Association des Professeurs
de Mathématiques de
l'Enseignement Public

# LES OLYMPIADES ACADEMIQUES DE MATHEMATIQUES 2011

Brochure APMEP n° 196
n° ISBN : 978-2-912846-70-9

Coordination : Paul-Louis HENNEQUIN
Mise en page : Jean BARBIER

# LES OLYMPIADES ACADÉMIQUES DE MATHÉMATIQUES 2011

## TABLEAU SYNTHETIQUE

Le tableau ci-dessous vous permet de choisir un exercice et les éléments de sa solution en fonction de quatre critères.

- La première colonne donne la liste des exercices et l'académie concernée

Les dix suivantes précisent le (ou les) domaine mathématique concerné

- La suivante (Nombre de questions) offre le choix entre les exercices laissant une large marge d'initiative dans la recherche et ceux qui font gravir marche par marche l'échelle qui conduit à la solution.
- L'avant-dernière donne la longueur d'une solution détaillée évaluée en nombre de demi-pages
- La dernière enfin, précise les sections concernées, un même exercice pouvant être proposé à deux niveaux

Pour accéder directement aux articles qui vous intéressent, vous pouvez cliquer sur le début de la ligne des exercices cherchés. Par exemple pour accéder à l'exercice Paris 1, cliquez sur la case Paris 1

| | arithmétique | numération | dénombrement | logique | inégalités | suites algorithm | Equat.Fonctions | géom. plane | géom. espace | Proba.pourcent. | Nombre de questions | Longueur | Sections |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| National 1 | | | | | | | | X | | | 6 | 2 | Toutes |
| National 2 | X | | | | | | | | | | 8 | 2 | Toutes |
| Aix-Marseille 1 | | | | | | | X | | | | 2 | 1 | S |
| Aix-Marseille 2 | | | X | | | X | | | | | 12 | 1 | S |
| Aix-Marseille 3 | | X | | | | X | | | | | 2 | 1 | Non S |
| Aix-Marseille 4 | | | | | | | X | | | | 2 | 1 | Non S |
| Amériques–Caraïbes 1 | | | | | X | | | X | | | 8 | 2 | Toutes |
| Amériques–Caraïbes 2 | X | | | | | X | | | | | 8 | 3 | Toutes |
| Amiens 1 | | | | | | | X | | | | 1 | 2 | S |
| Amiens 2 | | | X | | | | | | X | | 10 | 2 | S |
| Amiens 3 | | | | | | | | X | | | 1 | 1 | ES/L/STG/ST2S |
| Amiens 4 | | | | X | | | | | | | 1 | 1 | ES/L/STG/ST2S |
| Amiens 5 | | | | | | X | | | | | 5 | 1 | STI/STL |
| Amiens 6 | | | | | X | | X | | | | 4 | 1 | STI/STL |

| | arithmétique | numération | dénombrement | logique | inégalités | suites algorithm | Equat.Fonctions | géom. plane | géom. espace | Proba.pourcent. | Nombre de questions | Longueur | Sections |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Besançon 1 | | | | | | | | X | | | 6 | 2 | Toutes |
| Besançon 2 | | | | | X | | | X | | | 2 | 2 | Toutes |
| Bordeaux 1 | | | | | | | | X | | | 9 | 4 | Toutes |
| Bordeaux 2 | | | | | | | | X | | | 14 | 2 | S |
| Bordeaux 3 | | | | | | | | X | | | 5 | 1 | Non S |
| Caen 1 | X | X | | | | | | | | | 10 | 2 | Toutes |
| Caen 2 | | | X | | | X | | | | | 10 | 4 | Toutes |
| Clermont 1 | | X | | | | X | | | | | 4 | 4 | Toutes |
| Clermont 2 | | | | X | X | | | | | | 5 | 3 | S |
| Clermont 3 | | X | | | | | | | | | 9 | 2 | Non S |
| Corse 1 | | X | | | | X | | | | | 4 | 1 | Toutes |
| Corse 2 | | | X | | | X | | | | | 13 | 4 | Toutes |
| Créteil 1 | | | | | | | X | X | | X | 14 | 2 | Toutes |
| Créteil 2 | | | | | X | | X | | | | 12 | 2 | S |
| Créteil 3 | X | | X | | | | | | | | 8 | 2 | Non S |
| Dijon 1 | X | | | | | | | | | | 5 | 2 | Toutes |
| Dijon 2 | X | | | | | | | X | | | 9 | 2 | S |
| Dijon 3 | | | | | | | | X | | | 3 | 1 | Non S |
| Grenoble 1 | | | | | X | | | | | | 3 | 1 | Toutes |
| Grenoble 2 | X | | | | | X | | X | | | 12 | 4 | S/STI |
| Grenoble 3 | | | | | | | | | | X | 20 | 4 | Non S |
| Guadeloupe 1 | X | | | | | | | | | | 6 | 4 | Toutes |
| Guadeloupe 2 | | | | | | | | X | | | 3 | 4 | Toutes |
| Guyane 1 | | | X | | | X | | | | | 3 | 2 | Toutes |
| Guyane 2 | | | X | | | | | X | | | 7 | 7 | Toutes |
| Lille 1 | | | | | | | | X | | | 5 | 3 | S |
| Lille 2 | X | X | | | | | | | | | 10 | 2 | S |
| Lille 3 | | | X | | X | | | | | | 9 | 2 | Non S |
| Lille 4 | X | | | | | | | | | | 5 | 1 | Non S |
| Limoges 1 | X | | | X | | | | | | | 1 | 2 | Toutes |
| Limoges 2 | | | X | X | | | | | | | 9 | 2 | S |
| Limoges 3 | | X | | | | X | | | | | 10 | 2 | Non S |
| Lyon 1 | | | X | | | | | | | | 5 | 2 | Toutes |
| Lyon 2 | | | | | | X | | | | X | 6 | 3 | Toutes |
| Martinique 1 | | | X | | | | | | X | | 7 | 3 | Toutes |
| Martinique 2 | | | X | X | | | | | | | 5 | 2 | Toutes |
| Montpellier 1 | | | | X | | | | | | X | 1 | 1 | S |
| Montpellier 2 | | | | | X | | | X | | | 7 | 1 | S |
| Montpellier 3 | | | | X | | | | | | X | 1 | 1 | Non S |

| | arithmétique | numération | dénombrement | logique | inégalités | suites algorithm | Equat.Fonctions | géom. plane | géom. espace | Proba.pourcent. | Nombre de questions | Longueur | Sections |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Montpellier 4 | X | | X | | | | | | | | 2 | 2 | Non S |
| Nancy-Metz 1 | X | | | | X | | | | X | | 5 | 1 | Toutes |
| Nancy-Metz 2 | | | | | | X | X | | | | 8 | 1 | S |
| Nancy-Metz 3 | | | | | | | | X | | | 4 | 1 | Non S |
| Nantes 1 | X | X | | | | | | | | | 9 | 3 | S |
| Nantes 2 | | | | | | | | X | | X | 12 | 3 | S |
| Nantes 3 | | X | X | | | | | | | | 9 | 3 | Non S |
| Nantes 4 | X | | X | | | | | | | | 8 | 5 | Non S |
| Nice 1 | | | | | X | | | X | | | 1 | 2 | Toutes |
| Nice 2 | | X | | | | | | | | | 8 | 4 | S |
| Nice 3 | | | | | | | | X | | | 6 | 2 | Non S |
| Océanie 1 | | | | | | X | | | | | 10 | 2 | Toutes |
| Océanie 2 | | | | | | | | X | | | 2 | 2 | Toutes |
| Orléans-Tours 1 | X | X | | | | X | | | | | 13 | 5 | Toutes |
| Orléans-Tours 2 | | | | | | | | X | | | 9 | 3 | Toutes |
| Pacifique 1 | | | X | | | | | X | X | | 16 | 5 | Toutes |
| Pacifique 2 | | | | | | | X | | | | 13 | 3 | Toutes |
| Paris 1 | | | X | | | | | | | | 4 | 2 | Toutes |
| Paris 2 | | | | | | | | | | X | 1 | 1 | Toutes |
| Poitiers 1 | X | | | X | | | | | | | 2 | 1 | Toutes |
| Poitiers 2 | | | | | | | | X | | | 7 | 3 | Toutes |
| Reims 1 | | | | | | | | X | | | 4 | 2 | Toutes |
| Reims 2 | X | | | | | | X | | | | 5 | 1 | S |
| Reims 3 | | | X | | | | | | | | 7 | 3 | Non S |
| Rennes 1 | | | | X | | | | | | X | 1 | 2 | Toutes |
| Rennes 2 | | | | | | | | X | | | 3 | 2 | S/STI |
| Rennes 3 | | | | X | X | | | | | | 2 | 1 | Non S |
| La Réunion 1 | X | | | | | X | | | | | 4 | 6 | Toutes |
| La Réunion 2 | | | | | | | | X | | | 1 | 3 | S/STI |
| La Réunion 3 | | | X | | | X | | | | | 2 | 3 | Non S |
| Rouen 1 | | | | | | | | | X | X | 3 | 1 | Toutes |
| Rouen 2 | X | | | | | | | X | | | 7 | 1 | S |
| Rouen 3 | X | | X | | | | | | | | 7 | 2 | Non S |
| Strasbourg 1 | X | | X | | | | | | | | 5 | 1 | S |
| Strasbourg 2 | X | | | | | | | | | | 2 | 1 | S |
| Strasbourg 3 | | | X | X | | | | | | | 2 | 1 | Non S |
| Strasbourg 4 | | | | X | | | | | | | 3 | 1 | Non S |
| Toulouse 1 | | | | X | X | | | | | | 8 | 2 | S |
| Toulouse 2 | X | | | | | X | | | | | 12 | 3 | S |

| | arithmétique | numération | dénombrement | logique | inégalités | suites algorithm | Equat.Fonctions | géom. plane | géom. espace | Proba.pourcent. | Nombre de questions | Longueur | Sections |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Toulouse 3 | | | | X | | | | | | | 4 | 2 | Non S |
| Toulouse 4 | | | | | X | | | | | X | 4 | 1 | Non S |
| Versailles1 | | | | | X | | X | | | | 7 | 3 | S |
| Versailles2 | | | | | | X | | X | | | 5 | 3 | S |
| Versailles3 | | | | | | | | | | X | 1 | 2 | Non S |
| Versailles4 | X | X | | | | | | | | | 6 | 2 | Non S |
| **Totaux** | 25 | 12 | 21 | 14 | 14 | 19 | 10 | 29 | 5 | 11 | | | |

Soit un total de 160 exercices.

# SUJETS NATIONAUX

## Premier exercice

Toutes séries

***Essuie-glaces***
**(Les parties 1, 2 et 3 sont indépendantes)**

### Énoncé

On se propose de calculer l'aire de la surface essuyée par plusieurs modèles de balais d'essuie-glace d'un véhicule. On considèrera que les pare-brises sont des surfaces planes.

1. Un premier véhicule est équipé d'un seul balai porté par une tige métallique de 60 cm, modélisée par un segment [OB]. Soit A le point de [OB] tel que $OA = 15$cm. Le balai en caoutchouc est alors modélisé par le segment [AB] (voir figure 1 ci-dessous). Déterminer la valeur exacte de l'aire de la surface essuyée par le balai, en admettant que celui-ci décrit autour du point O un angle de 180°. En donner une valeur arrondie au cm$^2$ près.

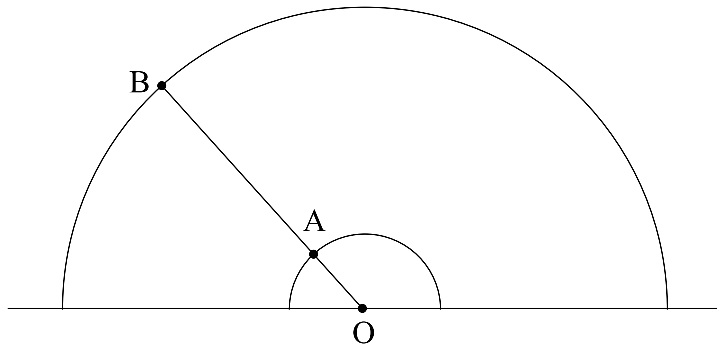



*Figure 1*

2. Le pare-brise d'un second véhicule possède deux essuie-glaces modélisés par deux segments [OB] et [O'B'] de même longueur $R$, l'un tournant autour d'un point O, l'autre autour d'un point O', tels que $OO' = R$ (voir figure 2 ci-dessous). Ces balais en caoutchouc couvrent la longueur totale de chaque segment. L'extrémité de chaque segment décrit un demi-cercle au-dessus de la droite (OO'). Déterminer l'aire de la surface du pare-brise essuyée par les balais.

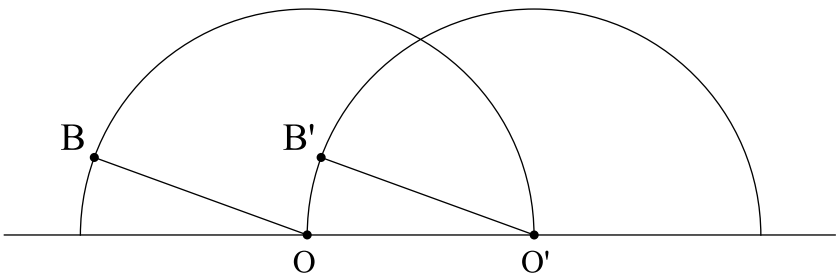



*Figure 2*

3. Un troisième véhicule est équipé d'un essuie-glace dont le support métallique est modélisé par la réunion de deux segments (voir la figure 3 ci-dessous) : un segment [AB], qui porte le balai en caoutchouc sur toute sa longueur, et un segment [OC] qui relie le centre de rotation O à un point C du segment [AB] tels que $\widehat{OCA} = 30°$, $CB = 4CA$ et $OC = \sqrt{3}CA$. On pose $CA = a$.

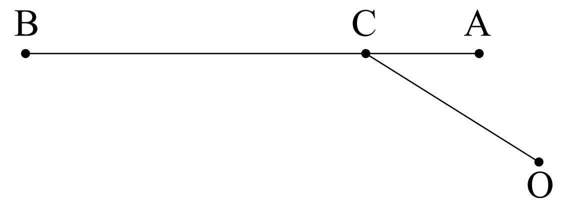



*Figure 3*

a. Démontrer que le triangle AOC est isocèle.

b. Lorsqu'il essuie le pare-brise du véhicule, l'essuie-glace tourne autour du point O. En début de course le balai en caoutchouc est en position horizontale : les points A, B et C coïncident respectivement avec les points M, N et P du pare-brise tels que [MN] est horizontal (voir la figure 4 ci-dessous). En fin de course A, B, C coïncident respectivement avec les points M', N' et P' du pare-brise tels que le segment [OM'] est horizontal.

Déterminer l'angle dont a tourné le dispositif autour du point O pour passer d'une position à l'autre, puis exprimer en fonction de $a$ l'aire de la surface essuyée par le balai.

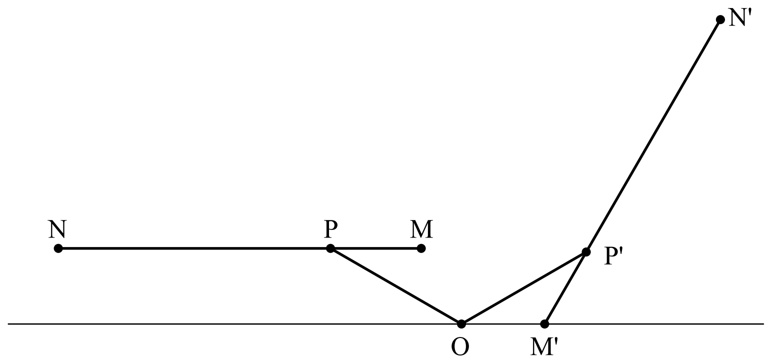
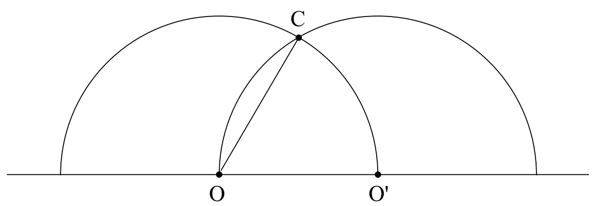



*Figure 4*

## Éléments de solution

1. L'aire demandée en cm$^2$ est $\mathcal{A} = \frac{1}{2}\left(\pi \times 60^2 - \pi \times 15^2\right) = \frac{\pi}{2} \times 15^2\left(4^2 - 1\right) = \frac{\pi}{2} \times 15^3 = 3375 \times \frac{\pi}{2}$, soit, en valeur approchée : 5301 cm$^2$
2. Soit C l'intersection des deux demi-cercles. Calculons l'aire du triangle équilatéral OO'C de côté de longueur $R$ et donc de hauteur $R\frac{\sqrt{3}}{2}$ :

$$\mathbb{A}_1 = \frac{1}{2}\left(R \times \frac{\sqrt{3}}{2}R\right) = \frac{\sqrt{3}}{4}R^2$$




Calculons l'aire du secteur angulaire d'angle $\widehat{O'OC}$ de mesure $\frac{\pi}{3}$ en radians, qui est aussi celle du secteur angulaire d'angle $\widehat{COO'}$ : $A_2 = \frac{\pi R^2}{6}$.

Ainsi l'aire de la portion de plan limitée par la corde [OC] et l'arc $\widehat{OC}$ sera $A_2 - A_1$.

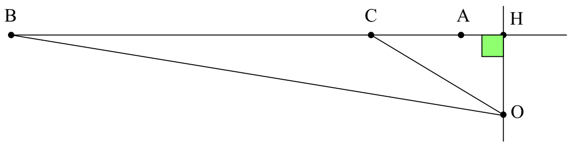
L'aire de la portion de plan commune aux deux demi-disques sera donc $A = A_2 + A_2A_1 = 2A_2A_1$ ;

Donc $A_3 = \frac{\pi}{3}R^2 - \frac{\sqrt{3}}{4R^2}$.

L'aire essuyée par les deux balais est donc celle d'un cercle de rayon $R$ privée de $A_3$ soit

$$\mathcal{A} = \pi R^3 - \left(\frac{\pi}{3}R^2 - \frac{\sqrt{3}}{4}R^2\right) = \left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4}\right) R^2 \text{ et donc } \mathcal{A} = \left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4}\right) R^2$$

3. a. $\sin \widehat{\mathrm{OCH}} = \sin 30^o = \dfrac{1}{2}$ donc $\dfrac{OH}{OC} = \dfrac{1}{2}$ soit $OH = \dfrac{1}{2}a\sqrt{3}$.

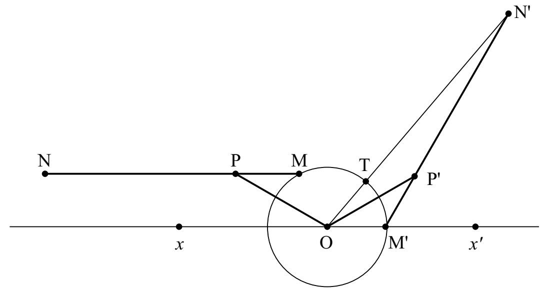



De même, $\dfrac{HC}{OC} = \cos 30^o = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, donc $HC = \dfrac{\sqrt{3}}{2}a\sqrt{3} = \dfrac{3}{2}a$.
Enfin, d'après le théorème de Pythagore dans le triangle HOA rectangle en H, on a

$$OA^2 = HA^2 + HO^2 = (HC - CA)^2 + HO^2 = \left(\frac{3}{2}a - a\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{3a^2}{4} = a^2.$$

Ainsi $OA = OC$. Le triangle AOC est donc isocèle.

b. L'angle dont a tourné le dispositif est la mesure de l'angle $\widehat{\mathrm{MOM'}}$. En degré elle vaut $180 - \widehat{\mathrm{XOM}}$ avec X comme sur le dessin.
Or les angles $\widehat{\mathrm{XOP}}$ et $\widehat{\mathrm{OPM}}$ sont alternes internes, et le triangle MOP est isocèle ; on en déduit donc que $\widehat{\mathrm{MOX}} = 2\times 30 = 60^o$. Donc l'angle géométrique $\widehat{\mathrm{MOM'}}$ a pour mesure $180 - 60 = 120^o$ .




La portion de plan essuyée est celle qui est limitée par les segments [MN] et [M'N'] et les arcs $\widehat{\mathrm{MM'}}$ et $\widehat{\mathrm{NN'}}$. Soient T et TŠ les intersections du cercle de centre O passant par M et les segments [ON] et [ON']. Le cercle étant invariant par la rotation et le segment [ON] ayant pour image [ON'], T a donc pour image T'. Les points M, T, N ont respectivement pour images M', T' et N', et la conservation des aires par rotation montre que la portion de plan limitée par [MN], [NT] et l'arc $\widehat{\mathrm{MT}}$ a la même aire que celle limitée par [M'N'], [N'T'] et l'arc $\widehat{\mathrm{M'T'}}$. On peut dire aussi que le système étant rigide, les triangles OMP et OM'P' sont isométriques.

Ainsi la portion essuyée a la même aire que celle qui est limitée par les segments [NT] et [N'T'] et les arcs de cercle $\widehat{\mathrm{NN'}}$ et $\widehat{\mathrm{TT'}}$ .

L'aire de cette portion de plan est $\mathcal{A} = \dfrac{1}{3}\left(\pi \times ON^2 - \pi \times OT^2\right) = \dfrac{\pi}{3}\left(OB^2 - OA^2\right)$.
Or, $OA^2 = a^2$ et d'après le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle OBH,

$$OB^2 = OH^2 + HB^2 = OH^2 + (HC + CB)^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{3a}{2} + 4a\right)^2 = \left(\frac{3}{4} + \frac{121}{4}\right)a^2 = 31a^2$$

L'aire cherchée est donc

$$A = \frac{\pi}{3}\left(31a^2 - a^2\right) = \frac{\pi}{3} \times 30a^2 = 10\pi\, a^2 \qquad \boxed{\mathcal{A} = 10\pi a^2}$$

Retour au sommaire

# SUJETS NATIONAUX

## Deuxième exercice

Toutes séries

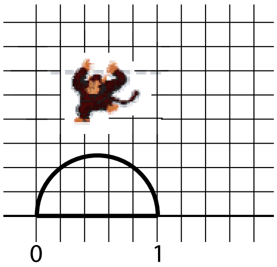
large***Le singe sauteur***

### Énoncé

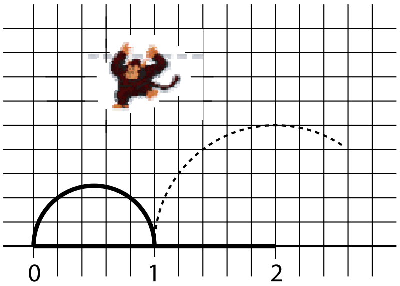
J'ai un petit singe sauteur qui passe son temps à faire des bonds sur une demi-droite graduée en choisissant d'aller vers l'avant ou vers l'arrière.

Le nombre $n$ est dit ***atteignable*** si le singe peut, en partant de l'origine (position d'abscisse 0), atteindre la position d'abscisse $n$ en **exactement** $n$ bonds successifs (en avant ou en arrière) de longueurs 1, 2,. . . , $n$ (**effectués** dans cet ordre) et sans **jamais** sortir du segment $[0\,;\,n]$.

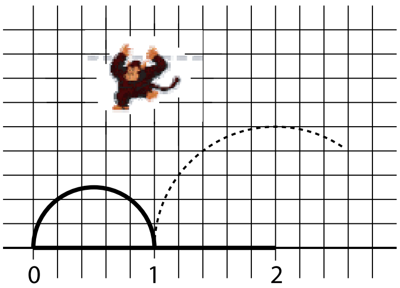
*Par exemple* : Le nombre 1 est atteignable en un bond.




Mais le nombre 2 ne l'est pas car, après avoir fait le bond de longueur 1 (qu'il est obligé de faire vers l'avant), s'il fait un bond de longueur 2 en avant ou en arrière il sort de l'intervalle $[0\,;\,2]$.




Le nombre 3 n'est pas atteignable pour une autre raison : après avoir fait un bond de longueur 1 et un autre de longueur 2 vers l'avant, il est obligé de faire un bond de longueur 3 vers l'arrière (sinon il sort de l'intervalle $[0\,;\,3]$) et se trouve sur le nombre 0 au lieu de 3.




1. Montrer que le nombre 4 est atteignable et ceci d'une seule façon.
2. Montrer que le nombre 5 n'est pas atteignable.

On peut montrer de la même façon que les nombres 6, 7 et 8 ne sont pas atteignables ; *ce résultat est admis.*

3. Le nombre 9 est-il atteignable ?

Pour la suite, on rappelle que, pour tout nombre entier $m$, on a :$1 + 2 + \cdots + m = \dfrac{m(m+1)}{2}$

4. Montrer que tous les nombres entiers qui sont des carrés sont atteignables.
5. a. Montrer que si le nombre entier $n$ est atteignable alors le produit $n(n-1)$ est divisible par 4. En déduire une condition sur l'entier $n$ pour qu'il soit atteignable.

   b. La réciproque de cette proposition est-elle vraie ?
6. On suppose $N \geqslant 6$ et atteignable par une séquence qui commence par $1 + 2 + 3 \cdots$
   Montrer que $N + 4$ est aussi atteignable.

## Éléments de solution

1. Le nombre 4 est atteignable car $1 + 2 - 3 + 4 = 4$.
2. Le singe n'a que le choix : $1 + 2 - 3 + 4$ et ... il est bloqué ! !
3. Le nombre 9 est atteignable car on a $1 + 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + 7 - 8 + 9 = 9$, sans jamais sortir de l'intervalle $[0\,;\,9]$.
4. Les exemples précédents traitent les carrés 4 et 9. Le cas échéant la recherche pour 16 peut donner $1+2+3+4-5+6-7+8-9+10-11+12-13+14-15+16$, en remarquant que l'on ne sort jamais de l'intervalle $[0\,;\,16]$.
   L'observation des sommes produites peut amener la solution générale :
   $$1 + 2 + 3 + \cdots + n - (n+1) + (n+2) - (n+3) + (n+4) \cdots - (n^2 - 1) + n^2$$
   $$= \frac{n(n+1)}{2} + 1 + 1 + 1 + \cdots + 1 = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n^2 - n}{2} = n^2.$$
   d'où $n^2$ est atteignable. Les seules difficultés sont le comptage des termes valant 1 et la vérification du fait que l'on reste bien dans l'intervalle $[0\,;\,n^2]$.
5. Si le nombre $n$ est atteignable, il existe des $a_i$ valant 1 ou $-1$ telles que
   $$1 + 2a_2 + 3a_3 + \cdots + (n-1)a_{n-1} = 0.$$
   Dans cette somme on sépare les termes positifs dont on note la somme $S_+$ des termes négatifs dont on note la somme $S_-$ . On a alors : $S_+ = S_-$. On calcule ensuite :
   $$1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) = S_+ - S_- = 2S_+.$$
   On en déduit que $\dfrac{(n-1)n}{2} = 2S_+$, d'où $n(n-1) = 4S_+$ et donc 4 divise le produit $n(n-1)$.

   Donc $n$ est de la forme $4k$ ou $4k + 1$. par exemple, 18 n'est pas atteignable.
   La réciproque est fausse puisque 5 n'est pas atteignable.
6. L'idée est de transformer une configuration de signes $+-$ en $-+$, cela va ajouter 2 au nombre $N$. Ensuite on complète par la suite $-(N+1) + (N+2) - (N+3) + (N+4)$ et l'on trouve $N + 4$. On note $S(i)$ la somme partielle des $i$-premiers termes. Remarquons que la séquence donnant $N$ se termine par $-(N-1) + N$. La séquence commence par $1 + 2 + 3$ et le premier signe $-$ apparaît en position $i + 1$. Alors $S(i-1) \geqslant i$, car $S(3) \geqslant 4$. On change alors la sous-séquence $i - (i+1)$ en $-i + (i+1)$, ce qui est possible. On ajoute la séquence $-(N+1) + (N+2) - (N+3) + (N+4)$, ce qui assure que $N + 4$ est atteignable.
   *Question subsidiaire* : est-il vrai que les nombres de la forme $N = 4k$ ou $4k + 1$, hormis 5, 8, 12, 17 sont atteignables ?

Retour au sommaire

# AIX-MARSEILLE

## Premier exercice académique

Toutes séries
**Des travaux coûteux**

### Énoncé

Voici un énoncé proposé à des lycéens en France :

> « Pour 6 kilogrammes de vernis et 4 litres de cire, on paie 95 euros. Pour 3 kilogrammes de vernis et 3 litres de cire, on paie 55,50 euros. Combien paie-t-on pour 4 kilogrammes de vernis et 5 litres de cire ? »

Voici un énoncé proposé à des lycéens en Olympie des Mathématiques :

> « Pour 5 pots de peinture, 3 rouleaux de papier peint et 7 pots de colle, on paie 49 euros. Pour 4 pots de peinture, 5 rouleaux de papier peint et 3 pots de colle, on paie 60 euros. Combien doit-on dépenser pour acheter 1 pot de peinture avec 1 rouleau de papier peint et 1 pot de colle ? »

Saurez-vous résoudre, tel un Olympien, ces deux exercices ?

### Éléments de solution

Le premier exercice est, bien entendu, très classique.
Soit $x$ le prix d'un kilogramme de vernis, et $y$ est le prix d'un litre de cire, il s'agit de résoudre le système :

$$\begin{cases} 6x + 4y = 95 \\ 3x + 3y = 55,5 \end{cases}$$

Le système admet une solution unique : $10,5 = x$ et $8 = y$.
Ainsi, 4 kilogrammes de vernis et 5 litres de cire coûtent $4 \times 10,5 + 5 \times 8 =$ **82 euros**.

Considérons le deuxième énoncé.
Soit $a$ le prix d'un pot de peinture, $b$ le prix d'un rouleau de papier peint et $c$ le prix d'un pot de colle.
Il s'agit de trouver $a + b + c$ sachant que $\begin{cases} 5a + 3b + 7c = 49 \ (L_1) \\ 4a + 5b + 3c = 60 \ (L_2) \end{cases}$

***Première solution :***
On constate que $(L_1 + 2L_2)$ s'écrit $13a + 13b + 13c = 169$. Il vient : $a + b + c = 13$.

***Deuxième solution*** :
On écrit le système sous la forme : $\begin{cases} 5a + 3b = 49 - 7c \\ 4a + 5b = 6 - 3c \end{cases}$, ce qui permet d'obtenir, après résolution, $a = 5 - 2c$ et $b = 8 + c$.
Des lors, $a + b + c = (5 - 2c) + (8 + c) + c = 5 - 2c + 8 + c + c = 13$.
Ainsi, 1 pot de colle, 1 pot de peinture et 1 rouleau de papier peint coûtent **13 euros**.

Retour au sommaire

# AIX-MARSEILLE

## Deuxième exercice académique

Série S

***Le solitaire***

### Énoncé

Deux configurations du jeu de solitaire sont disponibles dans le commerce. Nous allons montrer que l'une des deux configurations ne permet jamais de gagner la partie !

#### Opérations sur des dominos à 4 faces

On appelle dans cet exercice **4-Domino** (ou **4-D**) une pièce de bois carrée séparée en quatre parties égales contenant chacune un nombre égal à 0 ou à 1. On peut multiplier ou additionner les 4-D en utilisant les règles suivantes :

**R1)**

| | |
|---|---|
| $x$ | $y$ |
| $z$ | $t$ |

×

| | |
|---|---|
| $x'$ | $y'$ |
| $z'$ | $t'$ |

=

| | |
|---|---|
| $xx'+yz'$ | $xy'+yt'$ |
| $zx'+tz'$ | $zy'+tt'$ |

**R2)**

| | |
|---|---|
| $x$ | $y$ |
| $z$ | $t$ |

+

| | |
|---|---|
| $x'$ | $y'$ |
| $z'$ | $t'$ |

=

| | |
|---|---|
| $x+x'$ | $y+y'$ |
| $z+z'$ | $t+t'$ |

**R3)** Un nombre pair est remplacé par 0 et un nombre impair par 1.

***Premiers calculs***

On considère les 4-D nommés $\boldsymbol{E}=$

| | |
|---|---|
| 1 | 0 |
| 0 | 1 |

et $\boldsymbol{F}=$

| | |
|---|---|
| 1 | 1 |
| 1 | 0 |

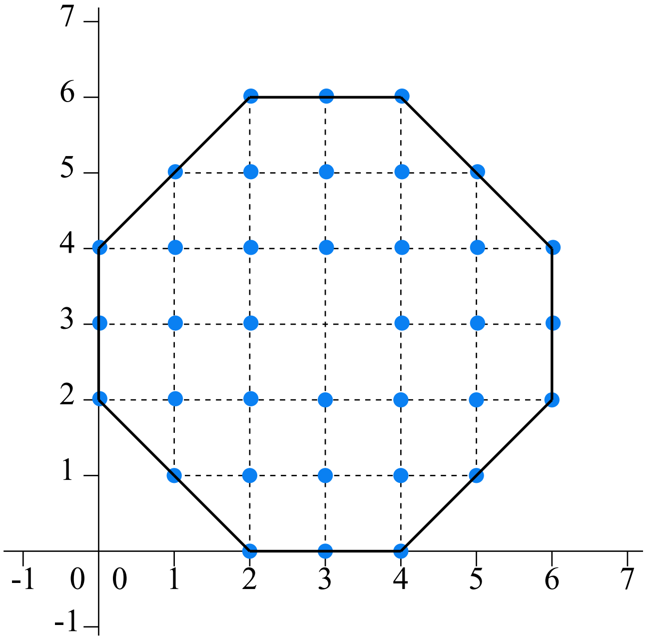
1. Montrer que $F^2=$

| | |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 1 | 1 |

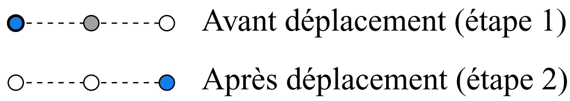
2. Montrer que $E = F^3$, que $EF = FE = F$ et que $E + F = F^2$.
3. En déduire que $F^2 + F^3 = F^4$ et que $F^4 + F^5 = F^3$.

***Une application au jeu du solitaire***

On considère la configuration ci-contre du jeu du solitaire, où chaque disque représente une bille (il n'y a pas de bille en (3 ; 3).




L'objectif du jeu est de « manger » les billes les une après les autres en utilisant uniquement des déplacements horizontaux ou verticaux : on présente sur la figure ci-dessous un déplacement horizontal (où on dira que la bille centrale grisée a été « **mangée** »).




Appelons **configuration** la donnée d'un ensemble de cases qui sont occupées par une bille. Cet ensemble est donc constitué d'un certain nombre de points de coordonnées respectives $(x_1; y_1) \dots (x_n; y_n)$. **On associe alors à chaque configuration le 4-D 1**

$$G = F^{x_1+y_1} + \cdots + F^{x_n+y_n}.$$

À chaque étape $t$ du jeu nous pouvons donc considérer l'ensemble des cases occupées et calculer le 4-D noté $G_t$. L'étape initiale ($t = 0$) correspond à la figure donnée ci-dessus où toutes les cases (sauf la case centrale (3 ; 3)) sont occupées.

On dira que la partie est gagnée quand le joueur arrive, étape après étape, à manger toutes les billes et termine avec une seule bille sur le plateau.

4. Quand le joueur passe de l'étape $t$ à l'étape $(t + 1)$ combien de cases modifie-t-il exactement ?
5. On suppose que le joueur a déjà effectué $t$ étapes avec succès et que la $(t + 1)^{\text{ème}}$ étape consistera à manger la bille placée dans la case $(x ; y)$.
   a. On étudie d'abord le cas où $(x ; y) = (2 ; 2)$.
      i) On suppose que le coup réalisé se fait horizontalement. Montrer que $G_{t+1} = G_1$.
      ii) On suppose que coup réalisé se fait verticalement. Montrer que $G_{t+1} = G_1$.
   b. i) Examiner les différentes situations correspondant à $x \leqslant 3$ et $y \leqslant x$
      On admettra que toute configuration peut se ramener à un de ces cas.
      ii) Que peut-on déduire sur l'évolution du 4-D $G_t$ pendant la durée du jeu ?
   6. Peut-on gagner ?

*(on pourra utiliser le fait que la somme de trois puissances consécutives de F s'annule).*

## Éléments de solution

### Dominos

1. $F^2 = F \times F = \begin{array}{|c|c|}\hline 2 & 1 \\ \hline 1 & 1 \\ \hline\end{array} = \begin{array}{|c|c|}\hline 0 & 1 \\ \hline 1 & 1 \\ \hline\end{array}$

2. • $F^3 = F^2 \times F = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 0 \\ \hline 2 & 1 \\ \hline\end{array} = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 \\ \hline\end{array} = E$

   • $E \times F = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 1 \\ \hline 1 & 0 \\ \hline\end{array} = F$ et $F \times E = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 1 \\ \hline 1 & 0 \\ \hline\end{array} = F$

   • $E \times F = \begin{array}{|c|c|}\hline 2 & 1 \\ \hline 1 & 1 \\ \hline\end{array} = \begin{array}{|c|c|}\hline 0 & 1 \\ \hline 1 & 1 \\ \hline\end{array}$ Ainsi on a $\boxed{E + F = F^2}$

3. On admet que les règles usuelles de distributivité et d'associativité sont valables ...
   Remarquons tout d'abord que si $n$ est un entier strictement supérieur à 0, alors $E \times F^n = F^n$.
   En effet, il suffit d'écrire par exemple $E \times F^n = (E \times F) \times F^{n-1} = F \times F^{n-1} = F^n$.
   - Alors on peut calculer $F^4$ de la façon suivante :
   $$F^4 = F^2 \times F^2 = (E + F) \times F^2 = E \times F^2 + F \times F^2 = F^2 + F^3.$$
   - En multipliant cette égalité par $F$, il vient :
   $$\boxed{F^5 = F^3 + F^4}$$
   Puis en multiopliant à nouveau cette égalité, on obtient $F^6 = F^4 + F^5$.
   Or, $F^6 = F^3 \times F^3 = E \times F^3 = F^3$. On obtient donc
   $$\boxed{F^3 = F^4 + F^5}$$

### Application au solitaire

4. D'après le schéma explicatif, on voit qu'à chaque étape, 3 cases exactement changent de couleur. On modifie donc exactement 3 cases à chaque étape.
5. a. i) Dans ce premier cas, les seules cases qui changent sont : (1, 2), (2, 2) et (3, 2).
   Si le coup se fait **de la gauche vers la droite** on a (en posant $K$ un 4-D qui n'évolue pas entre les étapes $t$ et $t+1$ puisque calculé à partir de cases qui ne changent pas) :
   $$G_t = F^{1+2} + F^{2+2} + K = F^3 + F^4 + K$$
   $$G_{i+1} = F^{3+2} + K = F^5 + K$$
   Or on a vu dans la première partie que $F^3 + F^4 = F^5$. On conclut donc que $G_t = G_{t+1}$.

   De même si le coup se fait **de la droite vers la gauche**, on a :
   $$G_t = F^{2+2} + F^{3+2} + K' = F^4 + F^5 + K'$$
   $$G_{t+1} = F^{1+2} + K' = F^3 + K'$$
   Or là encore on a vu dans la première partie que $F^3 = F^4 + F^5$ et donc $G_t + G_{t+1}$.

   ii) Cette fois-ci, les cases qui changent sont (2, 3), (2, 2) et (2, 1).
   Si le coup se fait **vers le bas**, on a :
   $$G_t = F^{2+3} + F^{2+2} + K = F^5 + F^4 + K$$
   $$G_{t+1} = F^{2+1} + K = F^3 + K$$
   Or on a vu dans la première partie que $F^4 + F^5 = F^3$. On conclut que $G_t = G_{t+1}$.

   De même si le coup se fa**it vers le haut**, on a :
   $$G_t = F^{2+1} + F^{2+2} + K' = F^3 + F^4 + K'$$
   $$G_{t+1} = F^{2+3} + K' = F^5 + K'.$$
   Or, là encore on a vu dans la première parrtie que $F^3 + F^4 = F^5$ donc $G_t = G_{t+1}$.

b. Remarquons que lorsqu'une bille de coordonnées $(x,\ y)$ se fait manger, la partie du 4-D qui change passe de $G_t = F^{x+y} + F^{x+y+a} + \cdots$ à $G_{t+1} = F^{x+y-a} + \cdots$ avec $a = \pm 1$.

   i) Envisageons dans cette question une bille de coordonnées $(x,\ y)$ qui sera mangée en distinguant deux cas :
   Premier cas : si le déplacement se fait **vers la gauche ou vers le bas**, c'est-à-dire si $a = +1$. Alors on peut écrire les lignes suivantes :

$$\begin{aligned} F^{x+y} + F^{x+y+1} &= F^{x+y-1}\left(F + F^2\right) \\ &= F^{x+y-1}(F + E + F) \\ &= F^{x+y-1}(2 \times F + E) \\ &= F^{x+y-1}(0 + E) \\ &= F^{x+y-1} \end{aligned}$$

   Ainsi on a, dans ce premier cas $G_t = G_{t+1}$.
   Deuxième cas : si le déplacement se fait **vers la droite ou vers le haut**, c'est-à-dire si $a = -1$, alors voici le raisonnement :

$$\begin{aligned} F^{x+y+1} &= F^{x+y-1} \times F^2 \\ &= F^{x+y-1}(E + F) \\ &= F^{x+y-1} + F^{x+y} \end{aligned}$$

   On a donc aussi dans ce deuxième cas : $G_t = G_{t+1}$.

   ii) Ainsi, quel que soit le coup joué, le 4-D $G_t$ reste invariant (égal à $G_0$) au cours de la partie.

6. On peut gagner à la condition nécessaire (mais pas forcément suffisante) que $G_0$ soit égal à $G_{final}$. Calculons donc ces deux quantités et comparons-les :

   - Pour $G_0$ : on peut remarquer que pour chacune des billes de coordonnées $(x,\ y)$ avec $x > y$, il y a une autre bille ayant pour coordonnées $(y,\ x)$. Ainsi, puisque $F^{x+y} + F^{y+x} = 2 \times F^{x+y} = 0$, il reste à prendre en compte dans le calcul de $G_0$ uniquement les billes situées sur la diagonale. Ainsi on a :

$$\begin{aligned} G_0 &= F^2 + F^4 + F^8 + F^{10} \\ &= F^2 + F \times F^3 + F^2 \times F^6 + F \times F^9 \\ &= F^2 + F + F^2 + F = 0. \end{aligned}$$

   - Pour $G_{final}$ : si la bille restante se situe aux coordonnées $(x,\ y)$, on a $G_{final} = F^{x+y}$. Or cette quantité ne peut être nulle puisque qu'elle vaut soit $E$, soit $F$, soit $F^2$.

**Conclusion : si on part dans la configuration avec la bille du milieu manquante, la victoire est impossible**...

Retour au sommaire

# AIX-MARSEILLE

## Troisième exercice académique

Séries ES, L et Technologie

**L'algorithme de Prabekhar**

### Énoncé

1. À partir d'un nombre donné, on construit une suite de nombres de la façon suivante : chaque nombre est la somme des carrés des chiffres du nombre précédent.

   Ainsi, si le premier nombre est 2 332 011,
   le deuxième nombre est $2^2 + 3^2 + 3^2 + 2^2 + 0^2 + 1^2 + 1^2 = 28$
   le troisième nombre est $2^2 + 8^2$ et ainsi de suite...

   Calculer le 2011$^{\text{ème}}$ nombre de cette suite.
2. Calculer le 2011$^{\text{ème}}$ nombre de la suite obtenue en partant du nombre 1248.

### Éléments de solution

1. Voici la liste des premiers nombres obtenus en partant de 2 332 011 :

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|
| 2 332 011 | 28 | 68 | 100 | 1 | 1 |

   La suite obtenue est stationnaire à partir du rang 5, et tous les nombres suivants sont égaux à 1. Si le premier nombre est 2 332 011, le 2011$^{\text{ème}}$ nombre de la suite est **1**.
2. Si le nombre de départ est 1 248, la liste des premiers nombres obtenus est :

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1248 | 89 | 85 | 145 | 42 | 20 | 4 | 16 | 37 | 58 | 89 | 145 | 42 |
| | | *1* | *2* | *3* | *4* | *5* | *6* | *7* | *8* | *1* | *2* | ... |

   On observe qu'à partir du rang 3, une série de 8 nombres se répètera. $2011 = 2 + 250 \times 8 + 1$.
   Ainsi, le 2011$^{\text{ème}}$ nombre de la suite sera le 1$^{\text{er}}$ nombre de la série de nombres répétée.
   Le 2011$^{\text{ème}}$ nombre de la suite est **89**.

Retour au sommaire

# AIX-MARSEILLE

## Quatrième exercice académique

Séries ES, L et Technologie
**Des travaux coûteux**

### Énoncé

Voici un énoncé proposé à des lycéens en France :

> « Pour 6 kilogrammes de vernis et 4 litres de cire, on paie 95 euros. Pour 3 kilogrammes de vernis et 3 litres de cire, on paie 55,50 euros. Combien paie-t-on pour 4 kilogrammes de vernis et 5 litres de cire ? »

Voici un énoncé proposé à des lycéens en Olympie des Mathématiques :

> « Pour 5 pots de peinture, 3 rouleaux de papier peint et 7 pots de colle, on paie 49 euros. Pour 4 pots de peinture, 5 rouleaux de papier peint et 3 pots de colle, on paie 60 euros. Combien doit-on dépenser pour acheter 1 pot de peinture avec 1 rouleau de papier peint et 1 pot de colle ? »

Saurez-vous résoudre, tel un Olympien, ces deux exercices ?

### Éléments de solution

Le premier exercice est, bien entendu, très classique.
Soit $x$ le prix d'un kilogramme de vernis, et $y$ est le prix d'un litre de cire, il s'agit de résoudre le système :

$$\left\{\begin{array}{l} 6x+4y=95 \\ 3x+3y=55,5 \end{array}\right.$$

Le système admet une solution unique : $10,5 = x$ et $8 = y$.
Ainsi, 4 kilogrammes de vernis et 5 litres de cire coûtent $4 \times 10,5 + 5 \times 8 =$ **82 euros**.

Considérons le deuxième énoncé.
Soit $a$ le prix d'un pot de peinture, $b$ le prix d'un rouleau de papier peint et $c$ le prix d'un pot de colle.
Il s'agit de trouver $a+b+c$ sachant que $\left\{\begin{array}{l} 5a+3b+7c=49\ (L_1) \\ 4a+5b+3c=60\ (L_2) \end{array}\right.$

***Première solution :***
On constate que $(L_1+2L_2)$ s'écrit $13a+13b+13c=169$. Il vient : $a+b+c=13$.

***Deuxième solution*** :
On écrit le système sous la forme : $\left\{\begin{array}{l} 5a+3b=49-7c \\ 4a+5b=6-3c \end{array}\right.$, ce qui permet d'obtenir, après résolution, $a=5-2c$ et $b=8+c$.
Des lors, $a+b+c=(5-2c)+(8+c)+c=5-2c+8+c+c=13$.
Ainsi, 1 pot de colle, 1 pot de peinture et 1 rouleau de papier peint coûtent **13 euros**.

Retour au sommaire

# AMÉRIQUES – CARAÏBES

## Premier exercice

Toutes séries
**Découpage d'un triangle**

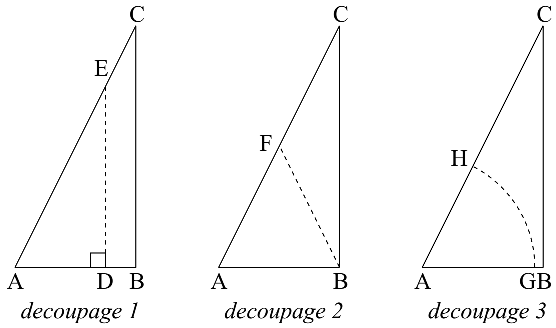
### Énoncé

#### Partie A

Soit ABC un triangle rectangle en B, tel que l'angle en A mesure 60°. On supposera de plus que l'aire du triangle ABC est 2.

1. Justifier que la longueur $AB$ vaut $\dfrac{2}{\sqrt{\sqrt{3}}}$

On propose ci-dessous trois découpages, le long d'une ligne en pointillé, du triangle ABC en deux parties de même aire :



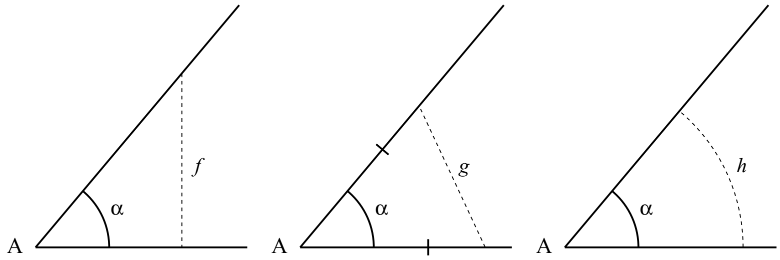

Dans les découpages 1 et 2, les lignes (en pointillé) [DE] et [BF] sont des segments.

Dans le découpage 3, la ligne (en pointillé) $\widehat{\mathrm{GH}}$ est un arc de cercle de centre A.

2. Déterminer les longueurs des segments [DE] et [BF], et la longueur de l'arc $\widehat{\mathrm{GH}}$.
   Parmi ces trois lignes, quelle est la plus courte ?
3. Proposer un autre découpage du triangle ABC en deux parties de même aire par une ligne de longueur inférieure aux trois lignes précédentes.

#### Partie B

Deux demi-droites d'origine A forment un angle aigu $\alpha$.
Sur les trois figures ci-dessous, la ligne en pointillé délimite entre les demi-droites une surface d'aire de mesure 1.




Les lignes (en pointillé) de longueur $f$ et $g$ sont des segments, la ligne de longueur $h$ est un arc de cercle de centre A.

1. Montrer que $h < f$ (on pourra utiliser le resultat suivant, admis : pour un angle aigu non nul, dont la mesure $\alpha$ est exprimee en radian, alors $\alpha < \tan\alpha$.
2. Montrer de même que $h < g$.
3. Un triangle est d'aire de mesure 2 et d'angles de mesures 40°, 60° et 80°. Proposer, en utilisant l'une des trois méthodes précédentes, un découpage en deux parties de même aire par une ligne la plus courte possible. Préciser la longueur de la ligne obtenue.

## Éléments de solution

### Partie A

1. En posant $a = AB$, on a $BC = a\tan 60^o = a\sqrt{3}$. L'aire de ABC vaut 2, donc $\dfrac{AB \times BC}{2} = 2$. D'où, après calculs, $A = \dfrac{2}{\sqrt{\sqrt{3}}}$
2. Dans le découpage 1, par un raisonnement similaire à celui utilisé dans la question 1, on trouve $DE = \sqrt{2\sqrt{3}}$.

   Dans le découpage 2, on démontre facilement que ABF est équilatéral, donc $BF = \dfrac{2}{\sqrt{\sqrt{3}}}$.

   Dans le découpage 3, on doit avoir $\dfrac{1}{6}\pi \times AG^2 = 1$, d'où $AG = \sqrt{\dfrac{6}{\pi}}$. L'arc $\widehat{\mathrm{GH}}$ est le sixième du cercle de centre A et de rayon $AG$, d'où, après calculs, l'arc $\widehat{\mathrm{GH}}$ mesure $\sqrt{\dfrac{2\pi}{3}}$.

   Le calcul de valeurs approchées des trois longueurs permet de conclure que la plus courte est l'arc $\widehat{\mathrm{GH}}$.
3. Une solution popssible est par exemple de tracer l'arc de cercle centré en C : on obtient une surface d'aire 1 en prenant pour rayon $\sqrt{\dfrac{12}{\pi}}$. L'arc mesure alors $\sqrt{\dfrac{\pi}{3}}$ qui est bien plus court que les trois lignes définies précédemment.

### Partie B

On calcule d'abord les longueurs des trois lignes en fonction de $\alpha$.

On trouve $f = \sqrt{2\tan\alpha}$ ; $g = 2\sqrt{\tan\dfrac{\alpha}{2}}$ ; $h = \sqrt{2\alpha}$.

1. On a $\alpha < \tan\alpha$, donc $2\alpha < 2\tan\alpha$, d'où $\sqrt{2\alpha} < \sqrt{2\tan\alpha}$.
2. On a $\sqrt{2\alpha} = \sqrt{4\dfrac{\alpha}{2}} = 2\sqrt{\dfrac{\alpha}{2}}$. Or $\dfrac{\alpha}{2} < \tan\dfrac{\alpha}{2}$, on en déduit donc, après calculs, que $\sqrt{2\alpha} < \sqrt{\tan\dfrac{\alpha}{2}}$.
3. La question précédente montre que parmi les trois méthodes, celle qui donne la ligne la plus courte est l'arc de cercle construit sur l'angle le plus aigu, car la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est croissante. La longueur de la ligne est donc $\dfrac{2}{3}\sqrt{\pi} \approx 1,18$ et le rayon de l'arc de cerclevaut $\dfrac{3}{\sqrt{\pi}} \approx 1,69$. Encore faut-il s'assurer que le découpage est bien possible, ce que l'on fait a posteriori en s'assurant que les 2 cotés associés à l'angle de mesure 40° ont des longueurs suffisantes. Notons A, B, C les sommets aux angles de mesures 40°, 60°, 80° et $a$, $b$, $c$ les longueurs des cotés. En calculant l'aire du triangle on obtient $bc\sin(40) = ac\sin(60) = ab\sin(80) = 4$. Ce qui donne $bc \approx 6,22$ ; $ac \approx 4,61$ ; $ab \approx 4,06$. On en déduit facilement que $a < b < c$ et les rapports $b/a \approx 1,35$ ; $c/a \approx 1,53$ ; $c/b \approx 1,13$. On trouve alors $a \approx 1,73$ ; $b \approx 2,35$ et $c \approx 2,65$ et on peut effectuer largement la découpe (faire un dessin).

Retour au sommaire

# AMÉRIQUES – CARAÏBES

## Deuxième exercice

Toutes séries
**Les k-nombres**

### Énoncé

Pour un entier $k \geqslant 2$ fixé, on appelle $k$-nombre tout entier relatif $N$ pouvant s'écrire sous la forme

$$N = 1 \pm 2 \pm \cdots \pm k.$$

Par exemple, si $k = 2$, les 2=nombres sont

$$1 - 2 = -1 \text{ et } 1 + 2 = 3,$$

tandis que si $k = 3$, les 3-nombres sont

$$1 - 2 - 3 = -4,\ 1 + 2 - 3 = 0,\ 1 - 2 + 3 = 2 \text{ et } 1 + 2 + 3 = 6.$$

Dans cet exercice, on pourra utiliser, sans démonstration, le résultat suivant :

$$1 + 2 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}.$$

1. a. Donner la liste des 4-nombres, rangés par ordre croissant.
   b. L'entier 11 est-il un 5-nombre ?
2. a. Exprimer en fonction de $k$ le plus grand $k$-nombre et le plus petit $k$-nombre.
   b. Quel est le plus petit entier $k \geqslant 2$ tel que 51 soit un $k$-nombre.
3. a. Pour un entier $k \geqslant 2$ fixé, montrer que tous les $k$-nombres ont la même parité.
   b. Déterminer les entiers $k \geqslant 2$ pour lesquels les $k$-nombres sont impairs.
4. Pour $k = 2$ et $k = 3$, on peut remarquer que l'écriture de tout $k$-nombre $N$ sous la forme $N = 1 \pm 2 \pm \cdots \pm k$ est unique.
   a. Préciser toutes les valeurs de $k$ pour lesquelles cela est le cas.
   b. Peut-on trouver un entier $k$ pour lequel il existe un $k$-nombre $N$ admettant au moins 2011 écritures différentes sous la forme $N = 1 \pm 2 \pm \cdots \pm k$ ?

### Éléments de solution

(proposés par l'Académie de Clermont-Ferrand)

1. a. Pour $k = 4$, on trouve

$$1 - 2 - 3 - 4 = -8,\ 1 + 2 + 3 - 4 = -4,\ 1 - 2 + 3 - 4 = 2,$$

$$1 - 2 - 3 + 4 = 0,\ 1 + 2 + 3 - 4 = 2,\ 1 + 2 - 3 + 4 = 4,$$

$$1 - 2 + 3 + 4 = 6 \text{ et enfin } 1 + 2 + 4 + 4 = 10.$$

   b. L'entier 11 est un 5-nombre puisque

$$11 = 1 - 2 + 3 + 4 + 5.$$

2. a. Le plus grand $k$-nombre est

$$1+2+3+\cdots+k=\frac{k(k+1)}{2}$$

tandis que le plus petit est

$$1-(2+3+\cdots+k)=2-(1+2+3+\cdots+k)=2-\frac{k(k+1)}{2}.$$

b. Pour que 51 soit un $k$-nombre, il faut déjà que

$$\frac{k(k+1)}{2}\geqslant 51,$$

soit

$$k(k+1)\geqslant 102,$$

donc

$$k\geqslant 10.$$

On essaie alors pour $k=10$. On peut commencer par additionner les termes en partant de 10 jusqu'à dépasser 51

$$10+9+8+7+6+5+4+3=52,$$

puis

$$52-2+1=51.$$

Ainsi

$$51=1-2+3+4+5+6+7+8+9+10.$$

Finalement, le plus petit entier $k$ tel que 51 soit un $k$-nombre est $k=10$.

3. a. Soit $k\geqslant 2$ et $N=1\pm 2\pm\cdots\pm k$ un $k$-nombre. On note $A$ la somme des entiers positifs intervenant dans $N$ avec un signe $+$ et $B$ la somme des entiers positifs intervenant dans $N$ avec un signe $-$ (Donc $B=0$ s'il n'y en a pas). Alors

$$A-B=N$$

tandis que

$$A+B=1+2+\cdots+k=\frac{k(k+1)}{2}.$$

Ainsi

$$N=A+B-2B=\frac{k(k+1)}{2}-2B.$$

Donc $N$ est de même parité que le plus grand $k$-nombre, à savoir $\frac{k(k+1)}{2}$

b. Tous les $k$-nombres ont la parité de $\frac{k(k+1)}{2}$. Si $k$ admet $r$ pour reste et $q$ pour quotient dans la division euclidienne par 4, $k$ s'écrit $4q+r$, donc

$$k(k+1)=(4q+r)(4q+r+1)=4(4q^2+2qr+q)+r(r+1),$$

et

$$\frac{k(k+1)}{2}=2(4q^2+2qr+q)+\frac{r(r+1)}{2}.$$

Ainsi $\frac{k(k+1)}{2}$ a la même parité que $\frac{r(r+1)}{2}$donnée par le tableau ci-dessous :

| $r$ | $\frac{r(r+1)}{2}$ | parité |
|---|---|---|
| 0 | 0 | pair |
| 1 | 1 | impair |
| 2 | 3 | impair |
| 3 | 6 | pair |

Les entiers $k$ qui fournissent des $k$-nombres impairs sont donc les entiers de la forme $4q+1$ ($q > 1$) ou $4q+2$ ($q \geqslant 0$).

4. a. Pour $k=4$, on a vu que les 4-nombres étaient au nombre de 8 et il y a $2^3 = 8$ possibilités de choisir les signes $\pm$ donc 8 écritures possibles. Ainsi, chaque 4-nombre a une et une seule écriture possible. Ensuite, pour $k \geqslant 5$, ce n'est plus jamais le cas puisque par exemple,

$$\frac{k(k+1)}{2} - 10 = 1 - 2 - 3 + 4 + 5 + \cdots + k = 1 + 2 + 3 + 4 - 5 + \cdots + k.$$

Les entiers $k$ pour lesquels tout $k$-nombre admet une seule écriture sous la forme $1 \pm 2 \pm \cdots \pm k$ sont donc 2 ; 3 et 4.

b. Le plus grand $k$-nombre est $M_k = \dfrac{k(k+1)}{2}$, le plus petit est $N_k = 2 - \dfrac{k(k+1)}{2}$ mais tous ont la même parité, donc sont de la forme $M_k - 2p$ avec $p$ entier et $0 \leqslant p \leqslant M_k - 1$. Il y a ainsi au plus $M_k$ $k$-nombres [1]. Si chaque $k$-nombre possède strictement moins de 2011 écritures, il existe alors strictement moins de $2011 \times \dfrac{k(k+1)}{2}$ écritures possibles. Par ailleurs, il y a $2^{k-1}$ choix possibles pour déterminer les signes $\pm$ d'un $k$-nombre, donc $2^{k-1}$ écritures possibles. Si aucun $k$-nombre ne possède au moins 2011 écritures différentes, on doit avoir

$$2^{k-1} < 2011 \times \frac{k(k+1)}{2},$$

ce quui n'est pas le cas pour $k = 20$. Il existe donc un 20-nombre possédant au moins 2011 écritures différentes.

Retour au sommaire

[1] On peut montrer qu'il y en a $(M_k - 2)$, mais ce n'est pas utile pour la question.

# AMIENS

## Premier exercice académique

Série S
***On dérive, on dérive...***

### Énoncé

Combien de solutions réelles négatives l'équation $x^4 - 5x^3 - 4x^2 - 7x + 4 = 0$ possède-t-elle ?

*On pourra étudier les variations d'une certaine fonction ... et utiliser la calculatrice.*

### Éléments de solution

On pose $f(x) = x^4 - 5x^3 - 4x^2 - 7x + 4$
On dérive, ce qui donne : $f'(x) = 4x^3 - 15x^2 - 8x - 7$.
On dérive à nouveau : $f''(x) = 12x^2 - 30x - 8$. On cherche à factoriser $f''(x)$.
On calcule le discriminant : $\Delta = b^2 - 4ac = (-30)^2 - 4 \times 12 \times (-8) = 900 + 384 = 1284 > 0$.
Donc $f''(x)$ admet deux racines qui sont :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{30 - \sqrt{1284}}{24} \approx -0,24 \textit{ et } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{30 + \sqrt{1284}}{24} \approx 2,74.$$

On obtient le tableau de variation suivant :

| $x$ | $-\infty$ | | $x_1$ | | $x_2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | | + | 0 | - | 0 | + | |
| $f'(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $y_1$ | $\searrow$ | $y_2$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

A l'aide de la calculatrice, on a $y_1 \approx -6$. Par conséquent la fonction $f'$ ne s'annule qu'une seule fois pour un réel $x \in [x_2\,; +\infty[$. Encore avec la calculatrice, on obtient $x_3 \approx 4,31$.
On obtient finalement le tableau de variation suivant :

| $x$ | $-\infty$ | | $x_3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | - | 0 | + | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $y_3$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

A l'aide de la calculatrice, on a $y_1 \approx -156$. par conséquent, la fonction $f$ s'annule une fois pour un réel $\alpha \in ]-\infty\,; x_3]$ et une fois pour un réel $\beta \in [x_3\,; +\infty[$.
Or, $f(0) = 4$ ; donc nécessairement $\alpha > 0$ (car $f$ est décroissante sur $]-\infty\,; x_3]$)
L'équation $f(x) = 0$ n'admet donc aucune solution réelle négative. !

Retour au sommaire

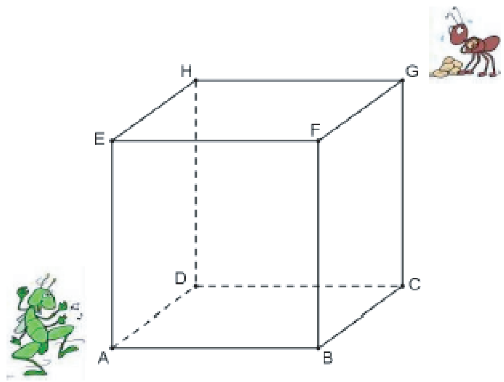
# AMIENS

## Deuxième exercice académique

Série S
***La cigale et la fourmi***

## Énoncé

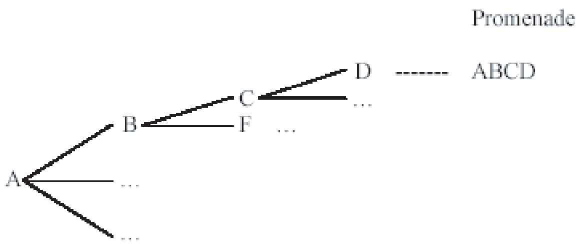
La Cigale, chantant tout l'été, part tous les matins du sommet A d'un cube (où elle habite) et se déplace d'un sommet à l'autre, en empruntant à chaque sommet, une autre arête au hasard.
Pour varier ses inspirations musicales, la Cigale ne repasse jamais par une arête déjà empruntée (même dans le sens inverse), mais peut repasser par un sommet déjà emprunté.




**Partie I - Une courte promenade d'été**

On étudie le cheminement de la Cigale sur 4 sommets consécutifs. Une promenade est codée par la donnée dans l'ordre des sommets atteints : ABCD, ADCG, . . .

1. Déterminer toutes les promenades possibles de la Cigale (on pourra s'aider d'un arbre).




2. a. Quelle est la probabilité qu'elle finisse sa promenade chez elle en A ?
   b. Quelle est la probabilité qu'elle finisse sa promenade chez sa voisine la Fourmi en G ?

**Partie II : « La Cigale, ayant chanté tout l'été, se trouva fort dépourvu quand la bise fut venue :**

Pas un seul petit morceau de mouche ou de vermisseau. Elle alla crier famine chez la fourmi sa voisine (en G), la priant de lui prêter quelque grain pour subsister jusqu'à la saison nouvelle . . . »

La Cigale (qui part de A) n'a pas le sens de l'orientation et se déplace toujours au hasard sur les arêtes du cube comme en été, sans emprunter un chemin par lequel elle est déjà passée. Elle continue ainsi son chemin jusqu'à ce qu'elle arrive chez la Fourmi ou qu'elle se trouve bloquée . . .

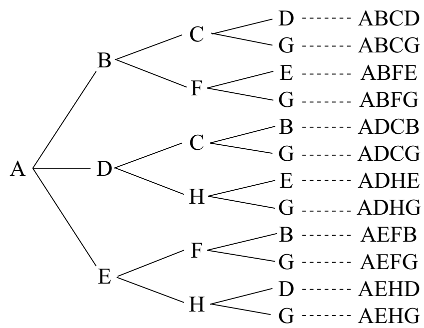
1. Lors de son excursion sur le cube, la Cigale peut-elle passer trois fois par un même sommet ?
2. Dans la suite de l'exercice, on suppose que la Cigale commence par se rendre en B. Déterminer alors tous les chemins possibles de la Cigale.
3. La Cigale a-t-elle plus de chance de se retrouver bloquée sans pouvoir avancer ou de trouver la maison de la Fourmi en G ?

4. La bise soufflant, il faut une heure à la Cigale pour parcourir une arête d'un sommet à l'autre. Elle est donc arrivée en B en 1 heure. Quelle est la probabilité qu'elle arrive chez sa voisine :
   a. en 4 heures exactement ?
   b. en 5 heures exactement ?
   c. en 6 heures ou plus ?
   d. sans repasser par un sommet déjà emprunté ?

## Éléments de solution

### Partie I

1. On complète l'arbre suivant :




2. a. La probabilité que la Cigale finisse sa promenade en A est nulle.
   b. En revanche, la probabilité qu'elle finisse chez la Fourmi vaut $\frac{6}{12} = \frac{1}{2}$.

### Partie II

1. Chaque sommet est relié à 3 arêtes. Un chemin partant de A utilise une arête issue de A. Il reste à la Cigale une autre possibilité pour repasser en A, en utilisant les deux autres arêtes. Il sera alors impossible de revenir en A, car toutes les arêtes auront été déjà empruntées.
   Pour un sommet autre que A, chaque chemin utilise donc deux arêtes sur les trois. Si la Cigale décide de revenir vers ce sommet (par la troisième arête), elle se retrouvera bloquée car elle ne pourra pas emprunter une arête déjà utilisée.
   Dans tous les cas, la Cigale ne peut pas passer trois fois par un sommet.
2. En complétant l'arbre, on obtient les 18 chemins possibles. En gras sont indiqués ceux qui mènent chez la Fourmi :
   ABCDAEFB, **ABCDAEFG**, ABCDAEHD, **ABCDAEHG**,
   ABCDHEAD, ABCDHEFB, **ABCDHEFG**, **ABCDHG**,
   **ABCG**,
   **ABFG**,
   ABFEADCB, **ABFEADCG**, ABFEADHE, **ABFEADHG**,
   ABFEHDAE, ABFEHDCB, **ABFEHDCG**, **ABFEHG**.
3. Il y a 10 possibilités d'arrêt en G, et 8 blocages, donc la Cigale a plus de chance de finir chez la Fourmi.
4. a. probabilité que la Cigale arrive chez la Fourmi en 4h exactement est de $\frac{2}{18} = \frac{1}{9}$.
   b. La probabilité qu'elle arrive en 5 heures exactement est nulle.
   c. Celle qu'elle arrive en 6 heures ou plus est de $\frac{8}{18} = \frac{4}{9}$.
   d. Enfin, la probabilité qu'elle arrive chez la Fourmi sans repasser par un sommet déjà emprunté est de $\frac{6}{18} = \frac{1}{3}$.

Retour au sommaire

# AMIENS

## Troisième exercice académique

Séries ES, L, STG, ST2S
***La carte au trésor***

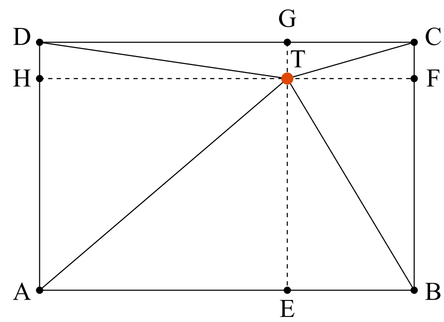
### Énoncé

Une carte indique qu'un trésor est situé dans un terrain rectangulaire à 1260 m d'un coin, à 320 m du coin opposé et à 1120 m d'un troisième coin.

A quelle distance du quatrième coin se trouve-t-il ?

### Éléments de solution

Supposons que le terrain où se trouve le trésor soit représenté par le rectangle ABCD.
Le trésor T est placé à un endroit où (par exemple) $TA = 1260$, $TC = 320$ et $TB = 1120$.
Il faut calculer la dernière distance $TD$.
On trace la parallèle à (AB) passant par T et la parallèle à (AD) passant par T. On construit ainsi les points E, F, G et H sur les quatre côtés du rectangle ABCD.




D'après le théorème de Pythagore, on a : $TD = \sqrt{TH^2 + HD^2} = \sqrt{TH^2 + TG^2}$.
Ot, $TA^2 = TH^2 + TE^2,\ TB^2 = TE^2 + TF^2$ et $TC^2 = TF^2 + TG^2$
Par conséquent, $TA^2 + TC^2 - TB^2 = TH^2 + \cancel{TE^2} + \cancel{TF^2} + TG^2 - \cancel{TE^2} - \cancel{TF^2} = TH^2 + TG^2$
Donc $TD = \sqrt{TA^2 + TC^2 - TB^2} = \sqrt{1260^2 + 320^2 - 1120^2} = \sqrt{435600} = 660$.

Le trésor se trouve donc à 660 m du quatrième point.

Retour au sommaire

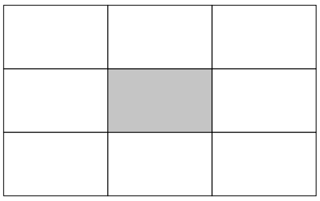
# AMIENS

## Quatrième exercice académique

Séries ES, L, STG, ST2S
***La famille Dupont***

### Énoncé

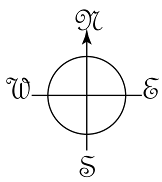
Au trente-septième étage d'une tour vivent vingt personnes réparties dans huit appartements disposés ainsi :



Les heureux élus qui ont vue à l'Est, sur le stade, sont, hélas deux fois moins nombreux que ceux dont la vue, au sud, donne sur l'usine d'incinération, mais deux fois plus nombreux que ceux qui, au nord, font face à la prison.
Quant à ceux qui regardent à l'ouest, exactement le tiers de ceux qui font face au sud, ils peuvent se distraire avec l'animation du centre commercial.
Aucun appartement n'est vide ; en revanche, les Dupont, qui sont l'unique famille nombreuse de l'étage, se trouvent à l'étroit dans leur F4.
Au fait, quel appartement habitent les Dupont et combien sont-ils ?

### Éléments de solution

Les personnes qui habitent au sud sont deux fois plus nombreuses que celles qui habitent à l'est, et quatre fois plus nombreuses que celles qui habitent au nord. Par ailleurs, les personnes qui habitent au sud sont aussi trois fois plus nombreuses que celles qui habitent à l'ouest.
Le nombre de personnes habitant au sud est un multiple de 4 et de 3, donc est aussi un multiple de 12.
Comme il n'y a que 20 personnes en tout, ceux qui habitent au sud sont exactement 12.
Ceux qui habitent au nord sont quatre fois moins nombreux, soit $\dfrac{12}{4} = 3$.
Comme il n'y a pas d'appartement vide, chacun des trois appartements du nord compte un seul habitant.
Ceux qui habitent à l'ouest et à l'est sont, respectivement, au nombre de 4 pour l'ouest (12/3) et 6 pour l'est (12/2).
Il y en a donc $20 - (4 + 6) = 10$ qui ne sont ni à l'ouest, ni à l'est. Parmi ces 10, l'un est au nord, et les 9 autres sont donc dans l'appartement plein sud : ce sont les Dupont (devant l'usine d'incinération, les pauvres !).
Il existe deux répartitions possibles pour les autres personnes, qui sont les suivantes




| | | |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 |
| 1 | | 4 |
| 2 | 9 | 1 |

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 |
| 2 | | 3 |
| 1 | 9 | 2 |

Retour au sommaire

# AMIENS

## Cinquième exercice académique

Séries STI, STL
***Drôles de puissances***

### Énoncé

1. Calculer l'expression $\dfrac{\left(8^{n+1}+8^n\right)^2}{\left(4^n-4^{n-1}\right)^3}$ pour $n=0,\ n=1,\ n=2$ et $n=3$.
2. Montrer que le résultat est valable pour tout entier naturel $n$.

### Éléments de solution

1. Pour $n=0$, on a $\dfrac{\left(8^1+8^0\right)^2}{\left(4^0-4^1\right)^3}=\dfrac{9^2}{\left(\dfrac{3}{4}\right)^3}=\dfrac{3^4\times 4^3}{3^3}=3\times 4^3=192.$

   Pour $n=1$, on a $\dfrac{\left(8^2+8^1\right)^2}{\left(4^1-4^0\right)^3}=\dfrac{72^3}{3^3}=192.$

   Pour $n=2$, on a $\dfrac{\left(8^3+8^2\right)^2}{\left(4^2-4^1\right)^3}=\dfrac{576^2}{12^3}=192.$

   Pour $n=3$, on a $\dfrac{\left(8^4+8^3\right)^2}{\left(4^3-4^2\right)^3}=\dfrac{4608^2}{48^3}=192.$
2. On a :
   $$\frac{\left(8^{n+1}+8^n\right)^2}{\left(4^n-4^{n-1}\right)^3}=\frac{\left(8^n(8+1)\right)^2}{\left(4^{n-1}(4-1)\right)^3}=\frac{\left(8^n\right)^2\times 9^2}{\left(4^{n-1}\right)^3\times 3^3}=\frac{8^{2n}\times 3^4}{4^{3(n-1)}\times 3^3}=\frac{2^{6n}\times 3}{2^{6(n-1)}}=\frac{3}{2^{-6}}=2^6\times 3=192.$$
   Donc le résultat est bien valable pour tout entier naturel $n$.

Retour au sommaire

# AMIENS

## Sixième exercice académique

Séries STI, STL
***Somme de fractions***

### Énoncé

1. a. Montrer que $\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} = \sqrt{3}-\sqrt{2}$.

   b. A quelle condition sur $p$ et $q$ a-t-on l'égalité (E) : $\dfrac{1}{\sqrt{p}+\sqrt{q}} = \sqrt{p}-\sqrt{q}$ ?

   Dans ce cas, écrire l'égalité (E) obtenue uniquement en fonction de $q$.

2. Déterminer le plus petit entier naturel $n$ tel que :

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} \geqslant 100.$$

### Éléments de solution

1. a. On a $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right) = \sqrt{3}^2 - \sqrt{2}^2 = 3-2 = 1$, donc $\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} = \sqrt{3}-\sqrt{2}$.

   b. On a : $\dfrac{1}{\sqrt{p}+\sqrt{q}} = \sqrt{p}-\sqrt{q} \Leftrightarrow \left(\sqrt{p}+\sqrt{q}\right)\left(\sqrt{p}-\sqrt{q}\right) \Leftrightarrow 1 = \sqrt{p}^2 - \sqrt{q}^2 \Leftrightarrow 1 = p-q$.

   Il faut donc que $p = q+1$. On reporte dans l'égalité (E),

   ce qui donne $\dfrac{1}{\sqrt{q+1}+\sqrt{q}} = \sqrt{q+1}-\sqrt{q}$.

2. On a : $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$

   $= \sqrt{\cancel{2}} - \sqrt{1} + \sqrt{\cancel{3}} - \sqrt{\cancel{2}} + \sqrt{\cancel{4}} - \sqrt{\cancel{3}} + \cdots + \sqrt{n+1} - \sqrt{\cancel{n}} = \sqrt{n+1} - \sqrt{1} = \sqrt{n+1} - 1.$

   Ensuite $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{\ }+\sqrt{3}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} \geqslant 100 \Leftrightarrow \sqrt{n+1} - 1 \geqslant 99$

$$\Leftrightarrow n+1 \geqslant 99^2 \Leftrightarrow 99^2 - 1 = 9800$$

   Il faut donc que $n$ soit supérieur ou égal à 9800.

Retour au sommaire

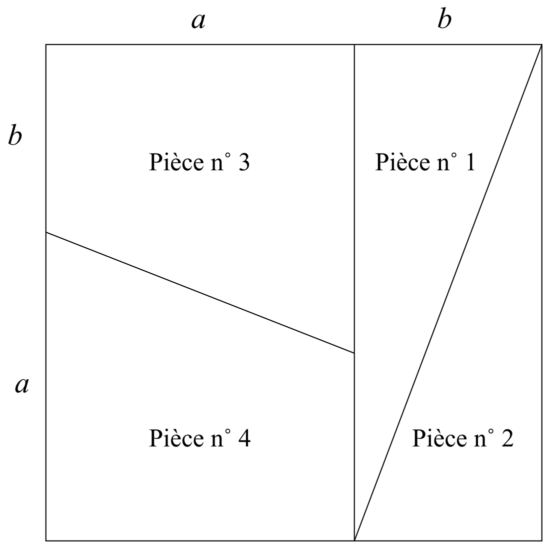
# BESANÇON

## Premier exercice académique

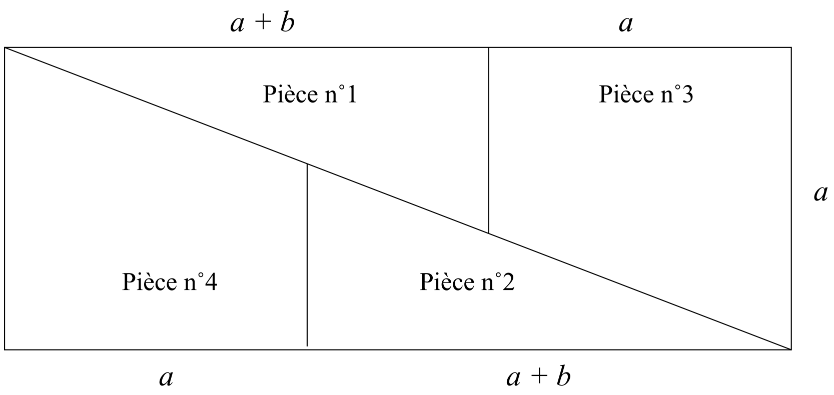
Toutes séries

***L'énigme du puzzle***

### Énoncé




Dans un carré de côté $c$, on construit un puzzle de quatre pièces comme tracé ci-dessus.
On a donc $c = a+b$. On essaie alors d'assembler les quatre pièces en un rectangle comme tracé ci-dessous.
Le rectangle souhaité aura donc pour longueur $L = 2a + b$ et pour largeur $\ell = a$.




1. a. Reproduire les deux dessins avec $a = 5$ cm et $b = 3$ cm.
   b. Le puzzle est-il exact (c'est-à-dire à l'aides des pièces du carré initial, assemble-t-on exactement un rectangle) ? Justifiez votre réponse.
2. On suppose, dans cette question, que le puzzle est exact.
   a. Trouver une relation liant $a$ et $b$. On pourra raisonner sur l'aire du rectangle à reconstituer.
   b. Déterminer quelle(s) valeur(s) peut alors prendre le quotient $\dfrac{a}{b}$.

*Les mathématiciens on montré qu'il n'existe pas de solution exacte au puzzle si on veut que les côtés soient tous des nombres entiers.*

3. On recherche donc des couples $(a, b)$ d'entiers pour lesquels le puzzle est satisfaisant visuellement sans être parfaitement exact.
   Une solution $(a, b)$ est dite « presque exacte » si $a^2 - ab - b^2$ vaut 1 ou -1.
   a. Le puzzle réalisé en question 1 est-il presque exact ?
   b. Démontrer que si $(a, b)$ est une soution presque exacte, alors $(a + b, a)$ est aussi une solution presque exacte.
   c. Trouver ainsi quelques solutions presque exactes.

## Éléments de solution

1. a. ...
   b. Le carré a pour aire $8 \times 8 = 64$ alors que le rectangle a pour aire $13 \times 5 = 65$. $\boxed{\text{Le puzzle ne peut donc être exact.}}$
2. Si on veut que le puzzle sopit exact, il faut au moins déjà que la condition d'aire soit respectée. Or le carré aura pour aire $A_1 = (a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$ et le rectangle pour aire $A_2 = (2a+b)\times a = 2a^2+ab$.
   L'égalité $A_1 = A_2$ donnera, après simplification : $\boxed{a^2 - ab - b^2 = 0}$.
3. a. Oui car $|5^2 - 5 \times 3 - 3^2| = 1$
   b. Si $(a, b)$ est une solution presque exacte, on a $\left|a^2 - ab - b^2\right| = 1$.
   Or $(a + b)^2 - (a + b)a - a^2 = -a^2 + ab + b^2 = -(a^2 - ab - b^2)$
   et donc $\left|(a + b)^2 - (a + b)a - a^2\right| = \left|a^2 - ab - b^2\right| = 1$. ce qui montre que le couple $(a + b, a)$ est aussi une soloution presque exacte.

   c. On note que le couple $(a = 5, b = 3)$ donné en question 1 est une solution presque exacte. Pour réaliser un puzzle presque exact (et de plus en plus précis), on pourra prendre comme autres valeurs obtenues successivement à partir de $(a = 5, b = 3)$ e, remplaçant $a$ par$a + b$ et $b$ par $a$.
   $\boxed{(8, 5), (13, 8), (21, 13), (34, 21),\ldots}$

Pour réaliser la condition sur les aires obtenues en question 2, on obtient $a^2 - ab - b^2 = 0$ soit, comme ici $b = 1$ : $a^2 - a - 1 = 0$.

La seule solution positive de cette équation est le nombre $\dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$ : c'est le fameux « nombre d'or ».
Les nombres 3, 5, 8, 13, 21, 34,... sont les nombres de Fibonacci.

*On peut montrer que les seules solutions presque exactes du problème du puzzle sont obtenues en prenant deux termes consécutifs de cette suite.*

Retour au sommaire

# BESANÇON

## Deuxième exercice académique

Toutes séries

***Une corde tout autour de la Terre***

### Énoncé

Dans cet exercice, on estimera la circonférence de la Terre à 40 000 km. On tend une corde tout autour de la Terre (celle-ci est supposée ici parfaitement sphérique).

Question 1 (cf. Fig.1) De quelle longueur faut-il allonger la corde pour pouvoir à présent la fixer au sommet de piquets d'un mètre de haut répartis tout autour de la Terre (on suppose que la forme de la corde reste circulaire).

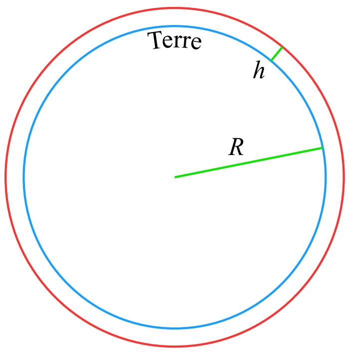



Figure 1

Question 2 (cf Fig.2) La corde ayant été ainsi rallongée, on décide de supprimer les piquets et de tendre à nouveau la corde autour de la terre. On arrime alors la corde au sommet d'une tour. Quelle est la hauteur de la tour, sachant qu'aux points de contact A et B, la corde est tangente au cercle ?

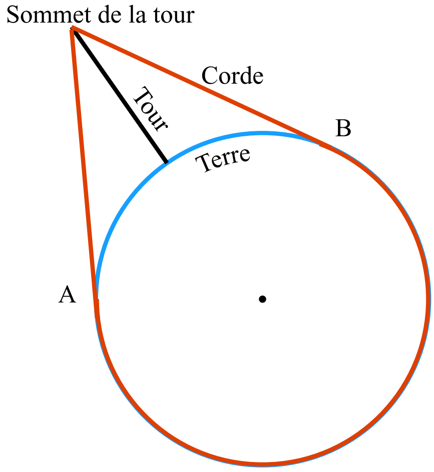



Figure 2

*Indications pour la question 2 :* On notera O le centre du cercle, S le sommet de la tour et $\theta$ la moitié de l'angle au centrte $\widehat{AOB}$.

a. Calculer la longueur de chacun des segments [AS] et [SB] en fonction de $\theta$.
b. Calculer en fonction de $\theta$ la longueur de l'arc de cercle d'extrémités A et B où la corde reste en contact avec la terre.
c. En déduire une équation vérifiée par l'angle $\theta$.
d. On admettra que l'angle $\theta$ est suffisamment petit pour utiliser l'approximation : $\tan(\theta) - \theta \approx \dfrac{\theta^3}{3}$.
En déduire, à l'aide de votre calculatrice, une valeur approchée de l'angle $\theta$ et finir l'exercice.

## Éléments de solution

**Question 1.** En notant $R$ le rayon terrestre (exprimé en mètres), $\ell_1$ la longueur de la corde initiale et $\ell_2$ la longueur de la corde finale, il vient : $\ell_2 - \ell_1 = 2\pi(R+1) - 2\pi\, R = 2\pi$ soit environ 6,28 m.

**Question 2.** La difficulté de l'exercice vient du fait qu'il faut raisonner en deux temps : d'abord déterminer une équation permettant de déterminer l'angle au centre (dont la solution s'obtient par l'approximation donnée dans l'énoncé) ; puis déterminer la hauteur de la tour par de la trigonométrie élémentaire.

En notant O le centre du cercle, S le sommet de la tour et $\theta$ la moitié de l'angle au centre , il vient que la longueur $\ell_2 = 2\pi(R+1)$ de la corde (après allongement) s'écrit aussi comme la somme de $(2\pi - \theta)R$ pour la partie qui va coller à la terre et de $2R \times \tan(\theta)$ pour la partie constituée des segments [AS] et [SB].

D'où l'égalité : $2\pi(R+1) = (2\pi - 2\theta)R + 2R \times \tan(\theta)$, d'où il résulte que $\boxed{\tan(\theta) - \theta = \dfrac{\pi}{R}}$ (1)

En utilisant l'approximation donnée dans l'énoncé, il vient $\dfrac{\theta^3}{3} \approx \dfrac{\pi}{R}$ soit $\theta \approx \sqrt[3]{\dfrac{3\pi}{R}}$ soit $\theta \approx 0,0114$.

En notant $x$ la hauteur de la tour, il vient, en raisonnant dans le triangle SOA :

$$\cos(\theta) = \frac{OA}{OS} = \frac{R}{x+R} \text{ d'où } x = \left(\frac{1}{\cos(\theta)} - 1\right)$$

et donc, après calcul, $x \approx 413$. La hauteur de la tour est donc d'environ $\boxed{\text{413 mètres}}$.

*Remarque* : En passant par la résolution numérique (Maple) de l'équation (1) sans tenir compte du développement limité de tan, on obtient une hauteur de tour d'environ 413,48 m.

Retour au sommaire

# BORDEAUX

## Premier exercice académique

Toutes séries

***La fourmi***
(Inspiré du rallye de la Fête des maths - Lyon 1993)

### Énoncé

Le plan est rapporté à un repère $(O,\ \vec{i},\ \vec{j})$.

Une fourmi se promène sur ce plan de la façon suivante : lorsqu'elle repart d'un point de coordonnées $(x\ ;\ y)$ où elle était arrêtée, elle marche en ligne droite jusqu'au point de coordonnées $(-3x - y\ ;\ 7x + ky)$ où $k$ est un nombre entier fixé pour toute la promenade.

1. On prend $k = 1$
   a. La fourmi part du point A$(1\,;\,1)$ et fait trois déplacements. Dessiner son trajet. Sur quel point arrive-t-elle ?
   b. De quel point doit partir la fourmi pour arriver en trois déplacements sur le point B$(16\,;\,0)$ ?
2. Sur quel point doit se placer la fourmi pour ne pas bouger quelle que soit la valeur de $k$ ?
3. On prend $k = 2$.
   a. La fourmi part du point A$(1\,;\,1)$ et fait trois déplacements.
   Dessiner son trajet. Sur quel point arrive-t-elle ?
   b. Est-ce que la fourmi revient toujours à son point de départ au bout de trois déplacements ?
4. Pour quelle(s) valeur(s) de $k$ la fourmi se retrouve t-elle à son point de départ en trois déplacements quel que soit son point de départ ?

### Éléments de solution

1. a. A$(1\,;\,1)\to$ B$(-4\,;\,8)\to$ C$(4\,;\,-20)\to$ D$(8\,;\,8)$
   b. D$(16\,;\,0)\leftarrow$ C$(4\,;\,-28)\leftarrow$ B$(-6\,;\,14)\leftarrow$ A$(2\,;\,0)$
2. $\begin{cases} -3x - y = x \\ 7x + ky = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2x \\ x(2k+9) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$
3. a. A$(1\,;\,1)\to$ B$(-4\,;\,9)\to$ C$(3\,;\,-10)\to$ D$(1\,;\,1)$
   b. A$(x\,;\,y)\to$ B$(-3x - y\,;\,7x + 2y)\to$ C$(2x + y\,;\,-7x - 3y)\to$ D$(x\,;\,y)$
4. A$(x\,;\,y)\to$ B$(-3x - y\,;\,7x + ky)\to$ C$(2x + (3 - k)y\,;\,7x(k - 3) + y(k^2 - 7)$
   $\to$ D$(x(-7x + 15) + y(-k^2 + 3k - 2)\,;\,7x(k^2 - 3k + 2) + y(k^3 - 14k + 21))$

   A $=$ D pour toute valeur de $k$ nécessitant $-7k + 15 = 1$, donc $k = 2$ et on sait que cette condition suffit pour que A $=$ D.
   2 est donc la seule valeur répondant à la question.

Retour au sommaire

# BORDEAUX

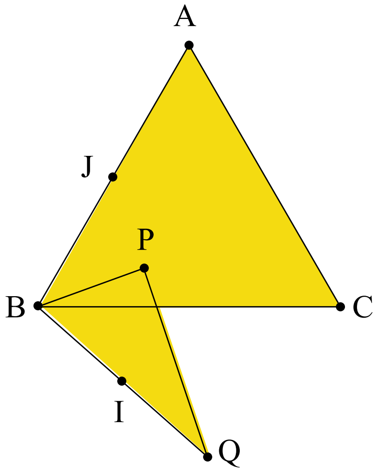
## Deuxième exercice académique

Série S

ABC est un triangle équilatéral. On se propose de construire le point P intérieur au triangle tel que $PB = \dfrac{1}{2}PA$ et $PC = \dfrac{\sqrt{3}}{3}PA$

### Première partie

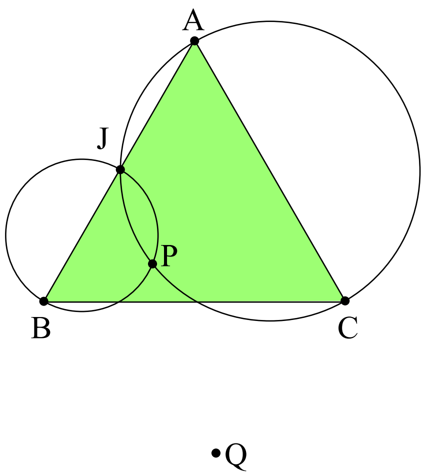
On suppose que le point P placé sur la figure satisfait à ces deux conditions.




On désigne par $r$ la rotation de centre C et d'angle 60°. Q est l'image de P par $r$.

1. Démontrer que le triangle BPQ est rectangle en P. En déduire que le triangle BQC est rectangle en Q, puis que le point P est sur le cercle de diamètre [AC].
2. I est le milieu de [BQ], J celui de [AB]
   a. Démontrer que le triangle PIC est rectangle en P. En déduire l'alignement des points A, P ei I.
   b. Justifier que P est le centre de gravité du triangle ABQ. En déduire l'alignement des points Q, P et J.
   c. Justifier que le point P est sur le cercle de diamètre [BJ].

### Deuxième partie




ABC triangle équilatéral. J milieu de [AB]. P le point d'intersection, autre que J, des cercles de diamètre[AC] et [BJ].
Q est l'image de P par la rotation $r$ de centre C et d'angle 60°.
On se propose de prouver que P vérifie bien les deux conditions $PB = \dfrac{1}{2}PA$ et $PC = \dfrac{\sqrt{3}}{3}PA$.

1. Montrer que $\widehat{JPA} = 30°$ ; en déduire $\widehat{BPA}$ et $\widehat{BPC}$. En déduire la nature du triangle BPQ.
2. Justifier que le triangle BQC est rectangle en Q. En déduire $\widehat{BQP}$.
3. En déduire que le point P vérifie les deux conditions requises.

## Éléments de solution

### Première partie

1. $r$ conservant les distances, $AP = BQ$. Or $BP^2 + PQ^2 = BP^2 + PC^2 = \dfrac{1}{4}PA^2 + \dfrac{3}{4}PA^2 = PA^2 = BQ^2$. Le triangle BPQ est donc rectangle en P. Q est donc sur le cercle de diamètre [BC]. Par la

rotation inverse de $r$, P est donc sur le cercle de diamètre [AC].

2. a. $PC^2 + PI^2 + PC^2 + PB^2 = PA^2$. Or par la rotation de centre B et d'angle 60°, $PA = CI$.
   On a donc $PC^2 + PI^2 = CI^2$.
   Donc PCI est rectangle en P.
   Les triangles APC et CPI étant rectangles en P, les points A, P et I sont alignés.

   b. $AI = AP + PI = AP + PB = \frac{3}{2}PA$. Donc P est le centre de gravité de ABQ. P est donc sur la médiane [QJ].

   c. On en déduuit que BPJ est rectangle en P, donc P est sur le cercle de diamètre [BJ].

**Deuxième partie**

1. $\widehat{JPA} = \widehat{ACJ} = 30^o$. $\widehat{BPA} = \widehat{BPJ} + \widehat{JPA} = 90 + 30 = 120^o$.
   $\widehat{BPC} = 360 - \widehat{BPA} - \widehat{CPA} = 360 - 120 - 90 = 150^o$.
   $\widehat{BPQ} = \widehat{BPC} - \widehat{CPQ} = 150 - 60 = 90^o$
2. P étant sur le cercle de diamètrte [AC] par la rotation $r$, Q se trouve sur le cercle de diamètre [BC] et on a donc BQC rectangle en Q. $\widehat{BQP} = \widehat{BQC} - \widehat{CPQ} = 90 - 60 = 30^o$.
3. Dans le triangle rectangle BQP, $\frac{BP}{BQ} = \sin(30^o) = \frac{1}{2}$ et $\frac{QP}{BQ}\cos(30^o) = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Or $BQ = PA$ et $PQ = PC$, donc $PB = \frac{1}{2}PA$ et $PC = \frac{\sqrt{3}}{2}PA$.

Retour au sommaire

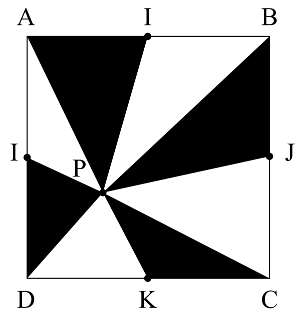
# BORDEAUX

## Troisième exercice académique

Séries autres que S

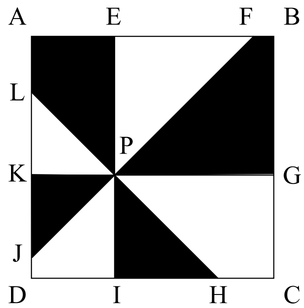
***Plus ou moins noir***
Le professeur d'art plastique a demandé à ses élèves de dessiner une croix stylisée incluse dan un carré ABCD de 10 cm de côté.

On rappelle que l'aire d'un triangle est donnée par la formule $A = \dfrac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2}$.




1. Olivia a choisi le motif suivant où I, J, K et L sont les milieux des côtés et P un point quelconque intérieur au carré que l'on a joint aux points A,I, B, J, C, K, D et L.

   Calculer en $\text{cm}^2$ l'aire de la partie noire du dessin.




2. Ivan a préféré ce motif où
   - P est un point intérieur au cercle,
   - Les droites (KG), (IE), (FJ) et (HL) passent toutes par P,
   - (KG) est parallèle à (DC), (EI) est parallèle à (AD),
   - (FJ) et (HL) sont les bissectrices des secteurs $\widehat{EPG}$ et $\widehat{EPK}$
   - $DI < DK < 5$.

   On pose $DI = x$ et $DK = y$.
   Calculer en $\text{cm}^2$ l'aire de la partie noire du dessin.

## Éléments de solution

**Pour le premier** chaque noir a son blanc de même aire, donc $S = 50$.

**Pour le deuxième**, on calcule la plupart des longueurs de la figure et on calcule les aires des différents éléments. On trouve également 50.

Aire(PKJ)=$\dfrac{x^2}{2}$ ; aire(PIH)= $\dfrac{y^2}{2}$ ; aire(PLAE)= $x(10-y) - \dfrac{x^2}{2}$ ; aire(PGBI)= $(10-x)(10-y) - \dfrac{10-y^2}{2}$.

Retour au sommaire

# CAEN

## Premier exercice académique

Toutes séries

***Calcul en base 8***

### Énoncé

Yohann, d'un naturel original, aime écrire les entiers sans utiliser les chiffres 8 et 9. Pour cela, il a l'habitude de décomposer un nombre en utilisant les puissances de 8.

**Exemple** : $1659 = \mathbf{3} \times 8^3 + \mathbf{1} \times 8^2 + \mathbf{7} \times 8 + \mathbf{3}$.

On dit que le nombre 1659 a pour écriture $\overline{3173}$ en base 8.(1659 est son écriture en base 10).

**De même** : $508 = \mathbf{7} \times 8^2 + \mathbf{7} \times 8 + \mathbf{4}$ donc le nombre 508 a pour écriture $\overline{774}$ en base 8.

**Réciproquement** : le nombre $\overline{131}$ écrit en base 8 devient $\mathbf{1} \times 8^2 + \mathbf{3} \times 8 + \mathbf{1} = 89$ en base 10.

D'une manière générale, dire que l'entier $x$ a pour écriture $\overline{a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0}$ en base 8 signifie que $x = a_n \times 8^n + a_{n-1} \times 8^{n-1} + \dots + a_2 \times 8^2 + a_1 \times 8 + a_0$ où $a_n, a_{n-1}, \dots a_2, a_1$ et $a_0$ sont des entiers naturels **strictement inférieurs** à 8.

1. a. Déterminer l'écriture en base 8 du nombre 1044.
   b. Déterminer l'écriture en base 10 du nombre $\overline{5432}$.
2. A la manière de Yoann, poser et effectuer les calculs suivants en base 8 :

$$\overline{131} + \overline{774}\ ;\ \overline{3123} - \overline{131}\ ;\ \overline{131} \times \overline{774}.$$

3. a. $N$ est un naturel dont l'écriture en base 8 est $\overline{12345676543210}$.
   $N$ est-il divisible par 8 ?
   b. Soit $x$ un entier naturel et $x = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0}$ son écriture en base 8.
   Quelles sont les valeurs possibles de $a_0$ pour que $x$ soit divisible par 4 ?
   c. Le nombre $N$ défini en a. est-il divisible par 4 ?
4. a. En remarquant que pour tout entier $k \geqslant 1$, le reste dans la division par 7 de $8^k$ est toujours 1, déterminer le critère de divisibilité par 7 d'un entier naturel $x$ écrit en base 8.
   b. Le nombre $N$ défini à la question 3a. est-il divisible par 7 ?

## Éléments de solution

1. a. $1044 = 2 \times 8^3 + 0 \times 8^2 + 2 \times 8^1 + 4$ donc $1044 = \overline{2024}$.
   b. $\overline{5432} = 5 \times 8^3 + 4 \times 8^2 + 3 \times 8^1 + 2 = 2842$
2. $\overline{131} + \overline{774} = \overline{1125}$
   $\overline{3123} - \overline{131} = \overline{2772}$.
   $\overline{131} \times \overline{774} = \overline{130234}$.
3. a. Pour tout entier $k$, 8 divise $8^k$ donc un nombre est divisible par 8 lorsque son chiffre des unités en base 8 est 0 donc $N$ est divisible par 8.
   b. 4 divise 8 donc, pour tout $k \geqslant 1$, 4 divise $8^k$ donc 4 divise $x$ si et seulement si $a_0 = 0$ ou $a_0 = 4$. Un nombre est divisible par 4 si et seulement si le chiffre des unités dans sa décomposition en base 8 est 0 ou 4.

c. 4 divise $N$ car son chiffre des unités en base 8 est 0.

4. a. Pour tout entier $k \geqslant 1$ le reste dans la division par 7 de $8^k$ est 1.
Donc il existe $n$ entiers $q_1,\ q_2\ ; \cdots q_n$ tels que

$$x = a_n(7q_n + 1) + a_{n-1}(7q_{n-1} + 1) + \cdots a_1(7q_1 + 1) + a_0$$

D où $x = 7(a_nq_n + a_{n-1}q_{n-1} + \cdots + a_1q_1$

Donc 7 divise $x$ si et seulement si 7 divise $\sum_{i=0}^{n} a_i$.

Donc un nombre est divisible par 7 si et seulement si la somme de ses chiffres dans sa décomposition en base 8 est un multiple de 7.

b. $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 + 0 = 49$ donc 7 divise $N$.

Retour au sommaire

# CAEN

## Deuxième exercice académique

Toutes séries

***Mélanges de cartes***

### Énoncé

Le principe du « mélange parfait », en magie des cartes, consiste tout d'abord à couper le jeu en 2 paquets contenant le même nombre de cartes ; on procède ensuite au mélange en intercalant exactement les cartes de chacun des paquets (*c'est un geste extrêmement difficile qui nécessite, bien évidemment, beaucoup de pratique. . .*).

*Exemple de « mélange parfait » avec un jeu de 6 cartes ( la première est l'as de pique et la sixième est le 6 de pique ) :*

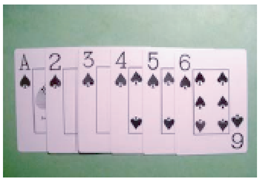



*Figure 1*
*jeu de départ*

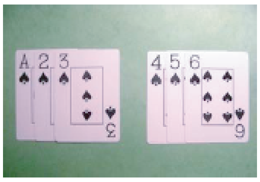



*Figure 2*
*division en 2 paquets de trois cartes*

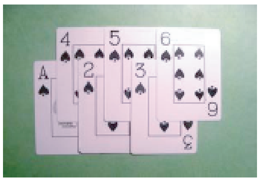



*Figure 3*
*cartes intercalees*

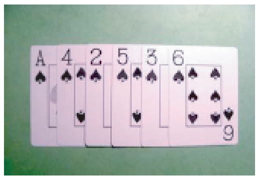



*Figure 4*
*fin du melange*

1. a. Quelle sera la position des 6 cartes de l'exemple précédent après un deuxième mélange parfait ?
   b. En combien de mélanges identiques les cartes reviendront-elles à leur position initiale ?

   *On utilisera pour la suite la notation suivante : $U_k(x)$ est l'entier indiquant la position, après $k$ mélanges, de la carte située en $x^{ième}$ position du jeu de départ.*
   *Ainsi, dans le mélange de 6 cartes de la question précédente $U_1(2) = 3$ signifie que la carte en $2^{ième}$ position en comptant à partir de la gauche du jeu de départ (le 2 de pique, Fig1) est, après un mélange parfait, en $3^{ième}$ position (Fig 4).*

2. a. Que vaut $U_1(2)$ ? $U_2(2)$ ?
   b. Quelle est la valeur minimum de l'entier $k$ strictement positif pour que $U_k(2) = 2$ ?
3. Dans cette question, on considère un jeu de $2n$ cartes, où $n$ est un entier naturel supérieur ou égal à 1.
   a. Après un mélange, à quelle position se trouvent la première et la dernière carte ?
   b. Quelle sera la position $U_1(x)$ après un mélange parfait, d'une carte située à la position $x$ au départ ? *Indication : on pourra raisonner sur deux paquets (premier paquet avec $1 \leqslant x \leqslant n$ second paquet avec $n + 1 \leqslant x \leqslant 2n$)*
   c. Verifier les réponses obtenues à la question 3a.
4. Dans cette question, on utilise un jeu de 8 cartes. On étudie les positions successives de la carte située en $2^{ème}$ position au départ.
   a. En combien de mélanges revient-elle à sa position initiale ?
   b. Vérifier que le même nombre de mélanges ramène également la carte située au départ en $3^{ème}$ position, à sa position initiale.

5. *Nous admettrons que si la carte en position 2 revient après M mélanges à sa position initiale, alors toutes les cartes du jeu sont revenues dans leur position initiale après ces M mélanges parfaits.*

   Ecrire un algorithme permettant de savoir combien le magicien utilisera de mélanges parfaits pour revenir à l'état initial d'un jeu de 52 cartes.

## Éléments de solution

1. a. La position des six cartes après un autre mouvement de mélange parfait : 1 5 4 3 2 6.

   b. On revient à la position initiale après 4 mélanges parfaits.

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1^er^ mélange | 1 | 4 | 2 | 5 | 3 | 6 |
| 2^ème^ mélange | 1 | 5 | 4 | 3 | 2 | 6 |
| 3^ème^ mélange | 1 | 3 | 5 | 2 | 4 | 6 |
| 4^ème^ mélange | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |

2. Considérons que la magicien a un jeu de 16 cartes.

   a. $U_1(2) = 3$
   $U_2(2) = U_3(3) = 2 \times 3 - 1 = 5$ donc $U_2(2) = 5$.

   b. Il faut 4 mélanges car :
   $U_3(2) = U_2(3) = U_1(5) = 9$
   et $U_4(2) = U_3(3) = U_2(5) = U_1(9) = 2$.

3. a. La première et la dernière carte du jeu restent à la même place.

   b. - Si $x \leqslant n$ c'est-à-dire que la carte en position $x$ est située dans le paquet de gauche alors il y a $x - 1$ cartes qui vont s'intercaler avant la carte en position $x$, c'est-à dire que la nouvelle position de cette carte sera $x + x - 1 = 2x - 1$ c'est-à dire si $x \leqslant n$, $U_1(x) = 2x - 1$.
      - Si $x > n$ alors $x = x' + n$ c'est-à-dire à la $x'^{\text{ème}}$ position après le milieu du paquet. Alors cette carte en position $x$ se retrouvera en $2x'$ car les cartes du paquet de gauche se trouveront en position paire avec la carte $n + 1$ en position 2, $n + 2$ en position 4 etc. Ainsi puisque $x' = x - n$, la nouvelle position de la carte sera $2(x - n) = 2x - 2n$, c'est-à-dire si $x > n$, $U_1(x) = 2x - 2n$.

   c. La première et la dernière carte du jeu restent à la même place car : pour la première carte si $x = 1$ alors sa nouvelle position sera en $2 \times 1 - 1 = 1$
   pour la dernière carte $x = 2n$ alors sa nouvelle position sera en $2 \times 2n - 2n = 4n - 2n = 2n$.

4. $U_3(2) = U_2(3) = U_1(5) = 2$ et $U_3(3) = U_2(5) = U_1(2) = 3$.

5. Algorithme de calcul des positions de la 2^ème^ carte et recherche du retour en position initiale.

```
Variables
X : entier                    // position de la carte 2
M : entier                    // nombre de mélanges effectués

Initialisation
2⟶ X                          // position initiale de la carte 2
0⟶ M                          // pas de mélange

Fonction U(X)                 // fonction « mélange »
     si X≤ 26
     alors U(X)=2X-1
     sinon U(X)=2X-52

Traitement
Répéter
     U(X)⟶ X                  // mélange effectué
     Afficher X               // nouvelle position de la carte 2
     M+1⟶ M                   // on compte 1 mélange de plus
Jusqu'à ce que X=2            // test retour en position initiale
```

Sortie
Afficher M

Conclusion :
Le cycle des positions de la carte 2 est : 2-3-5-9-17-33-14-27-2. En 8 mélanges, la carte est revenue à sa position initiale (ainsi que toutes les cartes du paquet).

Retour au sommaire

# CLERMONT-FERRAND

## Premier exercice académique

Toutes séries

***Code confidentiel***

### Énoncé

On appelle code un nombre à quatre chiffres choisis dans la liste 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, chaque chiffre pouvant être répété à l'intérieur d'un même code.
Par exemple 1903 et 8855 sont des codes possibles, l'écriture générale étant $\overline{abcd}$ (on met un trait au dessus pour ne pas confondre l'écriture du nombre avec le produit $a \times b \times c \times d$)
À ce code est associée une clé $C$ calculée à l'aide de l'algorithme suivant :

```
Entrée              N est le code à quatre chiffres
Initialisation :    Affecter à P la valeur de N
                    Affecter à S la valeur 0
Traitement :        Pour K de 1 à 4, faire
                        Affecter à U le chiffre des unités de P
                        Si K est pair
                            alors affecter à S la valeur S + (K + 3) × U
                            sinon affecter à S la valeur S + (K + 1)×
                        Fin si
                        Affecter à P la valeur (P − U)/10
                        Fin faire
                    Affecter à R le reste de la division euclildienne de S par 9
                    Affecter à C la valeur 9 − R
Sortie :            Afficher C
```

Le code et sa clé constituent un identifiant permettant l'ouverture d'une salle confidentielle.

1. Faire fonctionner l'algorithme avec $N = 2282$ et vérifier que la clé qui lui correspond est 6.
2. Une personne s'identifie en entrant le code 4 732 suivi de la clé 4.
   L'accès à la salle lui est refusé.
   La personne est sûre des trois derniers chiffres du code et de la clé, l'erreur porte sur le premier chiffre du code (qui n'est donc pas égal à 4). Quel est ce premier chiffre ?
3. Est-il vrai que toutes les personnes ayant un code de la forme $\overline{abba}$ ont pour clé 9 ? ($a$ et $b$ sont des entiers tels que $0 \leqslant a \leqslant 9$ et $0 \leqslant b \leqslant 9$)
4. Déterminer les couples $(c\,;d)$ d'entiers tels que les codes de la forme $\overline{ccdd}$ soient associés à la clé 4. ($c$ et $d$ sont des entiers tels que $0 \leqslant c \leqslant 9$ et $0 \leqslant d \leqslant 9$)

### Éléments de solution

1.

| | $U$ | $S$ | $P$ |
|---|---|---|---|
| | | 0 | 2 282 |
| K=1 | 2 | $0 + 2 \times 2 = 4$ | 228 |
| K=2 | 8 | $4 + 5 \times 8 = 44$ | 22 |
| K=3 | 2 | $44 + 4 \times 2 = 52$ | 2 |
| K=4 | 2 | $52 + 7 \times 2 = 66$ | 0 |

Or $66 = 9 \times 7 + 3$ ; le reste de la division de $S$ par ç est donc $R = 3$ d'où $C = 9 - 3 = 6$.
**La clé est 6**.

2. Appelons $a$ le premier chiffre, le code est alors $a732$.

| | $U$ | $S$ | $P$ |
|---|---|---|---|
| | | 0 | $a732$ |
| K=1 | 2 | $0 + 2 \times 2 = 4$ | $a73$ |
| K=2 | 3 | $4 + 5 \times 3 = 19$ | $a7$ |
| K=3 | 7 | $19 + 4 \times 7 = 47$ | $a$ |
| K=4 | $a$ | $47 + 7 \times a$ | 0 |

La clé est $C = 4$ donc le reste de la division euclidienne de $S$ par 9 est $R = 5$.

| $a$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $47 + 7 \times a$ | 47 | 54 | 61 | 68 | 75 | 82 | 89 | 96 | 103 | 110 |
| Reste dans la division par 9 de $47 + 7 \times a$ | 2 | 0 | 7 | 5 | 3 | 1 | 8 | 6 | 4 | 2 |

La seule valeur de $a$ qui donne un reste égal à 5 est $a = 3$.
**Le code est donc 3732**.

3.

| | $U$ | $S$ | $P$ |
|---|---|---|---|
| | | 0 | $\overline{abba}$ |
| K=1 | $a$ | $0 + 2 \times a = 2a$ | $\overline{abb}$ |
| K=2 | $b$ | $2a + 5 \times b = 2a + 5b$ | $\overline{ab}$ |
| K=3 | $b$ | $2a + 5b + 4 \times b = 2a + 9b$ | $a$ |
| K=4 | $a$ | $2a + 9b + 7 \times a = 9a + 9b$ | 0 |

Or $9a + 9b = 9(a + b)$ où $a$ et $b$ sont des entiers donc $a + b$ aussi. Ainsi $9a + 9b$ est divisible par 9, donc le reste dans la division euclidienne de $9a + 9b$ par 9 est $R = 0$ et la clé est donc $C = 9$.
**Donc toutes les personnes ayant un code de la forme $\overline{abba}$ ont pour clé 9.**

4.

| | $U$ | $S$ | $P$ |
|---|---|---|---|
| | | 0 | $\overline{ccdd}$ |
| K=1 | $d$ | $0 + 2 \times d = 2d$ | $\overline{ccd}$ |
| K=2 | $d$ | $2d + 5 \times d = 7d$ | $\overline{cc}$ |
| K=3 | $c$ | $7d + 4 \times c = 7d + 4c$ | $c$ |
| K=4 | $c$ | $7d + 4c + 7 \times c = 7d + 11c$ | 0 |

La clé est $C = 4$ donc le reste de la division euclidienne de $7d + 11c$ par 9 est $R = 5$.
On cherche tout d'abord les différentes valeurs de $7d + 11c$ puis le reste dans la division par 9. (Voir le tableau page suivante.)

| $d$ \ $c$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 11 | 22 | 33 | 44 | 55 | 66 | 77 | 88 | 99 |
| reste | 0 | 2 | 4 | 6 | 8 | 1 | 3 | **5** | 7 | 0 |
| 1 | 7 | 18 | 29 | 40 | 51 | 62 | 73 | 84 | 95 | 106 |
| reste | 7 | 0 | 2 | 4 | 6 | 8 | 1 | 3 | **5** | 7 |
| 2 | 14 | 25 | 36 | 47 | 58 | 69 | 80 | 91 | 102 | 113 |
| reste | **5** | 7 | 0 | 2 | 4 | **5** | 8 | 1 | 3 | **5** |
| 3 | 21 | 32 | 43 | 54 | 65 | 76 | 87 | 98 | 109 | 120 |
| reste | 3 | **5** | 7 | 0 | 2 | 4 | 6 | 8 | 1 | 3 |
| 4 | 28 | 39 | 50 | 61 | 72 | 83 | 94 | 105 | 116 | 127 |
| reste | 1 | 3 | **5** | 7 | 0 | 2 | 4 | 6 | 8 | 1 |
| 5 | 35 | 46 | 57 | 68 | 79 | 90 | 101 | 112 | 123 | 134 |
| reste | 8 | 1 | 3 | **5** | 7 | 0 | 2 | 4 | 6 | 8 |
| 6 | 42 | 53 | 64 | 75 | 86 | 97 | 108 | 119 | 130 | 141 |
| reste | 6 | 8 | 1 | 3 | **5** | 7 | 0 | 2 | 4 | 6 |
| 7 | 49 | 60 | 71 | 82 | 93 | 104 | 115 | 126 | 137 | 148 |
| reste | 4 | 6 | 8 | 1 | 3 | **5** | 7 | 0 | 2 | 4 |
| 8 | 56 | 67 | 78 | 89 | 100 | 111 | 122 | 133 | 144 | 155 |
| reste | 2 | 4 | 6 | 8 | 1 | 3 | **5** | 7 | 0 | 2 |
| 9 | 63 | 74 | 85 | 96 | 107 | 118 | 129 | 140 | 151 | 162 |
| reste | 0 | 2 | 4 | 6 | 8 | 1 | 3 | **5** | 7 | 0 |

**Les codes : 7700, 8811, 9922, 0022, 1133, 2244, 3355, 4466, 5577, 6688, 7799 ont pour clé 4.**

On peut aussi remarquer que $7d + 11c = 7d + 2c + 9c$. Donc le reste dans la division par 9 de $7d + 11c$ est le même que le reste dans la division par 9 de $7d + 2c$ (les calculs sont alors un peu plus simples).

Retour au sommaire

# CLERMONT-FERRAND

## Deuxième exercice académique

Série S

***L'élection du consul de l'Empereur***

### Énoncé

Sur la planète Xycha, le Grand Conseil se réunit pour élire, en son sein, le consul de l'Empereur : plusieurs prétendants, d'âges deux à deux distincts, sont en présence. Chaque conseiller vote pour un prétendant et un seul : il n'y a ni abstention, ni bulletin blanc.
Un prétendant est élu au premier tour lorsqu'il obtient au moins 50% des voix. En cas d'égalité le plus jeune est élu. Sinon un second tour sera nécessaire.

1. Vrai ou faux : dire pour chaque affirmation si elle est vraie ou fausse. Justifier la réponse.
   a. Si un seul prétendant se présente alors un second tour n'est pas nécessaire.
   b. Si deux prétendants se présentent alors un second tour n'est pas nécessaire.
   c. Si trois prétendants se présentent alors un second tour n'est pas nécessaire.

On suppose désormais que le nombre de prétendants en présence est supérieur ou égal à **trois**.

2. Chaque prétendant en présence au premier tour réunit exactement deux fois moins de voix que celui qui lui est immédiatement supérieur. Un deuxième tour sera-t-il nécessaire ?
3. Chaque prétendant en présence réunit exactement les trois quarts des voix de celui qui lui est immédiatement supérieur. Un deuxième tour sera-t-il nécessaire ?

On pourra utiliser la formule :
Pour tout entier naturel non nul $n$ et tout réel $q \neq 1$, $1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$.

### Éléments de solution

1. a. Vrai : l'unique prétendant obtient 100% des voix.
   b. Vrai : si chacun des deux prétendants obtenait strictement moins de 50% des voix, la somme des deux ne serait pas égale à 100%. Donc l'un des deux a recueilli au moins 50% des voix. En cas d'égalité le plus jeune est élu.
   c. Faux : les trois prétendants peuvent par exemple obtenir 14, 10 et 8 voix dans un conseil de 32 personnes.
2. Soit $n$ le nombre de prétendants et $p$ le nombre de voix obtenues par le meilleur des prétendants. Ainsi le prétendant classé 2$^{\text{nd}}$ a recueilli $\dfrac{p}{2}$ voix, le prétendant classé 3$^{\text{ème}}$ $\dfrac{p}{2^2}$ voix, le $n^{\text{ième}}$ prétendant $\dfrac{p}{2^{n-1}}$ voix. Le nombre total de voix, qui est égal à l'effectif $N$ du conseil, est donc :

$$N = p+\frac{p}{2}+\frac{p}{2^2}+\cdots+\frac{p}{2^{n-1}} = p\times\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\right) = p\times\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}} = p\left(2-\frac{1}{2^{n-1}}\right) < 2p \ (n \geqslant 3)$$

   Le pourcentage de voix obtenues par le meilleur prétendant est $\dfrac{p}{N} > \dfrac{1}{2}$.
   Le meilleur prétendant a obtenu plus de 50% des voix : **il est élu au premier tour.**
3. Soit $n$ le nombre de prétendants et $p$ le nombre de voix obtenues par le meilleur des prétendants. Ainsi le prétendant classé 2$^{\text{nd}}$ a recueilli $\dfrac{3}{4}p$ voix, le prétendant classé 3$^{\text{ème}}$ $\left(\dfrac{3}{4}\right)^2 p$ voix,. . . , le $n^{\text{ième}}$

prétendant $\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} p$ voix.
Le nombre total de voix, qui est égal à l'effectif du conseil est donc :

$$p+\frac{3}{4}p+\left(\frac{3}{4}\right)^{2}p+\cdots+\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}p = p\times\left(1+\frac{3}{4}+\left(\frac{3}{4}\right)^{2}+\cdots+\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}\right) = p\times\frac{1-\left(\frac{3}{4}\right)^{n}}{1-\frac{3}{4}}$$

$$= p\times 4\left(1-\left(\frac{3}{4}\right)^{n}\right)$$

Le pourcentage de voix obtennues par le meilleur prétendant est

$$\frac{p}{p\times 4\left(1-\left(\frac{3}{4}\right)^{n}\right)} = \frac{1}{4\left(1-\left(\frac{3}{4}\right)^{n}\right)}$$

La suite géométrique de terme général $\left(\frac{3}{4}\right)^{n}$est strictement décrooissante car $0<\frac{3}{4}<1$.

Donc pour tout $n\geqslant 3$, $\left(\frac{3}{4}\right)^{n}\leqslant\frac{27}{64}$ d'où $4\left(1-\left(\frac{3}{4}\right)^{n}\right)\geqslant\frac{37}{16}$ d'où $\frac{1}{4\left(1-\left(\frac{3}{4}\right)^{n}\right)}\leqslant\frac{16}{37}<\frac{1}{2}$.

Le meilleur prétendant n'a pas obtenu 50% des voix : **un second tour est nécessaire.**

***Autre preuve élégante d'un candidat*** :
Supposons que le meilleur prétendant obtienne au moins 50% des voix et que le nombre des prétendants soit supérieur à 3, alors le pourcentage total des voix dépasserait
$50+\frac{3}{4}\times 50+\left(\frac{3}{4}\right)2\times 50=\frac{925}{8}>100$, ce qui est absurde.

Retour au sommaire

# CLERMONT-FERRAND

## Troisième exercice académique

Séries autres que S

***Tous divisibles par 222... ou plus***

### Énoncé

1. En utilisant une seule fois chacun des trois chiffres 1, 2 et 3, écrire tous les nombres entiers naturels possibles de trois chiffres : 123 ; 132 ;... etc.
   - Faire la somme S de tous les nombres obtenus.
   - Vérifier que cette somme S est un multiple de 222.
2. Reprendre la question avec trois chiffres non nuls et distincts deux à deux de votre choix.
3. La propriété découverte à la question 1) reste-t-elle vraie quels que soient les trois chiffres non nuls distincts deux à deux choisis ? Justifier votre réponse.
4. On considère maintenant quatre chiffres non nuls et distincts deux à deux.
   Énoncer et démontrer une propriété analogue.

### Éléments de solution

1. On peut écrire 6 nombres à l'aide des chiffres 1, 2 et 3 :
   123-132-213-231-312 et 321. La somme $S$ obtenue est égale à 1332. Or $1332 = 6 \times 222$ (6 représentant $1 + 2 + 3$).
2. En recommençant avec les chiffres 4, 7 et 9 par exemple, on a :
   $S = 479 + 497 + 749 + 794 + 974 + 947$
   $S = 4\ 440 = 20 \times 222$ (20 représentant $4 + 7 + 9$). La propriété est encore vérifiée.
3. Justification :
   On considère $a, b$ et $c$ trois chiffres non nuls et distincts deux à deux.
   La somme $S$ obtenue à l'aide des six nombres que l'on peut former est
   $S = 200a + 200b + 200c + 20a + 20b + 20c + 2a + 2b + 2c$
   Donc $S = 2(a + b + c)(100 + 10 + 1)$.
   Par suite $\boxed{S = 222 \times (a + b + c)}$ **et $S$ est toujours divisible par 222.**
4. On considère maintenant $a, b, c$ et $d$ quatre chiffres non nuls et distincts deux à deux.
   On peut écrire 24 nombres à l'aide de ces 4 chiffres distincts.
   La somme $S$ obtenue à l'aide des 24 nombres sera égale à :
   $S = 6(a + b + c + d)(1000 + 100 + 10 + 1)$.
   D'où $\boxed{S = 6\ 666 \times (a + b + c + d)}$

   **La somme S des nombres que l'on peut former avec quatre chiffres non nuls et distincts deux à deux est toujours un multiple de** 6 666**. S est le produit de 6666 par la somme des quatre chiffres utilisés.**

Retour au sommaire

# CORSE

## Premier exercice académique

Toutes séries

***Les carré « Hénatéleutes » (du grec hen=1 et téleute = la fin)***

### Énoncé

Dans cet exercice on s'intéresse, parmi les carrés de nombres entiers, à ceux dont le chiffre des unités dans l'écriture décimale est 1 : 1, 81, 121, ... 841. ... On note $E$ la liste ordonnée en ordre croissant de tous ces carrés.

1. Quel est le nombre suivant 841 dans la liste $E$ ?
2. Démontrer que la différence de deux nombres quelconques de $E$ est un multiple de 40.
3. Quel est le $2011^{\text{ème}}$ nombre de la liste $E$ ?
4. Existe-t-il des nombres de $E$ se terminant par 11, c'est-à-dire dont les chiffres des dizaines et des unités sont égaux à 1 ?

### Éléments de solution

1. $841 = 29^2$, le nombre suivant sera donc $31^2$ soit 961.
2. Les nombres dont le carré a 1 pour chiffre des unités ont eux mêmes 1 ou bien 9 pour chiffre des unités ; ce sont donc les nombres entiers de la forme $(10n + 1)^2$ ou de la forme $(10n + 9)^2$, où $n$ désigne un entier naturel.
   Considérons la différence de deux carrés de ce type consécutifs.
   - S'ils sont dans la même dizaine :
     $$(10n+9)^2 - (10n+1)^2 = (10n+9+10n+1)(10n+9-10n-1) = 8(20n+10) = 80(2n+1)$$
   - S'ils ne sont pas dans la même dizaine :
     $$(10n+11)^2 - (10n+9)^2 = (10n+11+10n+9)(10n+11-10n-9) = 2(20n+20) = 40(n+1)$$

   Ainsi la différence de deux éléments de $E$ est une somme de multiples de 40 donc elle-même un multiple de 40.
3. Il y a 2 nombres dont le carré se termine par 1 dans une dizaine de 10n à $10n + 9$.
   $2010 = 2 \times 1005$. Donc dans les 1005 premières dizaines il y a 2010 nombres dont le carré se termine par 1.
   Le $2010^{\text{ème}}$ est $10 \times 1004 + 9 = 10049$. Le $2011^{\text{ème}}$ est 10051.
   Le $2011^{\text{ème}}$ élément de $E$ est donc $10051^2$.
4. Nous cherchons les carrés se terminant par 11. Ils sont de la forme $100N + 11$ où $N$ est un entier naturel. Supposons qu'il existe des entiers $n$ et $N$ tels que
   $(10n + 1)^2 = 100N + 11 ou (10n + 9)^2 = 100N + 11$,
   $(10n + 1)^2 = 100N + 11 \Leftrightarrow 100n^2 + 20n + 1 = 100N + 11 \Leftrightarrow 10n^2 + 2n - 100N = 1$,
   $(10n + 9)^2 = 100N + 11 \Leftrightarrow 100n^2 + 180n + 81 = 100N + 11 \Leftrightarrow 10n^2 + 18n - 10N = 1$.

   On aboutit à une absurdité, 1 n'étant pas pair.
   Il n'existe donc pas d'entiers de $E$ se terminant par 11.

Retour au sommaire

# CORSE

## Deuxième exercice académique

Toutes séries

***Chasse au trésor***

### Énoncé

Sur un terrain, symbolisé par quadrillage se trouve caché un trésor. Un chasseur de trésor fouille le terrain pour découvrir un trésor de pièces métalliques, enterré dans une des case (marquée d'un x sur l'exemple) à l'aide d'un détecteur à métaux.

Soit le détecteur est placé sur la bonne case et indique la présence du trésor dans celle-ci, soit s'il est placé sur une case où le trésor ne se trouve pas, il indique par des signaux sonores différents trois types de renseignements (voir figure 1)

- Il indique la présence du trésor dans une « zone $\alpha$ » si celui-ci se trouve sur une des huit cases directement adjacentes.
- ou bien il indique la présence du trésor dans la « zone $\beta$ » si celui-ci se trouve deux cases plus loin (voir l'exemple).
- ou bien il n'indique rien si le trésor est encore plus loin, et nous dirons alors qu'il est dans la « zone $\gamma$ ».

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| β | β | β | β | β | | |
| β | α | α | α | β | | |
| β | α | **X** | α | β | | |
| β | α | α | α | β | | |
| β | β | β | β | β | | |

Figure 1

*Exemple sur un terrain de* $7 \times 7$ *cases où X désigne la position du trésor.*

Ainsi, lorsqu'il est au-dessus d'une case, le détecteur a quatre états possibles.

On cherche une stratégie permettant au chasseur de déterrer à coup sûr le trésor en un nombre de tentatives minimum.

1. On commence par un terrain de dimension $5 \times 5$ et on repere les cases où les lettres indiquent les colonnes et les nombres indiquent les lignes (figure 2).

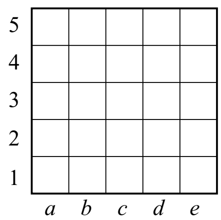



Figure 2

   a. Reproduire et compléter le tableau suivant (figure 3) dans lequel on note, pour chaque case du terrain indiquée sur la première colonne du tableau, le nombre de cases se trouvant respectivement dans les zones $\alpha, \beta, \gamma$. Par exemple, la zone $\alpha$ de la case $a1$ est constituée des cases $a2$, $b1$ et $b2$ qui sont donc au nombre de trois.

| | $\alpha$ | $\beta$ | $\gamma$ |
|---|---|---|---|
| $a1$ | 3 | 5 | 16 |
| $b1$ | | | |
| $c1$ | | | |
| $b2$ | | | |
| $c2$ | | | |
| $c3$ | | | |

Figure 3

b. On entoure, sur chaque ligne, le plus grand des trois entiers. On appelle *choix raisonnable* le choix d'une case du terrain $5 \times 5$ pour laquelle l'entier entouré est le plus petit possible. Quel est l'unique choix raisonnable du tableau précédent ?

c. Expliquer pourquoi il est alors possible de déterminer, sans tableau supplémentaire, toutes les cases du terrain $5 \times 5$ qui sont des choix raisonnables et colorier sur le quadrillage $5 \times 5$ les choix raisonnables.

2. On décide, à la première tentative, de fouiller la case $b2$ et on suppose que le détecteur indique la présence du trésor dans la zone $\alpha$.

   a. Compléter le tableau suivant (figure 4) construit sur le même modèle que le précédent mais dans lequel on ne compte plus que les cases, dans chaque zone, susceptibles de contenir le trésor.

| | $\alpha$ | $\beta$ | $\gamma$ |
|---|---|---|---|
| $c2$ | 4 | 3 | 0 |
| $c3$ | | | |
| $d2$ | | | |
| $d3$ | | | |
| $d4$ | | | |

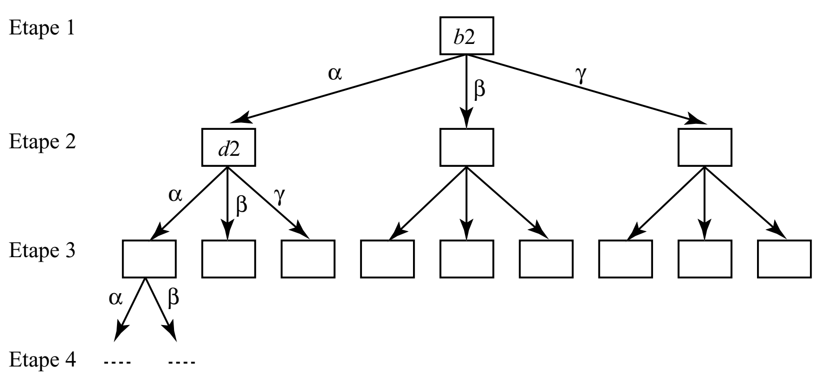
Figure 4

   b. Indiquer dans ce cas un choix raisonnable pour la deuxième étape.
   Y a-t-il un seul choix raisonnable ?

   c. Poursuivre l'étude de ce cas et montrer ainsi que le trésor seera découvert en quatre tentatives maximum, quel que soit son emplacement.

3. A la première tentative, on fouille la case $b2$ et on suppose désormais que le trésor se trouve dansla zone $\gamma$. Mener une étude similaire (on pourra construire un tableau contenant les cases $c5, d5, e5, b4, c4$ et $d4$) et en conclure à nouveau que la stratégie du choix raisonnable permet de découvrir le trésor en quatre tentatives seulement.

4. Terminer l'étude de la case $b2$ comme premier choix. On pourra présenter la stratégie complète dans un arbre à quatre lignes :




5. Est-il possible de déterrer le trésor à coup sûr en quatre tentatives si on commence par fouiller la case $c2$ ?

6. On considère désormais un terrain de taille $n \times n$, et on note $t_n$ le nombre de tentatives nécessaires pour déterrer à coup sûr le trésor sur ce terrain (par exemple $T_5 = 4$).

   a. Montrer que $161765 \leqslant T_{2011} \leqslant 162410$

b. ***Question pour les premières S uniquement***
A l'aide d'inégalités, montrer que la suite $\dfrac{T_n}{n^2}$ tend vers $\dfrac{1}{25}$ lorsque $n$ tend vers l'infini.

## Éléments de solution

1. a et b.

| | $\alpha$ | $\beta$ | $\gamma$ |
|---|---|---|---|
| $a1$ | 3 | 5 | $\boxed{16}$ |
| $b1$ | 5 | 6 | $\boxed{13}$ |
| $c1$ | 5 | 9 | $\boxed{10}$ |
| $b2$ | 8 | 7 | $\boxed{9}$ |
| $c2$ | 8 | $\boxed{11}$ | 5 |
| $c3$ | 8 | $\boxed{16}$ | 0 |

Le choix raisonnable est celui de la case $b2$, avec un « minimax » égal à 9.

c. Le travail exéctué vaut pour les 25 cases du terrain, en raison des deux symétries indépendantes : par rapport à la colonne $c$ et par rapport à l'une des diagonales, par exemple la diagonale $a1 \rightarrow e5$. Toutes les cases du terrain se déduisent d'une des six cases du tableau par application d'une ou plusieurs de ces symétries.

2. a.

| | $\alpha$ | $\beta$ | $\gamma$ |
|---|---|---|---|
| $c2$ | 4 | 3 | 0 |
| $c3$ | 2 | 5 | 0 |
| $d2$ | 3 | 2 | 3 |
| $d3$ | 2 | 3 | 3 |
| $d4$ | 1 | 2 | 5 |

Ici, les cases $d2$ et $d3$ sont toutes les deux des choix raisonnables avec un minimax valant 3. Puisque la somme des chiffres sur une ligne vaut au moins 7, aucune case du terrain ne peut avoir un minimax inférieur ou égal à deux (sans quoi cette somme vaudrait au plus 6) et donc ces deux cases sont nécessairement des choix raisonnables pour la deuxième étape (même si le tableau est incomplet).

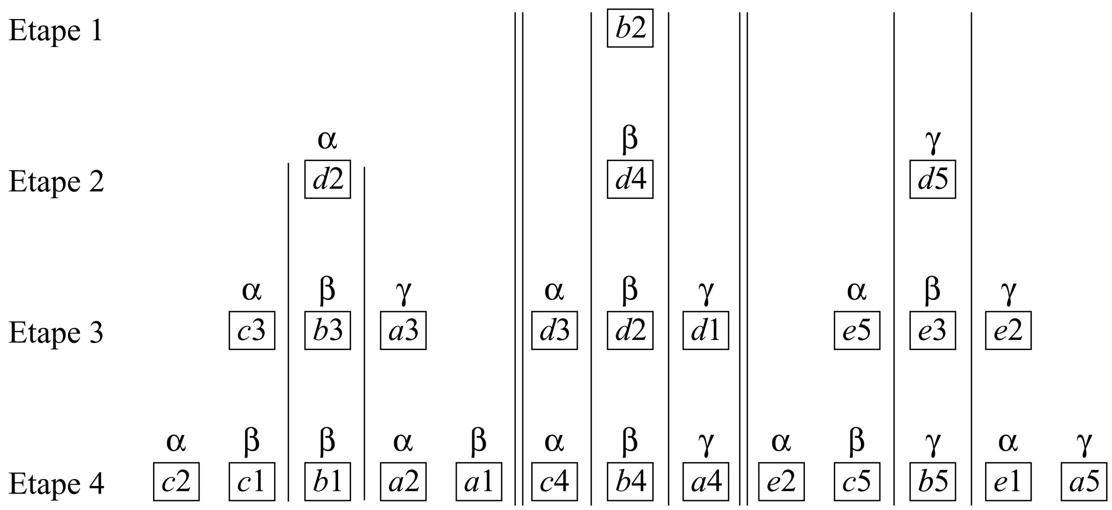
b. Voir l'arbre de la question 4.

3.

| | $\alpha$ | $\beta$ | $\gamma$ |
|---|---|---|---|
| $c5$ | 2 | 4 | 2 |
| $d5$ | 3 | 2 | 3 |
| $e5$ | 2 | 2 | 4 |
| $b4$ | 3 | 1 | 5 |
| $c4$ | 3 | 5 | 1 |
| $d4$ | 5 | 2 | 2 |

La case $d5$ est un choix raisonnable et il est inutile de tester les autres cases pour l'affirmer, ne pouvant être égal à 2 car la zone testée comporte 9 cases. Voir l'arbre suivant pour la fin de l'étude de ce cas.(page suivante)

4.




5. La réponse est oui. La zone $\alpha$ est analogue au cas précédent, la zone $\gamma$ comportant 5 cases est triviale, et la difficulté se situe dans la zone $\beta$ comportant 11 cases. Mais la deuxième tentative effectuée en $d2$ (ou $b2$) permet de scinder cette zone en 3 zones de respectivement 3, 4 et 4 cases alignées, ce qui permet de déterrer le trésor en au plus deux tentatives supplémentaires.

6. ► Nous dirons que le trésor est *localisé* s'il est déterré ou s'il est situé dans la zone $\alpha$ ou dans la zone $\beta$ d'une case fouillée. Un trésor déterré est un trésor localisé, mais chaque tentative permet de localiser le trésor sur au plus 25 des $2011^2$ cases, donc il faut au moins $\dfrac{2011^2}{25}$ tentatives pour réussir à coup sûr. Comme $\dfrac{2011^2}{25} = 161764.84$, c'est que $T_{2011} \geqslant 161765$.

► Exhibons une stratégie permettant de déterrer le trésor en 162410 tentatives au plus, ce qui montrera que $T_{2011} \leqslant 162410$.

On a $2011 = 5 \times 402 + 1$ donc on peut découper le terrain en :

$$\begin{cases} 402^2 \text{ carrés de taille } 5 \times 5 \\ 2 \times 402 \text{ rectangles de taille } 5 \times 1 \text{ ou } 1 \times 5 \\ 1 \text{ case restante.} \end{cases}$$

▹ On commence par tester successivement chacun des $402^2$ carrés de taille $5 \times 5$ en fouillant en leur centre. Si le trésor est localisé sur un des carrés, il reste alors au plus 4 tentatives pour le déterrer, comme le montre les questions précédentes (et sans même tenir compte de l'information obtenue en le localisant). Au plus il faut $402^2 + 4$ tentatives dans ce cas.

▹ Si ceci a échoué, on teste successivement les $2 \times 402$ rectangles en fouillant en leur centre, et si le trésor est localisé on peut alors le déterrer en 2 tentatives supplémentaires. Au total il aura fallu au maximum $402^2 + 2 \times 402 + 2$ tentatives.

▹ Si tout ceci a échoué, le trésor est sur la dernière case et une tentative suffit, pour un total de $402^2 + 2 \times 402 + 1$ tentatives.

Le nombre maximum de tentatives nécessaires avec cette stratégie est $402^2 + 2 \times 402 + 2 = 162410$.

7. Soit $n$ un entier naturel non nul.

Le même raisonnement qu'au début de la question précédente montre qu'on a $T_n \geqslant \dfrac{n^2}{25}$ et donc $\dfrac{1}{25} \leqslant \dfrac{T_n}{n^5}$.

Notons $p$ l'unique entier naturel vérifiant $5p \leqslant n \leqslant 5p+4$ (c'est-à-dire le plus grand entier inférieur ou égal à $\frac{n}{5}$). On a alors $n^2 \leqslant (5p+4)^2 = 25p^2 + 40p + 16$ et on peut découper le terrain en $p^2$ carrés de taille $5 \times 5$ et un nombre de cases restantes valant au plus $40p + 16$. On imite alors la stratégie de la question précédente : on teste successivement les $p^2$ carrés en leur centre, et si cela échoue, on teste les cases restantes l'une après l'autre, soit au maximum $p^2 + 40p + 16$ tentatives.

Cela montre que $T_n \leqslant p^2+40p+16$ mais comme $p \leqslant \dfrac{n}{5}$ on obtient : $T_n \leqslant \dfrac{n^2}{25}+8n+16$. Finalement on a l'encadrement :

$$\frac{1}{25} \leqslant \frac{T_n}{n^2} \leqslant \frac{1}{25}+\frac{8}{n}+\frac{16}{n^2}$$

et donc $\dfrac{T_n}{n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{1}{25}$ par le théorème des gendarmes.

Retour au sommaire

# CRÉTEIL

## Premier exercice académique

Toutes séries

***Les trois dés***

### Énoncé

On lance trois fois de suite un dé non truqué dont les six faces sont numérotées 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 et 6. Une issue de cette expérience aléatoire est donc un triplet $(a, b, c)$ où $a$ est le résultat obtenu au premier lancer, $b$ le résultat obtenu au second lancer et $c$ le résultat obtenu au troisième lancer.

1. Déterminer le nombre d'issues possibles pour cette expérience aléatoire.
2. Si le résultat des trois lancers est le triplet $(a, b, c)$, on considère l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ , d'inconnue $x$.
   Par exemple, si le résultat des trois lancers est (3, 5, 3), on considère l'équation $3x^2 + 5x + 3 = 0$.
   a) 0 peut-il être une solution d'une équation $ax^2 + bx + c = 0$ ?
   b) Justifier que quelque soit le triplet $(a, b, c)$, l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ n'admet aucun nombre réel positif ou nul pour solution.
   c) Existe-t-il un triplet $(a, b, c)$ pour lequel le nombre $-1$ soit une solution de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ ? Si oui donner un tel triplet $(a, b, c)$
   Quelle est la probabilité de l'événement « - 1 est solution de l'équation obtenue après le lancer des trois dés » ?
3. On souhaite construire maintenant avec le triplet $(a, b, c)$ obtenu le triangle (éventuellement aplati) dont les trois côtés ont pour mesures respectives $a$ ,$b$ et $c$.(le triplet $(b, c, a)$ donne un autre triangle.)
   a) Parmi les résultats suivants, indiquer dans chaque cas si une telle construction est possible :
      1) $(3, 5, 3)$
      2) $(2, 5, 2)$
      3) $(4, 2, 6)$
      4) $(6, 3, 5)$
      5) $(6, 1, 4)$

   On admet qu'il y a 156 triplets $(a, b, c)$ permettant de réaliser la construction d'un triangle, et on suppose par la suite cette condition réalisée.
   b) Quelle est la probabilité que le triangle construit soit équilatéral ?
   c) Quelle est la probabilité que le triangle construit soit rectangle ?
   d) Pierre pense qu'il est plus probable que le triangle obtenu soit isocèle plutôt que non isocèle. A-t-il raison ?

### Éléments de solution

1. Le nombre de triplets, donc d'issues possibles est $6^3 = 216$.
2. a. Non, car, si 0 était solution, on aurait $c = 0$, or $c \geqslant 1$.
   b. $x$, $x^2$, $a$, $b$ et $c$ étant strictement positifs, il en est de même pour $ax^2 + bx + c$.
   c. $-1$ est solution si et seulement si : $a - b + c = 0$, ou $b = a + c$.
   Formons les 15 triplets tels que $b = a + c$ :

$a = 1$, $c = 1, 2, 3, 3, 4$ ou 5, $b = 1 + c$ d'où les triplets : (1,2,1) (1,3,2,) (1,4,3) (1,5,4) (1,6,5)
$a = 2$, $c$=1, 2, 3 ou 4 $b = 2 + c$ d'où les triplets : (2,3,1) (2,4,2,) (2,5,3) (2,6,4)
$a = 3$, $c$=1, 2,ou 3 $b = 3 + c$ d'où les triplets : (3,4,1) (3,5,2,) (3,6,3)
$a = 4$, $c$=1 ou 2, $b = 4 + c$ d'où les triplets : (4,5,1) (4,6,2,)
$a = 5$, $c = 1$, $b = 6$ d'où le triplet : (5,6,1)

3. a. $a$, $b$, $c$, doivent vérifier les inégalités . : $a \leqslant b + c$, $b \leqslant c + a$, $c \leqslant a + b$ , où l'égalité correspond à un triangle aplati . Seuls les cas 2)et 5) ne les vérifient pas toutes.

   b. Il y a 6 triangles équilatéraux : (1,1,1), (2,2,2), (3,3,3)(4,4,4) (5,5,5) et (6,6,6) La probabilité d'obtenir un tel triangle, sachant que la construction d'un triangle est possible, est donc $\dfrac{6}{256} = \dfrac{1}{26}$.

   c. Si le triangle ($a$ ,$b$, $c$) est rectangle et si $a \leqslant b \leqslant c$, on a $c^2 = a^2 + b^2$ qui admet la solution $a = 3$, $b = 4$, $c = 5$.

   En construisant le tableau ci-dessous qui donne pour chaque couple $(a, b)$ tel que $1 \leqslant a \leqslant b \leqslant 6$ la valeur de $a^2 + b^2$, et en y cherchant les carrés parfaits inférieurs à 37, on voit que c'est la seule solution.

| ***a*** \ ***b*** | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | | | | |
| 2 | 5 | 8 | | | |
| 3 | 10 | 13 | 18 | | |
| 4 | 17 | 20 | 25 | 32 | |
| 5 | 26 | 29 | 34 | | |
| 6 | 37 | | | | |

   En permutant les lettres $a$, $b$, $c$ on obtient donc six triangles rectangles : (3,4,5) (3,5,4) (4,3,5) (4,5,3) (5,3,4) et (5,4,3) et la probabilité $\dfrac{6}{156} = \dfrac{1}{26}$.

   d. Outre les six triangles équilatéraux, les triangles isocèles possibles, sont :
   (1,1,2)
   (2,2,1), (2,2,3), (2,2,4)
   (3,3,1), (3,3,2), (3,3,4), (3,3,5), (3,3,6)
   (4,4,1), (4,4,2), (4,4,3), (4,4,5), (4,4,6)
   (5,5,1), (5,5,2), (5,5,3), (5,5,4), (5,5,6)
   (6,6,1), (6,6,2), (6,6,3), (6,6,4), (6,6,5)

   et pour chacun d'eux les deux qui s'en déduisent par permutation, tels (1,2,1) et (2,1,1)
   donc en tout : $3(1+3+5+5+5+5)+6 = 78$ ; il y a donc $156 - 78 = 78$ triangles non isocèles.

Retour au sommaire

# CRÉTEIL

## Deuxième exercice académique

Série S

***Racines millésimées***

### Énoncé

On appelle partie entière d'un réel $x$ , notée $E(x)$ , le plus grand entier inférieur ou égal à $x$ , c'est-à-dire que l'on a : pour tout réel $x$, $E(x) \leqslant x < E(x)+1$.
Par exemple : $E(2,4) = 2$ ; $E(-2,4) = -3$ ; $E\left(\sqrt{2}\right) = 1$ ; $E(5) = 5$ et $E(-\pi) = -4$.

Soit $f$ la fonction définie pour tout réel $x$ par : $f(x) = x^2 - 46E(x) + 13$.

**L'objet de cet exercice est la résolution de l'équation $f(x) = 0$ notée (1).**

1. Déterminer la partie entière de $\sqrt{2057}$, puis vérifier que ce réel est solution de l'équation $f(x) = 0$.
2. a. Montrer que le réel 1 n'est pas solution de l'équation $f(x) = 0$.
   b. Montrer que si $x < 1$ (dans ce cas $E(x) \leqslant 0$), l'équation $f(x) = 0$ n'admet pas de solution.
   On note $p$ le trinôme défini pour tout réel $x$ par $p(x) = x^2 + 46x + 13$.
3. a. En utilisant l'inégalité $E(x) \leqslant x$, montrer que pour tout réel $x$, $p(x) \leqslant f(x)$.
   b. En déduire que si $x$ est un réel vérifiant $p(x) > 0$, alors le réel $x$ n'est pas solution de l'équation $f(x) = 0$.
4. Pour tout réel $x$, donner sous forme de tableau le signe de $p(x)$.
   En déduire que toute solution de $f(x) = 0$ est strictement inférieure à 46.
5. a. Déduire de l'inégalité $x - 1 < E(x)$ que, pour tout réel $x$, $f(x) < p(x) + 46$.
   b. Montrer alors que toute solution de l'équation $f(x) = 0$ est strictement supérieure à 44.
6. a. Quelles sont les valeurs possibles pour la partie entière des soutions de l'équation $f(x) = 0$ ?
   b. En déduire que l'équation $f(x) = 0$ admet deux soutions, $\sqrt{2057}$ et une autre $\alpha$ dont on précisera la valeur exacte.

### Éléments de solution

1. $E(\sqrt{2057}) = 45$ et $2\,057 - 46 \times 45 + 13 = 0$, donc $\sqrt{2057}$ est solution de l'équation $f(x) = 0$.
2. a. $f(x) = 1 - 46 \times E(1) + 13 = -32$ ; $f(1) \neq 0$ donc 1 n'est pas solution.
   b. Si $x < 1$ alors $-46 \times E(x) \geqslant 0$ et $f(x) \geqslant 13 > 0$ donc $f(x) \neq 0$ et $x$ n'est pas solution.
3. a. Puisque $E(x) \leqslant x$ alors $-46x \leqslant -476 \times E(x)$ et $p(x) \leqslant f(x)$.
   b. D'après ce qui précède, si $0 < p(x)$ alors $0 < p(x) \leqslant f(x)$ et $f(x) \neq 0$. donc l'équation n'a pas de solution si $0 < p(x)$.
4. a. $p(x) = (x-23)^2 - 516$, ses racines sont $x_1 = 23 - \sqrt{516}$ et $x_2 = 23 + \sqrt{516}$.

| $x$ | $-\infty$ | | $x_1$ | | $x_2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $p(x)$ | | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ | |

   b. D'après le résultat de la question 3.b., pour que $x$ soit solution, il faut que $x$ appartienne à l'intervalle $[x_1 \ ; \ x_2]$. Comme $45 < x_2 < 46$, $x < x_2 < 46$.
5. a. On a $x - 1 < E(x)$, $-46E(x) < -46(x-1)$ soit $46E(x) < -46x + 46$ et $f(x) < p(x) + 46$.

b. On étudie cette fois le signe de $p(x) + 46 = \left(x - \left(23 - \sqrt{470}\right)\right)\left(x - \left(23 + \sqrt{470}\right)\right)$ sur l'intervalle $[x_1\ ;\ x_2]$. On a $x_1 < 23 - \sqrt{470} < 23 + \sqrt{470} < x_2$.

Ainsi $23 - \sqrt{470} < x < 23 + \sqrt{470}$, alors $p(x) + 46 < 0$ et $f(x) < 0$ ; $x$ ne peut alors être solution. Il reste deux possibilités pour lesquelles $p(x) + 46 > 0$ :

- $x_1 < x \leqslant 23 - \sqrt{470} < 2$ ; d'après 2.b., cette condition se réduit à $1 \leqslant x \leqslant 223 - \sqrt{470} < 2$ et, d'après 2.a., $x \neq 1$, d'où $1 < x \leqslant 23 - \sqrt{470} < 2$.
  $E(x)$ vaut alors 1 et $f(x) = x^2 - 46 + 13 = x^2 - 33$ soit $f(x) < 2^2 - 33 < 0$ et $x$ n'est pas solution.
- $44 < 23 + \sqrt{470} \leqslant x < x_2$, ce qui montre que si $x$ est solution, $44 < x$.

6. Si $x$ est solution : $x \in ]44\ ;\ 46[$ ; ainsi $E(x) \in \{44\ ;\ 46\}$.
7. $E(x) = 45$ donne $x^2 = 46 \times 45 - 13 = 2057$ et on vérifie que $\sqrt{2057}$ est bien solution.
   $E(x) = 44$ donne $x^2 = 46 \times 45 - 13 = 2011$ et on vérifie que $\alpha = \sqrt{2011}$ est aussi solution.

Retour au sommaire

# CRÉTEIL

## Troisième exercice académique

Séries autres que S

***Partages quasi-équitables***

### Énoncé

Adrien veut partager ses billes entre plusieurs de ses amis (au moins deux), lui n'en gardant aucune. Il considère qu'un partage est quasi équitable si les nombres de billes reçus par deux amis quelconques ne diffèrent jamais de plus d'une unité. On appellera de tels partages des **partages quasi équitables**.
Ainsi, s'il a sept billes et les partage entre deux de ses amis, le partage quasi équitable se fera obligatoirement en $3+4$. S'il les partage entre trois amis, le partage quasi équitable se fera en $2+2+3$.
On considère comme identiques les partages $3+2+2$ ; $2+3+2$ et $2+2+3$ et on écrira désormais chaque partage sous la forme d'une somme dont les termes sont rangés en ordre croissant.

1. Ecrivez les **partages quasi équitables** possibles des sept billes entre quatre amis, cinq amis, six amis, sept amis.
2. Combien existe-t-il de **partages quasi équitables** possibles s'il veut donner 8 billes, 9 billes, 10 billes ?
3. Combien existe-t-il de **partages quasi équitables** possibles pour 2011 billes ? Justifier votre réponse par une démonstration précise.

### Éléments de solution

1. entre quatre amis : $1+2+2+2$ ;
   entre cinq amis : $1+1+1+2+2$ ;
   entre six amis : $1+1+1+1+1+2$ ;
   entre sept amis : $1+1+1+1+1+1+1$.
2. Partages quasi-équitables de 8 billes :
   $4+4$
   $2+3+3$
   $2+2+2+2$;
   $1+1+2+2+2$ ;
   $1+1+1+1+2+2$ ;
   $1+1+1+1+1+1+2$ ;
   $1+1+1+1+1+1+1+1$.
   Partages quasi-équitables de 9 billes :
   $4+5$ ;
   $3+3+3$ ;
   $2+2+2+3$ ;
   $1+2+2+2+2$ ;
   $1+1+1+2+2+2$ ;
   $1+1+1+1+1+2+2$ ;
   $1+1+1+1+1+1+1+2$ ;
   $1+1+1+1+1+1+1+1+1$.
   Partages quasi-équitables de 10 billes :
   $5+5$ ;
   $3+3+4$ ;
   $2+2+3+3$ ;
   $2+2+2+2+2$ ;

$1+1+2+2+2+2$ ;
$1+1+1+1+2+2+2$ ;
$1+1+1+1+1+1+2+2$ ;
$1+1+1+1+1+1+1+1+2$ ;
$1+1+1+1+1+1+1+1+1+1$.

3. Pour déterminer un partage quasi-équitable de 2011 billes entre $d$ amis ($d < 2011$), on effectue la division euclidienne de 2011 par $d$. On obtient un quotient égal à $q$ et un reste égal à $r$ : $2011 = dq+r$, où $r < d$. On attribue $q$ billes à chacun des $d$ amis, puis on répartit les $r$ restantes à $r$ amis choisis parmi les $d$, à raison d'une bille par ami.
   A chaque division euclidienne correspond un partage quasi-équitable. Le diviseur pouvant prendre toutes les valeurs de 2 à 2011, on en conclut qu'il existe 2010 partages quasi-équitables de 2011 billes.

Retour au sommaire

# DIJON

## Premier exercice académique

Toutes séries

***Les nombres complices***

### Énoncé

On dit que deux entiers naturels $a$ et $b$ sont *complices* s'il existe un entier naturel $n$ tel que $ab + 1 = n^2$. Dans ce cas, on dit que $n$ est *associé* au couple de complices $(a, b)$.

1. ***Complices d'un entier***
   a. Déterminer tous les couples d'entiers complices compris, au sens large, entre 0 et 10.
   b. L'entier 2011 admet 2009 comme complice. Citer deux autres complices de 2011.
   c. Démontrer que tout entier naturel supérieur ou égal à 3 admet au moins trois complices.
2. ***Couples de complices associés à un entier donné.***
   L'entier 100 adment plusieurs couples d'entiers complices qui lui sont associés.
   Ainsi les couples (9, 111) et (11, 909) sont des couples d'entiers complices associés au nombre 100.
   a. Démontrer que tout entier naturel $n$ non nul admet au moins un couple de complices $(a, b)$ associés, c'est-à-dire que $ab + 1 = n^2$.
   b. Déterminer tous les couples d'entiers complices associés au nombre 2011.

### Éléments de solution

1. a.

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | oui | oui | oui | oui | oui | oui | oui | oui | oui | oui | oui |
| 1 | oui | | | oui | | | | | oui | | |
| 2 | oui | | | | oui | | | | | | |
| 3 | oui | oui | | | | oui | | | oui | | |
| 4 | oui | | oui | | | | oui | | | | |
| 5 | oui | | | oui | | | | oui | | | |
| 6 | oui | | | | oui | | | | oui | | |
| 7 | oui | | | | | oui | | | | oui | |
| 8 | oui | oui | | oui | | | oui | | | | oui |
| 9 | oui | | | | | | | oui | | | |
| 10 | oui | | | | | | | | oui | | |

Ce tableau permet de conjecturer que 0 est complice de tout entier et que tout entier $a$ admet $a + 2$ et $a - 2$ comme complices.

   b. 0 est complice de 2011 et plus généralement de tout entier $a$ car $0 \times a + 1 = 1^2$.
   . L'entier 2013 est complice de 2011 car $2013 \times 2011 + 1 = 4048144 = 2012^2$.
   c. Soit $a$ un entier supérieur ou égal à 3.
   Outre 0, les nombres $a - 2$ et $a + 2$ sont complices de $a$ car $a(a - 2) + 1 = (a - 1)^2$ et $a(a + 2) + 1 = (a + 1)^2$.
2. a. Soit $n$ un entier non nul donné. Alors $(n - 1)(n + 1) + 1 = n^2$. Cela montre que $n$ est associé au couple de complices $(n - 1,\ n + 1)$. Ce couple n'est pas unique, tout couple de diviseurs de $n^2 - 1$ convient, comme par exemple $(1,\ n^2 - 1)$.

b. Il suffit de déterminer les diviseurs de $2011^2 - 1 = 4044120 = 2^3 \times 3 \times 5 \times 67 \times 503$. Il y a 32 paires de diviseurs, donc 64 couples. Les paires sont :
$\{1, 4044120\}$, $\{2, 2022060\}$, $\{3, 1348040\}$, $\{4, 1011030\}$, $\{5, 808824\}$, $\{6, 674020\}$, $\{8, 505515\}$, $\{10, 404412\}$, $\{12, 337010\}$, $\{15, 269608\}$, $\{20, 202206\}$, $\{24, 168505\}$, $\{30, 134804\}$, $\{40, 101103\}$, $\{60, 67402\}$, $\{67, 60360\}$, $\{120, 33701\}$, $\{134, 30180\}$, $\{201, 20120\}$, $\{268, 15090\}$, $\{335, 12072\}$, $\{402, 10060\}$, $\{503, 8040\}$, $\{536, 7545\}$, $\{670, 6036\}$, $\{804, 5030\}$, $\{1005, 4024\}$, $\{1006, 4020\}$, $\{1340, 3018\}$, $\{1509, 2680\}$, $\{1608, 2515\}$, $\{2010, 2012\}$.

Retour au sommaire

# DIJON

## Deuxième exercice académique

Série S

***Polygones entiers***

### Énoncé

Dans le plan rapporté à un repère orthonormal, d'unité 1cm, on dit qu'un point est *entier* si ses coordonnées sont des nombres entiers ; on dit qu'un polygone est *entier* si ce polygone est convexe (c'est-à-dire « sans creux ») et si tous ses sommets sont des points entiers.

Pour un polygone entier $(P)$, on cote $A$ l'aire en $\text{cm}^2$ de ce polygone, $C$ le nombre de points entiers situés sur les côtés du polygone (sommets compris) et $I$ le nombre de points entiers situés strictement à l'intérieur du polygone.

Le but de cet exercice est de déterminer une relation entre les nombres $A$, $C$ et $I$.

1. Déterminer les nombres $A$, $C$ et $I$ dans les cas suivants :
   a. $(P)$ est le rectangle de sommets les points $(0\,;0)$, $(10\,;0)$, $(10\ ,\ 7)$ et $(0\,;7)$.
   b. $(P)$ est le triangle de sommets les points $(0\,;0)$, $(5\,;2)$, $(2\,;4)$.
   c. $(P)$ est le pentagone de sommets les points $(2\,;0)$, $(7\,;1)$, $(5\,;3)$, $(2\,;5)$, $(1\,;4)$.
2. Dans cette question, $(P)$ est un rectangle entier dont les côtés sont parallèles aux axes de coordonnées, et dont les dimensions (en cm) sont notées $n$ et $p$ ($n \geqslant 1$ et $p \geqslant 1$).
   Exprimer les nombres $A$, $C$ et $I$ en fonction de $n$ et $p$. En déduire une relation entre $A$, $C$ et $I$ indépendante de $n$ et $p$.
3. Dans cette question, $(P)$ est un triangle rectangle entier dont les côtés de l'angle droit sont parallèles aux axes de coordonnées.
   Démontrer que la relation entre $A$, $C$ et $I$ trouvée à la question 2. est encore valable pour ce triangle.
4. Montrer que si la formule précédente est valable pour deux polygones entiers ayant une frontière commune, elle est encore valable pour le polygone obtenu en éliminant entre eux cette frontière commune, à condition que ce nouveau polygone soit, lui aussi, convexe.
5. En déduire que la relation trouvée à la question 2. demeure vraie pour tout polygone entier.

### Éléments de solution

1. a. $A = 70,\ C = 34,\ I = 54.$
   b. $A = 8,\ C = 4,\ I = 7.$
   c. $A = 21,\ C = 8,\ I = 18.$
2. On a $A = np,\ C = 2(n+p),\ I = (n-1)(p-1) = np - (n+p) + 1$. Donc $A = \dfrac{C}{2} + I - 1$.
3. On a les relations : $\begin{cases} C = \dfrac{C'}{2} + D' + 1 \\ I = \dfrac{I' - D'}{2} \end{cases}$.

   D'où $A = \dfrac{1}{2}A' = \dfrac{1}{4}C' + \dfrac{1}{2}I' - \dfrac{1}{2} = \dfrac{C - D' - 1}{2} + \left(I + \dfrac{D'}{2}\right) - \dfrac{1}{2}$.

   On en déduit que $A = \dfrac{C}{2} + I - 1$.

4. Notons $A_1, C_1, I_1$ et $A_2, C_2, I_2$ les éléments caractéristiques des deux polygones, $A, C, I$ ceux du polygone final, puis $D$ le nombre de points entiers de la frontière commune, extrémités exclues.

   On a par hypothèse : $A_1 = \dfrac{C_1}{2} + I_1 - 1$ et $A_2 = \dfrac{C_2}{2} + I_2 - 1$.
   D'autre part, $C = C_1 + C_2 - 2D - 2,\ I = I_1 + I_2 + D$.
   On en tire :

   $$A = A_1 + A_2 = \frac{C_1}{2} + I_1 - 1 + \frac{C_2}{2} + I_2 - 1 = \frac{C_1 + C_2}{2} + I_1 + I_2 - 2 = \left(\frac{C}{2} + D + 1\right) + (I - D) - 2.$$

   D'où finalement $A = \dfrac{C}{2} + I - 1$.

5. **Résultat préliminaire**

   Dans la configuration de la question 4, avec les mêmes notations, supposons que $A_1 = \dfrac{C_1}{2} + I_1 - 1$ et $A = \dfrac{C}{2} + I - 1$, on en déduit facilement que $A_2 = \dfrac{C_2}{2} + I_2 - 1$.
   Comme tout polygone entier se décompose en triangles entiers ayant une frontière commune, il suffit de prouver le résultat pour un triangle entier, et d'appliquer 4.

   Soit $(T)$ un triangle entier ayant un côté parallèle à un axe. En traçant la hauteur issue du sommet opposé, $(T)$ est découpé en deux triangles rectangles dont les côtés de l'angle droit sont parallèles aux axes. D'après 4, la formule s'applique à $(T)$.

   Soit $(T)$ un triangle entier n'ayant aucun côté parallèle à un axe.

   Si $(T)$ est *acutangle*, en traçant les parallèles aux axes passant les sommets et qui ne coupent pas le triangle, on obtient un rectangle découpé en quatre triangles : le triangle $(T)$ et trois triangles rectangles. En appliquant 2, 3, et le résultat préliminaire, on en déduit que la formule s'applique à $(T)$.

   Si $(T)$ est *obtusangle*, en traçant les parallèles aux axes passant par les sommets des angles aigus, on obtient un triangle rectangle découpé en trois triangles : le triangle $(T)$ et deux triangles ayant un côté parallèle à un axe. En appliquant les résultats précédents on en déduit encore que la formule sŠapplique à $(T)$.

Retour au sommaire

# DIJON

## Troisième exercice académique

Séries autres que S

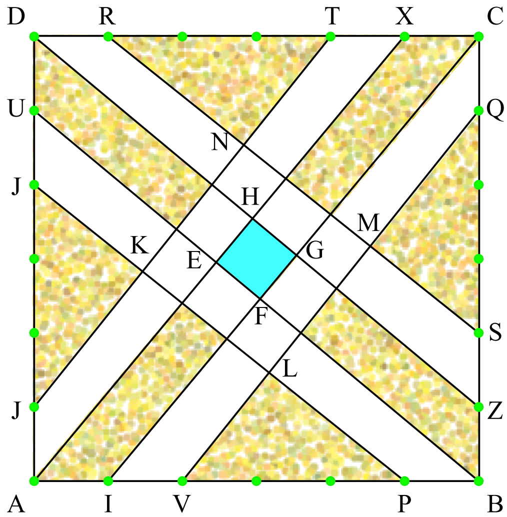
***Jardin à la française***

### Énoncé

La figure ci-contre représente le plan d'un jardin ABCD de forme carrée. 24 arbustes sont plantés sur le pourtour, un en chaque sommet, cinq autres sur chaque côté, régulièrement espacés.

Chaque ligne du plan est rectiligne et a pour extrémité deux arbustes, comme sur le dessin.

Les zones blanches sont les allées, les zones sablées sont des parterres de fleurs, le quadrilatère central (bleu) représente un bassin.




1. Les lignes (AX) et (TJ) qui bordent une des allées sont-elles parallèles ?
2. Le bassin EFGH est-il carré ?
3. Les point K, E, M sont-ils alignés ?

### Éléments de solution

1. $\dfrac{DT}{DJ} = \dfrac{4}{5}$ et $\dfrac{DX}{DA} = \dfrac{5}{6}$. Donc (AX) et (JT) ne sont pas parallèles.
2. EFGH est un carré.
   Dans le repère orthonormal $(A, I, J)$, on a $(AX) : y = \dfrac{6}{5}x$ ; $(IC) : y = \dfrac{6}{5}x - \dfrac{6}{5}$ ; $(BY) : y = -\dfrac{5}{6}x + 5$ ; $(WD) : y = -\dfrac{5}{6}x + 6$.
   $$E\left(\frac{150}{61}, \frac{180}{61}\right) \;;\; F\left(\frac{186}{61}, \frac{150}{61}\right) \;;\; G\left(\frac{216}{61}, \frac{186}{61}\right) \;;\; H\left(\frac{180}{61}, \frac{216}{61}\right).$$
3. Les points K, E, M ne sont pas alignés.
   $(JT) : y = \dfrac{5}{4}x + 1$ ; $(UP) \; : \; y = -\dfrac{4}{5}x + 4 \; : \; K\left(\dfrac{60}{41}, \dfrac{130}{41}\right)$ ;
   $(VQ) \; : \; y = \dfrac{5}{4}x - \dfrac{5}{2}$ ; $(RS) \; : \; y = -\dfrac{4}{5}(x-1) + 6$ ; $M\left(\dfrac{186}{41}, \dfrac{130}{41}\right)$.

Retour au sommaire

# GRENOBLE

## Premier exercice académique

Toutes séries

***Promenade dans les aires***

### Énoncé

Une formule simple était utilisée par les arpenteurs Egyptiens pour évaluer l'aire d'un quadrilatère : « *calculer le produit des moyennes des longueurs des côtés opposés* » (formule A).
Une autre formule demande de « *calculer le demi produit des longueurs des diagonales* » (formule B).

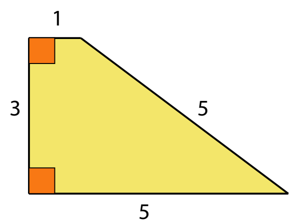
Il s'agit dans cet exercice d'étudier la validité de ces formules.

1. Pensez-vous qu'il soit possible de calculer la valeur exacte de l'aire d'un quadrilatère quelconque à l'aide des seules mesures de ses côtés ? Justifier.
2. Trouver un quadrilatère pour lequel la formule A est exacte et un quadrilatère pour lequel elle ne l'est pas. Justifier les réponses.
3. Même question pour la formule B.
4. Quels sont les rectangles pour lesquels les deux formules donnent le même résultat ?
5. Montrer que l'aire du quadrilatère est toujours inférieure ou égale au résultat trouvé à l'aide de la formule B. Dans quels cas l'égalité a-t-elle lieu ?
6. Soient Q un quadrilatère quelconque et Q' le quadrilatère dont les sommets sont les milieux des côtés de Q.
   a. Quelle est la nature du quadrilatère Q' ? Démontrer ce résultat.
   b. Comparer l'aire du quadrilatère Q' à celle de Q.
   c. En déduire que l'aire du quadrilatère Q est toujours inférieure ou égale au résultat trouvé à l'aide de la formule A. Dans quels cas l'égalité a-t-elle lieu ?

### Éléments de solution

1. La connaissance des longueurs des quatre côtés d'un quadrilatère ne suffit pas à fixer son aire, il serait donc vain de chercher une formule générale ne faisant intervenir que les côtés. Par exemple, un carré de côté 5 et un losange de demi-diagonales 3 et 4 (donc de côté 5) ont les mêmes longueurs de côté, mais pas la même aire (25 pour le carré, 24 pour le losange).
2. Pour un rectangle de longueur $L$ et de largeur $\ell$ , les côtés opposés sont de même mesure, la formule A donne donc $\ell \times L$ , ce qui est bien l'aire du rectangle.

   Pour le trapèze ci-contre, la formule A donne le résultat :

   $$\frac{1+5}{2} \times \frac{3+5}{2} = 3 \times 4 = 12.$$

   Son aire est en réalité : $\dfrac{\text{Base} \ + \ \text{base}}{2} \times h = \dfrac{5+1}{2} \times 3 = 3 \times 3 = 9.$
3. Pour un losange, la formule B donne un résultat exact.
   Pour un rectangle de longueur 4 et de largeur 3, les diagonales mesurent 5, la formule B donne donc un résultat égal à 12,5 alors que l'aire vaut exactement 12.

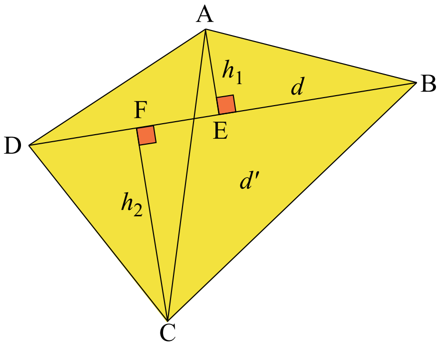
4. Soit R un rectangle de longueur $L$ , de largeur $\ell$ et de diagonale $d$, on a $d^2 = L^2 + \ell^2$.

Le résultat fourni par la formule A est $A(R) = L \times \ell$.
Le résultat fourni par la formule B est $B(R) = \dfrac{d \times d}{2} = \dfrac{d^2}{2} = \dfrac{L^2 + \ell^2}{2}$.

d'où $A(R) = B(R) \Leftrightarrow L \times \ell = \dfrac{L^2 + \ell^2}{2}$
$\Leftrightarrow 2 \times L \times \ell = L^2 + \ell^2$
$\Leftrightarrow L^2 + \ell^2 - 2 \times L \times \ell = 0$
$\Leftrightarrow (L - \ell)^2 = 0$
$\Leftrightarrow L = \ell$.

Les seuls rectangles pour lesquels les deux formules donnent le même résultat sont donc **les carrés**

5.




L'aire du triangle ABD est
$\dfrac{\text{Base} \times \text{hauteur}}{2} = \dfrac{BD \times h_1}{2}$.
L'aire du triangle BCD est
$\dfrac{\text{Base} \times \text{hauteur}}{2} = \dfrac{BD \times h_2}{2}$.
Donc l'aire du quadrilatère ABCD est :

$$\frac{BD \times h_1}{2} + \frac{BD \times h_2}{2} = \frac{BD(h_1 + h_2)}{2} = \frac{d \times (h_1 + h_2)}{2}$$

Le résultat fourni par la formule B est $\dfrac{d \times d'}{2}$.

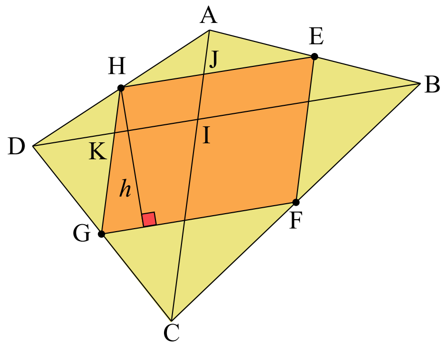
Par conséquent, l'aire du quadrilatère est toujours inférieure ou égale au résultat trouvé à l'aide de la formule B, et l'égalité n'a lieu que si les diagonales de ce quadrilatère sont perpendiculaires.

6. a. Quelque soit le quadrilatère Q, le quadrilatère des milieux Q' est un parallélogramme, en effet

- d'après le théorème de la droite des milieux dans le triangle ABD, (EH)//(BD) et $EH = \dfrac{1}{2}BD$
- d'après le théorème de la droite des milieux dans le triangle BCD, (FG)//(BD) et $FG = \dfrac{1}{2}BD$.

On en déduit que (FG)//(EH) et $FG = EH$ ; le quadrilatère EFGH a donc des côtés opposés parallèles et de même longueur.

Q' est donc un **parallélogramme**.




b. D'après la réciproque du théorème de la droite des milieux appliquée au triangle AID où I est le point d'intersection des diagonales du quadrilatère Q, K est le milieu de [DI] et J est le milieu de [AI], un calcul simple montre alors que l'aire du parallèlogramme IJHK est la moitié de celle du triangle AID. En procédant de même dans chacun des triangles AIB, BIC et CID, on en déduit que

L'aire de Q' est la moitié de celle de Q

c. Dans le parallélogramme Q', la formule A donne $\dfrac{GF + EH}{2} \times \dfrac{FE + HG}{2} = GF \times GH$
Or l'aire du parallélogramme est $GF \times h$ qui est toujours inférieur au résultat précédent. De plus, les deux résultats sont égaux, si et seulement si, $GH = h$ , ce qui équivaut à dire que (GH) et (GF) sont perpendiculaires, **ABCD est un rectangle**.

Retour au sommaire

# GRENOBLE

## Deuxième exercice académique

Série S

***Des nombres qui volent***

### Énoncé

Soit $N$ un nombre entier naturel non nul. On s'intéresse à la liste de nombres, numérotés $u_0, u_1, u_2, u_3, \ldots$, construite de la façon suivante :
$u_0 = N$. Si un élément $a$ de la liste est pair, son suivant est $\dfrac{a}{2}$ et s'il est impair son suivant est $3a+1$.
Ainsi, on a pour $N = 5$ : $u_0 = 5, u_1 = 16, u_2 = 8, u_3 = 4, u_4 = 2, u_5 = 1, u_6 = 4, u_7 = 2 \ldots$
et pour $N = 7$ : $u_0 = 7, u_1 = 22, u_2 = 11, u_3 = 34, u_4 = 17, u_5 = 52, u_6 = 26, u_7 = 13, u_8 = 40 \ldots$

1. On suppose que $N = 3$.
   a. Déterminer les cinq premiers termes de la liste associée à ce nombre.
   b. Quel est le plus petit entier $m$ tel que $u_m = 1$ ?
   c. Que peut-on dire des termes suivants ?
2. On suppose que $N = 7$.
   a. Déterminer le plus petit entier $m$ tel que $u_m = 1$. On dit que $m$ est **la durée de vol du nombre** $N$.
   b. Représenter graphiquement les 20 premiers termes de la liste.
   On portera en abscisse l'entier $i$ et en ordonnée le nombre $u_i$.
   c. Quel est le plus grand terme de cette liste ? Il s'agit de **l'altitude maximale du vol du nombre *N***.
   d. Quel est le plus petit entier $i$ tel que $u_{i+1} < N$ ? ***i* est la durée de vol de *N* en altitude**.
   Illustrez sur votre graphique.
3. On suppose que $N = 11$.
   a. Quelle est sa durée de vol ?
   b. Quelle est sa durée de vol en altitude ?
   c. Quelle est l'altitude maximale de son vol ?

Si $N$ est un entier naturel non nul, on dit que **sa durée de vol est finie** s'il existe un entier naturel $m$ tel que $u_m = 1$.
La conjecture de Syracuse affirme que tout nombre a une durée de vol finie. Elle n'a pas été démontrée à ce jour.

4. On suppose que le nombre $N$ a une durée de vol finie.
   Écrire un algorithme qui permette de calculer sa durée de vol.
5. Montrer que pour tout entier naturel non nul $p$, il existe au moins un entier $N$ ayant une durée de vol égale à $p$.
6. Quels sont les nombres ayant une durée de vol en altitude nulle ?
7. Soit $N$ un entier naturel supérieur ou égal à 2 ayant une durée de vol finie. Justifier qu'il a une durée de vol en altitude finie.
8. Soit $N$ un entier naturel supérieur ou égal à 2, tel que :
   - tout nombre entier inférieur à $N$ a une durée de vol finie,
   - $N$ a une durée de vol en altitude finie.
   Montrer que $N$ a une durée de vol finie.

9. On peut écrire tout nombre entier naturel $N$ sous l'une des formes $4k, 4k+1, 4k+2, 4k+3$ avec $k \in \mathbb{N}$.
   a. Montrer pour trois de ces quatre cas que le nombre $N$ a une durée de vol en altitude finie.
   b. Quels sont les nombres entiers naturels non nuls ayant une durée de vol en altitude égale à 2 ?

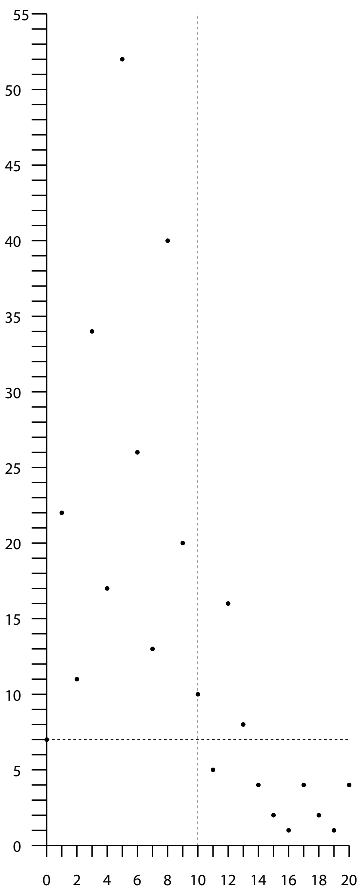
On démontre (ce résultat est ici admis) à partir des questions 8 et 9, que si $N$ est un entier naturel non nul quelconque, les affirmations suivantes sont équivalentes :

a. Tout nombre inférieur ou égal à $N$ a une durée de vol finie.
b. Tout nombre inférieur ou égal à $N$ a une durée de vol en altitude finie.

10. a. Expliquer pourquoi, pour vérifier que les 10 000 premiers nombres entiers non nuls ont une durée de vol finie, il suffit de faire des calculs pour 2 500 nombres.
    b. Écrire un algorithme qui permette, en effectuant le moins de calculs possibles, de déterminer l'entier naturel non nul inférieur ou égal à 10 000 ayant la durée de vol en altitude la plus longue. Justifier votre choix.
11. Proposer une méthode qui permette de limiter encore de façon significative les calculs à faire pour vérifier si les 10 000 premiers nombres entiers non nuls ont une durée de vol finie.

## Éléments de solution

1. a. Si $N = 3$ alors $u_0 = 3, u_1 = 10, u_2 = 5, u_3 = 16$ et $u_4 = 8$
   b. $u_5 = 4, u_6 = 2, u_7 = 1$. Le plus petit entier $m$ tel que $u_m = 1$ est 7.
   c. Les termes suivant reproduisent indéfiniment la séquence $4 - 2 - 1$.
2. a. Si $n = 7$ alors $u_9 = 20, u_{10} = 10, u_{11} = 5, u_{12} = 16, u_{13} = 8, u_{14} = 4, u_{15} = 2, u_{16} = 1$
   **La durée de vol** du nombre $N = 7$ est 16.
   b. Représentation graphique des 20 premiers termes de la liste.(Figure à droite $\longrightarrow$).
   c. Le plus grand nombre de la liste est 52.
   **L'altitude maximale du vol du nombre 7 est 52**.
   d. Le plus petit entier $i$ tel que $u_{i+1} < 7$ est 10. **La durée de vol de 7 est 10**.
3. a. la durée de vol du nombre 11 est 14.
   b. Sa durée de vol en altitude est 7.
   c. L'altitude maximale de son vol est 52.




4. $N$ ayant une durée de vol finie, on écrit l'algorithme permettant de calculer sa durée de vol.

```
D et N sont des nombres entiers
Lire N
D prend la valeur 0
Tant que N n'est pas égal à 1
          Si N est pair alors
```

```
            N prend la valeur N/2
        Sinon
            N prend la valeur 3N+1
        Fin Si
        D prend la valeur D+1
Fin tant que
Afficher D
```

5. Le nombre $N = 2^p$ a une durée de vol égale à $p$.
6. Si $N$ est pair alors $N = 2p$ , donc $u_0 = 2p$ et $u_1 = p < N$ : sa durée de vol en altitude est nulle.
   Si $N$ est impair alors $u_0 = N$ et $u_1 = 3N + 1$ : sa durée de vol en altitude n'est pas nulle.
   Les nombres **pairs** sont les nombres ayant une durée de vol en altitude nulle.
7. Si un entier $N \geqslant 2$ a une durée de vol finie alors il existe un entier $m$ non nul tel que $u_{i+1} < N$.
8. Si $N \geqslant 2$ a une durée de vol en altitude finie, alors il existe un entier $i$ tel que $u_{i+1} < N$. Or l'entier $u_{i+1}$ est issu de la liste relative à $N$. Donc $N$ a une durée de vol finie.
9. a. Les nombres $4k$ et $4k + 2$ sont pairs et ont donc une durée de vol en altitude nulle. Posons $N = 4k+1$. On a $u_0 = 4k+1, u_1 = 12k+4, u_2 = 6k+2, u_3 = 3k+1 < N$ : $N$ a une durée de vol en altitude égale à 2 et donc finie.

   b. Posons $N = 4k + 3$. $u_0 = 4k + 3, u_1 = 12k + 10, u_2 = 6k + 5, u_3 = 18k + 16 \geqslant N$. Seuls les nombres de la forme $4k + 1$ ont une durée de vol en altitude égale à 2.
10. a. On doit tester si les nombres de la forme $4k + 3$ compris entre 1 et 10 000 ont une durée de vol en altitude finnie. Ils sont 2 500.

    b. Algorithme :

```
I,N,K,DVAmax,NbreDVAmax sont des nombres entiers
DVAmax prend la valeur 0
Pour K=0 jusqu'à 2499 faire
N prend la valeur 4K+3
I prend la valeur 0
Tant que N est supérieur ou égal à 4K+3
                Si N est pair alors
                     N prend la valeur N/2
                Sinon
                     N prend la valeur 3N+1
                Fin Si
                I prend la valeur I+1
Fin tant que
Si DVAmax <I-1 alors
DVAmax prend la valeur I-1
NbreDVAmax prend la valeur 4K+3
Fin Pour
Afficher DVAmax
Afficher NbreDVAmax
```

11. On s'intéresse aux nombres $N$ de la forme $16k + 3$. On a $u_0 = 16k + 3, u_1 = 48k + 10, u_2 = 24k + 5, u_3 = 72k + 16, u_4 = 36k + 8, u_5 = 18k + 4, u_6 = 9k + 2 < N$. $N$ a donc une durée de vol en altitude finie.
    Il suffit donc de tester les nombres de la forme $16k + 7$, $16k + 11$ et $16k + 15$.
    On peut donc limitert les test à $2500 - 675 = 1875$.

**Algorithme solution de la question 4 transcrit dans AlgoBox**

```
VARIABLES
  N EST_DU_TYPE NOMBRE
  D EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  LIRE N
  AFFICHER "La durée de vol du nombre "
  AFFICHER N
  D PREND_LA_VALEUR 0
  TANT_QUE (N!=1) FAIRE
    DEBUT_TANT_QUE
    SI (N%2==0) ALORS
      DEBUT_SI
      N PREND_LA_VALEUR N/2
      FIN_SI
      SINON
        DEBUT_SINON
        N PREND_LA_VALEUR 3*N+1
        FIN_SINON
    D PREND_LA_VALEUR D+1
    FIN_TANT_QUE
   AFFICHER " est : "
   AFFICHER D
 FIN_ALGORITHME
```

Retour au sommaire

**Algorithme solution de la question 10b. transcrit dans AlgoBox**

```
VARIABLES
  I EST_DU_TYPE NOMBRE
  N EST_DU_TYPE NOMBRE
  K EST_DU_TYPE NOMBRE
  DVAmax EST_DU_TYPE NOMBRE
  NbreDVAmax EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  DVAmax PREND_LA_VALEUR 0
  POUR K ALLANT_DE 0 A 2499
    DEBUT_POUR
    N PREND_LA_VALEUR 4*K+3
    I PREND_LA_VALEUR 0
    TANT_QUE (N>=(4*K+3)) FAIRE
      DEBUT_TANT_QUE
      SI (N%2==0) ALORS
        DEBUT_SI
        N PREND_LA_VALEUR N/2
        FIN_SI
        SINON
          DEBUT_SINON
          N PREND_LA_VALEUR 3*N+1
          FIN_SINON
      I PREND_LA_VALEUR I+1
      FIN_TANT_QUE
    SI (DVAmax<(I-1)) ALORS
      DEBUT_SI
      DVAmax PREND_LA_VALEUR I-1
      NbreDVAmax PREND_LA_VALEUR 4*K+3
      FIN_SI
    FIN_POUR
   AFFICHER "La durée de vol en altitude maximale est "
   AFFICHER DVAmax
   AFFICHER " réalisée par le nombre "
   AFFICHER NbreDVAmax
 FIN_ALGORITHME
```

# GRENOBLE

## Troisième exercice académique

Séries autres que S et STI

***Quel dé choisir***

### Énoncé

Dans ce jeu, qui se joue à deux, les joueurs choisissent à tour de rôle un dé à six faces parmi les trois dés proposés ci–dessous puis les lancent en même temps. Le gagnant est celui des deux joueurs qui obtient le résultat le plus élevé.

| | |
|---|---|
| Dé Rouge : | six faces numérotées 4 - 4 - 4 - 4 - 4 - 4 |
| Dé Bleu : | six faces numérotées 2 - 2 - 2 - 2 - 8 - 8 |
| Dé Vert : | six faces numérotées 0 - 0 - 6 - 6 - 6 - 6 |

Ces trois dés sont supposés équilibrés. Le maître du jeu dit que la numérotation des faces a été faite de façon à ce que le jeu soit équitable puisque la moyenne des chiffres inscrits sur les faces est la même quelque soit le dé choisi. Il prétend même vous avantager en vous demandant de faire votre choix en premier.

1. Quelle est la probabilité que le résultat obtenu avec le dé Bleu soit supérieur à celui obtenu avec le dé Rouge ?
2. Quelle est la probabilité que le résultat obtenu avec le dé Bleu soit supérieur à celui obtenu avec le dé Vert ?
3. Le maître du jeu vous demande de choisir un dé puis choisit le sien.
   a. Montrer que quelque soit votre choix, il a plus de chance de gagner que vous.
   b. La participation au jeu coûte 1 € et vous recevez 2,50 € en cas de gain.
   Ce jeu vous est-il favorable ?
4. Le jeu est modifié de la façon suivante : le dé vert vous est attribué, et le maître du jeu tire au hasard l'un des deux dés restants. Qui a maintenant le plus de chances de gagner ?

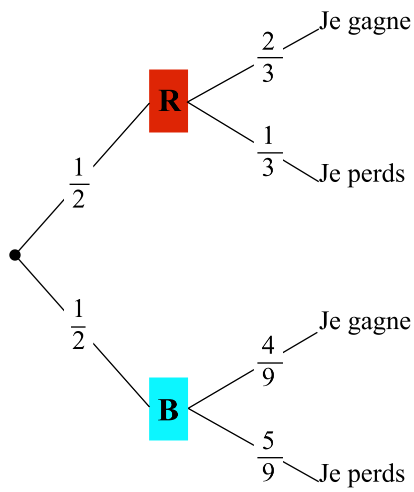
### Éléments de solution

1. Seul le résultat obtenu avec le dé bleu intervient dans cette question. Ce résultat est supérieur à celui obtenu avec le dé Rouge si et seulement si ce résultat est 8, ce qui se produit 2 fois sur 6. Le dé étant équilibré, les six résultats sont équiprobables, on en déduit que la probabilité cherchée est $1/3$.
2. On considère ici les 36 couples de résultats possibles, supposés équiprobables. Le résultat obtenu avec le dé Bleu est inférieur à celui obtenu avec le dé Vert si et seulement si le dé Bleu affiche 2 alors que le dé Vert affiche 6, ce qui se produit 16 fois sur 36. L'égalité étant impossible, on en déduit que le résultat obtenu avec le dé Bleu est supérieur à celui obtenu avec le dé Vert dans 20 cas sur 36. on en déduit que la probabilité cherchée est $20/36$ soit $5/9$.
3. a. Si je choisis le dé Bleu, l'organisateur choisit le dé rouge et gagne 4 fois sur 6, si je choisis le Vert, il choisi le Bleu et gagne 5 fois sur 9, si je choisis le Rouge, il choisit le Vert et gagne en moyenne 4 fois sur 6. Dans chacun des cas, il peut choisir un dé plus favorable que le mien !
   b. D'après ce qui précède, le dé le moins défavorable pour moi est le dé vert, que je choisis donc. L'organisateur, soucieux de ses intérêts, choisit alors le dé Bleu. Les 36 parties possibles me coûteraient au total 36 € et me rapporteraient $\frac{5}{9} \times 36 \times 2,5 = 50$€, le jeu m'est donc favorable.

4.

La situation peut être décrite grâce à l'arbre ci-contre.
La probabilité de gagner pour moi est
$P(G) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{4}{9} = \frac{5}{4}$.

Le jeu m'est donc maintenant favorable.




Retour au sommaire

# GUADELOUPE

## Premier exercice académique

Toutes séries

***Le retour du naturel***

### Énoncé

Dans cet exercice le mot entier désigne un entier naturel.

1. Le nombre 2011 peut-il s'écrire comme le produit de deux entiers consécutifs ?
2. Vérifier que 2070 est le produit de deux entiers consécutifs.
3. Quels sont les chiffres possibles pour le chiffre des unités du produit de deux entiers consécutifs ?
4. Combien y a t-il d'entiers inférieurs à 100, qui sont le produit de deux entiers consécutifs ?
5. Quels sont les entiers compris entre 2000 et 2100 qui sont le produit de deux entiers consécutifs ?
6. Montrer que le nombre $a$ n'est un entier produit de deux entiers consécutifs que si $\sqrt{1+4a}$ est un entier impair.

### Éléments de solution

1. 2011 ne peut pas s'écrire comme le produit de deux entiers consécutifs : $44 \times 45 = 1980$ ; $45 \times 46 = 2070$.
2. Voir plus haut : $45 \times 46 = 2070$.
3. Le chiffre des unités : 0, 2, 6.
4. 10 entiers inférieurs à 100 produits de deux entiers consécutifs. 0, 2, 6, 12, 20, 30, 42, 56, 72, 90.
5. Il n'existe qu'un seul entier compris entre 2000 et 2011 : 2070.
   ($44 \times 45 = 1980 < 2000$ ; $45 \times 46 = 2070$ ; $46 \times 47 = 2160 > 2100$).
6. Soit $k \in \mathbb{N}$. $k(k+1) = a \Leftrightarrow k^2 + k - a = 0$
   Comme $k$ est un naturel, $k = \dfrac{-1+\sqrt{1+4a}}{2}$ ou $2k+1 = \sqrt{1+4a}$.

Retour au sommaire

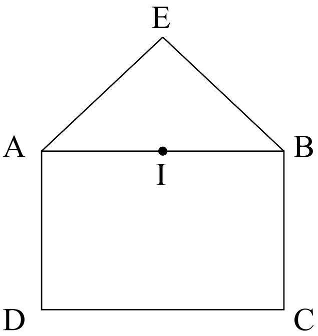
# GUADELOUPE

## Deuxième exercice académique

Toutes séries

***Géométrie élémentaire***

### Énoncé




Dans la figure ci-contre :

- I est le milieu de [AB],
- le triangle ABE est rectangle et isocèle en E,
- le quadrilatère ABCD est un rectangle tel que $BC = BE$. On désigne par M le point de concours des droites (IC) et (BD).

1. Quelle est la nature du quadrilatère IEBC ?
2. Que vaut le rapport $\dfrac{BM}{BD}$ ?
3. Quelle est la nature du triangle IMB ?

### Éléments de solution

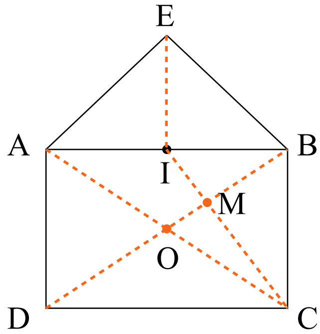
1. Le triangle ABE étant isocèle en E et I le milieu de [AB], la droite (IE) est la médiatrice du segment [AB] donc (IE) est perpendiculaire à (AB). Le quadrilatère ABCD étant un rectangle alors les droites (AB) et (BC) sont perpendiculaires.

   *Conséquence* : Les droites (IE) et (BC) sont parallèles car elles sont toutes deux perpendiculaires à (AB) Le quadrilatère IEBC est un trapèze.

   *Remarque* : Ce trapèze n'est pas un parallélogramme comme on le montre plus loin, par le calcul, $CI \neq BE = a$.

2. Soit O le centre du rectangle. Considérons le triangle ABC. Les droites (BO) et (CI) sont deux médianes du triangle ABC et M en est le centre de gravité. Le rapport $\dfrac{BM}{BD}$ se calcule par : $\dfrac{BM}{BD} = \dfrac{BM}{2 \times BO} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{BM}{BO}$ car O est le milieu de [BD] Or, sur la médiane [BO] du triangle ABC, le rapport $\dfrac{BM}{BO} = \dfrac{2}{3}$ on en déduit donc :

   $$\boxed{\frac{BM}{BD} = \frac{1}{3}}$$




3. Utilisons la réciproque du théorème de Pythagore pour montrer que le triangle IMB est rectangle en M.
   Posons : $BE = BC = a$.

<u>Calcul de $BM^2$ en fonction de $a$</u> :

D'après 2., $BM^2 = \dfrac{BD^2}{9}$ et dans le triangle rectangle DBC, $DB^2 = BC^2 + DC^2 = a^2 + DC^2$.
Dans le rectangle ABCD, $DC = AB$ et dans le triangle rectangle-isocèle AEB, $AB^2 = 2a^2$.

On déduit alors : $BM^2 = \dfrac{a^2 + 2a^2}{9} = \dfrac{a^2}{3}$.

<u>Calcul de $MI^2$ en fonction de $a$</u> :

Sur la médiane [CI] du triangle ABC, nous avons : $MI = \dfrac{1}{3}CI$ soit $MI^2 = \dfrac{CI^2}{9}$ .
Dans le triangle rectangle IBC : $CI^2 = IB^2 + BC^2 = IB^2 + a^2$.
Dans le triangle rectangle-isocèle AEB, $IB^2 = \dfrac{AB^2}{4} = \dfrac{2a^2}{4} = \dfrac{a^2}{2}$.

Finalement, $CI^2 = \dfrac{a^2}{2} + a^2 = \dfrac{3a^2}{2}$ et $MI^2 = \dfrac{2}{9} = \dfrac{a^2}{6}$.

En résumé on a : $BM^2 = \dfrac{a^2}{3}$, $MI^2 = \dfrac{a^2}{6}$ et $BI^2 = \dfrac{a^2}{2}$.

Donc : $BM^2 + MI^2 = \dfrac{a^2}{3} + \dfrac{a^2}{6} = \dfrac{a^2}{2} = BI^2$.

Il en résulte que, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle IMB est rectangle en M.

***Une autre solution*** consiste à choisir le repère orthonormé $(I, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ du plan.
En posant $IB\lambda$, Les coordonnées des différents points sont : I $(0\,;\,0)$, A$(-\lambda\,;\,0)$ , B $(\lambda\,;\,0)$ , C $(\lambda; -\lambda\sqrt{2})$, D$(-\lambda; -\lambda\sqrt{2})$, E $(0\,;\,\lambda)$.
On cherche une équation de chacune des droites (DB) et (IC).

On trouve : (BD) : $y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(x - \lambda)$, (CI ) : $y = -\sqrt{2}$.
En résolvant le système d'équations formé par les équations des droites (BD) et (CI ) , on trouve les coordonnées de M$\left(\dfrac{1}{3}; -\dfrac{\lambda\sqrt{2}}{3}\right)$.

On termine l'exercice par des calculs de distances en repère orthonormé.
La troisième question peut être traitée à l'aide du produit scalaire ou bien en remarquant que le produit des coefficients directeurs des deux droites (BD) et (CI ) vaut -1.

Retour au sommaire

# GUYANE

## Premier exercice académique

Toutes séries

***Les mots transformés***

### Énoncé

Une transformation sur les mots consiste à enlever les deux dernières lettres pour les placer devant dans l'ordre inverse.

Ainsi par exemple, le mot **JEU** devient **UEJ** et le mot **MATHS** devient **SHMAT**. On notera alors les résultats de ces transformations de la façon suivante :

JEU → UEJ et MATHS → SHMAT

Après un certain nombre de transformations successives, toutes les lettres reprennent leur place initiale dans le mot. Par exemple :

- Après deus transformations, les lettres du mot JEU reprennent leur place initiale :

JEU → UEJ → JEU

- Après 6 transformations, les lettres du mot MATHS reprennent leur place initiale :

MATHS → SHMAT → TASHM → MHTAS → SAMHT → THSAM → MATHS

1. Déterminer le nombre minimum de transformations successives nécessaire pour que les lettres des deux mots suivants reprennent leur place initiale :
   a) le mot MATHEUX b) le mot OLYMPIADE
2. Qu'obtient-on lorqu'on a transformé 2011 fois le mot MATHEMATIQUES ?

### Éléments de solution

1. La transformation faisant passer les deux dernières lettres devant, toutes les autres lettres sont décalées de deux rangs vers la droite.
   De plus, le nombre de lettres étant impair et l'ordre des deux lettres déplacées étant changé, on peur remarquer que les lettres de rang impair restent à un rang impair et, de même, les lettres de rang pair restent à un rang pair.
   Finalement, les lettres de rang impair sont décalées d'un rang (impair) vers la droite, la dernière venant devant.
   a. Le mot MATHEUX a :

      4 lettres de rang impair qui reviennent donc à leur place toutes les 4 transformations :

      M-T-E-X → X-M-T-E → E-X-M-T → T-E-X-M → M-T-E-X

      3 lettres de rang pair qui reviennent donc à leur place toutes les 3 transformations :

      -A-H-U- → -U-A-H- → -H-U-A- → -A-H-U.

      En consequence, les lettres du mot MATHEUX reprennent leur place lorsque le nombre de transformations est simultanement multiple de 4 et de 3. Le plus petit entier non nul multiple de 4 et de 3 est 12. Il faut donc au minimum **12** transformations successives pour que les lettres du mot MATHEUX reprennent leur place initiale.

b. Avec le même raisonnement, il faut au minimum $5 \times 4 = 20$ transformations successives pour que les lettres du mot OLYMPIADE reprennent leur place initiale.

2. Le mot MATHEMATIQUES a 7 lettres de rang impair et 6 lettrtes de rang pair. En conséquence, toutes les $7 \times 6 = 42$ transformations, les lettres reprennent leur place.
   Comme $42 \times 48 = 2016$, on sait qu'après 2016 transformations, les lettres auraient repris leur place. Il suffit donc de revenir 5 transformations avant en procédant « à l'envers ».

| | |
|---|---|
| 2016 | MATHEMATIQUE |
| 2015 | THEMATIQUESAM |
| 2014 | EMATIQUESAMHT |
| 2013 | ATIQUESAMHTME |
| 2012 | IQUESAMHTMETA |
| 2011 | UESAMHTMETAQI |

Après 2011 transformations, on lit donc $\boxed{\textbf{UESAMHTMETAQI}}$

Retour au sommaire

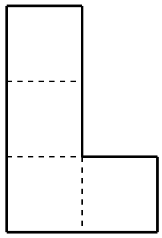
# GUYANE

## Deuxième exercice académique

Toutes séries

***Assemblages***

### Énoncé



Quatre petits carrés sont assemblés pour former une pièce en forme de L.
(*Voir figure ci-contre*)

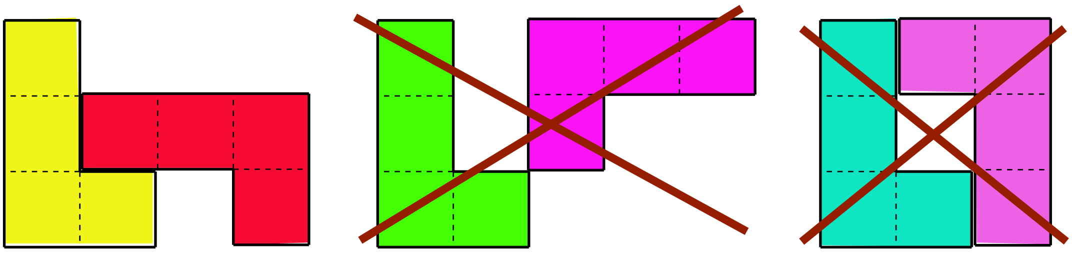
Les côtés des carrés formant le contour de la pièce sont appelés **arêtes**.
Cette pièce a **10** arêtes.

Le jeu consiste à assembler plusieurs pièces en respectant les règles suivantes :

**Règle 1 :** Deux pièces doivent avoir au moins une arête commune.
**Règle 2 :** L'assemblage ne doit pas avoir de « trou ».

Les pièces peuvent naturellement être retournées.

*Exemples* :



*Autorisé* *Non autorisé (règle 1)* *Non autorisé (règle 2)*

On appelle périmètre de l'assemblage le nombre d'arêtes formant le contour estérieur de cet assemblage.
*Par exemple, l'assemblage de deux pièces autorisé ci-dessus a pour périmètre* ***16****.*

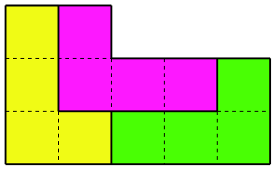
*Dans les questions* ***1*** *a* ***3****, il n'est demandé aucune justification.*

1. Dessiner un assemblage de périmètre **16** avec trois pièces.
2. Dessiner un assemblage de périmètre **18** avec :
   a. 2 pièces.
   b. 3 pièces.
   c. 4 pièces.
3. Dessiner un assemblage de périmètre 22 avec :
   a. le moins de pièces possible.
   b. le plus de pièces possible.
4. Montrer qu'il est possible de faire un assemblage de périmètre **100**.
5. Quels sont les entiers qui peuvent être le périmètre d'un assemblage de telles pièces ?

## Éléments de solution

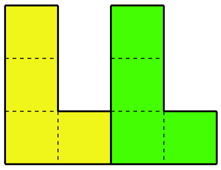
Il existe de nombreuses façons de répondre aux question **1** à **3**.

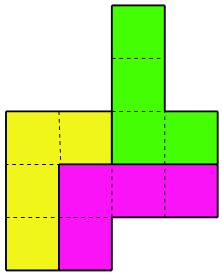
1. Un assemblage de périmètre **16** avec 3 pièces :

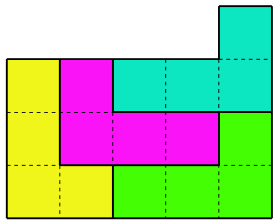


2. Un assemblage de périmètre **18** avec :

**a)** 2 pièces : **b)** 3 pièces : **c)** 4 pièces :

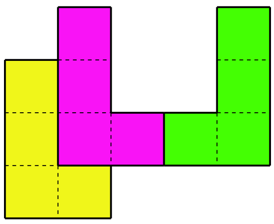


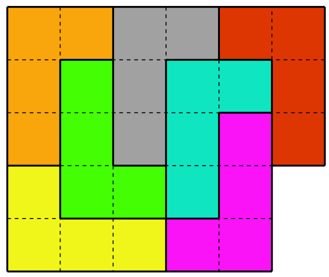




3. Un assemblage de périmètre **22** avec :

**a)** Le moins de pièces possible (3 pièces) : **b)** Le plus de pièces possible (7 pièces) :

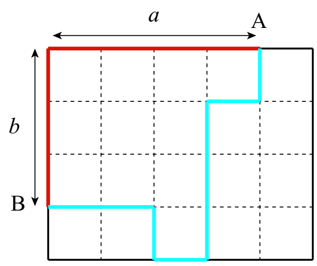




***Remarques*** :

1) Il n'est pas possible d'utiliser moins de 3 pièces car le périmètre maximum obtenu avec 2 pièces est **18**. C'est le périmètre d'un asseemblage de deux pièces attenantes par une seule arête. (*voir question 2a.*).

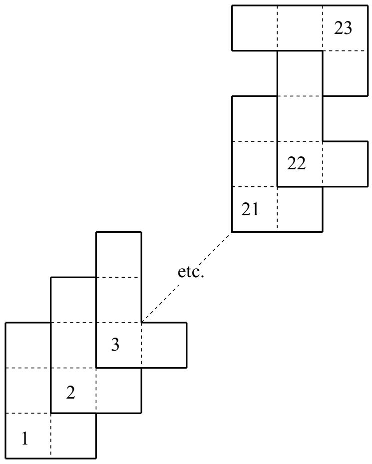
2) Sur un quadrillage, pour aller d'un point A à un point B, situé à $a$ colonnes et $b$ lignes, il faut parcourir une distance au moins égale à $a + b$. (*voir la figure ci-contre*).




En conséquence, le périmètre de l'assemblage est toujours supérieur ou égal à celui du plus petit rectangle dans lequel on peut inscrire cet assemblage.
Donc, pour obtenir un périmètrte égal à 22, il faut pouvoir inscrire l'assemblage dans un rectangle dont le plus petit côté est $\leqslant 5$. En effet, si le plus petit côté est $\geqslant 6$, le périmètre sera nécessairement $\geqslant 6 \times 4 = 24$.
D'autre part, avec 8 pièces, l'aire totale de l'assemblage est $8 \times 4 = 32$. Le tableau ci-dessous montre donc qu'il n'est pas possible de construire un assemblage de périmètre **22** avec 8 pièces.

| Petit côté | Grand côté minimal | Périmètre |
|---|---|---|
| 5 | 7 | 24 |
| 4 | 8 | 24 |
| 3 | 11 | 28 |
| 2 | 16 | 36 |

4. Le dessin ci-dessous montre qu'il est possible de faire un assemblage de périmètre **100**



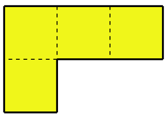

Les 20 pièces numérotées 2 à 21 fournissent chacune 4 arêtes pour le calcul du périmètre. La pièce numérotée 1 fournit 7 arêtes, la pièce numérotée 22 en fournit 5 et la pièce numérotée 23 en fournit 8. Soit un total de :

$$7 + 20 \times 4 + 5 + 8 = \mathbf{100}.$$

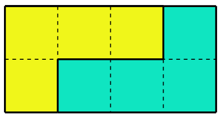
Remarque :
Il existe évidemment bien d'autres façons de réaliser un assemblage de périmètre **100**.

5. Les entiers qui peuvent être le périmètre d'un assemblage de telles pièces sont les nombres pairs supérieurs ou égaux à 10.

Explication :
Lorsque deux pièces sont accolées, on neutralise autant d'arêtes sur les deux pièces donc un nombre pair d'arêtes. Comme une pièce a dix arêtes, les assemblages ont tous un périmètre pair supérieur ou égal à 10.
Le périmètre 10 est obtenu avec une seule pièce et le périmètre 12 avec deux pièces « emboîtées » comme indiqué ci-dessous :

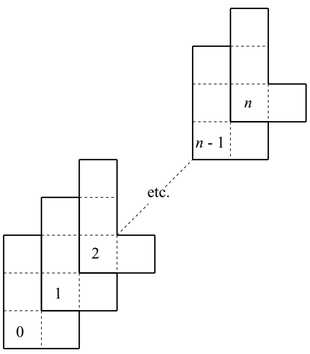


périmètre **10**

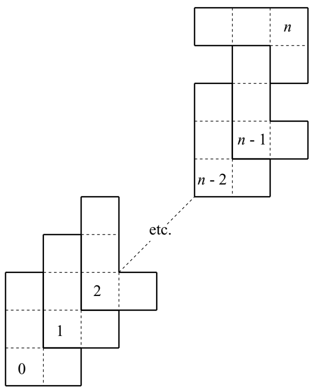


périmètre **12**

D'autre part, les périmètres pairs suivants sont de la forme $10 + 4n$ ou $12 + 4n$ , avec $n \geqslant 1$. Les deux schémas ci-dessous montrent que l'assemblage ayant un tel périmètre est toujours possible.




(1) périmètre de la forme $10 + 4n$




(2) périmètre de la forme $12 + 4n$

En comptant comme dans la question 2, on obtient comme périmètre :

$$(1) \quad 7 + (n - 1) \times 4 + 7 = 10 + 4n$$

$$(2) \quad 7 + (n - 2) \times 4 + 5 + 8 = 12 + 4n$$

Retour au sommaire

# LILLE

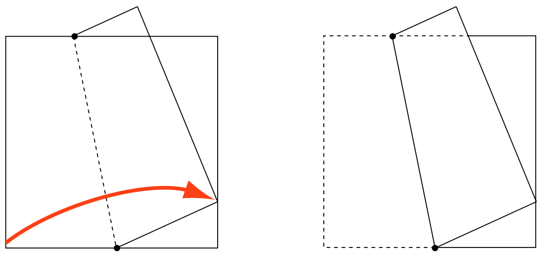
## Premier exercice académique

Série S

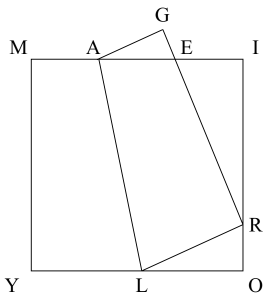
***Les triangles de Lorie Gamy***

### Énoncé

Lorie Gamy adore plier des feuilles de papier. Aujourd'hui, elle a plié une feuille carrée (de côté 1) en amenant un sommet sur un point d'un côté opposé, comme indiqué sur la figure.



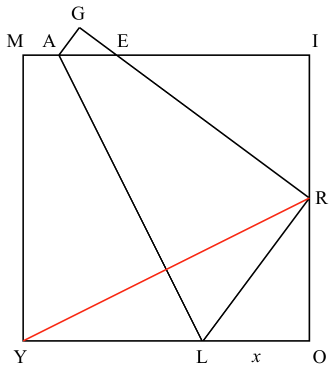
Lorie nomme alors chaque sommet en utilisant les lettres de son nom et de son prénom, puis s'intéresse aux deux triangles LOR et RIE.




1. Démontrer que les deux triangles de Lorie ont leurs angles de même mesure.
2. Lorie amène le sommet nommé Y sur le milieu de [OI].
   a. Faire une figure. *R doit être situé au milieu de* [OI].
   b. Quelle est alors la position de E sur [MI] ?
   On pourra poser $OL = x$.
3. Où doit être situé le point R sur le segment [OI] pour que E soit le milieu de [MI] ?
   On pourra poser $IR = y$.
4. Lorie est curieuse de savoir comment le périmètre du triangle RIE varie quand R parcourt le segment [OI]. Pouvez-vous l'aider à répondre à cette question ?

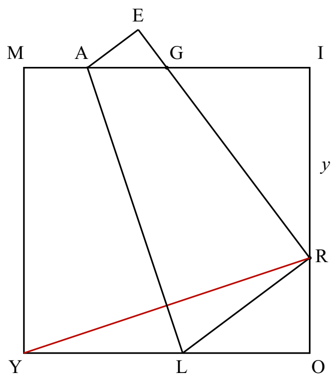
### Éléments de solution

1. $\widehat{LRO} + \widehat{ERI} + \widehat{ERL} = 180^o$
   D'où $\widehat{LRO} + \widehat{ERI} = 90^o$
   et $\begin{cases} \widehat{RLO} = 90^o - \widehat{LRO} = \widehat{ERI} \\ \widehat{IER} = 90^o - \widehat{ERI} = \widehat{LRO} \end{cases}$
2. a. Construction de la figure avec R milieu de [IO]

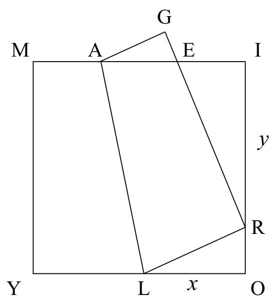



b. Position de E sur [MI]
Si on pose $OL = x$ et compte tenu de $OR = RI = \dfrac{1}{2}$,
on a $LR^2 = YL^2 = (1-x)^2$ et $LR^2 = LO^2 + OR^2 = x^2 + \dfrac{1}{4}$
D'où $1 - 2x = \dfrac{1}{4}$ ou $x = \dfrac{3}{8}$.
On a aussi $\dfrac{EI}{IR} = \dfrac{OR}{OL} = \dfrac{1}{2x}$ d'où $EI = \dfrac{1}{4x} = \dfrac{2}{3}$.

3. Si on pose $IR = y$ et si E est le milieu de [MI], $EI = \dfrac{1}{2}$
et $IR = y$
d'où $\dfrac{OR}{OL} = \dfrac{EI}{IR} = \dfrac{1}{2y}$ avec $OR = 1 - y$
donc $OL = 2y(1-y)$
et $LY^2 = (1-OL)^2 = LR^2 = LO^2 + OR^2$.
$1 - 2OL = OR^2$ ou $1 - 4y(1-y) = (1-y)^2$
ou $1 - 4y + 4y^2 = 1 - 2y + y^2$
ou $3y^2 = 2y$ soit $y = \dfrac{2}{3}$.




4. Posons $OL = x$ et $IR = y$ et nommons $p$ le périmètre du triangle RIE et $p'$ celui du triangle LOR.
On a $\dfrac{p}{p'} = \dfrac{IR}{OL} = \dfrac{y}{x}$, $p' = x + (1-x) + (1-y) = 2 - y$
et $(1-x)^2 = x^2 + (1-y)^2$ soit $2x - 2y + y^2 = 0$ ou $x = \dfrac{y(1-y)}{2}$
et finalement $p = \dfrac{y}{x}(2-y) = 2$.




Retour au sommaire

# LILLE

## Deuxième exercice académique

Série S

***Des couples parfaits***

### Énoncé

Le couple d'entiers (25 ; 36) possède deux propriéts remarquables :

- Ce sont des carrés parfaits.
- Le deuxième nombre s'écrit avec les chiffres du premier augmentés de 1, dans le même ordre.

Bernard et Cécile cherchent d'autres couples vérifiant ces deux propriétés.

### Partie I

Dans un premier temps, ils se limitent aux entiers inférieurs à 100 pour tester leur méthode.

1. Existe-t-il des couples d'entiers à deux chiffres (compris entre 10 et 99) vérifiant ces deux propriétés ?
2. Pour vérifier leurs résultats, Bernard propose l'algorithme suivant :

**Pour** $i$ allant de 10 à 88
  **Si** $\sqrt{i}$ est un entier et $\sqrt{i+11}$ est un entier
    **Alors** écrire $i$ et $i+11$
  **Fin** du Si
**Fin** du Pour

Cécile propose l'algorithme suivant

**Pour** $i$ allant de 4 à 9
  **Si** $\sqrt{i^2+11}$ est un entier
    **Alors** écrire $i^2$ et $i^2+11$
  **Fin** du Si
**Fin** du Pour

Pour chaque algorithme, on appellera temps de l'algorithme le nombre de fois que le programme correspondant rencontrera une condition (**Si**) ; par exemple, le temps de l'algorithme de Bernard est 79.

a. Pour chaque algorithme proposé, expliquer ce que représente la variable $i$.

b. Quel est le temps de l'algorithme de Cécile.

### Partie II

Bernard et Cécile cherchent maintenant les couples d'entiers naturels à quatre chiffres (compris entre 1000 et 9999) vérifiant les deux propriétés.

(a) Comment chacun peut-il transformer son algorithme pour résoudre le problème ?
Quel sera alors le temps de chaque algorithme ?

(b) Quelle est la réponse au problème posé ?

(c) René ne sait pas écrire d'algorithme. Comment peut-il résoudre le problème malgré tout ?

### Partie III

Dans le cas des couples d'entiers à trois chiffres (compris entre 100 et 999), que vont donner les algorithmes adaptés de Bernard et Cécile ?
Quelle est la réponse au problème posé ?

## Éléments de solution

### Partie I

a. Soit $(a^2, b^2)$ le couple d'entiers cherché.
Dans l'algorithme de Bernard $i$ représente $a^2$

b. Dans l'algorithme de Cécile, $i$ représente $a$ et le temps est 9-3=6.

### Partie II

1. Bernard doit remplacer les trois premières lignes de son algorithme : :

```
Pour i allant de 1000 à 8888
    Si √i est un entier et √(i + 1111) est un entier
        Alors écrire i et i + 1111
    Fin du Si
Fin du Pour
```

Le temps de ce nouvel algorithme est 7889.
Cécile doit remplacer les trois premières lignes de son algorithme :

```
Pour i allant de 32 à 99
    Si √(i² + 1111) est un entier
        Alors écrire i² et i² + 1111
    Fin du Si
Fin du Pour
```

Le temps de ce nouvel algorithme est 68.

2. La réponse est (2025, 3136), obtenue pour $i = 45$.
3. On a $b^2 = a^2 + 1111$ ou $b^2 - a^2 = 1111 = 11 \times 101$ produit de deux nombres premiers.
D'où $b + a = 101$ et $b - a = 11$, d'où $b = 56$ et $a = 45$, puis $a^2 = 2025$ et $b^2 = 3136$ ; on vérifie que $3136 = 2025 + 1111$.
L'alternative $b + a = 1111$ et $b - a = 1$ qui conduirait à $b = 551$ ne convient pas car $551^2 > 10000$.

### Partie III

On a maintenant $b^2 = a^2 + 111$
d'où $b^2 - a^2 = 3 \times 37$ produit de deux nombres premiers
d'où $b + a = 37$ et $b - a = 3$ d'où $b = 20$ et $a = 17$,
$b^2 = 400$ et $a^2 = 289$ ; on vérifie que $400 = 289 + 111$.

L'alternative $b + a = 111$, $b - a = 1$ donnerait $a = 55$ et $b = 56$ donc $b^2 = 3136$ qui a quatre chiffres et donc ne convient pas.

Retour au sommaire

# LILLE

## Troisième exercice académique

Séries auttres que S

***Au Bowling***

### Énoncé

Une partie de bowling comporte 10 jeux. Chaque jeu consiste à abattre les dix quilles placées en bout de piste. Pour cela, le joueur dispose, au maximum, de deux lancers d'une boule.A l'issue de chaque jeu, le nombre de points marqués correspond au nombre de quilles tombées, avec des bonus lorsque le joueur réalise un Spare ou un Strike qui sont définis ci-dessous.

**Spare** : Le joueur qui, dans un jeu, fait tomber les dix quilles en deux lancers de boules d'un même jeu réalise un Spare. Dans ce cas, le bonus accordé est égal au nombre de quilles abattues **lors du lancer suivant**.

**Strike** : Le joueur qui, dans un jeu, fait tomber les dix quilles au premier lancer (Il ne joue donc qu'une fois pour ce jeu) réalise un Strike. Dans ce cas, le bonus accordé est égal au nombre de quilles abattues lors **des deux lancers suivants**.

Enfin, au dixième jeu :

- Si le joueur réalise un Spare, il bénéficie d'un lancer supplémentaire qui donnera le bonus accordé pour ce Spare.
- Si le joueur réalise un Strike, il bénéficie de deux lancers supplémentaires qui donneront le bonus accordé pour ce Strike.

Par exemple, le score de la partie suivante est 134 points.

| Numéro du jeu | 1 | | 2 | | 3 | | 4 | | 5 | | 6 | | 7 | | 8 | | 9 | | 10 | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Quilles abattues | 5 | 1 | 8 | 2 | 7 | 1 | 10 | | 5 | 3 | 10 | | 10 | | 8 | 1 | 4 | 2 | 8 | 2 | 5* | Total |
| Points | 6 | | 10 | | 8 | | 10 | | 8 | | 10 | | 10 | | 9 | | 6 | | 10 | | | 87 |
| Bonus | | | 7 | | | | 8 | | | | 18 | | 9 | | | | 9 | | 5 | | | 47 |

* Ayant réalisé un spare au dixième jeu, le joueur a bénéficié d'un lancer supplémentaire. Les 5 quilles abattues lui ont rapporté 5 points de bonus.

Soit un score de 134 points.

1. Déterminer le bonus maximal lorsqu'un joueur réalise un Spare.
2. Déterminer le bonus maximal lorsqu'un joueur réalise un Strike.
3. En complétant les cases adéquates du tableau suivant, montrer que la partie correspondante amène à un score de 183 points.

| Numéro du jeu | 1 | | 2 | | 3 | | 4 | | 5 | | 6 | | 7 | | 8 | | 9 | | 10 | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Quilles abattues | 4 | 6 | 10 | | 7 | 3 | 10 | | 10 | | 10 | | 8 | 2 | 0 | 10 | 3 | 1 | 10 | 5 | 3 | Total |
| Points | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Bonus | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |

4. Montrer que le score maximal d'une partie est égal à 300 points.
5. Sous la forme d'un tableau semblable à celui de l'exemple du début de l'énoncé, déterminer une partie aboutissant à un score de 150 points.
6. Jacques est très régulier. Lorsqu'il lance une boule, il fait toujours tomber le même nombre de quilles sans jamais réaliser de Strike, mais, en en renversant toujours au moins une. Quel est le plus petit score qu'il puisse réaliser ? Quel est le plus grand score qu'il puisse réaliser ?

7. Au terme des neuf premiers jeux, Michel a obtenu le score partiel de 80 points, François en est à 89 points. Sachant que les deux joueurs ne disposent alors d'aucun bonus possible et que François ne réussit jamais à abattre les dix quilles en un seul lancer, dans quel(s) cas, Michel peut-il espérer faire mieux que François indépendamment du score que fera François lors du dernier jeu ?

## Éléments de solution

1. Le bonus accordé pour un Spare est le résultat d'un lancer donc le maxiomum est 10.
2. Pour un Strike, le bonus est égal au nombre de quilles abattues lors des deux lancers suivants. Le maximum est donc $2 \times 10 = 20$.
3. De proche en proche, on remplit le tableau ci-dessous :

| Numéro du jeu | 1 | | 2 | | 3 | | 4 | | 5 | | 6 | | 7 | | 8 | | 9 | | 10 | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Quilles abattues | 4 | 6 | 10 | | 7 | 3 | 10 | | 10 | | 10 | | 8 | 2 | 0 | 10 | 3 | 1 | 10 | 5 | 3 | Total |
| Points | 10 | | 10 | | 10 | | 10 | | 10 | | 10 | | 10 | | 10 | | 4 | | 10 | | | 94 |
| Bonus | 10 | | 10 | | 10 | | 20 | | 18 | | 10 | | | | 3 | | | | 8 | | | 89 |

Le score est bien $94 + 89 = 183$ points

4. Le score maximal d'une partie est égal à $10 \times (10 + 20) = 300$ points.
5. Il y a de nombreuses possibilités, par exemple :

| Numéro du jeu | 1 | | 2 | | 3 | | 4 | | 5 | | 6 | | 7 | | 8 | | 9 | | 10 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Quilles abattues | 4 | 6 | 10 | | 7 | 3 | 10 | | 10 | | 10 | | 8 | 2 | 0 | 10 | 3 | 1 | 0 | Total |
| Points | 10 | | 10 | | 10 | | 10 | | 10 | | 10 | | 10 | | 1 | | 1 | | 0 | 72 |
| Bonus | 10 | | 10 | | 10 | | 20 | | 18 | | | | | | | | | | | 78 |

Avec $72 + 78 = 150$.

6. Soit $n$ le nombre de quilles renversées par Jacques. On a $n \geqslant 1$ et $2n \leqslant 10$, donc $1 \leqslant n \leqslant 5$.
   - Le score minimal est obtenu pour $n = 1$ qui rapporte deux points par jeu, soit $2 \times 10 = 20$ points.
   - Le score maximal est obtenu pour $n = 5$. Jacques réalise ainsi 10 Spare et obtient pour chacun d'eux un bonus de 5. Le score maximal est $(5 + 5 + 5) \times 10 = 150$ points.
7. Michel peut espérer obtenir un Strike et abattre toutes les quilles à chacun des deux lancers suivants. Son score est alors $80 + 30 = 110$ points.
   François peut, au mieux, espérer un Spare et obtenir $89 + 10 + 9 = 108$ points.

Retour au sommaire

# LILLE

## Quatrième exercice académique

Séries autres que S

***Des couples parfaits***

### Énoncé

Le couple d'entiers (25 ; 36) possède deux propriéts remarquables :

- Ce sont des carrés parfaits.
- Le deuxième nombre s'écrit avec les chiffres du premier augmentés de 1, dans le même ordre.

Bernard et Cécile cherchent d'autres couples vérifiant ces deux propriétés.

#### Partie I

Dans un premier temps, ils se limitent aux entiers inférieurs à 100 pour tester leur méthode.

1. Existe-t-il des couples d'entiers à deux chiffres (compris entre 10 et 99) vérifiant ces deux propriétés ?
2. Pour vérifier leurs résultats, Bernard propose l'algorithme suivant :

```
Pour i allant de 10 à 88
    Si √i est un entier et √(i + 11) est un entier
        Alors écrire i et i + 11
    Fin du Si
Fin du Pour
```

Cécile propose l'algorithme suivant

```
Pour i allant de 4 à 9
    Si √(i² + 11) est un entier
        Alors écrire i² et i² + 11
    Fin du Si
Fin du Pour
```

Pour chaque algorithme, on appellera temps de l'algorithme le nombre de fois que le programme correspondant rencontrera une condition (**Si**) ; par exemple, le temps de l'algorithme de Bernard est 79.

a. Pour chaque algorithme proposé, expliquer ce que représente la variable $i$.

b. Quel est le temps de l'algorithme de Cécile.

#### Partie II

Bernard et Cécile cherchent maintenant les couples d'entiers naturels à quatre chiffres (compris entre 1000 et 9999) vérifiant les deux propriétés.

(a) Comment chacun peut-il transformer son algorithme pour résoudre le problème ?
Quel sera alors le temps de chaque algorithme ?

(b) Quelle est la réponse au problème posé ?

(c) René ne sait pas écrire d'algorithme. Comment peut-il résoudre le problème malgré tout ?

## Éléments de solution

### Partie I

a. Soit $(a^2, b^2)$ le couple d'entiers cherché.
Dans l'algorithme de Bernard $i$ représente $a^2$

b. Dans l'algorithme de Cécile, $i$ représente $a$ et le temps est 9-3=6.

### Partie II

1. Bernard doit remplacer les trois premières lignes de son algorithme : :

```
Pour i allant de 1000 à 8888
    Si √i est un entier et √(i + 1111) est un entier
        Alors écrire i et i + 1111
    Fin du Si
Fin du Pour
```

Le temps de ce nouvel algorithme est 7889.
Cécile doit remplacer les trois premières lignes de son algorithme :

```
Pour i allant de 32 à 99
    Si √(i² + 1111) est un entier
        Alors écrire i² et i² + 1111
    Fin du Si
Fin du Pour
```

Le temps de ce nouvel algorithme est 68.

2. La réponse est (2025, 3136), obtenue pour $i = 45$.

3. On a $b^2 = a^2 + 1111$ ou $b^2 - a^2 = 1111 = 11 \times 101$ produit de deux nombres premiers.
D'où $b + a = 101$ et $b - a = 11$, d'où $b = 56$ et $a = 45$, puis $a^2 = 2025$ et $b^2 = 3136$ ; on vérifie que $3136 = 2025 + 1111$.
L'alternative $b + a = 1111$ et $b - a = 1$ qui conduirait à $b = 551$ ne convient pas car $551^2 > 10000$.

Retour au sommaire

# LIMOGES

## Premier exercice académique

Toutes séries

***Grille logique***

### Énoncé

Remplir la grille à l'aide des nombres 1 à 25 en respectant les critères donnés et la règle suivante :

($R$) Deux nombres consécutifs ne peuvent pas être placés dans des cases voisines (*par le côté ou par le sommet*).

| | A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|---|
| a | | | | | |
| b | | | | | |
| c | | | | | |
| d | | | | | |
| e | | | | | |

**A** : les nombres sont ordonnés (*du plus petit au plus grand ou du plus grand au plus petit*).
**B** : la différence entre le plus grand et le plus petit vaut 23.
**C** : les nombres sont multiples de trois.
**D** : la somme des deux premiers nombres égale celle des deux derniers.
**E** : les nombres sont multiples de cinq.
**a** : la somme des nombres vaut 110.
**d** : le produit des nombres vaut 15015.
**e** : les nombres sont des carrés d'entier.

Décrire le remplissage de la grille en justifiant chaque étape.

### Éléments de solution

Quatre solutions :

| | **A** | **B** | **C** | **D** | **E** |
|---|---|---|---|---|---|
| **a** | 22 | 24 | 21 | 23 | 20 |
| **b** | 19 | 2 | 12 | 6 | 10 ou 15 |
| **c** | 17 | 14 | 18 | 8 | 10 ou 15 |
| **d** | 11 ou 7 | 11 ou 7 | 3 | 13 | 5 |
| **e** | 4 | 1 | 9 | 16 | 25 |

Commençons par étudier les critères donnant des informations directement accessibles :

- (1) La colonne B contient 24 (et ne contient pas 25)
- (2) La colonne E contient 5, 10, 15, 20, 25
- (3) La colonne C utilise les nombres parmi {3, 6, 9, 12, 18, 21}. 24 et 15 sont écartés d'après (1) et (2).

- (4) La ligne d contient les nombres $\{3, 5, 7, 11, 13\}$ car $15015 = 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13$
- (5) La ligne e contient les nombres $\{1, 4, 9, 16, 25\}$
- (6) La ligne a contient $\{20, 21, 22, 23, 24\}$ car 25 étant écarté d'après (4), la seule décomposition de 110 restante est $110 = 24 + 23 + 22 + 21 + 20$.
- (7) La colonne A est ordonnée du plus grand au plus petit dans le sens de haut en bas car les nombres les plus grands sont sur ligne a d'après (6), excepté 25 qui est en colonne E d'après (2).

(3) et (4) donnent deux listes ayant un seul nombre en commun, donc 3 est en dC.
(3) et (5) donnent pour la même raison 9 en eC.
(1) et (6) donnent pour la même raison 24 en aB.
(3) et (6) donnent pour la même raison 21 en aC.
(2) et (6) donnent pour la même raison 20 en aE.
(2) et (5) donnent pour la même raison 25 en eE.
(2) et (4) donnent pour la même raison 5 en dE.
(R) et (6) donnent 22 en aA, car 22 ne peut être placé à côté de 21, et 23 en aD, seule place restante.
(R) et (5) donnent 4 en eA car 4 ne peut être placé à côté de 3, et donc 16 en eD.

(4) et le critère sur la colonne D donne seulement trois possibilité pour la case dD :
$16 + 7 = 23 et 23 = 23 + 0$ mais 0 ne peut être mis en bD
$16 + 11 = 27$ et $27 = 23 + 4$ mais 4 est déjà utilisé.
$16 + 13 = 29$ et $29 = 23 + 6$ seule solution possible.
Donc 13 est en dD et 6 en bD.
(R) et (3) Il reste 12 et 18 à placer, mais 12 ne peut être placé à côté de 13 donc 12 est en bC et 18 en cC.
(R), (2) et (7) 19 n'est pas sur la colonne E et ne peut être à côté de 18 donc il est sur la colonne A. L'ordre des nombres impose le 19 en bA.
(R), (2) et (7) donnent pour les mêmes raisons 17 en cA.
(R) et (2) la seule place pour le 16 est cD, car il ne peut être placé à côté d 17 et n'est pas sur la colonne E.
(R), (2) et (4) donnent 2 en bB. Car 2 n'est pas sur la colonne E, pas sur la ligne d et ne peut être placé à côté de 3. bB est la seule case restante.
(2) et (4) donnent 14 en cB. Car 14 n'est ni sur la colonne E, ni sur la ligne d.
Les contraintes ont toutes été exploitées entièrement.

**Ainsi 7 et 11 occupent les cases dA et dB tandis que 10 et 15 occupent les cases bE et cE. Il y a donc 4 solutions.**

Retour au sommaire

# LIMOGES

## Deuxième exercice académique

Série S

***Auto-référence***

### Énoncé

Le tableau ci-dessous est auto-référent. La dernière ligne se décrit d'elle-même.

| Nombre | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| Apparitions du nombre sur cette ligne | 1 | 2 | 1 | 0 |

On peut effectivement constater que la dernière ligne contient

- 1 fois le nombre 0,
- 2 fois le nombre 1,
- 1 fois le nombre 2,
- 0 fois le nombre 3.

On appelle tableau *auto-référent d'ordre $n$* un tableau auto-référent qui contient sur la première ligne tous les entiers de 0 à $n$. Le tableau précédent est donc d'ordre 3.

1. Proposer un deuxième tableau auto-référent d'ordre 3.

| Nombre | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| Apparitions du nombre sur cette ligne | | | | |

   Existe-t-il un troisième tableau d'ordre 3 ?

2. Quelle est nécessairement la somme des nombres de la dernière ligne pour un tableau auto-référent d'ordre 3 ? et pour un tableau auto-référent d'ordre $n$ ?
3. Proposer un tableau auto-référent d'ordre 4.

| Nombre | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| Apparitions du nombre sur cette ligne | | | | | |

   Existe-t-il un autre tableau auto-référent d'ordre 4 ?

4. Montrer qu'on ne peut pas construire un tableau auto-référent d'ordre 5

| Nombre | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Apparitions du nombre sur cette ligne | | | | | | |

5. Proposer un tableau auto-référent d'ordre 6

| Nombre | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Apparitions du nombre sur cette ligne | | | | | | | |

6. Sur le modèle du tableau précédent, montrer qu'on peut construire un tableau auto-référent d'ordre $n$, pour tout entier $n$ supérieur ou égal à 6.

### Éléments de solution

Dans la suite, on note $\mathrm{A}(n)$ le nombre d'apparitions de $n$ dans la dernière ligne.

1. Unique autre solution :

| Nombre | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| Apparitions du nombre sur cette ligne | 2 | 0 | 2 | 0 |

La somme des nombres de la dernière ligne est nécessairement 4.
On a forcément A(3)=0, donc A(0) $\geqslant$ 1. Si A(2)=0, alors A(2) $\geqslant$ 2 : absurde.
Si A(2) = 1 alors A(0) = 1 et A(0) = 2 : c'est l'exemple.
Si A(2) = 2 alors A(0) = 2 et A(1) = 0 : c'est la deuxième solution.

2. Pour un tableau d'ordre 3, la somme des nombres de la dernière ligne est nécessairement 4.
Pour un tableau d'ordre $n$, la somme des nombres de la dernière ligne est nécessairement $n + 1$.

3. Unique **tableau auto-référent d'ordre 4** :

| Nombre | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| Apparitions du nombre sur cette ligne | 2 | 1 | 2 | 0 | 0 |

On prouve rapidement que A(4) = A(3) = 0, donc A($i$) $\leqslant$ 2 pour tout $0 \leqslant i \leqslant 4$.
Si A(2) = 0 alors A(0) $\geqslant$ 3 : absurde.
Si A(2) = 1 alors A(0) + A(1) = 4 donc A(0) = A(1) = 2 : absurde. Donc A(2) = 2, et nécessairement A(0) = 2 et A(1) = 1.

4. **Tableau auto-référent d'ordre 5**. On essaie de remplir en partant de la droite.
Si A(5) = 1 alors la dernière ligne contient un 5. Puisqu'il y a déjà un 1, la seule possibilité est A(1) = 5 avec des 1 partout ailleurs, ce qui est absurde. Donc A(5) = 0.
Si A(4) = 1 alors la dernière ligne contient un 4. Elle contient déjà un 1 et un 0, donc

   - soit A(0) = 4 avec des 0 partout ailleurs sauf pour A(4),
   - soit A(1) = 4 avec des 1 partout ailleurs sauf pour A(5).

   Dans les deux cas, c'est absurde donc A(4) = 0. Si A(3) = 1 alors la dernière ligne contient un 3. Elle contient déjà un 1 et deux 0, donc

   - soit A(1) = 3 avec des 1 partout ailleurs sauf pour A(4) et A(5), ce qui est absurde,
   - soit A(0) = 3. Dans ce cas, A(1) > 0 car A(3) = 1, donc A(2) = 0. Mais il est alors impossible de définir la valeur de A(1).

5. Unique **tableau référent d'ordre 6**

| Nombre | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Apparitions du nombre sur cette ligne | 3 | 2 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |

6. **Tableau référent d'ordre** $n$, pour tout entier $n \geqslant 6$.

| Nombre | 0 | 1 | 2 | ... | $n-3$ | $6n-2$ | $n-1$ | 0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Apparitions du nombre sur cette ligne | $n-3$ | 2 | 1 | ... | 1 | 0 | 0 | 0 |

Les cases en pointillés de la dernière ligne sont éventuellement remplies avec des 0.

Retour au sommaire

# LIMOGES

## Troisième exercice académique

Séries autres que S

***Les nombres belges***

### Énoncé

On choisit un nombre à deux chiffres.
On construit alors une suite de nombres en partant de zéro et en ajoutant tour à tour le chiffre des dizaines puis le chiffre des unités du nombre choisi.

*Exemples* :
On choisit 25 :
On construit alors la suite : 0 ; 2 ; 7 ; 9 ; 14 ; 16 ; 21 ; 23 ; 28 ; ... etc.
On choisit 13 :
On construit alors la suite : 0 ; 1 ; 4 ; 5 ; 8 ; 9 ; 12 ; **13** ; 16 ; 17 ; ... etc.

Définition :
On dit qu'un nombre est un ***nombre belge*** s'il figure dans la suite qu'il permet de construire.

Ainsi 13 est un nombre belge alors que 25 ne l'est pas.

1. 27 est-il un nombre belge ?
2. Quel est le plus petit nombre à deux chiffres qui n'est pas belge ?

Soit $M = \underline{ab}$ un nombre à deux chiffres où $a$ désigne le chiffre des dizai,ne et $b$ celui des unités.

3. Montrer que si $M$ est multiple de $a + b$ alors $M$ est belge.
4. Montrer que si $M - a$ est multiple de $a + b$ alors $M$ est belge.
5. Est-il possible de trouver un nombre belge à deux chiffres qui ne vérifie pas l'une des deux conditions précédentes ? Si oui donner le plus petit, et si non expliquer pourquoi.
6. Établir la liste des 10 premiers nombres belges à 2 chiffres.

**Nombres à trois chiffres :**
On reprend la même définition, mais on construit la suite associée en ajoutant cette fois tour à tour le chiffre des centaines, puis celui des dizaines, puis celui des unités du nombre choisi.

7. Montrer que 112 est belge.
   Trouver le plus petit nombre belge supérieur ou égal à 113.
   À quelle(s) condition(s) un nombre à trois chiffres $M = \overline{abc}$ est-il un nombre belge ?

### Éléments de solution

a. On construit la suite associée à 27 :
   0 ; 2 ; 9 ; 11 ; 18 ; 20 ; 27 ; 29 ; ... On constate que 27 est belge.

b. 14 est le plus petit nombre à 2 chiffres qui n'est pas belge.

   Comme on additionne tour à tour $a$ et $b$, les termes de la suite associée sont donc :
   $u_1 = a$, $u_2 = a + b$, $u_3 = 2a + b$, $u_4 = 2a + 2b$, par une récurrence simple, on obtient :
   $u_{2p} = pa + pb$, $u_{2p+1} = (p + 1)a + pb$.

c. Si $M$ est multiple de $a + b$, il existe $k$ tel que $M = ka + kb = u_{2k}$ et donc $M$ est belge.

d. Si $M - a$ est multiple de $a + b$, il existe $t$ tel que $M - a = ta + tb$, donc $M = (t + 1)a + tb = u_{2k+1}$, et donc $M$ est belge.

e. D'après * seuls les nombres de la forme du c) ou du d) peuvent être belges.

f. les 11 premiers nombres belges sont

10 (multiple de $1 + 0$)
11 ($11 - 1$ multiple de $1 + 1$) ;
12 (multiple de $1 + 2$) ;
13 ($13 - 1$ multiple de $1 + 3$) ;
17 ($17 - 1$ multiple de $1 + 7$) ;
18 (18 multiple de $1 + 8$) ;
20 (20 multiple de $2 + 0$) ;
21 (21 multiple de 2+1) ;
24 (24 multiple de $2 + 4$) ;
27 (27 multiple de $2 + 7$) ;
30 (30 multiple de $3 + 0$)

...

g. Pour les nombres à trois chiffres on peut chercher la généralisation d'abord (c'est moins fastidieux que de dresser la liste... )
$M = \underline{abc}$ est belge si et seulement si $M$ ou $M - a$ ou $M - (a + b)$ est multiple de $a + b + c$.

Ainsi 112 est belge car $112 = (1 + 1 + 2) \times 28$,
113 ne l'est pas et le plus petit nombre belge supérieur à 113 est 120 car $120 = (1 + 2 + 0) \times 40$.

Retour au sommaire

# LYON

## Premier exercice académique

Toutes série

***Carrés et cubes***

### Énoncé

Un, deux, trois ou quatre côtés d'un carré de côté $n$ ($n$ entier naturel supérieur ou égal à deux) sont peints en rouge. On découpe ce carré en $n^2$ petits carrés de côté 1.

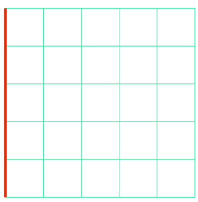
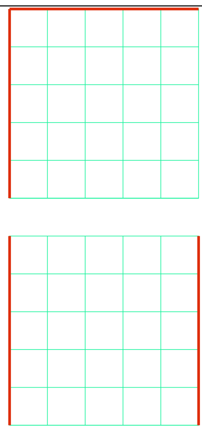
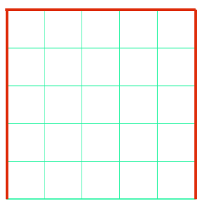
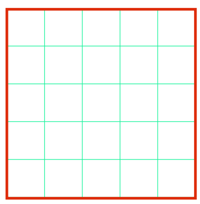
1. Dans cette question, $n = 5$. Pour chaque façon de peindre les côtés du carré que l'on précisera, déterminer le nombre de petits carrés ayant au moins un côté rouge ?
2. Julie a obtenu 28 petits carrés ayant au moins un côté rouge. Que peut valoir $n$ ?

On peint maintenant, une, deux, trois, quatre, cinq, ou six faces d'un cube de côté $n$ en rouge. On coupe ce cube en $n^3$ petits cubes d'arête 1.

3. Dans cette question, $n = 5$. Pour chaque façon de peindre les faces du cube que l'on précisera, déterminer le nombre de petits cubes ayant au moins une face rouge ?
4. Exprimer en fonction de $n$, pour chaque façon de peindre le cube, le nombre de petits cubes ayant au moins une face peinte.
5. En peignant les six faces du cube, Julie a trouvé 728 petits cubes ayant au moins une face peinte. Existe-t-il une autre configuration (une, deux, trois, quatre ou cinq faces peintes) donnant également 728 petits cubes ayant au moins une face peinte ?

### Éléments de solution

1. Pour $n = 5$

| 1 côté rouge | 2 côtés rouges | 3 côtés rouges | 4 côtés rouges |
|---|---|---|---|
| 5 | 9 ou 10 | 13 | 16 |
|  |  |  |  |

2. Valeur de $n$ pour 28 carrés ayant au moins un côté rouge :

| 1 côté rouge | 2 côtés rouges | 3 côtés rouges | 4 côtés rouges |
|---|---|---|---|
| $n$ | $2n - 1$ ou $2n$ | $3n + 2$ | $4n - 4$ |

Julie peut donc avoir peint un côté d'un carré de côté 28, ou deux côtés opposés d'un carré de côté 14, ou trois côtés d'un carré de côté 10, ou enfin les quatre côtés d'un carré de côté 8.

3. 4.

| | 1 face rouge | 2 faces rouges | 3 faces rouges | 4 faces rouges | 5 faces rouges | 6 faces rouges |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $n = 5$ | 25 | 50 ou 45 | 65 ou 61 | 80 ou 77 | 89 | 98 |
| $n$ | $n^2$ | $2n^2$ ou $2n^2 - 2$ | $3n^2 - 2n$ ou $3n^2 - 3n + 1$ | $4n^2 - 4n$ ou $4n^2 - 5n + 2$ | $5n^2 - 8n + 4$ | $6n^2 - 12n + 8$ |

5. $4n^2 - 4n = 728$ est la seule équation donnant une solution entière positive : $n = 14$.

Retour au sommaire

# LYON

## Deuxième exercice académique

Toutes série

***Le café de Julie***

### Énoncé

Julie aime le café et se sert toujours une tasse de 200 mL. Hier, elle a bu son café de la manière suivante : elle a bu la moitié de son café, puis le tiers de ce qu'il restait, puis le quart de ce qu'il restait, et ainsi de suite jusqu'à boire le centième de ce qu'il restait. Aujourd'hui, le café est très chaud. Julie boit le centième du café, puis le quatre-vingt-dix-neuvième de ce qu'il reste, et ainsi de suite jusqu'à boire la moitié de ce qu'il reste.

1. Montrer qu'aujourd'hui, Julie a bu 198 mL de café.
2. Déterminer la quantité de café qui restait dans la tasse hier, et démontrer que
$$\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\cdots\frac{1}{99\times 100}=\frac{99}{100}.$$
3. Au lieu de boire $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{100}$ de son café, elle boit maintenant $\frac{1}{2^k}, \frac{1}{3^k}, \dots, \frac{1}{100^k}$ de son café, où $k$ est un nombre entier naturel, non nul. Quelle quantité de café a-t-elle bue si $k = 2$ ?
4. Au lieu de boire $\frac{1}{100}, \frac{1}{99}, \dots, \frac{1}{2}$ de son café, elle boit maintenant $\frac{1}{100^k}, \frac{1}{99^k}, \dots, \frac{1}{2^k}$ de son café. Quelle quantité de café a-t-elle bue si $k = 2$ ?
5. Pour $k$ quelconque, a-t-elle bu plus, moins ou autant de café si elle commence par boire $\frac{1}{2^k}$ ou $\frac{1}{100^k}$ de son café ?

### Éléments de solution

1.

| Etape | Disponible | Bu | Restant |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | $\frac{1}{100}\times 1=\frac{1}{100}$ | $\frac{99}{100}$ |
| 2 | $\frac{99}{100}$ | $\frac{1}{99}\times\frac{99}{100}=\frac{1}{100}$ | $\frac{98}{100}$ |
| 3 | $\frac{98}{100}$ | $\frac{1}{98}\times\frac{98}{100}=\frac{1}{100}$ | $\frac{97}{100}$ |
| ... | ... | ... | ... |

Finalement, Julie a bu quatre-vingt-dix-neuf fois un centième de son café :
$$\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\cdots+\frac{1}{100}\right)\times 200\text{ mL}\ =\frac{99}{100}\times 200\text{ mL}\ = 198\text{ mL}$$

2. Dans le cas d'hier où Julie a commencé par boire la moitié de son café, on peut caractériser les différentes étapes à l'aide du tableau ci-dessous :

| Etape | Disponible | Bu | Restant |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | $\frac{1}{2} \times 1$ | $\frac{1}{2}$ |
| 2 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$ |
| 3 | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{4} \times \frac{1}{3}$ | $\frac{1}{3} - \frac{1}{12} = \frac{1}{4}$ |
| ... | ... | ... | ... |

Finalement, au bout des quatre-vingt-dix-neuf étapes, il restera dans la tasse de Julie $1/100$ de son contenu initial, soit 2 mL.
L'égalité peut alors s'interpréter comme : la quantité de café bue est égale à la quantité de café initiale moins la quantité de café restante.

3. D'une façon générale, pour $k$, on peut construire un tableau semblable :

| Etape | Disponible | Bu | Restant |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | $\frac{1}{2^k} \times 1$ | $1 - \frac{1}{2^k}$ |
| 2 | $1 - \frac{1}{2^k}$ | $\left(1 - \frac{1}{2^k}\right) \frac{1}{3^k}$ | $1 - \frac{1}{2^k} - \left(1 - \frac{1}{2^k}\right) \frac{1}{3^k}$ $= \left(1 - \frac{1}{2^k}\right) (1 - \frac{1}{3^k})$ |
| 3 | $\left(1 - \frac{1}{2^k}\right) \left(1 - \frac{1}{3^k}\right)$ | $\left(1 - \frac{1}{2^k}\right) \left(1 - \frac{1}{3^k}\right) \frac{1}{4^k}$ | $\left(1 - \frac{1}{2^k}\right) \left(1 - \frac{1}{3^k}\right) \left(1 - \frac{1}{4^k}\right)$ |
| ... | ... | ... | ... |

Finalement, il restera dans la tasse de Julie

$$\prod_{n=2}^{100} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \times 200 \text{ mL} \ = \prod_{n=2}^{100} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \times \prod_{n=2}^{100} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \times 200 \text{ mL}$$

$$= \frac{1}{100} \times \frac{101}{2} \times 200 \text{ mL} \ = 101 \text{ mL}$$

Dans l'autre sens on a aussi :

| Etape | Disponible | Bu | Restant |
|---|---|---|---|
| 1 | $1$ | $\dfrac{1}{100^k} \times 1$ | $1 - \dfrac{1}{100^k}$ |
| 2 | $1 - \dfrac{1}{100^k}$ | $\left(1 - \dfrac{1}{100^k}\right) \dfrac{1}{99^k}$ | $1 - \dfrac{1}{100^k} - \left(1 - \dfrac{1}{100^k}\right) \dfrac{1}{99^k}$ <br> $= \left(1 - \dfrac{1}{100^k}\right) (1 - \dfrac{1}{99^k})$ |
| 3 | $\left(1 - \dfrac{1}{100^k}\right) \left(1 - \dfrac{1}{99^k}\right)$ | $\left(1 - \dfrac{1}{100^k}\right) \left(1 - \dfrac{1}{99^k}\right) \dfrac{1}{98^k}$ | $\left(1 - \dfrac{1}{100^k}\right) \left(1 - \dfrac{1}{993^k}\right) \left(1 - \dfrac{1}{98^k}\right)$ |
| ... | ... | ... | ... |

Finalement :

$$\prod_{n=2}^{100} \left(1 - \frac{1}{n^k}\right) = \prod_{n=100}^{2} \left(1 - \frac{1}{n^k}\right)$$

C'est évidemment le même produit, ce qui permet de répondre aux deux dernières questions. Julie a donc bu 99 mL et la façon de procéder ne change pas la quantité de café bu.

Retour au sommaire

# La MARTINIQUE

## Premier exercice académique

Toutes séries

***Jeu de cubes***

### Énoncé

On construit un grand cube au moyen de 64 petits cubes de 1cm de côté.

1. Quelle est la longueur du côté du grand cube ?
2. On peint le grand cube obtenu précédemment, puis on le démonte. On observe alors le nombre de faces peintes sur les petits cubes.
   a. Y a-t-il des petits cubes ayant 3 faces peintes ? Si oui, combien ?
   b. Indiquer toutes les possibilités, et pour chacune d'elles, donner le nombre de petits cubes concernés.
3. On reconstruit le grand cube et on note O son centre. Combien de petits cubes sont entièrement contenus à l'intérieur de la sphère de centre O et de rayon 2 cm ?
4. On rajoute à ce grand cube des petits cubes de 1 cm de côté de façon à obtenir un nouveau grand cube de 6 cm de côté.
   a. Combien de petits cubes doit-on rajouter ?
   b. Combien de petits cubes sont entièrement contenus dans la sphère centrée au centre du nouveau grand cube et de diamètre 6 cm ?

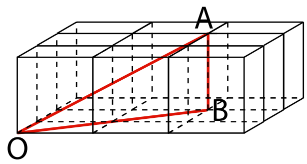
### Éléments de solution

On construit un grand cube au moyen de 64 petits cubes de 1 cm de côté.

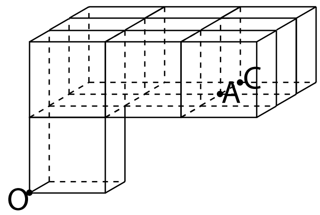
1. Le volume du grand cube est, par construction, égal à 64 cm$^3$. La longueur de son côté est donc donnée par le nombre dont le cube vaut **64**, soit **4 cm**.
2. a. **Oui**, il y a des petits cubes ayant 3 faces peintes : ce sont ceux qui sont aux sommets du grand cube. Il y en a donc **8**.
   b. Sur un petit cube, il peut y avoir :
      - 3 faces peintes : il y en a 8
      - 2 faces peintes s'il est sur une arête sans être sur un sommet : il y en a 2 sur chacune des 12 arêtes soit $\mathbf{12 \times 2 = 24}$ **petits cubes ayant 2 faces peintes**.
      - 1 face peinte s'il est sur une face sans être sur une arête : il y en a 4 sur chaque face soit $\mathbf{6 \times 4 = 24}$ **petits cubes ayant une face peinte.**
      - 0 s'il est à l'intérieur d'une première couche de petits cubes : il y en a $\mathbf{2^3}$=**8**.

   On a $8 + 24 + 24 + 8 = 64$. Il n'y a pas d'autre possibilité.
3. Dans un petit cube, la diagonale d'une face mesure $\sqrt{2}$ cm et sa grande diagonale $\sqrt{3}$ cm (théorème de Pythagore). Ces nombres sont inférieurs au rayon de la sphère (2 cm). On en déduit que seuls les 8 petits cubes intérieurs sont entièrement contenus dans la sphère. Ceux qui sont extérieurs sont tous coupés par elle, car la distance d'un de leur sommet à O est supérieure à 2 cm.
4. a. $6^3 - 4^3 = 216 - 64 = 152$. **Il faut rajouter 152 petits cubes** pour obtenir un grand cube de 6 cm de côté.

b. Le rayon de la sphère est 3 cm. Il s'agit donc de dénombrer les petits cubes dont la distance du centre à leurs sommets soit inférieure à 3 cm.
   Par les symétries du cube et de la sphère, il suffit de considérer $\frac{1}{8}$ de ceux-ci, c'est-à-dire un cube obtenu par empilement de $3^3 = 27$ petits cubes, dont un des sommets est le centre de la sphère.
   Ainsi, on cherche à dénombrer le nombre de petits cubes entièrement contenus dans le $\frac{1}{8}$ de sphère contenu dans un cube constitué de 27 petits cubes.
   En considérant la première rangée de 9 petits cubes :
   On a $OA = 3$ cm (théorème de Pythagore dans AOB, avec $OB = 2\sqrt{2}$)




   Donc il y a 4 petits cubes de la première rangée entièrement inclus dans ce $\frac{1}{8}$ de sphère.
   Par des considérations analogues dans la deuxième rangée de 9 petits cubes :




   Il est clair qu'il n'y a que 3 petits cubes de la deuxième rangée entièrement inclus dans ce $\frac{1}{8}$ de sphère ($OC > OA$), et qu'il n'y a aucun petit cube de la troisième rangée entièrement inclus dans le $\frac{1}{8}$ de sphère.

   Donc, dans ce $\frac{1}{8}$ de sphère, il y a 7 petits cubes entiers, d'où au total **7 × 8=56 petits cubes entièrement contenus dans la sphère**.

Retour au sommaire

# La MARTINIQUE

## Deuxième exercice académique

Toutes séries

***Jeu de billes***

### Énoncé

Un jeu oppose deux joueurs A et B.

### Partie A

On dispose d'un tas de billes contenant $n$ billes rouges et $p$ billes bleues. Chaque joueur choisit à tour de rôle une couleur et retire du tas un certain nombre de billes de cette couleur (au moins une). Le joueur qui retire la dernière bille du jeu a perdu.

L'état des effectifs des billes dans le tas est représenté par un couple $(n, p)$ appelé configuration : le premier nombre indiquant le nombre de billes rouges, et le deuxième le nombre de billes bleues. Par exemple, si le tas compte 3 billes rouges et 5 billes bleues, on note cette configuration (3,5).

Une configuration est dite gagnante si le joueur devant jouer à partir d'elle est sûr de gagner quelque soient les défenses de son adversaire. Elle est dite perdante si le joueur devant jouer à partir d'elle est sûr de perdre quels que soient ses choix si son adversaire agit au mieux.

1. Donner une configuration simple toujours gagnante ayant au moins une bille de chaque couleur.
2. La configuration (2,2) est-elle gagnante ?
3. Que peut-on dire de la configuration $(n, n)$ pour $n \geqslant 3$ ?

### Partie B

On dispose d'un tas de billes contenant $n$ billes rouges et $p$ billes bleues et $q$ billes jaunes. Et on garde la même règle du jeu.

L'état des effectifs des billes dans le tas est représenté par un triplet $(n, p, q)$ appelé configuration : le premier nombre indiquant le nombre de billes rouges, le deuxième le nombre de billes bleues et le troisième le nombre de billes jaunes.

1. Donner une configuration simple toujours gagnante et une autre toujours perdante, ayant au moins une bille de chaque couleur.
2. Que peut-on dire des configurations (1,2,3) et (2,4,5) ? Justifiez vos réponses.

### Éléments de solution

Tout d'abord, remarquons que les résultats des configurations sont les mêmes en échangeant les couleurs (symétrie).

### Partie A

1. De façon évidente, les configurations (0,1) ou (1,0) sont toujours perdantes. D**onc le couple (1,1) est une configuration simple toujours gagnante**.
2. **La configuration (2,2) est toujours perdante** car, sachant que l'adversaire joue toujours au mieux, on a successivement

| Joueur | A | B | A | B |
|---|---|---|---|---|
| Configuration à jouer | (2,2) | (1,2) | (1,0) | B gagne |
| Configuration à jouer | (2,2) | (0,2) | (0,1) | B gagne |

3. **La configuration $(n,n)$ est toujours perdante pour $n > 2$**, car :

| Joueur | A | B | A | B |
|---|---|---|---|---|
| Configuration à jouer | $(n, n)$ | $(0, n)$ | (0,1) | B gagne |
| Configuration à jouer | $(n, n)$ | $(1, n)$ | (1,0) | B gagne |
| Configuration à jouer | $(n, n)$ | $(2, n)$ | (2,2) | B gagne d'après 2. |
| Configuration à jouer | $(nn)$ | $(p, n)$ avec $2 < p < n$ | $(p, p)$ | B gagne en se ramenant à l'un des cas précédents |

## Partie B

1. **La configuration (1,1,1) est, de manière évidente, toujours perdante**.

   Les configurations $(n, 1, 1)$ ou $(1, n, 1)$ ou $(1, 1, n)$ avec $n > 1$ sont toujours gagnantes car il suffit de jouer successivement $(n, 1, 1)$ (1,1,1).

2. • ***Étude de la configuration (1, 2, 3).***
   Remarquons que, d'après la partie A, poour tout $n > 1$, la configuration $(0, n, n)$ est toujours perdante.

| Joueur | A | B | A | B |
|---|---|---|---|---|
| Configuration à jouer | (1, 2, 3) | (0, 2, 3) | (0,2, 2) | B gagne |
| Configuration à jouer | (1, 2, 3) | (1, 1, 3) | (1,1, 1) | B gagne |
| Configuration à jouer | (1, 2, 3) | (1, 0, 3) | (1, 0, 0) | B gagne |
| Configuration à jouer | (1, 2, 3) | (1, 2, 2) | (0, 2, 2) | B gagne |
| Configuration à jouer | (1, 2, 3) | (1, 2, 1) | (1, 1, 1) | B gagne |
| Configuration à jouer | (1, 2, 3) | (1, 2, 0) | (1, 0, 0) | B gagne |

**La configuration (1, 2, 3) est perdante.**

•***Étude de la configuration (2, 4, 5).***

On considère le joueur A devant jouer la configuration (2,4,5). Rappelons que les configurations (1,2,3), (1,3,2), $(1, 1, n)$, $(1, n, 1)$ pour $n > 1$ sont toujours gagnantes, et que les configurations (1,1,1) et $(0, n, n)$ pour $n > 1$ sont toujours perdantes.

1$^{\text{er}}$ cas : Cas : le joueur A enlève une bille rouge, c'est-à-dire propose au joueur B la configuration (1,4,5). Etudions alors toutes les suites de jeu possibles :

| Joueur | A | B | A | B | A |
|---|---|---|---|---|---|
| Configuration à jouer | (2, 4, 5) | (1, 4, 5) | (0, 4, 5) | (0, 4, 4) | A gagne |
| Configuration à jouer | (2, 4, 5) | (1, 4, 5) | (1, 3, 5) | (1, 3, 2) | A gagne |
| Configuration à jouer | (2, 4, 5) | (1, 4, 5) | (1, 2, 5) | (1, 2, 3) | A gagne |
| Configuration à jouer | (2, 4, 5) | (1, 4, 5) | (1, 1, 5) | (1, 1, 1) | A gagne |
| Configuration à jouer | (2, 4, 5) | (1, 4, 5) | (1, 0, 5) | (1, 0, 0) | A gagne |
| Configuration à jouer | (2, 4, 5) | (1, 4, 5) | (1, 4, 4) | (0, 4, 4) | A gagne |
| Configuration à jouer | (2, 4, 5) | (1, 4, 5) | (1, 4, 3) | (1, 2, 3) | A gagne |
| Configuration à jouer | (2, 4, 5) | (1, 4, 5) | (1, 4, 2) | (1, 3, 2) | A gagne |
| Configuration à jouer | (2, 4, 5) | (1, 4, 5) | (1, 4, 1) | (1, 1, 1) | A gagne |
| Configuration à jouer | (2, 4, 5) | (1, 4, 5) | (1, 4, 0) | (1, 0, 0) | A gagne |

En conclusion, si A enlève une bille rouge, il est sûr de gagner.

**La configuration (2, 4, 5) est gagnante.**

Retour au sommaire

# MONTPELLIER

## Premier exercice académique

Série S

***L'argent de poche***

### Énoncé

Au cours d'un repas, Camille revendique une augmentation de son argent de poche auprès de ses parents. Son père, un peu excédé et amusé à la fois, lui répond : « Tu auras une augmentation de ton argent de poche si tu gagnes deux parties de tennis consécutives sur les trois que tu joueras contre ta mère et moi en changeant d'adversaire à chaque partie. »

Camille sait que son père joue mieux que sa mère. De plus, l'étude des résultats des matchs précédents lui permet d'affirmer que la probabilité de vaincre son père est un nombre $a$ et que celle de vaincre sa mère est $b$.

Quelle doit être la stratégie de Camille : jouer d'abord contre son père ou contre sa mère ?

### Éléments de solution

La construction de deux arbres de probabilité permet de conclure, moyennant une petite inéquation, que la stratégie gagnante est de jouer d'abord contre son père.

Retour au sommaire

# MONTPELLIER

## Deuxième exercice académique

Série S

### Énoncé

Le nombre $a$ est un réel strictement positif et $C_a$ désigne la parabole d'équation $y = a\left(x^2 - 1\right)$.
Les points A(-1 ; 0) et B(1 ; 0) sont les points d'intersection de la parabole $C_n$ et de l'axe des abscisses.

1. On cherche à déterminer l'existence de points M de la parabole $C_a$ tels que le triangle MAB soit rectangle en M.
   a. Montrer que si $a = -2$ , il existe deux points M de la parabole $C_a$ répondant à la question. Faire une figure et déterminer, en la justifiant, une mesure des angles aigus des triangles rectangles obtenus.
   b. Pour quelles valeurs du réel $a$ existe-t-il deux points M de la parabole $C_a$ tels que le triangle MAB soit rectangle en M ?
2. Comment choisir le réel $a$ pour qu'il existe un point M de la parabole $C_a$ tel que le triangle MAB soit rectangle en M et qu'un des angles aigus du triangle MAB ait pour mesure $\dfrac{\pi}{6}$ radians.
3. Soit $\alpha$ un nombre réel de l'intervalle $\left]0\ ;\ \dfrac{\pi}{4}\right]$

   Déterminer en fonction de $\alpha$ le réel $a$ pour qu'il existe au moins un point M de la parabole $C_a$ tel que le triangle MAB soit rectangle en M et qu'un des angles aigus du triangle MAB ait pour mesure $\alpha$ radians. Que peut-on dire lorsque $\alpha$ tend vers 0 ?

### Éléments de solution

1. a. Si $a = -2$, on a $y = -2(x^2 - 1)$ alors M$(x, y)$ appartient à $C_2$ et MAB est rectangle en M si et seulement si $(x, y)$ est solutikon du système

$$\begin{cases} y = -2(x^2 - 1) \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

   On en déduit l'équation $x^2 + 4(x^2 - 1)^2 = 1$ qui s'écrit aussi $x^2 - 1 + 4(x^2 - 1)^2 = 0$ soit $(x^2 - 1)(4x^2 - 3) = 0$.

   On en déduit les solutions possibles puisque les seules solutions sont (1 ; 0), (-1 ; 0) $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\ ;\ \dfrac{1}{2}\right)$ et $\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\ ;\ \dfrac{1}{2}\right)$ d'où les deux points $M_1$ $\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\ ;\ \dfrac{1}{2}\right)$et $M_2$ $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\ ;\ \dfrac{1}{2}\right)$.

   Le théorème de l'angle inscrit angle au centre permet de montrer que $\widehat{BAM_2} = 15^o$ et donc $\widehat{ABM_2} = 75^o$.

   b. Comme au 1.a. l'écriture du système aboutit à celle de l'équation $x^2 - 1 + a^2(x^2 - 1)^2 = 0$ soit à celle de $(x^2 - 1)(1 + a^2(x^2 - 1)) = 0$. Cette équation a des solutions différentes de 1 et -1 si $1 + a^2(x^2 - 1)^2 = 0$, c'est-à-dire si $a^2x^2 = a^2 - 1$. Ceci n'est possible que si $a > 1$.
2. On trouve $a = 1$.
3. Si $\widehat{MAB} = \alpha$ alors $\widehat{MOB} = 2\alpha$ et donc M a pour coordonnées : (cos $\alpha$ ; sin $2\alpha$).
   Or M $\in C_a$ d'où sin $2\alpha = -a(cos^2 2\alpha - 1)$. On trouve $a = \dfrac{1}{\sin 2\alpha}$.

Retour au sommaire

# MONTPELLIER

## Troisième exercice académique

Séries autres que S

***L'argent de poche***

### Énoncé

Au cours d'un repas, Camille revendique une augmentation de son argent de poche auprès de ses parents. Son père, un peu excédé et amusé à la fois, lui répond : « Tu auras une augmentation de ton argent de poche si tu gagnes deux parties de tennis consécutives sur les trois que tu joueras contre ta mère et moi en changeant d'adversaire à chaque partie. » Camille sait que son père joue mieux que sa mère. De plus, l'étude des résultats des matchs précédents lui permet d'affirmer que la probabilité de vaincre son père est 0,3 et que celle de vaincre sa mère est 0,5.

Quelle doit être la stratégie de Camille : jouer d'abord contre son père ou contre sa mère ?

### Éléments de solution

La construction de deux arbres de probabilités permet de conclure, moyennant une petite inéquation que la stratégie gagnante est de jouer d'abord contre son père.

Retour au sommaire

# MONTPELLIER

## Quatrième exercice académique

Séries autres que S

***Les cartes***

### Énoncé

### Partie A

Une magicienne vous présente les cinq cartes représentées ci-dessous et que l'on a, par commodité, appelées A, B, C, D et E :

| **A** | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | 3 | 5 | 7 |
| | 9 | 11 | 13 | 15 |
| | 17 | 19 | 21 | 23 |
| | 25 | 27 | 29 | 31 |

| **B** | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 2 | 3 | 6 | 7 |
| | 10 | 11 | 14 | 15 |
| | 18 | 19 | 22 | 23 |
| | 26 | 27 | 30 | 31 |

| **C** | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 4 | 5 | 6 | 7 |
| | 12 | 13 | 14 | 15 |
| | 20 | 21 | 22 | 23 |
| | 28 | 29 | 30 | 31 |

| **D** | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 8 | 9 | 10 | 11 |
| | 12 | 13 | 14 | 15 |
| | 24 | 25 | 26 | 27 |
| | 28 | 29 | 30 | 31 |

| **E** | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 16 | 17 | 18 | 19 |
| | 20 | 21 | 22 | 23 |
| | 24 | 25 | 26 | 27 |
| | 28 | 29 | 30 | 31 |

Elle vous demande de choisir un nombre parmi ceux notés sur l'une de ses cartes sans le lui révéler. Elle vous demande ensuite de lui montrer toutes les cartes sur lesquelles ce nombre est écrit. Elle vous donne alors la valeur de votre nombre secret ! Comment fait-elle ?

### Partie B

Pourriez-vous fabriquer un, jeu semblable avec six cartes et des nombres compris entre 1 et 63 ?

### Éléments de solution

On décompose les nombres en base 2. Une carte correspond au rang des chiffres dans la décomposition et le chiffre de ce rang (qui vaut 0 ou 1) donne l'appartenance ou non à la carte.

Retour au sommaire

# NANCY-METZ

## Premier exercice académique

Toutes séries

***Petites boîtes***

### Énoncé

1. a. On a décomposé un rectangle de longueur 40 cm et de largeur 24 cm en carrés tous identiques dont le côté est le plus grand entier possible, sans perte. Combien mesure le côté des carrés ?

   b. On a décomposé un carré en rectangles tous identiques de longueur 40 cm et de largeur 24 cm, sans perte. Combien doit mesurer le côté de ce carré s'il est le plus petit possible ?

2. Soit $B_1$ une boîte en forme de pavé droit. Sa base est un carré de côté $a = 120$ cm et sa hauteur est un nombre $h$ de cm.
   Soit $B_2$ une boîte en forme de pavé droit de dimensions 24 cm, 40 cm et 12 cm. On veut remplir entièrement (sans espaces vides) la boîte $B_1$ avec des boîtes identiques $B_2$.

   a. Montrer que si $h$ est un multiple de 12, alors le remplissage de $B_1$ par des boîtes $B_2$ est possible.

   b. On prend $h = 100$. Montrer que le remplissage est encore possible.

3. Dans cette question, on prend $h = 96$.
   On veut remplir entièrement la boîte $B_1$ avec des boîtes cubiques $B_3$, toutes identiques.
   Soit $x$ la longueur de l'arête de $B_3$. Sachant que chaque boîte $B_3$ doit contenir au moins 25 et au plus 30 boîtes cubiques $B_4$, toutes identiques, d'arête $y$, quelles sont les valeurs entières possibles de $x$ et de $y$ ?

### Éléments de solution

1. a. Le PGCD de 40 et 24 est 8. Les carrés mesurent 8 cm.

   b. Le côté du carré est divisible par 40 et par 24. Le plus petit nombre convenant est 120. Le côté mesure 120 cm.

2. a. Si on place les boîtes $B_2$ « couchées » sur leur face rectangulaire $40 \times 24$, d'après la question 1b, on peut remplir le carré de côté 120 cm. La couche ainsi obtenue a pour hauteur 12 cm. Si $h = 12k$, on peut remplir $B_1$ avec $k$ couches de ce type.

   b. On peut remplir 5 couches avec les boîtes $B_1$ placées avec la dimension 12 cm en hauteur. Il reste à remplir un pavé dont la base est un carré de 120 cm de côté et dont la hauteur mesure 40 cm. On peut placer des boîtes $B_2$ avec la dimension 40 en hauteur. Comme 12 et 24 divisent 120, le carré sera rempli.

3. Les dimensions de $B_1$ sont 120, 120 et 96. $x$ doit donc diviser 120 et 96.
   Les valeurs possibles pour $x$ sont 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12 et 24.
   La boîte $B_3$ est remplie par des boîtes cubiques $B_4$. Donc $y$ est un diviseur de $x$ : $x = ny$.
   On a $25y^3 \leqslant x^3 \leqslant 30y^3$, d'où $25y^3 \leqslant n^3x^3 \leqslant 30x^3$, donc $25 \leqslant n^3 \leqslant 30$. seul nombre entier dont le cube est compris entre 25 et 30 est 3.
   Donc $x = 3y$. $x$ est un multiple de 3.
   Les valeurs possibles pour $x$ sont 3, 6, 12 et 24. Les valeurs de $y$ correspondant sont 1, 2, 4 et 8.

Retour au sommaire

# NANCY-METZ

## Deuxième exercice académique

Série S

***Fonctions***

### Énoncé

L'objectif de l'exercice est de déterminer une fonction $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ qui vérifie les deux conditions ($\mathbf{N}$ désigne l'ensemble des nombres entiers naturels.) :

- $f(1) = 1$
- pour tous les entiers naturels $m$ et $n$, $f(m+n) = f(m) \times f(n) + f(n) + f(m)$.

1. On suppose qu'une telle fonction $f$ existe.
   a. Calculer $f(0)$ (On pourra poser $n = 0$ et $m = 1$).
   b. Calculer $f(2)$, $f(3)$, $f(6)$.
2. Montrer que, pour tout entier naturel $n$, $f(n+1) = 2f(n) + 1$.
3. On pose pour tout entier naturel $n$, $g(n) = f(n) + 1$.
   Montrer que, pour tous les entiers natuels $m$ et $n$ : $g(n+m) = g(n) \times g(m)$.
4. Donner une fonction $f$ qui réponde au problème.

### Éléments de solution

1. a. $f(1) = f(1+0) = f(1) \times f(0) + f(1) + f(0) = 2f(0) + 1$ d'où $f(0) = 0$.
   b. $f(2) = f(1+1) = f(1)^2 + 2f(1) = 3$ ; $f(3) = f(2+1) = 3 \times 1 + 3 + 1 = 7$ ;
   $f(6) = f(3+3) = 7 \times 7 + 7 + 7 = 63$.
2. Pour tout entier naturel $n$,$f(n+1) = f(n) \times f(1) + f(n) + f(1) = 2f(n) + 1$
3. $g(n+m) = f(n+m) + 1 = f(n) \times f(m) + f(n) + f(m) + 1$
   $g(n) \times g(m) = (f(n)+1)(f(m)+1) = f(n) \times f(m) + f(n) + f(m) + 1$
4. Quel que soit l'entier naturel $a$, la fonction $g$ qui à tout entier $n$ associe $a^n$ vérifie la relation $g(n+m) = g(n) \times g(m)$.

   La fonction $f$ serait alors définie par $\boxed{f(n) = a^n - 1}$.
   La condition $f(1) = 1$ impose que $a = 2$.

Retour au sommaire

# NANCY-METZ

## Troisième exercice académique

Séries autres que S

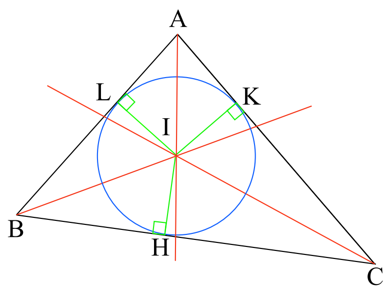
***Les bassins***

### Énoncé

On rappelle que dans tout triangle les trois bissectrices des angles sont concourantes en un point. Ce point est le centre du cercle inscrit dans le triangle.

1.
   a. Soit ABC un triangle et I le centre du cercle inscrit.
   Soit $r$ le rayon du cercle inscrit. Soient H, L et K les points ds segments [CB], [AB] et [CA] tels que $r = IH = IL = IK$.
   Calculer l'aire du triangle IAB en fonction de $r$ et $AB$.

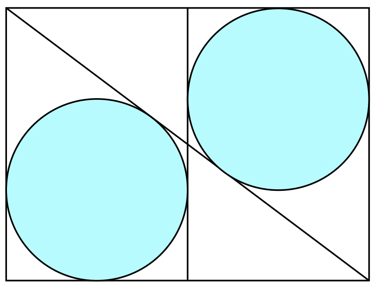
   b. Sooit $S$ l'aire du triangle ABC.
   Démontrer l'égalité : $(AB+BC+AC)\times r = 2S$.




2.

   Dans un jardin rectangulaire, deux bassins circulaires sont tangents à deux côtés, à une diagonale du rectangle et aux segments joignant les milieux de deux côtés, comme l'indique la figure ci-contre.

   Sachant que le rayon de chacun des bassins mesure 2 mètres, calculer la longueur et la largeur du jardin.



### Éléments de solution

1. L'aire du triangle est la somme des aires des triangles AIB, AIC et BIC...
2. La longueur est égale à deux fois le diamètre, donc 8 m.
   Soit $x$ la largeur. On applique la relation de la question 1 au triangle rectangle. On a $S = 4x$ et $r = 2$.
   En utilisant le théorème de Pythagore, on a la relation : $4x = x + 8 + \sqrt{x^2 + 64}$
   d'où $3x - 8 = \sqrt{x^2 + 64}$
   d'où $9x^2 - 48x + 64 = x^2 + 64$
   d'où $8x^2 - 48x = 0$ d'où $x = 0$ ou $x = 6$.

   La largeur du jardin est 6m.

Retour au sommaire

# NANTES

## Premier exercice académique

Série S

***Terminaisons***

### Énoncé

Dans tout l'exercice $N$ et $n$ désignent deux entiers naturels avec $n$ non nul.
On appelle terminaison à $n$ chiffres d'un nombre entier $N$ (ayant au moins $n$ chiffres) le nombre formé par les $n$ derniers chiffres de $N$.
Exemple : 52 est la terminaison à 2 chiffres de35 752. L'objectif de l'exercice est d'étudier quelques cas où les nombres $N$ et $N^2$ ont la même terminaison.

1. Quels sont les nombres entiers naturels égaux à leur propre carré ?
2. *Terminaison à un chiffre.*
   On suppose dans cette question que $N$ et $N^2$ ont la même terminaison à un chiffre. Quelles sont les valeurs possibles pour ce chiffre ?
3. *Terminaison à deux chiffres* ($N$ a au moins deux chiffres).
   a. Montrer que tout produit de deux nombres admettant 25 pour terminaison admet également 25 pour terminaison.
   b. On suppose dans cette question que $N$ et $N^2$ ont la même terminaison à deux chiffres. Trouver toutes les valeurs possibles pour cette terminaison.
4. *Terminaison à trois chiffres* ($N$ a au moins trois chiffres).
   a. Déterminer tous les chiffres $k$, tels que les nombres $100k + 25$ et $(100k + 25)^2$ aient la même terminaison à trois chiffres.
   b. Donner un exemple d'un nombre $N$ à quatre chiffres tel que $N$ et $N^2$ aient la même terminaison à trois chiffres.
   c. On suppose que $N$ et $N^2$ ont la même terminaison à trois chiffres. Trouver toutes les terminaisons à trois chiffres de $N$.
5. *Et plus...* ($N$ a au moins cinq chiffres).
   Trouver une terminaison à cinq chiffres (autre que 00000 et 00001) telle que $N$ et $N^2$ aient la même terminaison à cinq chiffres.
6. *Au cube* ($N$ a au moins trois chiffres).
   Trouver toutes les terminaisons à trois chiffres telles que le nombre $N$ et son cube $N^3$ aient la même terminaison à trois chiffres.

### Éléments de solution

1. $x = x^2$ si et seulement si $x = 0$ ou $x = 1$.
2. *Terminaisons à un chiffre :*
   $N$ et $N^2$ ont la même terminaison à un chiffre. Il suffit de tester les chiffres de 0 à 9.
   Conclusion : Terminaisons à un chiffre : 0 ; 1 ; 5 ; 6.
3. *Terminaisons à deux chiffres :*
   a. On considère deux nombres finissant par 25 : $100 \times a + 25$ et $100 \times b + 25$ avec $a$ et $b$ deux entiers naturels.

$$\begin{aligned}(100 \times a + 25) \times (100 \times b + 25) &= 10\ 000ab + 2\ 500\ \mathrm{a} + 2\ 500\ \mathrm{b} + 625 \\ &= 100 \times (100ab + 25a + 25b + 6) + 25\end{aligned}$$

donc le produit finit par 25.

b. Remarques : Le chiffre des unités est à chercher parmi les chiffres donnés dans la question 2).
$N = 100a + b$ avec $a$ entier naturel et $b$ entier à deux chiffres
$N^2 = 10000a^2 + 200ab + b^2$
$N^2 - N = 10\ 000a^2 + 200ab + b^2 - 100a - b = 100(100a^2 + 2ab - a) + b^2 - b$
$N$ et $N^2$ ont la même terminaison à deux chiffres si et seulement si $N^2 - N$ est un multiple de 100 ;
$b^2 - b = b(b-1)$ est un multiple de 100 c'est-à-dire de la forme $k \times 4 \times 25 = k \times 2^2 \times 5^2$.
On cherche alors $b$ et $b-1$ tels que le produit donne un multiple de 100.

On a donc : $b = 00$
ou $b - 1 = 00$, soit : $b = 01$
$b = 25$ et $b - 1 = 24$
$b = 76$ et $b - 1 = 75$.

Conclusion :
$N$ et $N^2$ ont la même terminaison à deux chiffres pour les nombres $N$ se terminant par 00, 01, 25, 76.

4. *Terminaisons à trois chiffres :*

a. $(100k + 25)^2 = 10\ 000k^2 + 5000k + 625 = 1000(10k^2 + 5k) + 625$ donc le produit finit par 625 et donc $k = 6$.

b. Par exemple $4625^2 = 21\ 390\ 625$.

c. Le produit de deux nombres finissant par 000 finit lui aussi par 000.
En utilisant la question 3b., on obtient comme seules autres terminaisons possibles : $k01$ et $k76$.
$(100k + 76)^2 = 10\ 000k^2 + 15\ 200k + 5\ 776 = 1000(10k^2 + 15k + 5) + 100(2k + 7) + 76$.
Le chiffre des centaines est donné par le chiffre des unités du nombre $2k + 7$.
Tableau de valeurs (calculatrice) : on teste pour $k$ variant de 0 à 9, le chiffre des unités du nombre $2k + 7$ pour qu'il soit égal à $k$.
Seule réponse possible : $k = 3$.
$(100k + 01)^2 = 10\ 000k^2 + 200k + 01 = 1000k^2 + 2k \times 100 + 01$

Conclusion : seules terminaisons possibles : 000, 001, 625, 376.

5. *Exemples de terminaisons à 5 chiffres possibles* : 90625 ou 09376.
Si on poursuit l'opération à partir des terminaisons précédentes, on obtient des « nombres »…. 90625 et …09376 qui ne sont pas des réels mais des nombres décadiques.

6. *Cube*
On peut déjà affirmer que ceux se terminant par 000, 001, 625 et 376 ont un cube finissant par 000, 001, 625 et 376.
Les terminaisons possibles : 000, 001, 501, 251, 751, 624, 125, 625, 375, 875, 376, 249, 749, 499 et 999.

Retour au sommaire

# NANTES

## Deuxième exercice académique

Séries S - STI

***Terminaisons***

### Énoncé

Dans tout l'exercice, ABC est un triangle équilatéral dont le cercle circonscrit $\Gamma_1$ de centre O est de rayon 1.

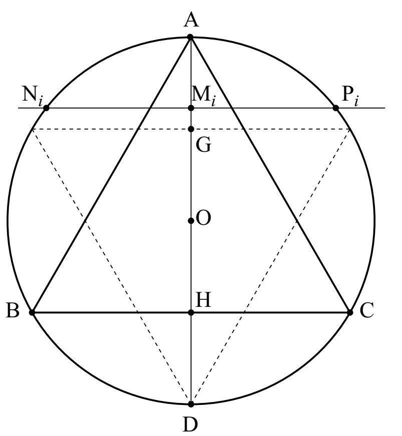
On appelle corde de $\Gamma_1$ tout segment dont les extrémités sont deux points de $\Gamma_1$ . Le but de l'exercice est de comparer différentes façons de calculer, lorsqu'on trace au hasard une corde de $\Gamma_1$, la probabilité que sa longueur soit supérieure ou égale à $BC$

1. Déterminer la longueur de [BC].
2. a. Montrer que pour tout point M, distinct de O, situé à l'intérieur du cercle $\Gamma_1$, il existe une unique corde de $\Gamma_1$ ayant M pour milieu.
   b. Soit $\Gamma_2$ le cercle inscrit dans le triangle ABC. $M_1$, $M_2$ et $M_3$ sont trois points à l'intérieur de tels que : $M_1$ est un point situé sur $\Gamma_2$, $M_2$ et $M_3$ sont respectivement à l'intérieur de $\Gamma_1$ et à l'extérieur de $\Gamma_2$.

      Sur la figure donnée en annexe, construire les cordes de $\Gamma_1$ ayant pour milieux respectifs $M_1$, $M_2$ et $M_3$.

      Comparer la longueur de chacune de ces trois cordes avec la longueur $BC$.
   c. On choisit au hasard un point M distinct de O et à l'intérieur du cercle $\Gamma_1$. Quelle est la probabilité que la corde de milieu M ait une longueur supérieure ou égale à la longueur $BC$
3. **Cordes et un premier algorithme**
   Soit D le symétrique de A par rapport au centre O de $\Gamma_1$.
   On considère l'algorithme ci-drddoud :

Algorithme (1)
*Initialisation*
$k = 0$ ; $n = 10$
*Traitement* Pour $i$ allant de 1 à $n$
Placer le point $M_i$ tel que $\overrightarrow{AM_i} = \dfrac{i}{n}$
Tracer la corde $[N_iP_i]$ passant par $M_i$ et perpendiculaire à (AD)
Calculer la distance $N_iP_i$
Si $N_iP_i \geq BC$ alors $k$ prend pour valeur $k+1$
Fin Pour
*Sortie*
Afficher $\dfrac{k}{n}$

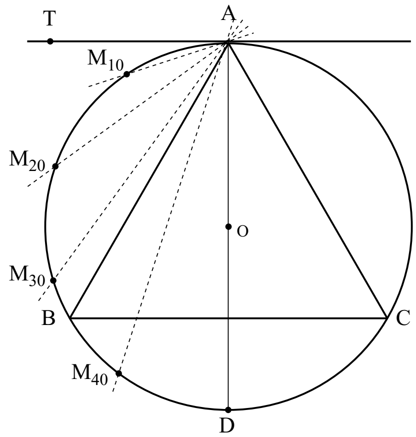



   a. Quel nombre affichera cet algorithme ?
   b. On modifie l'algorithme en remplaçant l'instruction « $n = 10$ » par : « $n = 100$ », puis par « $n = 1000$ », puis par « $n = 1\,000\,000$ ».
      Quel nombre affichera cet algorithme dans chacun de ces cas ?
   c. On place au hasard un point M sur [AD] et on trace la corde de $\Gamma_1$ de milieu M et perpendiculaire à (AD). Quelle est la probabilité $p$ que cette corde soit de longueur supérieure ou égale à $BC$ ?

4. **Cordes et un second algorithme**

   Dans cette question la droite (AT) est tangente au cercle $\Gamma_1$. On considère l'algorithme (2) ci-dessous :

   Algorithme (2)
   *Initialisation*
   $k = 0$
   *Traitement*
   Pour $i$ allant de 1 à 99
   Placer le point $M_i$ de $\Gamma_1$ tel que $\widehat{TAM_i} = \dfrac{i}{100} \times 180^o$
   Calculer la distance $AM_i$
   Si $AM_i \geq BC$ alors $k$ prend pour valeur $k + 1$
   Fin Pour
   *Sortie*
   Afficher $\dfrac{k}{99}$.




   a. Quel nombre affichera cet algorithme ?

   b. On choisit au hasard un point M sur le cercle $\Gamma_1$ . Quelle est la probabilité que la longueur $AM$ soit supérieure ou égale à $BC$ ?

5. **Conclusion** :
   Peut-on définir la probabilité de choisir, parmi toutes les cordes d'un cercle, une corde de longueur supérieure ou égale à celle du côté du triangle inscrit dans ce cercle ?

.

## Éléments de solution

1. Dans le triangle BHO, cos $30^o = \dfrac{BH}{1}$, d'où $BH = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $BC = \sqrt{3}$.

2. a. La corde est l'unique perpendiculaire à la droite (OM) passant par M.

   b. Dans les triangles $\text{OM}_i\text{P}_i$, $P_iM_i^2 = 1 - OM_i^2$.

   $OM_1^2 = \dfrac{1}{4}$, d'où $P_1M_1^2 = \dfrac{1}{4}$ et $P_1N_1 = 2P_1M_1 = \sqrt{3} = BC$.

   $OM_2^2 < \dfrac{1}{4}$, d'où$P_2M_2^2 < \dfrac{3}{4}$ et $P_2N_2 = 2P_2M_2$ est supérieur à $BC$.

   $O_3M_3\ \dfrac{1}{4}$, d'où $P_3M_3 < \dfrac{3}{4}$ et $P_3N_3 = 2P_3M_3$ est inférieur à $BC$.

   c. M doit être à l'intérieur ou sur $\Gamma_2$, donc $p = \dfrac{\pi \times 0,5^2}{\times 1^2} = \dfrac{1}{4}$.

3. **Cordes et un premier algorithme**

   $N_iP_i \geqslant BC$ ssi $M_i \in [\text{GH}]$ ssi $AG \leqslant AM_i \leqslant AH$.

   a. Quel nombre affichera cet algorithme ?

   $n = 10$, $\dfrac{1}{2} \leqslant \dfrac{i}{2} \times 2 \leqslant \dfrac{3}{2}$ ssi $5 \leqslant 2i \leqslant 15$, $i$ prend les valeurs entières de 3 à 7.
   $k = 5$.
   Résultat affiché : 0,5. incluses.

   b. On modifie successivement l'algorithme en remplaçant dans l'initialisation, $n = 10$ par : $n = 100$ puis par $n = 1000$, puis par $n = 1\ 000\ 000$. Quel nombre affichera cet algorithme dans chacun de ces cas ?

   - $n = 100$. $\dfrac{1}{2} \leqslant \dfrac{i}{100} \times 2 \leqslant \dfrac{3}{2}$ ssi $25 \leqslant i \leqslant 75$. D'où $k = 51$.
     Résultat affiché : 0,51.

- $n = 1000$. $\dfrac{1}{2} \leqslant \dfrac{i}{1000} \times 2 \leqslant \dfrac{3}{2}$ ssi $250 \leqslant i \leqslant 750$. D'où $k = 501$.
  Résultat affiché : 0,501.
- $n = 1\,000\,000$. $\dfrac{1}{2} \leqslant \dfrac{i}{1\,000\,000} \times 2 \leqslant \dfrac{3}{2}$ ssi $250\,000 \leqslant i \leqslant 750\,000$. D'où $k = 500\,001$.
  Résultat affiché : 0,500 001.

c. $p = \dfrac{GH}{AD} = \dfrac{1}{2}$.

4. a. $AM_i \geqslant BC$ ssi $M_i \in \widehat{BC}$ ssi $60^o \leqslant \widehat{TAM_i} \leqslant 120^o$ ssi $60^o \leqslant \dfrac{1}{100} \times 180 \leqslant 120^o$.
   ssi $34 \leqslant i \leqslant 66$. D'où $k = 33$ et le résultat affiché est 0,33.

   b. $p = \dfrac{60}{180} = \dfrac{1}{3}$.

5. Il faut indiquer avec précision les conditions de l'expérience (choix des cordes. . . etc.).Les événements et leur probabilité dépendent de ce choix.

Retour au sommaire

# NANTES

## Troisième exercice académique

Séries non scientifiques

***Nombres sympathiques***

### Énoncé

On dit qu'un nombre entier naturel est sympathique si tous ses chiffres sont différents et s'il est multiple de la somme de ses chiffres.
Par exemple, 24 est sympathique car $24 = 4 \times (2 + 4)$, mais 14 ne l'est pas car 14 n'est pas multiple de $1 + 4$.

1. Recopier le tableau ci-dessous et enrourer tous les noombres sympathiques qui y sont présents.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 10 | 11 | 12 | 13 | 14 |
| 15 | 16 | 17 | 18 | 19 |
| 20 | 21 | 22 | 23 | 24 |
| 25 | 26 | 27 | 28 | 29 |
| 30 | 31 | 32 | 33 | 34 |

2. Dans cette question, on ne s'imtéresse qu'aux nombres entiers à trois chiffres.
   a. Quel est le plus petit nombre sympathique à trois chiffres ? Le plus grand ?
   b. Quels sont les nombres sympathiques à trois chiffres dont la somme des chiffres est 6 ?
   c. On considère un nombre à trois chiffres distincts, multiple de 9. Quelles sont les valeurs possibles de la somme de ses chiffres ? Ce nombre est-il sympathique ?
3. Nombres sympathiques à quatre, cinq ou dix chiffres.
   a. Peut-on avoir un nombre sympathique à quatre chiffres pris parmi les chiffres 1, 2, 3, 4 ?
   b. Peut-on avoir un nombre sympathique à cinq chiffres pris parmi les chiffres 1, 2, 3, 4, 5 ?
   c. Quels sont les nombres sympathiques à dix chiffres ?
4. On choisit au hasard un nombre sympathique à trois chiffres et on le divise par la somme de ses chiffres. Quelle est la plus grande valeur possible du quotient obtenu ?

### Éléments de solution

1.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 10 | 11 | 12 | 13 | 14 |
| 15 | 16 | 17 | 18 | 19 |
| 20 | 21 | 22 | 23 | 24 |
| 25 | 26 | 27 | 28 | 29 |
| 30 | 31 | 32 | 33 | 34 |

2. a. 102 est le plus petit nombre sympathique à 3 chiffres et 972 le plus grand.

b. Si $N = \overline{abc}$ est un nombre sympathique à 3 chiffres avec $a + b + c = 6$, alors $N$ est divisible par 6, donc par 2. D'où $c$ est Pair. De plus, $a$, $b$ et $c$ sont distincts deux à deux et $6 = 0 + 1 + 5 = 0 + 2 + 4 = 1 + 2 + 3$ sont les seules façons d'obtenir 6 avec cette condition.
Les nombres sympathiques à 3 chiffres dont la somme des chiffres est 6 sont donc : $\boxed{132,\ 150,\ 204,\ 240,\ 312,\ 402,\ 420,\ 510}$.

c. Soit $\overline{abc}$ un nombre à 3 chiffres distincts, multipla de 9.
La somme de ses chiffres est alors un multiple de 9.
On a $1 \leqslant a \leqslant 9$, $1 \leqslant b \leqslant 9$, $1 \leqslant c \leqslant 9$, $a$, $b$ et $c$ sont deux à deux distincts, donc $0+1+2 \leqslant a+b+c \leqslant 7+8+9$ soit $3 \leqslant a+b+c \leqslant 24$, puis $\boxed{a+b+c = 9 \text{ ou } a+b+c = 18}$.
Tous les nombres dont la somme des chiffres est égale à 9 sont multiples de 9, donc sympathiques. Mais par exemple 189 est un multiple de 9 sans être un multiple de 18. Il existe donc des nombres dont la somme des chiffres est 18 donc multiples de 9 et qui ne sont pas sympathiques.

3. a. **Avec les chiffres 1, 2, 3, 4**
La somme des chiffres est alors $1 + 2 + 3 + 4 = 10$. Donc le nombre devrait êtrte divisible par 10 et avoir 0 comme chiffre des unités, soit un autre chiffre que 1, 2, 3 ou 4. Ce cas n'est donc pas possible. **Impossible**.

b. **Avec les chiffres 1, 2, 3, 4, 5**

La somme des chiffres est alors $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$, donc le nombre devrait être divisible par 5 et donc avoir 5 pour chiffre des unités. Il est alors automatiquerment sympathique car divisible par 5 et par 3 (la somme de ses chiffres 15 est divisible par 3).
par exemple, le nombre 12345 est sympathique.

c. $0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45$
Donc tout nombre de 10 chiffres distincts est divisible par 9.
Pour qu'il soit divisible par 5, il suffit de prendre 0 ou 5 pour chiffre des unités.
On obtient alors tous les nombres sympathiques de dix chiffres.
Par exemple, le nombre 1234567890 est sympathique.

4. Soit $n = \overline{abc}$ un nombre sympathique tel que $\dfrac{n}{a+b+c}$ soit le plus grand possible.
On a $1 \leqslant a \leqslant 9$, $0 \leqslant b \leqslant 9$, $0 \leqslant c \leqslant 9$, avec $a$, $b$, $c$ distincts deux à deux.
$\overline{abc} = 100a + 10b + c = a + b + c + 9(11a + b)$.

D'où $\dfrac{n}{a+b+c} = 1 + 9\dfrac{11a+b}{a+b+c}$ doit être le plus grand possible.

Donc $\dfrac{11a+b}{a+b+c}$ doit être le plus grand possible, or $a + b + c \geqslant a + b + 0$ pour tous $a$, $b$, $c$, d'où $\boxed{c = 0}$ et par conséquent $b \geqslant 1$.

On a donc $\dfrac{n}{a+b+c} = 1 + 9\dfrac{11a+b}{a+b} = 1 + 9\dfrac{a+b+10a}{a+b} = 10 + \dfrac{90a}{a+b}$

Donc $\dfrac{90a}{a+b}$ doit être le plus grand possible, or $a + b \geqslant a + 1$ pour tous $a$, $b$, d'où $\boxed{b = 1}$.

Donc $\dfrac{90a}{a+1} = 90 - \dfrac{90}{a+1}$ doit être un entier le plus grand possible avec $2 \leqslant a \leqslant 9$, donc $\dfrac{90}{a+1}$ doit être le plus petit possible et donc $a$ le plus grand possible, d'où $\boxed{a = 9}$.

On trouve donc le plus grand quotient lorsque l'on divise 910 par la somme de ses chiffres.
$\boxed{\text{Le plus grand quotient est } 91}$.

Retour au sommaire

# NANTES

## Quatrième exercice académique

Séries non scientifiques

***Grilles***

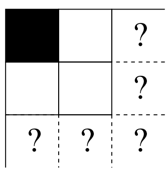
### Énoncé

Soit $c$ un entier naturel supérieur ou égal à 3. Une grille $c \times c$ est un carré constitué de $c^2$ cases que l'on recouvre de carreaux noirs ou blancs en suivant les règles ci-dessous :

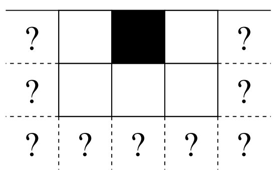
- $R_1$ : chaque case de la grille doit être recouverte d'un seul carreau (à choisir entre noir et blanc) ;
- $R_2$ : deux carreaux noirs ne peuvent être en contact que ce soit par un côté ou par un sommet ;
- $R_3$ : un carreau blanc doit toujours être en contact avec un et un seul carreau noir (par un côté ou par un sommet).

On considère les trois configurations suivantes :

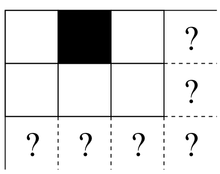
- carreau noir en coin. Par exemple :



- carreau noir en bordure (et pas en coin). Par exemple :

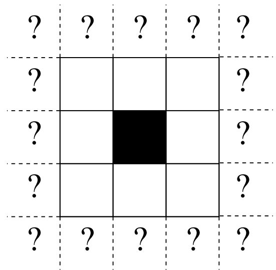


ou

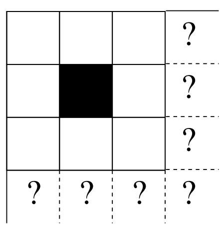


- carreau noir immergé. Par exemple :

?



ou



1. **Grille 5 × 5.**

   On propose ci-dessous trois dispositions :

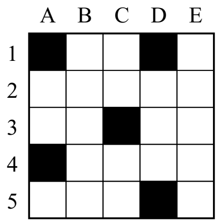


*Figure 1*

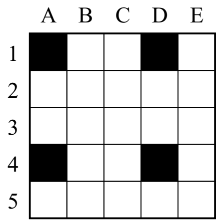


*Figure 2*

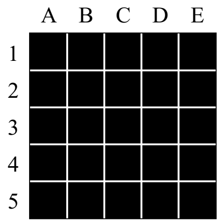


*Figure 3*

Indiquer pour chaque figure représentée si elle respecte les règles énoncées et préciser, lorsque ce n'est pas le cas, la règle non respectée.

2. **Grille 3 × 3**
   Représenter toutes les dispositions possibles permettant de recouvrir une grille $3 \times 3$.
3. **Grille 7 × 7**
   Le nombre de carreaux noirs en coin utilisés pour recouvrir la grille $7 \times 7$ est noté $n$, celui des carreaux noirs en bordure est noté $p$ et celui des carreaux noirs immergés est noté $q$.

   Le but de cette partie est de déterminer les triplets $(n; p; q)$ qui permettent de recouvrir la grille donnée.

   Des grilles $7 \times 7$, que vous pourrez rendre avec la copie, sont données en annexe pour tester des configurations.

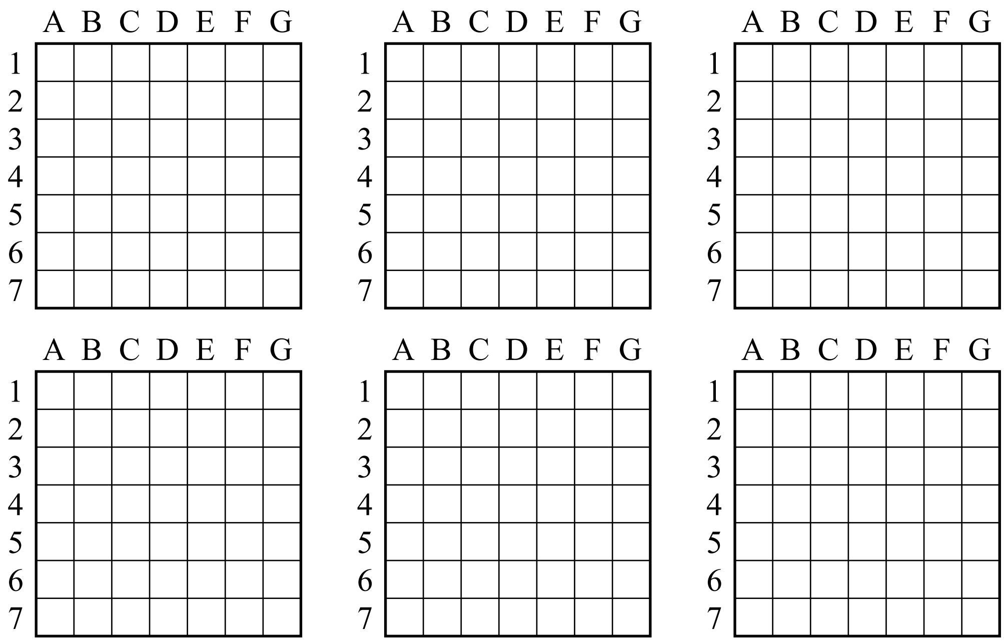
   a. Justifier que : $4n + 6p + 9q = 49$.

   b. Démontrer que les cas $n = 0$, $n = 2$ et $n = 3$ sont impossibles ;

   c. En déduire les triplets d'entiers naturels $(n; p; q)$ solutions de l'équation : $4n + 6p + 9q = 49$.

   d. Montrer qu'il n'existe qu'un seul triplet permettant de résoudre le problème.
   Illustrer ce cas par une figure.

## Document annexe de l'exercice 4



## Éléments de solution

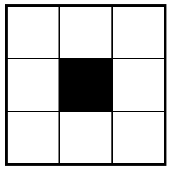
1. **Echiquier 5 × 5**

   Figure 1 : par exemple, un jeton blanc est en contact avec deux jetons noirs (règle $R_1$ non respectée).

Figure 2 : toutes les règles sont respectées : disposition possible.

un jeton noir est en contact avec un autre jeton noir (règle $R_2$ non respectée.

2. **Echiquier 3 × 3**
   Seul cas possible



3. **Echiquier 7 × 7**

   a. Pour chaque jeton noir en coin, 4 cases sont occupées.
   Pour chaque jeton noir en bordure, 6 cases sont occupées.
   Pour chaque jeton noir immergé, 9 cases sont occupées.
   Toutes les cases sont occupées par un jeton. $\boxed{\text{D'où } 4 \times n + 6 \times p + 9 = 49}$.

   b. $n$ est un entier compris entre 0 et 4 (inclus)

   Si $n = 0$ alors $6p + 9q = 49$ or $6p + 9q$ est divisible par 3 mais pas le nombre 49 donc impossible.

   Si $n = 2$ alors $6p + 9q = 41$ or $6p + 9q$ est divisible par 3 mais pas le nombre 41 donc impossible.

   Si $n = 3$ alors $6p + 9q = 37$ or $6p + 9q$ est divisible par 3 mais pas le nombre 37, donc impossible.

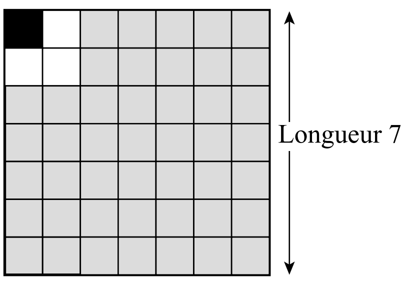
   $\boxed{\text{Donc } n = 1 \text{ ou } n = 4}$.

   c. Si $n = 1$
   Alors $6p + 9q = 45$, c'est-à-dire $2p + 3q = 15$.
   $p$ et $q$ sont des entiers positifs d'où $0 \leqslant p \leqslant 7$ et $0 \leqslant q \leqslant 5$(on peut remarquer que $q$ doit être impair, on peut tracer une droite ou un tableau de valeurs ou tâtonner).
   On a $(p; q) = (0; 5)$ ou $(p\ ; q) = (6\ ; 1)$ ou $(p\ ; q) = (3\ ; 3)$.

   Si $n = 4$ :
   Alors $6p + 9q = 33$, c'est-à-dire $2p + 3q = 11$.
   $p$ et $q$ sont des entiers positifs d'où $0 \leqslant p \leqslant 5$ et $0 \leqslant q \leqslant 3$ (mêmes remarques).
   On a $(p\ ; q) = (1\ ; 3)$ ou $(p\ ; q) = (4\ ; 1)$.

   $\boxed{\text{Les triplets possibles sont } (1\ ; 0\ ; 5), (1\ ; 6\ ; 1),\ (1\ ; 3\ ; 3),\ (4\ ; 1\ ; 3) \text{ et } (4\ ; 4\ ; 1)}$

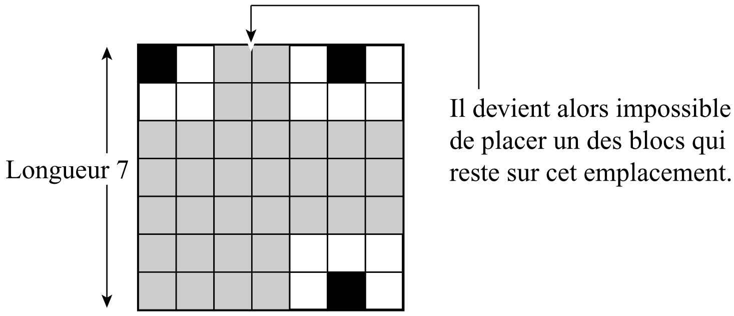
   d. ***Premier cas*** : $(n\ ; p\ ;\ q) = (1\ ; 0\ ; 5)$
   Après avoir placé le pion noir dans un des coins, on obtient une figure équivalente à :




   Il ne reste plus que 5 pions noirs à placer, ce qui impose de construire des blocs de longueur 3 (voir la troisième configuration), mais comme 7 n'est pas divisible par 3, la construction est impossible.

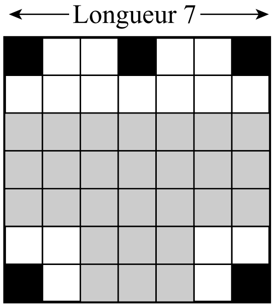
   ***Deuxième cas*** : $(n\ ; p\ ;\ q) = (1\ ; 6\ ; 1)$
   Après avoir placé le pion noir dans un des coins, il ne reste plus que des pions noirs en bordure ou immergés à placer, ce qui impose de construire des blocs de longueur 2 ou 3 (voir la deuxième et la troisième configuration).

   La seule décomposition possible du nombre 7 étant $7 = 2+2+3$, on se trouve dans l'obligation de placer deux jetons noirs comme indiqué sur la figure.



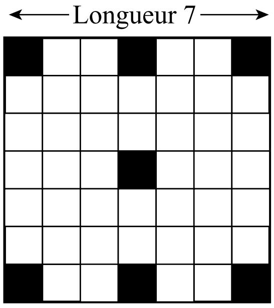

***Troisième cas*** : $(n\ ; p\ ;\ q) = (1\ ; 3\ ; 3)$
Mêmes justifications que pour le deuxième cas.

***Quatrième cas*** : $(n\ ; p\ ;\ q) = (4\ ; 1\ ; 3)$
Après avoir placé les 4 pions noirs en coin et le pion noir en bordure, on obtient une figure équivalente à :




Il ne reste plus que 3 pions noirs immergés à placer, ce qui impose de construire des blocs de longueur 3 (voir la troisième configuration), mais comme 7 n'est pas divisible par 3, la construction est impossible.

***Cinquième cas*** : $(n\ ; p\ ;\ q) = (4\ ; 4\ ; 1)$
Le seul cas possible - une seule figure possible :




Retour au sommaire

# NICE

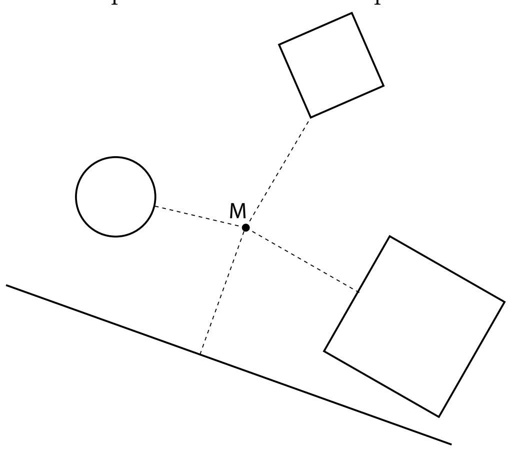
## Premier exercice académique

Toutes les séries

***Terminaisons***

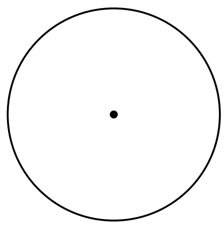
### Énoncé

Le dessin ci-dessous donne quatre exemples de distances d'un point M à une figure

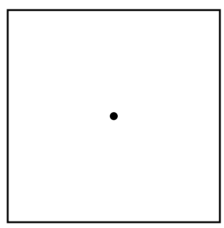



Représenter en annexe l'ensemble des points M du plan tels que :

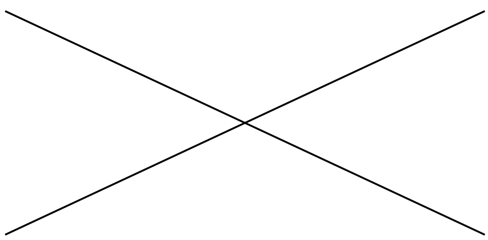
a. La distance du point M au cercle ci-dessous est constamment égale à 0.5 cm :



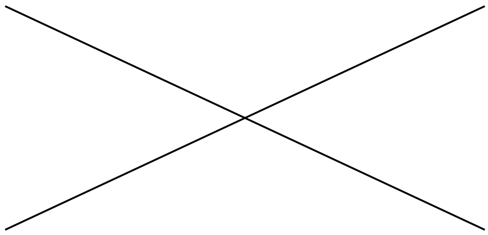
b. La distance du point M au carré ci-dessous est constamment égale à 0,5 cm.



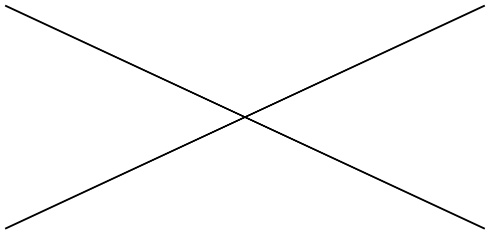
c. Les distances du point M aux deux droites sécantes ci-dessous sont égales :



d. La somme des distances du point M à chacune des deux droites sécantes ci-dessous est constamment égale à 2 cm :

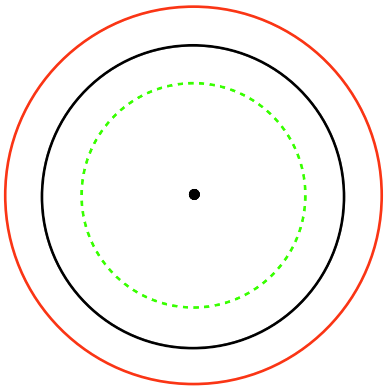


e. La différence des distances du point M à chacune des droites sécantes ci-dessous est constamment égale à 2 cm :

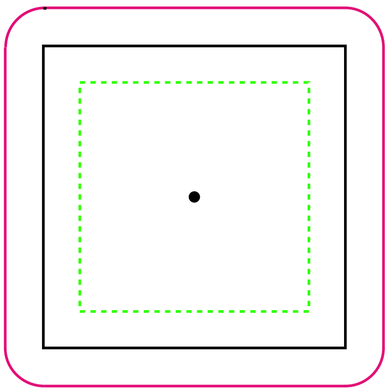


## Éléments de solution

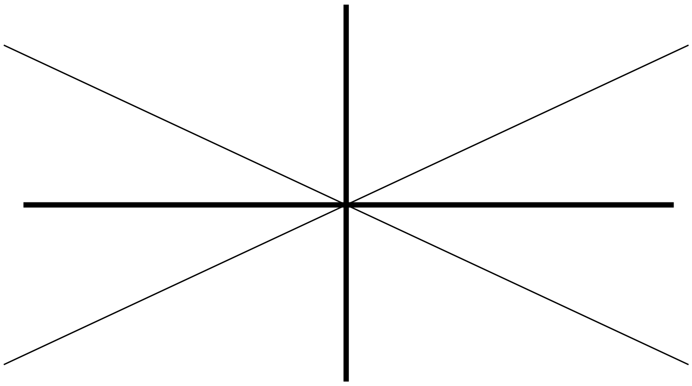
a. La distance du point M au cercle ci-dessous est constamment égale à 0.5 cm.



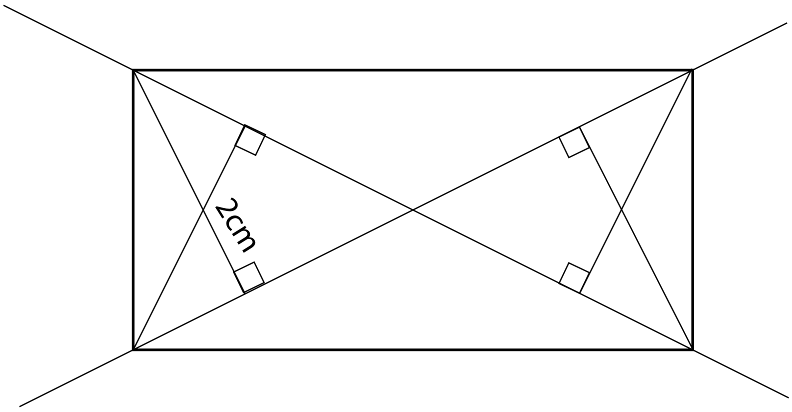
b. La distance du point M au carré ci-dessous est constamment égale à 0,5 cm.



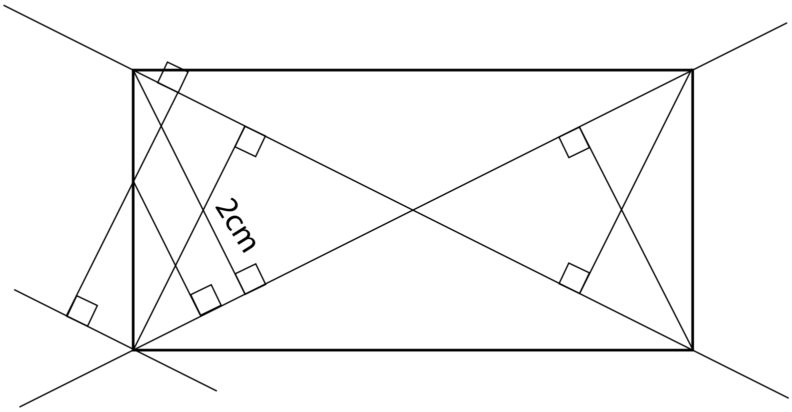
c. Les distances du point M aux deux droites sécantes ci-dessous sont égales :



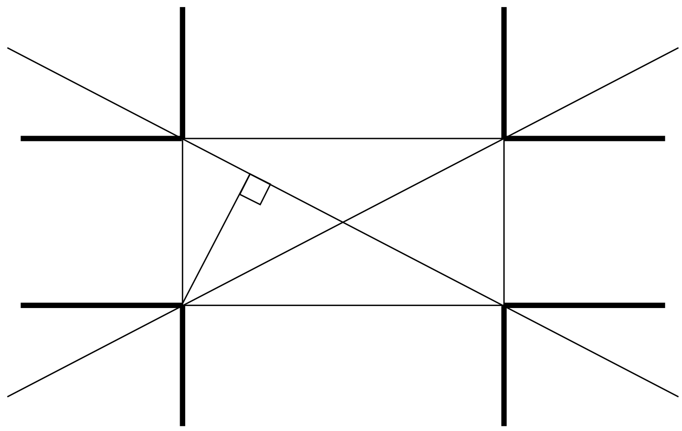
d. La somme des distances du point M à chacune des deux droites sécantes ci-dessous est constamment égale à 2 cm :



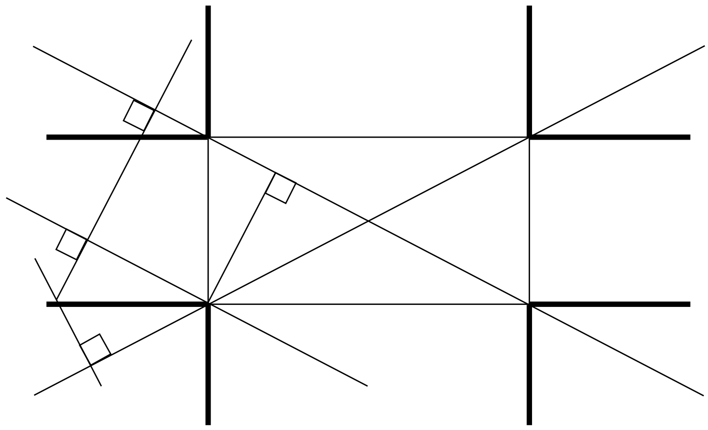

Justification graphique :



e. La différence des distances du point M à chacune des droites sécantes ci-dessous est constamment égale à 2 cm :



Justification graphique :



Retour au sommaire

# NICE

## Deuxième exercice académique

Série S

***Terminaisons***

### Énoncé

***Rappel*** : $N$ désigne la partie entière d'un nombre réel positif $n$ :

- Si $n < N + 0,5$ alors l'arrondi à l'unité de $n$ est $N$ ;
- Si $n \geqslant N + 0,5$ alors l'arrondi à l'unité de $n$ est $N + 1$.

Pour tout entier naturel non nul $n$, on note $\{n\}$ le nombre d'entiers $p$ tels que l'arrondi à l'unité de $\sqrt{p}$ soit égal à $n$.
Exemple :

| $p$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Arrondi à l'unité de $\sqrt{p}$ | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 4 |
| $\{n\}$ | $\{1\}$=2 | | $\{2\}$=4 | | | | $\{3\}$=6 | | | | | | |

1. Calculer $\{4\}$.
2. Écrire un algorithme qui demande à l'utilisateur la valeur de $n$ puis qui affiche le nombre $\{n\}$. On utilisera les fonctions suivantes :

| | |
|---|---|
| `round(x)` | Retourne l'arrondi à l'unité du nombre $x$ |
| `sqrt(x)` | Retourne la racine carrée du nombre $x$ |

3. En faisant fonctionner cet algorithme pour plusieurs valeurs de $n$, on obtient :

| $n$ | 5 | 6 | 10 |
|---|---|---|---|
| $\{n\}$ | 10 | 12 | 20 |

   Que peut-on conjecturer sur la valeur de $\{n\}$ en fonction de $n$ ?
4. Soit $n$ un entier naturel non nul.
   a. Justifier qu'il n'existe aucun entier naturel $p$ tel que $\sqrt{p} = n + 0,5$.
   On admet que de la même façon, il n'existe aucun entier naturel $p$ tel que $\sqrt{p} = n - 0,5$.
   b. Combien y a-t-il d'entiers $p$ qui vérifient $n - 0,5 < \sqrt{p} < n$ ?
   c. Combien y a-t-il d'entiers $p$ qui vérifient $n < \sqrt{p} + 0,5$ ?
   d. Déduire de ce qui précède la valeur de $\{n\}$.
5. Pour tout entier naturel non nul $p$, on note $R(p)$ l'arrondi à l'unité de $\sqrt{p}$.
   On considère tous les nombres entiers $p$ tels que $R(p) = 10$.
   Que vaut la somme de tous ces entiers ?

### Éléments de solution

1. On trouve $\{4\}$=8.

2. Algorithme :

```
VARIABLE
   N EST_DU_TYPE NOMBRE
   P EST_DU_TYPE NOMBRE
   E EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
   AFFICHER "Entrer un entier : "
   LIRE N
   AFFICHER N
   E PREND_LA_VALEUR 0
   P PREND_LA_VALEUR N*N
   TANT_QUE (round(sqrt(P))==N) FAIRE
      DEBUT_TANT_QUE
      P PREND_LA_VALEUR P+1
      E PREND_LA_VALEUR E+1
      FIN_TANT_QUE
   P PREND_LA_VALEUR N*N-1
   TANT_QUE (round(sqrt(P))==N) FAIRE
      DEBUT_TANT_QUE
      P PREND_LA_VALEUR P-1
      E PREND_LA_VALEUR E+1
      FIN_TANT_QUE
   AFFICHER "Nombre de racines entières : "
   AFFICHER E
FIN_ALGORITHME
```

3. On conjecture que pour tout entier $n$, $\{n\} = 2n$
4. a. Si un tel entier naturel $p$ existait, on aurait $p = (n + 0,5)^5 = n^2 + n + 0,25$ ce qui est absurde car $n^2 + n$ est un entier.

   b. La condition $n - 0,5 < \sqrt{p} < n$ est équivalente à $n^2 - n + 0,25 < p < n^2$.
   On cherche donc le nombre d'entiers compris entre $-n + 0,25$ et 0.
   Cela revient à chercher le nombre d'entiers compris strictement entre 0,25 et $n$.
   Il y en a donc $n - 1$.

   c. La condition $n < \sqrt{p} < n + 0,5$ est équivalente à $n^2 < p < n^2 + n + 0,25$.
   On cherche donc le nombre d'entiers compris strictement entre 0 et $n + 0,25$.
   Il y en a donc $n$.

   d. De tout ce qui précède, on déduit $\{n\} = (n - 1) + 1 + (n) = 2n$, car il faut rajouter à la liste l'entier tel que $n = \sqrt{p}$.
5. Il y a 20 entiers tels que $R(p) = 10$.
   Le plus petit d'entre eux est $10^2 - 9$.
   Le plus grand d'entre eux est $10^2 + 10$.
   La somme vaut donc $\dfrac{(10^2 - 9) + (10^2 + 10)}{2} \times 20 = 2010$.

Retour au sommaire

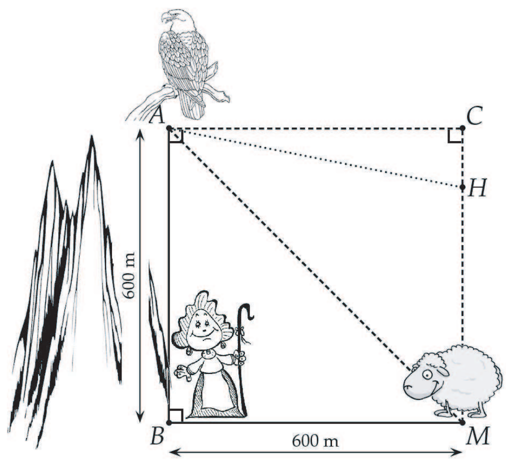
# NICE

## Troisième exercice académique

Séries non scientifiques

### Énoncé

Un aigle se trouve dans son nid (point $A$) sur un piton rocheux à 600 m au-dessus d'une prairie. Un mouton (point $M$) se trouve dans la prairie à 600 m de la verticale du rocher (point $B$).




L'aigle p eut progresser de deux manières :

- en chute libre à la verticale à la vitesse de 156 km/h ;
- en piqué direct sur un point fixé dans n'importe quelle direction, mais pas à la verticale, à la vitesse de 60 km/h.

L'aigle peut attaquer de plusieurs façons :

- soit piquer directement en M ;
- soit voler directement jusqu'en C, puis en chute libre, tomber sur le mouton ;
- soit encore piquer jusqu'en H, point du segment [CM] et ensuite tomber en chute libre sur le mouton.

La bergère (au point B), qui a vu le danger, peut se rendre près du mouton avec sa mobylette en 48 secondes. Pourra-t-elle, à coup sûr, sauver son mouton ?

### Éléments de solution

Vitesse en piqué : 60km/h = (100/6)m/s = (50 /3) m/s
Vitesse en chute libre : 156km/h = (130/3) m/s
On peut commencer par les 2 cas extrêmes :

1. En piqué directement sur M : par Pythagore, $AM = 6\sqrt{2} \times 10^2$ donc

$$T = \frac{6\sqrt{2} \times 600 \times 3}{50} = 36\sqrt{2} \approx 50,9 \text{ s} > 48 \text{ s}.$$

2. L'aigle vole en piqué jusqu'en C et puis en chute libre sur le mouton : $AC = 600$ m à la vitesse de (50 /3) m/s, donc $T_1 = \dfrac{600}{600} \times 36 = 36$ s.

puis $CM = 600$ m à la vitesse de (130/3) m/s, donc $T_2 = \frac{600}{600} \times 3 = \frac{180}{13} \approx 13,8$ s.
donc $T_1 + T_2 \approx 36 + 13,8 \approx 49,8 > 48$ s..
Par ces deux trajectoire, l'aigle arrive après la bergère.

3. On pose $x = CH$ avec $0 \leqslant x \leqslant 600$, on a $T_{AH} = \frac{3}{50}\sqrt{600^2 + x^2}$
   Puis $T_{HM} = \frac{3}{130}(600 - x)$ donc $T = T_{AH} + T_{HM} = \frac{3}{50}\sqrt{600^2 + x^2} + \frac{3}{130}(600 - x)$.

   Sans avoir besoin d'étudier la fonction, ni de résoudre une inéquation, on peut à la calculatrice, lire sur un tableau de valeurs, que, au moins pour $150 \leqslant x \leqslant 400$ , la valeur de $T < 48$s , ce qui permet d'affirmer que l'aigle pourra assez facilement attraper le mouton, et la bergère arrivera trop tard.

Retour au sommaire

# OCÉANIE

## Premier exercice national

Toutes séries

***Suite de nombres***

### Énoncé

L'exercice consiste à étudier les nombres obtenus en partant du nombre 1 par une succession d'étapes, de la manière suivante : un nombre obtenu à l'une des étapes est remplacé à l'étape suivante soit par sa moitié (étape codée M) soit par son complément à 1(étape codée C). Ainsi par exemple :

- la première étape consiste toujours à passer de 1 soit à $\frac{1}{2}$ (étape M) soit à 0 (étape C).
- la succession d'étapes M puis M puis C puis M, notée MMCM, conduit au nombre $\frac{3}{8}$ par le chemin $1 \to \frac{1}{2} \to \frac{1}{4} \to \frac{3}{4} \to \frac{3}{8}$
- à partir du nombre $\frac{3}{8}$ on peut obtenir à l'étape suivante soit $\frac{3}{16}$ (étape M), soit $\frac{5}{8}$ (étape C).

1. Quels sont les nombres obtenus après chacune des successions
   a. CMM (C puis M puis M)
   b. MMMCM (M puis M puis M puis C puis M)
   c. CCCCCC
2. Donner tous les nombres que l'on peut obtenir au bout de 3 étapes, puis de 4 étapes.
3. Montrer que tous les nombres obtenus, au bout d'un nombre quelconque d'étapes, sont dans l'intervalle $[0\,;1]$.
4. Écrire, dans les trois cas suivants, une succession d'étapes permettant d'obtenir les nombres indiqués :
   a. $\frac{3}{2^8}$
   b. $\frac{253}{256}$
   c. $\frac{2011}{2^{2011}}$
5. Soient $n$ et $N$ deux entiers naturels tels que $N$ est impair et $N < 2^n$.
   Écrire un algorithme permettant d'atteindre le $\frac{N}{2^n}$ en un nombre fini d'étapes. Conclure.

### Éléments de solution

1. On obtient respectivement les nombres : 0, $\frac{7}{16}$, 1.
2. Après la troisième étape on obtient l'un des nombres :0, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ et 1
   Aporès la quatrième étape, on aboutit à l'un des nombres : 0, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{7}{8}$, 1.
3. Les applications M et C préservent l'intervalle [0,1].
4. a. MMCMMMMMM donne $\frac{3}{2^8}$

b. MMCMMMMMMC donne $\dfrac{253}{256}$

c. La succession MMCMCMMCMCMMMMMC aboutit à $\dfrac{2011}{2^{11}}$.

5. L'algorithme explicité dans la réponse du 4c fournit une solution.

   On part de $\dfrac{N}{2^n}$, compris entre 0 et 1, et à chaque étape, soit on double le nombre s'il est inférieur à 1/2, étape notée (D) inverse de (M), soit on prend son complément à 1, étape notée (C) inverse de (C). Chaque étape conduit à une fraction irréductible de la forme $\dfrac{a}{2^m}$, comprise entre 0 et 1, où $a$ et $m$ sont deux entiers naturels. Les étapes DD, DC et CD, appliquées à ce nombre, conduisent respectivement à $\dfrac{a}{2^{m-2}}$, $\dfrac{2^{m-1}-a}{2^{m-1}}$ et $\dfrac{2^{m-a}}{2^{m-1}}$. Au bout de deux étapes successives, le dénominateur est donc divisé par 2 ou par 4. En partant de $\dfrac{N}{2^n}$, on aboutit donc à un dénominateur égal à 1 avec au plus $2n$ étapes. En inversant la démarche, on obtient une succession aboutissant à $\dfrac{N}{2^n}$ en partant de 1.

```
Entrée (k, n)
X=liste vide ; Vérifier k impair et k < 2^n
Tant que n<0
   Si k ≤ 2^(n-1) faire X ← concat (M, X) et n ← n-1
      sinon X ← concat (C,X) et k ← 2^n-k
fin de Tant que
afficher X.
```

Retour au sommaire

# OCÉANIE

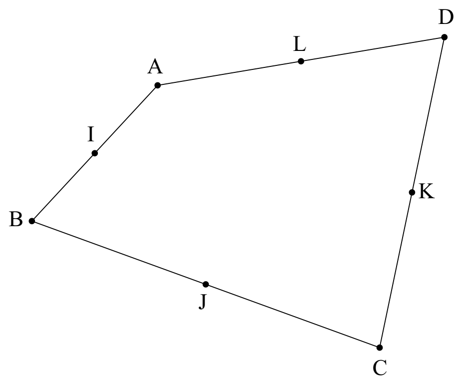
## Deuxième exercice national

Toutes séries

***La pelouse arrosée***

### Énoncé

Un jardinier doit arroser une pelouse, assimilée à un quadrilatère convexe ABCD quelconque (voir la figure ci-dessous pour un exemple). Pour cela, il place un arroseur automatique à chacun des milieux I, J, K et L des côtés [AB], [BC], [CD] et [DA].

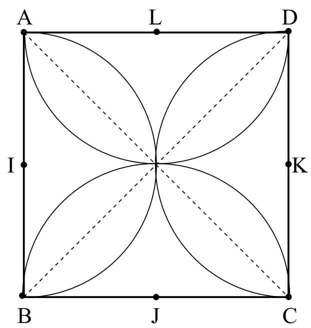



La portée du jet de l'arroseur situé en I est de mesure $\dfrac{AB}{2}$. Le jet commence par arroser le segment [IA], puis il pivote de 180°, pour arroser le segment [IB]. Chacun des trois autres arroseurs est réglé de manière analogue. Les quatre arroseurs arrosent ainsi quatre demi-disques.

1. Montrer que, dans le cas d'une pelouse de forme carrée, toute la surface est arrosée.
2. Est-ce encore vrai dans le cas général ?

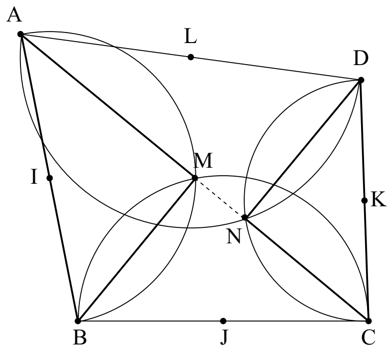
### Éléments de solution

1. Dans le cas du carré, on peut démontrer facilement que les triangles isocèles formés par les cotés et les diagonales sont des surfaces atteintes par les arrosoirs car inclus dans les demi-cercles.



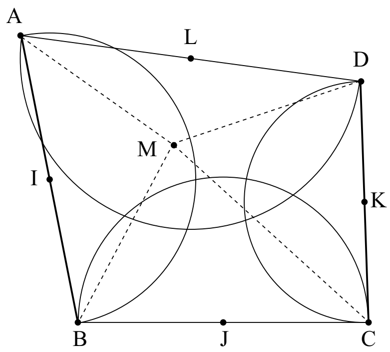

2. Les cercles de diamètres [AB] et [BC] ne sont pas tangents (car l'angle$\widehat{ABC}$ n'est pas plat), donc ils se coupent en un point autre que B. Appelons-le M.
   Les triangles AMB et BMC sont rectangles en M (car inscrits dans des demi-cercles). Donc l'angle $\widehat{AMC}$ est plat. Ce qui signifie que le point M est aligné avec A et C.

Ensuite, le demi-cercle centré en I arrose au moins le triangle AMB. Et celui centré en J arrose au moins le triangle BMC. Donc le triangle ABC est arrosé par ces deux arroseurs. On peut faire de même en définissant N comme point d'intersection des deux autres demi-cercles. Et ces demi-cercles arrosent au moins le triangle ADC. Finalement, on constate bien que toute la pelouse est arrosée.




**Autre méthode.**

Prenons un point M quelconque sur la pelouse.
On alors : $\widehat{AMB}+\widehat{BMC}+\widehat{CMD}+\widehat{DMA}=360^o$.
Par conséquent, l'un au moins des quatre angles est supérieur ou égal à $90^o$ (par l'absurde : si tous les quatre sont strictement inférieurs à $90^o$, la somme ne peut pas faire $360^o$).
Sur la figure ci-dessous, on a par exemple $\widehat{AMB}\geqslant 90^o$. Cela implique que le point M se trouve à l'intérieur du demi-disque de diamètre [AB]. Il est donc arrosé par l'arroseur situé en I. Donc, dans tous les cas, le point M sera atteint par l'un des quatre arroseurs.




Retour au sommaire

# ORLÉANS-TOURS

## Premier exercice académique

Toutes séries

***Marelle cyclique***

### Énoncé

Léo compose un tableau de la manière suivante :

- Sur la première ligne, il écrit deux chiffres pris parmi les dix entiers 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 et 9 (ces deux chiffres pouvant être égaux).
- Ensuite il pose alternativement des lignes à trois ou deux cases.
- Pour remplir une case :
  - il calcule la somme des deux chiffres placés juste au-dessus et écrit dans la case le chiffre des unités de cette somme.
  - S'il n'y a qu'un seul chiffre au-dessus de la case à remplir, il répète ce chiffre.

  Exemple :

| | | | |
|---|---|---|---|
| 3 | 9 | | Ligne 1 |
| 3 | 2 | 9 | Ligne 2 |
| 5 | 1 | | Ligne 3 |
| 5 | 6 | 1 | Ligne 4 |

### Partie A

1. a. Compléter le tableau ci-dessus (appelé « marelle ») jusqu'à la ligne 9. Quelle serait la $2011^{\text{ème}}$ ligne de cette figure ?

   b. Construire jusqu'à la ligne 9 la marelle dont la première ligne est formée des chiffres 3 et 2.

   c. Recommencer en prenant les chiffres 7 et 3 sur la première ligne.

   d. Quelle conjecture peut-on faire sur les lignes 1 et 9 d'une marelle ?
2. Démontrer que toute marelle possède la propriété observée à la question 1.d. On pourra noter $x$ et $y$ les entiers choisis sur la première ligne.

*Dans les deux parties suivantes, on garde la notation (x ; y) pour les deux nombres de la première ligne.*

### Partie B

1. Démontrer que la première ligne est identique à la troisième si et seulement si $x + y$ est un multiple de 10 et en déduire toutes les valeurs possibles pour $(x; y)$.
2. Donner toutes les valeurs de $(x; y)$ pour lesquelles la première ligne est identique à la cinquième sans être identique à la troisième ligne.
3. Peut-on donner des valeurs à $(x; y)$ pour que la première ligne soit identique à la septième sans être identique à la troisième ligne ? Si oui, donner un exemple.

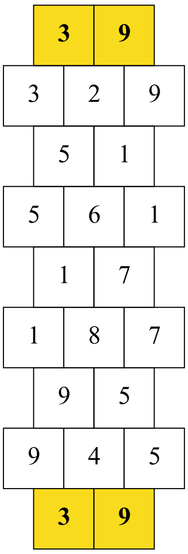
### Partie B

Peut-on trouver une marelle dans laquelle apparaissent les 10 chiffres de 0 à 9 ? Si oui, donner un exemple. Sinon, justifier l'impossibilité de construire une telle marelle.

## Éléments de solution

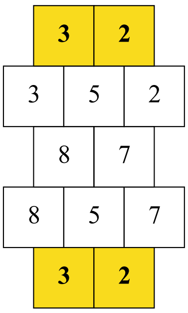
### Partie A

1. a.



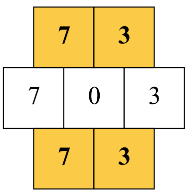

La première ligne est identique à la neuvième. Les $1^{\text{ère}}$ ; $9^{\text{ème}}$, $17^{\text{ème}}\ldots(8k+1)^{\text{ème}}$ sont identiques et valent **39**.
Or $2009 = 8\times 251+1$ donc la $2009^{\text{ème}}$ est 39 et la $2011^{\text{ème}}$ est **51**

b.




La première ligne est identique à la cinquième. La $1^{\text{ère}}$ ; $5^{\text{ème}}$, $9^{\text{ème}}\ldots(4\text{k}+1)^{\text{ème}}$ sont identiques et valent **32**.
On peut valider la conjecture de la question 1 car la $1^{\text{ère}}$ ligne est bien identique à la $9^{\text{ème}}$ ligne.

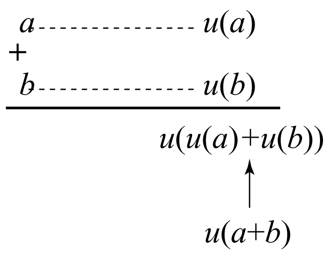
c.




La première ligne est identique à la troisième. Toutes les lignes impaires valent **73** et toutes les lignes paires **703**.
On peut valider la conjecture de la question 1 car la $1^{\text{ère}}$ ligne est bien identique à la $9^{\text{ème}}$ ligne.

2.

Soit $a$ et $b$ deux nombres entiers naturels. On note $u(a)$ le chiffre des unités de $a$ ($u(b)$ celui de $b$). Il suffit de remarquer que : $u(a+b) = u(u(a)+u(b))$
On peut donc « remplir » la marelle ainsi



| | | |
|---|---|---|
| $x$ | $y$ | |
| $x$ | $u(x+y)$ | $y$ |
| $u(2x+y)$ | $u(x+2y)$ | |
| $u(2x+y)$ | $u(3x+3y)$ | $u(x+2y)$ |
| $u(5x+4y)$ | $u(4x+5y)$ | |
| $u(5x+4y)$ | $u(9x+9y)$ | $u(4x+5y)$ |
| $u(14x+13y)$ | $u(13x+14y)$ | |
| $u(14x+13y)$ | $u(27x+27y)$ | $u(13x+14y)$ |
| $u(41x+40y)$ | $u(40x+41y)$ | |

Or $40x = 4x \times 10$ se termine toujours par un zéro et $41y = 40y + y$ et $40y$ se termine toujours par un 0 donc $40x + 41y$ se termine par $y$.
Donc le chiffre des unités de $40x + 41y$ est $y$.
De même $41x = 40x + x$ se termine par $x$ et $40y$ par 0 donc $41x + 40y$ se termine par $x$ et le chiffre des unités de $41x + 40y$ est $x$.
**La neuvième ligne est donc toujours identique à la première**

Retour au sommaire

# ORLÉANS

## Deuxième exercice académique

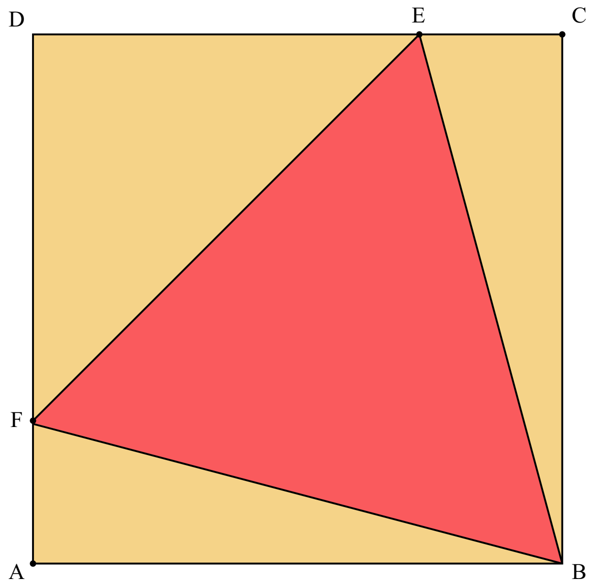
Toutes séries

***Un triangle équilatéral inscrit...***

### Énoncé

#### Partie A : Un triangle équilatéral inscrit dans un carré

ABCD est un carré de côté 10 cm. On a construit un triangle équilatéral BEF tel que les points E et F appartiennent respectivement aux segments [CD] et [AD].

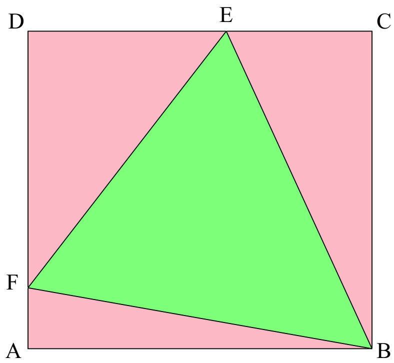



1. Démontrer que les segments [CE] et [AF] sont de même longueur et déterminer la valeur exacte de cette longueur.
2. Démontrer que l'aire du triangle DEF est égale à la somme des aires des triangles BCE et ABF.

#### Un triangle équilatéral inscrit dans un rectangle

ABCD est désormais un rectangle et on considère un triangle équilatéral BEF tel que les points E et F appartiennent respectivement aux segments [CD] et [AD].

1. Dans cette question, on suppose qu'un tel triangle équilatéral existe et on se propose de démontrer alors que l'aire du triangle DEF est égale à la somme des aires des triangles BCE et ABF.




On pose $a = AB,\ b = AD,\ x = AF$ et $y = CE$.

a. Démontrer que $x^2 - 2bx - 2ay + a^2 = 0$ et $y^2 - 2bx - 2ay + b^2 = 0$.

b. En déduire que l'aire du triangle DEF est égale à la somme des aires des triangles BCE et ABF.

Pour cela, on pourra utiliser l'égalité suivante, après l'avoir vérifiée :

$$(x^2-2bx-2ay+a^2)by+(y^2-2bx-2ay+b^2)ax = [(b-x)(a-y)-ax-ay]\times(ay+bx)$$

2. On s'intéresse maintenant à l'existence d'un triangle équilatéral inscrit dans le rectangle ABCD.

   a. On se place dans le cas où le rectangle ABCD a pour dimensions $AB = 10$ cm et $AD = 9$ cm. Construire un triangle BEF équilatéral tel que les points E et F appartiennent respectivement aux segments [CD] et [AD].
   Expliquer la démarche et laisser apparents les traits de construction.

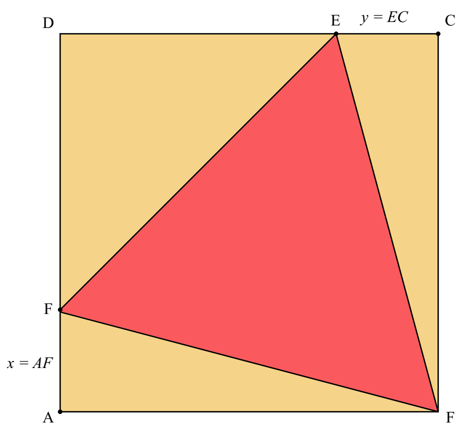
   b. Examiner le cas où le rectangle ABCD a pour dimensions $AB = 10$ cm et $AD = 8$ cm.

## Éléments de solution

### Partie A

1.
L'unité de longueur est le $cm$.
On pose $x = AF$ et $y = EC$.
On désigne par $c$ le côté du triangle BEF.
D'après le théorème de Pythagore :

$x^2 + 100 = c^2$ (égalité 1)
$y^2 + 100 = c^2$ (égalité 2)
$(10 - x)^2 + (10 - y)^2 = c^2$ (égalité 3).




Les égalités 21 et 2 donnent $x = y$.
Les égalités 1 et 3 donnent alors :
$x^2+100 = 2(10-x)^2$, c'est-à-dire $x^2 - 40x + 100 = 0$.
D'où, après résolution :
$x = 20 + 10\sqrt{3}$ ou $x = 20 - 10\sqrt{3}$.
Or, $0 \leqslant x \leqslant 10$ donc $x = 20 - 10\sqrt{3}$.
Finalement : $EC = AF = 20 - 10\sqrt{3}\ cm$ (environ 2,68 $cm$).

2. Aire(ABF)+ Aire(ECB) $= 5x + 5y = 10x\ cm^2$ et Aire(DEF) $= \dfrac{1}{2}(10 - x)^2\ cm^2$.

   Il suffit alors de vérifier que $(10 - x)^2 = 20x$, ce qui est bien le cas puisque cette égalité est équivalente à l'égalité $x^2 - 40x + 100 = 0$ qui vérifie $x$.
   Finalement : Aire(ABF) + Aire(ECG) = Aire(DEF).

**Partie B**

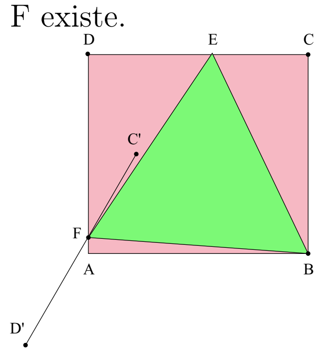
L'unité de longueur est le $cm$ et l'unité d'aire est le $cm^2$. Onpose $x = AF$ et $y = EC$.

1. On désigne par $c$ le côté du triangle BEF. D'après le théorème de Pythagore ;
   a. $x^2 + a^2 = c^2$ (égalité 1) ; $y^2 + b^2 = c^2$ (égalité 2) ; $(b - x)^2 + (a - y)^2 = c^2$ (égalité 3).
   Les égalités 2 et 3 donnent : $x^2 - 2bx - 2ay + a^2 = 0$.
   Les égalités 1 et 3 donnent : $y^2 - 2bx - 2ay + b^2 = 0$.
   b. On vérifie l'égalité p roposée...

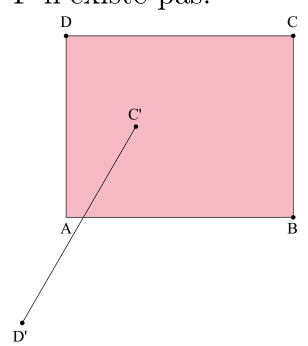
   D'après a., on obtient $[(b - x)(a - y) - ax - by] \times (ay + bx) = 0$.
   Or $x$ et $y$ ne peuvent être simultanément nuls, donc $ay + bx \neq 0$
   donc $(b - x)(a - y) - ax - by = 0$.

   On en déduit que $\dfrac{1}{2}(b-x)(a-y) = \dfrac{1}{2}ax+\dfrac{1}{2}by$, ce qui démontre l'égalité attendue pour les aires.
2. On trace l'image [C'D'] du segment [CD] par la rotation de centre B et d'angle 60° (sens à préciser). Le point F est alors le point d'intersection (s'il existe) des segments [AD] et [C'D'].

   **a.**Cas $AB = 10$ cm et $AD = 9$ cm.
   F existe.




   **b.** Cas $AB = 10$ cm et $AD = 8$ cm.
   F n'existe pas.




Retour au sommaire

# PACIFIQUE

## Premier exercice académique

Toutes séries

***Traversée d'un cube***

### Énoncé et Éléments de solution[2]

### Règles du déplacement :

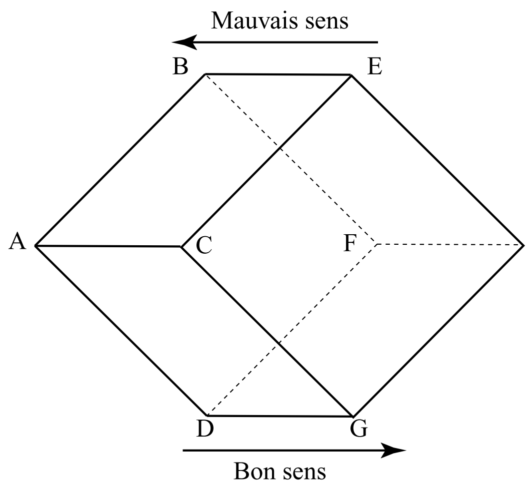
Sur la figure, le cube est légèrement aplati et posé sur une arête afin de faciliter la compréhension.

Une fourmi se déplace au hasard sur les arêtes d'un cube ABCDEFGH sans jamais faire demi-tour. Par exemple, si elle est en F et vient de B, elle ne peut pas repartir vers B.

Elle peut cependant tourner en rond. Par exemple, elle peut faire le trajet ABECA et revenir à son point de départ. Ce trajet compte 4 déplacements.

On suppose qu'elle part du sommet A par l'arête de son choix (vers B, C ou D) et qu'elle continue ses déplacements jusqu'à ce qu'elle ait traversé le cube, c'est-à-dire jusqu'à ce qu'elle arrive en H. On considère qu'un déplacement qui la rapproche de H va dans le bon sens alors qu'un déplacement qui l'éloigne de H va dans le mauvais sens.

A chaque sommet, elle a donc le choix entre 2 arêtes. On considère que chacune de ces deux directions a la même « chance » d'être choisie. Par exemple, si elle est en E et qu'elle vient de C, elle a autant de chance de continuer vers B que de continuer vers H.




Ceci est un cube.
Toutes les arêtes ont la même longueur.

### Compréhension de la simulation

1. En partant de A, où peut on aller :
   en 1 déplacement ? En B, C ou D
   en 2 déplacements ? En E, F ou G

[2]Solution proposée par Thierry Jalras

en 3 déplacements ? En B, C, D ou H
en 4 déplacements ? En A, E, F ou G
(On pourra représenter un arbre décrivant les possibilités)

Donner un trajet allant de A à H en un minimum de déplacements. Combien de déplacements compte ce trajet ?
*ABFH compte 3 déplacements.*

Pour chaque point de la figure, donner le nombre minimum de déplacements pour rejoindre H.
*De E,F ou G : 1 déplacement. De B, C ou D : 2 déplacements. De A : 3 déplacements.*

2. En partant de A, quels sont les nombres de déplacements possibles dans un trajet qui arrive en H ? 3, 5, 7, ...
*tous les nombres impairs sont possibles et pas les nombres pairs car on alterne : une fois en A, E, F ou G et une fois en B, C, D ou H*

   Est-il possible de ne jamais arriver en H ?
*Oui, en tournant sur des cycles BFDGCE par exemple.*

   Est-il certain, probable ou improbable d'arriver en H ?
*C'est probable car chaque fois que l'on passe en E, F, ou G, on a une chance sur deux de finir en H et que comme on ne peut revenir en A si on en vient, on est en E, F ou G au moins une fois tous les 4 déplacements.*

L'ensemble de points E1 est constitué des points B, C et D.
L'ensemble de points E2 est constitué des points E, F et G.
On note E1 = {B, C, D} et E2 = {E, F, G} Si on fait tourner le cube d'un tiers de tour dans n'importe quel sens autour de l'axe (AH), Ces deux ensembles sont conservés et le problème étudié est conservé, cela justifie de considérer ces ensembles en bloc pour simplifier l'étude. On considère donc qu'à un instant donné, la fourmi peut être en A, dans E1, dans E2 ou en H.

3. Si la fourmi est en A, où sera-t-elle après 1 déplacement ?
*Dans E1*

   après 2 déplacements ?
*Dans E2.*

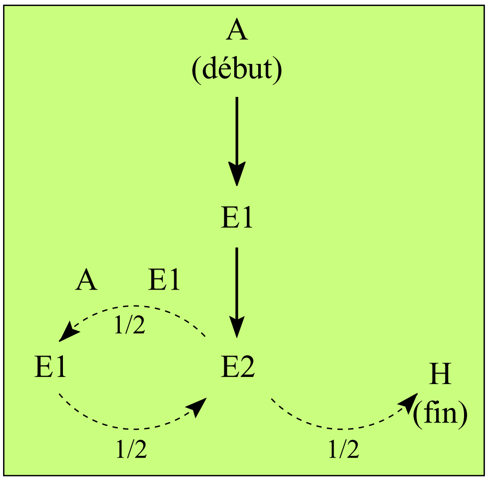
4. Si la fourmi est dans E2, d'où vient-elle ?
*Forcément de E1 car H étant le point d'arrivée, elle ne peut en venir.*

   Où pourra-t-elle être après 1 déplacement ?
*Dans E1 ou en H.*

5. Si la fourmi vient de E2 et est dans E1, où pourra-t-elle être après 1 déplacement ?
*En A ou en E2.*

   Si elle va en A, où sera-t-elle 3 déplacements après avoir quitté E1 ?
*Elle repasse dans E1 puis va dans E2.*

**Diagramme bilan**




6. Montrer que la probabilité que la fourmi traverse le cube en 3 déplacements est$1/2$.
*Le premier déplacement se fait obligatoirement de A vers E1 et le second de E1 vers E2.*
*Le troisième déplacement à une probabilité $1/2$ d'être de E2 vers E1 et une probabilité $1/2$ d'être de E2 vers H permettant de finir la traversée.*
*D'où le résultat.*

7. Quelle est la probabilité que la fourmi traverse le cube en 11 déplacements ?
*Ces résultats peuvent s'obtenir en remarquant qu'après 1 coup on est dans E1 venant de A et qu'après un nombre impair de déplacements, il n'y a que 3 cas à envisager à l'aide du diagramme bilan : on est en H auquel cas c'est terminé ;*
*on est dans E1 venant de A et dans 2 coups, on sera : une fois sur 2 en H et une fois sur 2 dans E1 venant de E2 ;*
*on est dans E1 venant de E2 et dans 2 coups, on sera : une fois sur 4 en H, une fois sur 4 dans E1 venant de E2 et une fois sur 2 dans E1 venant de A. on peut pas à pas dresser la liste suivante :*

***1 coup*** : *p(E1 de A)=1*
***3 coups*** : *p(H)=1/2 et p(E1 de E2)=1/2*
***5 coups*** : *p(H)=$1/2 + 1/2 \times 1/4 = 5/8$ p(E1 de A) $= 1/2 \times 1/2 = 1/4$ et p(E1 de E2)=$1/2 \times 1/4 = 1/8$*
***7 coups*** : *p(H)=$5/8 + 1/4 \times 1/2 + 1/8 \times 1/4 = 25/32$, p(E1 de A)=$1/8 \times 1/2 = 1/16$, p(E1 de E2)=$1/4 \times 1/2 + 1/8 \times 1/4 = 5/32$*
***9 coups*** : *p(H)= $25/32 + 1/16 \times 1/2 + 5/32 \times 1/4 = 109/128$ p(E1 de A) $= 5/32 \times 1/2 = 5/64$, p(E1 de E2) $= 1/16 \times 1/2 + 5/32 \times 1/4 = 9/128$*
***11 coups*** : *p(H) $= 109/128 + 5/64 \times 1/2 + 9/128 \times 1/4$*

*La probabilité cherchée est $5/64 \times 1/2 + 9/128 \times 1/4 = 29/512$*

**COMPLEMENTS** : Pour simuler le déplacement, on se limitera donc au modèle suivant :

On part de A et en 2 déplacement, on est dans E2.
De E2, on va une fois sur deux en H (le trajet est fini) et une fois sur deux en E1.
De E1, on va en E2 mais une fois sur deux en 1 déplacement et une fois sur deux en 3 déplacements.

**Simulation :** On reporte les résultats dans un tableau. Si on choisit un échantillon de 20 trajets, on a la fréquence de chaque « nombre de déplacements » sous forme de pourcentage en multipliant les effectifs par 5.

| Nbre de déplacements | 3 | 5 | 7 | 9 | 11 | 13 | 15 | 17 | 19 | 21 | 23 | 25 + |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Nbre de trajets | | | | | | | | | | | | |
| Fréquence (%) | | | | | | | | | | | | |

On peut compléter ce tableau puis calculer le nombre moyen de déplacements et

**Pour aller plus loin :**
Résultats théoriques (arrondis à 0,01) :

| Nbre de déplacements | 3 | 5 | 7 | 9 | 11 | 13 | 15 | 17 | 19 | 21 | 23 | 25 + |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Fréquence (%) | 50 | 12,5 | 15,63 | 7,03 | 5,66 | 3,17 | 2,21 | 1,35 | 0,89 | 0,56 | 0,36 | 0,23 |

Ces résultats peuvent s'obtenir à l'aide dŠun tableur en remarquant qu'après 1 coup on est dans E1 venant de A et qu'après un nombre impair de déplacements, il n'y a que 3 cas à envisager à l'aide du diagramme bilan :

- on est en H auquel cas c'est terminé ;
- on est dans E1 venant de A et dans 2 coups, on sera : une fois sur 2 en H et une fois sur 2 dans E1 venant de E2 ;
- on est dans E1 venant de E2 et dans 2 coups, on sera : une fois sur 4 en H, une fois sur 4 dans E1 venant de E2 et une fois sur 2 dans E1 venant de A.

La moyenne du nombre de déplacements que l'on obtient avec ce tableau est de 5,90 environ. Plus on prend de colonnes, plus la moyenne augmente en se rapprochant peu à peu de la moyenne théorique.
La moyenne théorique est de 6 déplacements, mais il faudrait un tableau infini pour la trouver exactement. En allant jusqu'à 41 déplacements dans le tableau, on arrive à une moyenne de 6 déplacements avec une erreur inférieure à 0,01 et en allant jusqu'à 97 déplacements une erreur inférieure à $10^{-7}$.
La preuve du résultat (6 déplacements en moyenne pour traverser le cube) me semble faire appel à des notions dépassant le niveau première.

Retour au sommaire

# PACIFIQUE

## Deuxième exercice académique

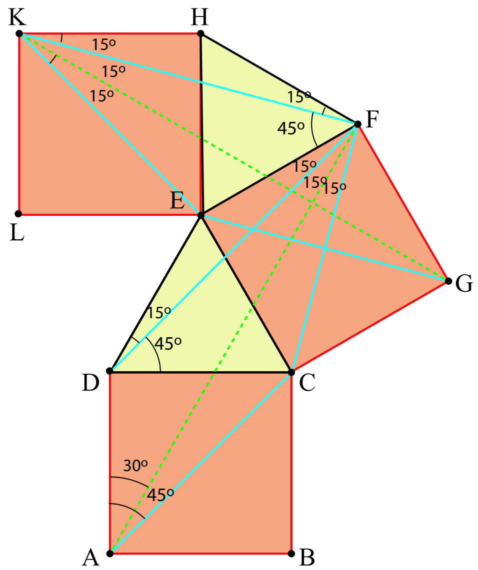
Toutes séries

***Autour d'un triangle***

### Énoncé et Éléments de solution

*Cet exercice nous est parvenu sans énoncé. Mais, à la lecture de la solution, il ne sera pas difficile au lecteur de le reconstituer.*

Plusieurs méthodes sont possibles, en voici une ne faisant intervenir que la somme des angles d'un triangle :




1. triangles DEF et FHK sont isocèles dont l'angle au sommet a pour mesure $90 + 60 = 150^o$.
   Les autres angles ont pour mesures :
   $(180 - 150)/2 = 15^o$
   De même, les triangles EGK et ACF sont isocèles dont l'angle au sommet a pour mesure $45+60+45 = 150^o$.
   Les autres angles ont pour mesures :
   $(180 - 150)/2 = 15^o$

   On a donc :
   $\widehat{FKH} = \widehat{HFK} = \widehat{EDF} = \widehat{DEF} = 15^o$
   $\widehat{EGK} = \widehat{EKG} = \widehat{CAF} = \widehat{CFA} = 15^o$.

   $\widehat{FKG} = \widehat{HKE} - \widehat{HKF} - \widehat{EKG} = 45 - 15 - 15 = 15^o$
   De même, on démontre que $\widehat{AFD} = 15^o$.

   $\widehat{EFK} = \widehat{EFH} - \widehat{HFK} = 60 - 15 = 45^o$
   De même on démontre que $\widehat{CFD} = 45^o$.

   $\widehat{DAF} = \widehat{DAC} - \widehat{CAF} = 45 - 15 = 30^o$.

   On considère le triangle ADF ;
   $\widehat{AFD} = 180 - \widehat{DAF} - \widehat{ADF} = 180 - 30 - 135 = 15^o$.
   Soit O l'intersection de (GK) et (AF),
   $\widehat{KFO} = 45 + 15 + 15 = 75^o$ et $\widehat{FKO} = 15^o$.
   En considérant le triangle KFO,
   $\widehat{FOK} = 180 - 15 - 75 = 90^o$.
   D'où (AF) $\perp$ (KG).

2. Les triangles GFK et ADF sont supérposables (isométriques). En effet, $AD = FG$ ; $DF = FK$ et $\widehat{ADF} = \widehat{GFK}$.
   On a donc $AF = GK$.

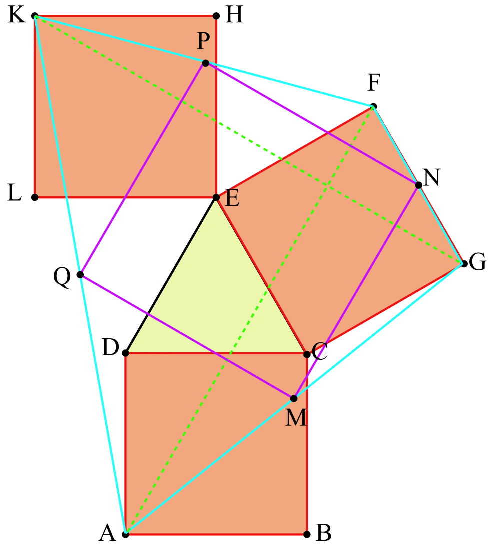
   On utilise plusieurs fois le théorème des milieux :
   *Dans un triangle, la droite passant poar les milieux de deux côtés est parallèle au troisième côté.*
   *De plus, le segment reliant les deux milieux a pour mesure la moitié du troisième.*

   En considérant les triangles AGK et FGK, on a :
   (MQ)//(GK) et (NP)//(GK) d'où (MQ)//(NP).
   Et, $NP = MQ = GK/2$

   En considérant les triangles AFK et AFG, on a :
   (PQ)//(AF) et (MN)//(AF) d'où (MN)//(PQ).
   et $PQ = MN = AF/2$.

   Le quadrilatère MNPQ a ses côtés opposés parallèles deux à deux. C'est donc un parallélogramme.
   (MQ)//(GK) ; (MN)//(AF) et (GK) $\perp$ (AF) d'où (MN) $\perp$ (MQ).
   Le parallélogrtamme a un angle droit, c'est donc un rectangle.

   Comme $AF = GK$, on a $NP = PQ = AF/2$. La quadrilatère est donc un carré.




Retour au sommaire

# PARIS

## Premier exercice académique

Toutes séries

***Des bâtons et des pavés***

### Énoncé

#### En une dimension

Soit $n$ un entier naturel non nul.
*On appelle* ***bâton*** *tout intervalle inclus dans [0, n] non réduit à un point, dont les bornes sont des nombres entiers.*
**Question n°1** : Combien existe-t-il de tels bâtons ?

#### En trois dimensions

On dispose de cubes de même taille portant des numéros distincts.
*On appelle* ***boîte*** *tout assemblage de ces cubes formant un pavé (parallélépipède rectangle) plein. Deux boîtes contenant des cubes différents sont considérées distinctes.*
Une boîte $B$ comporte 385 cubes.

**Question n°2** : Quelles sont les dimensions de $B$ sachant qu'elles sont strictement supérieure à 1 ?

**Question n°3** : Combien de boîtes distinctes la boîte $B$ contient-elle ?

On enlève 7 des 8 cubes situés en un sommet de $B$ pour former le solide $S$.
**Question n°4** : Combien de boîtes distinctes le solide $S$ contient-il ?

### Éléments de solution

1. $\begin{pmatrix} n+1 \\ 2 \end{pmatrix} = 1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$
2. $385 = 5 \times 7 \times 11$, la décomposition étant unique.
3. On note $385 = k \times \ell \times m$.
   $N_{tot}$ désigne le nombre de boîtes contenues dans $B$.
   $$N_{tot} = \frac{k(k+1)}{2} \times \frac{\ell(\ell+1)}{2} \times \frac{m(m+1)}{2} = 15 \times 28 \times 66 = 27\ 720$$
4. Soit $N$ le nombre recherché. Il convient d'ôter au nombre $N_{tot}$ trouvé précédemment les boîtes contenant
   - tous les sommets
     Il y en a : $N_{pavé} = 1$
   - une face entière de $B$ et une seule :
     Les 6 faces de $B$ se répartissent par paires suivant trois dimensions possibles : $5 \times 7$ ; $5 \times 11$ et $7 \times 11$.
     Il y a $n_{k\times\ell} = m - 1$ boîtes distinctes contenant une face donnée de dimensions $k \times \ell$ et elle seule, donc
     $$N_{face} = 2(n_{5\times7} + n_{5\times11} + n_{7\times11}) = 2\left((11-1) + (7-1) + (5-1)\right) = 40.$$

- Une arête entière de $B$ et une seule
  Les arêtes de $B$ se répartissent par quadruplets suivant trois dimensions possibles : 5 ; 7 et 11. Il y a $n_k = (\ell - 1)(m - 1)$ boîtes distinctes contenant une arête donnée de dimension $k$ et elle seule, donc

$$N_{arête} = 4(n_5 + n_7 + n_{11}) = 4\left((7-1)(11-1) + (5-1)(11-1) + (5-1)(7-1)\right)$$
$$= 4(60 + 40 + 24) = 496.$$

- Un sommet de $B$ et un seul parmis les 8 possibles.
  Il y a $(k-1)(\ell-1)(m-1) = 4 \times 6 \times 10 = 240$ boîtes contenant un sommet donné et aucun autre. Il convient donc d'écarter $N_{sommet} = 7 \times 240 = 1\ 600$ boîtes.

$$\boxed{\begin{aligned} N &= N_{tot} - N_{pavé} - N_{face} - N_{arête} - N_{sommet} \\ &= 27\ 720 - 1 - 40 - 496 - 1\ 680 \\ &= 27\ 720 - 2\ 217 \\ &= 25\ 503 \end{aligned}}$$

Retour au sommaire

# PARIS

## Deuxième exercice académique

Toutes séries

***La baguette cassée***

### Énoncé

Une baguette est cassée en trois morceaux ; les points de fracture sont situés au hasard.
Déterminer la probabilité que l'on puisse construire un triangle non aplati avec ces trois morceaux.

### Éléments de solution

Le plan est rapporté au repère orthonormal $(O\ ;\ I\ ;\ J)$. On suppose la baguette égale au segment [OI]. Appelons $x$ et $y$ les abscisses des points de fracture ; $x$ et $y$ sont répartis suivant la loi uniforme sur $[0\ ;\ 1]$ et le point $P(x\ ;\ y)$ est dans le carré [OI] $\times$ [OJ].

Supposons $x \leqslant y$ ; on peut obtenir un triangle non aplati si et seulement si $x < \dfrac{1}{2}$, $y - x < \dfrac{1}{2}$ et $1 - y < \dfrac{1}{2}$.

Ces trois conditions détermineront un triangle inclus dans [OI] $\times$ [OJ] d'aire $\dfrac{1}{8}$.
On traite de même le cas $x > y$.
La probabilité demandée est donc égale à $\dfrac{1}{4}$.

Retour au sommaire

# POITIERS

## Premier exercice académique

Toutes séries

### Énoncé

**Bob** : « Salut Alice ! Tiens, c'est un trinôme du second degré que tu as écrit dans la marge de ta feuille. Quelles en sont les racines ? »

**Alice** : « Ce sont deux entiers positifs. L'une des racines est mon âge, et l'autre est l'âge de mon petit frère Clément. »

**Bob** : « C'est amusant ! Voyons, si je peux deviner quel âge vous avez, Clément et toi. Cela ne devrait pas être trop difficile, puisque les coefficients sont entiers. Je crois deviner ton âge, il me suffit de vérifier en remplaçant $x$ par ce nombre. . .
Zut ! Cela donne -55 au lieu de 0. »

**Alice** : « C'est que je n'ai pas cet âge là !. . . »

**Bob** : « Sans doute. A propos si je remplace $x$ par 1 j'obtiens la somme des coefficients. »

**Alice** : « Effectivement ! Il faut aussi que tu saches que cette somme est égale à mon âge moins un. »

**David** qui a tout entendu, donne alors l'âge de Clément et celui d'Alice.

a. Prouver que Clément est âgé de 2 ans.
b. Déterminer l'âge d'Alice, sachant qu'elle a entre 10 et 50 ans.

### Éléments de solution

a. On notera $m$ l'âge de Clément et $n$ l'âge dŠAlice, de plus Clément est plus jeune qu'Alice donc $m < n$.
Le polynôme $p(x) = ax^2 + bx + c = a(x - n)(x - m)$
$a + 1 - n(a + 1) + am(n - 1) = 0$ donc $a + 1 - an - n - am + amn = 0$
$a + 1 - n(a + 1) + am(n - 1) = 0$
$(a + 1)(1 - n) + am(n - 1) = 0$
$(n - 1)(am - a - 1) = 0.$
Si $n = 1$, implique que $m = 0$, ce qui est impossible.
Enfin $a(m - 1) = 1$ on en déduit que $a = 1$ et $m = 2$.

b. Bob choisit un nombre $N$ et alors on a $p(N) = -55$, donc $(N - m)(N - 2) = -55$.
Si $N = 1$, alors $1 - m = -55$, soit $m = 56$, impossible.
On peut supposer que $N - 2 > 0$ donc $N - 2 = 11$ ou $N - 2 = 5$ ou $N - 2 = 1$
$N = 13$ implique que $13 - m = -5$, donc $m = 18$
$N = 7$ implique que $7 - m = -11$ donc $m = 18$
$N = 3$ implique que $3 - m = -55$ donc $m = 58$, impossible.

**Alice a donc 18 ans.**

Retour au sommaire

# POITIERS

## Deuxième exercice académique

Toutes séries ***Jeu de l'isocoupe***

### Énoncé

Pour jouer au jeu de l'isocoupe, il faut deux participants, une feuille de papier de forme polygonale et une paire de ciseaux.

Pour réaliser une isocoupe il faut couper la feuille en deux morceaux en partant de l'un des sommets. Cette découpe doit suivre une ligne droite et l'un des deux morceaux obtenus doit être un triangle isocèle. Le premier joueur réalise une isocoupe à partir de la feuille de départ, il jette le triangle isocèle obtenu et passe l'autre morceau au second joueur qui doit à son tour réaliser une isocoupe, et ainsi de suite...

Un joueur a gagné s'il réussit, après son isocoupe, à former une figure ayant exactement la même forme, mais bien sûr, en plus petit, que le morceau qu'il a reçu.
Le jeu s'arrête lorsqu'un des deux joueurs a gagné.

A et B jouent ensemble. **Ce sont deux joueurs confirmés**, ils réalisent toujours l'isocoupe la plus astucieuse. A coupe le premier.

1. A prend une feuille carrée. Qui va gagner ?
2. A prend une feuille rectangulaire, deux fois plus longue que large. Qui va gagner ?
3. A prend une feuille rectangulaire, $n$ fois plus longue que large ($n$ entier). Qui va gagner ?
4. A et C jouent ensemble. **C est un joueur débutant**. A prend une feuille carrée et coupe le premier, C coupe à son tour, mais ne réalise pas l'isocoupe la plus astucieuse, alors A coupe et gagne. Comment coupe-t-il ?

### Éléments de solution

1. La seule coupe possible de la feuille carrée se fait suivant la diagonale (les deux triangles après découpe sont rectangles, donc pour être possible il faut deux autres angles de 45°) Le joueur B reçoit un triangle isocèle.
   Il suffit de le couper le long de la hauteur de l'angle droit pour obtenir deux nouveaux triangles rectangles isocèles. Une fois l'un jeté, l'autre a la même forme que la figure dont il était parti et B gagne.
2. Appelons ABCD le rectangle, avec $AB = CD = 2$ et $BC = DA = 1$. Si la découpe part de A (ce qu'on peut toujours supposer), elle se termine sur [BC] et le triangle isocèle est rectangle en B ou sur [CD] et le triangle isocèle est rectangle en D. Donc l'angle de la découpe en A est 45°. Comme l'angle $\left(\overrightarrow{\text{AC}}\ ;\ \overrightarrow{\text{AB}}\right) < \dfrac{\pi}{4}(2\pi)$ car $AC < AB$, la première solution est impossible, on en déduit que le triangle est de la forme ADD', isocèle et rectangle en D, et D' est le milieu de [CD].
   Le joueur B peut alors joindre D'au milieu A' de [AB] pour obtenir le triangle isocèle AD'A'. Une fois celui-ci retiré, on récupère un carré A'BCD' et la première question montre que puisque c'est de nouveau à A de jouer, c'est encore B qui gagne.
3. Le raisonnement est le même que ci-dessus. Si on note ABCD le rectangle $AB = CD = n$ et $BC = DA = 1$, le joueur A est, comme ci-dessus, obligé de découper un triangle isocèle du type ADC' avec $DC' = 1$. Il suffit à B de relier C' au point A' de [AB] tel que $AA' = 1$ pour retirer un triangle rectangle isocèle AC'A' et donner au joueur A une feuille rectangulaire avec les proportions $(n - 1) \times 1$. Il en résulte que B gagnera toujours.

4. Revenons a la feuille carreée découpée en deux triangles rectangles isocèles par A. Il y a une autre isocoupe possible : si ABD est isocèle en A, traçons à partir de A un segment faisant un angle $\frac{3\pi}{8}$ avec AB et notons C' le point d'intersection de cette droite avec [BC]. Le triangle ABC' a un angle $\frac{3\pi}{8}$ en A, $\frac{\pi}{4}$ en B et $\pi - \left(\frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{8}\right) = \frac{3\pi}{8}$ en C', il est donc isocèle en B. Les angles du triangle restant sont $\frac{\pi}{8}$ en A, $\frac{\pi}{4}$ en C et $\frac{5\pi}{8}$ en C' et C ne gagne donc pas puisque le triangle n'a pas la même forme que le triangle initial.

   Traçons maintenant à partir de C la bissectrice de l'angle entre $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{CC'}$. Celui des deux triangles qui passe par A a deux angles égaux a $\frac{\pi}{8}$ donc il est isocèle et on peut le retirer. L'autre a un angle égal à $\frac{\pi}{8}$ et un angle egal a $\frac{5\pi}{8}$ donc le troisième vaut $\frac{\pi}{4}$ et le triangle a la même forme qu'avant la découpe : c'est donc bien A qui gagne.

5. Considérons un triangle ABC. Décidons de nommer A le sommet à partir duquel on découpe, l'angle en A, et par [AB] celui des deux segments qui se trouve dans le triangle isocèle. On désignera par $\beta$ l'angle en B, et par $\gamma = \pi - \alpha - \beta$ l'angle en C. Notons B' le troisième sommet du triangle isocèle retiré ABB'.
   Il faut noter que les découpages décrits ci-dessous ne sont possibles que si les angles de découpe sont strictement compris entre 0 et $\alpha$.
   Le triangle peut être isocèle en A (cas 1), en B (cas 2) ou en B'(cas 3).
   - **Cas 1 -** S'il est isocèle en A, ses angles en B et en B' sont égaux à $\beta$. L'angle de découpe en A est donc $\pi - 2\beta$. Les angles du triangle restant sont alors : $\alpha + 2\beta - \pi$ en A, $\pi - \beta$ en B' et $\gamma$ en C.
     Le triangle restant est de la même forme que le triangle initial :
     - Si $\alpha = \pi - \beta$ et $\beta = \alpha + 2\beta - \pi$, on a $\alpha + \beta = \pi$, donc $\gamma = 0$, impossible.
     - Si $\alpha = \alpha + 2\beta - \pi$ et $\beta = \pi - \beta$, on a $\beta = \frac{\pi}{2}$, ce qui est impossible dans le cas 1.
       Dans ce cas le découpage n'est jamais gagnant.
   - **Cas 2 -** S'il est isocele en B, les angles en A et en B' valent tous les deux $\frac{\pi - \beta}{2}$. La condition d'existence pour un tel triangle est $\pi - \beta < 2\alpha$ qui équivaut a $\gamma < \alpha$.
     Le triangle restant a alors comme angles : $\gamma$ en C, $\frac{\pi + \beta}{2}$ en B' et $\alpha - \frac{\pi - \beta}{2}$ en A.
     Comme $\frac{\pi - \beta}{2} \neq 0$, la solution est : $\alpha = \frac{\pi + \beta}{2}$, $\beta = \alpha - \frac{\pi - \beta}{2}$, soit $2\alpha = \pi + \beta = \alpha + 2\beta + \gamma$.
     Ou encore, $\alpha = 2\beta + \gamma$
     Si cette solution est vérifiée, on a $\alpha > \gamma$, et on a gagné.
   - **Cas 3 -** Si le triangle est en B', les angles en A et en B valent tous les deux $\beta$. La conditiion pour un tel triangle est $\beta < \alpha$.
     Le troisième angle vaut alors $\pi - 2\beta$ et le triangle restant a comme angles : $\gamma$ en C, $2\beta$ en B' et $\alpha - \beta$ en A. Comme ci-dessus le triangle a la même forme que le triangle initial si : $\alpha = 2\beta$.
     Si cette solution est vérifiée, on a une isocoupe possible.

   **Si $\alpha = 2\beta + \gamma$, ou si $\alpha = 2\beta$, il est possible de découper le triangle en un triangle isocèle et une copie réduite du triangle initial et le triangle est gagnant.**

6. Pour qu'un triangle potentiellement gagnant le soit à tous les coups, il faut que la découpe du cas 1 soit impossible puisque c'est la seule qui ne conduit pas à la victoire immédiate.

   Dans le cas 2, $\alpha = 2\beta + \gamma$ et le cas 1 est possible si $\beta < 2\pi$ et $\gamma < \beta$. Le cas 1 est donc impossible si $\beta = \frac{\pi}{2}$, mais alors $\alpha = 2\beta + \gamma > \pi$ qui est impossible, ou si $\gamma = \beta$, auquel cas $\alpha = 3\beta = 3\gamma$ et $\beta = \gamma = \frac{\pi}{5}$ et $\alpha = \frac{3\pi}{5}$.

   Dans le cas 3, $\alpha = 2\beta$ et de nouveau il est impossible que $\beta = \frac{\pi}{2}$, donc l'impossibilité du cas 1 se traduit par $\gamma = \beta$ et on trouve cette fois $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $\beta = \gamma = \frac{\pi}{4}$. Mais on a vu au-dessus que cette condition n'est pas suffisante.
   Le seul triangle possible est celui relatif au cas 2.

7. Pour gagner de deux manières à partir du même sommet, il suffit de pouvoir découper suivant les cas 2 et 3 avec des angles de découpe différents et en permutant les rôles des sommets B et C. Ceci se traduit par la réalisation simultanée des relations $\alpha = 2\beta + \gamma$ et $\alpha = 2\gamma$. Il suffit pour cela que $2\beta = \gamma$, ce qui donne : $\alpha = \dfrac{4\pi}{7}$, $\beta = \dfrac{\pi}{7}$ et $\gamma = \dfrac{2\pi}{7}$ et les deux découpages conviennent.

Retour au sommaire

# REIMS

## Premier exercice académique

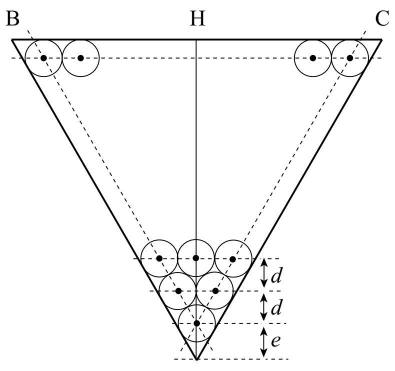
Toutes séries

***Remplissage par un gel***

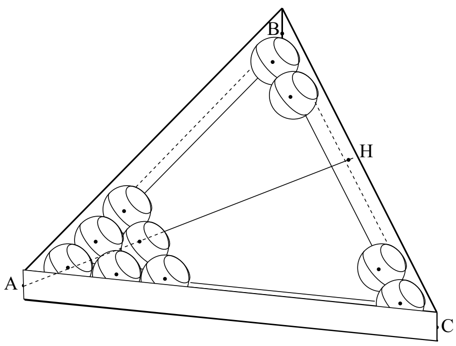
### Énoncé

Une boîte en forme de prisme droit dont la base est un triangle équilatéral, est remplie par des billes, dont le diamètre est la hauteur du prisme, bien insérées comme ci-dessous. On veut remplir ce qui reste du prisme par un gel.

Perspective




Vue du dessus




On connaît le diamètre des billes 20 mm et la hauteur $AH = 203,3$ mm au dixième près par excès.

1. Déterminer la distance $d$ de deux rangées de billes.
2. Déterminer la distance $e$ entre la pointe de la boîte et le centre de la première bille.
3. En déduire le nombre de rangées de billes.
4. Quel volume de gel faut-il ? (Résultat en cm$^3$ arrondie à $10^{-1}$ près)

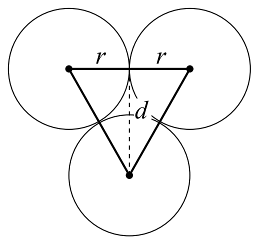
Aide : $1 + 2 + +3 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

Volume de la sphère : $V = \dfrac{4}{3}\pi\, r^3$.

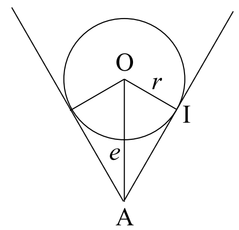
### Éléments de solution

1.

Le triangle formé par le centre d'une bille et les centres des deux billes immédiatement au-dessus d'elle est un triangle équilatéral de côté $2r$, où $r$ est le rayon d'une bille.
A l'aide du théorème de Pythagore, on montre que $d = \sqrt{3}\, r = 10\sqrt{3}$ mm.



2. La face contenant les points A et C étant tangent à la première bille en un point que l'on va appeler I, le triangle AIO est rectangle en I.

   De plus, la base du prisme étant un triangle équilatéral, on a $\widehat{\mathrm{OAI}} = \dfrac{\widehat{\mathrm{CAB}}}{2} = 30^0$.

   D'où $e = \dfrac{OI}{\sin 30^0} = \dfrac{r}{\sin 30^0} = 20$ mm.

3. Appelons $n$ le nombre de rangées de billes.
   $AH = e + (n-1) \times d + r$

   $n = \dfrac{AH - e - r}{d} + 1 = \dfrac{203,3 - 20 - 10}{10\sqrt{3}} + 1 = 11,0054$, soit 11 rangées.

4. Il y a 11 rangées, donc $\dfrac{11 \times 12}{2} = 66$ billes

$$\begin{aligned}
V_{gel} &= V_{prisme} - V_{billes} \\
&= \text{hauteur } \times \frac{AH \times BC}{2} - 66 \times \frac{4}{3}\pi r^3 \\
&= 20 \times \frac{203,3 \times \dfrac{2 \times 203,3}{\sqrt{3}}}{2} - 66 \times \frac{4}{3}\pi \times 10^3 \\
&= 200\ 787{,}9 \text{ mm}^3 \\
&= 200,8 \text{ cm}^3.
\end{aligned}$$

Retour au sommaire

# REIMS

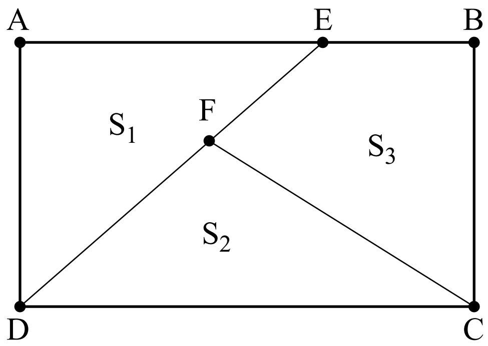
## Deuxième exercice académique

Série S

***Découpage d'un rectangle***

### Énoncé

Sur la figure jointe, ABCD est un rectangle ; la longueur du côté AB est $L$, celle du côté BC est $\ell$, avec $L > \ell$. On place sur le côté AB le point E tel que $AE = xL$, $(0 < x < 1)$, et sur le segment DE le point F tel que $DF = yDE$, $(0 < y < 1)$.




**Préliminaire** : Montrer que la hauteur issue de F dans le triangle DFC a pour longueur $y\ell$. On note $S_1$ l'aire du triangle AED, $S_2$ l'aire du triangle DFC , et $S_3$ l'aire du quadrilatère EBCF.

1. Déterminer les valeurs de $x$ et $y$ pour que $S_1 = S_2 = S_3$.
2. Déterminer les valeurs de $x$ et $y$ pour que les trois nombres $S_1, S_2, S_3$, dans cet ordre ou un autre, soient en progression arithmétique.
   On commencera par exemple en supposant que $S_1 \leqslant S_2 \leqslant S_3$, puis on étudiera tous les autres cas.
   Représenter graphiquement l'ensemble des solutions $(x, y)$ ainsi déterminées.
3. Est-il possible de trouver un rectangle avec $\ell$ et $L$ entiers, tel que $S_1 = 1,\ S_2 = 2,\ S_3 = 3$ ?

### Éléments de solution

Préliminaire : utilisation du théorème de Thalès.

1. On pose $L\ell = 2u$. On a alors : $S_1 = xu,\ S_2 = yu,\ S_3 = u(2 - x - y)$. Les trois aires sont égales si et seulement si $x = y = \dfrac{2}{3}$.
2. On remarque que si trois nombres sont en progression arithmétique, la somme du plus petit et du plus grand est égale au double du troisième.
   a. $S_1 \leqslant S_2 \leqslant S_3$. Il en résulte $x \leqslant y$ ; et $yu = \dfrac{u(y-1)}{2}$. D'où les solutions $x \leqslant \dfrac{2}{3}$ et $y = \dfrac{2}{3}$.
   b. $S_2 \leqslant S_1 \leqslant S_3$. De même qu'en a., on trouve pour solution $x = \dfrac{2}{3},\ 0 < y \leqslant \dfrac{2}{3}$.
   c. $S_1 \leqslant S_3 \leqslant S_2$. On trouve de même le segment de droite :

$$3x + 3y = 4,\ x \leqslant y,\ 0 < x < 1,\ 0 < y < 1$$

.

d. $S_2 \leqslant S_3 \leqslant S_1$. On trouve de même le segment de droite :

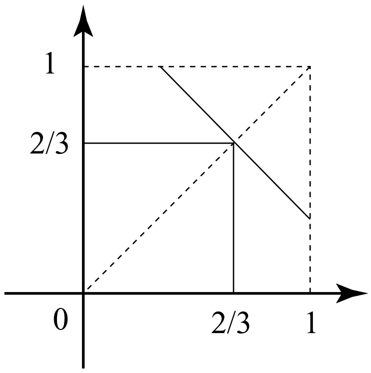
$$3x + 3y = 4,\ y \leqslant x,\ 0 < x < 1,\ 0 < y < 1$$

.

e. $S_3 \leqslant S_2 \leqslant S_1$. On trouve $x \geqslant \dfrac{2}{3},\ y = \dfrac{2}{3}$ (cf. a.)

f. $S_3 \leqslant S_1 \leqslant S_2$. On trouve $x = \dfrac{2}{3},\ y \geqslant \dfrac{2}{3}$ (cf.e.)

3. Dans le cas a., la raison est égale à $S_2 - S_1 = (y - x)u = \left(\dfrac{2}{3} - x\right)u$. Cette raison vaut 1 si et seulement si $\left(\dfrac{2}{3} - x\right)u = 1$. Mais $S_1 = 1 = xu$. D'où $u = 3,\ x = \dfrac{1}{3},\ y = \dfrac{2}{3}$. Enfin $L\ell = 2u = 6$, donc $\ell = 1,\ L = 6$ ou $\ell = 2,\ L = 3$.




Retour au sommaire

# REIMS

## Troisième exercice académique

Séries autres que S

***Carré grécolatin***

### Énoncé

Un carré latin d'ordre $n$, est un carré de $n^2$ cases remplies par les $n$ premiers nombres 1, 2,... de telle façon que chaque nombre n'apparait qu'une et une seule fois par ligne et par colonne.
*Ainsi, un exemple de carré latin d'ordre 6 est :*

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 2 | 3 | 1 | 6 | 4 | 5 |
| 3 | 6 | 5 | 2 | 1 | 4 |
| 4 | 1 | 2 | 5 | 6 | 3 |
| 5 | 4 | 6 | 1 | 3 | 2 |
| 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 |

Un **carré grécolatin** d'ordre $n$, est un carre de $n^2$ cases remplies par des couples de nombres et de lettres de telle façon que :

- Chaque lettre n'apparait qu'une et une seule fois par ligne et par colonne.
- Chaque nombre n'apparait qu'une et une seule fois par ligne et par colonne.
- Chaque couple Lettre/Nombre n'apparait qu'une et une seule fois dans l'ensemble du carré.

Exemple de carré grécolatin d'ordre 5 :

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| A1 | B5 | C3 | D2 | E4 |
| B3 | C2 | D4 | E1 | A5 |
| C4 | D1 | E5 | A3 | B2 |
| D5 | E3 | A2 | B4 | C1 |
| E2 | A4 | B1 | C5 | D3 |

1. Le carré suivant est-il un carré grécolatin d'ordre 6 ?

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| A1 | B2 | C3 | D4 | E5 | F6 |
| B2 | A3 | F1 | C6 | D4 | E5 |
| C3 | E6 | B5 | A2 | F1 | D4 |
| F4 | D1 | A2 | E5 | B6 | C3 |
| D5 | C4 | E6 | F1 | A3 | B2 |
| E6 | F5 | D4 | B3 | C2 | A1 |

2. Peut-on trouver des carrés grécolatins d'ordre 2 ? Justifier.
3. Rechercher tous les carrés grécolatins d'ordre 3 dont la première ligne est A1, B2, C3.

| | | |
|---|---|---|
| A1 | B2 | C3 |
| | | |
| | | |

4. En déduire le nombre total de carrés grécolatins d'ordre 3.

5. Construire un carré grécolatin d'ordre 4 ayant pour première ligne A1, B2, C3, D4.
6. Dans cette question, on ne s'intéresse qu'aux carrés **latins**.
   a. On sait qu'il y a 24 carrés latins d'ordre 4 qui ont pour première ligne 1 , 2 , 3 , 4. Combien y a-t-il de carrés latins d'ordre 4 en tout ?
   b. Soit $q$, le nombre de carrés latins d'ordre $n$ dont la première ligne est $1 , 2 , 3 , \dots , n$ . Combien y a-t-il de carrés latins d'ordre $n$ en tout ? (on attend une formule avec $q$ et $n$)

*Nota : Le carré grecolatin d'ordre 6 n'existe pas. Ce problème est souvent appele « problème des 36 officiers » et a été posé par Euler en 1782 et résolu par Gaston Tarry en 1901. On a longtemps cru qu'il n'existait pas de carrés grécolatins pour $n \geqslant 10$. En 1959, Parker établit un carré grécolatin d'ordre 10 puis démontré qu'il en existe pour tout ordre $n \geqslant 10$. Le carré d'ordre 10 de Parker a servi de base dans des tableaux ainsi que dans l'écriture du roman « La vie mode d'emploi » de Georges Perec.*

## Éléments de solution

1. Non car le couple (A,2) apparaît 2 fois. D'ailleurs il n'en existe pas d'ordre 6.
2. Une simple recherche exhaustive montre que si on tente de remplir la première ligne avec A1 et B2, il faut obligatoirement mettre B2 et A1 en dessous, ce qui contredit l'unicité des paires.

| | |
|---|---|
| A1 | B2 |
| B2 | A1 |

3. Les deux seules possibilités sont :

| | | |
|---|---|---|
| A1 | B2 | C3 |
| B3 | C1 | A2 |
| C2 | A3 | B1 |

| | | |
|---|---|---|
| A1 | B2 | C3 |
| C2 | A3 | B1 |
| B3 | C1 | A2 |

4. Les lettres A, B et C peuvent permuter sur la première ligne de 6 manières et les chiffres 1, 2 et 3 aussi, soit 36 premières lignes possibles qui chacune mène à deux possibilités. Cela donne 72 carrés grécolatins d'ordre 3 en tout.
5. Il y a 12 possibilités en tout. En voici 2 et les autres s'obtiennent en permutant les lignes 2, 3 et 4 (on peut le prouver en cherchant les deux seules positions de A 2 sur la deuxième ligne qui donnent deux carrés à chaque fois).

| | | | |
|---|---|---|---|
| A1 | B2 | C3 | D4 |
| C4 | D3 | A2 | B1 |
| D2 | C1 | B4 | A3 |
| B3 | A4 | D1 | C2 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| A1 | B2 | C3 | D4 |
| D3 | C4 | B1 | A2 |
| C2 | D1 | A4 | B3 |
| B4 | A3 | D2 | C1 |

6. a. Il suffit de permuter les chiffres de la première ligne et on trouve donc 4 ! fois plus de possibilités (soit 576 en tout).
   b. De la même manière, il y a $n! \times q$ possibilités.

Retour au sommaire

# RENNES

## Premier exercice académique

Toutes séries

***les Désirus Algébricus***

### Énoncé

Les Désirus Algébricus sont des mammifères très rares que l'on trouve uniquement sur une petite île de l'Atlantique Enezus Sunus.
En ce qui concerne cette espèce, les Désirus algébricus sont fidèles en couple et les naissances se déroulent de la façon suivante :

- Après la naissance d'un mâle, la femelle meurt.
- Si elle n'est pas morte à la suite de la naissance d'un mâle, la femelle meurt après la quatrième naissance.

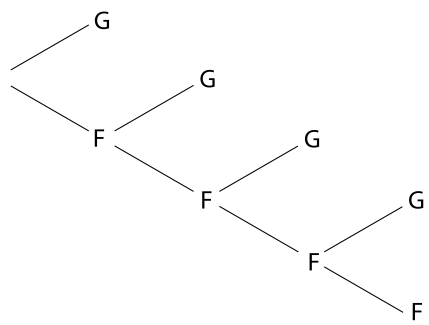
De plus :

- Une femelle Désirus Algébricus a autant de chances de donner naissance à un mêle qu'à une femelle.
- Une femelle Désirus Algébricus n'est jamais stérile mais ne donne naissance qu'à un seul petit à la fois (il n'y a pas de jumeaux, triplés. . . ).
- Lorsque la femelle disparaît, le mâle se laisse dépérir et meurt peu après.

Un comptage de ces mammifères en janvier 2010 a dénombré autant de mâles que de femelles.

Pensez-vous que ces particularités quant à la reproduction chez les Désirus Algébricus vont amener à une population qui va être constituée majoritairement de mâles ? de femelles ? ou bien à part égale de mâles et de femelles ?

## Éléments de solution




On peut s'intéresser à la composition des familles au niveau de la progéniture (avec les conditions décrites dans le texte, couples fidèles et parents appelés à disparaitre au plus tard après FFFF).

| Types de familles | M | FM | FFM | FFFM | FFFF |
|---|---|---|---|---|---|
| Probabilité associée | 0,5 | $0,5^2$ | $0,5^3$ | $0,5^4$ | $0,5^4$ |
| Nombre de mâles | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| Nombre de femelles | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |

Si on a $p$ couples de parents (même nombre de mâles que de femelles au départ), ces $p$ couples peuvent espérer donner naissance à :

$$p \times (0,5 + 0,5^2 + 0,5^3 + 0,5^4) = 0,9375p \text{ mâles.}$$

ou bien à

$$p \times (0,5^2 + 2 \times 0,5^3 + 3 \times 0,5^4 + 4 \times 0,5^4) = 0,9375p \text{ femelles.}$$

Ce qui amène à espérer une population constituée à part égale de mâles et de femelles.

Retour au sommaire

# RENNES

## Deuxième exercice académique

Séries S et STI

***Le jeu de Bruno***
(inspiré de EVAPM)

### Énoncé

Le petit Bruno possède un jeu en bois composé des deux pièces suivantes : un cube et un prisme dont la base est un triangle équilatéral. Il pose la base du prisme à plat sur une table et s'amuse avec ce jeu en faisant « tourner le cube autour du prisme », sans glissement, de la façon suivante :

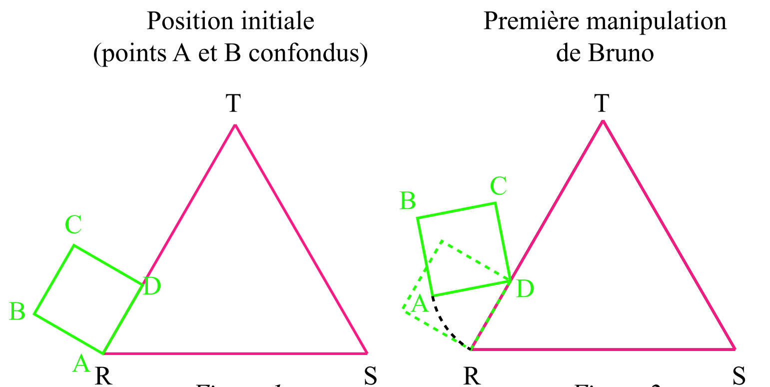



*Figure 1* *Figure 2*

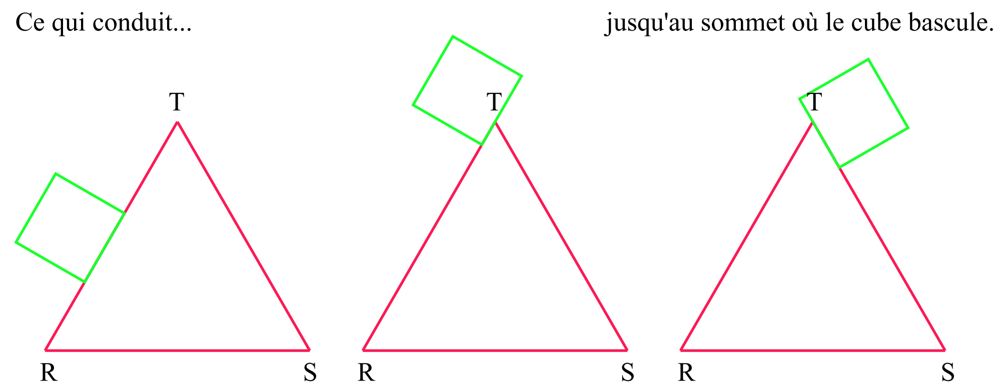



*Figure 3* *Figure 4* *Figure 5*

On sait que

- ABCD est un carré.
- RST est un triangle équilatéral de côté 80 cm.
- Au départ du jeu, le carré est posé sur le côté [RT] du triangle, le sommet A coïncide avec le point R et le carré pivote autour de D.

1. Bruno constate qu'il peut faire tourner le cube deux fois sur le côté [RT] mais qu'il bascule durant le troisième tour (figures 4 et 5). Que peut-il en déduire sur la mesure de l'arête du cube ?
2. Bruno remarque ensuite que, lorsque son cube a fait un tour complet du prisme, il revient au même endroit qu'au départ.

a. Quelles sont alors la ou les valeur(s) exacte(s) possible(s) pour la mesure de l'arête du cube de Bruno ?

b. Pour cette ou ces valeurs, tracer alors la trajectoire du point A et calculer la longueur de la trajectoire correspondante (arrondie au millimètre).

## Éléments de solution

1. Le cube de Bruno fait plus de deux tours sur le côté [RT] ce qui signifie que, si $x$ désigne la mesure du côté du carré, on a $2x < 80$ . soit $x < 40$.
   On sait aussi que le cube bascule durant le troisième tour ce qui amène à écrire que $80 < 3x$, soit $x < \dfrac{80}{3}$. par conséquent, $\dfrac{80}{3} < x < 40$.

   NB) une autre lecture du texte a amené certains candidats à écrire : $3x < 80 < 4x$ ; il en a été tenu compte dans la correction des copies.

2. Le périmètre du triangle RST vaut 240cm. Si l'on fait $n$ tours pour revenir exactement au même endroit qu'au départ, on a alors :

$$nx = 240 \text{ d'où } x = \frac{240}{n}. \text{ Or, on sait que : } \frac{83}{3} < x < 40.$$

   D'où, $\dfrac{240}{40} < n < \dfrac{240 \times 3}{80}$, c'esy-à-dire : $6 < n < 9$.

   Pour répondre à la condition demandée, le cube doit faire 7 ou bien 8 tours (la superposition des points A et R n'était pas à priori exigée dans la position finale).

   a. a) Si le cube fait 7 tours, on obtient que l'arête du cube mesure $\dfrac{240}{7}$ cm.
   Si le cube fait 8 tours, on obtient que l'arête du cube mesure 30cm.
   On a donc deux valeurs possibles pour la mesure de l'arête du cube.

   b. Tracé de la trajectoire et calcul de la longueur dans chacun des cas

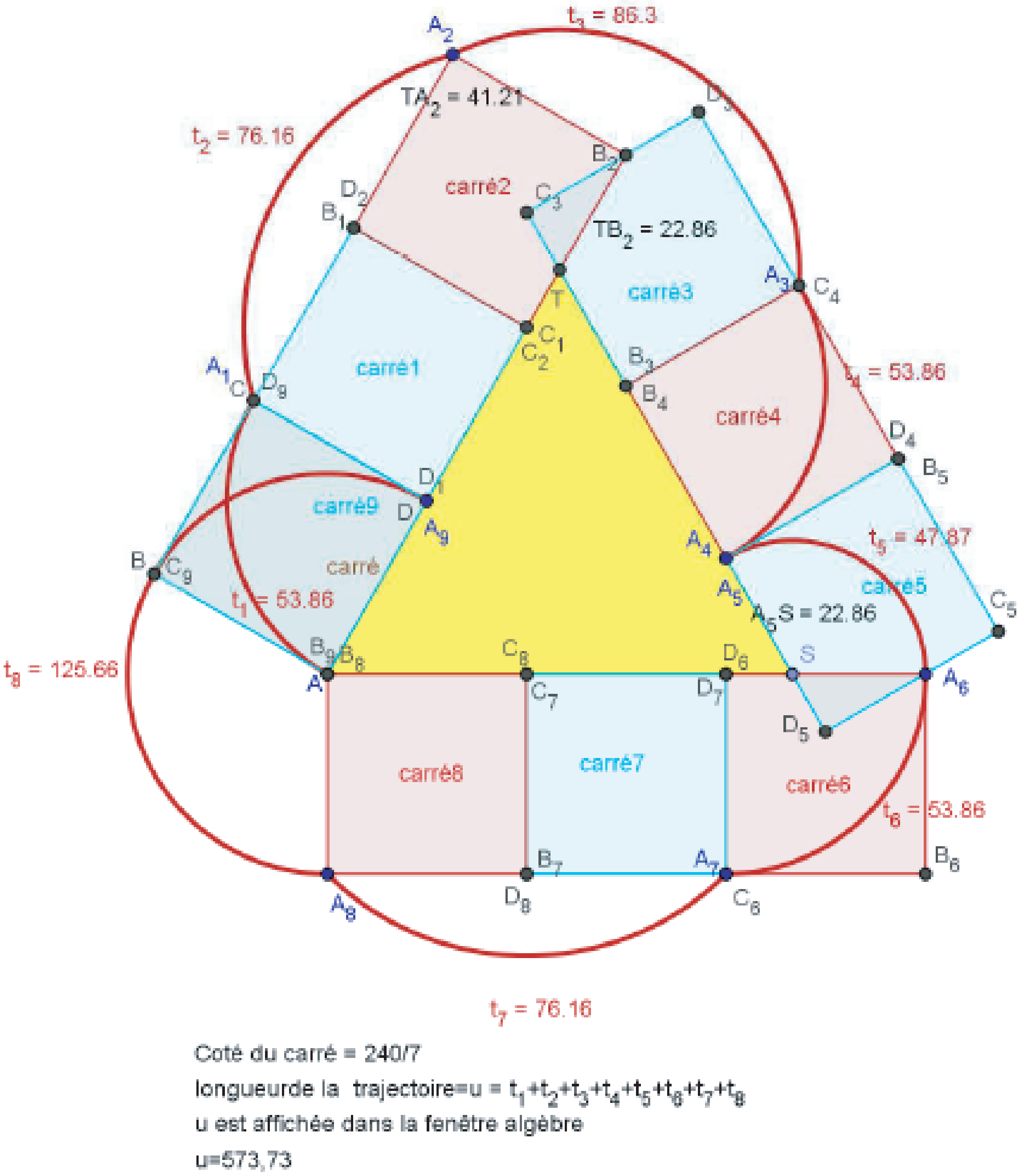
   **Cas *n*=7** : soit $x = \dfrac{240}{7}$ ; 7 tracé de la trajectoire sur fichier Geogebra intitulé « exercice 1$^{\text{ère}}$ partie ».
   Par le calcul, la somme des longueurs des arcs successifs vaut :

$$3 \times \left(\frac{\pi}{2} \times \frac{240}{7}\right) + 2 \times \left(\frac{\pi}{2} \times \sqrt{2} \times \frac{240}{7}\right) + \frac{2\pi}{3} \times \frac{80}{7}\sqrt{13} + \frac{2\pi}{3} \times \frac{160}{7} \times \frac{7\pi}{6}$$

$$= \frac{240}{7}\pi \times \left(\frac{28 + 2\sqrt{13}}{9} + \sqrt{2}\right) = 573,73.$$

   La longueur de la trajectoire vaut donc dans ce cas environ 573,7cm.

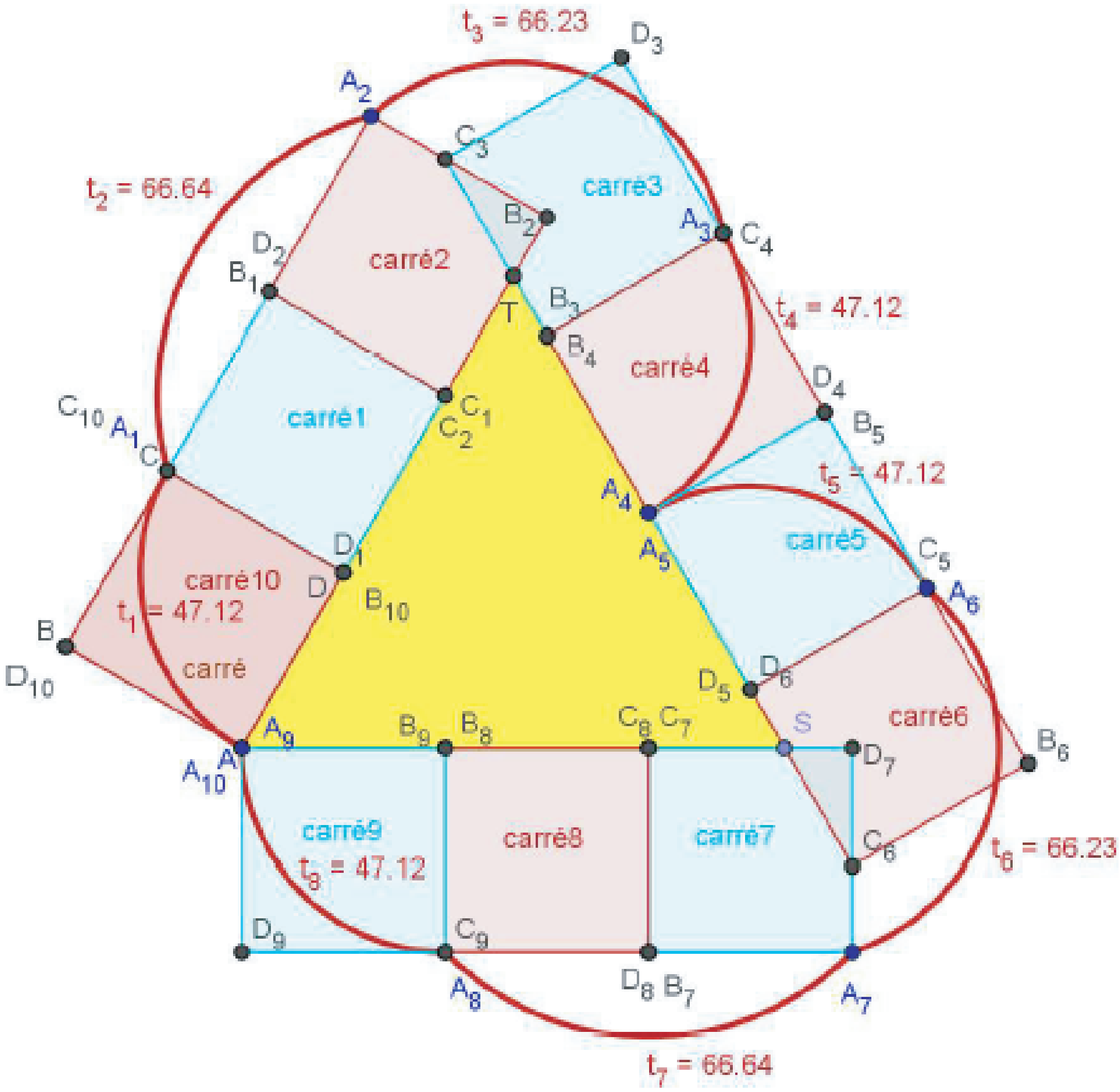
   NB) on pourra valoriser la remarque d'un candidat sur le fait que, d'un point de vue pratique, cette mesure de $\dfrac{240}{7}$ n'est peut-être pas judicieuse pour construire un cube en bois.




**Cas $n$=8** : Soit $x = 30$ : tracé de la trajectoire sur fichier Geogebra intitulé « exercice1 2ème partie ». Par le calcul, la somme des longueurs des arcs successif vaut :

$$4 \times \left(\frac{\pi}{2} \times 30\right) + 2 \times \left(\frac{2\pi}{3} \times 10\sqrt{10}\right) = 454,24.$$

La longueur de la trajectoire vaut donc dans ce cas environ 454,2 cm. (voir la figure page suivante))




Côté du carré = 30

longueurde la trajectoire =u= $t_1+t_2+t_3+t_4+t_5+t_6+t_7+t_8$

u est affichée dans la fenêtre algèbre

u=454,24

Retour au sommaire

# RENNES

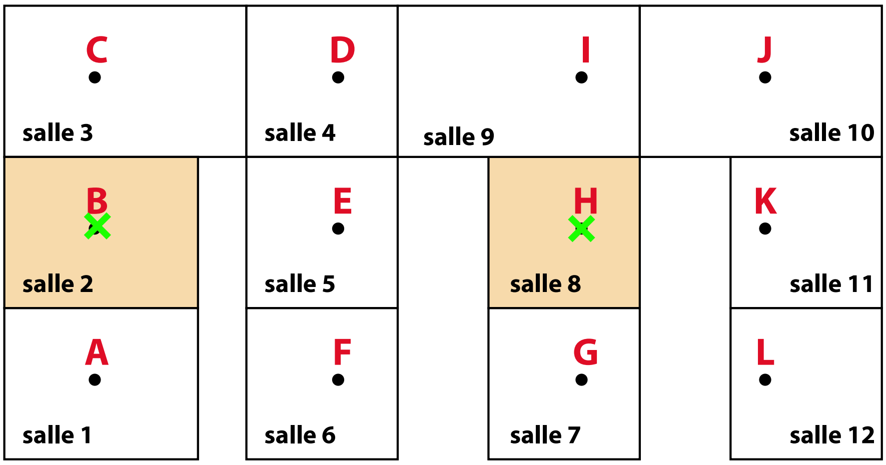
## Troisième exercice académique

Séries autres que S et STI

***Le réseau informatique***
(Inspiré de « *Graphes à deux voix* » : Ed. APMEP, 2002).

### Énoncé

Le plan d'un bâtiment comportant douze salles se présente de la façon suivante :




Le réseau informatique existant est quelque peu désordonné et de ce fait, nécessite de relier les ordinateurs en « poste à poste ». Il a les caractéristiques suivantes :

Des prises (symbolisées par des lettres) sont installées dans toutes les salles et toutes les prises sont opérationnelles sauf les prises B et H que l'on vient d'installer respectivement dans les salles 2 et 8, salles que l'on souhaite connecter entre elles.

- Des gaines contenant des câbles relient entre elles certaines salles de classes par les faux-plafonds ou par le sous-sol. Dans l'état actuel des choses, les salles 1 et 3 sont reliées et on note AC (ou bien CA) la liaison existante. De même, existent et fonctionnent les liaisons AD, AF, CD, CF, DE, DI, EF, EK, GI, GL, IJ, JK, KL.
- Pour l'instant, les salles 2 et 8 ne sont connectées à aucune autre. Afin de les connecter entre elles, on va devoir faire passer de nouveaux câbles dans des gaines existantes. De plus, on ne peut raccorder directement la prise B qu'à la prise A ou bien à la prise C. De même, on ne peut raccorder la prise H qu'à la prise G ou bien à la prise I.

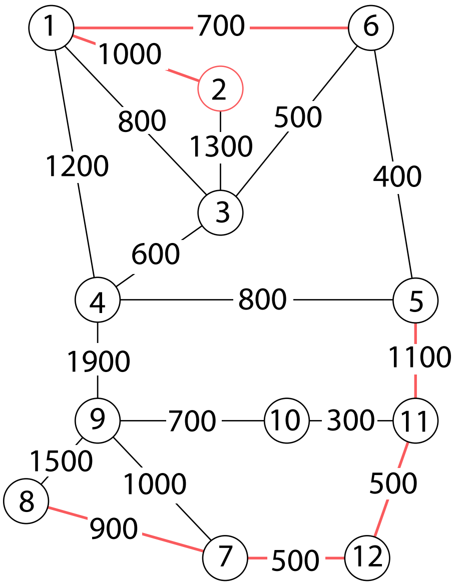
Une entreprise a évalué le coût (main d'œuvre et fourniture) de chaque liaison intermédiaire pour le passage de nouveaux câbles :

| liaison | AB | AC | AD | AF | BC | CD | CF | DE | DI |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| coût | 1000 € | 800 € | 1200 € | 700 € | 1300 € | 600 € | 500 € | 800 € | 1900 € |

| liaison | EF | EK | GH | GI | GL | HI | IJ | JK | KL |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| coût | 400 € | 1100 € | 900 € | 1000 € | 500 € | 1500 € | 700 € | 300 € | 500 € |

Quel chemin choisir pour relier les salles 2 et 8 afin d'effectuer les travaux à moindre coût ? Quel serait alors le montant des travaux ?

## Éléments de solution




On représente la situation à l'aide d'un graphe pondéré, dont les sommets représentent les salles (numérotées), les arêtes représentant les gaines existantes ou les liaisons directes AB, AC, HI ou HG, et les poids des arêtes représentent les coûts de passage de câble.
Le coût minimal s'obtient par la recherche du « plus court chemin » entre les sommets 2 et 8.

NB) la théorie des graphes permet l'utilisation de l'algorithme de Dijkstra, qui fournit la réponse.
**La liaison la moins chère est BAFEKLGH, qui coûte 5100 €.**

Retour au sommaire

# LA RÉUNION

## Premier exercice académique

Toutes séries

### Énoncé

*Les deux premières questions sont à traiter par tous les candidats.*
*La troisième question ne sera traitée que par les élèves inscrits dans la série S.*

On écrit des entiers dans toutes les cases d'un tableau, de façon à ce qu'il y ait parmi eux **au moins un entier pair et au moins un entier impair**.
Exemple

| | | |
|---|---|---|
| 3 | 1 | 0 |
| 9 | 17 | 2 |
| 1 | 3 | 6 |

On dit que deux cases sont voisines si elles ont un côté commun : par exemple la case contenant le 17 est voisine de celle contenant le 9 mais pas de celle contenant le 6.

Puis on fabrique un deuxième tableau à partir du premier de la façon suivante : on additionne les nombres écrits dans les cases voisines d'une case du tableau initial et on écrit cette somme dans la case correspondante du nouveau tableau. On fait de même avec les huit autres cases.

*Exemple* : à partir du tableau donné dans l'exemple précédent, on obtient le nouveau tableau :

| | | |
|---|---|---|
| 10 | 20 | 3 |
| 21 | 15 | 23 |
| 12 | 24 | 5 |

1. ***A traiter par tous les candidats.***
   Donner le tableau obtenu à partir du tableau initial suivant :

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 8 | 7 |
| 3 | 4 | 22 |
| 13 | 9 | 5 |

2. ***A traiter par tous les candidats***
   On s'intéresse aux tableaux à trois lignes et trois colonnes.
   Avec les conditions données au départ, peut-on obtenir :
   a. Un tableau dont les cases contiennent toutes des nombres pairs ?
   b. Un tableau dont les cases contiennent toutes des nombres impairs ?
3. ***A traiter par les élèves de la série S uniquement***
   On s'intéresse aux tableaux à trois lignes et quatre colonnes.
   Avec les conditions données au départ, peut-on obtenir un tableau dont les cases contiennent toutes des nombres pairs ?

### Éléments de solution

1. On obtient :

| | | |
|---|---|---|
| 11 | 12 | 30 |
| 18 | 42 | 16 |
| 12 | 22 | 31 |

2. a. On peut obtenir un tableau dont toutes les cases sont paires.
A partir du tableau suivant, par exemple, on peut obtenir un tableau dont toutes les cases contiennent des nombres pairs

| | | |
|---|---|---|
| pair | pair | impair |
| pair | impair | pair |
| impair | pair | pair |

Et par ailleurs dans ce tableau de départ, il y a bien des nombres pairs et des nombres impairs

b. On ne peut pas obtenir un tableau dont toutes les cases contiennent des nombres impairs
On adopte les notations suivantes :

Tableau de départ

| | | |
|---|---|---|
| A1 | B1 | C1 |
| A2 | B2 | C2 |
| A3 | B3 | C3 |

Tableau d'arrivée

| | | |
|---|---|---|
| A'1 | B'1 | C'1 |
| A'2 | B'2 | C'2 |
| A'3 | B'3 | C'3 |

A'1 étant impair, il est la somme d'un pair et d'un impair.

On choisit de mettre en A2 un impair et en B1 un pair (pour des raisons de symétrie, le raisonnement sera identique si A2 est pair et B1 impair) :

| | | |
|---|---|---|
| A1 | pair | C1 |
| impair | B2 | C2 |
| A3 | B3 | C3 |

C'1, C'3 et A'3 étant impairs, sont eux aussi la somme d'un pair et d'un impair, ce qui oblige à partir d'un tableau du type :

| | | |
|---|---|---|
| A1 | pair | C1 |
| impair | B2 | impair |
| A3 | pair | C3 |

Mais alors, en B'2 = B1 + C2 + B3 + A2 = 2 pairs + 2 impairs, on obtiendra un nombre pair, ce qui contredit le résultat attendu !

Le tableau dŠarrivée ne peut donc pas contenir uniquement des impairs.

3. A partir d'un tableau à trois lignes et quatre colonnes, on ne peut pas obtenir un tableau dont toutes les cases contiennent toutes des nombres pairs.

On adopte les notations suivantes

Tableau de départ

| | | | |
|---|---|---|---|
| A1 | B1 | C1 | D1 |
| A2 | B2 | C2 | D2 |
| A3 | B3 | C3 | D3 |

Tableau d'arrivée

| | | | |
|---|---|---|---|
| A'1 | B'1 | C'1 | D'1 |
| A'2 | B'2 | C'2 | D'2 |
| A'3 | B'3 | C'3 | D'3 |

**Cas n$^o$ 1 : B1 est impair.**
En utilisant le fait que A'1, A'3 et B'2 sont pairs, on doit donc partir d'un tableau :

| | | | |
|---|---|---|---|
| A1 | impair | C1 | D1 |
| impair | B2 | impair | D2 |
| A3 | impair | C3 | D3 |

Deplus, C'1 (= impair + impair + D1) et C'3 (= impair + impair + D3) sont pairs, donc D1 et D3 doivent être pairs et donc :

| | | | |
|---|---|---|---|
| A1 | impair | C1 | pair |
| impair | B2 | impair | D2 |
| A3 | impair | C3 | pair |

Mais alors D'2 sera impair (somme de 2 pairs et un impair), ce qui ne convient pas.

**Cas n$^o$ 2 : B1 est pair.**

De proche en proche, cela impose comme tableau de départ :

| | | | |
|---|---|---|---|
| A1 | pair | C1 | pair |
| pair | B2 | pair | D2 |
| A3 | pair | C3 | pair |

- *Sous-cas n$^o$ 1 : A1 et B2 impairs :*

| | | | |
|---|---|---|---|
| impair | pair | C1 | pair |
| pair | impair | pair | D2 |
| A3 | pair | C3 | pair |

Alors B'1 (= impair + impair + C1) étant pair, C1 doit être pair.
De même, A'2 (= impair + impair + A3) étant pair, A3 doit être pair.

| | | | |
|---|---|---|---|
| impair | pair | pair | pair |
| pair | impair | pair | D2 |
| pair | pair | C3 | pair |

B'3 (= pair + impair + C3) étant pair, C3 doit être impair.

| | | | |
|---|---|---|---|
| impair | pair | pair | pair |
| pair | impair | pair | D2 |
| pair | pair | impair | pair |

D'3 (=impair + D2) étant pair, D2 doit être impair.

| | | | |
|---|---|---|---|
| impair | pair | pair | pair |
| pair | impair | pair | impair |
| pair | pair | impair | pair |

Mais alors, C'2 étant la somme d'un pair et de 3 impairs sera impair, ce qui est contraire au résultat cherché !

- *Sous-cas n$^0$ 2 : A1 impair et B2 pair*

| | | | |
|---|---|---|---|
| impair | pair | C1 | pair |
| pair | pair | pair | D2 |
| A3 | pair | C3 | pair |

A'2 (= impair + pair + A3) étant pair, A3 doit forcément être impair et B'3 (= pair + A3 + C3) étant pair, C3 devra forcément être impair.
Par ailleurs, B'1 (= impair + pair + C1) étant pair, C1 doit être impair.

| | | | |
|---|---|---|---|
| impair | pair | impair | pair |
| pair | pair | pair | D2 |
| impair | pair | impair | pair |

D'3 (= impair + D2) étant pair, D2 doit forcément être impair :

| | | | |
|---|---|---|---|
| impair | pair | C1 | pair |
| pair | pair | pair | impair |
| A3 | pair | C3 | pair |

Mais alors, C'2 sera la somme d'un pair et de 3 impairs et sera donc impair, ce qui sera encore contraire au résultat cherché.

- *Sous-cas n$^o$ 3 : A1 pair et B2 impair*

| | | | |
|---|---|---|---|
| pair | pair | C1 | pair |
| pair | impair | pair | D2 |
| A3 | pair | C3 | pair |

A'2 (= pair + impair + A3) et B'1 (= pair + impair + C1) étant pairs, A3 doit donc être impair et C1 aussi :

| | | | |
|---|---|---|---|
| impair | pair | impair | pair |
| pair | pair | pair | D2 |
| impair | pair | C3 | pair |

B'3 (= impair + impair + C3) étant pair, C3 doit être pair.
D'3 (=D2 + C3 = D2 + pair) est pair, donc D2 doit être pair.

| | | | |
|---|---|---|---|
| impair | pair | impair | pair |
| pair | pair | pair | pair |
| impair | pair | C3 | pair |

Mais alors, D'1 = impair + pair serait impair !

- *Sous-cas n$^o$ 4 : A1 et B2 pairs*
  De proche en proche, le tableau de départ doit être rempli uniquement de nombres pairs, ce qui contredit l'hypothèse de départ « *au moins un entier pair et au moins un entier impair* ».

Retour au sommaire

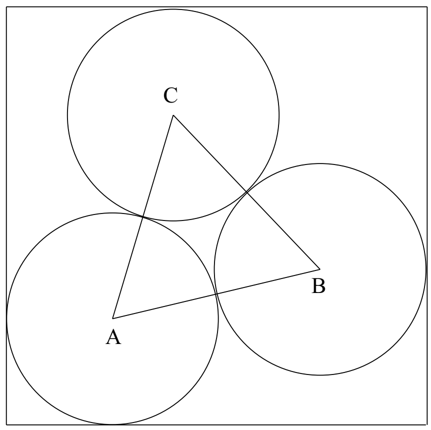
# LA RÉUNION

## Deuxième exercice académique

Série S

### Énoncé

Dans la figure suivante, on souhaite déterminer le côté du carré, sachant que les trois cercles ont pour rayon 1.



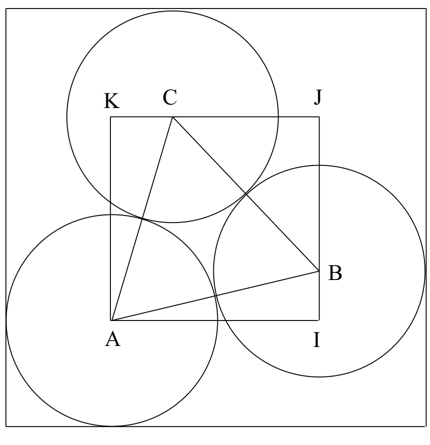

On ***pourra*** utiliser l'une des deux méthodes ci-dessous.

#### Méthode 1

1. Déterminer de manière exacte $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ en utilisant la formule suivante : $\cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2}$.
2. En déduire la valeur du côté du carré.

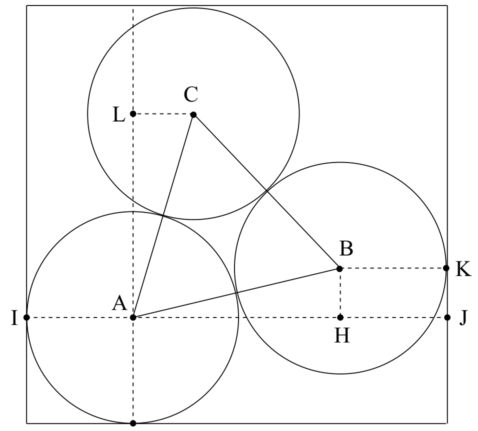
#### Méthode 2

On pose $AI = x$.
Déterminer de deux manières différentes l'aire du carré AIJK et en déduire la valeur de $x$. Donner alors la valeur du côté du carré.



## Éléments de solution

### Méthode 1




1. En utilisant une formule trigonométrique, on a :

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{1+\cos\left(2\times\dfrac{\pi}{12}\right)}{2} = \frac{1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{2+\sqrt{3}}{4} \text{ or } \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) > 0 \text{ donc}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2.}$$

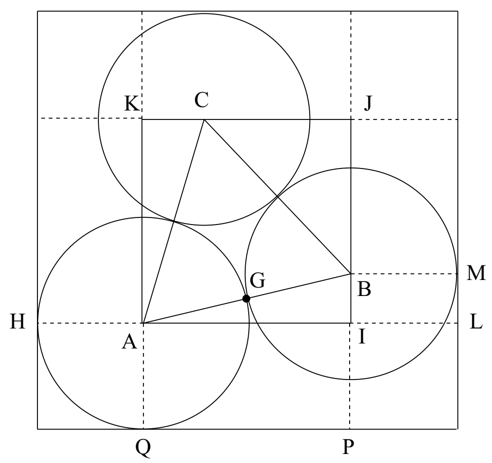
2. Par symétrie, $\left(\overrightarrow{AH}\ ;\ \overrightarrow{AB}\right) = \left(\overrightarrow{AC}\ ;\ \overrightarrow{AL}\right)$. ABC est un triangle équilatéral donc $\left(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AC} = \dfrac{\pi}{3}\right)$.

   On en déduit que : $\left(\overrightarrow{AH}\ ;\ \overrightarrow{AB}\right) + \dfrac{\pi}{3} + \left(\overrightarrow{AC}\ ;\ \overrightarrow{AL}\right) = \dfrac{\pi}{2} \Leftrightarrow 2\left(\overrightarrow{AH}\ ;\ \overrightarrow{AB}\right) + \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\pi}{2}$.
   $\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{AH}\ ;\ \overrightarrow{AB}\right) = \dfrac{\pi}{12}$.

   BKJH est un rectangle donc $HJ = 1$.

   $$IJ = IA+AH+HJ = 2+AB\times\cos\left(\left(\overrightarrow{AH}\ ;\ \overrightarrow{AB}\right)\right) = 2+2\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = 2+2\times\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} = 2+\sqrt{2+\sqrt{3}}.$$

### Méthode 2




On pose $AI = x$ et $IB = y$.
Dans le triangnle ACG rectangle en G, d'après le théorème de Pythagore : $GC^2 = AC^2 - AG^2 = 2^2 - 1^2 = 3$.
Donc $CG = \sqrt{3}$.

Dans le triangle AIB rectangle en I, d'après le théorème de Pythagore :
$x^2 + y^2 = AB^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 2^2 \Leftrightarrow y = \sqrt{4 - x^2}$,
$BJ = JC = IJ - IB = x - \sqrt{4 - x^2}$.

Le but de cette méthode est de déterminer de deux manières différentes l'aire du carré AIJK.

- $\mathcal{A}_{\text{AIJK}} = AI^2 = x^2$
- $\mathcal{A}_{\text{AIJK}} = \mathcal{A}_{\text{ABC}} + \mathcal{A}_{\text{AKC}} + \mathcal{A}_{\text{AIB}} + \mathcal{A}_{\text{BCJ}}$

$$\begin{aligned}
&= \frac{AB \times GC}{2} + \frac{x \times y}{2} + \frac{x \times y}{2} + \frac{BJ \times JC}{2} \\
&= \sqrt{3} + xy + \frac{\left(x - \sqrt{4 - x^2}\right)^2}{2} \\
&= \sqrt{3} + x\sqrt{4 - x^2} + \frac{x^2 - 2x\sqrt{4 - x^2} + 4 - x^2}{2} \\
&= \sqrt{3} + 2.
\end{aligned}$$

On obtient $x^2 = 2 + \sqrt{3} \Leftrightarrow x = \sqrt{2 + \sqrt{3}}$.
BMLI est un rectangle donc $IL = 1$.

En conclusion, $HI = HA + AI + IL = 2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}$.

Retour au sommaire

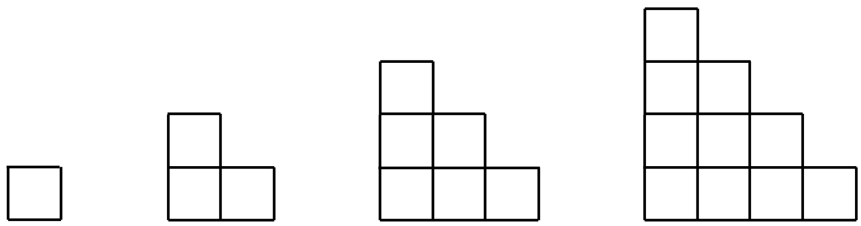
# LA RÉUNION

## Troisième exercice académique

Séries autres que S et STI

### Énoncé

Les mathématiciens grecs représentaient certains nombres géométriquement, comme ici les nombres triangulaires.



$T_1 = 1$ $T_2 = 3$ $T_3 = 6$ $T_4 = 10$

On pose $T_0 = 0$.

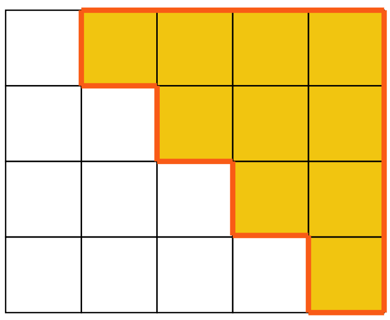
1. Que valent $T_5$ et $T_6$ ?
2. Recopier et compléter le tableau suivant :

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $T_n$ | 0 | 1 | 3 | 6 | 10 | | | | |

On souhaite calculer $T_{2011}$

Plusieurs démarches sont possibles pour parvenir à ce résultat. Chacune des aides présentées ci-dessous correspond à une démarche possible. Chaque candidat choisira **au maximum** l'une de ces trois aides pour répondre à la question.

***Aide 1*** :



***Aide 2*** :

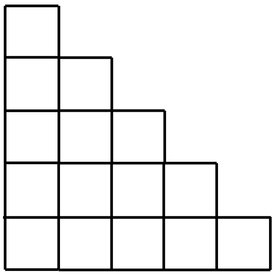
Algorithme

***Aide 3*** :

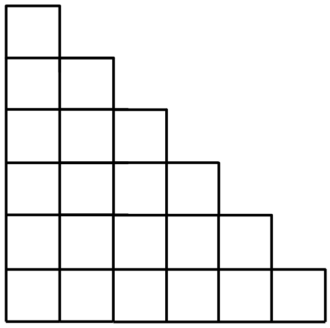
Représentation graphique, en utilisant le tableau de la question 2.

### Éléments de solution

1. $\mathrm{T}_5 = 15$ ; $\mathrm{T}_6 = 21$



$T_5 = 15$



$T_6 = 21$

2.

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $T_n$ | 0 | 1 | 3 | 6 | 10 | **15** | **21** | **28** | **36** |

On sait que $T_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

Donc $T_{2011} = \dfrac{2011 \times 2012}{2} = 2\ 023\ 066$.

Retour au sommaire

# ROUEN

## Premier exercice académique

Toutes séries

***Fort de café***

### Énoncé

Tous les matins, Maël boit un café à la gare dans un gobelet en carton recyclé.

1. Le stand de boissons auprès duquel il se fournit possède une machine à café capricieuse. Chaque jour, Maël relève la qualité du café qui lui a été distribué par cette machine. Au bout de 100 visites, il obtient les résultats suivants :

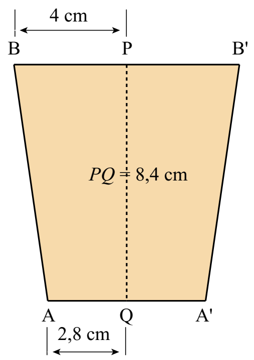
   - les cafés sont trop chauds dans 20 % des cas.
   - 1 fois sur 20, du marc de café s'est infiltré dans le gobelet.
   - dans 23 % des cas, cette machine distribue un café qui déplait à Maël c'est-à-dire trop chaud ou contenant du marc.

   a. Recopier et compléter le tableau suivant :

| **Café** | *Température convenable* | *Café trop chaud* | *Total* |
|---|---|---|---|
| *Contient du marc* | | | |
| *Ne contient pas de marc* | | | |
| *Total* | | | 100 |

   b. Maël considère que cet échantillon de 100 cafés permet de modéliser la production de cette machine.
   On suppose que le choix d'un café se fait dans une situation d'équiprobabilité.
   Quand Maël trouve du marc dans un café trop chaud, il décide de ne pas le boire.
   Quelle est la probabilité que Maël ne boive pas son café ?

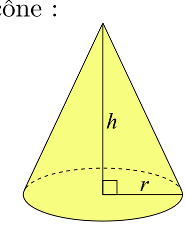
2. Ce matin, Maël a décidé de ne pas boire son café. Il s'intéresse alors au gobelet qu'il tient entre les mains.
   Ce gobelet est un cône tronqué. Il mesure 8,4 cm de haut et les cercles qui le délimitent ont pour rayons respectifs 4 cm pour l'ouverture du haut, 2,8 cm pour le fond. On estime à 20 cL le volume de café versé par la machine dans ce gobelet.




Gobelet vu de face

**Rappels**

- Volume du cône :




$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

- un décimètre cube équivaut à 1 litre.

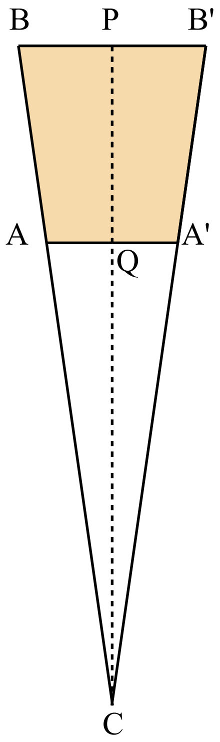
## Éléments de solution

1. a.

| **Café** | *Température convenable* | *Café trop chaud* | *Total* |
|---|---|---|---|
| *Contient du marc* | 3 | 2 | 5 |
| *Ne contient pas de marc* | 77 | 18 | 95 |
| *Total* | 80 | 20 | 100 |

b. La probabilité de ne pas boire le café est donc de 0,02.

2.




$CQ = 19,6$ cm donc $CP = 28$ cm
Donc le volume $V$ du gobelet est :

$V = \dfrac{1}{3}\pi\left(4^2 \times 28 - 2,8^2 \times 19.6\right)$ soit environ 30,8 cL.

Le café occupe donc environ 65% du gobelet.

Retour au sommaire

# ROUEN

## Deuxième exercice académique

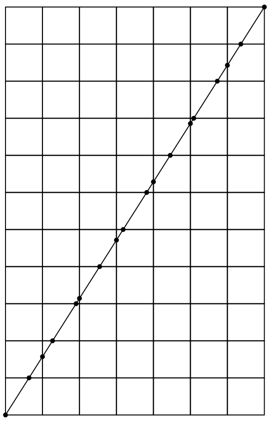
Série S

***Plage et parasols***

### Énoncé

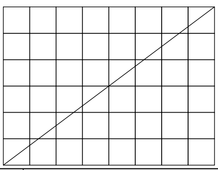
1. On donne un quadrillage constitué de carrés identiques à l'intérieur d'un rectangle.
   On considère une diagonale du rectangle. En s'inspirant de l'exemple ci-dessous, recopier et compléter, pour les rectangles 1 et 2, les tableaux suivants :

**Exemple :**



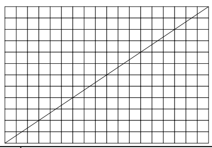
| | |
|---|---|
| Dimensions (en nombre de carrés) | 7 carrés sur 11 |
| Nombre de sommets rencontrés | 2 (les extrémités de la diagonale) |
| Nombre de carrés rencontrés | 17 |

**Rectangle 1** :



| | |
|---|---|
| Dimensions (en nombre de carrés) | |
| Nombre de sommets rencontrés | |
| Nombre de carrés rencontrés | |

**Rectangle 2** :



| | |
|---|---|
| Dimensions (en nombre de carrés) | |
| Nombre de sommets rencontrés | |
| Nombre de carrés rencontrés | |

2. Un club de vacances souhaite aménager la plage artificielle qui borde sa piscine.
   La plage, qui peut-être découpée en 2009 parcelles carrées de côté 1 unité de longueur, forme un rectangle BEAU.
   a. Déterminer les dimensions possibles du rectangle constitué par la plage.
   b. Un marchand ambulant souhaite parcourir la plage en ligne droite du point A au point B.
   Lorsque son trajet ne rencontre pas une parcelle ou ne la rencontre qu'en un sommet, on considère que le marchand ne traverse pas cette parcelle.
   Dans le cas de ce rectangle BEAU, combien de parcelles sera-t-il amené à traverser ?

c. La plagiste souhaite disposer un parasol à chaque sommet des parcelles formant la plage, à l'exception du point A. Les parasols sont tous de la même forme et plantés de la même façon.
   1. Combien faut-il de parasols pour une plage de 2009 parcelles ?
   2. La plagiste se tient debout au point A.
      Elle voit tous les parasols de la plage, sauf ceux qui sont parfaitement plantés sur la diagonale partant de A et cachés derrière le premier parasol visible de la diagonale. Combien voit-elle de parasols ?

## Éléments de solution

1. Rectangle 1 : 8 carrés sur 6 ; 3 sommets rencontrés ; 12 carrés traversés
   Rectangle 2 : 18 carrés sur 12 ; 7 sommets rencontrés ; 24 carrés traversés.
2. a. $2009 = 7 \times 7 \times 41$ ;
      les dimensions possibles du rectangle sont donc : 1 sur 2009 ; 7 sur 287 ; 41 sur 49.
   b. Le nombre de parcelles traversées est égal à la somme du nombre de carrés sur chaque dimension du rectangle BEAU, en enlevant 1 à chaque fois que l'on on passe par un sommet de carré (sauf le sommet de départ).
      Il y a pgcd$(n\,;\,p)$ nœuds du quadrillage sur la diagonale (y compris le point B, sans compter A).
      Donc, si la plage mesure $n$ sur $p$, le marchand va donc croiser $n + p - \text{pgcd}(n;p)$ parcelles :
      *Cas 1* : $1 + 2009 - 1 = 2009$ parcelles ;
      *Cas 2* : $7 + 287 - 7 = 287$ parcelles ;
      *Cas 3* : $41 + 49 - 1 = 89$ parcelles.
   c. Si la plage mesure $n$ sur $p$, il y a $(n+1)(p+1)$ nœuds dans ce quadrillage. On enlève le parasol de A : il reste donc $(n + 1)(p + 1) - 1$ parasols.
      1. Pour une plage de 2009 parcelles, il faut donc :
         *Cas 1* : $2 \times 2010 - 1 = 4019$ parasols ;
         *Cas 2* : $8 \times 288 - 1 = 2303$ parasols ;
         *Cas 3* : $42 \times 50 - 1 = 2099$ parasols.
      2. On enlève tous les parasols cachés derrière le premier sur la diagonale. Il y a pgcd$(n\,;\,p)$ nœuds du quadrillage sur la diagonale (y compris le point B, sans compter A).
         Il y a donc $(\text{pgcd}(n;p) - 1)$ parasols cachés sur la diagonale (car la plagiste voit le premier parasol)
         Par conséquent, la plagiste peut voir $(n+1)(p+1)-1-(\text{pgcd}(n;p)-1)$ parasols c'est-à-dire $(n + 1)(p + 1) - \text{pgcd}(n;p)$ parasols.
         *Cas 1* : $2 \times 2010 - 1 = 4019$ parasols ;
         *Cas 2* : $8 \times 288 - 7 = 2297$ parasols ;
         *Cas 3* : $42 \times 50 - 1 = 2099$ parasols.

Retour au sommaire

# ROUEN

## Troisième exercice académique

Séries autres que S et STI

***Les nombres égyptiens***

### Énoncé

Un nombre entier naturel est dit « *égyptien* » si on peut le décomposer en une somme d'entiers naturels (qui peuvent être égaux) tels que la somme de leurs inverses est égale à 1.

Par exemple, 11 est *égyptien* car $11 = 2 + 3 + 6$ et $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1$.

1. 5 est-il un nombre *égyptien* ?
2. Montrer que 9 est *égyptien* puis en déduire que 20 est *égyptien*.
3. On considère un nombre entier naturel $N$.
   a. Démontrer que si $N$ est *égyptien*, alors $2N + 2$ est également *égyptien*.
   b. Démontrer que si $N$ est *égyptien*, alors $2N + 9$ est également *égyptien*.
4. 2010 est-il *égyptien* ? Si oui, préciser sa décomposition.

### Éléments de solution

1. Une seule décomposition possible de 5 sous la forme d'une somme d'entiers naturels différents de 1 :
   $5 = 2 + 3$ et $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \neq 1$. Donc 5 n'est pas *égyptien*.
2. $9 = 3 + 3 + 3$ et $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1$. Donc 9 est *égyptien*.
   $20 = 2 \times 9 + 2$ et $9 = 3 + 3 + 3$ donc $20 = 2 \times (3 + 3 + 3) + 2 = 6 + 6 + 6 + 2$
   $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{2} = 1$. Donc 20 est *égyptien*.
3. On considère un entier naturel $N$.
   a. On suppose que $N$ est *égyptien* : $N$ s'écrit donc $N = n_1 + n_2 + n_3 + \cdots + n_k$,
   avec $\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} + \cdots + \frac{1}{n_k} = 1$.
   Donc $2N + 2 = 2n_1 + 2n_2 + 2n_3 + \cdots + 2n_k + 2$ (somme d'entiers naturels).
   Or $\frac{1}{2n_1} + \frac{1}{2n_2} + \frac{1}{2n_3} + \cdots + \frac{1}{2n_k} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} + \cdots + \frac{1}{n_k}\right) + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{2} = 1$ car $N$ est *égyptien*.
   Donc $2N + 2$ est aussi *égyptien*.
   b. On suppose que $N$ est *égyptien* : $N$ s'écrit donc $N = n_1 + n_2 + n_3 + \cdots + n_k$ avec $\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} + \cdots + \frac{1}{n_k} = 1$.
   Donc $2N + 9 = 2n_1 + 2n_2 + 2n_3 + \cdots + 2n_k + 9 = 2n_1 + 2n_2 + 2n_3 + \cdots + 2n_k + 3 + 6$(somme d'entiers naturels).
   Or $\frac{1}{2n_1} + \frac{1}{2n_2} + \frac{1}{2n_3} + \cdots + \frac{1}{2n_k} + 2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} + \cdots + \frac{1}{n_k}\right) + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1$ car $N$ est *égyptien*.
   Donc $2N + 9$ est aussi *égyptien*.

4. $2010 = 2 \times (2 \times (2 \times (2 \times (2 \times (2 \times (2 \times (2 \times (2 \times 1 + 2) + 2) + 9) + 2) + 2) + 2) + 9) + 2) + 2$.

   Comme 1 est *égyptien* (évident), $2 + 2$ est *égyptien* et, par applications successives des propriétés démontrées en 3 (a. et b.), 2010 est donc *égyptien*.

   Décomposition : $2010 = 2^9 + 2^9 + 2^8 + 2^6 \times 3 + 2^6 \times 6 + 2^6 + 2^5 + 2^4 + 2^2 \times 3 + 2^2 \times 6 + 2^2 + 2$.

   $2010 = 512 + 512 + 384 + 256 + 192 + 64 + 32 + 16 + 12 + 24 + 4 + 2$.

Retour au sommaire

# STRASBOURG

## Premier exercice académique

Série S

### Énoncé

Claire et Charles jouent à un jeu dont les règles sont les suivantes. Chacun part du nombre 1 et veut atteindre un nombre fixé par l'organisateur de la compétition.

A chaque étape, Claire a le choix soit d'ajouter 2 au nombre précédent, soit de le multiplier par 9. Charles quant à lui, a la possibilité soit d'ajouter 9 au nombre précédent, soit de le multiplier par 2.

1. Proposez pour chacun des joueurs une stratégie gagnante pour atteindre 2011.
2. Le gagnant est à présent celui qui atteint 2011 avec le moins d'étapes possibles.
   Qui est-ce ?
3. L'organisateur choisit cette fois le nombre 2010. Que se passe-t-il ?
4. Et s'il choisit 2012 ?
5. L'organisateur dispose d'un prix de valeur à remettre.
   Quels sont les nombres qu'il peut choisir pour être sûr de remettre son lot ?

### Éléments de solution

1. Stratégie de Claire pour atteindre 2011 :
   1 ; 9 ; 11 ; 13 ; 15 ; 17 ; 19 ; 21 ; 23 ; 207 ; 209 ; 211 ; 213 ; 215 ; 217 ; 219 ; 221 ; 223 ; 2007 ; 2009 ; 2011.

   Stratégie de Charles : 1 ; 2 ; 22 ; 31 ; 62 ; 124 ; 248 ; 496 ; 992 ; 1001 ; 2002 ; 2011.
2. Pour un nombre $x$ plus grand que 9, $2x > x + 9$. Charles aura intérêt a multiplier par 2 les grands nombres pour minimiser le nombre d'étapes nécessaires.
   Pour tout nombre $x$ , $9x > x + 2$. Claire aura intérêt a multiplier par 9 pour minimiser le nombre d'étapes nécessaires. La stratégie donnée à la question 1. est optimale pour les deux joueurs. Le gagnant est Charles.
3. Les nombres atteints par Charles sont tous de la forme $2^n + 9k$ , $n$ et $k$ entiers naturels. Les nombres atteints par Claire sont tous de la forme $9^n + 2k$ , $n$ et $k$ entiers naturels.
   Pour des raisons de parité et de divisibilité par 9, il n'existe pas d'entiers naturels $n$ et $k$ tels que $2^n + 9k = 2010$ ou $9^n + 2k = 2010$.
   Si l'organisateur choisit le nombre 2010, le jeu n'a pas de gagnant.
4. Charles est le seul a pouvoir atteindre 2012. $2^5 + 9 \times 220 = 2012$ .
5. D'après la question 3. , pour être sûr de remettre son lot, l'organisateur doit choisir un nombre de la forme $2^n + 9k$ ou $9^n + 2k$ avec $n$ et $k$ entiers naturels.

Retour au sommaire

# STRASBOURG

## Deuxième exercice académique

Série S

***Un tour de magie***

### Énoncé

Armelle a écrit sur 5 morceaux de papier des nombres entiers distincts compris entre 1 et 9. Les yeux bandés elle demande à Jean-Marc de tirer deux papiers et de lire à haute voix la somme des deux nombres qui y figurent. Armelle doit ensuite annoncer les deux nombres tirés et y réussit à chaque fois.

1. Donner une combinaison de 5 nombres permettant ce tour de magie.
2. Le tour serait-il possible avec 6 papiers de nombres toujours compris entre 1 et 9.

### Éléments de solution

1. 1. Pour choisir une combinaison de cinq chiffres non nuls possible, il suffit que deux d'entre eux n'aient jamais la même somme.
   Combinaison possible : 1 , 2, 5, 7 et 9.
2. La somme de deux nombres entiers distincts compris entre 1 et 9 est comprise entre 3 ( $= 1 + 2$ ) et 17 ( $= 8 + 9$ ). Il y a 15 valeurs possibles. Mais certaines sommes ne peuvent coexister, par exemple 3 et 17. Si c'était le cas, 1 , 2, 8 et 9 appartiendraient à la combinaison, ce qui est impossible car $1 + 9 = 2 + 8$. En définitive, la somme de deux nombres d'une combinaison ne peut prendre que 14 valeurs au plus.

   Il existe 14 combinaisons possibles avec 5 chiffres distincts non nuls : 1 , 2, 3, 5, 8 – 1 , 2, 3, 5, 9 – 1, 2, 3, 6, 9 – 1, 2, 5, 7, 9 – 1, 3, 4, 5, 9 – 1, 3, 5, 6, 9 – 1, 3, 5, 8, 9 – 1, 4, 5, 7, 9 – 1, 4, 6, 7, 8 – 1, 4, 7, 8, 9 – 1, 5, 6, 7, 9 – 1, 5, 7, 8, 9 – 2, 3, 4, 6, 9 – 2, 5, 7, 8, 9 .

   *Combinaison de six chiffres* : Il y a 15 manières de choisir 6 éléments distincts parmi 9 sans tenir compte de l'ordre du choix. Donc dans toute combinaison de 6 chiffres non nuls distincts, il y a 15 façons d'en choisir 2. Parmi les sommes correspondantes, deux au moins seront égales.

   Il n'existe aucune combinaison de 6 chiffres distincts non nuls permettant d'effectuer le tour de magie.

Retour au sommaire

# STRASBOURG

## Troisième exercice académique

Séries autres que S

### Énoncé

Jean-Marc a une carte bleue avec un code à quatre chiffres.
Il se souvient que ce code commence par 1 et se termine par 5.
Il se souvient aussi que les deux autres chiffres ne sont pas les mêmes.

1. Combien y-a-t-il de tels codes possibles ?
2. Il se souvient de plus que la somme des quatre chiffres fait 8. Il prétend alors qu'en deux tentatives il est sûr de retrouver son code.
   A-t-il raison ?

### Éléments de solution

Jean-Marc se souvient du premier et dernier chiffre de son code. Il peut être représenté par le tableau

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | $c$ | $d$ | 5 |

1. Il y a 9 choix possibles pour le nombre $c$ et neuf pour le nombre $d$ car $c$ et $d$ sont distincts, soit au total $10 \times 9$ choix possibles.
   Il y a 90 codes possibles.
2. La somme des quatre chiffres est égale à 8, soit $1 + c + d + 5 = 8$.
   $c + d = 2$.
   $c$ et $d$ étant distincts et entiers compris entre 0 et 9, il n'y a que deux possibilités :
   $c = 0$ et $d = 2$ ou $c = 2$ et $d = 0$.
   Jean-Marc a raison en affirmant qu'en deux tentatives il est sûr de retrouver le bon code.

Retour au sommaire

# STRASBOURG

## Quatrième exercice académique

Séries autres que S

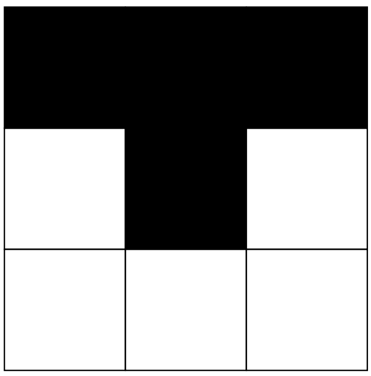
### Énoncé

Dans un carré quadrillé, deux cases sont dites voisines si elles se touchent par un côté ou simplement par un sommet.
On veut colorier certaines cases en noir de façon que toute case intérieure au carré possède cinq voisines blanches si elle est noire, quatre voisines noires si elle est blanche

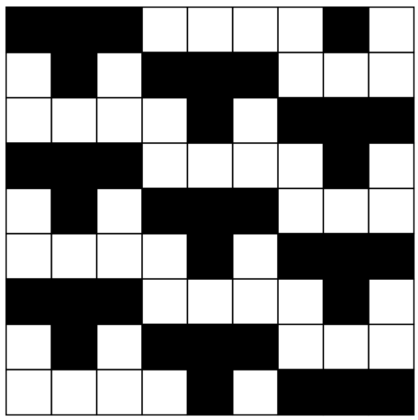
1. Réaliser un tel coloriage sur une grille $3 \times 3$.
2. Réaliser un tel coloriage sur une grille $9 \times 9$.
3. Dans le cas d'une grille $9 \times 9$, quel est le nombre minimal de cases noires d'un tel coloriage ?

### Éléments de solution

1. Sur cet exemple, la seule case intérieure (la case centrale) est noire.



2.



3. Un carré $3 \times 3$ ne contient qu'une seule case « intérieure », celle du centre.

   Pour respecter les contraintes, chaque carré $3 \times 3$ doit nécessairement compter 4 cases noires et 5 blanches.

   Un carré $9 \times 9$ contient 9 carrés $3 \times 3$. Le nombre de cases noires dans un carré $9 \times 9$ est donc fixe et égal à 36.

Retour au sommaire

# TOULOUSE

## Premier exercice académique

Série S

***Interdiction de doubler***

### Énoncé

Un ensemble $A$ de nombres réels est dit « sans double » ( ou SANDO en abrégé) quand aucun élément de $A$ n'est le double d'un élément de $A$. Un SANDORI est un SANDO constitué d'une Réunion d'Intervalles inclus dans l'intervalle [0 ; 1] sans élément commun. Par exemple : $[0,11; 0,22[ \cup [0,45; 0,9[$ est un SANDORI.
La longueur d'un SANDORI est la somme des longueurs des intervalles qui le constituent. Par exemple : $[0,11; 0,22[ \cup [0,45; 0,9[$ est un SANDORI de longueur 0,56.

On cherche les SANDORI les plus longs possibles.

1. a. Justifier soigneusement que $[0,11; 0,22[ \cup [0,45; 0,9[$ est bien un SANDORI de longueur 0,56.
   b. Trouver un SANDORI de la forme $[0,11\ ; a[ \cup [b\ ;\ c[$ avec $a < b < c$ dont la longueur est supérieure ou égale a 0,61.
2. a. S'il existe un SANDORI de longueur $L$, montrer qu'il existe un autre SANDORI de longueur supérieure ou égale à $L$ contenant l'intervalle ]0,5 ; 1].
   b. En déduire que les SANDORI les plus longs possibles ont une longueur comprise entre 0,5 et 0,75.
3. S'il existe un SANDORI de longueur $L$, contenant l'intervalle ]0,5 ; 1], montrer qu'il existe un autre SANDORI de longueur supérieure ou égale à $L$ contenant les intervalles ]0,5 ; 1] et ]0,125 ; 0,25].
   En déduire un nouvel encadrement de la longueur des SANDORI les plus longs.
4. Déterminer un SANDORI dont la longueur dépasse 0,65.
5. Déterminer une valeur approchée au centième près de la longueur des SANDORI les plus longs.

### Éléments de solution

1. a. $[0,11\ ;\ 0,22[ \cup [0,45\ ;\ 0,9[$ est réunion d'intervalles inclus dans [0 ; 1]. Pour tout element $x$ de [0,11 ; 0,22[ ∪ [0,45 ; 0,9[, le double $2x$ appartient a [0,22 ; 0,44[ ∪ [0,9 ; 1,8[, il n'est donc pas dans [0,11 ; 0,22[ ∪ [0,45 ; 0,9[. La longueur est $0,22 - 0,11 + 0,9 - 0,45$ soit 0,56.
   b. L'intervalle $[b\ ;\ c[$ sans double le plus long possible est [0,5 ; 1[ ; l'intervalle [0,11 ; $a$[ le plus long sans double qui puisse lui être adjoint est [0,11 ; 0,25[.
   L'ensemble [0,11 ; 0,25[ ∪ [0,5 ; 1[ est sans double, inclus dans [0 ; 1], de longueur 0,64.
2. a. Soit $A$ le sandori initial de longueur $L$, $A'$ la partie de $A$ incluse dans ]0,25 ; 0,5]. L'ensemble $B$ obtenu en remplacant $A'$ par ]0,5 ; 1] dans $A$ ($B = (A - A') \cup ]0,5\ ;\ 1]$) est :
   - union d'intervalles inclus dans [0 ; 1]
   - de longueur $L - \text{longueur}(A') + 0,5$ supérieure ou égale a $L$ puisque longueur $(A') \leqslant 0,25$
   - toujours un sandori : le double d'un élément $x$ de $A - A'$ n'est ni dans $A$ (qui est sandori) ni dans ]0,5 ; 1]) (car $x$ n'est pas dans $A'$), donc pas dans $B$, et le double d'un élément de ]0,5 ; 1] est strictement supérieur à 1 donc pas dans $B$ qui est inclus dans [0,1].
     Avec $B$ on a construit un sandori ad hoc.
   
   b. L'intervalle ]0,5 ; 1] est un sandori de longueur 0,5 ; pour tout sandori, on considère celui, plus long contenant ]0,5 ; 1], ce dernier est inclus dans ]0 ; 0,25] ∪ ]0,5 ; 1], sa longueur est inférieure à 0,75.
   Les sandori de longueur maximale ont une longueur comprise entre 0,5 et 0,75.

3. Soit $A$ le sandori initial de longueur $L$, $A'$ la partie de $A$ incluse dans ]0,0625 ; 0,125] ∪ ]0,25 ; 0,5]. L'ensemble $B$ obtenu en remplaçant $A'$ par ]0,125 ; 0,25] ∪ ]0,5 ; 1] dans $A$ est :
   - union d'intervalles inclus dans [0 ; 1]
   - de longueur $L$ − longueur$(A')$ + $0,125 + 0,5$ supérieure ou égale à $L$ puisque longueur $(A') \leqslant 0,0625 + 0,25$
   - toujours un sandori : le double d'un élément $x$ de $A - A'$ n'est ni dans $A$ (qui est sandori) ni dans ]0,125 ; 0,25] *cup* ]0,5 ; 1]) (car $x$ n'est pas dans $A'$), donc pas dans $B$, et le double d'un élément de ]0,125 ; 0,25] ∪ ]0,5 ; 1]) est strictement supérieur a 1 donc pas dans $B$ qui est inclus dans [0,1].

     Par le même raisonnement, ]0,125 ; 0,25] ∪ ]0,5 ; 1] est un sandori de longueur 0,625 ; tout sandori contenant ]0,125 ; 0,25] ∪ ]0,5 ; 1] est inclus dans ]0 ; 0,0625] ∪ [0,125 ; 0,25[ ∪ ]0,5 ; 1], sa longueur est inferieure a 0,6875. Les sandori les plus longs ont une longueur comprise entre 0,625 et 0,6875.

   (a) ]0,03125 ; 0,0626] ∪ ]0,125 ; 0,25] ∪ ]0,5 ; 1] est un sandori, sa longueur est $0,5 + \frac{0,5}{4} + \frac{0,5}{16} = 0,65625$, supérieure a 0,65.

4. Semblablement :
   on construit un sandori de longueur $0,5 + \frac{0,5}{4} + \frac{0,5}{16} + \frac{0,5}{64} = 0,664025$ ; tous les sandori ont une longueur comprise entre $0,5+\frac{0,5}{4}+\frac{0,5}{16}+\frac{0,5}{64}$ et $0,5+\frac{0,5}{4}+\frac{0,5}{16}+\frac{0,5}{64}+\frac{0,5}{128} = 0,667968750\ldots$ ce qui situe le plus long dans un intervalle de longueur inférieure à $1/100$.

   Toute valeur de [0,657 ; 0,674] est valeur approchée au centième de la longueur maximale.

N.B. : on construit un sandori de longueur $0,5+\frac{0,5}{4}+\frac{0,5}{16}+\frac{0,5}{64}+\frac{0,5}{256} = 0,6660156250$ ; tous les sandori ont une longueur comprise entre $0,5 + \frac{0,5}{4} + \frac{0,5}{16} + \frac{0,5}{64} + \frac{0,5}{256}$
et $0,5 + \frac{0,5}{4} + \frac{0,5}{16} + \frac{0,5}{64} + \frac{0,5}{256} + \frac{0,5}{512} = 0,66699218750 \ldots$ situe cette longueur entre 0,666 et 0,667...

Retour au sommaire

# TOULOUSE

## Deuxième exercice académique

Série S

***Tableaux de Hadamard***

### Énoncé

On désire remplir un tableau de $n$ lignes et de $n$ colonnes (avec $n$ entier strictement supérieur à 1) avec des « 1 » ou des « $-1$ » ; on appelle coefficients les nombres figurant dans un tel tableau.

On dira que deux colonnes du tableau sont orthogonales quand, en effectuant la somme des produits de leurs coefficients successifs, on obtient 0. Voici à titre d'exemples des colonnes orthogonales ou non orthogonales :

Deux colonnes orthogonales de quatre lignes

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | $\longrightarrow$ | | $1 \times 1$ |
| -1 | 1 | $\longrightarrow$ | $+$ | $(-1) \times 1$ |
| 1 | 1 | $\longrightarrow$ | $+$ | $1 \times 1$ |
| 1 | $-1$ | $\longrightarrow$ | $+$ | $1 \times (-1)$ |
| | | | | 0 |

Deux colonnes non-orthogonales de quatre lignes

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | $\longrightarrow$ | | $1 \times 1$ |
| -1 | 1 | $\longrightarrow$ | $+$ | $(-1) \times 1$ |
| 1 | $-1$ | $\longrightarrow$ | $+$ | $1 \times (-1)$ |
| 1 | $-1$ | $\longrightarrow$ | $+$ | $1 \times (-1)$ |
| | | | | $-2$ |

On étudie s'il est possible de remplir un tableau de $n$ lignes et de $n$ colonnes (avec $n > 1$) avec des « 1 » ou des « $-1$ » de façon à ce que les colonnes du tableau soient deux à deux orthogonales. Un tel tableau est appelé « *un tableau de Hadamard* » de taille $n$.

1.
   a. Le tableau ci-contre est un tableau de Hadamard. Expliquer pourquoi.

   b. Dresser la liste de tous les tableaux de Hadamard de taille $n = 2$.

   c. Peut-on trouver des tableaux de Hadamard de taille $n = 3$ ? Expliquer.

| | | | |
|---|---|---|---|
| $-1$ | 1 | $-1$ | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | $-1$ | $-1$ |
| 1 | $-1$ | $-1$ | 1 |

2. On suppose que l'entier $n$ est strictement supérieur à 3 et qu'il existe un tableau de Hadamard $H_1$ de taille $n$.

   a. Expliquer pourquoi $n$ est pair.

   b. Si le premier coefficient de la première colonne de $H_1$ est « $-1$ », expliquer comment modifier les coefficients de la première ligne de $H_1$ pour obtenir un tableau de Hadamard dont le premier coefficient de la première colonne soit « 1 ».

   c. Expliquer comment on peut obtenir, à partir de $H_1$, un tableau de Hadamard dont tous les coefficients de la première colonne sont des « 1 ».

3. On suppose toujours que l'entier est $n$ est strictement supérieur à 3 et qu'il existe un tableau de Hadamard $H_1$ de taille $n$ ; par conséquent $n$ est pair ; on pose $n = 2p$.

a. Montrer qu'on peut construire un tableau de Hadamard $H_2$ dont la première colonne ne contient que des « 1 » et dont la deuxième colonne contient des « 1 » aux $p$ premières lignes et des « -1 » aux lignes suivantes (voir schéma ci-contre).

b. En déduire que s'il existe un tableau de Hadamard de taille $n$ ($n > 3$), alors $n$ est un multiple de 4.

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 1 | |
| 1 | 1 | $p$ valeurs « 1 » |
| ... | ... | |
| ... | 1 | |
| ... | $-1$ | |
| ... | $-1$ | |
| ... | ... | $p$ valeurs « $-1$ » |
| 1 | $-1$ | |

4. Comment peut-on, à partir du tableau du 1.a., construire un tableau de Hadamard de taille 8 ?
5. Faire le bilan des questions précédentes en indiquant :
   - quelles sont les valeurs de l'entier $n$ pour lesquelles on sait qu'il existe un tableau de Hadamard,
   - quelles sont les valeurs de l'entier $n$ pour lesquelles on sait qu'il n'en existe pas,
   - un exemple de valeur de l'entier $n$ pour laquelle on ne sait pas s'il existe un tableau de Hadamard.

***Remarques :***
Jacques HADAMARD (1865-1963) est un mathématicien français.

D'une part, la « conjecture de Hadamard » est un problème mathématique toujours ouvert à l'heure actuelle. Elle s'énonce ainsi : « *il existe un tableau de Hadamard de taille* $4k$ *pour tout entier* $k > 0$. » Depuis la construction d'un tableau de Hadamard de taille 428, en 2004, le premier entier pour lequel on ne sait pas s'il en existe est $n = 668$.

D'autre part, ces tableaux interviennent en Mathématiques appliquées. Lors d'une expérimentation pour acquérir de nouvelles connaissances en contrôlant plusieurs paramètres d'entrée, il est précieux de parvenir à réduire le nombre d'essais ; ces tableaux interviennent dans la théorie des plans d'expérience dont le propos est d'optimiser la suite ordonnée d'essais d'une expérimentation.

## Éléments de solution

1. a. Le tableau a quatre lignes et quatre colonnes, ne comporte que des coefficients 1 ou $-1$, les six calculs à effectuer de sommes de produits entre colonnes donnent 0.

   b. Le tableau cherché est $\begin{array}{|c|c|}\hline a & c \\ \hline b & d \\ \hline\end{array}$. On peut choisir de façon arbitraire les coefficient $a$,$b$, $c$ ; ce qui fait 8 choix. $a \times b$ vaut 1 ou $-1$ et on ajuste le signe de $c \times d$ en choisissant une valeur convenable de $d$. Il y a exactement 8 tableaux de Hadamard de taille 2 :

$\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 1 \\ \hline 1 & -1 \\ \hline\end{array}$ $\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & -1 \\ \hline 1 & 1 \\ \hline\end{array}$ $\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 1 \\ \hline -1 & 1 \\ \hline\end{array}$ $\begin{array}{|c|c|}\hline -1 & 1 \\ \hline 1 & 1 \\ \hline\end{array}$ $\begin{array}{|c|c|}\hline -1 & -1 \\ \hline 1 & -1 \\ \hline\end{array}$ $\begin{array}{|c|c|}\hline -1 & 1 \\ \hline -1 & -1 \\ \hline\end{array}$ $\begin{array}{|c|c|}\hline -1 & -1 \\ \hline -1 & 1 \\ \hline\end{array}$

   c. Former un tableau de Hadamard de taille 3 exige de pouvoir obtenir 0 en ajoutant trois produits valant 1 ou $-1$, c'est impossible.

2. a. Avec un nombre impair de produits valant 1 ou $-1$, on ne peut obtenir une somme nulle. Tout tableau de Hadamard est de taille paire.

   b. En changeant tous les signes des coefficients de la première ligne, les coefficients sont 1 ou $-1$, les produits associés à cette ligne sont inchangés, les autres coefficients sont inchangés -, le nouveau tableau obtenu est de Hadamard ; il a un premier coefficient de la première colonne égal à 1. Par exemple, le tableau obtenu à partir de celui du 1.a. est de Hadamard.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | $-1$ | 1 | $-1$ |
| 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | $-1$ | $-1$ |
| 1 | 1 | 1 | 1 |

   c. On fait de même pour chaque ligne commençant par un coefficient $-1$ ; les coefficients sont 1 ou $-1$, les produits étant inchangés, Ĕ on obtient un nouveau tableau de Hadamard dont la première colonne ne comporte que des coefficients 1.

3. a. De $H_1$ on tire un tableau ne comportant que des 1 en première colonne ; les produits - au nombre de $2p$ - de la première à la deuxième colonne valent 1 ou bien $-1$ ; leur somme étant nulle, il y a autant de 1 que de $-1$ ; c'est-à-dire autant de 1 que de $-1$ en deuxième colonne, au nombre de $p$.
Permuter deux lignes d'un tableau de Hadamard, produit un nouveau tableau qui est aussi de Hadamard. Il suffit de procéder aux permutations nécessaires pour ordonner les lignes de sorte que la configuration attendue soit obtenue, elle produit un tableau $H_2$ qui est de Hadamard.

   Par exemple le tableau ci-dessous est obtenu à partir du tableau de 2. b), il est de Hadamard

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | $-1$ | $-1$ |
| 1 | $-1$ | 1 | $-1$ |
| 1 | $-1$ | $-1$ | 1 |

   b. A partir de $H_2$,
   - D'une part :
     - les $p$ premières lignes de la troisième colonne comportent des coefficients 1 au nombre de $k$, des coefficients $-1$ au nombre de $p-k$ ; la somme des $p$ produits de la deuxième à la troisième colonne selon les $p$ premières lignes, vaut $kp+k$.
     - les $p$ dernières lignes de la troisième colonne comportent des coefficients 1 au nombre de $m$, des coefficients $-1$ au nombre de $p-m$ ; la somme des $p$ produits de la deuxième à la troisième colonne selon les $p$ dernières lignes, vaut $(mp+m)$.
     - la somme totale de ces $n$ $(= 2p)$ produits vaut $2k-2m$ ; donc $k=m$ du fait de l'orthogonalité. En troisième colonne, il y a autant de 1 dans les $p$ premières lignes que dans les $p$ dernières, de même pour le coefficient $-1$ ...
   - D'autre part, du fait de l'orthogonalité de la première et de la troisième colonne, il y a autant de 1 que de $-1$ en troisième colonne, ce nombre vaut deux fois celui de 1 dans les $p$ premières lignes $(2k)$ ... qui égale le nombre de $-1$, $2(p-k)$... qui implique la parité de $p$. $N$ est multiple de 4.

4. Le tableau ci-dessous est un tableau formé en adjoignant quatre tableaux de taille 4 :

| | |
|---|---|
| M | M |
| M | $-$M |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $-1$ | 1 | $-1$ | 1 | $-1$ | 1 | $-1$ | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | $-1$ | $-1$ | 1 | 1 | $-1$ | $-1$ |
| 1 | $-1$ | $-1$ | 1 | 1 | $-1$ | $-1$ | 1 |
| $-1$ | 1 | $-1$ | 1 | 1 | $-1$ | 1 | $-1$ |
| 1 | 1 | 1 | 1 | $-1$ | $-1$ | $-1$ | $-1$ |
| 1 | 1 | $-1$ | $-1$ | $-1$ | $-1$ | 1 | 1 |
| 1 | $-1$ | $-1$ | 1 | $-1$ | 1 | $-1$ | $-1$ |

5. Bilan :
   - il existe un tableau de Hadamard de taille 2, de taille 4, de taille 8, donc, semblablement 16, etc. pour la taille $2^q$ ;
   - il n'existe pas de tableau de Hadamard de taille impaire ;
   - hors de ces valeurs, de par cette étude-ci, on ne sait pas.

Retour au sommaire

# TOULOUSE

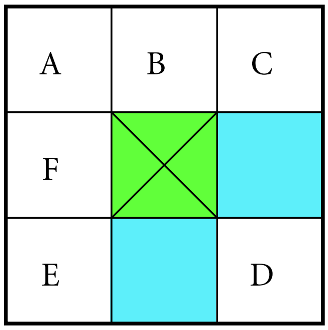
## Troisième exercice académique

Séries autres que S

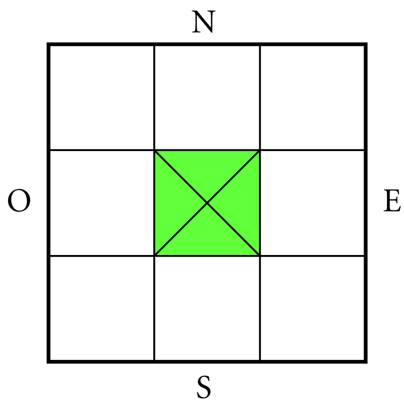
***L'immeuble***

### Énoncé

1. Six familles vivent au premier étage d'un immeuble dans les appartements A, B, C, D, E, F disposés selon le plan ci-contre. En tout vingt personnes habitent ces six appartements et il y a au moins deux personnes dans chaque appartement.
De plus, la famille occupant l'appartement A compte deux fois moins de membres que la famille occupant l'appartement F, et si on réunit ces deux familles, on obtient un nombre impair de personnes.
La famille BRUHAT est la famille la plus nombreuse parmi celles habitant l'étage.
Quel appartement habitent les BRUHAT ? Combien sont-ils ?




2. Au deuxième étage de ce même immeuble vivent également vingt personnes réparties dans huit appartements disposés selon le plan ci-contre.
Les heureux élus qui ont vue à l'Est, sur le stade, sont, hélas deux fois moins nombreux que ceux dont la vue, au Sud, donne sur l'usine d'incinération, mais deux fois plus nombreux que ceux qui, au Nord, font face à la prison.
Quant à ceux qui regardent l'Ouest, exactement le tiers de ceux qui font face au Sud, ils peuvent se distraire avec l'animation du centre commercial.
Aucun appartement n'est vide. L'appartement comptant le plus grand nombre d'occupants est habitĺę par la famille TITS. Au fait, quel appartement habitent les TITS et combien sont-ils ?




### Éléments de solution

1. Le total des occupants du A et du F est entier multiple de 3, impair, inférieur à 12 et supérieur à 4 (parce que les quatre autres appartements comptent au moins deux personnes, huit en tout). Il vaut donc 9. Dans A il y a trois personnes, dans F six. Les quatre autres appartements comptent 11 personnes, avec deux au moins chacun, aucun ne peut en recevoir plus de six.
Les BRUHAT habitent le F.
2. Le total de ceux qui ont vue sur le Sud est multiple de 2 et de 3, inférieur ou égal à 20, il peut valoir : 18, 12, 6 :
   - 18 est exclu du fait de la vacance induite dans certains appartements
   - 6 est exclu, car alors le nombre de ceux qui ont vue à l'Est serait 3, il ne peut être double de ceux qui ont vue au Nord.

Ceux qui ont vue au Sud sont douze ; vue à l'Est, 6 ; vue à l'Ouest, 4 ; vue au Nord, 3.
Au Nord, il y a un occupant par appartement. Le total de ces quatre populations étant 25 ; le nombre de ceux qui occupent les appartements de coin est 5 ; il y a quatre locataires ayant vue à l'Ouest, ce qui impose la répartition :

| | | N | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | 1 | 1 | |
| O | 2 | | | E |
| | 1 | | 2 | |
| | | S | | |

On complète avec le fait qu'il y en a six ayant vue à l'Est, douze au Sud.

| | | N | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | 1 | 1 | |
| O | 2 | | 3 | E |
| | 1 | 9 | 2 | |
| | | S | | |

Les 9 TITS habitent l'appartement ayant vue exclusive au Sud.

Retour au sommaire

# TOULOUSE

## Quatrième exercice académique

Séries autres que S

***Le Mathothon en Borelie***

### Énoncé

On organise chaque année en Borelie un Mathothon télévisé : des émissions mettant en valeur les nombreuses facettes de l'activité mathématique sont diffusées tout au long d'un week-end et les foyers qui le souhaitent peuvent promettre d'effectuer un don unique de 30€. Ils ne tiennent pas nécessairement leur promesse par la suite hélas. Heureusement, certains des foyers n'ayant rien promis effectuent, eux, un don de 30€

L'objectif du Mathothon est de récolter des fonds pour financer des projets scientifiques.

1. En 2010, on dénombrait 772 000 foyers en Borelie. Lors du Mathothon de cette année là, 36% des foyers ont fait une promesse de don (on les appelle les « prometteurs »).
   a. Cela avait-il permis d'espérer une recette d'au moins 8 000 000€ ? Pourquoi ?
   b. On a récolté en tout 7 954 560€ ; on estime alors que 30% des promesses n'ont pas été tenues, alors que des foyers n'ayant rien promis (on les appelle les « non prometteurs ») se sont résolus à donner.
   Quel a été, en 2010, le pourcentage de donateurs parmi les foyers « non prometteurs » ? Arrondir la réponse au dixième près.
2. Lors du Mathothon 2011, le nombre de foyers s'élève à 784 000 et 34% d'entre eux ont fait une promesse de don. On attend d'un moment à l'autre les résultats définitifs du Mathothon 2011.
   a. Cela permet-il d'espérer une recette d'au moins 8 000 000€ ? Pourquoi ?
   b. Les résultats viennent de tomber : la somme effectivement récoltée en 2011 est de 7 962 540€. On considère que le pourcentage des « prometteurs » n'ayant pas fait de don est le double de celui des « non-prometteurs » qui en ont fait un.
   Déterminer ces pourcentages ; arrondir la réponse au dixième près.

### Éléments de solution

1. a. En 2010, l'espoir de recette est : $772000 \times 0,36 \times 30 = 8\ 337\ 600$€ ; cela dépasse les 8 millions d'euros.
   b. En 2010, la recette effective des « prometteurs » donateurs :
   $772\ 000 \times 0,36 \times 0,7 \times 30 = 5\ 836\ 320$€ ;
   la recette résultant des dons des « non-prometteurs » :
   $7\ 954\ 560 - 5\ 836\ 320 = 2\ 118\ 240$€.
   Ce qui implique 70 608 donateurs parmi les 494 080 « non-prometteurs », soit 14,3 % au dixième près.
2. a. En 2011, l'espoir de recette est : $784000 \times 0,34 \times 30 = 7\ 996\ 800$€.
   b. Pour l'année en cours, si $t$% de « non-prometteurs » ont donne, $2t$% de « prometteurs » n'ont pas donné. L'écart de recette par rapport à la virtuelle est : 34 260€ en moins
   $[784\ 000 \times 0,66 \times \frac{t}{100}) - 784\ 000 \times 0,34 \times \frac{2t}{100}] \times 30 = -34\ 260$ ;
   d'où $t \approx 7,283\ldots$
   14,6 % des « prometteurs » n'ont pas donné et 7,3% des « non-prometteurs » ont donné.

Retour au sommaire

# VERSAILLES

## Premier exercice académique

Série S

***Fabrique de triplets***

### Énoncé

#### Préliminaires

1. Soit $x$ et $y$ deux nombres réels strictement inférieurs à 1. On note $S$ leur somme et $P$ leur produit. Montrer que $S < P + 1$.
2. Quel est le sens de variation de la fonction $f$ définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = x - \dfrac{1}{x}$ ?

#### Recherche de triplets

On s'intéresse aux triplets $(a,\ b,\ c)$ tels que $0 < a \leqslant b \leqslant c$, $abc > 1$ et $a + b + c < \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}$.

3. Montrer que pour un tel triplet, $a < 1$.
4. Se peut-il que $b < 1$ ?
   *On pourra utiliser les préliminaires.*
5. Se peut-il que $b = 1$ ?
6. Alice affirme : « Si $a < 1 < b$ et $b \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{a}}$, alors on peut trouver un réel $c$ tel que le triplet $(a,\ b,\ c)$ soit solution. » A-t-elle raison ?
7. Bob ajoute : « Ces conditions ne sont pas nécessaires. » A-t-il raison ?

### Éléments de solution

#### Préliminaires

1. Pour tous réels $a$ et $b$, $xy + 1 = x + y + (x - 1)(y - 1)$.
   Le produit figurant au second membre est positif strictement par hypothèse. D'où le résultat.
2. Cette fonction est strictement croissante.

#### Recherche de triplets

3. Si $a$ est supérieur ou égal à 1, $b$ et $c$ le sont aussi, et ils sont supérieurs ou égaux à leurs inverses, ce qui nie la condition imposée.
4. Le sens de variation de la fonction $f$ et l'inégalité stricte $c > \dfrac{1}{ab}$ conduisent à $c - \dfrac{1}{c} > \dfrac{1}{ab} - ab$.
   L'inégalité $a+b+c < \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}$ conduit à $c - \dfrac{1}{c} < \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} - a - b$. On a donc $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} - a - b > \dfrac{1}{ab} - ab$.
   Mais $a$ et $b$ sont strictement inférieurs à 1 et, en appliquant le premier résultat préliminaire, on obtient
   $$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - a - b = (a + b)\left(\frac{1}{ab} - 1\right) < (ab + 1)\left(\frac{1}{ab} - 1\right) = \frac{1}{ab} - ab.$$
   Soit finalement $\dfrac{1}{ab} - ab < \dfrac{1}{ab} - ab$ Contradiction. Donc $b \geqslant 1$.

5. On cherche les triplets pour lesquels $b = 1$.

   L'inégalité de définition s'écrit $c - \frac{1}{c} < \frac{1}{a} - a$, ce qui, compte tenu du sens de variation de la fonction $f$ n'est possible que si $c < \frac{1}{a}$, mais l'inégalité $abc > 1$ suppose le contraire. Il n'existe pas de tels triplets dans l'ensemble des solutions.

6. On souhaite trouver $c$ vérifiant simultanément $a \leqslant b \leqslant c$, $c > \frac{1}{ab}$ et $c - \frac{1}{c} < \frac{1}{a} - a + \frac{1}{b} - b$.

   En raison de la continuité et la croissance de la fonction $f$, il revient au même de prouver qu'il existe un réel $c \geqslant b$ tel que $\frac{1}{ab} - ab < c - \frac{1}{c} < \frac{1}{a} - a + \frac{1}{b} - b$, ou encore que $\frac{1}{ab} - ab < b - \frac{1}{b} < a - \frac{1}{a} + b - \frac{1}{b}$.
   L'inégalité $\frac{1}{ab} - ab < b - \frac{1}{b}$ se réduit après calculs à $(1+a)(1-ab^2) < 0$ qui résulte de l'hypothèse.

   L'inégalité $b - \frac{1}{b} < \frac{1}{a} - a + \frac{1}{b} - b$ s'écrit $2\left(b - \frac{1}{b}\right) < \frac{1}{a} - a$. Or $2\left(b - \frac{1}{b}\right) < 2\left(\frac{1}{\sqrt{a}} - \sqrt{a}\right)$ et

   $\left(\frac{1}{a} - a\right) - 2\left(\frac{1}{\sqrt{a}} - \sqrt{a}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{a}} - \sqrt{a}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{a}} + \sqrt{a} - 2\right)$ quantité positive (le minimum de $x + \frac{1}{x}$ sur $]0\,;\,1]$ est 2).

7. Un triplet « limite » tel que celui-ci : $a = 0,84$, $b = c = 1,0911$ réalise $abc = 1,000019\ldots$ et

   $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} - a - b - c = 0,01148\ldots$ La condition n'est donc pas nécessaire (ici, $\frac{1}{\sqrt{a}} = 1,091089\ldots$).

Retour au sommaire

# VERSAILLES

## Deuxième exercice académique

Série S

***Billard dans un angle***

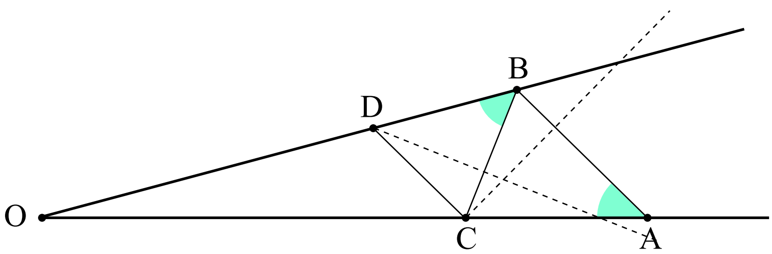
### Énoncé

Pour faciliter la lecture des copies, la mesure d'angle utilisée dans cet exercice est le degré.
On considère deux demi-droites [O$x$) et [O$y$) et un point A de la demi-droite [O$x$) tel que $OA = 1$.
On note $\theta$ une mesure de l'angle $\widehat{x\mathrm{O}y}$.
Etant donné un point B sur la demi-droite [O$y$), on construit, si possible, le point C du segment [OA] tel que $CA = CB$.

1. On note $\alpha$ une mesure de l'angle $\widehat{OAB}$. Pour quelles valeurs de $\alpha$ peut-on construire le point C ?
2. On suppose qu'on a pu construire le point C. On construit alors, si possible, un point D du segment [OB] tel que $DB = DC$. Pour quelles valeurs de $\alpha$ peut-on construire le point D ?
3. On continue le processus précédent, construisant ainsi tant qu'il est possible et alternativement des points sur [OA] et sur [OB]. Si M et M' sont deux points construits (dans cet ordre) et si on construit le point M", point du segment [OM] tel que $M"M = M"M'$, on note $x$ et $x'$ les mesures des angles $\widehat{OMM'}$ et $\widehat{OM'M"}$. Pour quelle valeur de $x$ a-t-on $x' = x$ ?
4. On suppose dorénavant qu'on peut construire autant de points qu'on veut.
Pour quelles valeurs de $\alpha$ cela est-il possible ?
5. Quelle relation existe-t-il alors entre la longueur de la ligne formée par les segments joignant A à B, B à C, C à D..., M à M', M' à M", etc et le périmètre du triangle ABC ?
Si le périmètre du triangle vaut $1 + \sqrt{2}$, combient vaut $\theta$ ?

### Éléments de solution

1. On écrit la somme des mesures des angles du triangle ABO en tenant compte du fait que le triangle CBA est isocèle de sommet principal A : $2\alpha + \theta + \widehat{CBO} = 180$.




Une condition nécessaire sur $\alpha$ est donc : $\alpha \leqslant 90 - \dfrac{\theta}{2}$.
2. Le raisonnement est le même et conduit à $2(180 - 2\alpha - \theta) + \theta \leqslant 180$ qui peut être traduit en $4\alpha \geqslant 180 - \theta$ ou encore $\alpha \geqslant 15 - \dfrac{\theta}{4}$.
3. La relation entre l'angle $\widehat{OMM'}$ et l'angle $\widehat{OM'M"}$ s'écrit $x' = 180 - 2x - \theta$. L'égalité de $x$ et $x'$ est obtenue pour $x = 60 - \dfrac{\theta}{3}$. Si on prend cette valeur comme valeur initiale, on peut construire des points *ad libitum.*

4. On passe d'un angle de mesure $x$ au suivant de mesure $x'$ donnée par $x' = 180 - 2x - \theta$. Calculons la différence entre $x'$ et la valeur critique $60 - \dfrac{\theta}{3}$.

$$x' - \left(60 - \frac{\theta}{3}\right) = 120 - 2x - \frac{2\theta}{3} = -2\left(x - \left(60 - \frac{\theta}{3}\right)\right).$$

Cette denrière égalité montre que la différence entre l'angle $\widehat{OM_nM_{n+1}}$ et la valeur critique $60 - \dfrac{\theta}{3}$ double à chaque pas. Si elle n'est pas initialement nulle, elle déborde au bout d'un certain nombre de constructions des valeurs admissibles. Le procédé n'est donc répétable *ad libitum* que si $\alpha = 60 - \dfrac{\theta}{3}$

5. La condition précédente conduit à la construction d'un certain nombre de triangles isocèles ayant tous les mêmes angles à la base. Les égalités $BC = AC$, $CD = DB$, etc. montrent que la somme des segments « intérieurs » à l'angle est, à la limite, égale au périmètre du triangle OAB.
La longueur $AO$ est la somme des termes d'une suite géométrique de premier terme $AC$ et de raison $\dfrac{1}{4\cos^2\alpha}$.

La somme des termes de cette suite est : $1 = AO = AC\dfrac{1}{1 - \dfrac{1}{4\cos^2\alpha}} = AC\dfrac{4\cos^2\alpha}{4\cos^2\alpha - 1}$.

On a donc $AC = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$.
De même, $AB + BO$ est la somme des termes d'une suite géométrique de premier terme $AB$ et de raison $\dfrac{1}{4\cos^2\alpha}$

On a donc $AB + BO = AB\dfrac{4\cos^2\alpha}{4\cos^2\alpha - 1} = 2AC\cos\alpha\dfrac{1}{AC} = 2\cos\alpha$

Le périmètre du triangle AOB est donc $\ell = 1 + 2\cos\alpha$.

Ce périmètre est $1 + \sqrt{2}$ lorsque $\alpha = \theta = 45$, c'est-à-dire lorsque le triangle ABO est rectangle et isocèle en B.

Retour au sommaire

# VERSAILLES

## Troisième exercice académique

Séries autres que S

***Loto***

### Énoncé

On dispose de 101 jetons numérotés de 1 à 101. On les répartit en deux tas A et B.

Le jeton numéro 40 se trouve dans le tas A. On le prend et on le met dans le tas B. De ce fait, la moyenne des numéros des jetons du tas A augmente de 0.25 et la moyenne des jetons du tas B augmente elle aussi de 0,25.

Combien y avait-il de jetons dans le tas A ?

### Éléments de solution

Au départ, il y a $N$ jetons dans le tas A et $101 - N$ dans le tas B. La somme des jetons contenus dans le tas A est $S$, la somme des jetons contenus dans le tas B est $\dfrac{101 \times 102}{2} - S$ soit $5\ 151 - S$.

Une fois le jeton 40 transféré, il y a $N - 1$ jetons dans le tas A et la somme de leurs numéros est $S - 40$. La différence entre les deux moyennes est donc $\dfrac{S - 40}{N - 1} - \dfrac{S}{N} = 0,25$

Il y a $102 - N$ jetons dans le tas B et la somme de leurs numéros est $5\ 191 - S$. La différence entre les deux moyennes est donc $\dfrac{5\ 191 - S}{102 - N} - \dfrac{5\ 151 - S}{101 - N} = 0,25$.

La première égalité fournit : $S = 0,25N^2 + 39,75N$.

Et la seconde : $S = 0,25N^2 - 10,75N + 1464,5$.

Ce qui se simplifie pour donner : $50,5N - 1$ 464,5 soit $N = 29$.

On vérifie que ce résultat correspond à la somme 1 363. Une répartition possible consiste à mettre dans le tas A les jetons 14, 15, 16, 18 et tous les jetons dont les numéros sont compris, au sens large, entre 40 et 64 (il y en a bien d'autres, encore fallait-il s'assurer de l'existence d'une).

Retour au sommaire

# VERSAILLES

## Quatrième exercice académique

Séries autres que S

***Somme et produit se ressemblent***

### Énoncé

Au tableau sont écrits 16 nombres entiers positifs consécutifs. On note respectivement $S$ et $P$ la somme et le produit de ces 16 nombres.

1. a. Justifier que $P$ est un multiple de 16.
   b. Justifier que $P$ est un multiple de 125.
   c. Quels sont les trois derniers chiffres de $P$ ?
2. a. Exprimer $S$ en fonction du plus petit $n$ des 16 nombres écrits.
   b. Donner un exemple de série de 16 nombres entiers consécutifs dont les trois derniers chiffres de la somme sont les mêmes que les trois derniers chiffres du produit.
3. Prouver que, quels que soient les 16 entiers consécutifs écrits, il est impossible que les quatre derniers chiffres de leur somme soient égaux aux quatre derniers chiffres de leur produit.

### Éléments de solution

1. a. Dans une suite de 16 entiers consécutifs, il y en a 8 pairs. Leur produit est donc un multiple de 256 et a fortiori de 16.
   b. Dans une suite de 16 entiers consécutifs, trois au moins sont multiples de 5 (4 si la suite commence – et finit– par un multiple de 5). Leur produit est donc un multiple de 125.
   c. Le produit $P$ est donc un multiple de $8 \times 125$, c'est-à-dire 1000. $P$ se termine par trois zéros.
2. a. En appelant $n$ le premier des nombres :
   $S = n + (n+1) + \cdots + (n+14) + (n+15)$
   $S = 16n + 120$.
   b. On voudrait que $16n + 120$ soit un multiple de 1000. Le premier possible est 1000 lui-même, ce qui donne $n = 55$.
3. Posons $S = 1000S'$ et $P = 1000P'$. Dire que $S$ et $P$ on les quatre derniers chiffres identiques c'est dire que $S'$ et $P'$ on le même chiffre des unités. Celui de $P'$ est pair car $P$ est divisible par 16. Si celui de $S'$ était pair, cela signifierait que $S'$ est divisible par 16, ce qui n'est pas (car 120 ne l'est pas).

Retour au sommaire