c'est une expression algébrique de fonctions élémentaires algébriques ou transcendantes) et une formulation géométrique (une fonction, c'est un graphe)

. Les mathématiciens ont tendance à perdre de vue la dfficulté et l'importance de ces deux premiers niveaux, dont le moins qu'on puisse dire est qu'ils ne sont pas allés de soi historiquement. Parvenir à faire passer cette abstraction-là n'est pas une petite réussite. Beaucoup de mathématiques, et non des moindres, n'ont besoin que de ces niveaux. Il en est notamment de tout l'aspect calculatoire, trop dévalorisé dans l'idéologie moderne.
Ce n'est qu'à l'étape encore suivante qu'on parvient à l'abstraction moderne des structures, qui est une abstraction d'ordre supérieur. Là, l'enjeu des mathématiques est de produire des énoncés valables pour tout ensemble, pour tout groupe, pour tout espace topologique compact, pour tout espace vectoriel... Cela commence naturellement par la formalisation de notion d'ensemble par la théorie des ensembles. Mais dans un contexte abstrait, on est amené à considérer, pour un objet donné, l'axiomatique la plus « pertinente ». Ainsi, la notion d'espace affine est seconde, celle d'espace vectoriel la précédant dans l'ordre de l'exposé.
L'introduction des mathématiques modernes dans l'enseignement avait comme élément central l'introduction manière précoce des structures : théorie des ensembles à l'école primaire, algèbre abstraite élémentaire dès le collège, éléments d'algèbre linéaire et de topologie au lycée.
L'ambition affichée était double :

- donner de manière précoce aux élèves le « bon point de vue », celui que Bourbaki avait rendu populaire en mathématiques ; muni du bon point de vue, on peut donner les bonnes démonstrations, c'est-à-dire celles qui font intervenir l'essentiel aux dépens du contingent. Deux exemples parmi d'autres : l'unicité de l'inverse d'un rationnel est une propriété de groupe, pas liée à la nature de ses éléments ; la propriété qu'une fonction continue sur un segment de $\mathbb{R}$ tient uniquement à ce que ce segment est compact.

- Avec le bon point de vue, on allait, pensaient un certain nombre des piliers de la réforme, comme André Revuz, se débarrasser des scories des inégalités sociales entre élèves : puisque le langage des mathématiques modernes était celui de la réalité mathématique elle-même, il n'y aurait plus l'écran du langage courant[12].

L'expérience a largement montré les limites de la démarche, qui s'est traduite, globalement, par un échec. On ne cherche plus à enseigner les mathématiques aujourd'hui comme on a tenté de le faire dans les années 1970. Mais il n'est pas certain qu'on ait vraiment tiré toutes les conséquences de cet échec dont les causes sont bien souvent recherchées du côté d'éléments contingents : les professeurs n'étaient pas suffisamment bien formés, on a renoncé trop tôt, les horaires de mathématiques ont baissé, etc.

Sur le plan pédagogique, il est probable que le point de vue structuraliste soit plus efficace lorsqu'il produit de l'ordre dans un champ de connaissances constituées pour l'élève. Lorsqu'on connaît déjà des exemples de groupes : $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}*, \times)$, le groupe des isométries du triangle équilatéral, on peut apprécier les analogies et donc percevoir l'intérêt du concept de groupe. Lorsqu'on introduit *a priori* la notion d'élément neutre, on risque de voir les élèves confondre 0 et 1[13], car ce sont tous les deux des éléments neutres. Pour un mathématicien professionnel, il en va différemment, car il sait, d'expérience que l'apprentissage d'un système d'axiomes dont il n'est pas familier passe par un aller-retour entre axiomatique et exemples .

3.3. Les mathématiques comme science d'observation ou comme science expérimentale

On a montré dans les paragraphes précédents les limites d'une conception des mathématiques centrée sur la rigueur et l'abstraction. Il nous faut maintenant introduire un nouvel élément dans le paysage : l'expérience et l'observation. Il ne s'agit pas pour nous d'aborder la question de la pertinence des mathématiques pour les sciences de la nature, de

[12] Voir A. Revuz, *Mathématiques modernes, mathématiques vivantes*, 1963.

[13] Expérience vécue dans les années 1970 lors de petits cours de mathématiques donnés à un élève de 4$^{\text{ème}}$.

l'adéquation des modèles mathématiques aux réalités physiques - nous y reviendrons, en passant, plus tard dans cet exposé. Se demander pourquoi les mathématiques sont elles « redoutablement efficaces », suivant la belle formule du physicien Eugen Wigner n'est pas notre propos ici. Nous posons ici la question de l'observation et de l'expérience comme une question interne aux mathématiques : quel rôle jouent-elles pour les mathématiciens ? Nous nous situons donc à un moment où les objets qu'étudient les mathématiques ont une existence préalable, sans nous poser la question de savoir comment ils en sont arrivés là.
La notion mathématique est là, nous souhaitons démontrer des théorèmes à son propos. Nous apprenons d'abord à nous en servir. Comment procédons-nous ? En l'observant, en le faisant fonctionner, en prenant des exemples ou des cas particuliers. Pour pouvoir formuler, puis démontrer des théorèmes mathématiques sur cette notion en question, nous devons d'abord la traiter comme un objet naturel et travailler comme un spécialiste des sciences de la nature. C'est à partir de la connaissance empirique que nous aurons que nous pourrons formuler des conjectures puis éventuellement démontrer des théorèmes. Bref nous devons établir avec cette notion des rapports d'intimité.

Donnons des exemples.

Exemple1. On montre que le groupe $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_3$ des permutations de l'ensemble A, B, C est isomorphe au groupe $\mathfrak{I}$ des isométries d'un triangle équilatéral ABC.
De façon abrégée, la démonstration savante est à peu près : l'application qui à $\varphi \in \mathfrak{I}$ associe $\varphi_{A,B,C}$ est bijective. CQFD. D'une part, cette démonstration ne nous apprend rien de plus sur les objets en question ; d'autre part, et c'est plus grave, on ne peut la trouver que si on la connaît déjà.
Le chercheur naïf (mais nous le sommes tous, pour commencer) fera d'un côté une description des 6 éléments du groupe $\mathfrak{S}$: l'identité, les trois transpositions, les deux cycles d'ordre 3 ; de l'autre, les 6 éléments de $\mathfrak{I}$ sont l'identité, les trois symétries et les deux rotations. Il constatera qu'on peut prendre comme système de générateurs de $\mathfrak{S}$ les deux transpositions $\tau_C = (AB), \tau_A = (BC) \in \mathfrak{S}$. On obtient alors une classification des éléments de $\mathfrak{S}$ par la longueur : l'identité est de longueur 0, τ_C, τ_A de longueur 1, les deux cycles sont les éléments de longueur 2 : $\tau_A \circ \tau_C, \tau_C \circ \tau_A$, et enfin la transposition manquante $\tau_B = (AC) = \tau_A \circ \tau_C \circ \tau_A = \tau_C \circ \tau_A \circ \tau_C$.

Du côté de $\mathfrak{I}$ on utilise la décomposition d'une rotation comme produit de 2 symétries pour traiter les deux rotations, et on constate, si on ne le sait pas à l'avance, que la troisième symétrie s'obtient comme conjuguée de l'une des deux premières par l'autre. Quelque part dans ce processus on a compris, et démontré que $\mathfrak{S}$ et $\mathfrak{I}$ étaient isomorphes - mais on a fait naturellement bien plus : on a compris ce que voulait dire le mot isomorphisme, et on a acquis une véritable connaissance des deux groupes par une méthode qu'on pourra étendre à $\mathfrak{S}_4$.

Exemple 2. On montre que toute suite croissante majorée est convergente. La démonstration savante est, en substance : En notant u_n la suite en question, soit $\ell = \sup_n u_n$. D'après la caractérisation de la borne supérieure, $\forall\,\varepsilon, \exists N > 0, u_N \geqslant \ell - \varepsilon$ et donc $\forall\,\varepsilon, \exists N > 0, \forall\,n > N$, $u_n \in [\ell - \varepsilon, \ell]$. CQFD.
Là encore, la démonstration est parfaite et lisse, mais n'apprend rien : c'est le résultat épuré d'un travail dont rien ne demeure. La démarche du mathématicien sera de constater que s'il y a une limite, cette limite doit être un majorant, puis que parmi les majorants, ça doit être le plus petit. A partir de ce moment, et en fonction du degré de sophistication des auditeurs, on conclut, où alors on entre dans la discussion sur l'existence du plus petit majorant. Il peut être intéressant à ce stade de distinguer les cas où la suite est stationnaire des cas où elle ne l'est pas. En passant, cette discussion pose la question de l'axiome de la borne supérieure sur une base intéressante.

Que conclure de ces exemples ? Ici, le mathématicien est comme le géologue, ou le botaniste. Pour commencer, il observe et décrit. Le rôle de la phase d'observation dans l'investigation est essentiel. Essentiel par la connaissance mathématique que l'observation donne - essentiel aussi parce que la démonstration ne peut intervenir que dans un deuxième temps, après la connaissance.

3.4. Le livre de la Nature

Nous ne pouvons pas terminer cette section sans mentionner le rapport entre les mathématiques et les sciences de la nature. Acceptons le fait que les théories mathématiques ont des liens avec les sciences empiriques. Les figures de la géométrie correspondent à certains objets physiques ; les nombres permettent de mesurer des longueurs, des aires, des poids, des temps ; les lois de la physique s'écrivent avec des formules mathématiques

etc. Etudierait-on les mathématiques avec tant d'énergie si le livre de la Nature n'était pas « écrit en langage mathématique » [14] ?
Il n'est alors pas concevable de ne pas incorporer cet aspect-là dans notre enseignement, et à tous les niveaux. En 1904, Emile Borel, dans une conférence prononcée au Musée pédagogique[15] défendait le calcul numérique, la géométrie pratique, et recommandait que l'on demande, par exemple, aux élèves le nombre de coups de pédale qu'il faudrait donner pour parcourir 1km en bicyclette. Il poursuivait en suggérant la création de laboratoires de mathématiques, dans lesquels les élèves pourraient travailler avec l'aide d'un menuisier.[16]
Aujourd'hui, l'aspect pratique s'est légèrement déplacé. Si la bicyclette a encore aujourd'hui sa place dans notre vie, il est raisonnable que l'enseignement pratique incorpore une réflexion sur les pixels et les mémoires d'ordinateurs ou de consoles de jeux (excellente occasion de manipuler des grands nombres).

3.5. Représentation et calcul

Il faut tenter de conclure cette analyse bien trop superficielle. Et puisqu'il s'agit non de fournir une analyse complète mais bien plutôt d'inciter à la réflexion, c'est en termes de slogans que nous allons le faire. Trop souvent, on identifie mathématiques au triplet abstraction/rigueur/démonstration ; essayons-en un autre : les mathématiques, c'est le triplet représentation/raisonnement/calcul, en utilisant le mot représentation dans le sens où les mathématiques sont un système très général de transposition de phénomènes complexes en des entités sur lesquelles on peut raisonner et calculer.

---

[14] Galilée.

[15] *Les mathématiques dans l'enseignement secondaire*, fonds Gallica, Bibliothèque nationale de France. Je remercie Renaud d'Enfert d'avoir attiré mon attention sur cet article.

[16] Les problèmes que nous discutons dans cet article ne sont pas neufs : Dans ce même article, Borel s'inquiète un peu plus loin des débats entre mathématiciens et physiciens sur l'enseignement de la Mécanique, enseignée alors déjà par les uns et les autres en classe de Seconde et de Première : « Je suis bien obligé d'enseigner la Mécanique vraie à mes élèves, dit le physicien. Pour mon collègue de mathématiques, elle n'est qu'un prétexte pour développer des formules algébriques et à enseigner la théorie algébrique des vecteurs - Il faut bien que je revienne sur l'enseignement de Mécanique donné par mon collègue de Physique, répond le mathématicien. Il n'a aucun souci de la rigueur des raisonnements et se borne, d'ailleurs, aux quelques notions qui lui sont indispensables. »

4. La pratique des mathématiques

4.1. Les mathématiques des non-mathématiciens

Les mathématiques étant centrales dans les sciences de la nature, et aujourd'hui dans les sciences de l'information, elles sont aussi pratiquées par des non-mathématiciens (physiciens, mécaniciens, chimistes, informaticiens, électroniciens, ingénieurs, économistes ...) ; et le mot de *pratique* est celui qui convient, plutôt qu'*utilisation* : il ne faut pas penser cette pratique comme l'utilisation d'outils conçus par les uns pour les autres, mais voir les mathématiques comme un champ dans lequel s'activent mathématiciens et d'autres. Cette évidence mérite d'être rappelée. Car ces mathématiques des non-mathématiciens sont très loin d'être plus faciles que les nôtres. Elles sont parfois sur la crête de l'avancement des mathématiques (et même du « mauvais côte » de la crête, c'est-à-dire du côté des mathématiques qui n'en sont pas tout à fait - on a déjà entre-aperçu cette question à propos du débat Quinn-Jaffee plus haut).
Lorsque nous formons des élèves et des étudiants en mathématiques, nous devons avoir à l'esprit que nous ne sommes pas les seuls à former aux mathématiques ; les physiciens y participent fortement, et pas seulement eux. Mais nous devons surtout penser que notre formation ne sert pas pour l'essentiel à former de futurs mathématiciens, chercheurs ou enseignants, mais qu'en revanche beaucoup de nos étudiants seront des praticiens des mathématiques, que ce soit de façon centrale ou marginale.
De manière générale, les enseignants à tous les niveaux sont désorientés par un phénomène sociologique de base : l'utilité de la formation que nous dispensons, toutes disciplines académiques confondues, des mathématiques au latin, est générale et pas spécifique. La conclusion que nous en tirons parfois, nous autres mathématiciens, est qu'au moins notre rôle est d'enseigner le raisonnement logique. Ca n'est pas faux, mais trop limité. Et nous pouvons en déduire une conséquence qui est elle franchement nocive : puisqu'il est crucial de faire passer les bases du raisonnement, nous devons le faire dans le contexte où les raisonnements sont le plus parfaits, celui des mathématiques post-kantoriennes (celles où le continu est bien formalisé) ou les mathématiques des structures.
On en arrive à un paradoxe : les disciplines autres que les mathématiques ont besoin de mathématiques plus difficiles que les mathématiques. Ce paradoxe est présent à tous les niveaux de l'enseignement, du lycée aux formations de 3$^{\text{ème}}$ cycle : nous sommes constamment en retrait par rapport aux demandes des physiciens. En conséquence de quoi, à l'université

les cours de mathématiques pour physiciens chimistes ou même économistes sont, sur un certain plan plus avancés en mathématiques que ceux pour mathématiciens - avec des notions comme les équations aux dérivées partielles, les formules d'inversion pour les transformées de Laplace, les groupes cristallographiques, les méthodes d'optimisation sous contrainte etc.

4.2. Comment les mathématiciens font-ils de la recherche ?

On fait de la recherche un peu comme on cherche à résoudre un exercice difficile - sauf que personne ne connaît la réponse de l'exercice, ce qui change complètement la nature de l'activité. En ce qui concerne les mathématiques fondamentales ou pures, on peut en gros distinguer quatre phases :
- phase descriptive,
- phase expérimentale,
- formulation de « conjectures »,
- démonstration et mise en forme,

avec un constant aller-retour entre ces différentes phases[17]. Tentons de décrire brièvement à quoi correspondent les quatre phases.

Phase descriptive. C'est le moment où l'on tente de comprendre en quoi consiste l'objet mathématique auquel on s'intéresse. On essaie de s'en faire une représentation, en regardant des exemples et des cas particuliers. La difficulté est d'utiliser comme représentation mentale un cas particulier qui n'est ni trop particulier (pour que les difficultés du cas général soient déjà présentes) et ni trop général (car la représentation devient trop difficile à appréhender). On voit comment on peut faire des calculs pertinents. En somme, c'est le moment où on acquiert ce rapport intime avec l'objet mathématiques qui a déjà été évoqué plus haut. Cette phase peut durer entre quelques minutes et... plusieurs dizaines d'années

Phase expérimentale. Une fois l'étrange animal décrit, on peut se demander quelles sont ses propriétés. On dessine, on calcule, on formule des hypothèses, des préconjectures. Progressivement, les idées les plus fausses sont éliminées, on peut concentrer ses efforts sur des propriétés qui ont quelques chances d'être vraies. On arrive alors à

[17] J'oppose ici mathématiques fondamentales à mathématiques appliquées, pour lesquelles il faut clairement ajouter deux phases supplémentaires : l'analyse du phénomène naturel et la modélisation.

Formulation de conjectures. Il s'agit maintenant de formuler des propositions mathématiques dont on a de bonnes raisons de penser qu'elles sont correctes, puis de trouver une suite d'arguments convaincants qui paraissent pouvoir être transformés en d'emonstrations.

Mise en forme. On en arrive à la phase de démonstration proprement dite, où l'on va écrire une démonstration (éventuellement décomposée en une série de démonstrations de résultats intermédiaires). A ce stade, le résultat du travail est un texte écrit.

A chaque étape, on doit bien souvent revenir aux étapes précédentes, parce qu'on se rend compte à l'usage que la description de l'objet que l'on avait en tête est erronée, que les préconjectures et conjectures sont fausses. A la fin, à supposer qu'on ait accompli avec succès toutes ces étapes, reste à juger de l'intérêt de ce qu'on a fait : est-ce nouveau ? est-ce vraiment original, intéressant ?
La raison pour laquelle j'entre dans tous ces détails est pour mettre en évidence que le temps de la démonstration n'est qu'un parmi d'autres ; en fait c'est le plus bref ! Et d'ailleurs, comme on l'a vu, le niveau de rigueur qui est exigé pour la mise en forme varie entre les époques et les traditions nationales - même si en fin de compte les mathématiciens s'accordent à peu près sur le résultat : le théorème est considéré comme d'emontré ou il ne l'est pas. A tous les autres moments, ce ne sont pas des mathématiques très formalisées qui interviennent ; on se contente d'arguments flous, d'évaluations simples de ce qui est grand ou petit, de calculs dont on ne comprend pas toujours le sens.

4.3. Mathématiques et mathématiques enseignées : questions de méthode

Nous avons pas à pas remis en question la place des mathématiques. Certes, ce qui constitue les mathématiques c'est la démonstration ; mais nous avons vu que la démonstration n'était pas un dogme figé, mais une réalité mouvante. Nous avons vu que les mathématiques ne se rangeaient pas totalement du côté de l'abstraction, mais qu'elles étaient aussi une science de la nature, science d'observation et science expérimentale. Nous avons vu que les mathématiques n'étaient pas la propriété des mathématiciens, mais qu'elles étaient un domaine partagé. En espérant n'avoir pas fait qu'enfoncer des portes ouvertes nous devons maintenant se poser la question de ce qu'on enseigne et comment on doit l'enseigner.

Commençons par un truisme : ce qui est enseigné dans les cours de mathématiques, ce sont des mathématiques. Mais les mathématiques ont une histoire, et l'enseignement des mathématiques en a une. Ce qui est enseigné est donc le produit de ces deux histoires, un compromis sans cesse remis en cause entre ce que sont les mathématiques aujourd'hui, ce qu'elles étaient hier et avant-hier, et la tradition de l'enseignement des mathématiques. C'est donc la combinaison entre

- ce qui paraissait important en mathématiques à diverses périodes dans le passé,
- une évaluation empirique de ce qui est accessible à un âge donné pour une certaine population
- une évolution historique propre de l'enseignement.

Pour mieux comprendre qu'il y a compromis, et la nature de ce compromis, on peut constater qu'il y a plus de différences entre les traditions d'enseignement d'un pays à l'autre qu'entre les traditions mathématiques. En gros, on fait à peu près partout les mêmes mathématiques ; mais on ne les enseigne certainement pas de la même manière. Et lorsqu'on est confronté aux étranges différences, on est surpris. Qui sait en France ce qu'est la cosécante ? C'est une fonction trigonométrique qui est encore enseignée aux Etats-Unis ; mais les étudiants américains ignorent presque complètement ce qu'est un développement limité, sur lesquels nous avons tous bien souffert.

Chacun des termes de ce compromis est légitime. L'expérience des enseignants révèle des difficultés d'apprentissage, impose des simplifications indispensables, met en valeur des étapes importantes dans la compréhension qui amènent à mettre plus de poids sur tel ou tel aspect, insiste sur l'aspect plus ou moins *formateur* de ce qu'on enseigne. Mais d'un autre côté, l'enseignement est tenu par des contraintes qui ne sont pas, en elles-mêmes, fécondes. Dans le système français, les examens et les concours jouent un rôle décisif. La question se déplace : l'enjeu n'est plus de savoir ce qu'il serait intéressant d'enseigner, mais ce qui est évaluable de manière facile dans le cadre d'examens en temps limité. La dynamique interne des examens, parce qu'il y a un programme, parce qu'il y a des annales des sujets, parce qu'il faut poser des sujets qui sont à bonne distance entre des sujets entièrement nouveaux et des sujets déjà posés, pèse très lourd sur les programmes et leur réalisation.

D'un autre côté, on ne peut pas accepter que l'enseignement des mathématiques[18] soit déconnecté de l'évolution des mathématiques elles-mêmes (en ayant à l'esprit les mathématiques dans leur totalité, et pas seulement par les lunettes des mathématiciens professionnels.).

Le calcul élémentaire fournit un excellent cas d'école. Faut-il enseigner les tables de multiplication, faut-il faire faire du calcul mental et du calcul écrit à nos élèves du Primaire. Nous voyons bien que cette question ne se pose pas dans les mêmes termes aujourd'hui qu'hier : aujourd'hui, les machines font ce que nos prédécesseurs faisaient à la main ; la dextérité calculatoire est moins importante. Faut-il pour autant abandonner les tables ? Deux arguments pèsent contre l'abandon. L'un tient au respect de la tradition : au CP et au CE, on apprend ses tables. C'est ainsi qu'on entre vraiment dans l'univers de la manipulation des nombres, et c'est important. L'autre argument, lié au précédent, est que les tables de multiplication fournissent le premier ensemble de résultats expérimentaux dont l'esprit dispose pour réfléchir aux propriétés formelles des opérations. La propriété la moins immédiate est la commutativité de la multiplication. Le fait expérimental que $a \times b = b \times a$ pour $a, b \leqslant 9$, par exemple $6 \times 9 = 9 \times 6 = 54$ est une étape dans la compréhension de la commutativité, étape qui permet la visualisation de l'étape suivante, la bijection par « symétrie » entre les produits cartésiens de deux ensembles finis $\mathrm{E} \times \mathrm{F}$ et $\mathrm{F} \times \mathrm{E}$[19].

5. Intermède philosophique

Il est peut-être utile, à ce stade, de prendre du recul et s'interroger sur le statut philosophique des objets mathématiques. La point de vue philosophique le plus courant parmi les mathématiciens est le point de vue platonicien selon lequel les objets mathématiques existent, mais dans le domaine des idées, qu'ils ont une existence éternelle indépendante de nos sens. Alors, la vérité des théorémes préexiste les démonstrations que nous en donnons. Et alors peu importe si la démonstration est celle du chercheur, la premiére démonstration d'un théorème, ou celle du professeur et de l'élève. Le théorème était déjà là. Les uns et les autres n'avons fait que d'en révéler la vérité.
Le théorème est alors une loi, au sens de la physique, mais évidemment

[18] Cette remarque s'applique à toutes les disciplines scientifiques, la question se posant en des termes différents pour les humanités.

[19] Notons qu'on ne parle pas ici de démonstration de la commutativité du produit d'entiers naturels, qui est encore une autre affaire.

une loi portant sur des objets dont l'existence relève du domaine des idées et non du domaine du visible. Ceci permet de comprendre comment le mathématicien réfléchit et travaille : par observations et expériences portant sur les objets mathématiques[20].
Dans cette perspective, la démonstration est moins importante - ou au moins la démonstration dans le cadre de l'enseignement. Car une fois que la démonstration initiale a rendu éclatante à nos yeux la vérité d'un fait mathématique, nous n'avons pas besoin d'en reparcourir à chaque fois le cheminement.

6. Que faire ?

Il est temps de revenir au problème très terre-à-terre posé au début de cet article : comment présenter les mathématiques à nos élèves et étudiants en sorte que les mathématiques du XX$^{\text{e}}$ siècle y soient présentes, en sorte aussi que les mathématiques n'apparaissent pas comme un recueil de recettes figées, mais comme une discipline où les qualités de créativité, d'imagination, de liberté peuvent s'épanouir.
Comment faire ? Nous allons nous appuyer sur les idées exposées jusqu'ici, mais d'abord faire valoir des considérations pratiques. Si l'on veut enseigner une théorie mathématique en donnant toutes les démonstrations, il est très difficile d'y entrer profondément. C'est une simple question de temps. Nous donnons le mauvais exemple par une certaine tradition des cours universitaires. Bien souvent, un cours d'intégration de niveau licence se termine par le théorème de convergence dominée car on a passé beaucoup de temps à construire l'intégrale de Lebesgue et la mesure de Lebesgue. Le résultat est qu'on laisse de côté ce qui serait essentiel, c'est l'utilisation des outils ainsi construits.
Le contraste avec les maniéres russes et américaines d'enseigner à ce niveau est très fort. Nous nous targuons de ne pas « enseigner avec les mains », ce qui veut dire enseigner en cachant les difficultés par des tours de passe-passe. Mais avons-nous raison ? La question est de savoir ce qui est essentiel : est-ce la construction de la mesure de Lebesgue, ou est-ce la transformation de Fourier dans L^1 ou L^2 ? Est-ce la construction de $\mathbb{R}$ les raisonnements avec des ε, δ, ou est-ce l'analyse ? Est-ce les anneaux non euclidiens ou les anneaux de polynômes ? La réponse correcte est que les deux choses sont importantes, mais que probablement les aspects plus « concrets » le sont plutôt plus.

[20] C'est bien pour cette raison que les mathématiciens sont à l'aise dans le réalisme platonicien.

Alors, il n'y a que deux solutions : allonger les horaires de mathématiques et la durée des études, ou enseigner différemment. L'allongement des horaires aurait son mérite, même si il n'est pas dans l'air du temps. L'allongement de la durée des études est, encore moins, une hypothèse réaliste. Mais même si ces deux options nous étaient ouvertes, il faudrait quand même changer notre manière d'enseigner. Deux grandes pistes se présentent à nous, qui sont complémentaires et surtout pas concurrentes.

6.1. Des cours différents

Il nous faut donc trouver le moyen d'une économie différente dans nos cours : donner plus de place à la *description* des objets, plus de place aux arguments heuristiques, plus de place au travail préparatoire - et donc moins de place aux démonstrations, moins de place aux élaborations théoriques inutiles. L'histoire peut être pour nous un guide, en nous suggérant de limiter à chaque fois l'usage de la rigueur et de l'abstraction à ce qui était historiquement nécessaire au moment où ces résultats étaient élaborés. Mais écoutons ce qu'ont à dire sur ce sujet de grands mathématiciens, dont l'importance scientifique donne à leurs arguments un poids considérable.

Les prescriptions d'André Weil. André Weil (1906-1998) fut un des fondateurs de Bourbaki, et un des grands mathématiciens du XX^e^ siècle. Si les mathématiques d'aujourd'hui sont « modernes », c'est 'a des mathématiciens comme lui qu'on le doit. Il avait à propos de l'enseignement des mathématiques, et de ses dérives, des vues très nuancées. Ainsi, sur l'abstraction : « Dans la mesure où un certain degré d'abstraction est inutile, il est automatiquement mauvais. Il ne faut pas forcer les gosses à penser abstraitement. Il faut qu'ils y soient amenés d'une manière naturelle. »[21]

Ce qu'il propose dans ce même entretien sur la pratique des démonstrations dans l'enseignement ouvre des perspectives intéressantes : « Ce qui compte, ce n'est pas de tout démontrer. C'est que la *possibilité* de tout démontrer soit apparente. On peut bien ne pas faire telle ou telle démonstration. *Ce qui est important est que les élèves aient rencontré, au moins une fois, un raisonnement qui les ait convaincus de la vérité de tel résultat alors même que cette vérité ne leur était pas intuitive.* Se mettre

[21] M. Andler, M. Demazure, « Entretien avec André Weil », Gazette des mathématiciens 50, octobre 1991.

devant une table, suivre un raisonnement et être certain, au terme de ce travail, que e ou π sont transcendants. Constater qu'un raisonnement aboutit à des choses non triviales, des choses dont on n'avait pas idée avant de commencer. . . »
Ainsi, Weil recommande un usage en quelque sorte écologique ou dissuasif [22] de l'abstraction et de la démonstration : il faut en donner pas plus que nécessaire, pourvu que

- l'abstraction soit proportionnée à l'usage qu'on en fait
- qu'on se rende compte qu'on pourrait donner toutes les démonstrations
- que l'élève puisse apprécier que la démonstration joue un rôle de conviction essentiel.

La prescription de Vladimir Arnold. Vladimir Arnold, que nous avons déjà cité, est un mathématicien russe de premier plan, spécialiste de géométrie symplectique et de systèmes dynamiques. Il travaille à Paris et Dauphine. Volontiers polémique et critique des façons françaises d'enseigner les mathématiques. La lecture de certains de ses essais sur l'enseignement des mathématiques engage à la réflexion [23]
Dans le contexte de cet article, une observation d'Arnold mérite tout particulièrement d'être citée et analysée. Il compare les théorèmes « à la russe » et « à la française ». Un théorème à la russe est donné dans le contexte de généralité minimale où l'énoncé présente un intérêt. Un théorème à la française est présenté avec la généralité maximale où l'énoncé est encore vrai.
En effet, dans la tradition française, les énoncés les plus généraux doivent être les plus simples, ceux qui vont à l'essence même du résultat : si la généralité est maximale, aucun phénomène contingent ne trouble la compréhension. Le problème qui est négligé dans cette vision est que la généralité est en elle-même source de difficulté ; elle exige le paiement par l'étudiant d'un ticket d'entrée coûteux - en partie parce dans le cadre de la généralité, on perd de vue la raison pour laquelle on s'est intéressé à la question posée pour commencer. *A contrario*, une fois qu'on a compris l'intérêt d'un théorème vu dans un cas particulier, il n'est pas très difficile d'en percevoir l'intérêt dans le cas général - et de voir qu'en effet

[22]Dans un certain sens, j'emploie le mot de dissuasion au sens de la guerre froide : si on a besoin d'avoir recours à la démonstration, on peut le faire, mais c'est le plus souvent inutile.

[23]On en trouve certains sur sa page personnelle http ://www.pdmi.ras.ru/arnsem/Arnold/arn-papers.html.

la démonstration du cas général n'est pas très éloignée de celle du cas particulier.

Enseigner autrement : éloge de la « monstration ».[24]Nous avons mis en avant l'absolue nécessité d'accompagner la construction pour les élèves, d'un rapport intime avec les objets mathématiques étudiés, rapport qui passe par une phase de description et une phase expérimentale. Une fois que les objets sont connus, une fois que l'intérêt des questions posées à leur propos a été mis en évidence, il reste à faire comprendre pourquoi les théorèmes répondant à ces questions sont vrais. La démonstration, à supposer qu'il faille la faire[25], n'est pas la réponse - ce n'est pas parce qu'on a fait la démonstration qu'on a compris, et encore moins fait comprendre, pourquoi elle marchait. Il manque une étape, qui est l'argumentation de la vérité du fait à établir. L'ensemble de ces étapes peut être décrit sous le vocable de « monstration », qui

- précède la démonstration dans certains cas,
- pourrait la précéder - c'est-à-dire qu'il serait possible, au niveau où se situe l'enseignement et avec les outils dont disposent les élèves de donner la démonstration complète - mais on choisit de ne pas le faire
- est un substitut de la démonstration car celle-ci est inaccessible aux élèves.

La démarche déductive. On a souvent identifié démarche déductive et démonstration, ce qui me paraît erroné. Il peut très bien y avoir une démarche déductive élaborée dans un contexte où les démonstrations ne sont pas données complètement. D'abord parce qu'on peut construire des démonstrations complètes en utilisant des résultats qui ne sont pas démontrés, mais seulement admis. Ensuite parce que l'on peut construire de véritables démarches déductives sur la base de propriétés « évidentes » qui, en fait, ne le sont pas du tout. Dès qu'on sort du « tout démonstration », on entre dans un terrain glissant. C'est évidemment le rôle des professeurs d'accompagner les élèves et les étudiants sur cette ligne de crête où l'on risque à chaque instant de tomber[26].

[24]Je remercie Gilles Godefroy de m'avoir suggéré l'usage de ce néologisme.

[25]En gardant l'idée que la démonstration représente la norme de l'activité, nous plaidons pour en faire un usage modéré dans l'enseignement, conformément aux idées de Weil.

[26]Une chute possible est de décider que l'on n'est pas mathématicien, mais physicien théoricien - mais ça n'est pas notre propos ici.

6.2. Une place pour les activités péri-scolaires.

Nous avons raisonné jusqu'ici dans le cadre traditionnel de l'enseignement : un programme, des cours, etc. Mais le problème posé par le cadre traditionnel de l'enseignement est son évaluation par des examens[27] - et nécessite donc une explicitation très claire des critères de jugement : un élève est en droit de savoir s'il « a bon » ou pas, et pourquoi. Cela ne laisse guère de place à la partie de l'enseignement qui doit se fonder le plus sur la démarche expérimentale, et qui va éventuellement traiter de questions ouvertes.
Une évolution heureuse de l'organisation de notre enseignement serait de donner une place institutionnelle à des activités de type atelier basés sur un travail collectif à long terme. Ceci ne concerne pas que les mathématiques, bien entendu. Mais, comme j'espère l'avoir montré, les mathématiques peuvent aussi s'insérer dans un tel dispositif *sans rien renier de leur essence.*

7. Conclusion

Dans un contexte où les enseignants de mathématiques ont parfois le sentiment que leur enseignement est dévalorisé, a perdu de sa substance et n'est qu'une suite de recettes, les considérations qui précèdent peuvent apparaître comme déplacées - une tentative de légitimer ce qui n'est pas acceptable. Je ne veux pas discuter des programmes ou des horaires ici, ça n'en est pas le lieu. Mon ambition serait remplie si le débat sur ce qui est enseigné en mathématiques et comment se déplaçait : on ne peut d'aucune manière établir une frontière nette entre ce qui serait des mathématiques authentiques et ce qui n'en mériterait pas le nom, pas plus que disposer d'un critère qui permettrait de le faire. Les mathématiques sont diverses dans leur objet et leurs approches.

[27] Le quasi-monopole dont jouit l'examen avec note dans l'organisation française de l'enseignement n'est pas une nécessité mécanique ; d'autres pays parviennent mieux que nous à donner une place à des activités d'enseignement, telles que la participation à des projets de longue haleine, dont l'évaluation est plus problématique.

LA PLACE DES MATHÉMATIQUES VIVANTES DANS L'ÉDUCATION SECONDAIRE

transposition didactique des mathématiques et nouvelle épistémologie scolaire

Yves Chevallard
IUFM d'Aix-Marseille & UMR ADEF

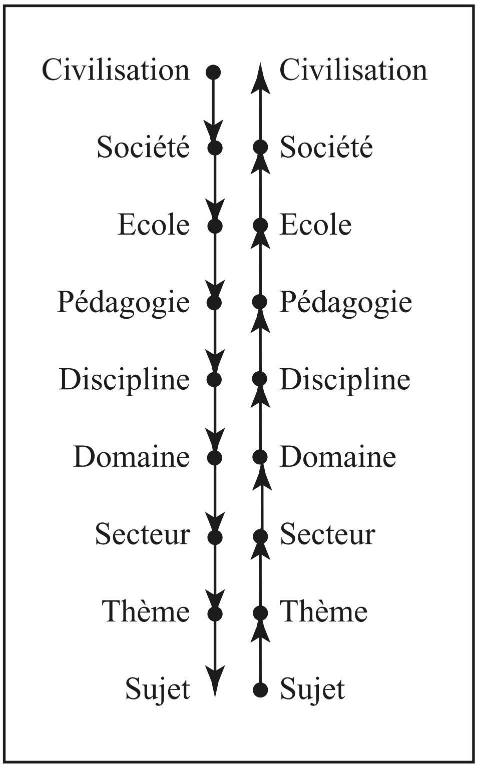
1. Questions d'éducation : entre méprise et mépris

1.1. En matière d'éducation, l'attitude qui prévaut encore dans nos sociétés est presque entièrement sous-tendue par un mélange à composition variable de mépris pur et de méprises indéfiniment reconduites - les méprises procédant généralement du mépris affiché face aux questions d'éducation. Si l'on en usait à propos des questions de santé comme on en use à propos des questions d'éducation, on pourrait peut-être voir une association militante - appelons-la Animed - proposer au ministre de la Santé de patronner une université d'été sur telle maladie jusqu'ici invaincue ; et, après bien des réticences - une bonne circulaire publiée au *Bulletin officiel de la santé nationale* (BOSN) et enjoignant aux officiers de santé de faire ceci et cela ne serait-elle pas autrement efficace que les productions de quelques songe-creux à la science incertaine ? -, on verrait peut-être le ministère accorder au projet une somme ridicule, en se disant qu'après tout, on ne sait jamais - même si l'on n'y croit guère et si, surtout, on doute que de telles démonstrations estivales de docte ignorance soient autre chose qu'un tribut payé à l'air du temps.

1.2. Le problème, pourtant, c'est que les songe-creux militants sont tout autant dans le faux que le ministère imaginaire que je viens d'évoquer si, eux aussi, croient - comme on le croit depuis toujours - qu'il suffirait d'un peu de talent et du concours des bonnes volontés de chacun pour y arriver, et cela en vertu de cet axiome que, en matière d'éducation, les choses, sont simples, ou plutôt *doivent* l'être ! Rappelons-nous la réforme des mathématiques modernes, les talents et la haute assurance conjugués d'un Choquet ou d'un Dieudonné, la formidable énergie sociale mobilisée (notamment chez les professeurs de mathématiques, mais pas seulement), et, pour finir, l'échec patent ! Revenons un instant à la médecine : situons cette université d'été, disons, en août 1816, et supposons qu'on s'y propose de travailler sur une médication contre la phtisie - alors même que l'on confond encore, sous ce nom englobant, tuberculose, bronchite, gangrène du poumon, œdème, emphysème, apoplexie... Août 1816 : René Laennec (1781-1826) n'aura l'illumination qui le conduit à inventer le stéthoscope qu'en septembre. Travailler sur « la phtisie » et la vaincre (au moins médicalement) n'est alors nullement à portée de main : cela supposera un travail immense, dont une première étape sera, en 1882, la découverte par Robert Koch (1843-1910), prix Nobel de médecine 1905, du bacille qui porte son nom, une seconde étape étant marquée, en 1943, par la mise au point de la streptomycine par Selman A. Waksman (1888-1973), prix Nobel de médecine 1952.

1.3. Pour creuser profond, il faut creuser large. Inutile de rechercher, à portée de la main ou de l'été, une technique dont la production suppose des développements technologiques et théoriques qui supposent eux-mêmes un *immense travail* encore à venir. Il faut prendre, autant qu'on le peut, la mesure des problèmes. On sait par exemple que, sur l'avis des meilleurs mathématiciens du temps, l'Académie des sciences refusa en 1775 de prendre plus longtemps en compte les mémoires concernant la quadrature du cercle, parce qu'il s'agissait là d'un problème qu'on pressentait hors de portée des mathématiques de l'époque. On sait aussi qu'il fallut attendre 1882 - l'année où Koch découvrit le bacille du même nom - pour que, en s'inspirant de la démonstration due à Hermite de la transcendance de e (1873), Lindemann (1852-1939) publie une preuve de la transcendance de π , mettant fin ainsi à une très longue ignorance. Or ce que, sagement, on a su accorder et assumer en matière de recherche mathématique est pourtant refusé, aujourd'hui encore, en matière de recherche sur l'enseignement et sur l'apprentissage des mathématiques (et plus largement en matière d'éducation). Tout se passe ici comme si, en médecine, le fait indubitable qu'il y a des gens (passagèrement) en bonne santé, suffisait à discréditer les recherches sur « la maladie » : la bonne santé, c'est très facile, savez-vous ; il suffit de faire un peu attention ! Tout ce qui suit sera tissé à contre-fil de ce sens commun stérile et dévastateur. Car l'abord du problème de la « place des mathématiques vivantes dans l'éducation secondaire » suppose en vérité, pour le didacticien des mathématiques, un élargissement des points de vue qui sollicite toute la force des théories et des technologies didactiques aujourd'hui existantes, et sans doute bien plus encore ! J'essaierai simplement, dans ce qui suit, de proposer un état des choses conforme à ce que je crois voir actuellement.

1.4. Pour commencer, je présenterai rapidement un schéma formel auquel je tiens, celui de l'échelle des *niveaux de co-détermination didactique*, qui, en quelque sorte, « encadrent » ce qu'il est possible de faire en matière de diffusion des connaissances et des savoirs, c'est-à-dire en matière didactique.



Partons de l'échelon inférieur. Un *sujet d'étude* c'est, en mathématiques, une question telle que « Comment calculer la longueur d'un côté d'un triangle rectangle quand on connaît la longueur des deux autres côtés ? », ou encore « Comment calculer une primitive d'une fraction rationnelle ? », ou bien « Comment démontrer qu'un nombre donné est irrationnel ? » L'échelon immédiatement supérieur, le *thème d'études*, sera, dans le système scolaire-universitaire français, dans le premier cas repéré par l'étiquette « Théorème de Pythagore » (voire par « Pythagore », tout court), ce qui désigne, non le théorème en question, mais tout une *organisation mathématique* incluant par exemple une technique bien justifiée pour « calculer la longueur d'un côté d'un triangle rectangle quand on connaît la longueur des deux autres côtés » ; dans le deuxième cas, le thème d'études se nommera par exemple « Calcul de primitives » (ou, plus chic, « Primitivation »). Quant au troisième cas, je ne crois pas qu'il apparaisse vraiment dans le cas français (un étudiant de mathématiques devenu professeur peut n'avoir jamais eu à démontrer, par exemple, que $\sqrt{5}-\sqrt{1+3}$ est irrationnel). Mais il pourrait être subsumé sous un thème d'études intitulé simplement « Nombres réels ». Le troisième échelon est celui des *secteurs d'études* : les thèmes s'organisent en secteurs. Le thème « Pythagore » est ainsi situé par le programme de la classe de quatrième dans un secteur intitulé *Triangle rectangle et cercle.* Quant aux secteurs, ils s'intègrent dans de vastes domaines - géométrie, analyse, arithmétique, etc. Bien entendu, tout cela est une construction historique qui n'a pas de caractère intrinsèque, prédéterminé, nécessaire. Les étiquettes changent : ainsi le domaine que nombre de professeurs enseignant en seconde nomment encore « Analyse » a-t-il été officiellement rebaptisé « Calcul et fonctions » depuis la rentrée 2000, en même temps que ses contenus étaient retouchés. Les domaines se regroupent à leur tour en une *discipline*, qui est traditionnellement « les mathématiques » pour ce qui concerne l'ensemble des secteurs et domaines évoqués. Mais on n'oubliera pas qu'à cet égard les choses ne sont pas si simples, en particulier du fait des conflits *territoriaux* entre disciplines établies ou émergentes. À qui appartiennent par exemple - scolairement parlant - la cinématique ou l'astronomie ? Aux mathématiques ou à la physique ? La réponse a varié selon les temps et les lieux[1] . À quelle discipline appartient l'algorithmique aujourd'hui ? Aux mathématiques ou à la *computer science* ? Etc.

1.5. Au-dessus de la discipline - des disciplines - se trouvent les échelons de la *pédagogie*, de l'*École*, de la *Société*, de la *Civilisation.* Je ne les commenterai pas davantage ici, sauf en énonçant ce principe essentiel que traduit l'échelle proposée : ce qu'on peut faire à tel échelon - par exemple dans l'étude de tel *thème* mathématique - dépend des *contraintes*

[1]Le programme du CAPES de mathématiques comporte ainsi une partie de « cinématique du point » largement ignorée des candidats (et peut-être de certains préparateurs) : y figurent par exemple la question des oscillateurs harmoniques et du mouvement des planètes !

imposées et des *conditions* créées par les échelons supérieurs (c'est ce que signifient les flèches descendantes du schéma). Considérons à titre d'exemple une unique contrainte *pédagogique* : les classes d'une heure. Au XIX^{e} siècle, les classes sont de deux heures ; c'est la réforme de 1902 qui institue la classe d'une heure, en la rendant obligatoire dans le premier cycle (c'est-à-dire au collège) et en la recommandant dans le second cycle, « *sauf les exceptions nécessaires* ». Une séance de deux heures permet certaines choses que la séance d'une heure ne permet plus : elle permet par exemple de temporiser, de varier le rythme et le type des activités, en ménageant des temps plus lents, des moments d'accélération, etc. D'une manière plus générale, quelle que soit la façon dont on entend l'expression de « mathématiques vivantes », on ne peut guère espérer répondre à la question « Peut-on, et alors comment, faire place à des "mathématiques vivantes" dans l'éducation secondaire ? » si l'on ne prend pas en compte *l'ensemble pertinent des contraintes et des conditions* sous lesquelles cette éducation doit se réaliser. Il est bien entendu que, inversement, le fait de parvenir, en un certain échelon de détermination didactique, à modifier le jeu des conditions et des contraintes a, en règle générale, des répercussions *aux autres niveaux*, jusqu'au niveau de la civilisation si l'on suit le schéma proposé ! C'est ce que signifient, bien sûr, les flèches ascendantes du schéma[2]. C'est avec tout cela en tête que je ferai maintenant un petit nombre de remarques sur le problème qui nous réunit.

2. Quelle mission pour l'École ?

2.1. Se situer dans l'échelle ci-dessus au niveau de l'École - des diverses Écoles possibles -, c'est se situer en un point sensible de la configuration de forces que ce schéma prétend représenter. Il n'est par exemple pas équivalent que, relativement à tel savoir et à tel public, existe une

[2]Voici une illustration simple de ce fait : l'obligation « civilisationnelle » d'écrire avec « pleins » et « déliés », liée elle-même à l'emploi normé d'un certain type de pointes traçantes (dont l'emblème scolaire fut longtemps la célèbre « plume Sergent-Major »), se défait lorsque de nouvelles pointes traçantes envahissent la société (hors l'École), à partir de 1950 pour ce qui est des stylos « à bille » et de la France. L'École résiste d'abord, rudement, passionnément. Elle finira par céder après avoir laissé s'installer un hiatus non verbalisé, dogmatisé sans doute mais non point *pensé*, négocié, assumé, entre pratiques scolaires et pratiques extrascolaires d'écriture : une circulaire du 3 septembre 1965 énoncera, dans un langage daté, que, les traits d'écriture étant désormais « uniformes », il n'y a plus lieu d'interdire les instruments à réservoir d'encre, ni même les crayons à bille qui procurent des avantages de commodité pratique ».

École qui enseigne ce savoir à ce public, ou qu'une telle École n'existe pas ! La société et, au-dessus d'elle, la civilisation, peuvent ainsi imposer à telle école donnée une « écologie » très singulière. Dans une civilisation qui n'est plus la nôtre désormais, l'école eut par exemple pour fonction première de *séparer* une élite du reste du peuple : ainsi en allait-il de la *paideia* - l'éducation grecque - dans l'Empire romain tardif, aux IV^{e} et V^{e} siècles de notre ère. « Une des fonctions primordiales de cette culture était de distinguer une élite du flot ordinaire de l'humanité », note l'historien John Matthews [3] . Dans son livre *Pouvoir et persuasion dans l'Antiquité tardive* [4], Peter Brown, le grand historien de cette période, rappelle que « seuls les fils de notables avaient les moyens et le temps de faire le long voyage qui les amènerait des contrées les plus lointaines de l'Orient grec pour suivre à loisir les cours d'un maître tel que Libanius [314-393] à Antioche, ou Prohaeresius [vers 276-368] à Athènes ». Et Brown d'ajouter : « Ils sortaient de cette expérience coûteuse et intellectuellement exigeante avec une excellente opinion d'eux-mêmes : ils étaient convaincus que "la correction de leurs discours bien charpentés et le vernis brillant de l'habileté" les rendaient aussi supérieurs aux illettrés que les êtres humains au simple bétail. » La *paideia*, conclut-il, « était un moyen d'exprimer la distance sociale ». Et s'il est vrai que son action séparatrice n'était pas absolue, puisqu'elle autorisait tout de même quelques rares transfuges dont l'aventure a pu séduire les commentateurs modernes - pensons, bien sûr, à Augustin d'Hippone (354-430) -, elle avait surtout pour effet d'unir fortement l'élite qu'elle distinguait en la rassemblant autour de références culturelles dont cette fonction de cohésion d'un groupe dominant était l'essentiel. « Depuis les débuts de l'Empire, écrit encore Peter Brown, une culture commune avait fourni un langage qui permettait à des gens instruits d'Arles ou d'Arabie de communier dans la même admiration dévote de la rhétorique grecque. » Cette fonction distinctive et identificatoire ne supposait guère, au plan des contenus de connaissance, que ce « monument » culturel un peu creux qu'était devenue la rhétorique grecque, « reine des disciplines » de l'éducation des élites : « Formaliste, bien-pensante, tranquillement routinière et invariablement flagorneuse, la rhétorique fournissait un fond musical permanent au consensus en faveur du gouvernement romain entretenu avec habileté chez les notables des cités du monde

[3] *The Roman Empire of Ammainus*, Londres, DuckWorth, 1989, 78, Cité *in* Brown, *op.cit.*

[4] Editions du Seuil, 1998.

grec. » Et il est vrai que les usages de ce monument du savoir antique apparaissent en partie dérisoires : ils permettaient de conforter le sentiment d'une commune appartenance entre membres d'une élite par ailleurs fortement « hétérogène », ce que l'anecdote suivante laisse voir crûment : « Rencontrant les conseillers juridiques d'un nouveau gouverneur (qui devait avoir grandi à Rome), Libanius posa la question cruciale : "Comment Ulysse gouvernait-il son royaume d'Ithaque ?" La réponse fusa : "En bon père de famille." Cette citation classique donna le ton aux relations entre le gouverneur et le conseil municipal pour les mois à venir. »

2.2. Cette fonction séparatrice de l'École d'autrefois sera longuement revendiquée. Mille cinq cents ans après Libanius, un intellectuel bourgeois qui fut courageux en son jeune âge, dit-on, Marc Girardin, dit Saint-Marc Girardin (1801-1873), longtemps professeur, membre de l'Académie française, déclarait de la manière la plus crue : « Je ne demande pas à un honnête homme de savoir le latin ; il me suffit qu'il l'ait oublié. » On le voit : le savoir - la connaissance du latin en l'espèce - vaut ici par son pouvoir séparateur, qui scinde la société en deux parts numériquement inégales, en unissant le petit nombre de ceux qu'elle met à part du gros de la société. Mais l'histoire de l'École peut aussi être lue et voulue comme un effort continué, jamais achevé, toujours à approfondir, quelquefois aussi désarmé, pour promouvoir l'union du *laos*, mot grec qui désigne le peuple entendu, non dans sa dimension politique (ce serait le *demos*) ou dans ses particularismes culturels (ce serait l'*ethnos*), mais, simplement, comme l'ensemble des êtres humains vivant ensemble à un moment déterminé sur un territoire donné, quelles que soient leurs origines, leurs croyances, leurs aspirations. Éducation du laos, donc, c'est-à-dire, étymologiquement, éducation *laïque*, qui n'exclut personne - pour des raisons « ethniques », par exemple. C'est dans la perspective d'une telle ambition laïque que je situerai les développements qui suivent.

3. Les mathématiques, une matière comme les autres

3.1. Dans un livre justement fameux - *Civilisation grecque*[5] -, réagissant à la sacralisation de la Grèce antique que certains de ses confrères entretiennent avec la dernière énergie, l'helléniste André Bonnard (1888-1959) écrit sobrement : « le peuple grec a été, en son temps, un peuple comme les autres ». Bonnard, il est vrai, était de gauche, et même d'extrême

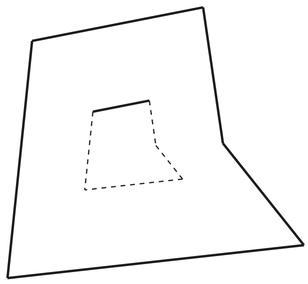
[5]Lausanne, 1958 ;

gauche. De la même façon, je serais tenté de dire : la discipline mathématique est, en notre temps, une discipline comme les autres ! Il est vrai sans doute qu'il existe une cote des disciplines scolaires, et que les mathématiques, depuis deux siècles et demi, n'y ont pas été mal classées, en dépit de leur handicap constitutionnel face aux disciplines « humanistes » - dont, jadis, le latin cher à Saint-Marc Girardin. Mais il n'en fut pas toujours ainsi : longtemps les mathématiques passèrent en effet pour savoir sans valeur. En 1566, ainsi, un certain Charpentier, qui avait des protecteurs hauts placés, obtint la chaire de mathématiques du Collège royal que François I$^{\text{er}}$ avait créée à l'origine - dès les premiers mois d'existence du Collège, en 1530 - pour Oronce Finé (1494-1555), qui l'occupera jusqu'à sa mort. Charpentier ignore tout des mathématiques, ce qu'il finit par admettre. De plus, il ignore le grec, qui reste nécessaire pour lire Euclide. Aux protestations de Pierre de la Ramée (1515-1572), titulaire au Collège d'une chaire de philosophie depuis 1551, qui y enseigne Euclide, et que cette nomination scandalise, Charpentier répond en soutenant que les mathématiques sont un « jeu d'enfant » comparées à la métaphysique, et même « une fange » faite pour les porcs. En fin de compte, il s'engage à les apprendre *en trois mois*. La péjoration est totale. On mesure par contraste la distance parcourue !

3.2. Le problème des mathématiques vivantes ne saurait avoir une solution qui lui soit entièrement propre : on ne peut imaginer de sauver les mathématiques toutes seules ! J'essaierai de montrer un peu plus loin qu'il faut au contraire prendre à bras le corps un problème général : comment faire pour que les connaissances diffusées par l'École, quelle qu'en soit la nature, soient des connaissances « vivantes » pour ceux auprès de qui elles sont diffusées ? Il est vrai que les corporatismes disciplinaires nous portent à regarder le système scolaire comme un *marché*, dont différentes disciplines - anciennement installées ou plus récemment promues - se disputeraient les parts, dans un égoïsme bien compris, chacune œuvrant pour son « intérêt » propre, ce qui tend à engendrer, entre les disciplines, un individualisme cynique incapable même, selon moi, de saisir le problème auquel l'École est aujourd'hui affrontée.

3.3. J'ai cité plus haut un helléniste de gauche ; je citerai maintenant un écrivain réactionnaire, mais à l'œil exercé : je veux parler de Chateaubriand (1803-1846). Dans ses *Mémoires d'outre-tombe*, il écrit ceci, que je ne suis certes pas le premier à citer : « L'aristocratie a trois âges successifs : l'âge des supériorités, l'âge des privilèges et l'âge des vanités. Sortie du premier, elle dégénère dans le second et s'éteint dans le dernier. » Les mathématiques ont appartenu à une aristocratie scolaire. Elles avaient depuis longtemps quitté l'âge des supériorités pour entrer dans l'âge des privilèges, où une discipline scolaire, sans perdre de son lustre peut-être, perd certainement de son utilité pour l'École et pour l'intelligence du monde : elle est là, mais on ne sait plus guère pourquoi. Elle est là, en vérité, par un privilège conservé, contre lequel d'aucuns murmurent. Dans cet âge des privilèges, une discipline scolaire tend alors à prendre la forme d'une visite guidée de savoirs que l'on parcourt à la hâte, à l'instar de vestiges monumentaux autrefois vivants mais dont les raisons d'être, les fonctions vitales ont cessé d'être comprises. Les savoirs enseignés ne produisent plus des connaissances vivantes dans les publics scolaires conviés à révérer les œuvres - mathématiques ou autres - que l'enseignement prodigué leur impose de « connaître ».

Ainsi, par exemple, on ne saura pas comment faire pour tracer une figure « trois fois plus petite » qu'une figure donnée (ci-contre). Mais on sera supposé connaître en détail les propriétés de l'homothétie ! Savoirs monumentaux insistants, connaissances effectives évanescentes...



3.4. La dégénérescence « monumentaliste » des savoirs scolaires ne frappe certes pas que les mathématiques. Je prendrai pour exemple la discipline scolaire appelée « Sciences économiques et sociales », SES. Il s'agit là d'une discipline apparue récemment dans le paysage scolaire (1969), et dont l'état de fraîcheur épistémologique ne devrait en conséquence pas faire de doute. Une enquête par questionnaire a été récemment conduite auprès d'élèves de terminale ES, de terminale STT (« Sciences et technologies tertiaires »), d'étudiants de DEUG de sciences économiques ou d'AES (« Administration économique et sociale »), d'étudiants de licence ou de maîtrise à coloration économique (AES, sciences de gestion, etc.), ainsi que d'élèves de classes préparatoires économique et commerciale (CPEC), à quoi il faut ajouter des élèves de première ou de deuxième année de BTS. Un compte rendu en est donné dans un petit ouvrage récemment paru. Que révèle donc cette enquête, qui prétend sonder les « connaissances » diffusées par notre enseignement de l'économie ? Tout d'abord que la « valeur ajoutée » par les études supérieures est faible, voire négative : les élèves de terminale ES atteignent ainsi un score moyen de près de 61 %, alors que les étudiants de DEUG ont un score moyen inférieur à 56,5 %. Il faut attendre le deuxième cycle des études universitaires pour que les étudiants fassent mieux que les lycéens : un peu plus de 64 %. Mais, surtout, l'enquête confirme l'hypothèse de monumentalisation évoquée ci-dessus. Sept questions, nous dit-on (*op. cit.*, p. 138), « portaient sur des concepts clés de l'économie : valeur ajoutée, productivité, etc. ». Ces questions ont un taux de réponses exactes élevé, de 74 % en moyenne (et même de 78,5 % pour les élèves de terminale ES) : les « monuments » ont été visités et leur connaissance peut être exhibée lorsque le contexte s'y prête. Six autres questions « concernaient des données factuelles de l'économie et de la société (Ě. . .) comme le taux de prélèvement obligatoire ou celui de syndicalisation » ; là, les taux de réponses sont déjà moins bons : environ 54,5 % (et 60 % pour les terminales ES). Deux questions portaient sur l'histoire économique et sociale : le taux de réponses justes diminue encore, et passe au-dessous de 43 % (mais il est de 48,5 % pour les élèves de terminale ES). Enfin deux questions pouvaient être regardées comme « exigeant une certaine connaissance des "mécanismes" économiques » : cette fois, le taux global moyen tombe à 31,5 %, les étudiants l'emportant en ce cas sur les lycéens, avec environ 36 % de réponses justes pour les premiers et 30 % pour les seconds. Mais examinons plus attentivement ces questions qui font chuter près de 70 % des élèves de terminale ES. La première question - la septième du questionnaire - était formulée ainsi :

7. Un euro fort est :
   - défavorable aux exportations européennes ;
   - favorable aux exportations européennes.

Les commentateurs de l'enquête écrivent à ce propos : « D'une courte tête (55 %), c'est la seconde position qui l'emporte. Autrement dit, près de la moitié de ces jeunes *a priori* informés ne saisissent pas l'influence du taux de change sur le commerce extérieur. » La seconde question - la onzième de l'enquête - touchait, elle, à une connaissance dont les professeurs de SES se démènent pourtant, traditionnellement, pour tenter de la faire recevoir des élèves :

11. Principalement, la monnaie est créée par :
   - la banque centrale ;
   - les banques de dépôt ;
   - l'État.

Cette fois, 86 % des réponses désignent la banque centrale, et 8 % seulement les banques de dépôt, en dépit des efforts des professeurs pour redresser une « représentation » courante mais erronée ! « Les résultats des étudiants, note le commentaire avec une ironie peut-être involontaire, sont à peine meilleurs que ceux des élèves. » L'échec est patent. On peut restituer un théorème concernant l'homothétie, mais on ne sait toujours pas réduire ou agrandir une figure en usant d'une homothétie !

4. Une éducation citoyenne et laïque

4.1. L'ouvrage cité à propos de l'enquête sur les connaissances économiques et sociales d'élèves et étudiants est un compte rendu des " Premières rencontres nationales de l'enseignement de l'économie ", tenues à la Sorbonne le 26 avril 2003 sous l'égide de l'Institut de recherches de la FSU et de l'association Attac. Ses éditeurs (Nouveaux Regards et Syllepse) lui ont donné un titre on ne peut plus clair : *L'économie est l'affaire de tous*. Son sous-titre n'est pas moins alerte : *Quelle formation des citoyens ?* Les auteurs de ce texte - Christian Laval et Régine Tassi - écrivent notamment ceci :

> « L'École n'est cependant pas le seul lieu où l'on peut apprendre à comprendre l'économie et la société. [. . .] D'autres espaces sociaux de transmission de la culture économique existent aujourd'hui : associations spécialisées, mouvements d'éducation populaire, syndicats. Comment, aujourd'hui, exercer sa citoyenneté, prendre part à la vie publique et agir dans ce monde traversé par de multiples problèmes sociaux sans avoir ou sans pouvoir s'approprier une culture économique, sociale, juridique et politique permettant de maîtriser les concepts des sciences de la société et les mécanismes de l'organisation sociale ? »

Ce que suggèrent furtivement ces remarques, c'est que l'École tend à ne plus être regardée comme une institution sur laquelle on compte pour s'instruire de connaissances vivantes ; et que c'est tout naturellement ailleurs - dans la « vraie vie » - qu'on ira chercher, le moment venu, de telles connaissances. Par rapport à sa mission d'instruction supposée, l'École apparaît ainsi déréglée, « en dérangement ». Tout se passe comme si l'on ne croyait plus aux savoirs qu'elle prétend faire connaître, comme si elle était devenue un monde d'opérette, qui « compte pour du beurre » ; comme si elle n'était pas le premier lieu où l'on acquiert des connaissances d'anglais, d'économie, de mathématiques qui, plus tard, éventuellement complétées, permettront d'analyser et de comprendre les situations vécues et d'y intervenir à bon escient.

4.2. L'École devient alors un lieu où la rencontre avec ces étranges bibelots culturels en quoi se transmuent les savoirs scolaires semble largement immotivée, et, finit-on par penser, presque forcément arbitraire ; où, par obligation sociale et habitude culturelle, on passe quelques années de sa jeune vie à fréquenter des savoirs que la tradition impose sans autre motif que, au mieux, le bénéfice éventuel d'une valeur formative réputée sans doute par quelques-uns « essentielle », mais en vérité abstraite, indicible, en suspens par rapport à la vie extrascolaire présente et à venir - surtout à venir. La formation scolaire se résout alors, pour une majorité qui fait norme, en un je-ne-sais-quoi que plus d'un ancien élève, plus tard, se flattera de tenir pour presque rien. Or, lorsque les privilèges perdent ainsi leur évidence, l'âge des vanités impose ses jeux : à quels savoirs va-t-on jouer, cela n'est finalement qu'une affaire de distinction ; et tout savoir - géométrie hyperbolique, théorie des graphes, etc. - pourra convenir, s'il n'est pas démuni d'une certaine dignité épistémologique, et qu'on ne pousse pas le jeu, à son propos, au point d'en faire un outil effectif d'action dans le siècle - ce qui abolirait le suspens et ruinerait la transcendance formative. Le dérèglement et la corruption curriculaires laissent ainsi proliférer par places une moisissure noble dont on espère parfois que, *à la longue*, elle régénérera un curriculum en décomposition. Pourtant, comme l'écrivait autrefois John Maynard Keynes (1883-1946), « *in the long run, we are all dead* » - à long terme, nous sommes tous morts.

4.3. Il ne me semble pas qu'existe la moindre chance de régénération spontanée. Il me semble en revanche qu'une action d'envergure est immédiatement possible, utile, nécessaire. On peut entendre certains des constats précédents comme pointant un fait désolant autant qu'imparable : trop de jeunes feraient le gros dos devant ce que l'École prétend leur apporter et en seraient réduits, demain, à chercher ailleurs ce qu'elle leur propose aujourd'hui en vain. Je suggère de cela une lecture inverse : ce n'est pas les jeunes qui abandonnent l'École et ses savoirs, c'est l'École avec ses savoirs de fantaisie qui abandonne les jeunes, et qui, à travers eux, *abandonne la société*. Je crois que nous sommes aujourd'hui devant une crise de désajustement semblable à celle dont d'Alembert (1717-1783) se faisait en termes vifs le dénonciateur, vers le milieu du XVIII^{e} siècle, dans l'article COLLEGE de l'*Encyclopédie*, que je me permettrai de citer un peu longuement :

> Humanités : on appelle ainsi le temps qu'on emploie dans les collèges à s'instruire des préceptes de la langue latine. Ce temps est d'environ six ans. On y joint vers la fin quelque connaissance très superficielle du grec ; on y explique tant bien que mal les auteurs de l'Antiquité les plus faciles à entendre ; on y apprend aussi tant bien que mal à composer en latin ; je ne sache pas qu'on y enseigne autre chose [...].
> Rhétorique : en rhétorique on apprend d'abord à étendre une pensée, à

> circonduire et allonger des périodes et peu à peu l'on en vient à des discours en forme, toujours ou presque toujours en langue latine. On donne à ces discours le nom d'amplifications ; nom très convenable en effet puisqu'il consiste pour l'ordinaire à noyer dans deux feuilles de verbiage ce qu'on pourrait et devrait dire en deux lignes [...].
> Philosophie : après avoir passé sept ou huit ans à apprendre des mots ou à parler sans rien dire, on commence enfin, ou on croit commencer, l'étude des choses ; car c'est la vraie définition de la philosophie. Mais il s'en faut bien que celle des collèges mérite ce nom : elle ouvre pour l'ordinaire par un compendium qui est, si on peut parler ainsi, le rendez-vous d'une infinité de questions inutiles sur l'existence de la philosophie, sur la philosophie d'Adam, etc. On passe de là en logique : celle qu'on enseigne, du moins dans un grand nombre de collèges, est à peu près celle que le maître de philosophie se propose d'apprendre au bourgeois gentilhomme [...].
> Il résulte de ce détail qu'un jeune homme, après avoir passé au collège dix années qu'on doit mettre au nombre des plus précieuses de sa vie en sort, lorsqu'il a le mieux employé son temps, avec la connaissance très imparfaite d'une langue morte, avec des préceptes de rhétorique et des principes de philosophie qu'il doit tâcher d'oublier [...].

Comme il y a deux siècles et demi, c'est, selon moi, à une révision radicale des épistémologies scolaires qu'il faut aujourd'hui travailler.

4.4. Comment réinscrire l'École dans la société ? Comment refonder, sur ce point, notre civilisation ? Je partirai ici d'une notion qu'il me faudra un peu commenter : celle, antique, de « vie bonne ». L'École est un ressort essentiel dans une civilisation où la société, par divers organes, s'efforce de faire la vie meilleure à chacun. La Déclaration d'indépendance américaine - dite « des Treize Colonies » - du 4 juillet 1776 range ainsi « la poursuite du bonheur » - *the pursuit of happiness* - parmi les droits inaliénables du peuple :

> We hold these truths to be self-evident, that all men are created equal, that they are endowed by their Creator with certain unalienable Rights, that among these are Life, Liberty and the pursuit of Happiness. That to secure these rights, Governments are instituted among Men, deriving their just powers from the consent of the governed, That whenever any Form of Government becomes destructive of these ends, it is the Right of the People to alter or to abolish it, and to institute new Government, laying its foundation on such principles and organizing its powers in such form, as to them shall seem most likely to effect their Safety and Happiness.

En France, la constitution du 24 juin 1793 énonce, en son article premier : « Le but de la société est le bonheur humain. » Bien entendu, il n'y a pas un accord immédiat sur ce qu'est la vie bonne ni sur la manière d'y parvenir. La chose est évidente, elle ne doit pas troubler : elle est *la* question politique par excellence. Formellement, toutefois, l'affaire peut se dire en peu de mots (mais avec quelques symboles). Des questions Q se posent ; faire la vie meilleure, c'est concourir à apporter à ces questions Q des réponses R jugées les meilleures possibles. Quelle contribution l'École peut-elle donc apporter à cet effort pour aller vers la vie bonne ? L'École a d'abord une fonction *critique* : elle doit aider à déconstruire les questionnements tout faits, les questions Q obligées, qui sont posées mais qui, peut-être, ne se posent pas, ou ne se posent plus, etc. Elle doit aussi aider, bien entendu, à analyser, à évaluer les réponses R toutes faites qu'apporte la culture, ces réponses que j'ai pris l'habitude de noter $R^{\diamondsuit}$, ce que je lis « r poinçon », parce qu'il s'agit là toujours, peu ou prou, des réponses « estampillées » en quelque institution ou en quelque ensemble d'institutions - des réponses institutionnelles, donc. Mais l'École a encore et surtout une fonction essentielle d'aide à la production de réponses R, que je nomme cette fois $R^{\heartsuit}$ (« r cœur ») en les référant ainsi à ceux qui les produisent - ce sont des réponses selon leur cœur -, mais en soulignant qu'elles seront pour tous les autres, ou pour les mêmes mais plus tard ou ailleurs, simplement, des réponses $R^{\diamondsuit}$.

4.5. Il y a dans le schéma précédent une subtilité qu'il convient d'expliciter. Ce schéma se concrétise banalement en ce fait que, allant à l'École, je suis mis en contact avec des questions Q et des réponses $R^{\diamondsuit}$, que j'aurai à étudier, c'est-à-dire à observer, à analyser, à évaluer. Mais aucune réponse ne saurait m'être imposée comme étant *la* bonne réponse, comme participant authentiquement de la vie bonne ; et cela pour cette raison que, dans l'École du *laos* - dans l'École *laïque*, donc, mais en un sens qui étend au-delà du religieux l'acception usuelle de ce qualificatif -, par définition il n'est pas question d'indiquer, et moins encore d'imposer, une conception déterminée de la vie bonne. Ce serait sortir du cadre de la laïcité ainsi entendue. Une réponse $R^{\heartsuit}$ peut par exemple être construite et validée provisoirement par la classe, sous la direction du professeur, pour que les choses suivent leur cours, pour que la vie ensemble se poursuive. Mais chacun, en droit, et pas seulement en fait, retrouve sa liberté à l'endroit du couple $(Q, R^{\heartsuit})$ dès qu'il ou elle sort de la classe. L'École en tant qu'elle est laïque a pour mission de *faire connaître* des couples $(Q, R^{\diamondsuit})$, y compris sans doute le couple $(Q, R^{\heartsuit})$. Mais elle ne saurait chercher, par exemple, à faire aimer telle réponse $R^{\diamondsuit}$, ni *a fortiori* à intriguer pour la faire adopter comme « bonne réponse » à Q ! Une conséquence trop méconnue du principe de laïcité mérite d'être ici nettement soulignée :

contrairement à ce qu'on a répété à l'envi, le professeur de mathématiques n'a pas à chercher à « faire aimer » les mathématiques qu'il a mission d'enseigner à ses élèves : ce serait une faute morale lourde contre la laïcité. Il doit s'efforcer de les leur faire *connaître*, ce qui est autrement exigeant. Il n'a pas davantage, cela va sans dire, à vouloir les leur faire détester ! Simplement, le fait que tel élève aime ou n'aime pas relève (en droit et, inéluctablement, *en fait*) d'une liberté personnelle proprement inaliénable ; et ce serait tyrannie que de prétendre seulement y toucher ! Faites connaître, le plus justement, le plus exactement qu'il sera possible. L'amour, la détestation ou l'indifférence sont affaire personnelle et viendront par surcroît.

4.6. De quelles questions Q se soucier à l'École ? C'est par sa réponse à cette question que l'École du *laos* abandonne les jeunes générations et la société ou, au contraire, contribue à faire la vie bonne - qu'elle s'interdit pourtant même de définir ! Les « grandes » questions, les questions génératrices de l'éducation scolaire doivent être celles-là même qui verrouillent le plus le chemin de la vie bonne pour les générations montantes et pour la société où elles entrent - et que, demain, à leur tour, elles feront. Comment vivre, seul, à deux, ensemble, *ethnos* avec *ethnos* plutôt qu'*ethnos* contre *ethnos* ? Comment éviter les conflits ? Comment les gérer ? Quels risques - « naturels » ou autres - courons-nous, individuellement, collectivement ? Que pouvons-nous espérer faire ? Que font les autres ? Que croient-ils ? Que sont leurs valeurs, leurs projets, leurs renoncements ? Etc. Je résumerai et j'approfondirai tout cela par une formule que j'emprunte à un pédagogue américain, Paul Gagnon, dans un article intitulé "What Should Children Learn ?" Ce que l'École doit enseigner, écrit Gagnon[6], c'est d'abord "*the essential core of learning that all students in a modern democracy have the right not to be allowed to avoid.*" L'École doit ainsi mettre en contact les élèves avec tout ce qu'ils ont le droit, dans une démocratie moderne, qu'on ne leur permette pas d'éviter. Pour le dire autrement : avec tout ce qu'ils ont le droit qu'on leur interdise de ne pas rencontrer ! La formule parle d'elle-même, mais je voudrais la commenter un peu. L'École apparaît ainsi comme cette institution sociale qui me force à des rencontres - avec des questions Q et des réponses $R^\Diamond$, avec le travail d'élaboration de réponses $R^\heartsuit$ - que je n'aurais sans doute pas faites si l'École ne les avait pas programmées

[6]L'article a paru dans le numéro de décembre 1995 du mensuel *The Atlantic Monthly*, p. 65-74.

au nom de la société et de la poursuite du bonheur. Ces rencontres me permettent de sortir de mon monde d'origine, me font voir d'autres manières de se vivre comme Terrien, comme homme ou comme femme, de vivre avec les autres, d'agir au quotidien, de concevoir et de réaliser des projets personnels ou collectifs, de connaître d'autres mœurs, d'autres vies, etc. Sortir de sa famille, de son quartier, de sa ville, de son pays, et même de la civilisation où l'on est venu au monde, se frotter aux autres manières de vivre, c'est ce que j'appelle se *civiliser* - et le processus de civilisation, au plan individuel comme au niveau des collectifs, n'est jamais achevé ! L'École est un foyer de civilisation, de contact avec d'autres manières de se civiliser. Mais où sont les mathématiques là-dedans ?

5. Vers une nouvelle épistémologie

5.1. « Redonner sens » aux mathématiques et aux sciences, au fait de les enseigner (d'un côté) et de les apprendre (de l'autre), telle est l'une des formulations les plus usuelles du problème d'ensemble auquel l'état de la société et des mathématiques nous confronte aujourd'hui. En bien des cas, une question de mathématiques Q naît au sein d'une « situation du monde » dans laquelle certaines personnes doivent accomplir une certaine tâche sans doute *non mathématique* mais, en quelque façon, *mathématiquement problématique*, engendrée elle-même par une activité sociale que l'on se borne alors *à évoquer* et qui se trouvera bientôt expulsée de la scène mathématique ou n'y figurera plus qu'à titre de lointain décorum. Aussi, alors même que les mathématiques (et les sciences) nourrissent leur développement des problèmes que soulève la vie sociale dans son infinie diversité - notamment à travers son dialogue avec la nature -, la société n'y apparaît au mieux, dans l'état actuel des choses, que comme un horizon dénué de signification à l'endroit des gestes propres aux disciplines de connaissance qui y trouvent pourtant leur premier moteur. Les mathématiques, on l'a suggéré, se retirent alors du monde ; et le monde, en conséquence, s'éloigne des mathématiques. Que faire ?

5.2. Je poserai ici, pour mieux situer ma réponse, que la résolution des difficultés associées au confinement culturel des mathématiques et des autres disciplines scolaires passe par la reconnaissance du principe socio-épistémologique suivant : contrairement au postulat fondant le Grand partage institué autour de 1600 entre « sciences de la nature » et « sciences de la culture », contrairement à l'opposition entre une culture scolaire « classique » - qui aura façonné tant bien que mal les élites sociales pendant des siècles - et une culture « moderne » qui ne parvient toujours pas à se faire reconnaître au même niveau de légitimité culturelle, toute science - « de la Nature » ou « de l'Homme et de la Société » - doit être regardée, pensée, vécue comme ayant pour objet d'étude un certain système, à la fois spécifique et évolutif, *de conditions et de contraintes de la vie et du développement des sociétés humaines et des individus qui les composent.* Toute science, ainsi, entretient un commerce déterminé avec la vie sociale, et son étude ne saurait sans en contrefaire la réalité la couper de cet ancrage vital. Inversement et pour les mêmes raisons, on ne saurait étudier la vie des hommes et des sociétés sans prendre en compte les contraintes physiques, chimiques, biologiques, mathématiques qui la déterminent et que les sciences correspondantes - physique, chimie, biologie, mathématiques - élucident et, souvent, permettent de déplacer ou d'annuler[7] .

5.3. Je donne tout de suite, faute de mieux, deux exemples très simples de contraintes de nature mathématique sur la vie « des hommes et des sociétés ». Un groupe de travail d'une institution internationale comporte sept personnes ; faute d'avoir pu se mettre d'accord sur une langue de travail commune, chacune d'elle s'exprimera dans sa langue, des interprètes assurant une traduction simultanée pour les autres membres du groupe. Si l'on suppose les sept langues toutes différentes, si l'on suppose aussi que chaque interprète ne traduit que dans un sens (du portugais vers le grec mais pas du grec vers le portugais, par exemple), le nombre d'interprètes nécessaires sera égal au nombre de *couples* de langues distinctes : les sept personnes seront donc entourées de... quarante-deux interprètes - conclusion qui fait apparaître judicieuse la recherche d'un compromis quant aux langues de travail du groupe[8] . Second exemple, qui porte sur une question de probabilité : si, dans un ensemble humain assez vaste qui réalise exactement la parité entre les sexes (la proportion d'hommes y est égale à la proportion de femmes), on veut constituer une instance composée de quatre personnes, et si l'on est attaché au principe

[7]Cette exigence devrait avoir une incidence sensible sur la formation des acteurs et des producteurs des SHS - Sciences de l'Homme et de la Société - , qui se doit d'inclure une initiation appropriée aux sciences des contraintes et conditions de nature mathématique, physique, chimique, biiologique, etc., de la vie des sociétés.

[8]Sur un tel compromis - dit du « multilinguisme intégral contrôlé » - dans le cadre du parlement européen, onpourra se reporter à l'adresse internet suivante : http ://www.europarl.eu.int/interp/public/enlarge_fr.htm

de parité (deux hommes et deux femmes), il faudra l'assumer expressément : car, à s'en remettre au hasard, on aurait en ce cas 5 chances sur 8, soit 62,5 % de chances de devoir accepter une répartition non paritaire !

5.4. Les exemples précédents évoquent, en quelque sorte, des interventions *directes* de savoirs mathématiques dans l'organisation de la vie sociale. En bien des cas cependant, les mathématiques élucident et concourent à faire évoluer les conditions et contraintes de la vie des institutions sociales de manière *indirecte*, en élucidant et en concourant à faire évoluer des conditions et contraintes de nature biologique, ou chimique, ou physique, etc., qui pèsent sur la vie des institutions et des hommes. Ainsi retrouve-t-on tout le spectre des interventions possibles des mathématiques au service de l'intelligence et de la maîtrise des conditions et contraintes de la vie des sociétés. La problématique des mathématiques comme sciences de certaines conditions et contraintes de la vie des hommes (pris dans leurs assujettissements institutionnels, psychologiques, biologiques, physiques, etc.) peut être résumée en un schéma déjà ébauché : la vie sociale, dans tous ses aspects, conduit à envisager des questions Q auxquelles il convient d'apporter des réponses R. La chose requiert la constitution de *systèmes didactiques* $S(X, Y, Q)$, où X est le collectif qui *étudie* Q et Y l'équipe qui *dirige l'étude* de Q par X. (Bien entendu, on peut avoir $Y = \varnothing$.) C'est le système didactique $S(X, Y, Q)$ qui va créer une réponse R à la question Q, ce qu'on peut noter : $S(X, Y, Q) \hookrightarrow R$. Comme il en va aujourd'hui (depuis la rentrée 2000 en classe de première) au lycée avec les TPE - dont l'ancêtre immédiat sont les *travaux d'initiative personnelle encadrés* (TIPE) introduits dans les classes préparatoires aux grandes écoles (CPGE) à la rentrée 1995 - et, au collège (depuis la rentrée 2002 en 5$^{\text{e}}$), avec les IDD (itinéraires de découverte), la question Q n'est pas nécessairement une question de mathématiques, ou de physique, etc. La *production* d'une réponse R suppose des *savoirs* $S_1, , S_n$ et plus généralement des *œuvres* $O_1, \ldots, O_m$ que leur mise en jeu *motive* en leur conférant par cela même une raison d'être déterminée, selon une dynamique qu'on peut noter ainsi : $S(X; Y; Q)_{S_1, S_2, \ldots, S_n, O_1, O_2, \ldots, O_m} \hookrightarrow R$.

5.5. Permettre aux mathématiques enseignées de sortir de leur splendide isolement pour retrouver le monde, alors, c'est non seulement faire « travailler » les mathématiques sur des questions Q non nécessairement mathématiques (comme il en va dans les TPE ou les IDD), mais les y faire travailler *de concert avec d'autres savoirs*, en une symphonie *codisciplinaire* où les mathématiques concourent avec d'autres disciplines à élucider des conditions et contraintes de toute nature qui déterminent la production de réponses R à des questions Q. Mais le même schéma vaut en vérité tout autant si la question posée, Q, est de nature mathématique. Dans tous les cas, on s'efforcera d'observer le plus rigoureusement possible un « principe de symétrie » qui, parmi les savoirs $R_1, \ldots, R_n$ et les œuvres $O_1, \ldots, O_m$ potentiellement *utiles* dans la production de R impose de n'en exclure *a priori* aucun, quelle qu'en soit la « nature » (mathématique ou autre), et oblige de même à intégrer dans la réponse R produite (ou dans l'organisation de savoir dont elle sera un fragment fonctionnel) les savoirs et les œuvres que sa production aura *effectivement* mobilisés. Ainsi se bâtit la « synthèse », ce *trésor mathématique* (mixte), alimenté par tous, mais dont la bonne gestion est l'objet spécifique du « souci mathématicien » propre à la classe de mathématiques. À ce jeu, il se peut, certes, que certaines parties des mathématiques traditionnellement honorées dans une logique monumentaliste ne soient pas « sauvées » : car le principe de symétrie, qui, localement, fait dépendre le sort d'un savoir mathématique de sa mobilisation effective dans les activités d'étude et de recherche - les AER - menées à bien, devient ici le critère décisif.

6. Vers une nouvelle didactique scolaire

6.1. Les dispositifs institutionnels particuliers que sont les IDD, TPE, PPCP (" projets pluridisciplinaires à caractère professionnel ", en lycée professionnel) et autres TIPE relèvent d'un schéma épistémologique commun, celui définissant ce que je nommerai d'une façon générale un *parcours d'étude et de recherche* - un PER -, notion que je voudrais situer rapidement.

6.2. Tout d'abord, deux grands principes doivent être rappelés. Premier principe, les savoirs S sont des « machines » à produire des connaissances utiles à la création de réponses R à des questions Q. C'est ainsi que, dans l'activité humaine extrascolaire, les savoirs ont été engendrés et sont mobilisés, remaniés, développés, élagués, etc. - et non pour être exposés comme en un musée, visités, vénérés. Deuxième principe : contre le point de vue monumentaliste, qui donne le primat à l'étude « à vide » des savoirs et rejette au second plan, voire oblitère, les couples (Q, R), le point de vue *fonctionnel* met au premier plan les couples (Q, R), et ne promeut un savoir S qu'à proportion de son utilité éprouvée dans l'étude de questions Q et l'élaboration de réponses R. Le premier point de vue sacrifie sans ambages les *fonctions* d'un savoir S comme outil de production de connaissances au profit de la rencontre « directe », explicite, formelle avec la *structure de* S - le pari étant, quand pari il y a, que les usages idoines s'imposeront d'eux-mêmes le moment venu. Le second point de vue conduit à considérer au contraire qu'un savoir est sacrifié, y compris dans ses usages ultérieurs éventuels, dès lors qu'il n'est jamais apparu comme ce qui permet de répondre à certaines questions, de résoudre certains problèmes, lorsque, donc, on ne l'a jamais rencontré dans le cadre d'une mobilisation transpositive de nature *fonctionnelle*.

6.3. Pourquoi des *parcours* et pas seulement des *activités* d'étude et de recherche ? La mise en œuvre d'un semblant de point de vue fonctionnel a été corrélée, depuis deux décennies environ, avec la promotion didactique des « activités ». Cette pratique « activiste » est aujourd'hui assez ancienne pour qu'un fait soit regardé ici comme acquis : les « activités » n'ont pas véritablement permis de passer d'une pratique monumentaliste à une pratique fonctionnelle. Deux points d'arrêt peuvent, à cet égard, être identifiés. Le premier tient en un effet de domination de l'idéologie monumentaliste : en règle générale, les « activités » proposées ont moins pour but, aujourd'hui, de répondre à quelque question Q jugée cruciale, et dont l'étude rendrait très improbable le fait de ne pas rencontrer, à titre d'outil efficace voire exclusif, un certain savoir S désigné par avance, que de ménager une transition avec le moment, tenu pour seul décisif, de la rencontre *frontale* avec (la structure de) S ; d'où, au reste, l'habitude, si naïvement révélatrice, de les désigner comme des *activités préparatoires*. Le second point d'arrêt est d'une autre nature (même si, en pratique, il paraît lié au premier, dont on peut mettre du temps à le distinguer). Supposant en effet dépassé le premier obstacle, les " activités " ayant fait place à des AER, des *activités d'étude et de recherche*, ordonnées à la co-construction de réponses R à une question Q et de savoirs S fonctionnellement désirables, le « nouveau cours » bute sur un autre obstacle : des AER réputées *ad hoc* et isolées, structurellement et fonctionnellement, ne résistent guère à une écologie scolaire encore fortement monumentaliste : très rapidement, elles sont comme emportées par la formidable pression exercée par les savoirs en manque d'enseignement !

6.4. Dans le cas de la classe de mathématiques, ce blocage dirimant conduit à envisager une modification décisive de l'écologie de l'étude scolaire, par l'arrimage du temps didactique non plus à la succession des savoirs à enseigner abordés d'un point de vue structurel (comme dans la pratique classique, encore essentiellement dominante), et pas davantage à une succession d'AER dont chacune ne ferait guère que représenter, telle une ambassade avenante, un savoir monumental prenant sa place dans une procession pour l'essentiel inchangée (comme on le voit dans l'enseignement semi-rénové actuel), mais à ce que j'ai nommé, donc, des *parcours d'étude et de recherche* - des PER -, chantiers bien trop vastes et, *a priori*, bien trop sous-déterminés pour qu'on les prétende dédiés au « forçage » de tel ou tel ensemble précis de savoirs S. Un PER est engendré par une question Q à *fort pouvoir générateur*, susceptible d'imposer de nombreuses questions dérivées et de conduire ainsi à rencontrer un grand nombre de savoirs à enseigner - et quelques autres, qui marqueront la limite provisoire du chantier. L'ensemble des PER d'une année scolaire doit idéalement permettre de « couvrir » le programme sans lacune, mais non sans un certain nombre de redondances utiles aux apprentissages. Sans viser aucunement à satisfaire ici le critère de bonne couverture, donnons, à titre de simple illustration, quelques thèmes de PER que l'on situe, en l'espèce, dans une classe de mathématiques de 4e - même si la question génératrice d'un PER peut être travaillée à différents niveaux du cursus scolaire. On pourra, dans ce cadre, envisager par exemple un PER portant sur la question « Comment calculer sur des "grands nombres" ? » - comment, par exemple, obtenir de manière fiable l'expression décimale exacte de l'entier 123456789123456789^2 quand on ne dispose que d'une « petite » calculatrice ? On pourra encore lancer un PER centré sur la question « Comment contrôler au mieux ses calculs (numériques, mais aussi algébriques) à l'aide d'une calculatrice ? » - comment, par exemple, s'assurer qu'on a bien $420/595 = 12/17$ ou $(5x + 1)(2x - 3) = 10x^2 - 13x - 3$? On pourra, de même, proposer aux élèves de s'interroger au long cours sur la question « Comment déterminer si la réciproque d'un théorème est démontrable ou, au contraire, réfutable ? » - comment déterminer par exemple si un triangle dont deux bissectrices ont même longueur est bien isocèle ? Mais on pourra aussi articuler le temps didactique à des PER d'apparence plus ciblés, afin d'amener sur le devant de la scène didactique des ingrédients du programme qui risqueraient sinon d'en être refoulés, comme il en va, par exemple, avec la notion d'*indice* en 4$^{\text{e}}$ (dont, il est vrai, l'étude n'est pas strictement obligatoire) : comment, ainsi, comparer les variations de deux quantités variables ? Un prix qui passe de 3,5 € à 5,2 € augmente-t-il plus, ou moins, qu'un prix qui augmente de 4,7 € à 6,9 € ? Etc.

6.5. Du fait même de son caractère ouvert, le questionnement engendré par un PER « disciplinaire » (en mathématiques, en physique, en biologie, en histoire, etc.) déborde généralement du cadre strict de la discipline au sein de laquelle il est envisagé. Ainsi, comment, en classe de mathématiques, parler valablement d'*indice* sans mentionner quelques-uns des usages les plus communs en dehors des mathématiques (le programme mentionne... la géographie) de cet outil numérique ? Considérons de même cet autre exemple, qui participe du même souci de mettre en avant une question souvent parcimonieusement travaillée, celle des *volumes* : « Comment calculer le volume d'un objet ? » - comment, par exemple, calculer le volume d'un tas de pierres, d'un talus, d'un fossé ? On touche, avec cette dernière question, à des pratiques sociales immémoriales, dont toute trace a été anciennement gommée de l'enseignement général et qui devront pourtant, sauf à limiter arbitrairement le travail à accomplir, faire l'objet d'une *enquête* même rapide - par exemple autour de la question « Qui se soucie de calculer des volumes aujourd'hui ? » Un PER « en mathématiques » est ainsi presque nécessairement, de par son absence de normalisation épistémologique *a priori*, une affaire de mathématiques *mixtes*, où des objets mathématiques, majoritaires, se mêlent à des objets relevant d'autres univers de l'activité humaine. Le phénomène de débordement disciplinaire sera évidemment plus net encore si l'on choisit de s'interroger, fût-ce à partir des mathématiques ou de telle autre discipline que l'on voudra, sur des phénomènes qui relèvent plus franchement encore d'une sphère *a priori* tout autre : ainsi en irait-il, par exemple, si l'on décidait d'un parcours d'étude et de recherche impulsé par la question « Pourquoi existe-t-il différents modes de scrutin ? », cas dans lequel des coopérations entre plusieurs disciplines scolaires seraient sans doute envisagées.

6.6. La mise en œuvre de la nouvelle épistémologie que la notion de PER concrétise appelle une nouvelle didactique scolaire, que je me contenterai d'illustrer par un exemple. Dans l'étude d'une question Q, il ne s'agit pas seulement de construire $R^\heartsuit$ à partir des matériaux issus de l'analyse et de l'évaluation d'une pluralité de $R^\diamond$ attentivement observés ; il est souvent nécessaire de *déconstruire* des $R^\diamond$ « dominants », qui étouffent le questionnement et qui gêneraient la réception de la réponse $R^\heartsuit$. À propos par exemple de la question « Comment contrôler au mieux ses calculs à l'aide d'une calculatrice ? », une réponse $R^\Diamond$ concernant le contrôle d'une égalité supposée - par exemple celle des fractions 420/595 et 12/17 - est que le verdict de la calculatrice (qui affiche ici, pour l'une et l'autre fraction, une même expression décimale : 0,70588...) ne serait pas fiable, au motif qu'il pourrait se faire que, *en poursuivant la division*, on découvre que les deux suites de décimales diffèrent par exemple à la 15$^{\text{ème}}$ place, ou à la 40$^{\text{ème}}$ place, etc. Or cette réponse est, du point de vue mathématique, lourdement *fausse*. Supposons en effet qu'on forme la différence des fractions 420/595 et 12/17 ; puisque 595 est un multiple de 17 (on a $17 \times 35 = 595$), on est certain, d'après les règles usuelles du calcul sur les fractions, que cette expression s'écrit sous la forme $\pm k/595$, où k est un entier positif ou nul. Si k n'est pas nul,$k/595$ est supérieur ou égal à $1/595 = 0{,}00168\ldots$ Pour que k soit non nul, il faudrait donc qu'une différence apparaisse au moins dès la *troisième* décimale : c'est ainsi par exemple qu'on a $419/595 = 0{,}70420\ldots$ ou $421/595 = 0{,}70756\ldots$ alors que, on l'a dit, $12/17 = 0{,}70588\ldots$ Il suffit donc ici, pour conclure à l'égalité des fractions 420/595 et 12/17, de vérifier que les écritures décimales de ces fractions sont identiques *jusqu'à la troisième décimale* (ce qui est bien le cas) : ils le seront alors *à n'importe quel rang*. D'une manière générale, le « travail » des réponses $R^\Diamond$, et en particulier la mise à bas de certaines réponses qui participent de tel ou tel *folklore* - ce mot désignant le système des connaissances majoritairement tenues pour assurées dans un public donné, par exemple chez les professeurs de telle discipline, ou chez leurs élèves, chez les parents d'iceux, etc. -, l'intégration subséquente des fruits de ce travail dans la réponse $R^\heartsuit$ sont un élément essentiel de tout acte d'étude et de recherche, qui est toujours, si peu que ce soit, intervention didactique, c'est-à-dire *intervention sociale visant la diffusion de connaissances déterminées auprès de certains publics* - celui que constituent les élèves d'une classe, les membres d'un jury d'examen ou de concours, les membres d'une profession, etc.

6.7. Pourquoi un tel travail est-il *vital* aujourd'hui ? Le système scolaire et plus généralement toute institution humaine se trouve toujours, dans une période historique donnée, à propos de nombre d'objets qui y ont un habitat et y occupent une niche déterminée, en proie à des croyances « folkloriques » qui, tout simplement, sont *fausses*. Ainsi en va-t-il, dans l'enseignement des mathématiques en France aujourd'hui, de la croyance qui, dans l'exemple ci-dessus, était supposée (à tort) rendre illégitime l'intervention de la calculatrice. Toute croyance fausse n'a pas forcément, dans un certain état historique de la société, des conséquences fâcheuses en tout domaine d'activité. Croire par exemple, selon un « folklore » déjà illustré sur le cas des fractions, que les expressions $3\sqrt{2}$ et $\sqrt{18}$, dont on aurait vérifié à la main qu'elles ont les mêmes deux ou trois premières décimales, qu'elles pourraient différer à la $15^{\text{ème}}$ ou à la $40^{\text{ème}}$ décimale, était sans conséquence sérieuse dans l'enseignement secondaire des années 1950. Aujourd'hui, des moyens de calcul puissants sont là, et n'importe quel élève pourra interroger la calculatrice d'un ordinateur, qui lui indiquera que les développements décimaux des deux expressions sont les mêmes exactement bien au-delà de la troisième décimale, et qu'on a par exemple : $3\sqrt{2}, \sqrt{18} = 4,2426406871192851464050661726290\ldots$ Pour établir l'égalité de ces expressions, les moyens de calcul disponibles dans les années 1950 ne laissaient guère d'autre possibilité aux élèves que d'apprendre le calcul sur les radicaux, lequel permet d'écrire : $\sqrt{18} = \sqrt{9 \times 2} = \sqrt{9} \times \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$. La situation des années 2000 est différente : si l'on veut motiver l'étude du calcul sur les radicaux, il faudra choisir d'autres situations génératrices que celles utilisées autrefois. C'est là un problème de petite ingénierie didactique dont la solution est suspendue à un autre problème, d'une profondeur incomparable. Les élèves, s'ils pouvaient parler franchement, et s'ils avaient les mots pour cela, pourraient nous dire à peu près ceci : « Vous nous interdisez d'utiliser la calculatrice pour voir si deux fractions, ou deux expressions numériques comportant un radical, sont ou non égales. Fort bien. Nous obtempérons. Mais vous ne pouvez pas nous empêcher d'observer que, chaque fois que nous avons eu à comparer de telles expressions, lorsqu'elles étaient égales la calculatrice affichait les mêmes chiffres ; et, lorsqu'il n'en était pas ainsi, les affichages différaient très vite - et non pas au-delà du dernier rang affiché. Hormis bien sûr dans quelque exemple fabriqué manifestement pour ça ! Alors, pourquoi cela ? Pourrait-on nous l'expliquer ? Ne pourrait-on pas nous dire pourquoi - si c'est bien le cas ! - ce qui nous apparaît comme une évidence ne serait en vérité qu'une illusion naïvement intéressée ? La calculatrice fait partie de notre pauvre vie mathématique, mais vous, sans autre forme de procès, vous la déclarez illégitime. D'un mot, vous renvoyez au néant ce qui est pour nous le premier réflexe, si contestable soit-il. Pourquoi l'École nous abandonne-t-elle ainsi ? » La demande est d'une aveuglante, d'une provocante légitimité ! Et c'est, de mon point de vue, une ardente obligation de l'École que de répondre à cette interpellation muette mais opérante. Supposons des expressions $a\sqrt{b}$ et

$\sqrt{c}$ (où $a, b, c \in \mathbb{N}*$) que l'on veut comparer[9] . Supposons alors que $a\sqrt{b}$ et $\sqrt{c}$ ont la même partie entière et les mêmes n premières décimales, en sorte qu'on a $\left|a\sqrt{b} - \sqrt{c}\right| < 10^{-n}$. Supposons de plus - c'est la condition clé ! - que $a\sqrt{b} + \sqrt{c} \leqslant 10^n$.
En multipliant l'inégalité $\left|a\sqrt{b} - \sqrt{c}\right| < 10^{-n}$ par $a\sqrt{b} + \sqrt{c}$, on obtient ceci : $\left|a^2b - c\right| < 10^{-n}\left(a\sqrt{b} + \sqrt{c}\right) \leqslant 1$. Le nombre $\left|a^2b - c\right|$, entier, ne peut être strictement inférieur à 1 qu'en étant nul : on a donc $a^2b - c = 0$, soit encore $\left(a\sqrt{b} - \sqrt{c}\right)\left(a\sqrt{b} + \sqrt{c}\right) = 0$, d'où enfin $a\sqrt{b} = \sqrt{c}$. Dans le cas de $3\sqrt{2}$ et $\sqrt{18}$ par exemple, on a $3\sqrt{2} + \sqrt{18} < 6 + 5 = 11 < 10^2$; par suite, dès lors qu'on sait que les écritures décimales de ces nombres sont les mêmes jusqu'à la deuxième décimale, on peut conclure à leur égalité. Bien entendu, une calculatrice ordinaire suffit à la tâche ! Le résultat mathématique précédent et les résultats de semblable facture adéquats aux diverses situations de calcul rencontrées constituent une mise à jour - sur *un* point, parmi beaucoup d'autres - des mathématiques du secondaire afin que celles-ci soient, si je puis dire, des mathématiques *responsables*. Des mathématiques qui manifestent clairement aux yeux des jeunes générations que l'École ne les abandonne pas, mais qu'au contraire elle se préoccupe au plus haut point de leur donner les moyens de penser le réel et d'entrer en lui armées de savoir et de raison.

[9]Ce qui suit livre la clé *mathématique* de l'affaire. Faute de place, on n'y trouvera qu'en filigrane le principe d'une organisation *didactique* appropriée à notre temps, qui, sur la question évoquée comme sur d'autres, inscrive enfin sereinement la calculatrice, laboratoire d'expérimentation numérique et outil d'aide au calcul, parmi les moyens pleinement légitimes et bien contrôlés d'un travail mathématique authentique.

SIMULATION STATISTIQUE ET ENSEIGNEMENT

Jean-Pierre Raoult
Laboratoire d'Analyse et de Mathématiques Appliquées
CNRS, UMR 8050
Université de Marne-la-Vallée
jean-pierre.Raoult@univ-mlv.fr

Quatre années après l'apparition de la simulation statistique dans les programmes d'enseignement des Mathématiques en classe de seconde dans les lycées en France, ce volet des programmes, s'il donne moins lieu à polémique que lors de son introduction, continue cependant à susciter dans le corps enseignant interrogations et inquiétudes et de nombreux professeurs avouent n'aborder cette tranche du programme qu'en fin d'année, au risque souvent de la laisser finalement de côté.

A mon avis, la réflexion sur :
- ce qu'est
- à quoi sert,
- comment peut se traiter

la SIMULATION STATISTIQUE, au regard de l'enseignement en Collège et Lycée, ne peut se mener sans une mise en perspective plus générale de l'ENSEIGNEMENT DE LA STATISTIQUE à ces niveaux d'études.

Ma conviction est qu'enseigner la statistique est :
- NÉCESSAIRE,
- DIFFICILE,
- POSSIBLE,

ces trois termes ne prenant leur sens qu'en fonction des buts qu'on assigne à cet enseignement.

1. Enseigner la statistique est NÉCESSAIRE

Personnellement, si je souhaite que la STATISTIQUE et le CALCUL DES PROBABILITÉS fassent partie du bagage des bacheliers, selon des modalités diverses selon les filières, ce n'est pas essentiellement en tant que **composantes de la culture mathématique** (ce qu'ils sont pourtant), **mais d'abord en tant qu'éléments de la culture du citoyen** (ou plus généralement de l'être humain en tant que sujet doté de SENS CRITIQUE).
A ce titre, Condorcet reste pour moi d'actualité, qui écrivait dans son texte sur l'enseignement des « Mathématiques Sociales » :

Cette exposition montrera toute l'utilité de cette science : on verra qu'aucun de nos intérêts individuels ou publics ne lui est étranger, qu'il n'en est aucun sur lequel elle ne nous donne des idées plus précises, des connaissances plus certaines ; on verra combien, si cette science était plus répandue, plus cultivée, elle contribuerait au bonheur et au perfectionnement de l'espèce humaine.

En d'autres termes, reprenant une belle citation faite par Yves CHEVALLARD dans sa conférence à cette même université d'été d'Animath le 25 août 2004, je trouve la Statistique digne d'être incluse dans la formulation de Paul GAGNON dans son article *What Should Children Learn* (*in* The Atlantic Monthly, décembre 1995, p. 71-72) :
the essential core of learning that all students in a modern democracy have the right not to be allowed to avoid.

MAIS ON PEUT OBJECTER (ET D'AUCUNS LE FONT, DE L'INTÉRIEUR COMME DE L'EXTÉRIEUR DE LA COLLECTIVITÉ MATHÉMATIQUE) :

Si l'enseignement de la Statistique est nécessaire, est-ce nécessairement le cours de Mathématiques qui en fournit le cadre optimum ?

De nombreuses raisons sont avancées pour situer l'enseignement de la Statistique au sein de celui des Mathématiques. Certaines ne sont à mon sens que partiellement valables ; passons les en revue.

a. Le bon usage de la Statistique (ou des statistiques) ne va pas sans raisonnement ; or le cours de Mathématiques est le lieu privilégié d'apprentisage du raisonnement.
CERTES, MAIS, en matière de regard raisonné sur la Statistique, il ne s'agit pas uniquement du raisonnement hypothético-déductif qui fonde les Mathématiques.

b. On fait grand usage en Statistique, comme en Mathématiques, d'outils de calcul numérique et de représentations géométriques.
CERTES, MAIS d'autres disciplines scolaires (Physique, Biologie, Economie ...) font aussi usage de tels outils et le font parfois de manière plus accessible aux élèves, car plus proche des besoins immédiats.

c. L'usage des calculatrices, des ordinateurs, est de plus en plus partie intégrante des enseignements de Mathématiques ; or la Statistique en constitue un domaine d'emploi privilégié.
CERTES, MAIS les employer dans des secteurs plus traditionnels de l'enseignement des Mathématiques (tels les calculs approchés de fonctions, d'intégrales, de solutions d'équations numériques ou différentielles ...) fournit déjà un vaste champ de mise en œuvre et on pourrait envisager de laisser un usage « routinier » des fonctions statistiques aux autres disciplines.

A MON AVIS, LA RAISON PRINCIPALE POUR FAIRE FIGURER LA STATISTIQUE AU SEIN DU COURS DE MATHÉMATIQUES EST LA SUIVANTE :
Le caractère « universel » des Mathématiques est indispensable pour donner à l'élève les clefs pour un usage lui aussi universel de la Statistique.
Pour mettre ici en avant la danger de la spécialisation dans tel ou tel type d'emploi, que seul le cadre du cours de Mathématiques permet d'éviter, je m'appuie sur l'avis de « grands praticiens » de la Statistique dans des domaines déterminés, tels Daniel SCHWARTZ (en Biologie et Médecine) ou Edmond MALINVAUD (en Economie).
Il faut en effet pouvoir à la fois :

- **donner vie aux concepts statistiques**, indépendamment d'un domaine d'application particulier (et cela seul l'enseignant de Mathématiques peut le faire) ;

- **motiver et concrétiser ces concepts** par des applications diversifiées, ce qui suppose de fournir au professeur de Mathématiques de la documentation appropriée et des occasions de contact avec les collègues d'autres disciplines ;
- **mettre en garde** contre des « illusions mathématiques », tel l'usage abusif du « linéaire » (et ceci encore est l'apanage du professeur de Mathématiques).

2. Enseigner la statistique est DIFFICILE

Il serait illusoire de nier cette diffculté.
Cette difficulté est d'abord attestée par l'expérience (presque tous les professeurs le disent !).
Personnellement, en plus de 40 ans où j'ai pratiqué des maquettes diverses pour l'enseignement de la Statistique dans différents contextes (ou aussi participé à leur élaboration), je n'ai jamais été pleinement satisfait : les voies possibles sont multiples, parfois fort éloignées les unes des autres, et toutes comportent des obstacles.
Il en résulte un premier objectif que j'assigne à mon présent exposé : **je voudrais pouvoir ici réconforter ceux de mes collègues qui « complexent » face à l'enseignement de la Statistique** ; j'aimerais leur dire, avec mon « autorité » de spécialiste et l'ancienneté de ma pratique :
Oui, c'est normal que vous trouviez cela plutôt dur !
Alors, que faire ?
Nous détaillerons un peu plus ci-dessous pourquoi et comment enseigner la Statistique nous paraît possible. Pour l'instant, nous affirmerons seulement qu'il est utile de s'appuyer sur une documentation appropriée (par manuels, fascicules ou internet) de plus en plus élaborée et que, en tout cas, il importe de se convaincre que le succès de cet enseignement exige chez l'élève une maturation progressive qui impose de le traiter, à une place modeste certes (celle que lui attribuent les programmes) mais **en continu sur l'année scolaire.**

Essayons d'analyser des raisons intrinsèques à cette difficulté (sous-jacentes aux arguments de « nécessité » que j'ai exposés plus haut) et ce sans nous limiter pour l'instant au cas de l'enseignement secondaire qui sera ensuite l'essentiel de notre propos.
L'apprentissage de la Statistique conduit à ARTICULER et HIÉRACHISER :

- applications « concrètes » et outils « généralisants »,
- aspect descriptif et initiation à l'aléatoire,
- usage d'outils logiciels (« boîtes noires ») et compréhension de ce qu'il y a « derrière » et de ce qu'ils produisent « vraiment »,
- résultats précis et approximations (souci de l'ordre de grandeur, que les enseignants de mathématiques avaient parfois tendance à évacuer vers d'autres disciplines plus expérimentales),
- éléments de théorie mathématique (par exemple la loi des grands nombres) et raisonnement de type inductif (« l'inférence statistique » où tout ce que l'on énonce a une « probabilité d'erreur »).

C'est pourquoi dans ce domaine toute mise en place d'un cursus d'enseignement suppose de faire un CHOIX DANS CES ARTICULATIONS ET CES HIÉRARCHIES. Il n'est donc pas étonnant que les programmes d'enseignement, en France, aient présenté plusieurs tels choix au cours des années ; cette variété de points de vue était naturelle mais a pu accroître parfois le désarroi des enseignants.

La meilleure chose à faire face à un désarroi est de tenter de l'analyser ; ceci me semble en assez bonne voie maintenant en France et à cet égard j'ai choisi, pour la suite de cet exposé, de faire référence non à la lettre des programmes ou à des documents d'accompagnement de ceux-ci (pourtant très riches) mais à des contributions datées de cette année (2004) :

1. Actes des sessions *Enseignement de la Statistique* lors des journées de la SFDS (Société Française De Statistique) tenues à Montpellier en mai 2004 (sessions dont le thème était cette année « enseignement de la simulation ») ; on y fera référence par la suite avec le sigle SFDS.

2. Manuscrit d'un ouvrage, à paraître début 2005 sous l'égide de l'APMEP (Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public), émanant de la Commission Inter IREM (Instituts de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques) *Statistique et Probabilités* ; il s'agit du premier tome (*Les outils de la Statistique*) d'un projet en deux tomes dont le titre global sera *Statistique au Lycée* ; on y fera référence par la suite avec le sigle CII.

3. Enseigner la statistique est POSSIBLE

Concentrons nous maintenant sur le choix actuel des programmes en France (hors sections technologiques ou professionnelles qui ont leur contraintes propres). Rappelonsen brièvement les caractéristiques :

AU COLLEGE
Présentation très simple de caractéristiques DESCRIPTIVES des séries numériques.

EN SECONDE
Prise de conscience de la VARIABILITÉ DES DONNÉES ALÉATOIRES :
- par le biais de la **simulation** (recours à l'ordre « RANDOM » des ordinateurs),
- sans théoriser les variables aléatoires (usage d'un vocabulaire volontairement NAIF en termes de « chances »).

EN PREMIERE ET TERMINALE
Introduction mathématisée des PROBABILITÉS (permettant la STATISTIQUE INFÉRENTIELLE).

Mon avis personnel est que ce choix, qui n'était certes pas le seul envisageable, est :
- COHÉRENT,
- PORTEUR DE SENS,
- RÉALISABLE.

Bien sûr, cette progression est à respecter sans dogmatisme (comme toujours dans l'enseignement) et en particulier je considère pour ma part que, en classe de seconde, l'enseignant peut s'autoriser éventuellement un peu de vocabulaire probabiliste si c'est ainsi qu'il se sent plus à l'aise. Mais il est essentiel de faire travailler les élèves sur des données et pour l'obtention de celles-ci d'articuler, là encore dès la seconde, simulations et exemples. Les documents d'accompagnement y aident et par ailleurs je recommande très vivement l'usage du logiciel français **gratuit SMEL**, qui a été très précisément conçu pour cela, à l'UFR de Mathématiques et Informatique de l'Université René Descartes (Paris V), avec le soutien du Minsistère de l'Education Nationale et de l'INRIA (Institut de Recherches en Informatique et Automatique). Le sigle SMEL signifie

Statistique Médicale En Ligne, car il s'agit de l'adaptation, pour les besoins de l'enseignement secondaire, d'un outil conçu au départ pour être convivial à l'usage de médecins plutôt ignares en Statistique ; il garde de cette histoire un riche corpus d'exemples réalistes mais accessibles (d'où, retombée intéressante, des possibilités de dialogue avec les enseignants de biologie). On y accède sur http ://www.math-info.univ-paris5.fr/smel

Limitons désormais nos considérations à la simulation, en nous focalisant sur les probl'emes :
- de conception,
- de mise en œuvre,

liées à son introduction comme AXE DU PROGRAMME DE STATISTIQUE EN SECONDE depuis 4 ans.
Je conseille en particulier ici la lecture des travaux de Claudine VERGNE qui effectue une thèse de didactique de la Statistique à l'université Montpellier II (s'adresser àl'IREM de Montpellier : irem@math.univ-montp2.fr) ; je reproduis le résumé de sa contribution aux Journées de la SFDS.

LA NOTION DE VARIABILITE DANS LES PROGRAMMES ACTUELS DE LA CLASSE DE SECONDE

La variabilité, voilà le mot clef
Daniel SCHWARTZ, Le jeu de la Science et du Hasard

Les nouveaux programmes de Mathématiques au Lycée (2000) ont mis l'accent sur la Statistique et tout particulièrement sur l'introduction de la notion de VARIABILITE. Il semble que cette partie des nouveaux programmes ait du mal à vivre dans les classes. Notre étude concerne la classe de seconde ; elle porte sur des éléments du curriculum officiel (programmes, document d'accompagnement, texte de la CREM (Commission de Réflexion sur l'Enseignement des Mathématiques). . .) et des éléments du curriculum réel (observation des professeurs dans la classe, cahiers d'élèves, manuels, questionnaires . . .). Elle tente de dégager la praxéologie en construction et d'envisager la question de sa viabilité, dans le but de mieux comprendre les raisons de ces difficultés. Ceci pourait éventuellement servir d'appui à des propositions visant à situer l'enseignement de la Statistique dans les classes ordinaires.
Il s'agit d'une étude en cours dont nous commenterons les premiers résultats.

Pour dégager les possibilités qui s'offrent pour l'enseignement de la simulation, il fait d'abord éliminer les ambiguïtés qui entourent cette notion.
Lors de la *table ronde* sur ce thème aux journées de la SFDS déjà citées, un éminent pédagogue de la Statistique, Pierre DAGNELIE (Professeur de Statistique en université d'Agronomie à Gembloux (Belgique), auteur de nombreux manuels réputés) a posé aux enseignants français la question suivante :

Que prétendez-vous simuler :
- une loi de probabilité ?
- un phénomène ?
- des mesures expérimentales ?

En réponse à cette question, remarquons tout d'abord que les acceptions les plus courantes du mot renvoient clairement à la SIMULATION D'UN PHÉNOMÈNE. Donnons en deux preuves.
La première preuve dépasse le cadre de la Statistique ; c'est un extrait de la définition qu'on trouve dans l'Encyclopædia Universalis :
La simulation est l'expérimentation sur un modèle. C'est une procédure de recherche scientifique qui consiste à réaliser une reproduction artificielle (modèle) du phénomène que l'on désire étudier, à observer le comportement de cette reproduction...

La deuxième preuve relève, elle, directement du champ de notre exposé ; on la trouve à l'intérieur de l'article Statistique, rédigé par Yadolah DODGE, professeur de Statistique à l'Université de Neuchâtel (Suisse), pour le Dictionnaire Encyclopédique (Dunod, 1993) :
La simulation est la méthode statistique permettant la reconstitution fictive de l'évolution d'un phénomène. C'est une expérimentation qui suppose la constitution d'un modèle théorique présentant une similitude de propriétés ou de relations avec le phénomène faisant l'objet de l'étude.
A partir de ces références, il pourrait sembler difficile de faire pratiquer à des élèves de seconde LA SIMULATION tout en faisant l'économie de la MODÉLISATION. C'est pourtant à cette économie qu'invitent les programmes français actuels, car ce n'est que pour la classe de première qu'on y lit :
On clarifiera brièvement les positions respectives de la modélisation et de la simulation... ; on parlera de simulation de la loi de probabilité P.

mais aussi, après présentation de quelques situations vues comme « simples » :
En dehors de tels cas, le choix d'un modèle à partir de données expérimentales est beaucoup plus délicat et ne sera pas abordé dans l'enseignement secondaire.

On remarquera au passage que, parmi les interprétations proposées par Pierre Dagnélie, les auteurs du programme de première ont retenu : SIMULATION D'UNE LOI DE PROBABILITÉ.
Des enseignants qui ont réfléchi à cette question relèvent la difficulté qu'il y aurait à dissocier Modélisation et Simulation ; on lira avec profit, dès la parution du volume de la CII, la contribution de Jean-Claude GIRARD et Michel HENRY titrée : *Modélisation et Simulation en classe : quel statut didactique ?*

En fait, la ligne directrice du programme actuel de seconde me paraît tenir en les trois propositions suivantes :

- la notion d'observations « équiprobables et indépendantes» est intuitive à partir d'un vécu concret antérieur (dés, pile ou face, tirages dans urnes avec remise et mélange), et peut donc être exploitée sans qu'il soit déjà besoin de la théoriser ;
- la sortie de « nombres au hasard » par une machine peut être naturellement admise par l'élève comme reproduisant le même type de phénomène ;
- la puissance et la rapidité de la machine permettent de mieux observer (et donc de mieux comprendre) de tels phénomènes.

Je tiens cette conception pour parfaitement viable. Mais je comprends les inquiétudes qu'elle soulève et dont je vais retracer ici certaines.

a. Lors de la table ronde de la SFDS, Gilbert SAPORTA, Professeur de Statistique au CNAM (Conservatoire National des Arts et Métiers) à Paris, a déclaré dans son intervention :
I*l y a comme un cercle vicieux :*
- on veut faire comprendre les variables aléatoires via la simulation,
- pour comprendre la simulation, il faut savoir ce qu'est une variable aléatoire (et aussi des variables aléatoires indépendantes).

b. De nombreux professeurs de Mathématiques dans l'enseignement secondaire m'ont déclaré en substance :
« On sait bien » que les générateurs de nombres au hasard dans les ordinateurs sont en fait déterministes.
En d'autres termes, il y a bien « simulation » dans l'appel au RANDOM, mais avec une autre signification que le sens « savant » développé jusqu'ici : il s'agit du sens courant (et un peu dévalorisant) de « faire semblant », comme on « simule une maladie » pour se faire accorder un congé ! ainsi l'ordinateur « ferait semblant » de sortir des réalisations de variables aléatoires équiréparties (sur l'ensemble des 10 chiffres) et indépendantes.

c. La tentation est alors forte, pour l'enseignant qui se veut honnête vis-à-vis des élèves, de leur faire observer des suites sorties par RANDOM et les amener à constater des régularités. Mais, toujours dans l'article de CII déjà cité, Jean-Claude GIRARD et Michel HENRY écrivent :
Souhaitant simuler un sondage. . . , avons nous réellement simulé quelque chose ? Ou avons nous seulement vérifié que la fréquence des réponses favorables est voisine de p, ce qui ne fait que confirmer que le fabricant de l'ordinateur et le concepteur du logiciel ont bien rempli leur cahier des charges ?

d. L'aspect « boîte noire » du recours au RANDOM semble à certains professeurs contraire à la déontologie du mathéamticien. C'est ainsi que Bernard PARISZ écrit, dans le volume CII :
Ce qu'il faut, c'est tempérer chez l'élève « l'effet boîte noire » inhérent à l'utilisation d'une machine.

Tous ces scrupules sont compréhensibles, mais ils me paraissent plus liés à la référence à des pratiques de l'enseignement mathématique qu'à des objections proprement scientifiques. En particulier, « BOITE NOIRE » ne signifie pas « ESCROQUERIE ». On peut considérer que toute la science progresse en admettant ici ou là des zones d'ombre autour desquelles on fait la lumière.
Précisons en ce qui nous concerne cette dialectique des zones d'ombre et de la lumière. Nous pouvons, il me semble, faire franchir un pas considérable à l'élève de seconde en **admettant** avec lui que l'on se trouve face à des phénomènes fondamentalement de même nature quand on enre-

gistre des sorties successives de l'ordre RANDOM ou que, par exemple, on observe des jets successifs d'un dé **considéré** non truqué (j'insiste sur ma mise en gras des mots **admettant** et **considéré**). Dans un cas comme dans l'autre, nous ne savons pas tout sur le phénomène qui se produit ; nous sommes tout aussi ignorants (et même plus !) des paramètres « physiques » qui génèrent la trajectoire du dé que des règles qui, dans le « comportement interne » de l'ordinateur, génèrent les sorties du RANDOM. Est-ce fondamentalement plus gênant de laisser dans l'ombre les secondes que les premiers (qui sont totalement inaccessibles) ? Je pense que NON.

En revanche, ce que nous devons éclairer pour l'élève, c'est, à partir de telles observations :
- QUOI REGARDER ?
- COMMENT REGARDER ?
et ainsi le faire progresser dans la familiarité avec les notions intuitives évoquées ci-dessus (ce qui plus tard servira de fondement pour élaborer des modèles et mettre ceux-ci à l'épreuve).
Je ne reprendrai pas ici des exemples qui ont pu être évoqués dans mon exposé devant les participants à cette Université d'Eté ou dans la discussion qui l'a suivi ; ils abondent aussi dans différents documents d'accompagnement des programmes, travaux des IREM... Je voudrais seulement dire que l'archétype de la « familiarisation » que j'appelais ci-dessus de mes vœux est, pour les concepteurs du programme de seconde comme pour moi-même, l'approche raisonnée de la loi des grands nombres, d'autant plus nécessaire que cette expression « loi des grands nombres » est tellement tombée dans le domaine courant qu'elle ne veut plus y dire grand chose.
Un entrainement type à cet égard consiste en faire effectuer plusieurs tracés, en fonction de n, de la proportion de succès lors de n expériences indépendantes résultant soit en un succès avec probabilité p soit en un échec avec probabilité $1 - p$, et ceci pour $p = 0,5$ (dé non truqué), ou $p = 0,51$ ou $p = 0,501$; dans ces derniers cas de dés truqués, àpartir de quelle valeur de n « voit-on », dans toutes les séries réalisées, la proportion rester distincte de 0,5 ?

Certes, il s'agit ici de constats et non de démonstrations mathématiques, et certains collègues peuvent se sentir gênés par ce type de pratique enseignante ; mais il y a là un excellent entrainement à la logique des tests d'hypothèse ou des intervalles de confiance, qu'il est évidemment trop tôt pour théoriser en classe de seconde, mais dont on sait combien elle est difficile d'accès pour des esprits non préparés.

Une autre réticence des enseignants devant ce type d'activité tient à ce qu'elle se prête mal à l'évaluation chiffrée des élèves (mais est-ce si grave en seconde, s'agisant d'une fraction somme toute bien minoritaire du programme ?).

Enfin certains professeurs voient mal comment organiser une trace écrite bien structurée du travail effectué, ce qui explique sans doute que soient peu pratiqués les « cahiers de statistiques » qui avaient été recommandés lors de la publication de ces programmes ; ils seraient pourtant bien utiles : l'élève y collerait des sorties sur imprimantes des graphiques réalisés et le professeur veillerait à la précision et à la correction grammaticale des commentaires.

C'est sur cet exemple et ce vœu, somme toute assez modestes, que je clos cet exposé, espérant, pour reprendre l'articulation de mon propos, avoir convaincu mes collègues de la nécessité de l'enseignement de la Statistique, les avoir apaisés quant à sa difficulté et les avoir stimulés quant à sa possibilité.

Deux brochures, fruit d'un travail de 10 ans, qui formulent des propositions précises quant à la méthode de conception ou de lecture d'un programme qui veut se construire, de façon originale, à partir de grandes classes de problèmes : dix "problématiques" qui inscrivent objectifs, compétences et contenus plus en système qu'en une suite éclatée de chapitres du cours.

Les contenus doivent apparaître, non comme une fin en soi, mais comme une issue et un moyen incontournable pour résoudre des problèmes significatifs.

Tome 1 (n° 150) : prix adhérent : 10 €
Tome 2 (n° 154) ; prix adhérent : 7 €
Les deux tomes ensemble : prix adhérent : 15 €

EXPOSÉS

Activités de popularisation des mathématiques soutenues par des TICE

RECHERCHE ET ENSEIGNEMENT
L'expérience Math en Jeans
Bilan de 11 ans de pratique
à l'Université de la Méditerranée

Laurent Beddou - Christian Mauduit

I - Présentation

Professeurs de mathématiques respectivement en lycée et à l'université, secrétaire et président de l'association *Math Pour Tous*, nous proposons depuis une dizaine d'années à des lycéens et des étudiants des enseignements basés sur des activités de recherche en mathématique. Au sein de notre association, nous cherchons à rendre accessibles au plus grand nombre des connaissances scientifiques, en particulier mathématiques.
Bien sûr, il y a beaucoup de manières d'arriver à ce but et nombreux sont ceux qui s'y exercent. La particularité de notre démarche se traduit par les principes suivants que nous essayons de respecter :
- découvrir en s'interrogeant
- apprendre en cherchant
- éveiller la curiosité
- réactiver la créativité et l'imagination
- développer le bon sens, mais aussi le doute, l'incertitude, l'esprit critique, le questionnement, l'expérimentation, la réflexion, le raisonnement logique
- réhabiliter le rôle de l'erreur dans l'apprentissage
- donner une nouvelle vision des notions de vérité et de preuve
- apprendre à écouter, à échanger et à communiquer des idées
- comprendre l'importance de la rigueur d'un langage formalisé
- utiliser la soif naturelle d'apprendre des jeunes
- goûter aux plaisirs de l'effort dans une entreprise intellectuelle
- entrevoir la complexité du monde qui nous entoure.

- faire oublier la question « à quoi ça sert ? »
- faire explorer de nouveaux domaines de la connaissance mathématique
- montrer des mathématiques vivantes et modernes
- relativiser le nombre de nos réponses par rapport à la multitude des questions
- rappeler le rôle central des mathématiques dans l'évolution des sciences.

Notre réflexion est guidée par deux motivations fortes.

Une première que nous pourrions qualifier d'idéologique.
La connaissance scientifique n'a jamais été dans l'histoire des hommes aussi abondante, aussi présente.
Elle chamboule nos certitudes, repousse les limites de nos choix, imposant de nouveaux débats et modifiant notre perception du monde.
Le citoyen, cellule de base de la société, doit être formé pour s'adapter à ces changements, en les favorisant, les assimilant ou les refusant. Il faut donc que chacun ait les moyens de faire ces choix en connaissance de cause et pas seulement une élite, lointains experts, omniscients et prétendus dépositaires de la « vérité ». L'école étant le lieu de passage obligé de tous, c'est à nous, enseignants, d'accomplir une part importante dans cette mission de formation des citoyens.

Notre deuxième motivation est de nature pédagogique.
L'élaboration de certains concepts que nous souhaitons enseigner a parfois nécessité de longues années, voire des siècles. Leur acquisition implique de franchir une véritable barrière, d'effectuer un saut épistémologique. Le plus souvent, un cours magistral, malgré ses qualités, ne permet pas de comprendre où se situent les difficultés. Quelle activité parallèle peut pallier ce manque ?
Le débat scientifique entourant la recherche mathématique peut assumer cette fonction. En effet, la construction du savoir suit un chemin tourmenté, associé à une démarche personnelle de quête de sens.
L'exposé classique d'un cours, pour être cohérent, présente les connaissances dans un ordre tout autre, gommant les intuitions, les erreurs, les impasses, les retours en arrière, la gradation dans la maîtrise de la complexité, les sauts épistémologiques, le contexte historique, et bien d'autres choses encore. Retrouver les sensations de celui qui découvre, qui crée un savoir, permet de redonner à celui-ci plus de signification et facilite son appropriation. Bien sûr, un dispositif didactique et pédagogique précis et efficace doit encadrer cette démarche pour lui permettre de provoquer

l'effet positif décrit.

II - Les précurseurs

Un des pionniers dans cette voie est certainement le mathématicien George Polya qui souligne en particulier dans « *Mathématics and plausible reasoning* » (cf [10]) le rôle de l'induction et de l'analogie en mathématique. Après avoir traduit en hongrois « *How to solve it* » (cf [9]), un autre livre célèbre de Polya, Imré Lakatos introduit dans son ouvrage fondamental « *Proofs and refutations* » (cf [6]) l'idée d'une mathématique faillible, conférant à l'erreur un statut majeur dans le développement des connaissances mathématiques. Il met à jour les limites des constructions mathématiques basées sur les seules déductions de la logique formelle. La prédominance de l'abstraction et du formalisme mathématique contribue selon ses propres termes à construire « une forteresse orgueilleuse du dogmatisme ».
Il propose « d'étudier en détail la thèse suivant laquelle les mathématiques non formelles, quasi empiriques, ne se développent pas dans un accroissement continu du nombre de théorèmes indubitablement établis, mais dans l'amélioration incessante des conjectures grâce à la spéculation et l'esprit critique, grâce à la logique des preuves et réfutations. »
Il présente dans son livre un dialogue où le professeur et ses élèves débattent autour d'un problème de combinatoire. Puis la discussion glisse vers des sujets plus profonds : qu'est-ce que les mathématiques ? Quelle est la valeur d'une démonstration ? Bref, il introduit la notion de doute et d'incertitude là où on l'attendait le moins : en mathématique.

On consultera également avec intérêt le livre de J. Davis, R. Herst et E. Marchisotto : *The mathematical expérience* (cf [3]).

Cette approche a connu un écho important en France. Citons en particulier les travaux de l'Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques (I.R.E.M.) de Lyon, sur les situations de problèmes ouverts (cf [1]), ainsi que l'introduction du débat scientifique en cours de mathématiques par Marc Legrand (cf [7]).

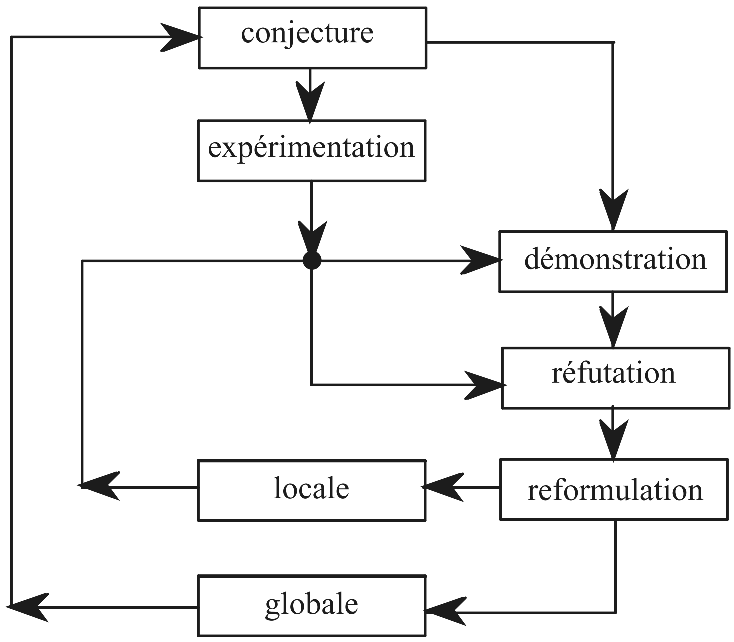
Marc Legrand propose une séance de cours qui se déroule en trois parties :
(1) Sur un thème donné, l'enseignant sollicite des étudiants la production d'énoncés à caractère scientifique, c'est-à-dire pouvant théoriquement êtres jugés comme vrais ou faux.

(2) Ces énoncés après réflexion et débat (production de contre exemples, démonstrations,. . .), sont soumis à un vote sur leur validité.
(3) Les énoncés validés par une démonstration jugée comme exacte sont considérés comme des théorèmes, les autres classés comme faux, accompagnés d'un contre- exemple.

L'expérience Math en Jeans décrite au paragraphe IV, introduite à la fin des années 80 par Pierre Audin, Pierre Duchet et Réné Veillet, , relève d'une démarche tout à fait semblable (cf [2], [5]).

III - Apprendre en cherchant : un exemple

L'exemple suivant présenté par J. Davis, R. Herst et E. Marchisotto, illustre le modèle de I. Lakatos pour l'heuristique de la découverte mathématique :



Il s'agit de proposer une idée simple ou « graine » aux élèves. Sous la direction de leurs enseignants, ils doivent la développer par l'utilisation de l'expérimentation, d'exemples, de contre-exemples, d'intuitions ou pistes de réflexion, conjectures, preuves plus ou moins évoluées, la mise en place d'un vocabulaire adapté, la confrontation de leurs idées. Il n'est bien sûr pas possible de prévoir à l'avance la direction que va emprunter ce travail de recherche à la fois personnel et collectif. Néanmoins, quelques idées repères jalonnent le parcours de la réflexion.

Voici un développement possible à partir de la situation de départ donnée.

Idée de départ ou « graine » :

Si l'écriture décimale d'un nombre se termine par 2, il est divisible par 2.

Guide :

Est-ce vrai ? Le vérifier, chercher à comprendre pourquoi.
Tenter d'en trouver une preuve.
De quelle façon peut-on généraliser ce résultat ?

Expérimentation :

Y a t-il d'autres chiffres vérifiant cette propriété ?
Oui,tout nombre se terminant par 5 est divisible par 5.
Chercher à le prouver. Est-ce le cas de 3 ou 4 ?
Les élèves remarqueront certainement alors que cette propriété peut s'étendre à des nombres formés de plusieurs chiffres tels que 10 ou 100.

Guide :

Les élèves après en avoir débattu peuvent par exemple proposer de classer les nombres en deux catégories et introduire un vocabulaire adapté.

Définitions :

Le nombre entier N est magique, si tout nombre dont l'écriture décimale se termine par N est divisible par N.
Notons M l'ensemble des nombres magiques.

Expérimentation :

liste des nombres magiques inférieurs à 100 :
M = {2,5,10,20,25,50,100}.

Les élèves ne manqueront pas d'observer dans le début de la liste de notre ensemble M des nombres magiques, qu'il s'agit de produit de puissance de 2 et de 5 Il est alors tentant de généraliser cette constatation.

Conjecture 1 :
Tout nombre de la forme $N = 2^p 5^q, (p, q) \in \mathbb{N}^2$ est un nombre magique.

Réfutation : en cherchant un peu, on trouve de nombreux contre-exemples à la conjecture.

Dans la discussion, il est fort possible que la réciproque soit énoncée :
Conjecture 2 :
Tout nombre magique est de la forme $N = 2^p 5^q, (p, q) \in \mathbb{N}^2$.

Pour se convaincre de la différence de ces deux conjectures, un certain temps de réflexion sera sans doute nécessaire.
La conjecture 2 semblant résister à la réfutation par les contre-exemples, il peut être temps de passer à l'étape suivante (démonstration) et d'énoncer :

Théorème : Tout nombre magique est de la forme $N = 2^p 5^q, (p, q) \in \mathbb{N}^2$.

Guide :

Trouver des conditions sur p et q pour que $N = 2^p 5^q$ soit magique.

Poursuivre la démarche.

Vous souhaitez certainement découvrir par vous-même les développements de cette recherche, mais nous vous proposons tout de même la caractérisation suivante de l'ensemble M des nombres magiques.

Le nombre N est magique si et seulement si $N = 2^p 5^q, (p, q) \in \mathbb{N}^2$ **et** $0 \leqslant q - p + 1 \leqslant 4$

Ceci ne clôt évidemment pas l'activité de recherche, car il reste encore bien d'autres questions à étudier.

IV - L'activité Math en Jeans (MeJ)

« Math en Jeans » c'est un slogan : des mathématiques décontractées, pour le plaisir.
C'est aussi un acronyme pour **M**éthode d'**A**pprentissage des **TH**éories mathématiques en **J**umelant des **E**tablissements pour une **A**pproche **N**ouvelle du **S**avoir.
L'association AmeJ, créée en 1989 par Pierre Duchet et Pierre Audin, regroupe de nombreux professeurs et chercheurs en mathématique. Elle propose une démarche structurée pour encadrer les activités d'apprentissage par la recherche. De nombreux partenaires institutionnels tels que la Société Mathématique de France (S.M.F) et le Centre National de Recherche Scientifique (C.N.R.S.), soutiennent cette action que le prix

de la démarche scientifique (1990) et le prix d'Alembert (1992) sont déjà venus récompenser.

Ingrédients d'une action Math en Jeans typique :

- un(e) mathématicien(ne) professionnel(le),
- deux établissements scolaires avec dans chacun d'eux : un ou deux enseignants, un groupe d'élèves, 2 heures de travail par semaine,
- une liste variée de problèmes d'énoncés simples correspondant à des questions encore en cours dans la recherche actuelle, et non entièrement résolus fournie par le chercheur. La formulation doit être assez vague pour ne privilégier aucun axe de recherche,
- des séminaires réunissant les participants des deux établissements ainsi que le chercheur,
- un congrès annuel regroupant outre l'ensemble des établissements participants, des mathématiciens professionnels disposés à discuter avec les jeunes. Durant trois jours expositions, conférences, animations débats, discussions dans une ambiance sympathique mais studieuse, échanges d'expériences entre les jeunes, les professeurs et les chercheurs remplissent les journées,
- la rédaction d'articles scientifiques récapitulatifs de leurs travaux.

Suivant le contexte local, ce type d'activité peut prendre place dans un projet mis en place au niveau de l'établissement scolaire, un club, un module inscrit dans le cursus scolaire, un atelier scientifique, etc.

Historique de la création du module Math en jeans sur la Faculté des sciences de Luminy

Les initiateurs furent Christian Mauduit et Pierre Arnoux qui dès 1993 créèrent un club passion recherche Math en Jeans en partenariat avec le CNRS.
Grâce au soutien de Jean-Pierre Cecchini, responsable du 1er cycle universitaire, une activité de club MeJ fut mis en place dans le cadre du tutorat de 1994 à 1997.
Une option Math en jeans fut proposée à tous les étudiants de 1ère année à partir de 1997.
Enfin en 2004 l'application du LMD nous a amené à proposer un module d'ouverture intitulé MeJ1 ainsi qu'une demi unité optionnelle MeJ 2.

Présentation du module

Description : activité découverte de la recherche scientifique.

Public : tous les DEUG 1ère année (entre 100 et 150 inscrits soit 2/3 des effectifs)

Déroulement :
1 - Cours
Logique (Marc Legrand), épistémologie, d'histoire des Mathématiques, une conférence : les mathématiques au quotidien.
2 - Travaux dirigés en amphi
- un exemple (les nombres magiques)
- choix des thèmes et formation des groupes
- comment rédiger un rapport, faire un exposé

3- Travaux dirigés en groupes
- activité de recherche encadrée en groupe
- attention : la recherche ne se fait pas lors de la séance
- rencontre du groupe, mise à jour du cahier de recherche
- concertation entre groupes ayant choisi le même thème
- discussion/débat avec le professeur

Durée : un semestre (50 h)

L'évaluation
- Un partiel : 7 pts
- Rédaction d'un rapport de recherche (en groupe) : 5 pts
- Présentation orale de leur recherche (en groupe) : 5 pts
- Fiche de suivi de présence et d'activité : 4 pts

Action extra scolaire assurée par Math Pour Tous (2ème semestre) :
L'association Math Pour Tous propose aux étudiants volontaires désireux de poursuivre leur travail de recherche, une activité de club de recherche financée par la Faculté. Elle a pour finalité la participation au congrès national de l'AmeJ. Pour ce faire nous préparons :
- des panneaux d'exposition résumant leurs travaux
- des maquettes, si nécessaire
- une mini conférence de présentation de leur recherche
- un article de synthèse à diffuser sur le site internet de l'association.

L'organisation du voyage et une grande part du financement sont assurés par l'association. Les plus motivés des étudiants adhèrent à l'Association MPT.

Rôle de l'enseignant :

Le professeur assure l'encadrement pédagogique, coordonne les recherches, facilite l'accès à la documentation, aide à rédiger, introduit de nouveaux outils mathématiques voire informatiques nécessaires à l'avancée des travaux. Par contre, il doit s'abstenir de donner des réponses toutes faites aux questions posées ou d'essayer de proposer des démonstrations clés en mains

V- Observations sur la pratique pédagogique

Voici à présent quelques observations constatées dans la pratique de cette activité :

Impact sur les élèves

- De nouveaux rapports se mettent en place entre l'enseignant et ses élèves.
- Il ne détient plus les réponses à toutes les questions, mais son expérience et son savoir sont toujours indispensables.
- Les élèves ont le « droit » de se tromper, de dire des bêtises. Cela fait partie du processus de découverte.
- Les élèves participent davantage et sont plus libres de s'exprimer.
- Inversion des rôles : un élève cherche désespérément à expliquer ce qu'il pense avoir découvert à son enseignant sceptique voire incrédule.
- Inversion de l'ordre des apprentissages : besoin d'un outil mathématique inconnu dans ma recherche apprentissage
- Modification du comportement des élèves face à l'écoute et une plus grande compréhension de la difficulté à enseigner.
- La liberté quasi totale laissée aux élèves dans le choix de l'orientation à donner à leur recherche, leur donne parfois le vertige et risque de les bloquer. Mais c'est aussi souvent ce qui leur plait le plus.
- Le fait d'être peut-être le premier à se poser certaines questions et d'y répondre en partie, leur procure une certaine fierté.
- Sensation d'être à la frontière de la connaissance et de défricher des terres inconnues.

- Un phénomène d'appropriation du savoir apparaît assez vite : le problème devient leur problème.
- Ils découvrent des problèmes d'un niveau de difficulté qu'ils n'avaient encore jamais rencontré voire imaginé.
- Rapidement confrontés aux rigueurs de la construction d'une preuve mathématique, ils se voient contraints de ne plus utiliser certains de leurs arguments favoris : « je vois, donc c'est vrai, c'est évident » et commencent à se méfier des généralisations hâtives.
- Bien souvent, les élèves cherchent à optimiser leur travail en utilisant au mieux les moyens humains dont ils disposent. Ils se répartissent les tâches en fonction des capacités de chacun : rédiger, dessiner, programmer, construire, imaginer, critiquer, expérimenter, calculer, démontrer
- Il leur est également très profitable d'accepter d'être contredits et contestés dans leurs idées ; de reconnaître l'intérêt de ce que pensent les autres et d'admettre que leur avis n'est pas forcément le bon.
- Difficulté à faire des choix, à se limiter dans sa recherche
- Perturbés de chercher sans savoir s'il existe des solutions
- Importance de la mémoire, garder une trace écrite
- Problème : se détacher de l'expérience, voir les choses de plus haut (objet)
- Utilité ne pas se contenter d'une seule vision des choses
- Relativité de la notion de difficulté : critique de leur production

Influence sur mes pratiques d'enseignement

- Relativiser l'importance du contenu / aux méthodes d'apprentissage des mathématiques
- Improviser à partir des questions des élèves
- Lancer des défis entre élèves, classes, lycées
- Anecdotes liées aux mathématiciens et à leurs découvertes
- Discuter de l'origine et du sens des mots mathématiques (épistémologie)
- Donner des exercices style Kangourou non obligatoires.

V - Exemples de problèmes Math en Jeans

Pour être réussie, une activité Math en jeans doit se réaliser sur des sujets choisis avec soin. L'expérience amène à retenir les critères de choix suivants :

- énoncé simple

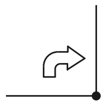
- non dirigiste
- ouvert
- en relation avec des problèmes de recherche actuelle
- contenant plusieurs niveaux d'abstraction
- permettant d'expérimenter rapidement

Nous présentons dans cette partie, quelques problèmes choisis parmi ceux étudiés par nos élèves ces dernières années. Afin d'expliciter clairement notre propos nous détaillerons certains aspects mathématiques concernant le premier d'entre eux. Nous vous suggérons de l'utiliser comme première expérience d'activité en classe.

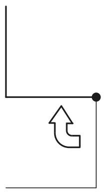
1 - Les pliages de papiers

idée de départ ou graine :

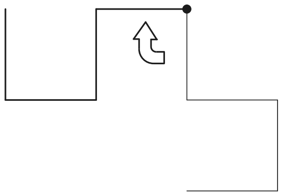
Prendre une feuille de papier et la plier en deux, puis la déplier à angle droit. On obtient vu de face le dessin suivant :



En pliant deux fois dans le même sens, après dépliage à angle droit on obtient la forme :

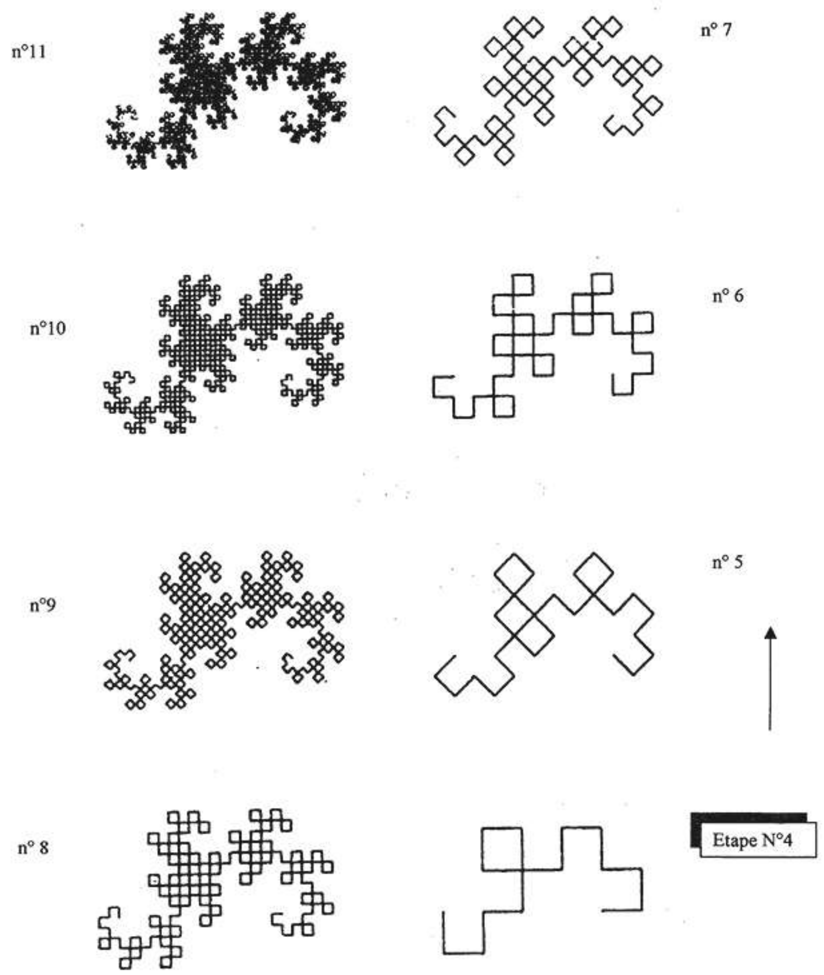


En rajoutant un troisième pliage dans le même sens et en dépliant encore une fois, on a :



Que se passe-t-il lorsque l'on recommence cette opération un grand nombre de fois ? Comment peut-on modéliser cette opération de pliage répété ? Quelle est la position du millième bord de la feuille ? Il s'agit d'un problème qui a été récemment étudié par de nombreux mathématiciens (cf [4]). Le fait de remplacer l'angle droit de dépliage par un angle quelconque, complique considérablement le problème. On peut aussi varier le sens et la longueur des pliages. La question équivalente en dimension 3 pliage d'un fil de fer (« *wire bending* » en anglais) est ouverte. Nous allons donner un petit éclairage mathématique du cas simple précédemment décrit, que nous proposons comme graine, afin que vous puissiez l'utiliser en classe.

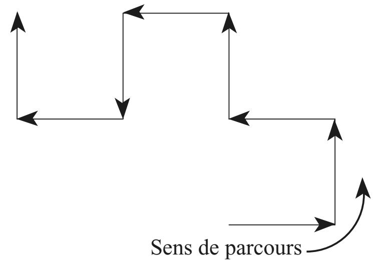
Voici ce que l'on obtient jusqu'à l'étape 11 avec un programme informatique. A chaque étape, la longueur unité a été divisée par 2. La figure semble tendre vers un motif limite, appelé courbe du dragon.



En choisissant un sens de parcours sur les figures, on observe que les bords de feuille dépliée prennent seulement 4 positions :

$\rightarrow$: 0 $\qquad$ $\uparrow$: 1 $\qquad$ $\leftarrow$: 2 $\qquad$ $\downarrow$: 3.

Exemple : à l'étape n°3



En appelant W_n le codage associé au pliage de l'étape n, on a pour n=3 :

$$\mathrm{W}_3 = 01212321$$

Si L est la longueur du codage et a_i le code du bord n° i, on peut écrire :

$$\mathrm{W}_n = a_1 a_2 \ldots a_L$$

Pour W_3 $\qquad$ $a_1 = 0, a_2 = 1, a_3 = 2, \ldots$ avec $L = 8$

Remarque :
Pour $\mathrm{W}_0 = 0$ on a $L = 1$. Puisque l'on double la longueur du codage à chaque étape, on arrive pour W_n à $L = 2^n$.

Introduisons trois opérations

1 concaténation

Soient W_i et W_j deux codages
W_i . W_j est le codage formé par la juxtaposition des symboles de W_i suivi immédiatement de ceux de W_j
Exemple : $\mathrm{W}_2 = 01$ $\mathrm{W}_3 = 0121$ $\mathrm{W}_2 \,.\, \mathrm{W}_3 = 010121$

2 Inversion
Si $\mathrm{W}_n = a_1 a_2 \ldots a_L$ on pose $\overleftarrow{\mathrm{W}}_n = a_L a_{L-1} \ldots a_2 a_1$ obtenu en inversant l'ordre des symboles de W_n.
Exemple $\qquad$ $\overleftarrow{\mathrm{W}}_3 = 1210$

3 Addition de l'unité
Si $\mathrm{W}_n = a_1a_2\dots a_L$
on pose $\mathrm{W}_n + p = (a_1+p)(a_2+p)\dots(a_L+p)$
avec la règle $3 + 1 = 0$ (addition modulo 4)

Exemple : $\mathrm{W}_3 + 1 = 0121 + 1 = 1231$
$\mathrm{W}_4 + 1 = 01212321 + 1 = 12323032$

On note au passage les propriétés suivantes qui nous seront utiles :

$\bullet \overleftleftarrows{\mathrm{W}}_n = \mathrm{W}_n$

$\bullet \overleftarrow{\mathrm{W}_1 + 1} = \overleftleftarrows{\mathrm{W}}_n + 1$

$\bullet \overleftarrow{\mathrm{W}_i.\mathrm{W}_j} = \overleftarrow{\mathrm{W}_j}.\overleftarrow{\mathrm{W}_i}$

$\bullet (\mathrm{W}_i.\mathrm{W}_j) + 1 = (\mathrm{W}_i + 1).(\mathrm{W}_j + 1)$

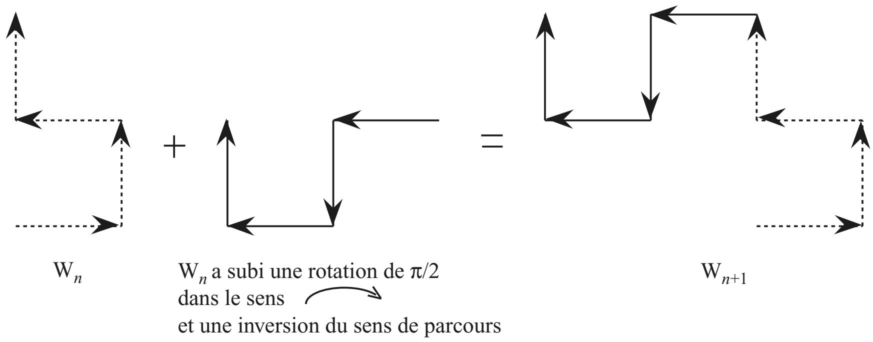
Ecrivons à la suite les premiers codages des pliages :
$\mathrm{W}_0 = 0$; $\mathrm{W}_1 = 01$; $\mathrm{W}_2 = 0121$; $\mathrm{W}_3 = 01212321$

On peut remarquer que la relation (*) $\boxed{\mathrm{W}_{n+1} = \mathrm{W}_n.(\overleftleftarrows{\mathrm{W}}_n + 1)}$ est vérifiée sur ces exemples.

En effet :
$\bullet \mathrm{W}_1 = \mathrm{W}_0.(\overleftleftarrows{\mathrm{W}}_0 + 1) = 0.(\overleftarrow{0} + 1) = 01$
$\bullet \mathrm{W}_2 = \mathrm{W}_1.(\overleftleftarrows{\mathrm{W}}_1 + 1) = 01.(\overleftarrow{01} + 1) = 01.(10+1) = 01.21 = 0121$
$\bullet \mathrm{W}_3 = \mathrm{W}_2.(\overleftleftarrows{\mathrm{W}}_2 + 1) = 0121.(\overleftarrow{0121} + 1) = 0121.(1210+1)$
$= 0121.2321 = 01212321$

Voici une démonstration de (*)

On utilisera la même notation W_n pour le codage et la figure correspondante.



On appelle Ψ l'opérateur rotation de $\pi/2$ dans le sens $\curvearrowright$
Alors la relation (*) s'écrit :
$\mathrm{W}_{n+1} = \mathrm{W}_n.\overleftarrow{\Psi}(\mathrm{W}_n)$ (**)

Or

$$\begin{array}{lcl} \Psi(\rightarrow) = \downarrow & & \overleftarrow{\Psi}(\rightarrow) = \uparrow \\ \Psi(\uparrow) = \rightarrow & \text{et donc} & \overleftarrow{\Psi}(\uparrow) = \leftarrow \\ \Psi(\leftarrow) = \uparrow & & \overleftarrow{\Psi}(\leftarrow) = \downarrow \\ \Psi(\downarrow) = \leftarrow & & \overleftarrow{\Psi}(\downarrow) = \rightarrow \end{array}$$

c'est-à-dire $\overleftarrow{\Psi}(0) = 1$; $\overleftarrow{\Psi}(1)$; $\overleftarrow{\Psi}(2) = 3$; $\overleftarrow{\Psi}(3) = 0$
autrement dit $\boxed{\overleftarrow{\Psi}(i) = i + 1}$ avec la convention $3 + 1 = 0$.

$$\begin{aligned} \text{D'où } \overleftarrow{\Psi}(\mathrm{W}_n) &= \overleftarrow{\Psi}(a_1 a_2 \ldots a_L) = \overleftarrow{\Psi(a_1)\Psi(a_2)\ldots\Psi(a_L)} \\ &= \overleftarrow{\Psi}(a_L)\ldots\overleftarrow{\Psi}(a_2)\overleftarrow{\Psi}(a_1) \\ &= (a_l + 1)(a_{l-1} + 1 \ldots (a_2 + 1)(a_1 + 1) \\ &= (a_L a_{L-1} \ldots a_2 a_1) + 1 \\ &= \overleftarrow{\mathrm{W}}_n + 1 \end{aligned}$$

Grâce à l'égalité $\overleftarrow{\Psi}(\mathrm{W}_n) = \overleftarrow{\mathrm{W}}_n + 1$ la relation (**) devient $\mathrm{W}_{n+1} = \mathrm{W}_n.(\overleftarrow{\mathrm{W}}_n + 1)$

La relation de récurrence (*) définit W_{n+1} en fonction de W_n et $\overleftarrow{\mathrm{W}}_n$.
Peut-on exprimer cette récurrence sans utiliser l'opération inversion ?
Pour cela, il va falloir introduire plusieurs suites.

Posons $a_n = \mathrm{W}_n$ et $b_n = \overleftarrow{\mathrm{W}}_n + 1 = \overleftarrow{a}_n + 1$
La relation (*) devient :
$\mathrm{W}_{n+1} = W_n.(\overleftarrow{\mathrm{W}}_n + 1) = a_n.b_n$.

Alors $a_{n+1} = \mathrm{W}_{n+1} = a_n.b_n$.

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= \overleftarrow{\mathrm{W}}_n + 1 = \overleftarrow{a}_{n+1} + 1 = \overleftarrow{a_n.b_n} + 1 = \left(\overleftarrow{b}_n.\overleftarrow{a}_n\right) + 1 \\ &= \left(\overleftarrow{b}_n + 1\right).(\overleftarrow{a}_n + 1) = \left[\overleftarrow{(\overleftarrow{a}_n + 1)} + 1\right].(\overleftarrow{a}_n + 1) \\ &= [(a_n + 1) + 1].(\overleftarrow{a}_n + 1) = (\overleftarrow{a}_n + 2).(\overleftarrow{a}_n + 1) = (\overleftarrow{a}_n + 2).b_n \end{aligned}$$

Posons $c_n = \overleftarrow{a}_n + 2$, ce qui permet d'écrire $b_{n+1} = c_n.b_n$.
On peut alors comme précédemment exprimer c_{n+1} en fonction de c_n : $c_{n+1} = c_n.(b_n + 2)$.
En posant $d_n = b_n + 2$, on montre de la même manière que : $d_{n+1} = a_n.d_n$.

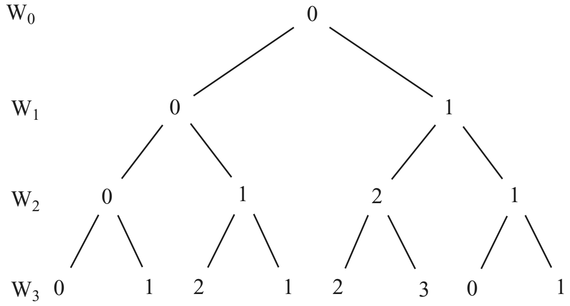
Finalement, les suites $\mathrm{W}_n = a_n$, b_n, c_n et d_n sont données par récurrences à partir de :

$$\text{conditions initiales} \quad \boxed{\begin{array}{l} a_0 = \mathrm{W}_0 = 0 \\ b_0 = a_0 + 1 = 1 \\ c_0 = a_0 + 2 = 2 \\ d_0 = b_0 + 2 = 3 \end{array}} \quad \text{et relations} \quad \boxed{\begin{array}{l} a_{n+1} = a_n.b_n \\ b_{n+1} = c_n.b_n \\ c_{n+1} = c_n.d_n \\ d_{n+1} = a_n.d_n \end{array}}$$

Regardons comment se comportent ces suites :

	$a_0 = 0$	$b_0 = 1$	$c_0 = 2$	$d_0 = 3$
n	$a_{n+1} = a_n.b_n$	$b_{n+1} = c_n.b_n$	$c_{n+1} = c_n.d_n$	$d_{n+1} = a_n.d_n$
0	0 1	2 1	2 3	0 3
1	0 1 2 1	2 3 2 1	2 3 0 3	0 1 0 3
2	01 2 1 2 3 2 1	2 3 0 3 2 3 2 1	2 3 0 3 0 1 0 3	0 1 2 1 0 1 0 3
3	...			

Un autre construction de la suite $\mathrm{W}_n = a_n$ apparaît dans ce tableau.
Considérons l'opération de substitution suivante :
$0 \longrightarrow 01$; $1 \longrightarrow 21$; $2 \longrightarrow 23$; $3 \longrightarrow 03$



Ce graphe de construction fait ressortir une structure fractale, comme observé sur les figures précédentes. Sur un principe similaire, un très grand nombre de figures fractales peuvent être observées.

Ces quelques pages mettent en évidence le lien entre les pliages de feuilles papiers et les structures fractales. Il reste de nombreuses voies à explorer avec les élèves : aspects arithmétiques, probabilistes, géométriques, etc. Il peut être intéressant de modifier les règles de pliages et de dépliages (sens de pliage, angle de dépliage, Ě) et d'étudier le comportement des courbes obtenues.

2 - La multiplication de STEINHAUSS

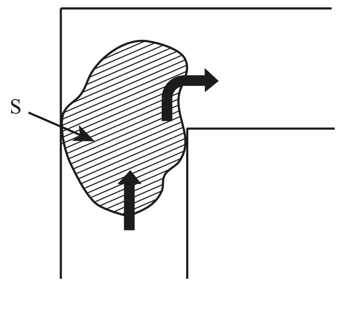
On se donne deux chiffres, par exemple 3 et 6.
On effectue alors la multiplication $3 \times 6 = 18$.
A la 1$^{\text{ère}}$ étape la suite obtenue est : 3,6,1,8 (le nombre 18 est remplacé par les chiffres 1 et 8).

Puis : $6 \times 1 = 6$ donne 3,6,1,8,6
$1 \times 8 = 8$ donne 3,6,1,8,6,8
$8 \times 6 = 48$ donne 3,6,1,8,6,8,4,8
$6 \times 8 = 48$ donne 3,6,1,8,6,8,4,8,4,8.

On poursuit de la sorte. Il s'agit d'étudier les propriétés de cette famille de suites.

3- Le sofa de CONWAY

On considère un couloir formé de deux parties de largeur de 1m faisant entre elles un angle droit . On veut faire passer un sofa, représenté par une surface plane indéformable S, à travers ce couloir :



Par exemple un carré de côté 1m convient. Peux-t-on trouver un sofa d'aire supérieure à 1m^2 passant à travers ce couloir ? Quelle est la surface maximale d'un sofa ayant cette propriété ? Que dire lorsque le couloir comporte plusieurs tournants et/ou que les angles ne sont plus à 90^o ? etc.

4- Gardiens de musée

Combien de gardiens faut-il placer dans un musée pour que celui-ci soit entièrement surveillé ?
Il s'agit tout d'abord de trouver un modèle mathématique pour cette question.
On peut (par exemple) considérer que le musée est un polygone et supposer que les gardiens sont fixes et ont un angle de vision de 360^o.
Les salles peuvent éventuellement contenir des piliers ou des vitrines qui constituent des obstacles à la surveillance des gardiens, etc.
Ce problème a été posé par Victor Klee en 1973. La monographie « *Art gallery theorem and algorithm* » (cf [8]), écrit par Joseph O'Rourke, présente de nombreux résultats obtenus récemment sur ce problème.

5- Les tas de sable

On fait tomber de façon uniforme du sable sur une surface donnée.
La forme obtenue évolue jusqu'à se stabiliser.
Le sable que l'on tente d'y ajouter, tombe par éboulement.
Étude des formes obtenues en fonction de la surface de départ.
Recherche de règles adaptées permettant d'utiliser des automates cellulaires. (modélisation des avalanches).

6- Le double pendule

Pourquoi le mouvement du double pendule semble t-il imprévisible ?
Qu'est-ce qui le différentie fondamentalement du pendule simple ?
Répond-il à la définition de système chaotique ?

7 - Le problème du coloriage des cartes

On se donne une carte de type géographique.
On désire colorier chaque pays par une couleur distincte de ses voisins.
Combien de couleurs sont nécessaires ?

8- Le problème des rencontres

On rassemble n personnes. On suppose qu'il est impossible de trouver à la fois :

k personnes qui se connaissent mutuellement
k personnes qui s'ignorent mutuellement.

Exprimer, en fonction de k, la plus grande valeur possible de n.
(Il s'agit d'une énigme de Paul Erdös portant sur les « graphes de Ramsey »)

9- Substitutions (suite de Morse)

Observez la suite de nombre suivante :

0
01
0110
01101001
0110100110010110
01101001100101101001011001101001 . . .

Chaque nouveau mot s'obtient à partir du précédent en écrivant à sa suite son complément binaire. La suite infinie obtenue est appelée suite de Morse. Etudier ses propriétés. Variations sur le thème.

10- Les formes philippines

Peut-on couper en deux parties superposables une forme géométrique plane donnée ? Si oui, comment et de combien de façons différentes.

11- Les nombres presque entiers (les nombres de Pisot)

Existe t-il des nombres non entiers >1 tels que leurs puissances successives se « rapprochent » de plus en plus d'un entier ?
Observer le nombre $1 + \sqrt{2}$.

12- Géométrie des mots

N un mot infini sur un alphabet $\{a,b\}$ (ex :N= abbaaaabba. . .)
Soit P un sous mot de N (ex : P= bba).

On compte le nombre de a et de b de P noté Pa et Pb (ici Pa=1 Pb=2).
On place dans le plan le point de coordonnée (Pa,Pb).
Etudier les « formes » obtenues quand on prend tous les sous mots de N en fonction de la structure et des propriétés de N

13- La diagonale du rectangle

Comment tracer un droite sur un écran d'ordinateur ?

14- La spirale d'Ulam

Étude des répartitions linéaires des nombres premiers lorsque les entiers sont notés suivant les règles de la spirale de Ulam.
Recherche de polynômes générant le plus grand nombre de nombres premiers pour un intervalle de nombres entiers consécutifs donnés.

15- Les bases non entières

Peut-on prendre comme base un nombre non entier rationnel, irrationnel, complexe ?
Problème de l'existence et de l'unicité de la décomposition. Étude des propriétés de ces bases.

16- La conjecture de Goldbach

Tout nombre pair supérieur ou égal à 4 peut s'écrire comme somme de 2 nombres premiers.
Qu'en pensez-vous ?

VI - L'association Math pour tous : agir pour la culture scientifique du grand public.

Texte de présentation :
A l'heure où les moyens de communication ont atteint une si grande puissance, où la variété des sources d'information, leur facilité d'accès et leur importance n'a jamais été aussi impressionnante, la culture scientifique du public reste faible. Ainsi, au vu des progrès considérables de la science, l'écart entre le savoir scientifique du plus grand nombre et les frontières de la connaissance ne cesse de s'accroître.
Pourtant la science sous toutes ses formes n'a jamais été aussi présente dans notre monde quotidien. Elle nous entoure sous les aspects les plus

variés, nous sert, nous surprend, nous inquiète aussi parfois. Des décisions qui concernent notre avenir sont prises par et pour la science. Oui, il n'a jamais été aussi important pour chaque citoyen d'appréhender les grands défis qui se dressent devant nos sociétés, où souvent la science se présente comme le seul juge.
Bien sûr, nombreux sont ceux qui s'attachent à informer et diffuser des informations scientifiques, et l'école continue d'être le plus sûr moyen d'y parvenir. Mais force est de constater que cela n'est pas suffisant. L'initiative du Ministère de la Recherche et de l'Education, de consacrer une semaine l'an à fêter la science, est, de ce point de vue, une action positive. Que des scientifiques prennent le temps d'expliquer simplement ce sur quoi ils travaillent, que des laboratoires s'ouvrent aux visites est indispensable. Mais le problème est souvent ailleurs : ne viennent assister aux conférences, portes ouvertes, expositions et autres activités scientifiques que ceux qui s'y intéressent déjà.
Il reste encore une autre voie, aller faire de la science là où on ne l'attend pas, dans des lieux publics, faciles d'accès, proches et accessibles. C'est ce que s'efforce de faire l'association MATH POUR TOUS. Elle se compose pour l'essentielle d'étudiants et ex-étudiants de Luminy. Leur point commun étant d'avoir participé à l'activité Math en Jeans, option de 1ère année de DEUG.

But : promouvoir la culture mathématique et la diffuser au grand public.

Président : Christian Mauduit

Membres actifs :
- des chercheurs
- des anciens étudiants MEJ (!)
- des doctorant
- des professeurs

Partenaires : Le CNRS , FRUMAM, IML, Faculté de sciences de Luminy, CCSTI, des villes (Marseille, Aix, Coudoux, Velaux)
Nos activités :

- Participation à la Fête de la Science (depuis 1999)
- Ateliers de découvertes scientifiques en partenariat avec le service culture d'Aix en Provence
- Animations mathématiques dans les écoles
- Participation aux journées portes ouvertes (Primaire, Collège, Lycée)
- Participation à des Expo Sciences

- Participation au Souk des Sciences
- Animations mathématiques évènementielles (OFAJ, Association Fermat-Lomagne, CCSTI,. . .)
- Cours d'animation scientifique en école doctorale

Nos projets :

- Hippocampe Math : mise en place d'une plate-forme Université /Lycée (IA)
- Création d'une exposition itinérante pour le CCSTI
- Action Math dans le métro à Rio de Janeiro (Brésil) en partenariat avec l'Ambassade de France.
- Action avec l'Association Tunisienne des Sciences
- Organisation d'un congrès Math en Jeans sur Marseille

VII - Conclusion

Des activités d'initiation à la recherche mathématique destinées aux jeunes, existent dans de nombreux pays. Mais elles sont généralement destinées à préparer une élite à devenir de futurs scientifiques de haut niveau ou de mathématiciens professionnels. La démarche Math en Jeans est très différente, car elle s'adresse à tous, y compris à ceux qui ne poursuivront pas d'études en mathématiques. Et c'est bien là que réside son originalité. En effet, au delà du contenu purement mathématique, se dégage dans la démarche de recherche scientifique, une réflexion, des raisonnements, une méthodologie qui seront indéniablement utile à ces futurs adultes.

Les mathématiques ne sont pas froide déduction et logique implacable. L'imagination, l'intuition, et la création de concepts, idées, objets et outils mathématiques nouveaux, sont le moteur profond de toute avancée significative de la recherche. En canalisant l'aptitude naturelle des jeunes à s'interroger, en attisant leur curiosité, on déclenche le plus souvent l'envie et le plaisir d'apprendre, de réfléchir, de comprendre, et de trouver.

Bibliographie

(1) Arsac Gilbert, Germain Gilles, Mante Michel - *Problèmes ouverts et situation - problème.* IREM de Lyon (1991).

(2) Audin Pierre, Duchet Pierre - *La recherche à l'école : Math en Jeans.* Séminaire de didactique des mathématiques et de l'informatique n°126. La Pensée sauvage. Grenoble (1992) 107-131.

(3) David Philip J., Herst Reuben, Marchisotto Elena - *The mathematical experience.* Study edition . Boston (1995).

(4) Dekking Michel, Mendès France Michel, Van der Poorten, Alf Folds - *Math intelligencer.* 4 (1982) n°3 130-138, 173-181 ; n°4 190-195.

(5) Duchet Pierre - *Math en Jeans, des mathématiques autrement...* Découverte (revue du Palais de la découverte) n°276 (mars 2000) 46-54

(6) Lakatos Imré - *Proofs and refutations.*

(7) Legrand Marc - *Débat scientifique en cours de mathématiques et spécificité de l'analyse.* Revue repère IREM de Grenoble (n°10 janvier 1993).

(8) O' Rourke Joseph - *Art gallery theorem and algoritm.*

(9) Polya George - *How to solve it.* Princeton University Press. Princeton (1948, réédition 1988).

(10) Polya George - *Mathematic and plausible reasoning.* Princeton University Press. Princeton (1954).

Le site de Culture Mathématique Culture*MATH*

http://dma.ens.fr/culturemath

Farouk Boucekkine
DESCO et ENS

La Direction de l'Enseignement Scolaire et les Ecoles Normales Supérieures, dans un effort commun, ont décidé de créer des sites de ressources scientifiques dans plusieurs matières pour les professeurs du secondaire, afin de leur permettre de garder le contact avec leur matière, et de s'y replonger à leur rythme.

En mathématiques, le produit de cet effort est le site Culture*MATH*, qu'on peut consulter à l'adresse ci-dessus.

Tous les 15 jours, une nouveauté est ajoutée au site, souvent un texte ayant trait aux mathématiques, de niveau et de point de vue très variés. Quelques exemples pour donner une idée de cette diversité (71 textes à ce jour) :

1. Des textes partant d'une question simple, prétexte à évoquer une théorie mathématique. Exemples :
   - *Peut-on venir à bout raisonnablement vite d'un digicode moyen ?*
   - *Combien de fois faut-il battre un jeu de cartes ?*
   - *La gamme musicale est-elle unique ?*
   - *Quels problèmes pose l'information numérique ? etc.*
2. Des « coups de projecteurs » sur des personnalités (historiques et actuelles) ou des initiatives en rapport avec les mathématiques.
3. Des textes techniques, pour servir de référence sur certains points (intégration, théorie des groupes. . .), utiles en particulier pour ceux qui désirent passer des concours. . . ou (re)lire un livre universitaire.
4. Quelques textes en rapport direct avec le programme (sans se substituer aux sites existant déjà !)

5. Un Glossaire est en cours de création.

De plus, ce site est également destiné à servir d'interlocuteur aux professeurs pour les questions mathématiques, et il possède d'ores et déjà une *mailing-list*, à laquelle il est possible de s'abonner.
Adresse e-mail : culturemath@dma.ens.fr

1 Présentation du Site

Le site « Accompagnement et Culture Mathématique » propose essentiellement, pour le moment, un certain nombre de dossiers autour de thèmes mathématiques (71 en décembre 2004) touchent à des sujets assez variés, avec des niveaux de diffculté variables. Ils sont (pour le moment) classés par thèmes (combinatoire et dénombrements, arithmétique, probabilités et statistiques, analyse, géométrie, théorie des jeux, algèbre, logique, Histoire/Epistémologie et enfin Interviews.) Enfin, chaque dossier est présenté par un résumé suivi d'une liste de prérequis nécessaires à l'appréhension du dossier.

Nous nous astreignons à une mise à jour périodique (les premier et troisième mercredi du mois, sauf retards), aidant à fidéliser notre lectorat assidu. Un Editorial présente la nouveauté de la quinzaine, et d'éventuelles actualités relatives aux mathématiques - comme le Quizz Enigmath ou l'Université d'Eté de l'association Animath.

Enfin, le site comporte une page qui met à disposition les programmes offciels, une page qui recense les nouveautés du site, une page de liens vers des sites sélectionnés, réellement intéressants pour le public visé. Enfin, une page plus ludique présente quelques énigmes mathématiques, et une dernière rubrique " Contact " invite l'utilisateur à poser des questions et à faire des remarques.

La *mailing-list* a été créée début septembre (89 abonnés pour l'instant), et n'apparaîtra offciellement dans le site que prochainement, lors du « relookage » du site.

2 L'année 2003-2004

Les principales évolutions de la ligne editoriale du site touchent à la diffculté et aux sujets traités. En reprenant ce qui a été fait depuis la création du site :

2.1 Niveau, diffculté

Après une petite enquête, le niveau moyen des textes a été revu à la baisse, et, surtout, des dossiers peu ou pas techniques » autour des maths » ont fait leur apparition, deux biographies (Monge et Gauss), deux Interviews de jeunes gens pour qui les mathématiques jouent un rôle original, un peu d'épistémologie...

Avec quelques mois de recul, il semble que les aspects humains aient plu au lectorat et que ces rubriques soient à développer l'an prochain. L'épistémologie, en revanche, semble avoir un peu effrayé des lecteurs, et trouvera sans doute plus sa place dans le futur site dédié.

Pour les dossiers mathématiques, nous avons tenté d'augmenter fortement le nombre de textes peu techniques, partant de l'idée que l'on ne parviendra jamais à toucher un lectorat large si on ne propose pas des textes simples. Il est important également de pousser le lecteur à dépasser ses propres limites en proposant des dossiers nécessitant de prendre un papier et un stylo, voire de chercher des informations ailleurs (livres de fac, web) pour être compris entièrement.

Le corpus actuel du site présente un dégradé entre ces deux extrêmes, et sera à l'avenir développé dans cet esprit.

2.2 Sujets traités

Toujours pour diversifier les « accroches », et donner à chacun des raisons d'entrer dans le site, les sujets traités et la manière de les traiter évoluent également vers la diversification. C'était déjà l'esprit du site à sa création, et nous continuons dans cette voie :

- Certains dossiers ont pour fonction de faire le point sur une théorie plus ou moins connue des enseignants. C'est le cas notamment de ceux qui traitent des questions de constructibilité ou encore de théorie des ensembles.
- D'autres sont là pour mettre en lumière des résultats ou des théories peu connues ; par exemple le théorème de Polyà, celui de Ramsey ou celui de Shannon
- D'autres encore, sans bien sûr être à la pointe de la recherche actuelle,

tentent de donner une idée au lecteur du type de questionnement auquel se frottent les chercheurs. Que ce soit au travers d'une introduction générale à un domaine, comme dans le texte intitulé « Quelques résultats de transcendance » ; ou plus modestement à des techniques ou à des idées, comme c'est le cas dans le texte sur la dérivation des fonctions composées ou ceux sur le traitement numérique d'équations aux dérivées partielles.
- Certains donnent un éclairage mathématique sur un sujet *a priori* extérieur au domaine, comme la détermination du sexe chez les crocodiles, la musique ou la confection de CDs et de DVDs.
- Un certain nombre d'entre eux espèrent répondre à une attente des enseignants, suite à l'introduction dans les programmes de nouveaux domaines, tels l'arithmétique, et à travers cela la cryptographie, la théorie des graphes ou encore les statistiques. Il y a également dans ce registre un exemple d'utilisation du logiciel Cabri servant à faire de la géométrie sur le web, au niveau lycée.
- Quelques textes ont été écrits pour servir d'aide à ceux qui désirent passer l'agrégation (théorie des groupes, intégrales de Riemann et Lebesgue). Ce sont des textes techniques, destinés à servir de résumé, d'illustration ou de complément à un travail traditionnel.
- Enfin, nous tentons de développer une aile « humaine » au site, en présentant des biographies (Gauss, Monge) et des interviews de personnes utilisant les mathématiques dans leur vie, que ce soit dans l'enseignement, la recherche, l'ingénierie, etc.

Tous les dossiers ont cependant l'ambition de pouvoir faire découvrir ou redécouvrir des choses au lecteur, ou à défaut leur permettre de faire le point. Dépassant la simple volonté d'accompagnement des programmes, ils visent en réalité à participer à l'entretien de la culture mathématique des professeurs. De ce fait, ils peuvent pour certains demander un réel travail de compréhension, ou du moins un effort d'attention soutenu.

3 Bilan et prospectives

Les statistiques montrent que l'audience du site continue à augmenter tranquillement, et le site commence à être connu par des fidèles. De plus, nous avons commencé à pénétrer le monde des spécialistes de la pédagogie des maths, et celui des chercheurs s'intéressant à la vulgarisation. Cela nous ouvre beaucoup de possibilités tant pour obtenir un contenu intéressant que pour nous faire connaître. Cependant des problèmes sérieux subsistent :

3.1 Problèmes rencontrés

Si les statistiques montrent que l'audience du site augmente, elles montrent également qu'il le fait à un rythme lent. Le problème majeur que nous rencontrons est celui de la visibilité du site par le corps enseignant. Très peu de professeurs connaissent son existence. De plus, le bouche à oreille fonctionne mal, en l'absence de structures ou de *mailing-lists* fédérant de nombreux professeurs de mathématiques (comme cela existe en biologie, par exemple). Régler ce problème sera le chantier principal de l'année scolaire 2004-2005.

Deux problèmes fondamentaux se posent également pour ce site, qui font écho plus généralement à deux questions profondes dans l'enseignement des mathématiques : quel rapport entre mathématiques enseignées et vie réelle ? quel rapport entre l'enseignement des mathématiques et les mathématiques « vivantes », celles qui continuent à évoluer ?

En effet, plus des mathématiques sont proches de la réalité, plus leur technicité est grande, et, d'autre part, plus on se rapproche de ce qui se fait aujourd'hui en recherche, plus la quantité de langage nécessaire est grande. Dans les deux cas, cela bloque les lecteurs...

Du fait de ces problèmes, il faut trouver des moyens d'accrocher les professeurs et de les intéresser sans les faire fuir. En effet, nombreux sont ceux qui sont plus intéressés par des ressources les aidant directement dans leur travail que par le fait d'accroître leur culture scientifique.

3.2 Solutions proposées pour 2004-2005

Il paraît clair désormais que l'audience du site n'augmentera pas de manière significativement rapide si on ne va pas au contact des professeurs pour leur présenter le site, recueillir leurs impressions et enregistrer leurs desiderata. Nous avons donc lancé plusieurs opérations dans ce but :

- Partenariat avec la seule structure informatique rassemblant un grand nombre de professeurs de mathématiques : le Café Pédagogique.
- Partenariat avec l'association Animath, ce qui nous permet de rencontrer ses membres (lors de l'Université d'Eté notamment) et de partager nos informations et réseaux.

- Contacts avec les journaux *Quadrature* et *Tangente*, pour se faire réciproquement de la publicité.
- Essayer de faire de la toute nouvelle *mailing-list* une référence pour les professeurs de mathématiques.
- Organiser et promouvoir sur le site des rencontres élèves - professeurs - chercheurs. Cette année, Un chercheur du DMA, H. Zaag, est allé au collège des Tarterêts expliquer le métier de chercheur, après avoir encadré pendant l'année un projet pédagogique sur la détermination du sexe chez les crocodiles. Culture*MATH* a parlé de ce travail et donné la parole au professeur de mathématiques très impliqué (M. Beji).
- Alerter directement les webmestres des sites académiques. car l'information sur l'existence de ce site ne descend pas assez vite (et se perd parfois en chemin).

En plus du développement de ces activités naissantes et prometteuses, quelques nouveautés sont envisagées pour l'année 2004-2005, mais n'ont pas encore vu le jour :

- Rendre visite directement aux enseignants dans des lycées, en particulier parallèlement à des rencontres élèves/chercheurs (comme aux Tarterêts).
- Création d'une partie didactique, avec l'aide de Claude Tisseron.
- Possible création d'un séminaire régulier à l'ENS autour du site Culture*MATH* (avec l'aide entre autres de Gilles Godefroy.)

LES VIDÉOS DU PROGRAMME « MATHÉMATICS »

Eliane Cousquer
USTL et IREM de Lille et Animath

Les vidéos du programme « mathématics » (stratégies originales de transmission des connaissances) sont présentées dans leur traduction lilloise sur le site : http ://mediamaths.asso.fr.

Mathematics 1 : Le théorème de Pythagore. Similitude. Le tunnel de Samos. (référence commerciale : 755 B0408)

Mathematics 2 : Histoire de Pi. Histoire des maths. Polynômes. (référence commerciale : 755 B0409).

Mathematics 3 : Sinus, cosinus 1, 2, 3. (référence commerciale : 55 B0458)

Vous trouverez une notice détaillée dans la cyberlibrairie du CNDP (http ://www.cndp.fr) avec des llivrets en ligne.
Pour commander, passer par la vente par correspondance du CNDP (cyberlibrairie) ou par les CRDP ou CDDP, en fournissant la référence. Chaque bande VHS est vendue environ 15 euros.

TABLE RONDE

TENSION ENTRE DÉMARCHE SCIENTIQUE ET PROGRAMMES

Compte rendu par Véronique Chauveau

- V.CHAUVEAU : l'exposé d'Yves Chevallard constitue une bonne introduction à ce débat : il y a une grande distance entre les mathématiques savantes et vivantes d'aujourd'hui et celles de la classe. Alors comment rendre vivantes les mathématiques dans le secondaire ? Nous avons travaillé en atelier sur les SIRC, sur Math en jeans,... Est-ce que la mise en œuvre de la démarche scientifique en classe peut permettre de rendre vivantes les mathématiques ? Mais d'abord qu'est-ce que la démarche scientifique ?

- P. DUCHET : la démarche scientifique est évoquée dans beaucoup de discours ; c'est la démarche scientifique (problématisation, objectivation, expérimentation) qui permet à la science d'exister, l'existence de la science suppose à la fois un regard sur la réalité, la construction de représentations et trois étapes :

- la formulation d'hypothèses,
- la construction d'une théorie,
- sa validation.

Les mathématiques se distinguent par le caractère interne de la validation : la preuve .

Tout ceci indépendamment des contenus des programmes.

- V. CHAUVEAU : qu'en est-il dans les autres pays européens représentés ici ?

- K. WINSLOW présente la situation au ***Danemark*** :

- il ne s'agit pas de faire des élèves de petits mathématiciens,

- nous partons de questions ouvertes dans le contexte de l'élève (environnement).

Avant le lycée, les mathématiques sont populaires ; au vu des tests internationaux (PISA et TIMSS) les résultats à la fin de l'école (15 ans) sont décevants mais nos lycéens, à 18 ans, réussissent nettement au dessus de la moyenne internationale.

La scolarité est divisée en deux cycles :
- 9 ans d' « école populaire » unique dont les maîtres n'ont pas de formation mathématique
- 3 ans de lycée : une réforme en cours prévoit à partir de 2005 des groupes de matières et 20% transdisciplinaires.

Les professeurs des écoles sont formés durant quatre années après le lycée en quatre matières.
Les professeurs des lycées sont formés à l'université en deux matières pendant cinq ans. Même dans les universités les plus connues dans de nombreux pays, on a une approche d'une naïveté surprenante de l'enseignement des sciences, comme en témoigne un article de la revue américaine « *cience* » (vol 304, avril 2004). Dans l'enseignement général, l'approche scientifique doit être conçue de façon plus large qu'une simple présentation de matière avancée : la démarche scientifique part d'un problème accessible et interessant pour celui qui s'en occupe.

-N. LAPSANSKA : en ***République Tchèque***, les cours durent 45 minutes et les élèves sont interrogés oralement (4 contrôles par an), ni dans les mêmes conditions, ni sur les mêmes sujets. Actuellement, l'entrée au lycée se fait à 12 ans et dure soit 4 ans (2 Matières) soit 6 ans (3 matières). Les clubs marchent très bien : les participants doivent préparer un exposé de 10 minutes à faire en classe.

-C. ALEXANDRESCU : en ***Roumanie***, la scolarité dure 12 ans : à partir de l'âge de 7 ans, 10 années obligatoires (4 primaire, 6 secondaire) suivies de 2 années de spécialisation ; il y a 3 filières ;
- théorique (70 %)
- technique (20 %)
- vocationnelle : musique, sport,... (10 %)

La Roumanie compte environ 23 millions d'habitants dont 3,5 millions d'élèves et 200 000 professeurs qui assurent 648 heures , dans 1400 lycées dont 150 « collèges » (les meilleurs) .

Deux problèmes : le salaire des professeurs (150 euros) et les manuels .

- V.CHAUVEAU : revenons au coeur du débat , comment
- traiter les programmes dans le temps imparti ?
- mettre les élèves en situation de recherche ?

-J.P. RICHETON présente l'« ***option sciences*** » telle qu'il l'a pratiquée depuis 7 ans dans l'académie de Strasbourg, puis dans celle de Montpellier (10 options), après avoir convaincu des collègues de physique et de biologie de corriger l'image négative de tristesse que donne actuellement l'enseignement des maths. L'option sciences accole les trois matières scientifiques, non pas sur un programme, mais sur la démarche scientifique autour d'un thème (par exemple l'optique : illusions, physique et géométrique, vision. . .). L'horaire hebdomadaire est en seconde de 3 heures (2 séances d'1 heure 30 ou 3 d'une heure). L'évaluation se fait à partir d'un travail de rédaction sur au moins 2 ou 3 problèmes ouverts. « Animer cette option avec des élèves d'une autre classe a changé ma pratique. »

-M. FORT souligne le caractère éphémère de la démarche scientifique voulue par les programmes qui valent bien des ennuis à leurs auteurs . Quand on en parle, il faut distinguer :

- les manuels qui les interprètent à leur façon,
- les « activités préparatoires » qui constituent un piège,
- ce qu'en font les professeurs dans le cadre de leur liberté pédagogique,
- ce qu'en notent les élèves,
- ce qu'ils en retiennent (enquêtes PISA),
- le baccalauréat où l'on n'évalue que ce qu'on sait évaluer et qui ne peut pas être trop en décalage par rapport à la pression sociale.

Y a-t-il un lien entre les performances au bac et les connaissances des élèves ? (les mentions ne sont pas toujours corrélées avec les notes du 1er trimestre en prépa).

Cependant des professeurs ont des visées sur l'apprentissage des mathématiques : les TPE sont intéressants par leur démarche et leur évaluation : grâce à la notation positive au bac, on prend en compte d'autres

approches, compétences et démarches. Par contre le discours de l'institution n'est pas favorable au développement des IDD. Les physiciens ont mis au point l'évaluation des qualités expérimentales.
Cela ne suffit pas et l'Inspection Générale s'intéresse à tout ce qui est autour de la science : clubs et labos de maths, rallyes, compétitions...

-G. GODEFROY, qui a participé à l'élaboration des programmes est d'accord avec M. Fort mais souligne que les documents d'accompagnement résultent d'un travail beaucoup plus scientifique ; les professeurs les consultent-ils ?

-M. ANDLER : pourrait-on évaluer l'option science , MATh.en.JEANS, à quelques années de distance ?

-P. AUDIN demande qu'on donne la parole aux profs : il y en a peut-être qui réussissent à maîtriser les conflits.

-N. : en $1^{\text{ère}}$ L et en terminale L, la liberté totale est générale (pas de manuels, pas de contrainte) et permet de coller à la démarche scientifique.

-M. FORT : malheureusement les effectifs diminuent et il faut absolument revivifier cette filière littéraire.

-M. AVINZAC se régale dans le cadre MeJ mais trouve frustrant de ne pouvoir continuer en classe.

-N" : il faut beaucoup d'énergie pour tenir tête aux collègues ; l'U.E. permet de se conforter.

-P. DUCHET a beaucoup pratiqué la démarche scientifique dans les clubs MeJ et dans les activités périscolaires ; il a aussi réfléchi sur la façon de revisiter les programmes pour éviter les tensions et introduire cette démarche en classe. Si l'on fait une synthèse de ces 15 dernières années, la commission Kahane a élargi la discussion sur les programmes. A titre personnel, il a observé :

1. les programmes sont socialement modifiés ; peut-on pour autant garantir leur efficacité ?
2. Il convient de distinguer contenu et travail des enseignants (tout le

programme et rien que lui) et de changer les modalités d'application

3. On fonctionne comme si on savait ce qu'il est bon d'enseigner et comme si l'ordre d'acquisition était l'ordre d'élaboration (Thalès avant ou après Pythagore ?). Il faut réordonner et recentrer sur des objets de demande sociale et choisir des contenus plus exemplaires.
4. Acceptons les faits scientifiques de notre temps !
5. Sur les modalités : reconstruisons !
   Par exemple, comment intégrer un projet MeJ en quatrième tout en faisant avancer le programme (Triangles et mesures, triangles , rectangles et cercles, méthodes de démonstration. . .) ?
   Retravailler le programme pour lui donner une logique, s'apercevoir que les nombres interviennent dans l'espace, démontrer par le calcul, travailler : ne pas éviter les transformations géométriques, libérer les objets mathématiques de l'évaluation. ouvrir. . .
6. Associons davantage d'acteurs à la construction des programmes !

-M.E. PINZUTI : l'atelier 1 m'a fait comprendre la déstabilisation des élèves face à une situation de recherche et au changement de registre. Personne ne me reproche de faire des choses à côté : transformations en $6^{\text{ème}}$, pliages. . .

-D. ROUX : l'aménagement de programmes est trop insuffisant pour réduire la tension : celle-ci n'est pas entre les programmes mais dans la pression exercée par les classes ultérieures : seconde-première-terminale-baccalauréat ; c'est ce dernier qui est la véritable source de la tension . En France, 3 institutions fonctionnent bien : les IREMs, l'APMEP et les CPGE, mais ces dernières sont menacées par l'uniformisation européenne qui les réduiraient à une année. Par ailleurs, la filière S n'est plus une filière scientifique : on peut avoir un bac S avec une mention malgré une mauvaise note en math ! Il faut créer une véritable activité scientifique dans les classes !

-N. soulève le problème du temps par rapport au volume du programme : sous la pression des syndicats, on a beaucoup discuté des contenus sans choisir ce qu'il fallait supprimer ; il faut reprendre le combat pour obtenir 1 heure de plus !

-N'. on a privilégié l'épreuve écrite en temps limité, incompatible avec l'étude en classe de situations de recherche.

-J.P. RICHETON a rencontré C. Robert et lui a demandé que le programme puisse être effectué en 25 semaines mais s'est heurté à une fin de non-recevoir . Il renvoie aux brochures APMEP n^{os} 150 et 154 « *Pour un enseignement problématisé des mathématiques au lycée* ».

-F. GAUDEL ne partage pas l'opinion de D. Roux sur le baccalauréat et les CPGE : celles-ci ont un rôle de sélection très important et brisent certains élèves.

-G. GODEFROY suggère pour introduire un nouveau concept de le replacer dans l'histoire ; il existe d'excellents livres qui le font.

-Y. CHEVALLARD milite pour que les gens investissent la classe : la classe est désirable ! Par exemple en posant la question : comment calculer le volume d'un objet donné. Il est effrayé par les mouvements de retrait et souhaite que tous les élèves reçoivent le LAOS. Avec les PER (Parcours d'Études et de Recherche) on perd du temps si on le consacre à la « visite de monuments », mais sinon on en gagne en termes d'apprentissage . Il vaut mieux ne pas tout traiter ; notre culture n'est pas adaptée : elle n'intègre pas la notion de résultat partiel et ne la met jamais en valeur.

-K. WINSLOW signale l'ouvrage de Liping MA : *Knowing and teaching fundamental mathématics*, Lawrence Erlbaum Pub, 1999.

ÉVALUATION

Paul-Louis Hennequin

Une évaluation très rapide a été faite à chaud le vendredi en fin de matinée sous forme d'un questionnaire anonyme où chaque participant devait exprimer, pour chacune des activités, son indice de satisfaction par rapport aux objectifs de l'U.E. et par rapport à ses propres objectifs ; nous présentons ci-dessous une analyse statistique sur laquelle on peut constater une grande satisfaction générale assortie de quelques nuances et observations.

Voici les remarques formulées sur les questionnaires :

Sur les ateliers : "« excellent équilibre et complémentarité des ateliers, aussi bien du point de vue des contenus que des modalités de mise en œuvre de ces contenus », « le mieux adapté : les ateliers », « une synthèse peut-être plus nette sur les attitudes favorisantes et les gestes fondamentaux du prof en SIRC me paraît nécessaire »

Sur les conférences de Michèle Audin et de Martin Andler : « très intéressant, mais peut-être que ça le serait encore plus en multipliant les exemples, même sans les approfondir, de façon à pouvoir diversifier les applications et les points de vue ».

Sur la conférence d'Yves Chevallard : « J'ai l'impression qu'on aurait pu l'écouter et surtout discuter des heures et de ce fait on reste un peu sur sa faim dans l'envie de creuser la question, de voir les applications de discuter les modalités. . . »
Sur les « promenades » :« un petit moins : nous aider à en créer qui soient adaptées à nos niveaux d'enseignement (collège, lycée) ; peut-être l'idée d'un atelier ? (promenades non pour "attirer" vers la recherche, mais pour montrer la transversalité de différentes notions ou pour éclairer, justifier des études qui apparaissent tout d'un coup dans les programmes, comme l'arithmétique ou les vecteurs. . .) ; mais peut-être cela

déformerait-il la notion de promenade. »

Sur les conférences de Gilles Godefroy et Dominique Roux : « un grand bain de culture .»
Sur celle de G.G. : « une fiche de rappel sur les énoncés des principaux résultats et définitions utilisés dans l'ordre d'exposition aurait été pratique »
Sur l'exposé de Farouk Boucekkine : « intéressant mais trop long ; aurait pu être suivi d'une présentation d'ANIMATH »

Sur l'exposé de Laurent Beddou : « intéressant car l'expérience vit depuis suffisamment longtemps pour qu'on puisse parler de vécu, mais un peu loin de mes préoccupations car vécu à l'université. »

Sur la table ronde : « peut-être préciser un peu plus le thème, ou le restreindre, pour que la discussion soit plus efficace. »

Sur la conférence de Jean-Pierre Raoult : « très heureux d'avoir enfin entendu parler en bien des statistiques par un matheux, d'avoir obtenu des arguments pour défendre cette position et d'avoir pu voir un cas d'étude utilisable en classe. »

Sur le groupe de travail de J.P. Raoult : « Peut-être un débat sur l'enseignement des statistiques aurait été plus riche que cette présentation d'activité, débat éventuellement illustré d'exemples plus précis extraits d'activités photocopiés (donnés en fin de séance) et cités au fur et à mesure de l'avancement de la discussion , au rétroprojecteur. »

Sur l'U.E. en général :
« le principe de conférences trop diverses par rapport aux objectifs de l'U.E. et qui n'ont pas permis le débat devra être repensé »,
« l'U.E. n'a pas assez tiré parti des apports de chacun des participants »,
« les échanges secondaire-supérieur et enseignants-chercheurs ont été trop limités »,
« la très grande richesse des ateliers et des contenus des conférences va dynamiser des expériences de terrain : c'est réussi !" »,
« merci pour cette offre qui nous aura été faite pour " progresser" ou (un peu !) nous rénover ».

Voici pour finir quelques réflexions en vrac de Christine Marcel :

« Cette université m'aura premièrement appris l'humilité. J'étais persuadée, avant de partir, de me retrouver au sein d'un groupe ayant des affinités communes et des envies de développer quelque chose ensemble. Je me suis vite rendu-compte que j'étais "hors du groupe" dans le sens où nous évoluions tous dans des "sphères" différentes avec des objectifs différents et des méthodes bien différentes. Et le constat pour moi fut difficile à admettre (peut-être par rapport à cet univers que je n'atteindrai jamais !) : il faut accepter sa place et laisser les regrets de côté (par rapport aux études que l'on aurait pu faire) pour pouvoir rebondir sur ce que l'on connaît, en occurrence, pour moi, le rôle de professeur de mathématiques, c'est-à-dire avant tout enseignant.

La deuxième leçon aura été de me retrouver dans la "peau d'un élève" qui ne comprend rien et je pense qu'en tant que professeur cela a été très formateur pour moi. Je ne dis plus " il est évident que" mais "est-ce que tout le monde voit pourquoi ?". Je n'avais jamais ressenti ce sentiment d'exclusion de la connaissance et je peux tout à fait comprendre (même si je l'entendais déjà avant !) ce que l'élève qui "a décroché" peut ressentir.

Troisièmement, j'ai rencontré des tas de personnes passionnantes et passionnées par leur métier et l'idée de faire rencontrer des chercheurs à mes élèves m'a séduite. J'ai donc emmené les classes de TS à Grenoble dans le cadre de la fête de le Science (à l'IMAG et d'autres laboratoires de recherches en physique et biologie) et je pense ,de plus en plus, qu'en tant qu'enseignant, il faut que nous trouvions des relais auprès de nos collègues du supérieur car nous ne sommes pas à même de parler de choses que nous ne maîtrisons pas (en tout cas pas moi !).
De plus, forte de cet élan de faire quelque chose de différent, j'ai monté mon club de culture scientifique et technique, adhéré à l'opération 100 classes-100 parrains pour l'année mondiale de la physique et nous préparons Exposciences qui aura lieu en Mai en Drôme-Ardèche. En effet, parmi toutes les promenades mathématiques, les plus riches pour moi, ont été celles qui avaient un rapport avec d'autres sciences et pas seulement celles de mathématiques pures car on touche un public beaucoup plus restreint. J'utilise, au sein du club, les mathématiques comme "étant au service de". Les élèves ont choisi de travailler sur Héron d'Alexandrie,

alors j'espère que Michèle me pardonnera mais il s'agit encor d'un "vieux barbu" (peut-être tout simplement parce que ces travaux me sont plus accessibles que les recherches mathématiques en cours).

Je crois donc en conclusion, que cette université d'été aura été pour moi un tremplin, que je ne regrette rien de ce que j'ai vécu, ni de ce que j'ai pu dire que le dynamisme est contagieux et je remercie Paul -Louis Hennequin pour ces moments de partage et de rencontre. Je ne me considère plus comme une mathématicienne mais comme "un professeur de mathématiques" et j'en suis fière. »

ANNEXE

ANALYSE STATISTIQUE DE L'ÉVALUATION À CHAUD

Analyse factorielle des correspondances sur les avis des participants à l'Université d'été.

Codage des activités :

Dimanche 22 août
2-1 : Accueil, présentation mutuelle
2-2 : Présentation des ateliers
2-3 : Jean DHOMBRES

Lundi 23
3-1 : Ateliers
3-2 : Michèle AUDIN
3-3 : Martin ANDLER
3-4 : Réception à l'Hôtel de Ville
3-5 : Farouk BOUCEKKINE

Mardi 24
4-1 : Ateliers
4-2 : Excursion
4-3 : Travail en groupe sur l'une au choix des premières conférences
4-4 : Gilles GODEFROY

Mercredi 25
5-1 : Ateliers

5-2 : Yves CHEVALLARD
5-3 : Débat-table ronde : Modérateur Véronique CHAUVEAU
5-4 : Eliane COUSQUER

Jeudi 26
6-1 : Ateliers
6-2 : Jean-Pierre RAOULT
6-3 : Dominique ROUX
6-4 : Laurent BEDDOU
6-5 : Travail en groupe au choix sur l'une des dernières conférences

Vendredi 27
7-1 : Compte rendu des ateliers
7-2 : Bilan et perspectives.

Codage des appréciations :

Pour chaque activité, les 38 participants ayant pris part à l'évaluation étaient invités à exprimer deux pourcentages de satisfaction ; pour simplifier l'analyse, nous avons regroupé les pourcentages en quatre classes (insatisfaits, peu satisfaits, satisfaits avec réserve, très satisfaits).

	Les objectifs de l'**U**niversité d'été sont-ils atteints	**M**es propre attentes sont-elles atteintes
0 à 29%	U1	M1
30 à 59%	U2	M2
60 à 90%	U3	M3
91 à 100%	U4	M4

Lecture des graphiques

La situation des huit points codant les appréciations conduit aux observations suivantes :

l'axe 1 oppose M1 et U1 à M4 et U4 : il mesure donc l'insatisfaction à droite et la satisfaction à gauche ;

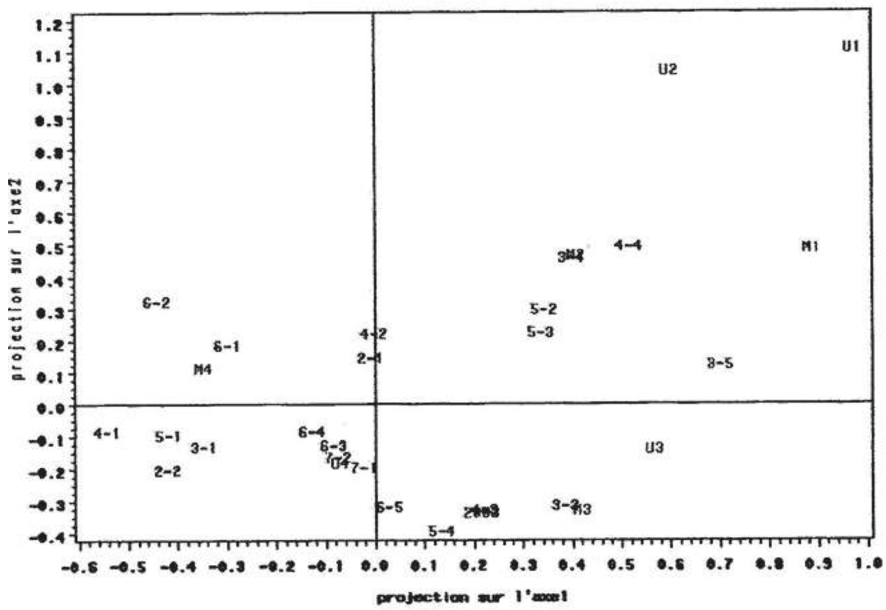
l'axe 2 oppose M4 , M2, et M1 à U4 et M1 à U4 et U3 ; il mesurerait donc les écarts entre les objectifs de chacun et ceux de l'U.E.

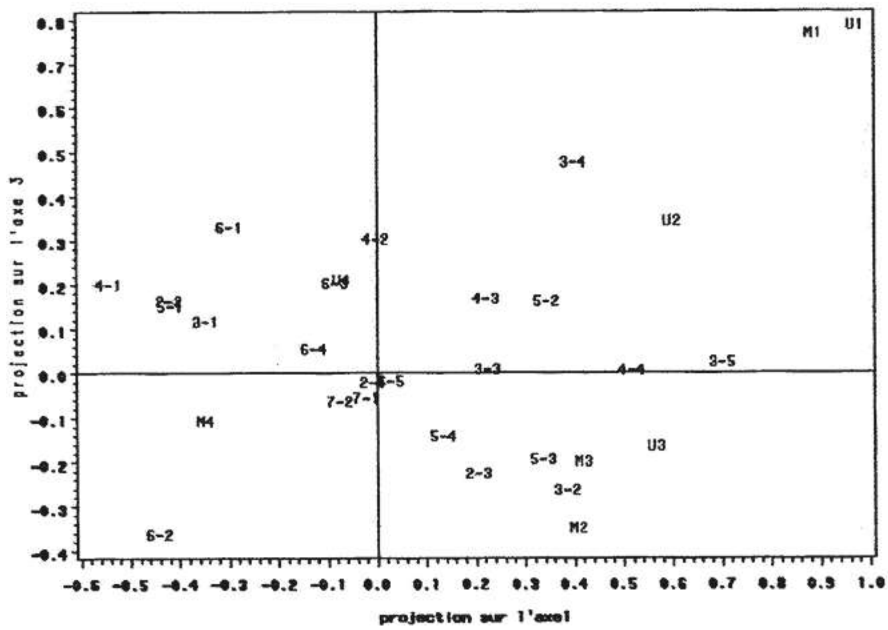
l'axe 3 permet de préciser la proximité de chaque activité avec M4 et U4 .

Bien entendu , il aurait fallu séparer les ateliers mais on vérifie que 2-2, 3-1, 4-1, 5-1 et 6-1 sont bien regroupés autour de M4 et U4 .

Il appartient à chacun d'interpréter plus en détail ces graphiques, sans pour autant leur faire dire plus que ce qu'ils représentent.

Singular Value	Principal Inertia	Chi-Square	Percent	Cumulative Percent	8 16 24 32 40
0.35611	0.12681	102.084	41.42	41.42	**************************
0.27291	0.07448	59.957	24.33	65.75	***************
0.21180	0.04486	36.111	14.65	80.40	*********
0.15734	0.02476	19.929	8.09	88.49	*****
0.14864	0.02209	17.786	7.22	95.71	*****
0.09119	0.00832	6.694	2.72	98.42	**
0.06949	0.00483	3.887	1.58	100.00	*




projection sur l'axe 3
projection sur l'axe1
M1
U1
3-4
U2
6-1
4-2
4-1
4-3
5-2
3-1
6-4
3-3
4-4
3-5
M4
5-4
5-3
M3
U3
2-3
3-2
6-2
M2

QUELQUES RÉFLEXIONS SUITE A L'UNIVERSITÉ D'ÉTÉ

François LO JACOMO (2 septembre)

L'Université d'Eté 2004 d'Animath m'a apporté plus que j'en attendais, mettant l'accent sur le fait que les mathématiques sont dans une période critique où il importe d'agir vite si l'on ne veut pas qu'elles se marginalisent. Et avec quelques semaines de recul, il me semble important de rédiger les quelques réflexions qu'elle a suscitées de mon point de vue.

Un premier problème est la définition et le positionnement de cette science, que ce soit d'un point de vue philosophique - vision platonicienne que l'on peut avoir des objets mathématiques, ou au contraire l'idée que, comme dans le jeu d'échecs, les mathématiques explorent les conséquences d'un certain nombre de règles du jeu que nous nous sommes données et qui ne sont pas nécessairement universelles : des êtres intelligents sur d'autres planètes, qui n'auraient pas la même vision du monde que nous, par exemple aveugles et de forme asymétrique, construiraient-ils la même mathématique que nous ? - ou du point de vue du découpage des disciplines - la mécanique doit-elle être rattachée aux mathématiques ou à la physique ? - et plus généralement des liens qu'entretiennent les mathématiques avec les disciplines voisines - y a-t-il une solidarité entre les disciplines face à la situation actuelle qui frappe l'enseignement scientifique dans son ensemble ?

Mais surtout, les mathématiques répondent-elles aux exigences du monde moderne ? En quoi a-t-on besoin à l'heure actuelle de mathématiques ? Quel lien y a-t-il entre l'usage que l'on peut avoir des mathématiques dans la vie quotidienne ou professionnelle, l'usage qu'on en fait dans l'enseignement scolaire et l'usage qu'en font les chercheurs professionnels ? La mise en garde d'Yves Chevallard me rappelle une mise en garde analogue du linguiste Antoine Culioli à un colloque linguistique au Ministère de la Recherche, en 1995 : si vous voulez que votre science soit prise au sérieux, ne dites pas des choses que quelqu'un d'extérieur puisse réfuter. Cela étant, je voudrais mettre l'accent sur trois notions : l'idée, le raisonnement et l'objet mathématique.

L'idée mathématique

Martin Andler regrette qu'on donne une telle importance à la démonstration, qui ne constitue pas l'essentiel de l'activité de recherche d'un mathématicien. Mais d'une manière générale, je pense que l'idée n'est pas suffisamment valorisée par rapport à la mise en forme. En France notamment, si les chercheurs s'efforcent de démontrer un théorème dans sa généralité maximale, c'est peut-être parce que le seul fait de généraliser un résultat connu, d'améliorer une majoration en affinant une méthode déjà utilisée, est déjà valorisant. C'est le système des brevets industriels qui déteint sur les mathématiques. La mise en forme qui permet de petites avancées a peut-être trop d'importance par rapport à l'idée initiale qui, dès l'instant où elle s'applique à un résultat restreint, peut tout autant s'utiliser pour un résultat plus général sans que cela apporte grand-chose. Les contraintes de formalisation et d'optimisation de la rédaction nous enferment dans une vision étroite de la réalité mathématique, alors que la valorisation des idées nous ouvre un horizon plus vaste et nous libère, vers une pratique plus créative où l'intuition a une place prépondérante.

L'idée est particulièrement importante dans les premières étapes de la recherche, mais celles-ci ne laissent pas de traces exploitables au niveau de l'enseignement secondaire, et la pratique actuelle de l'enseignement permet plus facilement de sanctionner les erreurs formelles, les défauts de mise en forme, que l'absence d'idée. Or sans idée, point de résultat digne de ce nom : on peut juste faire des calculs ou appliquer des techniques, ce qu'une machine sait faire mieux que nous, à quoi bon les maths ? Il peut sembler difficile de promouvoir l'idée dans un enseignement de masse, dans la mesure où les grandes idées mathématiques ne sont pas suffisamment nombreuses pour que chacun en ait une, néanmoins un enseignement qui met trop l'accent sur les contraintes de rigueur formelle me semble bloquant pour le développement des idées. Un type d'exercice différent de ceux actuellement proposés mettrait plus en valeur les idées mathématiques : par exemple, augmenter l'importance de l'oral ; si l'on s'efforce d'expliquer une démonstration oralement (par téléphone), on est contraint de mettre l'accent sur les idées plus que sur la mise en forme.

Le raisonnement mathématique

Faut-il privilégier les résultats mathématiques ou le raisonnement ? On voit souvent les mathématiques comme un ensemble de résultats, de théorèmes accumulés au cours des siècles, dont certains sont utiles aux différentes techniques - mais une fois qu'ils ont été démontrés, ils font partie d'un acquis collectif et il suffit de citer la référence de la démonstration pour en faire usage -, d'autres folkloriques - le théorème de Fermat -, et on ne voit pas trop où conduit cet amoncellement de théorèmes ni ce qui motive que l'on investisse dans cette voie. Certes, les chercheurs ne manquent pas d'arguments pour prouver que certains de ces résultats répondent à une demande externe, et que certains problèmes de notre vie quotidienne ne seraient pas solubles sans l'aide des mathématiques. Mais plus encore que ces résultats mathématiques, ce qui me semble fondamentalement utile dans cette science, c'est la pratique du raisonnement. C'est le même type de raisonnement dont on a fondamentalement besoin chaque fois que l'on cherche à diagnostiquer une panne ou à résoudre un problème de notre vie de tous les jours, quel qu'il soit. Je dis souvent que c'est en lisant *Le mystère de la chambre jaune* de Gaston Leroux que j'ai compris ce qu'était un raisonnement mathématique : de fait, si les élèves savaient « fermer le cercle » et « prendre la raison par le bon bout », ils seraient davantage en mesure de résoudre un problème de mathématiques. Car cette technique qu'utilise Rouletabille pour résoudre une énigme policière est fondamentalement un raisonnement mathématique.

C'est pourquoi faire reposer les mathématiques sur des résultats ou des techniques, sur le calcul et la géométrie, me semble très insuffisant. Les méthodes de raisonnement sont encore plus importantes : le principe des tiroirs est une avancée considérable du XIX^{e} siècle, et il faut lui donner une place primordiale dans notre enseignement. Considérer les résultats mathématiques comme un patrimoine collectif que l'on s'approprie dès l'instant où l'on peut citer la référence d'un théorème ou le nom de son auteur me semble une hérésie : on ne connaît un théorème que si l'on est capable de reconstituer toutes les étapes qui mènent à sa démonstration. Certes, étant donné la complexité de certaines démonstrations actuelles, on ne peut pas mémoriser en détails toutes les étapes de toutes les démonstrations, mais on doit maîtriser suffisamment les idées mises en œuvre dans le raisonnement pour être capable de répondre à la question : si l'on modifie légèrement les données du problème, en quoi cela modifie-t-il la conclusion ? Et pour atteindre ce niveau d'assimilation, « cent fois sur le métier remettez votre ouvrage » : il ne faut pas considérer comme acquis un résultat qu'on a vu une fois et dont on a la référence dans son carnet, il faut le redémontrer chaque fois qu'on en a besoin en s'efforçant de ne pas relire la démonstration faite précédemment. Car plus que le résultat en soi, ce qui est vraiment utile, c'est le raisonnement qui y conduit.

Les objets mathématiques

La manière dont on aborde souvent la question de l'abstrait et du concret en mathématiques atteste une mauvaise vision des objets mathématiques. Les objets mathématiques sont des objets abstraits, certes, ils n'ont pas grand-chose à voir avec les objets concrets de notre réalité quotidienne. Mais ce sont des objets, il est important de les voir, de les manipuler, de les admirer sous tous les angles. Ce n'est pas en exportant des techniques mathématiques sur une réalité quotidienne (souvent en décalage avec celle que connaissent véritablement les élèves) qu'on leur fera mieux comprendre ce que sont les objets mathématiques.

Plusieurs conférences et ateliers ont utilisé la notion de nombre, et m'ont convaincu que la vision que l'on a de l'objet mathématique « nombre » est souvent insatisfaisante et conduit à toutes sortes d'erreurs mathématiques. L'idée de représenter les nombres rationnels par une droite me semble une aberration. Je m'étais indigné, il y a 25 ans, devant le fait qu'on utilisait, à l'école primaire, des segments pour représenter des sommes d'argent, gommant d'un seul coup la différence fondamentale entre « compter » et « mesurer ». Nous avons là deux approches de la notion de nombre, et la conférence de Dominique Roux nous a rappelé que pour les Grecs, elles étaient clairement distinctes. Ces deux notions ont convergé historiquement vers une notion actuelle de nombre, mais celle-ci n'est pas un acquis collectif dont nous bénéficions à la naissance, c'est un objet que chaque élève doit reconstruire individuellement au cours de son apprentissage. Selon le principe des sciences de la vie, que l'ontogenèse reproduit la phylogenèse, il me semble utile de repasser par les mêmes étapes, de la distinction entre compter et mesurer, des notions de commensurabilité et de rationnalité…

Un support audiovisuel me semble indispensable pour bien montrer ces objets mathémathiques, en donner une image visuelle à laquelle les élèves puissent se rattacher. Eliane Cousquer nous a montré des films qui exposent clairement certaines notions mathématiques, il me semble fondamental d'augmenter la richesse de ce patrimoine audiovisuel - je pense par exemple à un film qui montrerait clairement ce qu'est un nombre -, et sa diffusion dans les établissements scolaires ou à la télévision. De telles productions donneraient une autre image des objets mathématiques et réactualiseraient notre discipline en la mettant en phase avec les techniques actuelles. Les mathématiques ne sont pas intrinsèquement liées à la craie et au chiffon.

Et voir les objets mathématiques, c'est les voir en tant que tels, et pas seulement pour les applications concrètes qu'on peut en faire. Le fait que les calculettes fassent mieux que nous les multiplications n'enlève rien au fait que l'objet mathématique nombre est intrinsèquement lié à la pratique des opérations, qui doit rester une des bases de notre enseignement : en réponse à la question de Pierre Audin, « faut-il continuer à enseigner les tables de multiplication ? », personnellement je trouve indispensable d'enseigner les tables de multiplication, et je trouve très bien qu'on demande à ma fille, en tout début de $6^{\text{ème}}$ (aux Pays Bas), de calculer sans calculette, en décomposant à la main en facteurs premiers, le PGCD de 532 et 359 : je ne sais pas s'il en est de même en France.

Pierre AUDIN (7 octobre)

A un moment donné, au cours de cette université d'été que j'ai appréciée moi aussi, j'ai posé une question. La question est « est-il toujours utile de faire apprendre les tables de multiplication ? », ce que je peux compléter en « si la façon dont nous avons été bien formés a été utile pour nous, est-ce que reproduire ce schéma ne risque pas d'handicaper les enfants actuels en ne leur donnant pas accès assez rapidement à un monde tout autre ? ».

Tout le monde, ou presque, a compris que je pense qu'il faut arrêter de faire apprendre les tables de multiplication. C'est faux. J'ai des calculatrices dont je ne me sers que rarement, et j'ai presque toujours besoin du mode d'emploi. Je me trompe dans les calculs mais je continue de les faire de tête ou à la main. Ca ne m'empêche pas de me poser des questions sur ce dont nous sommes persuadés et dont je n'ai pas de preuve. Devant ma télé, j'ai quatre télécommandes. Une pour la télé. Une pour le magnétoscope. Une pour le lecteur DVD. Une pour le satellite. Quand je veux voir une chaîne du satellite ou un DVD, je demande à une de mes filles de me préparer ça. Elles, elles jonglent avec les télécommandes, les menus, les options etc. Moi, il me faudrait un mode d'emploi. Des que ces machins sont apparus, elles ont appris à s'en servir, comme de leur « gameboy ».

Qu'est-ce qui ferait que ce n'est pas pareil avec les calculatrices et les ordinateurs ? Est-ce que la question a été étudiée, ou est-ce que nous sommes pleins d'*a priori* : on nous a formés comme ça, on continue ? Quand j'étais en primaire, on avait des encriers et des plumes sergent-major. Au grand dam des générations précédentes qui se rappelaient leurs plumes d'oie avec nostalgie. Les enfants apprennent à écrire avec des crayons et des stylos a bille. Pourquoi pas avec un clavier ?

Bref, ça change un peu partout, sauf pour le calcul. Donc je me pose des questions. Vraiment. Et répondre a ma question par une formule genre « ma fille apprend les tables de multiplication et j'en suis content », ça ne me paraît pas être une réponse. J'attends plutôt quelque chose du style « on a fait une étude statistique sur 23 élèves qu'on a suivis du CP au CE2, il y en avait 10 qui apprenaient à se servir d'un ordinateur avec calcul formel et 13 qui apprenaient les tables de multiplication et 80 % de ceux-ci ont eu de bons résultats aux tests de fin de CE2 alors que 20 % de ceux-la ont eu de mauvais résultats, donc il faut continuer les tables de multiplication. »

Peut-être la bonne question aurait alors été de demander pourquoi continuer à apprendre « la » racine carrée alors que nous savons bien que ce qui importe ce sont « les » racines carrées, les solutions de l'équation, et non « la solution positive » qui finira par perdre difficilement son sens quand l'élève rencontrera les nombres complexes.

Nous avons appris les mathématiques dans l'univers scolaire où les programmes disent qu'il y a les tables de multiplication, la valeur absolue, la racine carrée et encore bien d'autres choses. Mais il serait peut-être utile de se poser la question du pourquoi de ces apprentissages. A un moment donné, ils ont été très utiles, ils le sont peut-être moins, ils sont peut-être même castrateurs pour nos élèves. Peut-être. Il y a bien des choses très importantes dans la formation qui le sont beaucoup moins désormais. Il était impossible d'écrire la science dans une langue autre que le latin. Il était nécessaire d'être scribe pour écrire l'égyptien, d'être mandarin pour lire le chinois. Heureusement, à certains moments ces nécessités ont été remises en cause et la société a poursuivi son chemin, et les programmes se sont adaptés. Avons-nous tort d'utiliser des imprimantes plutôt que le rocher et le burin ?

Mais je ne suis pas sûr que des expériences aient été tentées. Ce qui me chagrine un peu, voila tout. Mais il faut bien dire que ça ne m'empêche pas de dormir.

François LO JACOMO (8 octobre)

Je suis heureux que le débat se poursuive, mais je ne voudrais pas que ce que j'ai écrit dans ce texte soit mal compris. Je n'avais aucunement l'intention de critiquer la question posée, qui me semble très pertinente au moment où elle a été posée car elle résume de manière parfaitement claire un questionnement sous-jacent qui ne parvenait pas à s'exprimer. Je l'avais parfaitement comprise de la manière dont tu la présentes aujourd'hui.

Ce qui m'a gêné, c'est que je n'ai pas entendu de réponse claire à cette question. Il y avait comme une peur de toucher un sujet tabou, alors que tu as eu raison de le mettre sur la table. Personnellement, j'ai une réponse claire à proposer, mais c'est une réponse personnelle : pour maîtriser un objet mathématique il faut le manipuler, et que pour manipuler les nombres il faut apprendre les tables de multiplication. Si quelqu'un avait pu présenter la réponse que tu attendais, sur la base d'études qui sont indiscutablement nécessaires, j'en aurais été satisfait. Mais je n'ai pas entendu cette réponse, et ce n'est pas parce que je n'ai pas fait moi-même ces recherches que je dois avoir peur de prendre position. La société actuelle est en train de marginaliser tous ceux qui ont peur, il est donc important d'avoir des convictions et d'oser les exprimer.

Cela ne veut pas dire que je méconnais l'évolution du monde actuel. Pour aller dans le sens de ce que tu dis, mon fils a reçu pour son anniversaire de huit ans un jeu qui était censé être branché sur la télé.

Moi aussi, j'ai tous ces périphériques de télévision, mais en outre ma télé date de 1983 et alors qu'il m'arrive professionnellement de connecter des réseaux informatiques, je n'ai pas réussi à réaliser ce branchement. Lui (ou la copine qui le lui a offert), à huit ans, ont réussi. Cette évolution est très importante et j'en prends acte. Mais la question que se pose la société est clairement : est-ce que, compte tenu de cette évolution, on a encore besoin de mathématiques ? Il faut répondre avec conviction à cette question. S'il faut faire des enquêtes pour crédibiliser nos réponses, faisons-les, n'ayons pas peur de dire ce dont nous sommes convaincus, sinon nous disparaîtrons.

Je n'ai pas perçu le contexte de la même manière que ce que résume Pierre Audin. La question n'était pas, selon moi : a-t-on tort de diaboliser les calculatrices, mais : faut-il apprendre aux élèves à raisonner ou à taper sur un clavier ? Je suis convaincu que les deux sont nécessaires, et depuis longtemps je défends l'idée que la dactylographie devrait être enseignée comme discipline fondamentale au collège, car c'est un avantage incontestable de pouvoir taper sans effort, avec tous ses doigts, sur un clavier d'ordinateur. Mais ce n'est pas une priorité de notre discipline.

La priorité de notre discipline, telle que je la perçois, c'est de faire assimiler aux élèves des objets et des raisonnements mathématiques. Parler de nombres sans faire apprendre les tables de multiplication, c'est comme montrer des legos ou autres jeux de construction derrière une vitrine sans permettre de les toucher. Car pour assimiler un concept, il faut le manipuler véritablement, et les tables de multiplication me semblent être la première phase obligée de cette manipulation tout comme les gammes sont une étape obligée de l'apprentissage du piano. Je ne conteste pas que des technologies innovantes permettent elles aussi d'approfondir ce concept de nombre, les moyens audiovisuels notamment me semblent sous-utilisés dans notre enseignement, mais l'invention de la voiture ne dispense pas d'apprendre à marcher.

Peut-on imaginer une mathématique sans cette notion de nombre ? J'ai du mal à le concevoir, et étant donné tous les problèmes que pose aujourd'hui l'enseignement des mathématiques, il ne me semble pas judicieux de commencer par celui-ci. Un mathématicien qui aurait besoin de sa calculette pour le moindre calcul algébrique serait sérieusement handicapé. Comment s'apercevoir qu'un résultat est manifestement faux si l'on n'a pas une pratique instinctive du calcul ? Sans compter que la « certitude » joue un rôle considérable en mathématiques, avoir la certitude qu'un problème est soluble le rend déjà plus facile, et c'est avec les propriétés élémentaires des opérations qu'on acquiert ses premières certitudes. La question n'est pas de glorifier ceux qui connaissent 137×73, mais depuis Peano nous avons construit une mathématique à partir des nombres : ce n'est pas obligatoirement la meilleure chose que nous ayons faite, mais avant de démolir complètement cet édifice, commençons par des propositions constructives qui garantissent la pérennité de notre discipline.

François GAUDEL (17 octobre)

J'étais ce matin à une réunion du Réseau d'Education prioritaire qui regroupe les écoles primaires et le collège du quartier de l'Avenir à Drancy. En effet nous (La MJC que j'anime, en partenariat avec le collège) lançons une opération de soutien scolaire en maths à cette rentrée en direction d'élèves de sixième (une vingtaine en tout, en deux groupes) ayant besoin d'une remédiation. Il y avait là les professeurs des écoles et professeurs du collège concernés, plus des conseillers pédagogiques etc. et on a examiné les résultats des évaluations de sixième. Il s'agissait d'une phase préparatoire au soutien. On ne peut pas dire que les résultats globaux en calcul mental soient catastrophiques, seule la division semble créer des blocages chez un nombre important d'élèves (par exemple pour évaluer combien contient un bidon si cinq bidons égaux contiennent 9 litres, ils utilisent multiplication et une méthode par approximations successives). Egalement les problèmes de zéros et de virgules, de calculs d'horaires. Cependant, les élèves ressentis par les enseignants comme les plus en difficulté sont incontestablement ceux qui ont un problème avec le calcul, ce qui justifie que c'est dans ce domaine que la demande de remédiation est la plus forte. S'agit-il de sens, ou s'agit-il de technique ? les enseignants de primaire expliquent comment ils procèdent dans ces deux domaines, et ça paraît consistant. Pour ces élèves qui semblent bel et bien bloqués en maths à l'entrée en sixième par des difficultés insurmontées en calcul, le défi sera donc de trouver des méthodes (on dispose de trois heures par semaine, après les cours), pour les faire s'intéresser à des calculs, pratiquer, apprendre, et à partir de là garder le résultat des techniques et ce qui les sous-tend. Au cas où ça marcherait, il sera intéressant de voir si cela a des conséquences sur l'ensemble de leur apprentissage des maths ; étant entendu que tout cela se fait dans le cadre des programmes actuels qui accordent me semble-t-il une importance assez grande aux opérations. (On fera aussi un peu de géométrie, essentiellement à partir de constructions). Ce message n'a pas la prétention de répondre sur l'importance des tables (qui semblait évidente à tous les participants), mais permet de voir cependant que les déficiences en calcul opératoire sont bel et bien ressenties comme la cause majeure d'échec en sixième par les enseignants et l'équipe concernée dans ce cas précis, et dans le cadre des programmes actuels. J'ai aussi mon idée sur la question, mais elle relève plus de la façon dont je vois et ressens les maths, et j'espère avoir le temps d'écrire sur le sujet

François LO JACOMO (17 octobre)

En classant mes mails, je retrouve le tien que j'avais lu rapidement au moment où j'ai répondu à Pierre Audin. Effectivement, ton mail atteste que dans la situation actuelle, il semble évident à tout enseignant que les tables de multiplication sont un apprentissage utile, mais peut-être cela semble évident seulement parce que c'est un des objectifs prioritaires des programmes actuels, ce qui justifie la question de Pierre Audin : dans l'absolu, peut-on imaginer un enseignement des maths sans tables de multiplication ? Personnellement je pense que non, mais je reconnais que ce n'est qu'une intuition personnelle, je n'ai jamais fait d'étude scientifique de cette question.

Quoi qu'il en soit, je pense que cette question est en elle-même dangereuse. Nous sommes devant un projet éducatif (rapport Thélot) visant à se recentrer sur les apprentissages fondamentaux et à considérer comme moins fondamentales certaines disciplines comme les sciences ou l'histoire au profit d'apprentissages fondamentaux comme l'anglais et le calcul. Le fait de placer l'anglais dans les apprentissages fondamentaux ne va pas manquer de faire réagir - j'ai entendu parler d'un article de Claude Hagège dans le Monde du 15 octobre, que je n'ai pas encore lu -. Mais remettre en cause que l'apprentissage du calcul, donc des opérations, soit un apprentissage fondamental, risque d'avoir de graves conséquences sur la place des mathématiques dans l'enseignement secondaire.

Autant je suis d'accord que des études sérieuses doivent être menées, qui selon moi confirmeront l'utilité de cet apprentissage, mais il ne faut pas préjuger de leurs conclusions. Autant je crains que remuer cette question à l'époque actuelle et faire croire que même des mathématiciens doutent que cet enseignement du calcul soit un enseignement fondamental, ce que pour l'instant personne d'autre ne remet en question, me semble particulièrement dangereux.

Je demeure persuadé que notre enseignement n'est pas bien adapté à la réalité sociale actuelle, mais cette question des tables de multiplication n'est peut-être pas la première à aborder si l'on veut améliorer les choses.

Marie-Odile DOTT

Je trouve vôtre questionnement très intéressant, il m'a amené à me demander où, dans les programmes actuels on pouvait se passer de savoir calculer, comment, sans savoir calculer et sans être tributaire de la calculatrice ou de l'ordinateur, on pouvait faire de l'analyse, des probabilités ou même du calcul vectoriel et une grande partie de la géométrie du collège et du lycée (Thalès, Pythagore, produit scalaire, triangle), et j'avoue que je suis perplexe. La réponse de notre collègue F. Gaudel nous éclaire et ma propre expérience me fait dire avec lui que les meilleurs élèves sont aussi toujours ceux qui savent le mieux calculer. En y réfléchissant bien, je trouve que le calcul, tel que le pratique celui qui calcule bien et ne revient pas sans cesse au sens premier de ce qu'il fait parce qu'il a digéré des mécanismes, est une activité très abstraite, où se multiplient d'incessants va-et-vient entre l'appris (ce que l'on sait par cœur, comme tes fameuses tables) et l'initiative (avoir l'idée de, par exemple, calculer « astucieusement" », ou d'écrire d'une autre manière ce qui permet de résoudre de nombreux problèmes comme en arithmétique) ce qui sans aucun doute favorise le développement de l'aptitude à raisonner, réutilisable probablement dans des activités sans aucun lien.

Alors quels types d'apprentissages différents pourrions nous faire en mathématiques ? Sans doute la question mérite d'être posée, mais pourrions-nous y répondre sans expérimenter de nouvelles pistes et alors, dans quel cadre, avec quelle prise de risque, quels espoirs ? Y a-t-il des études à ce sujet ? (Je te rejoins donc. . .)

Et par dessus tout : que puis-je faire pour que ceux de mes élèves qui ne savent pas calculer réussissent quand même en maths (comme ceux qui ne peuvent pas comprendre une limite parce qu'ils ne savent pas faire une division, et tant d'autres . . .) ?

Pierre AUDIN

Quand on a démarré MATh.en.JEANS, il fallait sans arrêt se justifier. Pourquoi on fait ça, à quoi ça sert, qu'est-ce que ça apporte aux élèves, est-ce que les élèves réussissent mieux, etc. Mais si on apprend aux élèves à faire autre chose, et qu'on les évalue sur le truc habituel, qu'est-ce qu'on va prouver ? Qu'ils ne sont pas meilleurs sur le truc habituel ? Ca ne serait pas étonnant. Ca ne prouve pas qu'on a tort de faire autre chose avec eux.

En 1991 ou 1992, j'ai entendu parler d'un système en vigueur au Québec (ou partiellement, ou projeté ? Je ne sais plus, peu importe, ce n'est pas mon idée mais elle me paraît bonne). On forme des scientifiques. Donc le Bac est en deux parties. Une des deux parties est un projet scientifique au long cours, mené par l'élève pendant toute l'année. L'autre partie est classique, savoir faire un certain nombre d'exercices types. Ce qui n'est pas classique, c'est qu'il y a des sessions toute l'année, disons tous les deux mois. L'élève peut passer cette partie autant de fois qu'il veut, l'essentiel c'est qu'il l'ait une fois. S'il ne l'a pas, il n'a pas le Bac. S'il l'a, on évalue son projet scientifique, et sa note est intégralement celle de cette évaluation. S'il a un très bon projet et qu'il a négligé la partie « calculatoire », il a perdu. La partie classique est un passage obligé mais qui ne compte pas du tout dans la note.

L'intérêt, c'est que ça laisse de l'importance à ce qu'on a l'habitude de considérer comme important (résoudre une équation, étudier une fonction, déterminer un barycentre, composer des transformations, etc, connaître ses tables de multiplication, quoi) mais que ça donne beaucoup plus de place pour autre chose. Autre chose dans laquelle il est possible que l'élève soit amené à utiliser à fond des outils modernes, mais ce n'est pas obligé. Et dans cette partie là, on pourrait peut-être tester des trucs intéressants.

Cette proposition aurait beaucoup d'avantages. Elle serait valable pour une période transitoire pendant laquelle on pourrait réfléchir à fond sur la place respective des deux parties dans l'évaluation, mais surtout dans les programmes scolaires. Et peut-être l'une des deux parties finira par disparaître, mais sûrement on attendrait une sorte d'équilibre.

Bien sûr, pour les élèves de cette année, on ne peut pas « jouer » avec eux et avec leur avenir, le programme est ce qu'il est, l'évaluation est ce qu'elle est... Oui, il y a des élèves maintenant et il faut les aider maintenant. Mais en décollant de la réalité obstinée de tous les jours, en prenant le temps, et sans revenir trop vite aux élèves, est-ce qu'il y a des choses importantes à comprendre en maths, où l'on pourrait se passer du calcul à la main ? Pas du calcul, mais ne pas être obligé de savoir faire le calcul à la main ou de tête. Que si on se sert des outils modernes, on peut y arriver aussi. Si on avait des réponses là-dessus, on pourrait passer à la phase suivante : est-ce que ce à quoi on arrive alors coûte plus cher ou non pour les élèves, rapporte plus ou non pour leur formation ?

François GAUDEL

Ce qui est génial en maths, contrairement à d'autres disciplines, c'est qu'il n'y a pas beaucoup de boîtes noires. Apprendre aux enfants à se méfier un peu des boîtes noires, ce n'est pas leur apprendre qu'il ne faut pas s'en servir, mais leur apprendre à raisonner avec leur propre cerveau (ni celui de la calculatrice, ni celui du prof).

BILLET D'HUMOUR

L'atelier n^{o}4

Un quatrième atelier s'est réuni clandestinement la nuit en un lieu secret du foyer des planchettes (de Galton) ; certains noctambules ont entrevu des rais de lumière dans les interstices des marches du grand escalier. Il a travaillé sur le problème (ouvert mais d'authentique actualité) suivant :

Le mystère de la chambre bleue

Un des participants de l'U.E. que nous noterons **N** (suivant l'usage des affiches de la Sorbonne avant mai 68), occupe une des chambres du troisième étage (donc inaccessible par la fenêtre) pourvue d'une et une seule porte ; voulant rentrer dans sa chambre, il trouve celle-ci fermée à clé. En vertu du porisme de Musset *Il faut qu'une porte soit ouverte ou fermée* et en appliquant le lemme de Baire, il en déduit qu'il a perdu sa clé à l'extérieur de la chambre. Pouvez-vous l'aider à la retrouver ?

Voici quelques propositions qui émergent de la discussion animée que suscite ce problème :

1- Si **N** n'a pas utilisé de véhicule ni fait son petit footing du matin, la clé est en un point I de l'agglomératon san-floraine ; il suffit donc de recouvrir un plan de celle-ci par un plan d'Argand puis de déterminer l'affixe Z de ce point I ; c'est la (une) solution d'une équation (est-elle algébrique ?)

2- Il suffit de se remémorer tous les trajets effectués par **N** (qui sont des lacets) puis de les modéliser : sont-ce des singularités lagrangiennes ? des courbes elliptiques ? Que dire de leur groupe ? Une toupie pourrait-elle être utile ?

3- Pourquoi ne pas utiliser les constructions géométriques du livre X d'Euclide et déterminer I comme intersection de droites, à partir d'un pavage par des polygones réguliers ? Peut-on se limiter aux points de coordonnées rationnelles ?

4- Ce qui est intéressant ici c'est que la démonstration vient après le travail principal d'observation et d'expérimentation. Suivons **N**, pour voir comment il va résoudre le problème, nous démontrerons plus tard que, par exemple, sa méthode est optimale en temps ou en chemin parcouru.

5- Pour retrouver cette clé mathématique, ne pourrait-on entreprendre une promenade qui nous ferait visiter tous les monuments de Saint-Flour ? Pourquoi pas plutôt les bistrots (sans oublier la ville basse) ?

6- Faisons une simulation : pour cela demandons à chacun des 56 participants de perdre sa clé puis étudions le nuage obtenu, cherchons son point moyen, son ellipsoïde d'inertie...

7- Comment modéliser un mathématicien se promenant au hasard dans la ville ? Courbe du dragon ? Trajectoire brownienne ?

8- Promenons-nous en ville et interwievons les personnes qui utilisent les mathématiques dans leur vie et demandons leur leur algorithme pour retrouver une clé perdue.

9- Peut-on imaginer un film qui présenterait cette situation et fournirait une monstration ?

L'Université d'été n'a pas permis d'explorer à fond toutes ces pistes. Entre temps, **N** a retrouvé sa clé. *Pouvez-vous dire où et pourquoi ?*

louisjean
IMPRIMEUR
59, Av. Émile Didier
05003 Gap Cedex
Tél. 04 92 53 17 00
Dépôt légal : 604
Octobre 2005
Imprimé en France

Des structures efficaces et démocratiques
sur la base du *bénévolat intégral*,
un ***Comité*** et un ***Bureau National***
des ***Commissions nationales***
organisées par niveaux ou par thèmes
lieux d'information et d'échanges, **ouvertes à tous.**

LES JOURNEES NATIONALES
temps fort de l'**APMEP.**
Sur 3 à 4 jours, déplaçant près de 1000 enseignants de mathématiques
dans une Régionale différente chaque année,
sur un thème déterminé,
avec des *conférenciers renommés*, des *débats*,
de multiples *ateliers*, des *expositions*, ...

26 REGIONALES
organes de liaison
avec les autorités pédagogiques et administratives
de la Région, très souvent impliquées au niveau des IREM
et des IUFM, *relais essentiels* entre le National et les adhérents
avec souvent leurs propres bulletins et leurs publications.

6 numéros du
Bulletin à Grande Vitesse ("BGV")
environ 80 pages par an, en A4.
Véritable ***journal d'information***
pour cerner rapidement
l'actualité mathématique et associative

Un Serveur Web
accessible par internet
http://www.apmep.asso.fr

EVAPM, *observatoire d'Evaluation par l'APMEP*
de l'impact des programmes
de mathématiques
au Collège et aux Lycées.

L'APMEP c'est

EVAPMIB
base informatisée et mémoire
des évaluations EVAPM et autres ...

PUBLIMATH
banque de données bibliographiques
sur **internet**
en association avec les **IREM**

Un secrétariat permanent
26 rue Duméril - 75013 Paris
Tél. 01 43 31 34 05 - Fax : 01 42 17 08 77
Courriel : apmep@apmep.ass.fr

PLOT
(4 numéros par an, en A4, chacun de 32 pages)
Partager, Lire, Ouvrir, Transmettre
plus spécialement destiné aux "débutants"
lieu d'échange à de nombreuses rubriques.

6 numéros du
BULLETIN VERT
en 17 x 24, environ 800 pages par an.
Lieu d'échange avec :
- des **articles de fond** pour continuer à se former
- des **documents "clés en mains"** de l'école au lycée
- des **problèmes** pour entretenir son esprit de recherche
- une **documentation riche** sur des publications récentes
- un **dossier** par numéro...

. Les Brochures ou Cédéroms
par niveau d'enseignement
et par secteur avec **réduction de 30%**
aux **adhérents** et **abonnés**.
. Co-éditions et co-diffusions
à prix réduit d'autres ouvrages

des **Groupes de Travail**
selon les besoins ou sur projets, comme :
Jeux, Brochures LP,
Histoire des maths, Textes d'orientation,
Réflexions sur les programmes de collège, ...

Voilà pourquoi l'A.P.M.E.P. a besoin de vous...
pour renforcer son action, VOTRE ACTION !

TITRE **LA PLACE DES MATHÉMATIQUES VIVANTES DANS L'ÉDUCATION SECONDAIRE**

DATE **OCTOBRE 2005**

CO-EDITEUR **APMEP - ANIMATH**

AUTEURS M. Andler, M. Audin, P. Audin, L. Beddou, F. Boucekkine, V. Chauveau, Y. Chevallard, E. Cousquer, J. Dhombres, P. Duchet, F. Gaudel, G. Godefroy, K. Godot, D. Grenier, F. Lo Jacomo, Ch. Payan, C. Poisard, J.-P. Raoult, J.-A. Roddier, D. Roux, C. Tisseron.

COORDINATION C. Ducourtioux et P.-L. Hennequin.

MOTS CLÉ Activités, Animation, Arcs en ciel, Ateliers, Baire, Boulier chinois, courbes elliptiques, CultureMATH, Démonstration, Expérience, Faire chercher, K'set, Livres anciens, Mathematics, MATh.en.JEANS, MATH POUR TOUS, Objets, Situations, Simulation statistique, Théétète, Tour de main, Transposition didactique.

RÉSUMÉ Cette brochure rassemble une vingtaine de contributions de chercheurs venus d'horizons très divers er d'enseignants d e terrain pour tenter de découvrir les nombreux aspects de la vie des mathématiques, aujourd'hui ou dans le passé, et de suggérer de multiples pistes pour y faire participer les élèves et susciter leur passion.

Trois ateliers ont mis chacun en situation d'élèves face à des activités de recherche : - Les situations de recherche pour la classe - Le dispositif MATh.en. JEANS - Les objets et les images en mathématiques. Quatre conférences de type "promenade", telles que les chercheurs proposent aux enseignants de venir en donner dans leur établissement, trois autres sur ce que pourrait être une irruption de mathématiques vivantes dans le secondaire, trois exposés sur les activités de popularisation soutenues par des TICE. Enfin une table ronde a permis à tous, en particulier à ceux venus d'un autre pays, de s'exprimer et de regretter les tensions entre programmes et démarche scientifique.

Cette brochure rend compte fidèlement de l'intense activité des participants qui se poursuit par courrier électronique. Sa lecture fournira de nombreuses idées à tous ceux qui n'ont pu venir, pour ouvrir un atelier ou inviter des chercheurs.

FORMAT : **17 X 24 CM**

NOMBRE DE PAGES : **336**

BROCHURE APMEP **N° 168**

ISBN **2- 912846-46-3**