

Des nombres figurés à la résolution de problèmes : quelques règles d'utilisation du matériel en mathématiques

Marlène ESTEVE
IA-IPR de mathématiques
Académie de Grenoble
Marlene.Esteve@ac-grenoble.fr

Sylvain ETIENNE
Professeur de Mathématiques
Collège Sidney BECHET Antibes (Alpes-Maritimes)
Référent Mathématiques Académique
Sylvain-Julien.Etienne@ac-nice.fr

1. Préambule

Les travaux présentés dans cet essai sont le fruit de cinq années de réflexion sur la résolution de problèmes, notamment arithmétique et plus généralement algébrique. Cette version 1.0, publiée au mois de mai 2023, résulte de travaux initiés lors de la parution du rapport Villani-Torossian (2018), de versions intermédiaires en juin et octobre 2021, et des différentes expérimentations que nous avons pu mettre en place.

Cette réflexion continue à évoluer au cours des formations que nous animons, des observations et des retours d'expérience du terrain.

C'est pourquoi nous saisisons toutes les opportunités pour améliorer cette version et nous vous serions extrêmement reconnaissant de nous communiquer toute forme de retours, par exemple des comptes-rendus d'une activité, des demandes de précisions sur une partie, des photos, des captations etc.

Cette version 1.0 est en licence Creative Commons **CC-BY-NC-SA**¹ permettant de copier, partager, de montrer, et de modifier dans les mêmes conditions, gratuitement, avec l'interdiction de tout usage commercial. Cette version, accompagnée de fichiers dédiés, sera mise à disposition pour une durée illimitée.

Ultérieurement, nous proposerons une version augmentée qui pourra être publiée.

Nous avons choisi de diffuser cet essai par le biais de l'APMEP, car elle est, par essence, un lieu d'échanges, de contributions collaboratives et de partages.

¹ <https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/deed.fr>



2. Résumé

Depuis plusieurs années, nous travaillons sur la résolution de problèmes et sur le triptyque « Manipuler, Verbaliser, Abstraire ». Les différentes expérimentations que nous avons menées nous ont conduits à engager une réflexion sur l'utilisation d'un matériel pertinent permettant de faciliter l'accès à des représentations mentales pour la construction des concepts mathématiques tels que les nombres, les analogies et le sens des opérations. Les choix que nous avons opérés ont été dans l'idée de penser un continuum didactique du cycle 1 au lycée en termes de contenus et de matériel. En effet, les cubes emboîtables ou les réglettes Cuisenaire pourront être utilisés tout au long de la scolarité d'un élève avec des intentions ou des concepts relatifs à leur niveau d'étude. Notre intention était de développer l'autonomie des élèves en résolution de problèmes, mais aussi de leur fournir des moyens de mobiliser des connaissances mathématiques sur la durée.

Dans cet essai, nous vous présentons l'état de nos recherches que nous enrichirons au fur et à mesure de la poursuite de nos réflexions.

Mots-clés : nombre figuré ; nombre rectangle ; résolution de problèmes arithmétiques ; résolution de problèmes algébriques ; nombres relatifs ; matériel de manipulation ; triptyque « manipuler, verbaliser, abstraire » ; représenter ; modéliser ; calculer

3. Remerciements

Nous tenions à remercier Barbara Strba, CPC et RMC, et Sophie Roubin, professeure de mathématiques et chargée de mission auprès de l'IFé - ENS Lyon, pour leur relecture et les échanges qui en ont découlé.

Table des matières

1.	Préambule	2
2.	Résumé.....	3
3.	Remerciements	4
4.	Dans les documents officiels	7
5.	Genèse.....	9
5.1.	Du point de vue des neurosciences : triple code de Dehaene.....	9
5.2.	Importance du code analogique	9
5.3.	Hypothèses	11
5.4.	Exemples.....	11
6.	Matériel de manipulation	13
7.	Nombre figuré ou géométrique.....	16
7.1.	Définition	16
7.2.	Nombre rectangle	17
7.2.1.	Nombre carré.....	18
7.2.2.	Nombre premier et nombre composé.....	19
7.2.3.	Une autre représentation : vers le modèle en barres	19
8.	Applications.....	21
8.1.	Propriétés : commutativité, associativité des lois d'addition et de multiplication, distributivité de la multiplication par rapport à l'addition.....	21
8.2.	Extension aux nombres rationnels	23
8.3.	Produit de deux nombres décimaux plus grands que 10 et non nécessairement entiers 24	
8.4.	Nombres pairs et impairs.....	27
8.5.	Table de multiplication	28
8.6.	Pattern	29
8.7.	Résolution de problèmes arithmétiques : modèle en barres	31
8.7.1.	Représenter, modéliser	32
8.7.2.	Règles de construction du modèle en barres.....	36
8.7.3.	Progressivité	39
8.7.4.	Exemples d'application	42
8.7.5.	Limites du modèle en barres	56
8.8.	Nombres relatifs	57

8.8.1.	Somme.....	57
8.8.2.	Notion d'opposé.....	59
8.8.3.	Différence.....	61
8.8.4.	Produit.....	65
8.8.5.	Notion d'inverse.....	69
8.8.6.	Quotient.....	70
8.9.	Résolution de problèmes algébriques : tuiles algébriques.....	72
8.9.1.	Recherche et constats.....	72
8.9.2.	Une proposition avec le triptyque : les tuiles algébriques.....	72
8.9.3.	Fichiers à télécharger.....	73
8.9.4.	Règles du matériel tuiles algébriques.....	74
8.9.5.	Applications.....	78
8.9.6.	Limites et prolongements.....	108
9.	Conclusion.....	110
10.	Bibliographie.....	111
11.	Sitographie.....	112

4. Dans les documents officiels

Le rapport Villani-Torossian (Villani-Torossian, 2018) a permis de réaliser un état des lieux de l'enseignement des mathématiques mais aussi de donner des pistes d'enseignement tels que le triptyque « Manipuler, Verbaliser, Abstraire » présent du cycle 1 au cycle 4. Il met aussi en évidence le besoin de changer de paradigme en résolution de problèmes : « apprendre à résoudre des problèmes », tout en poursuivant l'objectif de résoudre des problèmes.

Les bulletins officiels du premier et du second degré accordent une place importante à la résolution de problèmes et aux compétences principales de l'activité mathématique.

En effet, dans le BO des programmes du cycle 3, il apparaît clairement que les compétences principales de l'activité mathématique sont à intégrer par les enseignants notamment en résolution de problèmes :

« Dans la continuité des cycles précédents, le cycle 3 assure la poursuite du développement des six compétences majeures des mathématiques : chercher, modéliser, représenter, calculer, raisonner et communiquer. La résolution de problèmes constitue le critère principal de la maîtrise des connaissances dans tous les domaines des mathématiques, mais elle est également le moyen d'en assurer une appropriation qui en garantit le sens. » (MEN, 2020²)

Dans les compétences à travailler, la résolution de problèmes est mentionnée pour les compétences « Modéliser, Représenter et Calculer » :

« Modéliser :

- utiliser les mathématiques pour résoudre quelques problèmes issus de situations de la vie quotidienne ;
- reconnaître et distinguer des problèmes relevant de situations additives, multiplicatives, de proportionnalité.

Représenter :

- utiliser des outils pour représenter un problème : dessins, schémas, diagrammes, graphiques, écritures avec parenthésages, etc.

Raisonner :

- résoudre des problèmes nécessitant l'organisation de données multiples ou la construction d'une démarche qui combine des étapes de raisonnement. »

La compétence « modéliser » occupe une place particulière :

² https://cache.media.eduscol.education.fr/file/A-Scolarite_obligatoire/37/5/Programme2020_cycle_3_comparatif_1313375.pdf, page 90

« Si la modélisation algébrique relève avant tout du cycle 4 et du lycée, la résolution de problèmes permet déjà de montrer comment des notions mathématiques peuvent être des outils pertinents pour résoudre certaines situations. »

« L'objectif n'est pas d'établir un catalogue détaillé de typologies de problèmes pouvant exister, dont l'usage serait inopérant pour les élèves, mais au contraire de réunir les problèmes dans des catégories aussi larges que possible en faisant des analogies, par exemple, entre les problèmes pouvant s'appuyer sur les mêmes représentations ». (MEN, 2018³)

Ces compétences sont mentionnées dans le guide CP, avec un focus sur la modélisation en particulier, la modélisation en barres pour la résolution de problèmes arithmétiques, qui est mise en avant pour faciliter notamment le passage à l'abstraction. (MEN, 2020⁴)

³ <https://www.education.gouv.fr/bo/18/Special3/MENE1809043N.htm>

⁴ <https://eduscol.education.fr/document/3738/download>



5. Genèse

5.1. Du point de vue des neurosciences : triple code de Dehaene

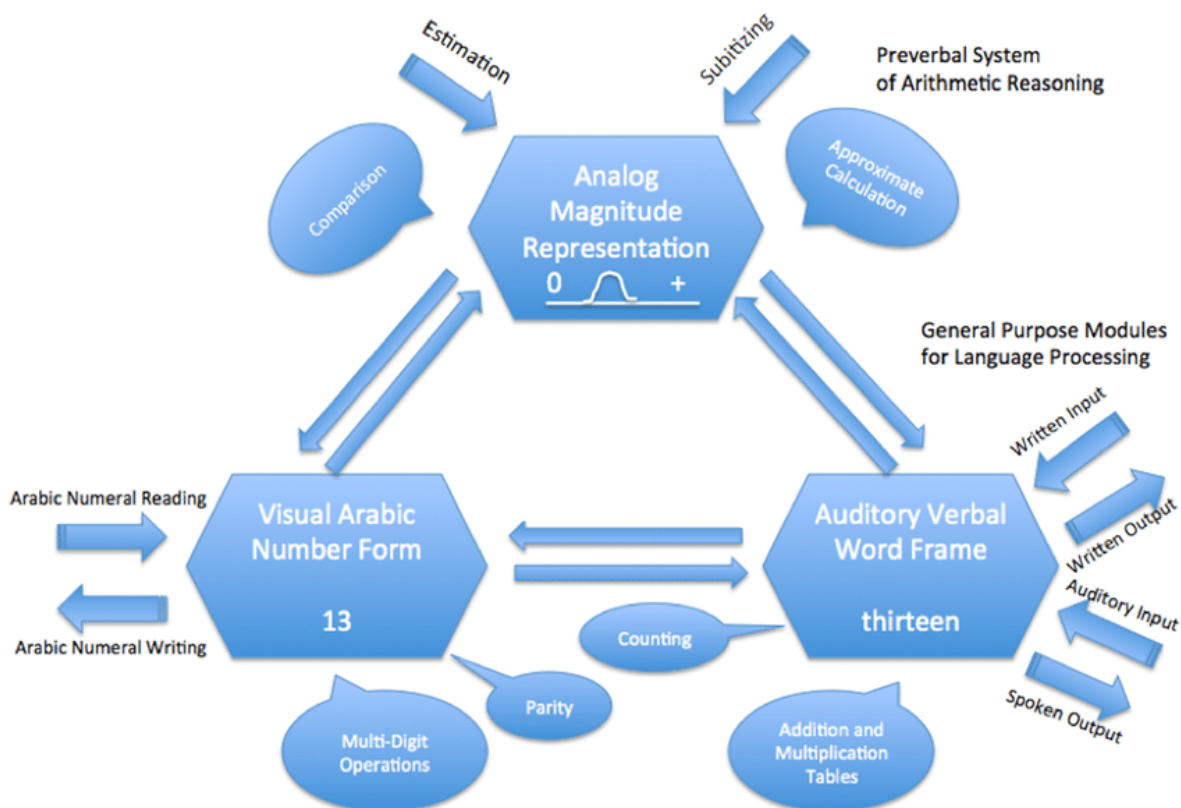


Figure 1 : Triple code de Dehaene (1992 ; p. 31)⁵

Pour la construction des nombres, il y a trois codes : le code analogique (magnitude⁶), le code verbal écrit ou oral (mot-nombre⁷) et le code indo-arabe (écriture chiffrée).

Ces trois codes constituent une base de travail pour comprendre le sens du nombre au cycle 1.

5.2. Importance du code analogique

Au cycle 1, la construction cardinale du nombre s'opère à partir de collections d'objets que l'on compare, segmente, partage de façon équitable ou non. Les représentations de ces nombres convoquant le code analogique sont nombreuses, même si elles requièrent un passage à l'abstraction (passage de la manipulation en dimension 3 à la représentation en dimension 2 : constellation, doigts, gommettes, etc).

⁵ Image d'après https://www.researchgate.net/figure/Dehaenes-Triple-Code-Model-Numbers-are-stored-in-three-individual-yet-integrated_fig2_288830463

⁶ Quantité à laquelle il réfère

⁷ Par exemple trente-et-un

Cette diversité des représentations s'amenuise au cours de la scolarité, laissant place à l'écriture chiffrée, qui est déjà très utilisée au cycle 1. Le mot-nombre est certes très présent en maternelle, il pourrait être cependant plus exploité, notamment pour la décomposition des nombres.

La théorie des représentations de Duval (Duval, 1993) montre une réflexion portant sur le traitement de l'information (changement de registre par exemple). Dans sa théorie des registres de représentations sémiotiques, Duval insiste sur trois compétences : savoir représenter un même objet dans plusieurs registres, savoir le traiter dans chaque registre (traitement intra-registre), savoir convertir la représentation d'un registre à l'autre (traitement inter-registres).

Pour la construction des nombres, plusieurs registres sont disponibles : le registre de la langue orale quotidienne, le registre de la langue orale ou écrite avec le vocabulaire spécifique, le registre de la représentation et le registre de la langue écrite avec l'écriture chiffrée si nous adaptons ce traitement au triple code.

Le nombre « vingt » dans une classe unique cycle 1 :

Pour changer le pneu, il faut démonter tous les boulons. Combien faut-il en enlever pour changer les quatre roues ?



Figure 2. Image d'après <https://pixabay.com/fr/photos/bmw-voiture-v%C3%A9hicule-auto-1399419/>



Figure 3. Élèves de cycle 1 en activité.

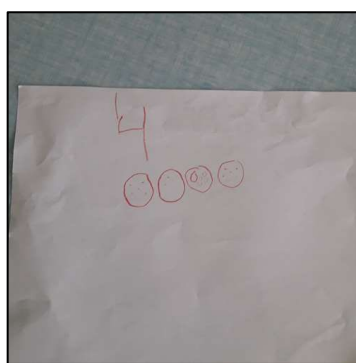


Figure 4. Représentation du problème.



Figure 5. Représentation du problème.

Pour démonter une roue, il faut dévisser **5** boulons.

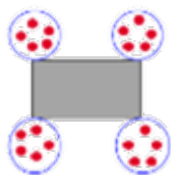


Figure 6. Représentation du problème.

Pour changer **4** roues, il faut dévisser **20** boulons.

Remarque :

Dans cet exemple, le mot-nombre a été largement utilisé lors de l'activité. Il n'y a pas le code verbal écrit.

Les élèves construisent le nombre 20 à partir d'une décomposition multiplicative de nombres connus en maternelle « quatre » et « cinq ».

$20 = 4$ paquets de 5	
-------------------------	--

Cette construction des nombres, passant par les trois codes, facilitent le travail sur les ordres de grandeurs. Par exemple, si je fais trois paquets de cinq, c'est plus petit que quatre paquets de cinq.

5.3. Hypothèses

H_1 : Construire le nombre à partir des grandeurs puis de leurs mesures permet de rendre le nombre concret, de l'évaluer (ordre de grandeur), d'estimer et d'opérer une transition vers le nombre abstrait (Mercier & Quilio, 2018).

H_2 : Représenter un nombre par une figure géométrique permet d'utiliser les théorèmes de géométrie et notamment les transformations.

Point de vigilance pour les mesures de grandeurs :

L'utilisation courante « 1 m 20 cm » peut induire la vision du nombre décimal 1,20 comme une séparation de deux nombres entiers (1 et 20). Cela peut constituer un biais.

5.4. Exemples

La grandeur longueur permet de donner à voir une décomposition additive d'un nombre en alignant bout à bout des segments.

Par exemple ici, la décomposition du nombre 10 avec deux segments, un plus petit que l'autre (ordre de grandeur) : $10 = 8 + 2$ (recherche ACE⁸).

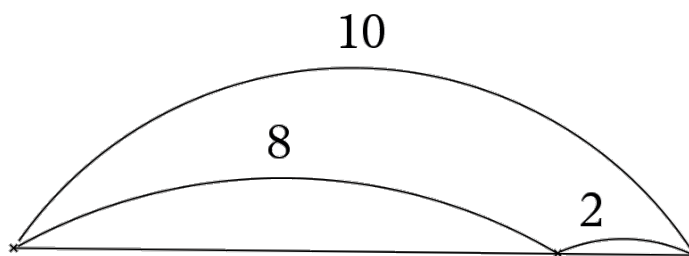


Figure 7. Représentation de décomposition de 10 selon la recherche ACE

La grandeur « aire », associée à une surface, permet de donner à voir une décomposition multiplicative d'un nombre. En effet, on peut représenter un produit (décomposition multiplicative d'un nombre) par l'aire d'un rectangle.

Pour parvenir à cette représentation, on peut d'abord aborder la décomposition des nombres entiers en réarrangeant des jetons pour former un rectangle plein⁹.

⁸ <http://blog.espe-bretagne.fr/ace/>

⁹ Plein : une forme rectangulaire composée de jetons qui ont le plus de points de contacts possibles.

Par exemple, $10 = 2 \times 5$.



Figure 8. Image de jetons mis sous forme de rectangle.

Les propriétés de \mathbb{R} nous permettent ensuite d'étendre à tous les nombres, en commençant par les nombres rationnels et les nombres décimaux non entiers.

6. Matériel de manipulation

Nous nous appuyons ici sur le triptyque en mathématiques « Manipuler, Verbaliser, Abstraire ». Il s'agit d'un système en interaction des trois éléments les uns par rapport aux autres sans ordre prédéfini. En effet, un concept peut être d'abord abstrait avant d'être approprié par les sens ou une utilisation verbale adéquate. C'est souvent le cas dans la vie courante. Un concept ou un mot ne devient concret seulement quand nous en percevons le sens.

Pour ce faire, nous proposons d'introduire différents matériels de manipulation, adaptés à la construction des nombres à partir des grandeurs.

Jetons :

Ce sont des pièces de formes et de couleurs variées permettant de compter.

Il existe, comme ci-contre, des jetons bicolores : une face bleue et l'autre rouge.



Figure 9. Photo de jetons bicolores.

Cubes emboîtables :

Il s'agit de cubes colorés de 2 cm de longueur d'arête¹⁰ qui peuvent s'assembler suivant plusieurs côtés.

Ces cubes peuvent servir pour compter, représenter des figures en 3 dimensions, et par détournage en 2 dimensions aussi.

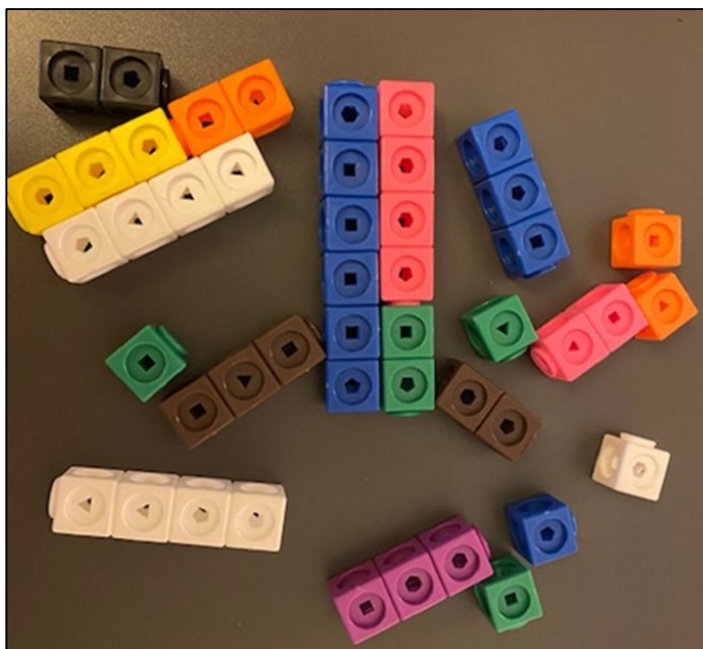


Figure 10. Photo de cubes emboîtables.

¹⁰ On en trouve ayant 1 cm de longueur d'arête, ils sont cependant peu faciles à manipuler. D'autres matériels peuvent être inadaptés à l'emboîtement à un âge donné, il faut tester le matériel pour que cet aspect ne soit pas un frein.

Réglottes Cuisenaire¹¹ :

Il s'agit d'un ensemble de réglottes colorées sous forme de pavé droit dont une face a pour dimension $1\text{ cm} \times 1\text{ cm}$, et la troisième longueur varie de 1 cm à 10 cm tous les 1 cm .

Les couleurs sont différentes avec cependant des ensembles (les doubles par exemples)

Les réglottes permettent notamment de travailler le calcul à partir de décompositions.



Figure 11. Photos de réglottes Cuisenaire.

Matériel de base 10 :

C'est un ensemble de « petits » cubes (1 cm de longueur d'arête), de barres, de plaques et de « grands » cubes.

Il faut 10 petits cubes pour faire une barre, 10 barres pour faire une plaque, 10 plaques pour faire un grand cube.

Ce matériel permet de travailler la base décimale, notamment en représentant des nombres, pour faire des ajouts ou des retraits. Par convention, on choisit que le petit cube vaut 1. Nous pouvons cependant faire évoluer le matériel et ensuite choisir une autre unité. Par exemple, si la plaque vaut 1, alors la barre vaut 1 dixième, et le petit cube vaut 1 centième.

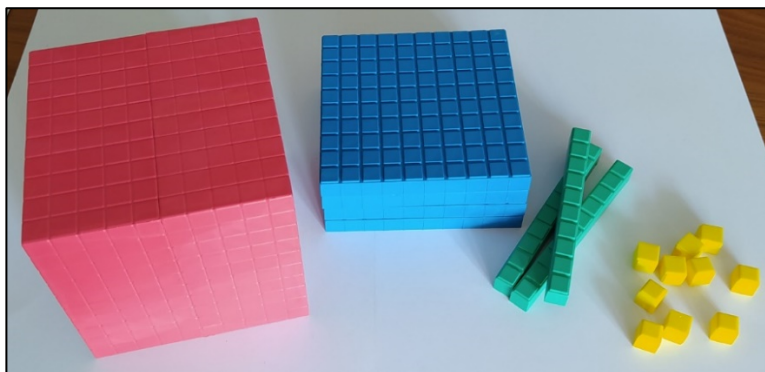


Figure 12. Photo de matériel de base 10.

Il existe d'autres matériels pouvant être utilisés comme les feuilles de papier, les abaques, les bouliers (de diverses origines), les cartes de nombres, les dés (de 4 à 20 faces), les balances arithmétiques, des objets permettant de travailler les grandeurs et les mesures (par exemple la corde à 13 nœuds), les géoplans, les formes géométriques en 3D avec leurs patrons, les blocs logiques/géométriques, les miroirs, etc.

¹¹ https://fr.wikipedia.org/wiki/R%C3%A9glottes_Cuisenaire

L'importance de la manipulation pour l'apprentissage des mathématiques est relevée par la recherche (Moyer & al. 2002, Zilkova & al. 2019) tout en montrant ses limites (Carbonneau & al. 2013).

Il existe également d'autres points de vigilance tels que l'enfermement dans le matériel et le conflit entre les représentations mentales déjà présentes et le matériel utilisé.

Bien qu'insuffisante pour représenter tous les nombres réels, l'utilisation de matériel tangible et/ou de représentations concrètes des concepts mathématiques crée des représentations mentales et des automatismes qui restent cohérents lorsqu'on les étend à l'ensemble des nombres réels.

Voici quelques web-applications utilisables parallèlement et/ou en complément :

- Réglettes Cuisenaire : <https://support.mathies.ca/fr/mainSpace/ReglettesPlus.php> (logiciel à installer)
- Appliquettes en ligne, dont mur de fractions : <https://www.visnos.com/demos>
- Appliquettes en ligne, dont nombres rectangles : <https://phet.colorado.edu/fr/simulations/filter?subjects=math&sort=alpha&view=grid>
- Polygones, tuiles, barres, fractions, etc. : <https://fr.mathigon.org/polypad> (attention, ne semble pas RGPD)
- Géoplan : <https://apps.mathlearningcenter.org/geoboard/>
- Appliquettes en ligne, dont arbres : <http://www.dudamath.com/action.html>
- Appliquettes en ligne : <https://micetf.fr/>

7. Nombre figuré ou géométrique

7.1. Définition

Définition 1 : nombre figuré

Un nombre figuré, historiquement, est un nombre qui peut être représenté par un ensemble de points disposés de façon plus ou moins régulière formant une figure géométrique.

Les nombres figurés sont d'origine très ancienne. Les pythagoriciens (585-400 avant J.-C.) assimilaient les nombres à des points. Cette conception du nombre permit l'éclosion de la théorie des nombres figurés, l'arithmogéométrie, et fut un objet d'études jusqu'au 17^e siècle. Pascal (1623-1662) a même écrit un traité sur le sujet.¹²

Nous appellerons nombre figuré ou géométrique, un nombre pouvant être représenté par des points ou un polygone convexe.

Exemple 1 : 5 en nombre figuré

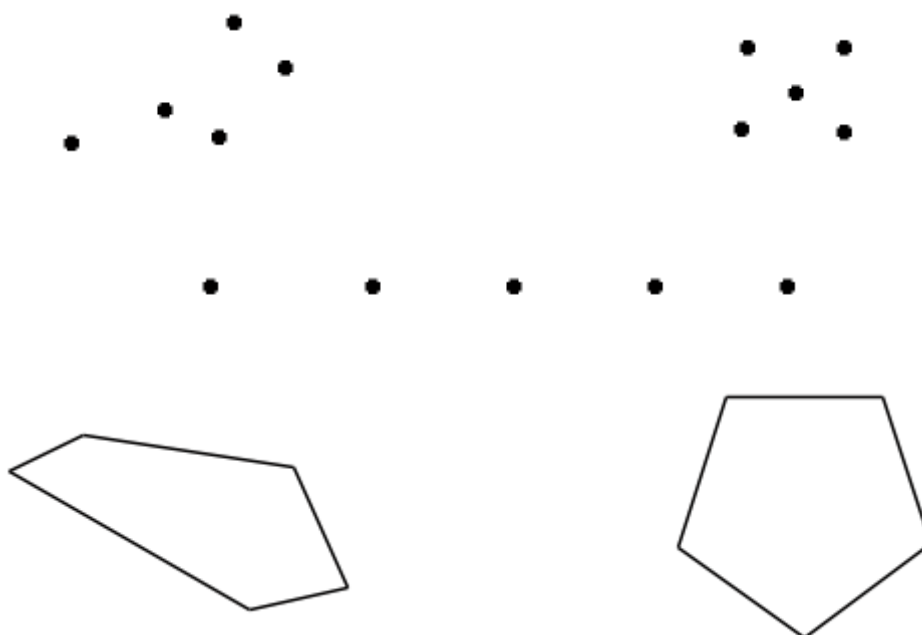


Figure 13. Différentes représentations figurées du nombre 5

Certains de ces exemples sont organisés, d'autres non. Quand les nombres deviennent plus grands, l'organisation devient nécessaire pour compter rapidement.


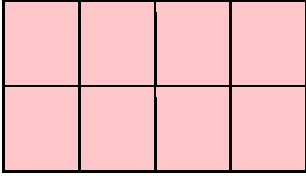
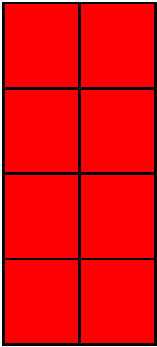
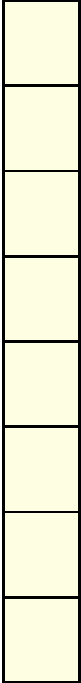
¹² D'après http://www.recreomath.qc.ca/dict_figure_nombre.htm

7.2. Nombre rectangle

Définition 2 :

Un nombre rectangle est un nombre figuré représenté par un rectangle.

Exemple : représentations de 8 en nombre rectangle

1×8	
2×4	
4×2	
8×1	

Remarque :

On dira que les représentations $m \times n$ et $n \times m$ sont transposées l'une de l'autre.

Propriété :

Par exemple, en utilisant 4×2 , on peut dire que 4 rangées de 2, c'est pareil que 2 colonnes de 4.

Remarques :

- Le concept de nombre rectangle sera par la suite privilégié car il s'agit d'une organisation efficace. En effet, il permet de rendre accessible la commutativité de la multiplication et, dans la version où les unités ne figurent pas, permettent de définir la multiplication autrement que par une addition répétée. Une façon de percevoir la commutativité est de représenter un nombre par un rectangle et de constater, que dans l'espace, la notion de verticalité ou d'horizontalité n'a pas de sens : il suffit pour cela de tourner autour de la représentation.
- Il existe une autre définition des nombres rectangles dans la littérature dans laquelle seules les décompositions autre qu'avec le facteur 1 sont ainsi nommées. Les décompositions avec 1 en facteur sont appelées « nombre ligne ».
- Les nombres utilisés dans un premier temps seront des entiers naturels. Il est cependant assez intuitif de partager un rectangle en différents rectangles d'aires égales et introduire ainsi les nombres rationnels (dont les nombres décimaux sont un cas particulier).
- Étendre aux nombres relatifs nécessite d'entrer dans le concept des mesures algébriques de longueur et d'aire et fera l'objet d'une attention plus particulière. L'aire algébrique est une notion qui est présente notamment en classe de terminale avec la notion d'intégrale.
- On pourra utiliser les web applications de Phet : https://phet.colorado.edu/sims/html/area-builder/latest/area-builder_fr.html et https://phet.colorado.edu/sims/html/area-model-introduction/latest/area-model-introduction_fr.html.

7.2.1. Nombre carré**Définition 3 : nombre carré**

Un nombre carré est un nombre rectangle dont ses dimensions sont égales. Il admet une représentation qui est un carré.

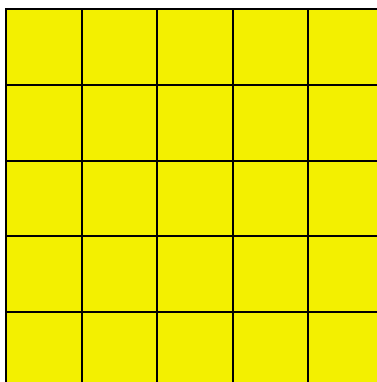
Exemple : décomposition de 25

Figure 14. $25 = 5 \times 5$.

Ses autres décompositions (1×25 et 25×1) sont en forme de rectangle non carré. Il s'agit cependant d'un nombre carré.

Propriété :

- Un nombre carré admet un nombre impair de diviseurs.
- Un nombre rectangle non carré en admet un nombre pair.

7.2.2. Nombre premier et nombre composé

L'introduction des nombres rectangles permet de proposer une nouvelle définition de nombre premier : un nombre premier n est un nombre rectangle qui a exactement deux configurations (l'une étant la transposée de l'autre).

Nous pourrions par la suite n'en considérer qu'une seule, du fait de la commutativité (voir [7.1.](#)).

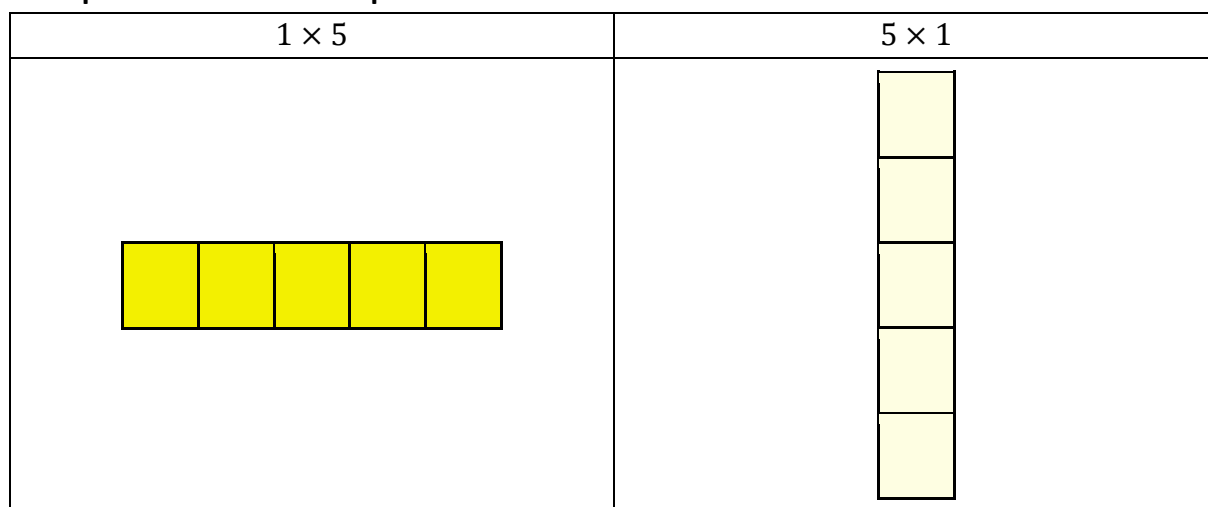
Exemple : 5 est un nombre premier

Figure 15. Décompositions de 5.

7.2.3. Une autre représentation : vers le modèle en barres

Dès que le nombre de cases devient grand ou est non entier, il sera difficile de lire rapidement la longueur et la largeur du rectangle. On peut alors dessiner le rectangle, puis mettre les nombres à côté, au-dessus, etc.

D'autres décompositions apparaissent.

Par exemple avec 8, en utilisant les réglettes Cuisenaire (voir exemple précédent) :



Figure 16. « Mur » du 8.

Cette représentation (appelée parfois « mur ») permet de voir les décompositions additives et multiplicatives du nombre 8 : $4 + 4$, 8×1 , etc. On peut aussi mixer les lignes : $8 = 4 + 2 + 2$ par exemple.

L'application web *Fraction wall* de Visnos (<https://www.visnos.com/demos/fraction-wall>) propose de tels murs et de jouer avec les égalités possibles. Cela permet de revenir sur la notion de brique unité qui peut être 1 dans un premier temps puis n'importe quel nombre dans un deuxième, ce qui sera utile dans la résolution de problèmes ou encore pour comprendre le concept de variables en programmation.

Cette présentation permet d'aller vers des nombres plus grands ou des fractions, notamment avec le nombre 100, c'est-à-dire comprendre les relations qui existent dans les pourcentages :

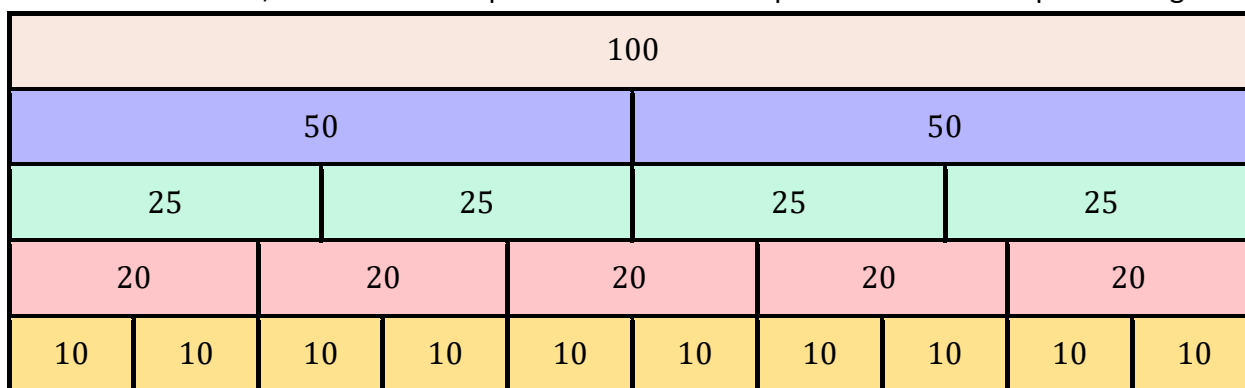


Figure 17. Mur du 100.

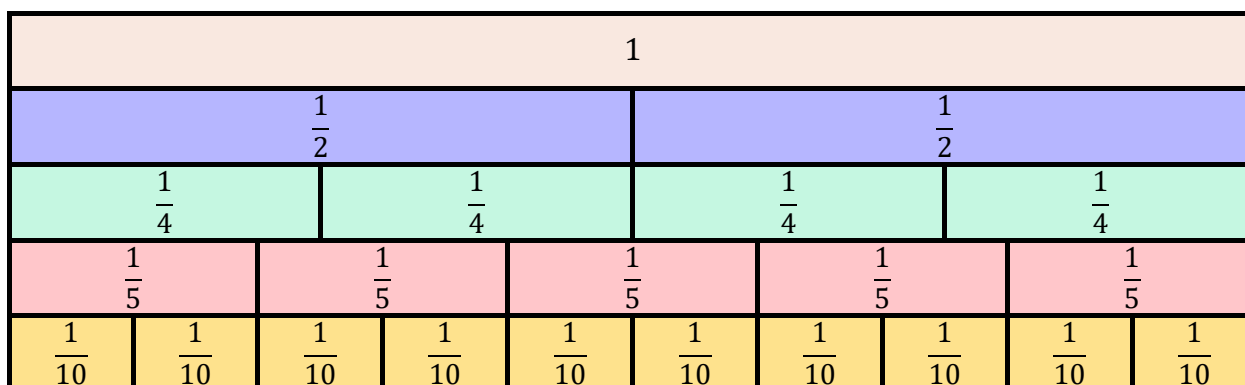


Figure 18. Mur du 1 avec des fractions.

8. Applications

8.1. Propriétés : commutativité, associativité des lois d'addition et de multiplication, distributivité de la multiplication par rapport à l'addition

Pour la commutativité

Exemple : $3 \times 4 = 4 \times 3$

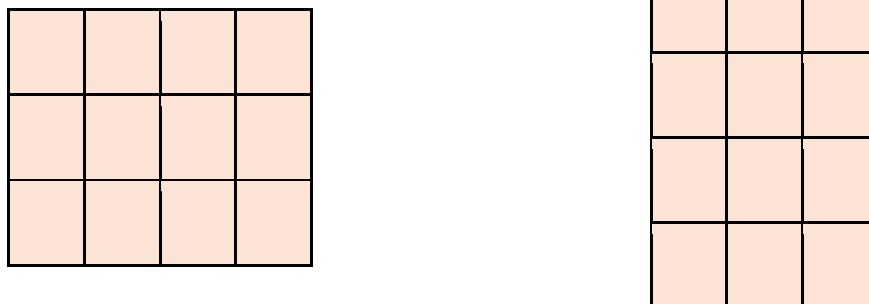


Figure 19. Représentations de la commutativité du produit de 3 par 4.

Le nombre total ne change pas si l'on a 3 rangées de 4 cases, et 4 rangées de 3 cases.

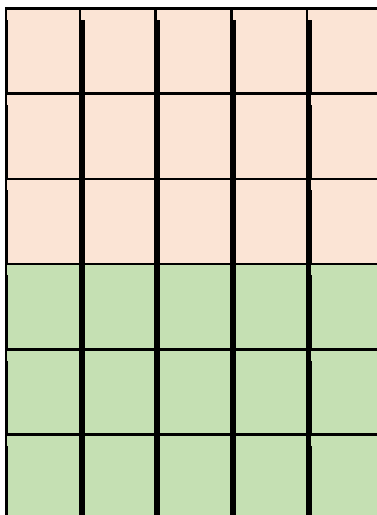
Lorsqu'on opère une rotation d'angle 90° sur la figure 1, nous obtenons la figure 2. Cela permet d'illustrer la propriété de la commutativité : le nombre de cases reste inchangé lorsqu'on fait 3 rangées de 4 cases ou 4 rangées de 3 cases.

Le matériel ne permet de travailler que le cas des nombres entiers naturels. Le passage du discret au continu en considérant l'aire d'un rectangle, puis son aire algébrique permet d'étendre la propriété à tous les autres nombres.

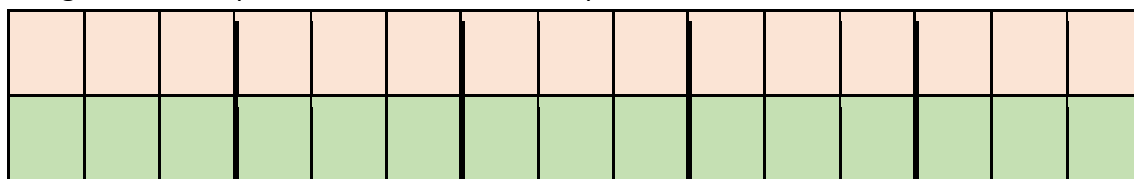
Pour l'associativité de la multiplication

Exemple : $2 \times (3 \times 5) = (2 \times 3) \times 5$

On commence par construire $2 \times (3 \times 5)$ qui est le double d'un rectangle de 3 par 5 :

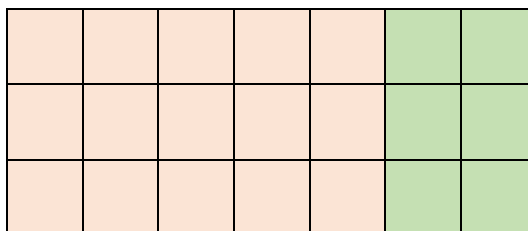


Le passage s'effectue par rotation de 90° de chaque bloc de 3 :

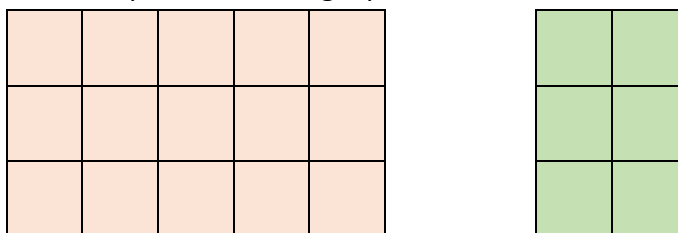


Pour la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition :

Exemple : $3 \times (5 + 2) = (3 \times 5) + (3 \times 2)$



Il suffit ici de découper et de séparer le rectangle précédent en deux rectangles :

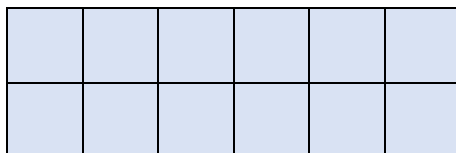


8.2. Extension aux nombres rationnels

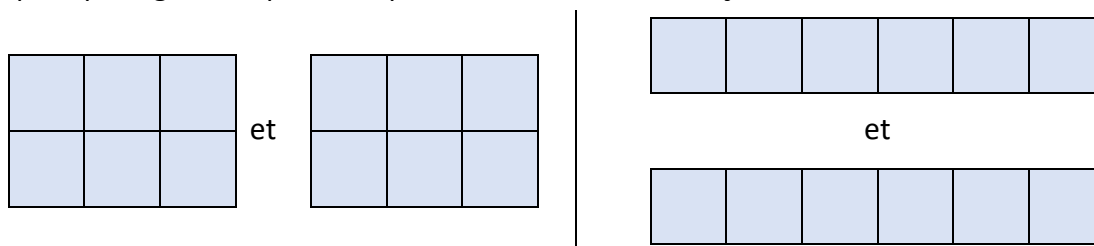
Nous avons choisi le mot rationnel dans ce titre, toutefois cette extension se fait en deux temps. Un élève est d'abord confronté à tous les types de fractions (rapport, opérateur et intuition du nombre) avant de construire la représentation des nombres rationnels sur la droite numérique.

Une proposition est de commencer par utiliser les propriétés précédentes avec la moitié d'un nombre, par exemple la moitié du nombre 12.

La moitié de 12, c'est prendre une configuration rectangulaire de 12 jetons et la partager en deux parties équitables rectangulaires :



On peut partager en 2 parties équitables de différentes façons :



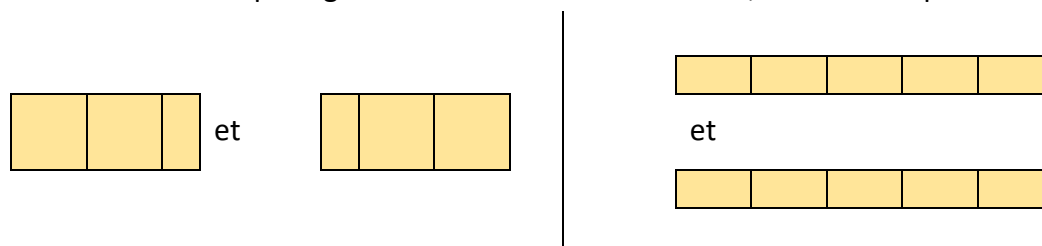
Ces deux sous-figures proviennent de l'égalité $12 = 2 \times 6$ et 6 est ainsi la moitié de 12.

Remarque :

Le partage peut se faire équitablement sans que les parties soient des rectangles. C'est bien sûr à montrer, il faudra cependant tendre vers ce modèle pour généraliser.

Si on souhaite faire de même avec 5, un problème se pose, aucun découpage « suivant les lignes » ne permet pas de répondre positivement au partage équitable avec des nombres entiers.

Il faut nécessairement partager au moins un carreau en deux, comme suit par exemple :



Dans le premier cas, on obtient 2 briques unités et 1 demi brique unité, tandis que dans l'autre, on obtient 5 demi-briques unités. Ainsi, $2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$.

On peut ainsi partager les carreaux, et construire de nouveaux nombres : les fractions. Les représentations mentales issues de ces découpages participent à la construction de la notion de ces fractions et, dans un deuxième temps, aux nombres rationnels. Il est à noter que plusieurs représentations donnent des nombres fractions égaux ($\frac{12}{6}$ et $\frac{4}{2}$ par exemple).

8.3. Produit de deux nombres décimaux plus grands que 10 et non nécessairement entiers

On peut commencer par multiplier deux nombres entiers entre 10 et 20 pour appréhender la notion.

L'application web de Phet (https://phet.colorado.edu/sims/html/area-model-multiplication/latest/area-model-multiplication_fr.html) peut aider à la construction.

Exemple : 13×18

La représentation en rectangle de ce produit sur l'application web est la suivante :

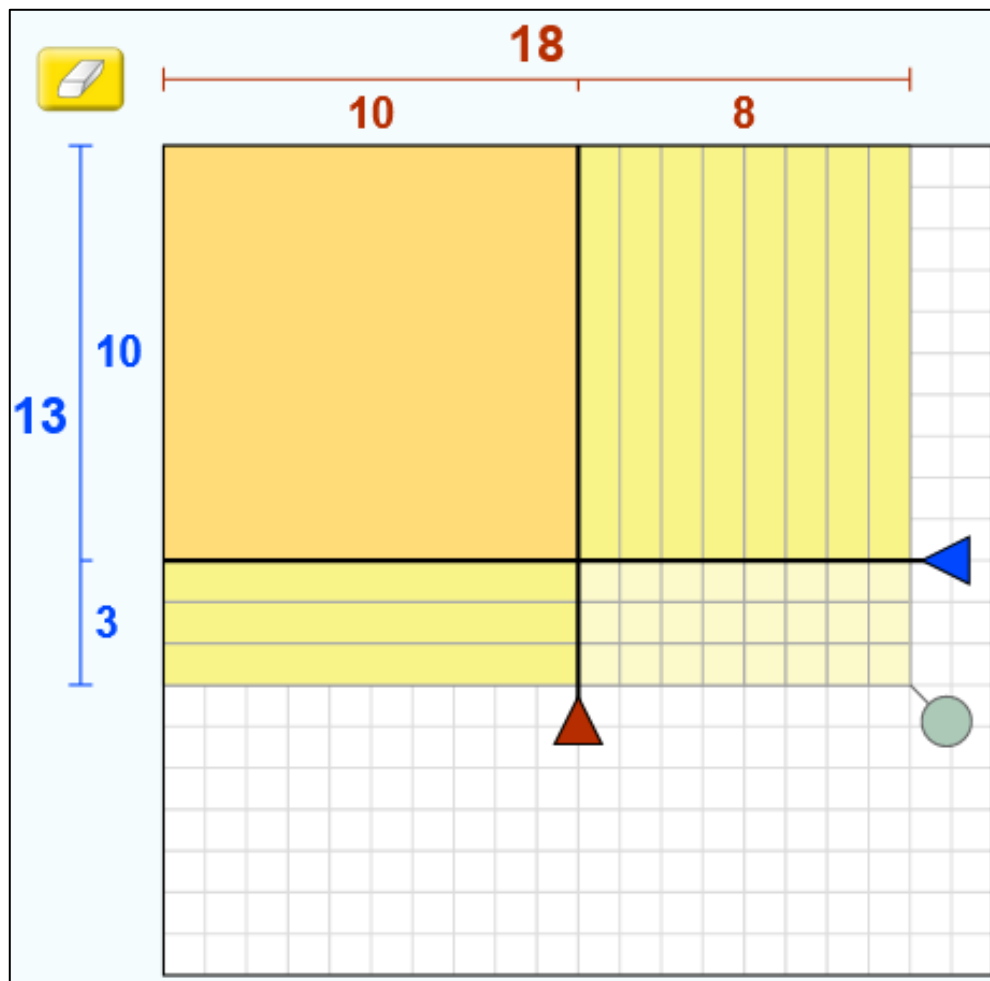


Figure 20. Copie d'écran de l'application web « area model multiplication » de Phet.

Les décompositions additives respectives de 13 et 18 en $10 + 3$ et $10 + 8$ permettent de voir plusieurs zones qui rappellent le matériel de base 10.

En effet, il y a une plaque de centaine ($1 \times 10 \times 10$), ainsi que 8 barres de dizaines et 3 barres de dizaines (respectivement 8×10 et 3×10), et enfin 24 petits cubes d'unité (24×1). On peut ensuite faire des groupements-échanges afin de transformer 10 dizaines en 1 centaine et 20 unités en 2 dizaines.

En écrivant les différentes parties ensemble, on obtient :

$$13 \times 18 = 100 + (8 \times 10) + (3 \times 10) + (24 \times 1)$$

$$13 \times 18 = 100 + 100 + 10 + 20 + 4$$

$$13 \times 18 = 200 + 30 + 4$$

$$13 \times 18 = 234$$

Ce découpage s'appuie mathématiquement sur la double distributivité.

On a par exemple : $13 \times 18 = (10 + 3) \times (10 + 8) = (10 \times 10) + (10 \times 8) + (3 \times 10) + (3 \times 8)$. Chacun des termes se retrouve comme rectangle du découpage précédent.

Exemple : $1,8 \times 1,3$

Cette même organisation se retrouve si on souhaite effectuer le produit de 1,8 par 1,3. On pourra utiliser une autre web application de Phet (https://phet.colorado.edu/sims/html/area-model-decimals/latest/area-model-decimals_fr.html) :

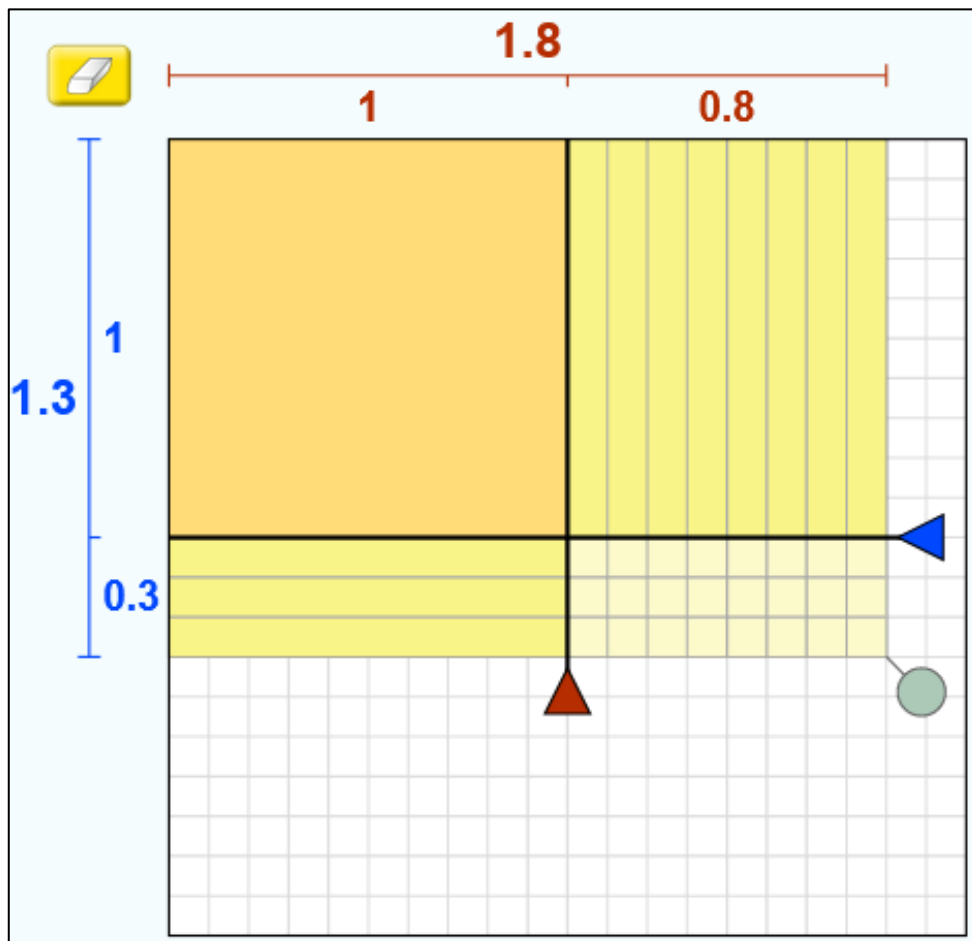


Figure 21. Copie d'écran de l'application web « area model decimals » de Phet.

Il y a ici un changement de paradigme sur le matériel de base 10 à faire vivre avec les élèves. Il s'agit d'attribuer l'unité (le 1) à un autre élément que le petit cube. Dans le cas présent, on prend la plaque de centaine pour en faire l'unité. La barre devient le dixième de l'unité et le cube, le dixième de la barre ou le centième de la plaque.

Les mêmes découpages en aire indiquent qu'il y a une plaque d'unité ($1 \times 1 \times 1$), ainsi que 8 barres de 1 dixième et 3 barres de 1 dixième (respectivement $8 \times \frac{1}{10}$ et $3 \times \frac{1}{10}$), et enfin 24 carreaux de centième ($24 \times \frac{1}{100}$). On peut ensuite faire des groupements-échanges afin de transformer 10 dixièmes en 1 unité et 20 centièmes en 2 dixièmes.

En écrivant les différentes parties ensemble, on obtient :

$$1,3 \times 1,8 = 1 + \left(8 \times \frac{1}{10}\right) + \left(3 \times \frac{1}{10}\right) + \left(24 \times \frac{1}{100}\right)$$

$$1,3 \times 1,8 = 1 + 1 + \frac{1}{10} + \frac{2}{10} + \frac{4}{100}$$

$$1,3 \times 1,8 = 2 + \frac{3}{10} + \frac{4}{100}$$

$$1,3 \times 1,8 = 2,34$$



Remarque :

- A aucun moment ici, le mot « virgule » n'a été utilisé. La virgule décimale est un simple codage de l'information pour désigner le chiffre de l'unité, seule la valeur des différents chiffres est à exploiter en fonction de leur place dans l'écriture du nombre.

8.4. Nombres pairs et impairs

En utilisant les nombres rectangles, on peut définir les nombres pairs comme étant ceux qui peuvent être mis sous forme de rectangle lorsqu'une de ses dimensions est 2 (ou un multiple de 2).

Exemple : 8 et 9

<p>8 est pair, on peut faire un rectangle dont une dimension est 2. De plus, $8 = 2 \times 4$.</p>	 <p><i>Figure 22. Représentation avec des jetons de 8.</i></p>
<p>9 est impair, on ne peut pas faire un rectangle dont une dimension est 2. On a tout de même : $9 = 2 \times 4 + 1$.</p>	 <p><i>Figure 23. Représentation avec des jetons de 9.</i></p>

8.5. Table de multiplication

La présentation des tables de multiplication, dite de Pythagore, fait appel aux nombres rectangles :

×	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Dans cet exemple, on a $48 = 6 \times 8$. On retrouve un rectangle de dimensions 6 par 8.

8.6. Pattern

Vous trouverez sur le site <https://www.visualpatterns.org/> un grand nombre de patterns.

La définition et les applications sont présentées dans le guide collège sur la résolution de problèmes (DGESCO, 2021).

Dans les patterns, on cherche à trouver une suite « logique » à la série proposée (l'explication de la règle doit correspondre aux premiers termes). Les patterns développent les pensées algorithmique (comprendre la structure) et algébrique (généraliser, prévoir à n'importe quel rang). Ils préparent aussi à la notion de suites telle qu'elle est enseignée au lycée.

Il existe des patterns de type répétitif et d'autres de type évolutif.

Enfin, les patterns peuvent être donnés sous forme de nombres ou sous forme figurative.

Exemple : le pattern n° 1 du site

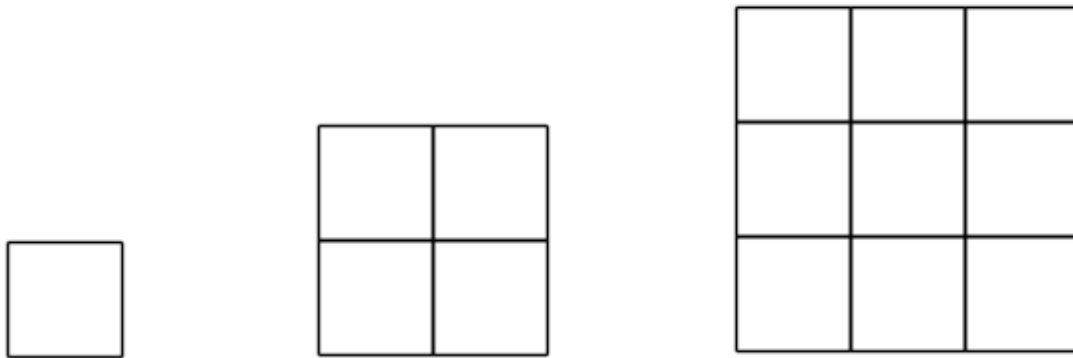


Figure 24. Les 3 premiers éléments du pattern.

Il s'agit d'un pattern figuratif, équivalent à la suite de nombres 1 ; 4 ; 9.

On associe une figure à un nombre.

On peut rapidement définir deux séries possibles (parmi d'autres) : la suite répétitive 1 ; 4 ; 9 ; 1 ; 4 ; ... et la suite évolutive 1 ; 4 ; 9 ; 16 ; 25 ; ...

Pour la suite évolutive, on peut définir le nombre de petits carrés au rang n , il y en a n^2 .

L'aspect figuratif de cette suite permet de trouver des formules équivalentes de façon visuelle, ce qui peut motiver leurs démonstrations ensuite. Ces transformations d'écriture contribuent à l'appropriation du calcul littéral.

Par exemple, on peut voir un carré comme deux nombres triangulaires successifs :

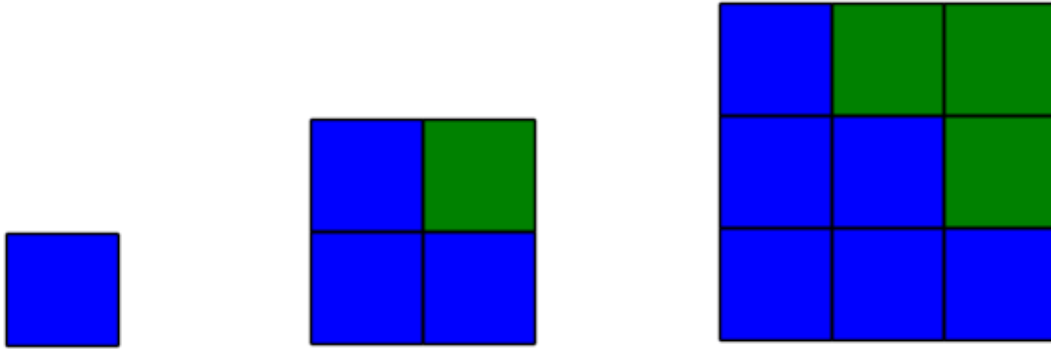


Figure 25. Les 3 premiers éléments du pattern avec une vision nombre triangulaire.

Après avoir travaillé sur les nombres triangulaires, notamment que le n -ième ($n \in \mathbb{N}$) nombre triangulaire t_n peut s'écrire $\frac{n(n+1)}{2}$, on peut ainsi définir que :

$$n^2 = t_n + t_{n-1} = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2}$$

On peut aussi voir le carré de rang n comme le carré de rang $n - 1$ auquel on rajoute un rectangle de dimension 1 par n et un autre de dimension 1 par $n - 1$.



Figure 26. Les 3 premiers éléments du pattern avec une vision de définition séquentielle.

On trouve ainsi que $n^2 = (n-1)^2 + n + n-1$.

D'autres constructions du carré sont possibles, tout comme la preuve que la somme des n premiers entiers impairs est un nombre carré : n^2 .

8.7. Résolution de problèmes arithmétiques : modèle en barres

L'arithmétique est la science mathématique qui correspond à l'étude des nombres, des nombres entiers naturels jusqu'aux nombres complexes, les propriétés et les opérations de base¹³.

Les problèmes arithmétiques, très étudiés à l'école primaire notamment, pour être ensuite dépassés par des problèmes de type algébrique, sont des problèmes du type $ax + b = cx + d$ ¹⁴ avec a , b , c et d des nombres, dont éventuellement certains sont nuls. Ces nombres, ainsi que les solutions sont d'abord des nombres entiers naturels, puis sont abordés, au cycle 3, les rationnels, au cycle 4, les réels, et enfin au lycée les complexes.

Ces problèmes permettent de donner du sens aux nombres, de trouver des relations entre eux.

Exemple : le goûter d'anniversaire de Marion

« Marion achète pour son goûter d'anniversaire 4 bouteilles de 2 L de jus de fruits bio identiques et un gâteau d'une valeur de 15 €. Elle paye en tout 27 €. Quel est le prix d'une bouteille ? »

Ce problème est équivalent à la résolution de $4x + 15 = 0x + 27$. L'équivalence tient dans les mêmes données et la même structure du problème.

L'ensemble de ces problèmes sont des briques de raisonnement que les élèves doivent acquérir. Il faut donc leur enseigner aussi à résoudre des problèmes, le transfert vers d'autres problèmes analogues.

Sander soulève l'importance de mettre en évidence la structure mathématique d'un problème et non les problèmes de surface (Sander, 2018). Il montre qu'il est nécessaire que les élèves s'approprient ces structures en travaillant les analogies en utilisant le transfert et le recodage sémantique. Il s'intéresse plus particulièrement aux structures mathématiques des problèmes avec un apport des neurosciences.

La résolution de problèmes, pas nécessairement arithmétiques, s'appuie sur les six compétences de l'activité mathématiques : chercher ; modéliser ; représenter ; raisonner ; calculer ; communiquer¹⁵. On retrouve ces mêmes compétences d'un élève de cycle 1 jusqu'au chercheur en mathématiques.

Une attention particulière est actuellement portée sur représenter et modéliser.

¹³ <https://fr.wikipedia.org/wiki/Arithm%C3%A9tique>

¹⁴ Ce formalisme n'est pas abordé avant le cycle 4.

¹⁵ <https://eduscol.education.fr/280/mathematiques-cycle-4#summary-item-1>

Dans le Bulletin Officiel spécial n° 3 du 26 avril 2018¹⁶, des préconisations portent sur :

- développer la compétence « représenter » : faire des schémas pour aider à la résolution de problèmes ;
- ne pas tout attendre des élèves ;
- fournir des schémas simples, les mêmes sur plusieurs années : sens de « modéliser » ;
- soumettre des problèmes nombreux et variés ;
- résoudre des problèmes à chaque séance, séquence sous différentes formes (calcul mental, etc.).

Certains de ces points sont développés ci-après.

8.7.1. Représenter, modéliser

Un constat est que nombre d'élèves n'arrivent pas à se représenter les situations au sens mathématique, les productions restent souvent à l'état de dessin avec de nombreux détails parfois.

Exemple : élèves dans une classe

Voici un « petit problème à représenter », donné en tout début de 6^e, sa résolution ne pose pas de difficulté particulière, mis à part la donnée « inutile » :

« Dans une classe de sixième, il y a 16 garçons et 13 filles. L'élève le plus jeune est un garçon. Combien y a-t-il d'élèves dans la classe ? »

Pour obliger à la représentation et non au calcul, on peut supprimer la question, ou la différer.

Remarque :

Les énoncés contiennent souvent des implicites, notamment en grandeurs et mesures, car la précision nécessite une écriture qui est souvent perçue comme lourde. Par exemple, dans l'énoncé précédent, nous distinguons filles et garçons sans préciser qu'ils font partie de l'ensemble des élèves et nous donnons un résultat en élève. Cela peut avoir des conséquences en algèbre : les élèves ont envie de réduire une expression algébrique du type $16x + 13y$ de la même façon que dans le cas des élèves.

¹⁶ <https://www.education.gouv.fr/bo/18/Special3/MENE1809043N.htm>

Voici quelques représentations qu'en font les élèves :

Représentation de la meilleure élève de la classe, qu'on retrouve chez de nombreux autres élèves de tous niveaux, avec plus ou moins de détails. L'élève en question ici était perturbée par la demande de représentation.

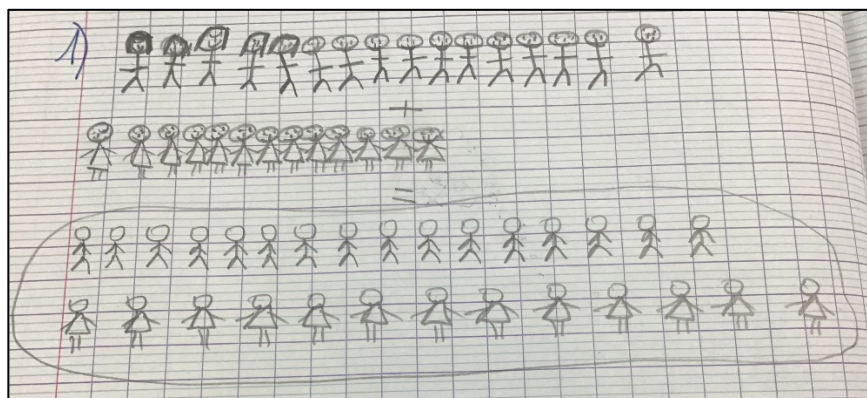


Figure 27. Représentation de l'élève A.

On arrive presque à une schématisation, on reconnaît « les filles à leurs cheveux longs » [dixit l'élève, en difficulté importante].

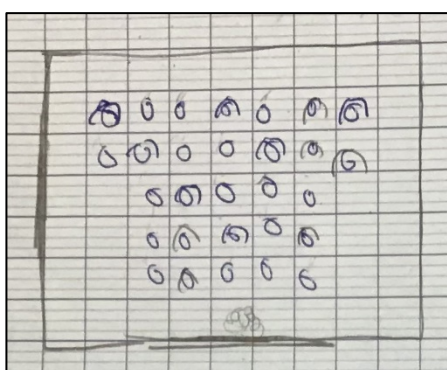


Figure 28. Représentation de l'élève B.

Une représentation, d'un élève non scolaire, intéressante car il y a une tentative d'organisation des nombres proposés, notamment sous forme de nombre rectangle. Les garçons et les filles sont encore très marqués.

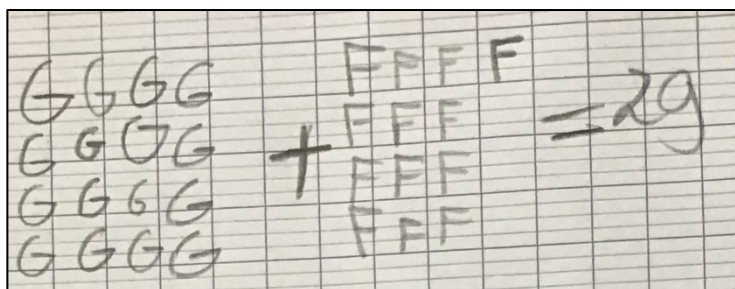


Figure 29. Représentation de l'élève C.

Une production d'une élève d'un bon niveau : on trouve une organisation et une décomposition des nombres rendant le calcul très rapide ensuite.

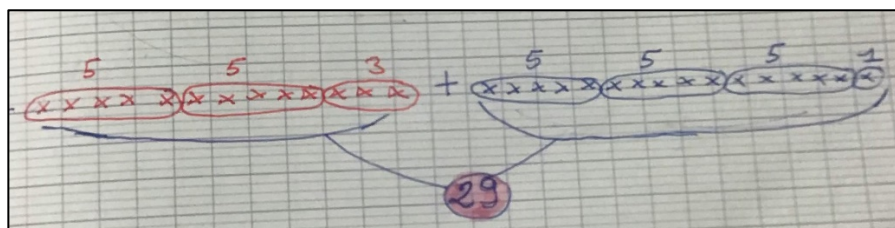


Figure 30. Représentation de l'élève D.

Cette étape de représentation sur des problèmes de base, qui ne sont plus de réels problèmes à ce niveau, est importante¹⁷ pour aborder des problèmes complexes (à plusieurs étapes) ou atypiques¹⁸. C'est un outil supplémentaire pour aborder les problèmes, les décomposer, et pouvoir les résoudre.

Attention toutefois à ne pas l'imposer pour tous les élèves, certains d'entre eux iront très vite entre l'objet de manipulation et la représentation mentale. Devoir faire une représentation peut être rébarbatif et contre-productif pour des élèves qui n'en n'ont plus besoin s'ils n'en comprennent pas l'utilité. L'évaluation par les compétences de l'activité mathématiques peut valoriser cependant leur travail et permettre au professeur de contrôler l'acquisition.

Devant cette difficulté à représenter un problème, du matériel a été distribué aux élèves, avec idée d'en faire un modèle.

- Les jetons ont été écartés rapidement car leur aspect désorganisé ne permet pas d'établir de réelles relations entre les nombres.
- Les réglettes Cuisenaire sont appropriées car elles permettent à de multiples occasions d'être efficace¹⁹. Leur utilisation en cycle 2 permet de voir les relations entre les nombres, et travailler aussi la base décimale pour des nombres pas trop grands. Le détournement des pièces permet d'aller vers des représentations en barres, qui deviendront donc un modèle s'il y a persistance de ces représentations dans le temps.
- Les cubes emboîtables sont à mi-chemin entre les jetons et les réglettes Cuisenaire. Le fait de pouvoir les assembler permet de travailler dans les grandeurs et la mesure (longueur), tandis que le fait de pouvoir en assembler autant que l'on souhaite permet de moduler rapidement. On peut tout à fait détourner les assemblages pour aller vers des représentations en barres. C'est ce matériel que nous utilisons principalement dans nos classes respectives dans le cadre de la résolution de problèmes arithmétiques.

Exemple : Baptiste et Carmen

« *Baptiste a 12 crayons dans sa trousse. Carmen en a 3 de plus.* »

Voici une représentation, d'autres sont possibles, avec le matériel et sa déclinaison iconique associée :

On commence par représenter le nombre de crayons de Baptiste, $10 + 2$:



Figure 31. Représentation avec le matériel de manipulation du nombre de crayons de Baptiste.

¹⁷ Houdement, C. (2017). Résolution de problèmes arithmétiques à l'école. *Grand N*, 100.

¹⁸ Problèmes atypiques : problèmes pour lesquels il n'y a pas de stratégie de résolution connue. Il faut donc faire des hypothèses.

¹⁹ <https://www.cuisenaire.eu/>

Carmen en a 3 de plus que Baptiste, il faut donc ajouter 3 aux 12 de Baptiste pour égaler le nombre de crayon de Carmen.

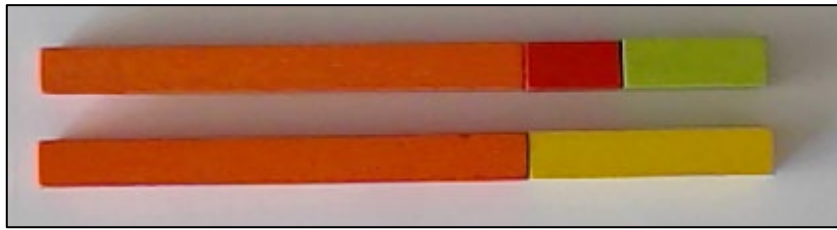


Figure 32. Représentation avec le matériel de manipulation du nombre de crayons de Carmen.

Carmen a donc $12 + 2 + 3 = 10 + 5 = 15$ crayons.

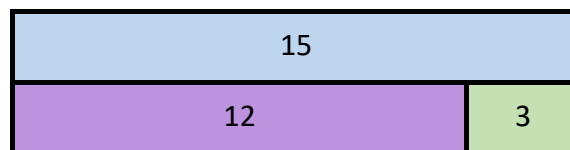


Figure 33. Représentation iconique de l'ensemble du problème.

On retrouve ici une partie du « mur » évoqué à la partie 7.2.3., c'est-à-dire qu'on peut faire du lien avec les nombres rectangles.

Il est important que les élèves s'emparent du modèle, sans qu'il soit imposé, mais négocié : toutes les représentations montrant les relations mathématiques entre les données de l'énoncé sont congrues (analogues) à ce modèle. Il garantit un langage commun, facilitant l'échange et structurant la résolution de problèmes.

Voici une procédure possible d'introduction au modèle qui a été faite en 6^e.

- Sur une partie de séance, proposer trois « petits problèmes à représenter » (sans nécessairement avec une question) et récupérer les travaux, sous forme de photos pour pouvoir les conserver si besoin. Les élèves travaillent individuellement.
- A la séance suivante, afficher 4 à 5 productions, une par une, dans un ordre bien précis : les dessins dans un premier temps, puis les représentations mathématiques dans un deuxième. Demander aux élèves de commenter. Les élèves doivent essayer de dégager que pour représenter mathématiquement, on s'affranchit des détails, on peut regrouper et utiliser les valeurs numériques données dans l'énoncé. Le but est de voir la structure et les données.
- Donner un problème avec la même structure et les mêmes données numériques, mais dans un contexte différent. Les élèves travaillent individuellement ou en groupe. Et recommencer les deux étapes précédentes pour montrer aux élèves qu'une même représentation mathématique permet de représenter divers problèmes, il n'y a plus besoin de calculer puisque cela a déjà été fait !
- Donner le matériel des cubes emboîtables aux élèves pour représenter la situation avec celui-ci. Les élèves travaillent en groupe. Les élèves vont alors assembler les cubes pour

représenter la situation. Demander aux élèves de représenter sur leur cahier, la représentation en barres commencent à apparaître.

- Il ne reste plus qu'à indiquer les règles de construction du modèle.

En voici une deuxième qui est basée sur le tri des problèmes par analogie. L'objectif étant de faire ressortir la structure mathématiques (additive, multiplicative ou une combinaison des deux) dans un problème :

- Distribuer un corpus de problèmes dits « de base » et les classer en deux catégories pour mettre en évidence les deux catégories, structure additive et structure multiplicative.
- Demander de représenter un des problèmes (un champ : additif ou multiplicatif) et exhiber les productions en les classant en deux catégories : celles qui montrent les relations mathématiques, candidates au statut de modèle, et celles qui ne les montrent pas.
- Introduire le matériel de manipulation et demander que les élèves l'utilisent pour représenter la situation.
- Proposer le modèle en barres correspondant au problème en « détournant le matériel de manipulation » et montrer, en négociant et montrant qu'il correspond à toutes les représentations qui donnent à voir les relations mathématiques. On pourra utiliser la « fleur des représentations » avec au centre le modèle et autour les productions des élèves.
- Recommencer avec l'autre champ.
- Introduire la phase heuristique de résolution de problèmes pour déterminer le champ du problème avec le questionnement suivant :
 - Est-ce qu'il y a un tout ?
 - Est-il connu ?
 - S'il n'y en a pas, s'agit-il d'une comparaison ? (Recodage sémantique pour reconnaître le tout)
 - Est-ce qu'il y a des parties ?
 - Combien ?
 - Sont-elles égales ?
 - Non : modèle additif
 - Oui : modèle multiplicatif
 - Si on ne parvient pas au modèle avec les questions précédentes, alors c'est que le problème est complexe (ou atypique)
- Etendre aux problèmes à étapes ou atypiques.

8.7.2. Règles de construction du modèle en barres²⁰

Le modèle en barres permet de modéliser des problèmes du champ additif ainsi que du champ multiplicatif. Il est utilisé à Singapour et dans les pays anglo-saxons, on le retrouve pourtant en France dans les années 1950. Ce modèle est de type partie-tout ou (parties-tout). Il s'appuie sur la grandeur longueur.

²⁰ Mémoire de Master de recherche en didactique des mathématiques, Esteve 2021

La catégorisation de Houdement²¹ concernant les problèmes arithmétiques verbaux se décline en trois types :

- les problèmes basiques : ce sont les problèmes à une étape, les briques essentielles de raisonnement ;
- Les problèmes complexes : ce sont les problèmes combinant plusieurs problèmes basiques ;
- les problèmes atypiques : ce sont des problèmes pour lesquels les élèves ne disposent pas de stratégies connues a priori et doivent créer leur propre résolution en s'appuyant sur leurs connaissances, notamment leur « mémoire de problèmes ».

Remarque :

Complexe ne veut pas dire difficile, de même que basique ne veut pas dire simple. D'autres variables didactiques (taille des nombres, etc.) peuvent engendrer des difficultés.

Le modèle en barres décrit ici est une représentation graphique qui est lié aux problèmes basiques de la catégorisation de Houdement. Il s'articule avec une écriture pré-algébrique puis algébrique d'une équation du type $a + x = b$ ou encore $ax = b$ avec des conditions sur a .

Il est composé d'au moins deux barres de longueurs égales. Cet aspect est important pour comprendre les relations entre les nombres et la structure. En classe, les élèves ont fait remarquer qu'avec deux barres, cela ressemblait au signe « égal ».

Les problèmes typiques basiques sont classés dans deux catégories :

- les problèmes relevant du champ additif : incluant ainsi, à l'aide du recodage sémantique (reformulation) toutes les catégories du champ additif de Vergnaud ou les problèmes partie/tout et de comparaisons de la méthode de Singapour ;
- les problèmes relevant du champ multiplicatif : incluant ainsi toutes les catégories de Vergnaud du champ multiplicatif et modélisant les mêmes situations qu'avec la méthode de Singapour.

Les règles de construction du modèle en barres sont les suivantes pour le modèle additif :

- rectangles remplis par les nombres (valeurs) connus, et, si le nombre (valeur) est inconnu par « inconnu » ou un mot²² ;
- longueur de la barre rectangle pas forcément proportionnelle au nombre qu'elle contient. On peut représenter le plus petit nombre par une barre plus courte ;
- un seul modèle pour le champ additif : recodage sémantique.

²¹ <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01902810/document>

²² On évitera le point d'interrogation qui n'est pas un signe mathématique et correspond à une question. Or, le modèle rend compte de la structure d'un énoncé.

devient une équation du type $c = a \times b$ où l'on cherche a ; b ou c (avec d'éventuelles conditions sur a et b).

Les problèmes de comparaison relevant de la différence relative ou mettant en jeu des fractions se modélisent aussi de cette façon. Parfois, le nombre de part égale peut être réparti par exemple « Prendre un cinquième puis deux cinquième d'un gâteau ».

Remarque :

Les règles de construction ont été pensées de sorte que le tracé de cet ostensif soit simplifié, en évitant la surcharge cognitive et en permettant à l'élève de rester centré sur l'objectif principal, la résolution de problèmes arithmétiques. C'est pour faciliter les dessins à main levée, moins chronophage et moins lourds pour la mémoire de travail, que le choix a été de coder comme en géométrie. C'est d'ailleurs ce même état d'esprit que « raisonner sur une figure à main levée codée » que l'on utilise le modèle pour que des stratégies diverses de calcul émergent.

La représentation du modèle en barres, à main levée, a été pensée pour ne pas être un obstacle à la résolution du problème, en évitant la surcharge cognitive²³.

Dans des classes de cycle 2, on pourra donner un schéma déjà prêt, avec une pochette plastique par exemple pour pouvoir tester, ou demander à le tracer en amont.

A noter que chercher la valeur d'une part, c'est travailler la division partition, tandis que la recherche du nombre de parts, c'est travailler la division quotient, comme c'est spécifié dans les programmes de l'école primaire. Ces deux divisions sont à convoquer, notamment pour construire le sens de $3 \div \frac{1}{2}$: combien de demi-parts dans 3, c'est chercher le nombre de parts, soit la division quotient. Dans les manuels, on peut constater que cette dernière est moins mobilisée, et par conséquent moins abordée en classe.

Remarque :

Lors d'un problème à plusieurs étapes, on peut combiner sur une seule représentation les deux représentations précédentes : cf. exemple avec le salon de jardin.

8.7.3. Progressivité

Il ne s'agit pas là de produire une progressivité exhaustive de la résolution de problèmes arithmétiques, mais de donner quelques éléments qui semblent important avec une vue entre l'école primaire et le collège.

Ainsi, une première progression se fait entre les problèmes basiques et ceux complexes, notamment en début de cycle 2 et de cycle 3. Ce dernier voit l'arrivée de nouveaux nombres : les rationnels, ce qui nécessite de refaire des problèmes basiques incluant ces nouveaux nombres.

²³ <https://synapses-lamap.org/2020/01/07/interview-quest-ce-que-la-charge-cognitive/>

Il y a deux autres éléments à prendre en considération : l'identification du tout et des parties, et l'identification de la brique unité.

Pour le premier élément, une erreur d'élève sur la représentation de la situation, c'est de savoir quelle donnée est le tout. Parfois, le mot est écrit dans l'énoncé, ce qui permet plus facilement de l'obtenir.

En reprenant l'exemple avec Baptiste et Carmen : « *Baptiste a 12 crayons dans sa trousse. Carmen en a 3 de plus.* », utiliser la représentation iconique directement met certains élèves en difficulté, le tout n'est pas mentionné et le « de plus » est une difficulté comme en témoigne l'exemple suivant.

Exemple : Baptiste et Carmen (variante 1)

« *Baptiste a 12 crayons dans sa trousse. Il en a 3 de plus que Carmen.* »

En utilisant le matériel cependant, on lève en partie ces difficultés. En effet, sur la photo de la Figure 34 pour l'exemple bis, on représente la quantité de crayons de Baptiste, puis sur celle de la Figure 35 celle de Carmen en s'appuyant sur l'énoncé.

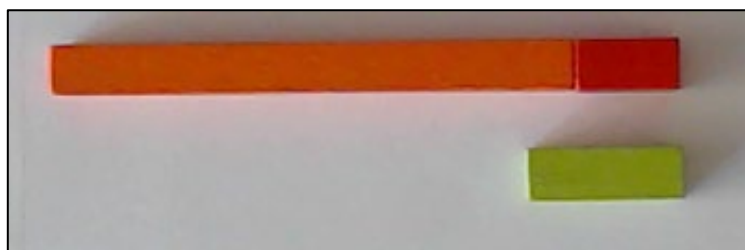


Figure 34. Représentation la quantité de crayons de Baptiste.

On a représenté la quantité de Baptiste et on sait qu'il en a 3 de plus par rapport à Carmen.



Figure 35. Représentation la quantité de crayons de Carmen.

On complète pour obtenir le nombre de crayons de Carmen : $12 - 3 = 9$.

Une fois le tout identifié, la représentation iconique permettra d'ancrer la représentation mentale de cette situation.

12		Tout (Baptiste)
Inconnu	3	Parties (Carmen et le surplus)

Le traitement du modèle est ici : $12 = \text{Inconnu} + 3$.

Le deuxième élément est la recherche de la brique unité, c'est-à-dire que dans le matériel, la brique a une valeur de 1 bien souvent, notamment en début d'utilisation. Par la suite, les nombres utilisés vont dépasser la possibilité d'utiliser le matériel directement. Cependant, de façon transitionnelle, on peut tout de même l'utiliser en modifiant la valeur de la brique.

Exemple : Baptiste et Carmen (variante 2) :

« Baptiste et Carmen sont dans un magasin de fourniture de classe. Baptiste achète l'édition Méga qui contient 60 crayons. Carmen achète l'édition Deluxe qui en contient 20 de plus. »

Mettre bout à bout 60 cubes pour représenter la situation n'est pas très simple.

En observant les nombres, on s'aperçoit que 60, c'est 6 dizaines et que 20, c'est 2 dizaines.

On pourra donc représenter ainsi avec le matériel, en considérant qu'une brique, c'est une dizaine.



Figure 36. Représentation la quantité de crayons de Baptiste.

On a ici 6 dizaines correspondant au nombre de crayons de Baptiste.

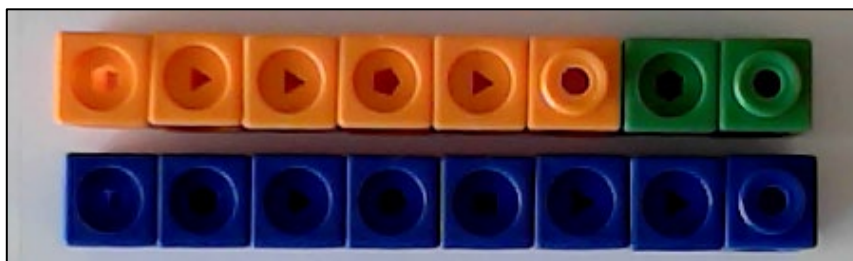


Figure 37. Représentation la quantité de crayons de Carmen.

Carmen a 2 dizaines de plus que Baptiste, ce qu'il faut donc réunir aux 6 dizaines déjà présentes pour obtenir le tout, correspondant au nombre de crayons de Carmen.

Ainsi, Carmen a 6 Dizaines + 2 Dizaines = 8 Dizaines, soit 80 crayons.

Par la suite, on pourra même utiliser des couleurs différentes pour indiquer des valeurs d'unités différentes.

Cet aspect est important à développer dès le cycle 2, car il permet d'anticiper les relations entre les nombres, de changer de point de vue sur l'unité et par conséquent de travailler les rationnels.

8.7.4. Exemples d'application

Les exemples ci-dessous sont issus des attendus de fin d'année²⁴, dont les données ont été parfois modifiées pour être accessibles avec le matériel.

Les questions sont décrochées des énoncés pour permettre d'être cachées lors de la phase de modélisation et de représentation.

Exemple : billes (d'après attendus CP)

« Entre ma poche de droite et celle de gauche, j'ai 18 billes. J'ai 11 billes dans ma poche de gauche.

Combien en ai-je dans ma poche de droite ? »

Avant d'utiliser le matériel des réglettes Cuisenaire ou cubes emboîtables, on pourra faire l'expérience réellement avec des billes, quitte à prendre des boîtes à la place des poches. Il faudra par la suite se détacher de l'objet réel afin de pouvoir faire les transferts (Sander, 2018). Ce problème se résout de la même manière si à la place de billes, on a des cartes, des perles, ou des objets plus grands si on modifie la donnée des poches.

Dans l'énoncé, si on pouvait rajouter « en tout », ce serait dans la première phrase, on représente donc le tout par une réglette de $10 + 8 = 18$.



Figure 38. Représentation du tout.

En deuxième ligne, on va représenter les deux parties correspondantes aux poches de gauche et de droite. On place $10 + 1 = 11$ pour la poche de gauche.

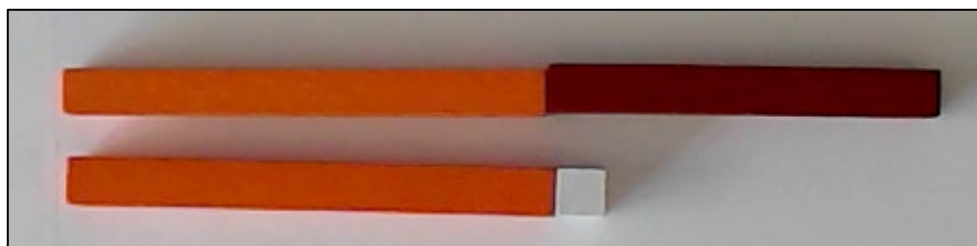


Figure 39. Représentation du tout et de la partie de la quantité dans la poche de gauche.

²⁴ <https://eduscol.education.fr/137/attendus-de-fin-d-annee-et-reperes-annuels-de-progression-du-cp-la-3e#summary-item-2>

L'inconnue est ici le nombre de billes dans la poche de droite, que l'on peut compléter avec la réglette correspondante de 7.



Figure 40. Représentation du tout et de la partie des quantités dans les poches de gauche et de droite.

On a ainsi les égalités $11 + 7 = 18$ ou $18 - 11 = 7$.

Il y a 7 billes dans la poche de droite.

Lors de l'affichage, il est important de montrer que le problème posé relève de la structure additive et donc du modèle additif. La procédure induite par le modèle que l'élève choisira pour poursuivre relève de la compétence « calculer ». Un travail qui renforcera le sens des opérations sera de montrer que ces procédures sont équivalentes car elles conduisent, en respectant les propriétés mathématiques inhérentes, au même résultat.

Exemple : paquet de biscuits (d'après attendus CP)

« Paul apporte 3 paquets de biscuits. Il y a 7 biscuits dans chaque paquet.

Combien y-a-t-il de biscuits en tout ? »

On doit prendre pour chaque paquet une réglette de 7. On représente alors 3 paquets, qui constituent les parties :

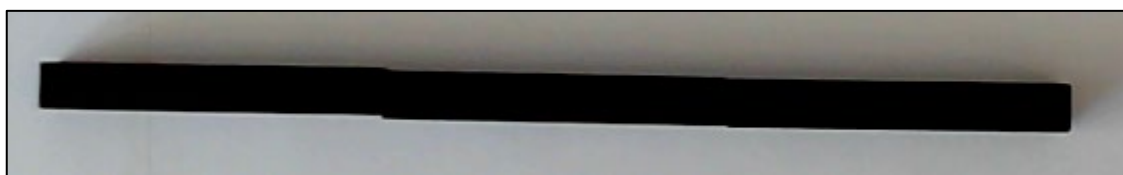


Figure 41. Représentation de la quantité de biscuits dans les 3 paquets de biscuits.

Le tout est ici inconnu, rappelé d'ailleurs dans la question. A l'aide du matériel, on égale les parties :



Figure 42. Représentation de la quantité de biscuits dans les 3 paquets de biscuits et sa déclinaison décimale.

Ainsi, on a $7 + 7 + 7 = 3 \times 7 = 10 + 10 + 1 = 21$.

Il y a 21 biscuits en tout.

Exemple : équipes (d'après attendus CE1)

« Dans l'école, il y a 300 élèves. Les professeurs veulent constituer 15 équipes (de même nombre d'élèves).

Combien y aura-t-il d'élèves par équipe ? »

Ici, il n'est pas envisageable d'aligner une longueur de 300 cm (30 réglettes de 10). Il faut donc modifier la valeur de la réglette unité. 300, c'est 3 centaines, on peut alors envisager que la réglette de 10 soit une centaine. Il faudra alors faire vivre ce changement en proposant la réglette de 1, qui vaudra 1 dizaine (10 fois plus petit que la centaine), celle de 2, qui vaudra 2 dizaines (2 fois plus grand que la dizaine), celle de 5, qui vaudra 5 dizaines (5 fois plus que la dizaine, et aussi la moitié de la centaine), et éventuellement celle de 9, qui vaudra 9 dizaines (9 fois la dizaine, et aussi une dizaine de moins que la centaine).

On représente l'ensemble (le tout) des élèves par 3 réglettes de 10.



Figure 43. Représentation de l'ensemble (le tout) des élèves de l'école.

Il faut constituer 15 équipes, par conséquent, il faudra aligner 15 réglettes pour égaler le tout. Certains élèves pourraient comprendre que la valeur de la réglette à poser est de 15 unités, ce qu'il faudra expliquer.

Les élèves vont dans un premier temps faire des tests pour égaler le tout. Ici, on a testé avec les valeurs 5 ; 4 et 2. On peut remarquer qu'avec 4, il y a un dépassement (ou un manque), en effet, 30 n'est pas dans la table de 4.

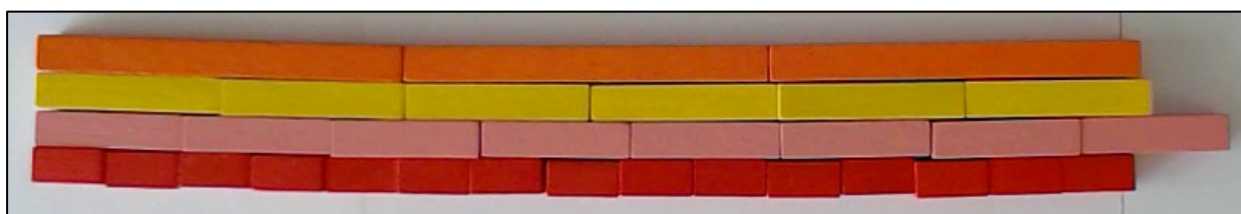


Figure 44. Essais et ajustements pour atteindre le tout.

Les réglettes rouges sont au nombre de 15 et permettent d'égaliser le tout. Cette réglette a pour valeur 2. Cependant, c'est 2 dizaines.

Cela signifie que chacune des 15 équipes sera constituée de 20 élèves.

Exemple : équipes bis (d'après attendus CE1)

« Dans l'école, il y a 356 élèves. Les professeurs veulent constituer des équipes de 10 élèves.

Combien y aura-t-il d'équipes ? »

Cet exercice peut difficilement être représenté avec le matériel. On pourra cependant l'approcher avec des exercices plus simples d'un point de vue des valeurs numériques, tout en conservant l'idée d'un reste non nul (par exemple avec 15 et 4, puis 36 et 7, puis 36 et 10, etc.).

C'est cependant un moyen pour obliger l'élève à dépasser le matériel, bien qu'il puisse tout de même s'aider d'un modèle en barres iconique si besoin comme ci-dessous.

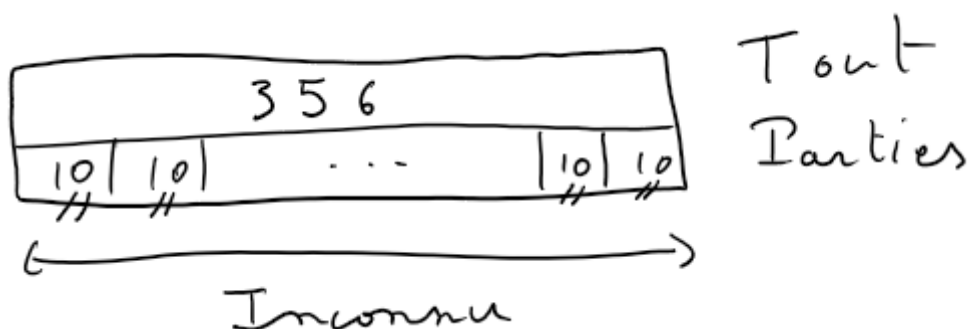


Figure 45. Représentation iconique du problème équipes bis.

L'ensemble des 356 élèves constitue le tout. Chaque partie correspond à un groupe de 10 élèves et on cherche le nombre de groupes.

Bien que le reste ne soit pas nul dans la division de 356 par 10, les élèves (sauf les plus avancés qui n'ont pas besoin du modèle d'ailleurs) choisiront le modèle du champ multiplicatif sans ajouter de case correspondante à ce reste. Il faut bien comprendre qu'il s'agit d'un modèle issu de la situation et tant qu'on n'aura pas un résultat à proposer, on n'aura pas besoin de revenir sur l'énoncé et donc sur le modèle choisi.

Les exercices du type « Quel est le nombre de dizaines entières²⁵ dans 47 ? », qui pourront être faits en rituel, permettent aux élèves, dans ce contexte, l'appropriation d'une part du système décimal, et d'autre part d'appliquer à la résolution de problèmes.

Il y a ici 35 dizaines entières dans 356, ce qui correspondra à 35 équipes de 10 élèves et il restera 6 élèves en plus.

Exemple : pastilles de couleur (d'après attendus CE2)

« Léo a 13 pastilles de couleur de plus que Lucie et Zoé a 8 pastilles de plus que Lucie. Zoé a 17 pastilles.

Combien de pastilles possède Léo ? »

²⁵ Le mot « entières » est important, car à la question « Quel est le nombre de dizaines dans 47 ? », la réponse est 4,7 dizaines. Le mot « nombre » désigne l'ensemble des nombres réels en mathématiques si ce n'est pas précisé (lié à la mesure des grandeurs continues type longueur, masse, etc.), même si seuls les nombres entiers naturels sont grandement étudiés au cycle 2 (il y a aussi des fractions-opérateurs). Le fait de ne pas être clair sur le mot « nombre » constitue une difficulté ensuite aux cycles 3 et 4.

Ce problème est complexe dans la catégorisation de Houdement et correspond à un problème arithmétique à 2 étapes.

L'information concernant le nombre de pastilles de Zoé est le seul accessible d'emblée : $10 + 7 = 17$.



Figure 46. Représentation du nombre de pastilles de Zoé.

On utilise ensuite la relation entre Zoé et Lucie. Comme Zoé a 8 pastilles de plus que Lucie, on pose une réglette de 8 :



Figure 47. Représentation de la relation entre Zoé et Lucie.

Et on égale pour obtenir le nombre de pastilles de Lucie :



Figure 48. Représentation du nombre de pastilles de Lucie.

Voici une version iconique associée :

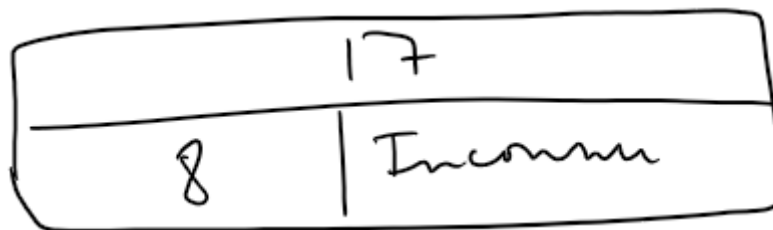


Figure 49. Représentation iconique de l'étape 1 du problème des pastilles de couleurs.

Ce qui induit le traitement du modèle : $17 = 8 + \text{Inconnu}$.

Ainsi, Lucie a $17 - 8 = 9$ pastilles, ce qu'on affiche pour la suite :



On utilise la dernière information pour obtenir le nombre de pastilles de Léo : il faut adjoindre 13 aux 9 pastilles de Lucie, qu'on égale pour avoir le nombre de pastilles de Léo :

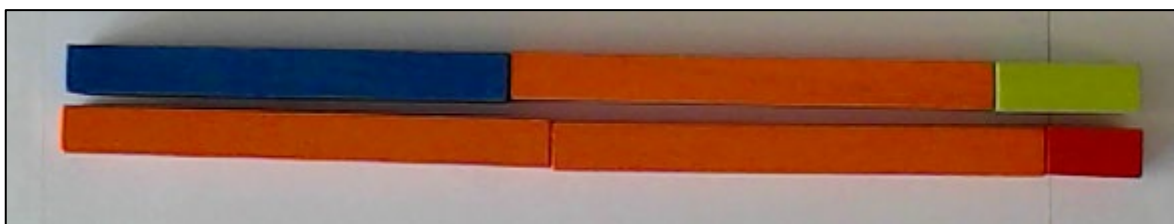


Figure 50. Représentation du nombre de pastilles de Léo.

Voici une version iconique associée :



Figure 51. Représentation iconique de l'étape 2 du problème des pastilles de couleurs.

Le traitement du modèle donne : $9 + 13 = \text{Inconnu}$.

On obtient que $\text{Inconnu} = 9 + 13 = 10 + 10 + 2 = 22$.

Léo a donc 22 pastilles.

Boulangerie (d'après attendus CM1)

« M. Durand achète deux baguettes de pain à 1,75 euro chacune ; une brioche à 5,10 euros et un gâteau à 14,60 euros.

Étant donné qu'il est entré dans la boulangerie avec 28 euros, combien de croissants à 1,50 euro pièce pourra-t-il encore s'acheter ? »

Le matériel des réglettes Cuisenaire ou des cubes peut sembler difficile à utiliser dans ce cas. On pourrait utiliser le matériel de base 10, en utilisant par exemple les plaques avec une valeur de 1 €. Cependant, ce matériel ne permet pas de représenter en barres. Il peut en revanche être utilisé par la suite dans la partie calcul.

La difficulté d'utilisation du matériel vient ici de la variable didactique des nombres donnés.

Une astuce consiste ici à utiliser le matériel sur des valeurs approchées de ces nombres pour comprendre comment résoudre le problème d'une part et pour estimer un résultat d'autre part.

Le tout est donné ici dans la question, ce qui peut constituer une difficulté si on ne donne que l'énoncé au départ. Quitte à modifier l'énoncé, c'est ce qu'on commence par représenter :



Figure 52. Représentation du tout.

On a ensuite les achats de M. Durand qui constituent les différentes parties, les 2 baguettes en vert qui coûtent environ 2 € chacune, la brioche en violet qui coûte environ 5 € et le gâteau qui coûte environ 15 € :



Figure 53. Représentation du tout et des parties correspondantes aux achats.

Il reste alors un espace correspondant à 4 cubes qu'on peut remplir en 4×1 ou 2×2 , lié à la difficulté de savoir si 1,50 est plus proche de 1 ou de 2 :



Figure 54. Représentation du tout et des parties correspondantes aux achats et au reste.

Ainsi, M. Durand devrait pouvoir acheter 2 à 4 croissants, ce qui reste soumis aux valeurs approchées précédentes, ce qui constitue une source de discussion entre élèves ou de questionnement de la part du professeur (« pensez-vous qu'il pourrait en acheter 10 ? »).

Le modèle en barres correspondant est le suivant :

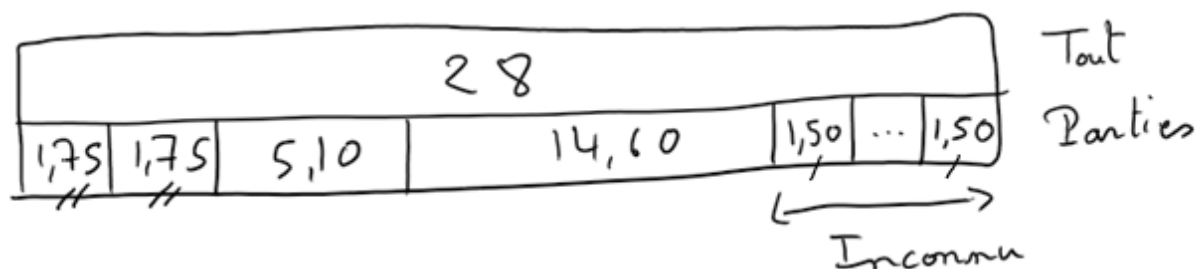


Figure 55. Représentation iconique du tout et des parties correspondantes aux achats et du reste.

Ce qui permet de résoudre exactement le problème :

Calcul des achats de M. Durand : $2 \times 1,75 + 5,10 + 14,60 = 23,20$.

Calcul de ce qui lui reste : $28 - 23,20 = 4,80$.

On peut mettre 3 fois 1,50 dans 4,80. Ainsi, M. Durand pourra acheter 3 croissants, et il lui restera 30 centimes.

Ce problème est très riche en débats divers. On pourra modifier les valeurs en prenant que des nombres dont les valeurs approchées ne donnent que des valeurs par excès ou que des valeurs par défaut.

Le goûter d'anniversaire

« Marion achète pour son goûter d'anniversaire 4 bouteilles de 1 L et demi de jus de fruits bio identiques et un gâteau d'une valeur de 15 €. Elle paye en tout 23 €.

Quel est le prix d'une bouteille ? »

Le tout est connu et bien indiqué, on peut donc le représenter par 23 cubes :

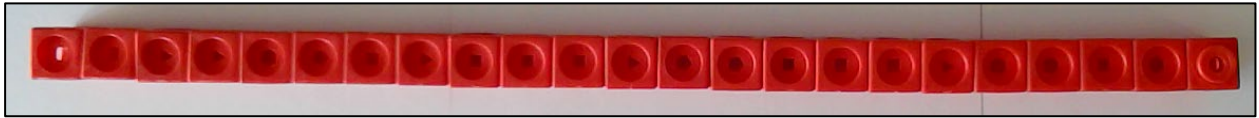


Figure 56. Représentation du tout.

Parmi les parties, on a le gâteau : on place donc 15 cubes.

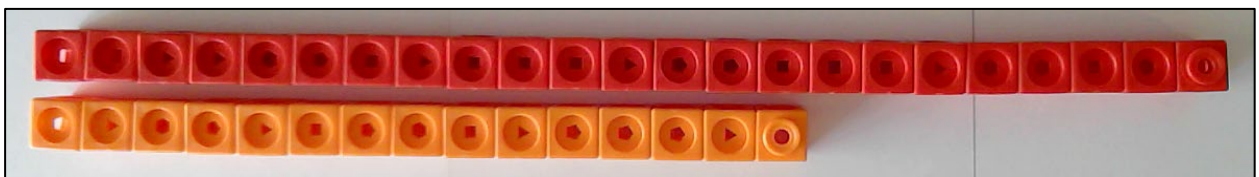


Figure 57. Représentation du tout et de la partie correspondante à l'achat du gâteau.

L'autre partie est dédiée aux bouteilles, pour lesquelles il faut 4 parties identiques.

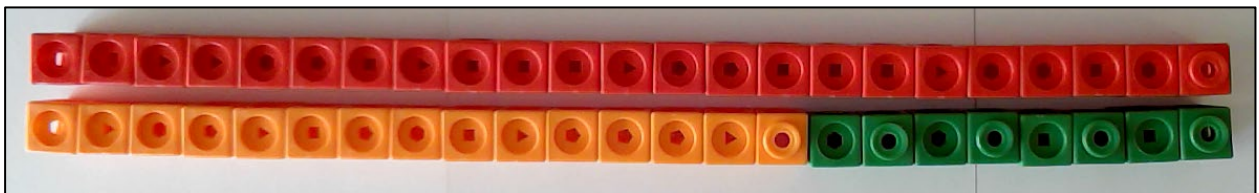


Figure 58. Représentation du tout et de l'ensemble des parties.

En testant ou en calculant, le prix d'une bouteille est de 2 €.

On peut ici commencer à raisonner comme avec les équations. En effet, dans la 2^e image, on pourrait enlever ce qui est identique, soit les 15 € sur chaque barre. Il reste alors 8 cubes qu'il faut partager équitablement en 4, soit $8 \div 4 = 2$.

Exemple : perles

« Alice utilise les $\frac{4}{7}$ de son sachet de perles pour faire un collier pour sa maman. Elle donne un tiers de ce qui lui reste à sa meilleure amie Belina pour qu'elle puisse décorer ses barrettes. Maintenant, Alice n'a plus que 12 perles dans son sachet.

Combien de perles Alice avait-elle au départ ? »

Ce problème aborde les fractions en termes d'opérateur. Il est recommandé de travailler la fraction en rituel en amont, par exemple avec une fleur des nombres²⁶.

L'exercice invite à prendre une unité de 7 cubes pour pouvoir être découpé en septième. C'est une information à faire vivre avec les élèves lors des premiers exercices de ce type.

On représente donc une barre avec 7 cubes, correspondant à une unité, c'est-à-dire le sachet en entier, soit le tout :



Figure 59. Représentation d'une unité.

On représente alors l'information $\frac{4}{7}$ pour représenter les perles du collier :

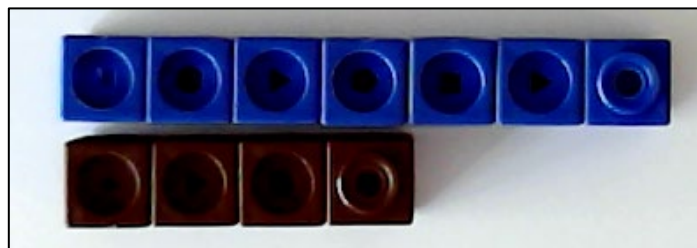


Figure 60. Représentation du tout et de la partie correspondante au nombre de perles du collier.

Dans ce qui reste, il faut prendre $\frac{1}{3}$, ce qui correspond à 1 cube (qui vaut 1 septième au départ) :



Figure 61. Représentation du tout et des parties correspondantes aux nombres de perles du collier et données à Belina.

²⁶ https://www.pedagogie.ac-nice.fr/mathematiques/wp-content/uploads/sites/30/2020/04/Fleur_nombres_S-Etienne_final.pdf et https://www.pedagogie.ac-nice.fr/mathematiques/wp-content/uploads/sites/30/2020/04/Fleur_nombre_imprimer-A3.zip

On complète le reste, ce qui correspond à 2 septièmes du sachet :



Figure 62. Représentation du tout et de l'ensemble des parties.

Voici une version iconique associée :



Figure 63. Représentation iconique associée du tout et de l'ensemble des parties.

Le traitement du modèle donne dans ce cas : $\text{Inconnu} = 7 \times (12 \div 2)$.

Ainsi, ce reste de 2 septièmes correspond à 12 perles, donc 1 septième correspond à la moitié de 12, soit 6 perles. Par proportionnalité, il vient que l'ensemble du sachet, soit 7 septièmes correspond à $7 \times 6 = 42$ perles.

On aurait pu aussi faire $\frac{2}{7} + \frac{2}{7} + \frac{2}{7} + \frac{1}{7} = \frac{7}{7}$, soit $12 + 12 + 12 + 6 = 42$.

Ces correspondances, entre le fractionnement de l'unité et le fractionnement du sachet, sont essentielles pour construire du sens sur les fractions.

Exemple : pots de confiture

« Pour faire de la confiture de prunes, votre grand-mère dispose de 1 500 g de sucre et de suffisamment de prunes.

On mélange la totalité du sucre avec les $\frac{7}{5}$ de sa masse en fruit.

Après cuisson, on met la confiture dans des pots de 500 g.

Combien de pots entiers votre grand-mère peut-elle confectionner ? »

Ce problème est à étapes, avec une fraction supérieure à 1.

On commence par prendre une barre de 5 cubes pour représenter la fraction $\frac{5}{5}$, et qui correspondra à la totalité du sucre :

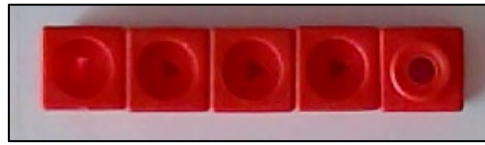


Figure 64. Représentation d'une unité.

On mélange avec les $\frac{7}{5}$ en fruit, soit une unité entière, soit 5 cubes et encore 2 cinquièmes, soit 2 cubes :

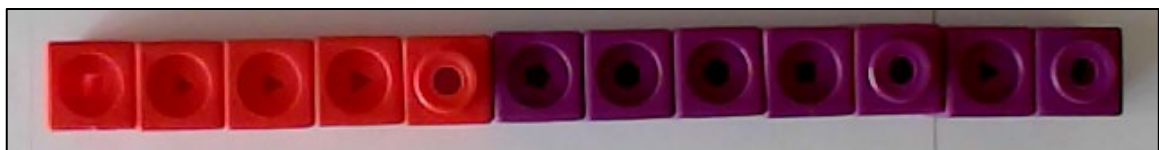


Figure 65. Représentation de la quantité d'ingrédient, en fonction de l'unité choisie.

On égale pour avoir le tout :



Figure 66. Représentation du tout et de l'ensemble des parties.

Il reste à calculer la masse totale, qui correspond à deux unités et $\frac{2}{5}$ d'unité, avec une unité de 1 500.

$\frac{1}{5}$ de 1 500 correspond à partager 1 500 en 5 parties égales, soit 300.

Ainsi, dans la marmite, il y a $2 \times 1\,500\text{ g} + 2 \times 300\text{ g} = 3\,600\text{ g}$ de confiture.

Les cubes ayant une masse de 300 g, il est difficile d'utiliser le tout précédent (matériel) en l'état. Il faut donc modifier la valeur de la brique unité, le plus simple ici étant de prendre 100 g pour un cube. Ainsi, le tout devient 36 cubes !



Figure 67. Représentation du tout lié à la masse totale.

Et il faut trouver le nombre de pots de 500 g, donc chercher combien de blocs de 5 cubes on peut mettre :

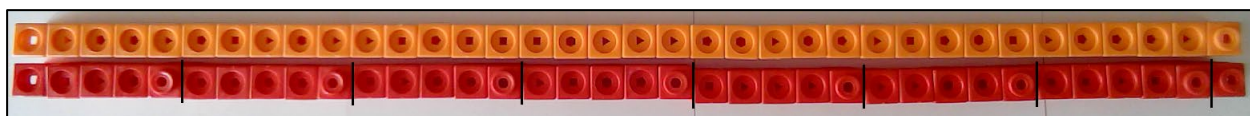


Figure 68. Représentation du tout et de l'ensemble des parties.

On peut confectionner 7 pots entiers. En effet, $3\ 600 = 7 \times 500 + 100$.

Exemple : magasin de fourniture scolaire

« Dans un magasin de fournitures scolaires, Romy achète 7 cahiers identiques et une trousse à 9 €. Jonaël achète 3 cahiers identiques à ceux de Romy et un coffret à dessin à 16 €. Le vendeur s'exclame : « tiens, vous avez la même somme à payer ! ». Combien coûte un cahier ? »

Le tout n'est pas clairement identifié ici. Ce type de problème est souvent utilisé en tant que problème algébrique. Il reste un problème arithmétique, dès lors qu'on comprend bien les étapes.

Le prix du cahier n'étant pas connu, il est difficile de représenter par un nombre de cubes. Par conséquent, on lui donne une valeur arbitraire de 1 cube sans savoir à combien cela correspond. C'est l'inconnu. La photo suivante indique qu'il y a 7 cahiers de coût inconnu et la trousse à 9 € dont on peut prendre 9 cubes bleus de valeur 1 :

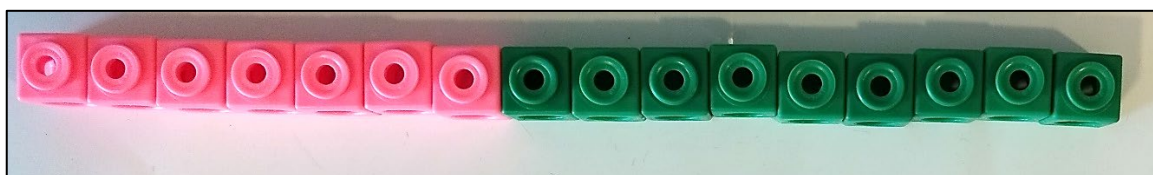


Figure 69. Représentation du prix des achats de Romy.

On peut représenter de même l'achat de Jonaël, avec 3 cubes violets correspondant aux mêmes cahiers de Romy et le coffret à dessin représenté par 16 cubes rouges de valeur 1 :

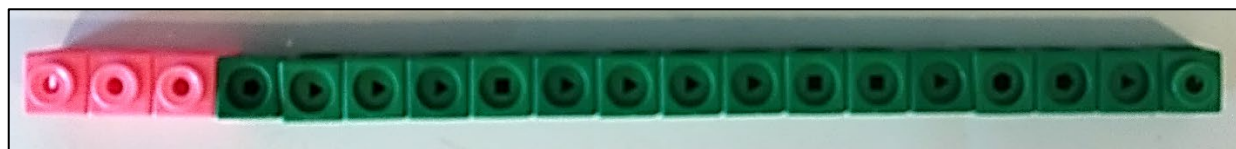


Figure 70. Représentation du prix des achats de Jonaël.

Puisque le vendeur indique que les deux achats ont la même somme, cela signifie que les deux barres doivent être égales :



Figure 71. Comparaison des deux représentations.

En l'état, ce n'est pas le cas, ce qui signifie que le prix du cahier n'est pas 1 €.

Pour déterminer le prix de ce cahier, on peut raisonner en indiquant que chacun d'eux a acheté 3 cahiers identiques, donc si on enlève ces cahiers, soit 3 cubes violets à chacun, ça ne change pas l'égalité :



Figure 72. Reste après soustraction du prix de 3 cahiers.

De même, on peut enlever 9 cubes de valeur 1 dans chaque barre, cela ne change pas le résultat :

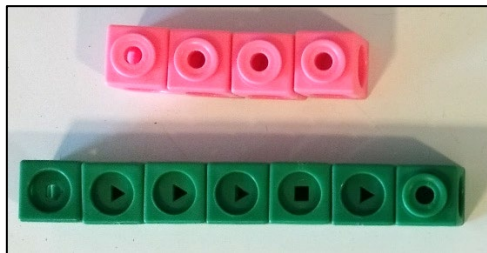


Figure 73. Reste après soustraction du prix des achats connus.

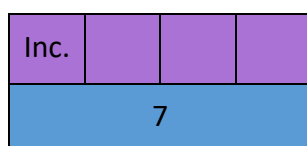
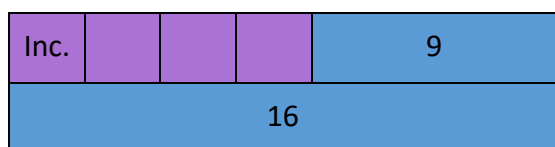
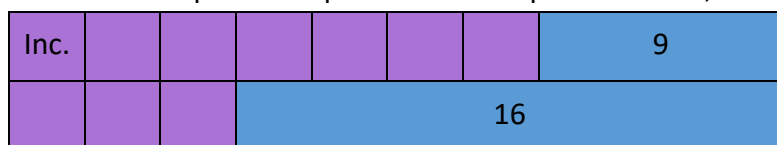
Ainsi, 4 cahiers coûtent 7 euros. Il ne reste plus qu'à faire le partage.

Le prix d'un cahier est donc de $7 \text{ €} \div 4 = 1,75 \text{ €}$.

Point de vigilance :

L'utilisation du matériel à ce stade ne permet plus de faire l'analogie avec le modèle. Cette situation indique qu'il est nécessaire de le dépasser et d'utiliser le modèle iconique ou alors d'atteindre un niveau d'abstraction suffisant pour considérer que 4 cubes, c'est ici 7 €.

Cette situation peut se représenter iconiquement ainsi, avec son pendant algébrique :



$$7x + 9 = 3x + 16$$

$$7x + 9 - 3x = 3x + 16 - 3x$$

$$4x + 9 = 16$$

$$4x + 9 - 9 = 16 - 9$$

$$4x = 7$$

$$\frac{4x}{4} = \frac{7}{4}$$

$$x = \frac{7}{4} = 1,75$$

Exemple : basket

« Stephen Curryl et Andrew Wiggins sont deux joueurs US de basketball classés en NBA en 2020-2021, tous deux de l'équipe des GSW (Golden State Warriors, basé à San Francisco, Californie). Le nombre de points moyen par match entre Stephen Curryl et Andrew Wiggins est dans le ratio de 5:3. Stephen Curryl a 12 points de plus par match que Andrew Wiggins. Quel est le nombre de points moyen par match de chacun des deux joueurs ? »

Dire que le ratio entre Stephen Curryl et Andrew Wiggins est de 5:3 signifie que sur un match, si Stephen Curryl marque 5 points, alors Andrew Wiggins marque 3 points. Il s'agit là d'une modélisation, qu'il faut bien faire comprendre, à l'image de lancer de dé (la face 2 sort $\frac{1}{6}$ fois si on tirait le dé une infinité de fois). On peut donc représenter la situation entre les deux joueurs :

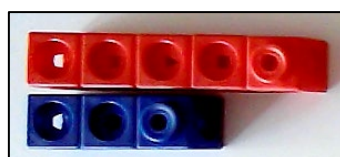


Figure 74. Représentation de la situation entre les deux joueurs sous forme unitaire.

Ainsi, pour égaliser les scores, il manque 2 points à Andrew Wiggins.



Figure 75. Représentation sous forme de partie-tout.

En utilisant la proportionnalité entre le nombre de points des deux joueurs, à chaque fois que Stephen Curryl marque 5 points, alors Andrew Wiggins marque 3 points et il manque 2 points.

En complétant pour obtenir les 12 points demandés, avec le matériel, il vient :



Figure 76. Représentation pour obtenir le différentiel de 12 points.

Ainsi, Stephen Curryl marque 30 points par match en moyenne et Andrew Wiggins en marque 18.

8.7.5. Limites du modèle en barres

Le modèle en barres est utilisé dans le cadre des nombres rationnels positifs pour résoudre des problèmes qui conduisent à des équations du premier degré. Il est nécessaire d'avoir recourt à un autre matériel pour les nombres négatifs et pour les problèmes qui conduisent à une équation de degré supérieur à 1.

8.8. Nombres relatifs

On utilise ici des jetons bicolores. On peut utiliser les « unités » double face des tuiles algébriques (voir [la partie suivante](#)). Les tuiles « unités » comportent l'inscription « 1 » et « -1 », ce qui peut être un frein à l'idée de modifier la valeur de la tuile, en lui associant par exemple la valeur « 10 » ou « 4,2 » par exemple. Les jetons posent la difficulté de ne pas percevoir la grandeur longueur. Les grandeurs utilisées dans cette partie sont la longueur (magnitude ou valeur absolue du nombre) et la couleur (signe du nombre).

Le geste associé à chaque étape est important à montrer aux élèves.

8.8.1. Somme

La somme de deux nombres revient à mettre ensemble, réunir une quantité à une autre déjà posée. Il s'agit d'une réunion de collections, familières chez les élèves car vues dès le cycle 1.

L'utilisation du matériel ne pose pas d'obstacles pour l'addition.

Dans un premier temps, il faudra veiller à faire découvrir la notion avec le matériel.

Dans un deuxième temps, il faut demander de prévoir le résultat, puis de valider ou non avec le matériel.

Dans un troisième temps, on introduit d'autres types de nombres.

Règle du matériel jeton bicolore :

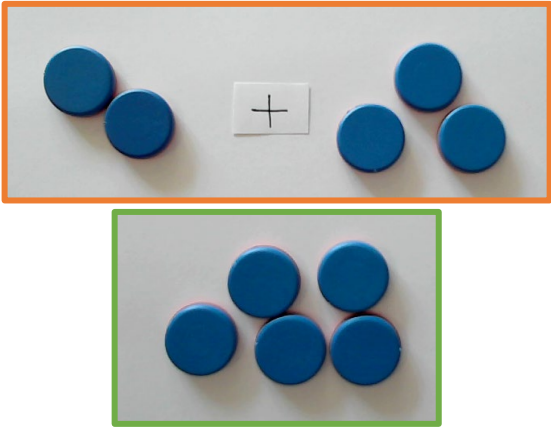
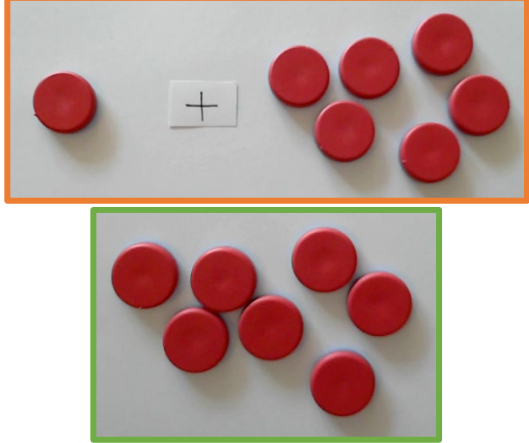
| Un jeton (+1) et un jeton (-1) s'annulent et on peut donc les enlever tous les deux²⁷.

Légende pour les images des exemples suivants :

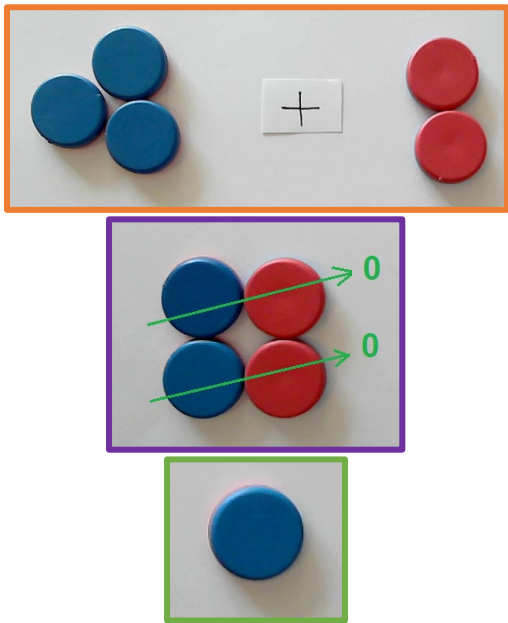
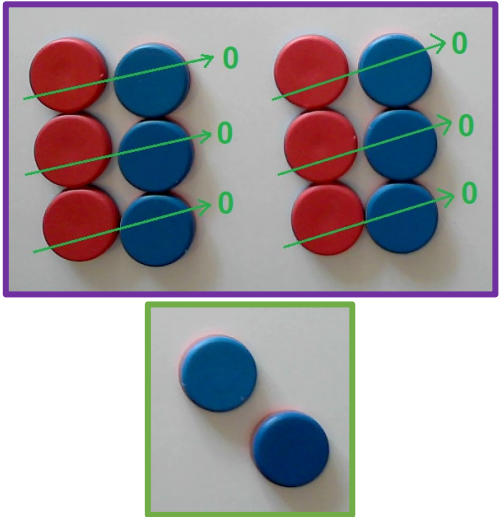
- cadre orange : position de départ ;
- cadre violet (parfois) : position intermédiaire ;
- cadre vert : position finale.

²⁷ Un intéressant dialogue entre un enseignant et un élève à propos de ce matériel sur le site des Jobineries (2005) : <http://www.gilles-jobin.org/jobineries/index.php?2005/10/19/285-laddition-et-la-soustraction-chez-les-entiers>

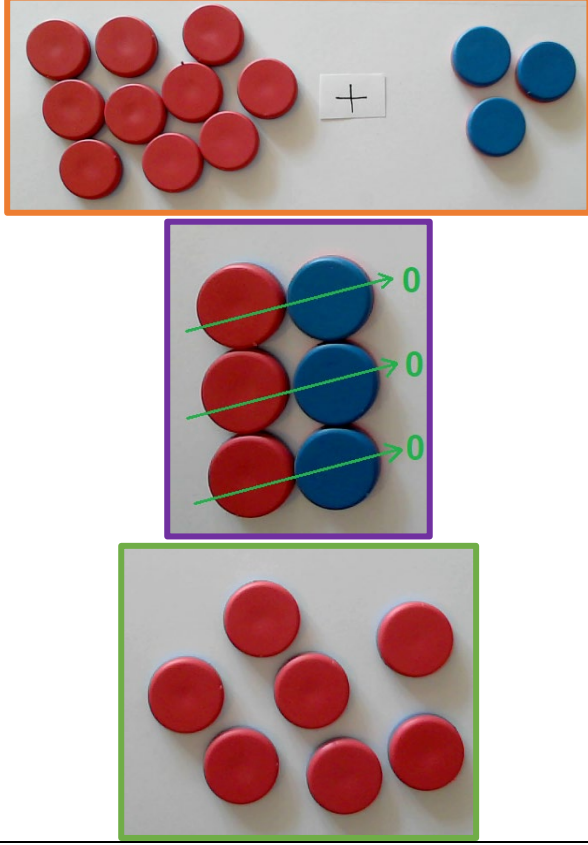
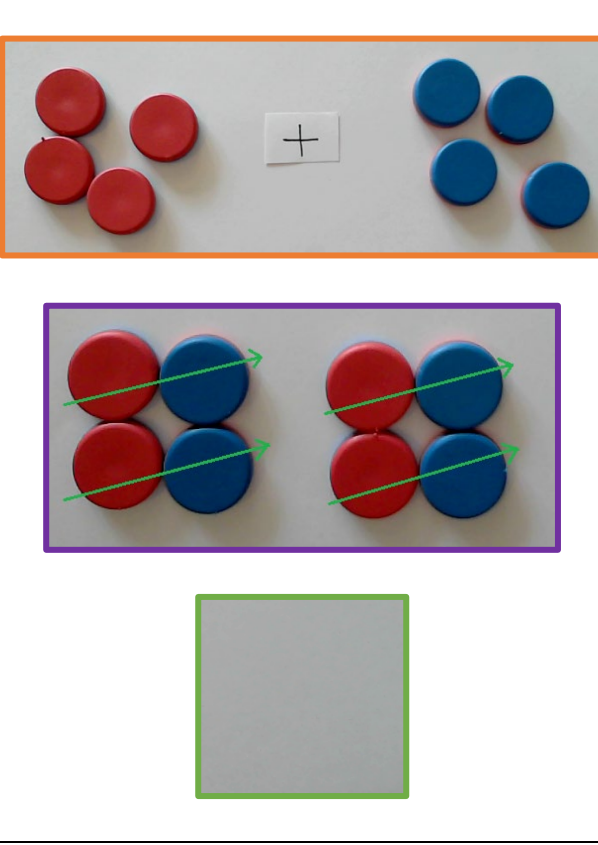
Exemple : lorsque les deux nombres ont le même signe

$(+2) + (+3)$ On fait la réunion de deux jetons positifs et de trois jetons positifs. On compte combien de jetons positifs on a.	$(-1) + (-6)$ On fait la réunion d'un jeton négatifs et de six jetons négatifs. On compte combien de jetons négatifs on a.
	
On obtient (+5).	On obtient (-7).

Exemple : lorsque les deux nombres sont de signes différents

$(+3) + (-2)$ On fait la réunion de trois jetons positifs et de deux jetons négatifs. Or, chaque couple de jeton positif ET jeton négatif s'annule.	$(-6) + (+8)$ On fait la réunion de six jetons négatifs et de huit jetons positifs. Or, chaque couple de jeton positif ET jeton négatif s'annule.
	
On obtient (+1).	On obtient (+2).

Exemple : lorsque les deux nombres sont de signes différents

$(-10) + (+3)$ On fait la réunion de dix jetons négatifs et de trois jetons positifs. Or, chaque couple de jeton positif ET jeton négatif s'annule.	$(-4) + (+4)$ et $(+4) + (-4)$ On fait la réunion de quatre jetons positifs et de quatre jetons négatifs. Or, chaque couple de jeton positif ET jeton négatif s'annule.
	
On obtient (-7) .	On obtient 0.

8.8.2. Notion d'opposé

Le dernier calcul de la partie précédente est important et doit être vécu suffisamment souvent. Le but est de le voir dans les deux sens de l'égalité (notion d'identité), soit $(-4) + (+4) = 0$, soit $0 = (-4) + (+4)$.

La notion d'opposée est associée à la symétrie centrale, notamment en visualisant la droite graduée et en plaçant les points $A(+4)$ et $A'(-4)$. Ces points sont alors symétriques par rapport à $O(0)$.

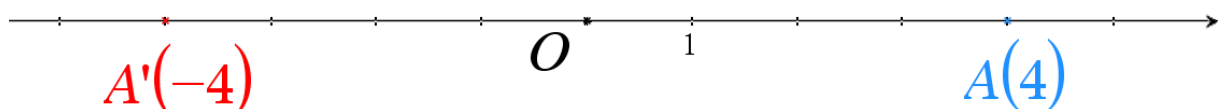


Figure 77. Droite graduée avec les points A et A' .

On écrit alors que $opp(4) = -4$ et $opp(-4) = +4$.

Ce travail permet de construire les égalités suivantes : $-(+4) = -4$ et $-(-4) = +4$.

Dans la symétrie centrale, on commence à voir apparaître la notion de « retournement » (homothétie de rapport -1). Le mot « retournement » est à voir dans l'espace, comme lorsqu'on retourne une carte à jouer.

Sur cet exemple, la figure de droite est « retournée » par rapport à celle de gauche (et vice-versa). C'est une représentation mentale à associer.

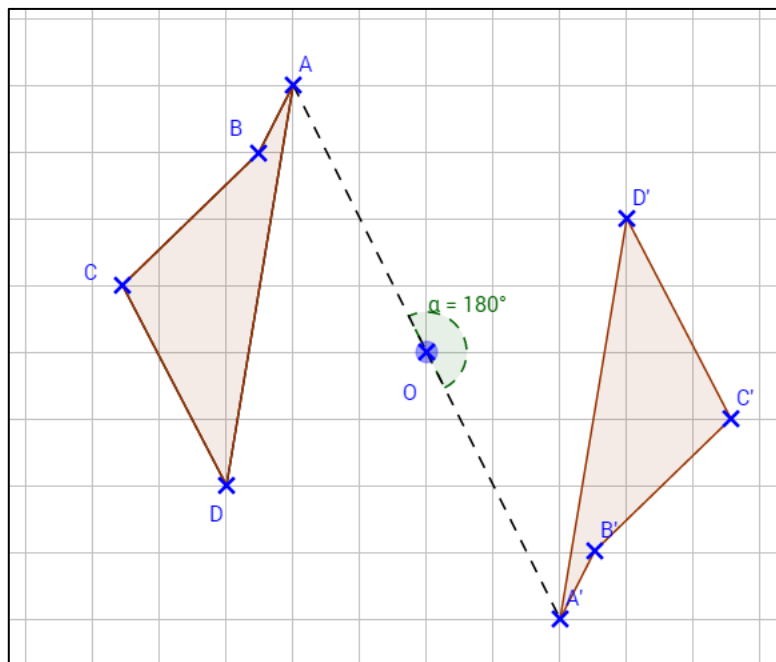


Figure 78. Exemple de symétrie centrale autour du point O d'une figure.

Voici une représentation avec les jetons :

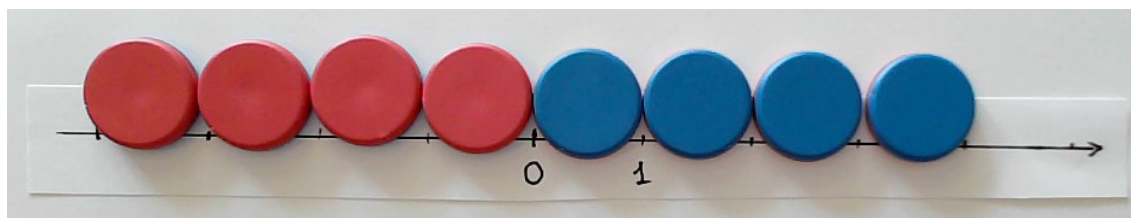


Figure 79. Représentation de jetons sur la droite graduée de part et d'autre du zéro pour montrer la magnitude.

On pourra utiliser une pochette plastique pour retourner plus aisément les jetons.

Cet aspect est aussi à promouvoir pour les opérations de multiplication et division, ainsi que dans les tuiles algébriques.

Pour justement commencer à prévoir la multiplication, il est recommandé de demander aux élèves quel est le résultat de $((+1) + (-1)) \times (+4)$.

Le résultat, 0, ne sera peut-être pas trouvé par tous directement, d'autant que ce n'est pas facile à représenter avec le matériel : l'association entre rien et zéro demande du temps, ce fut le cas dans l'histoire²⁸ d'ailleurs.

²⁸ Ifrah, G. (1981). *Histoire universelle des chiffres*. Paris : Seghers.

Il sera intéressant alors d'utiliser la distributivité et d'obtenir que $(+1) \times (+4) + (-1) \times (+4) = 0$, ce qui signifie que les produits $(+1) \times (+4)$ et $(-1) \times (+4)$ sont opposés l'un de l'autre.

Or, $(-1) \times (+4)$ n'a pas réellement de sens pour le matériel : il faut faire (-1) rangée de 4 jetons positifs ! Pour le matériel, cela restera le retournement de $(+1) \times (+4)$, qui est lui 1 rangée de 4 jetons positifs, physiquement possible.

8.8.3. Différence

L'idée de soustraire est d'enlever une quantité à une autre déjà posée.

Cependant, on ne peut parfois pas enlever la quantité voulue, il faut alors utiliser la règle suivante.



Règle du matériel jeton bicolore :



Contrairement à la précédente règle, à partir de rien, on peut ajouter à la fois un jeton $(+1)$ et un jeton (-1) .

Légende pour les images des exemples :

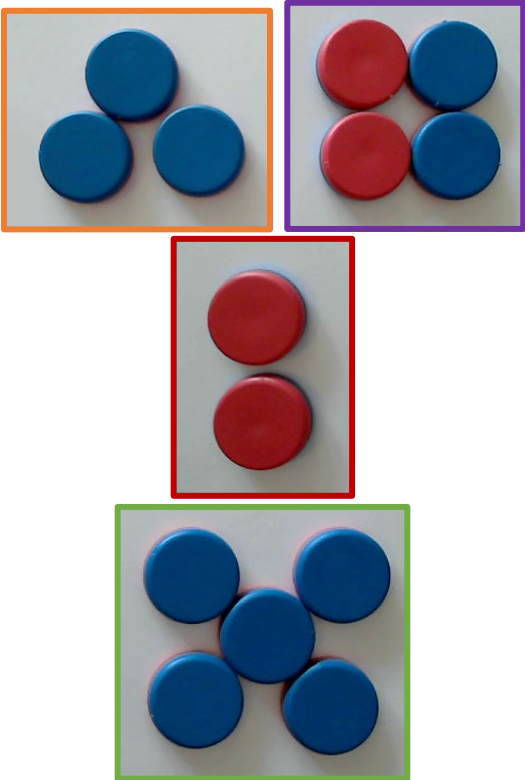
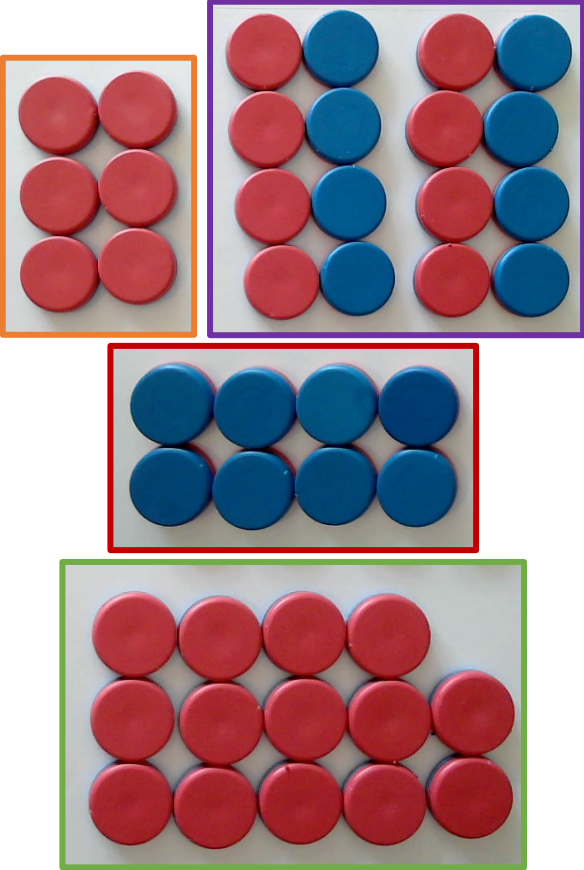
- cadre orange : position de départ ;
- cadre bordeaux : ce qui est retiré de la position de départ ;
- cadre violet (parfois) : ajout de « rien » ;
- cadre vert : position finale.

Exemple : lorsque les deux nombres sont de même signe

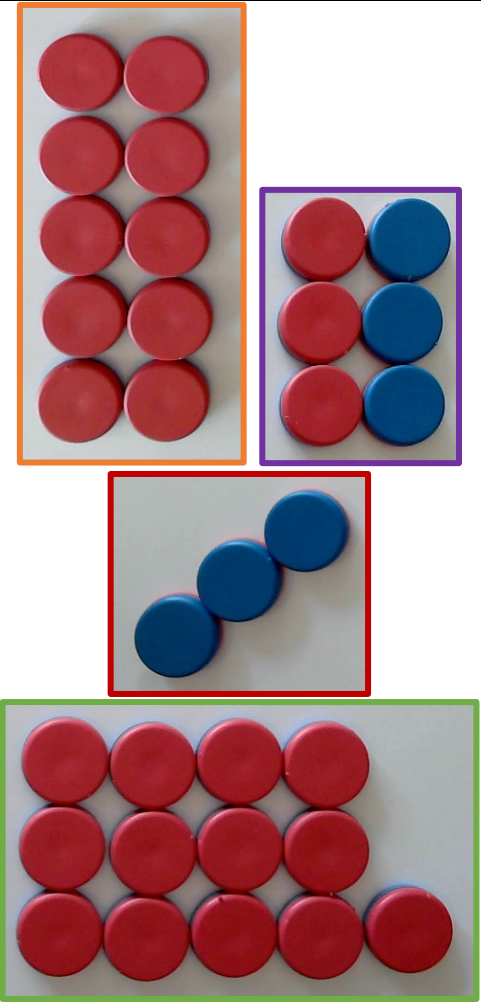
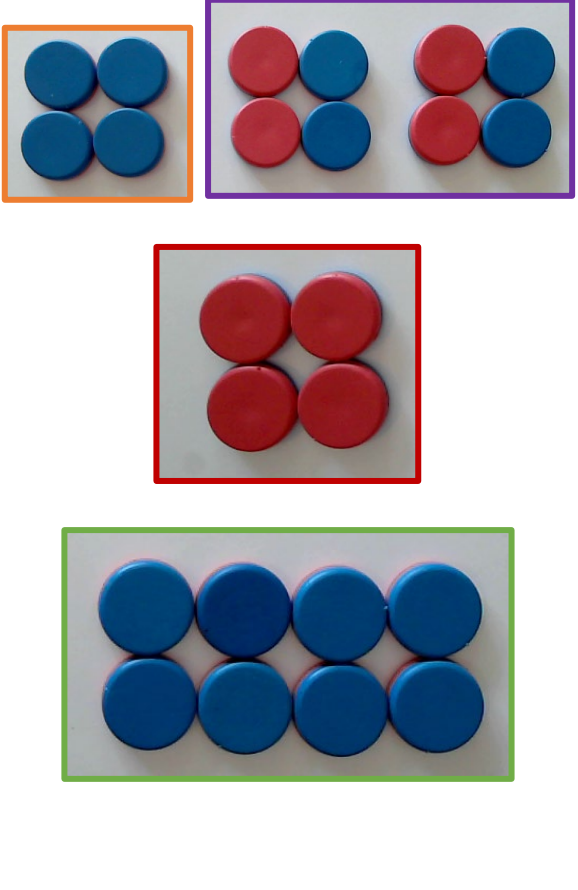
<p>$(+4) - (+3)$ Pas de problème ici pour enlever 3 jetons positifs aux 4 positifs déjà présents.</p>	<p>$(-5) - (-7)$ On ne peut pas enlever 7 jetons négatifs aux 5 négatifs présents. Il faut utiliser la règle précédente au moins 2 fois pour avoir suffisamment de jetons négatifs et en enlever 7.</p>
	

	
<p>Pas de problème ici pour enlever 3 jetons positifs aux 4 positifs déjà présents. On obtient (+1).</p>	<p>On obtient (+2).</p>

Exemple : lorsque les deux nombres sont de signes contraires

<p style="text-align: center;">$(+3) - (-2)$</p> <p>On ne peut pas enlever 2 jetons négatifs car il n'y a que des positifs. On utilise alors la règle précédente au moins 2 fois pour avoir suffisamment de jetons négatifs et en enlever 2.</p>	<p style="text-align: center;">$(-6) - (+8)$</p> <p>On ne peut pas enlever 8 jetons positifs car il n'y a que des négatifs. On utilise alors la règle précédente au moins 8 fois pour avoir suffisamment de jetons positifs et en enlever 8.</p>
	
<p>On obtient (+5).</p>	<p>On obtient (-14).</p>

Exemple : lorsque les deux nombres sont de signes contraires

$(-10) - (+3)$ On ne peut pas enlever 3 jetons positifs car il n'y a que des négatifs. On utilise alors la règle précédente au moins 3 fois pour avoir suffisamment de jetons positifs et en enlever 3.	$(+4) - (-4)$ On ne peut pas enlever 4 jetons négatifs car il n'y a que des positifs. On utilise alors la règle précédente au moins 4 fois pour avoir suffisamment de jetons négatifs et en enlever 4.
	
On obtient (-13) .	On obtient $(+8)$.


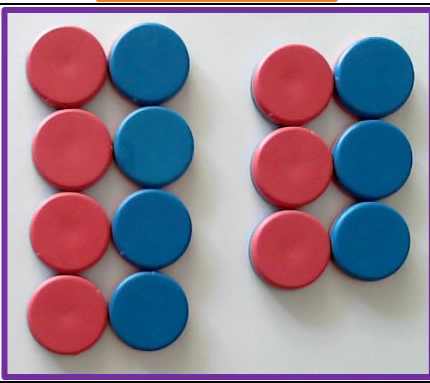



Mis à part dans le premier cas, on utilise l'identité $x - y = x + 0 - y = x + y + opp(y) - y = x + opp(y)$.

On retrouve alors que « soustraire par un nombre, c'est lui ajouter son opposé ».

Remarque :

Certains élèves vont parfois utiliser la règle de cette partie autant de fois que le diminuteur (deuxième terme de la soustraction) et faire leur opération.

Exemple : $(-5) - (-7)$:


<p>On pose 5 jetons négatifs pour indiquer le diminuende (premier terme de la soustraction).</p>	
<p>On a besoin de 7 jetons négatifs, donc on les convoque avec 7 jetons positifs. On se retrouve avec $5 + 7 = 12$ jetons négatifs et 7 jetons positifs.</p>	
<p>On enlève les 7 jetons négatifs du diminuteur. Il reste alors $12 - 7 = 5$ jetons négatifs et toujours 7 jetons positifs.</p>	
<p>On annule les couples de jetons positifs et négatifs autant que possible. Il y en a 5.</p>	
<p>Il reste 2 jetons positifs, soit $(-5) - (-7) = +2$.</p>	


Cette « méthode » est un élément intéressant permettant de faire du débat en classe, les deux permettant d'obtenir un résultat correct. La première méthode est plus efficace en termes de nombre de jetons utilisés et d'étapes. Le matériel devant cependant être dépassé, il ne nous semble pas utile d'imposer l'une ou l'autre.

8.8.4. Produit

Naturellement, le produit de nombres relatifs sera abordé par les nombres rectangles.

On commence par observer et décrire l'organisation de ces deux exemples :


$+5$
<p>$+5$ est ici vu comme 1 rangée de 5 jetons positifs, soit $+5 = 1 \times (+5)$. Par convention, on peut écrire $(+1) \times (+5)$.</p> <p>Par commutativité, on peut aussi voir $+5$ comme 5 rangées de 1 jeton positif, soit $+5 = 5 \times (+1)$. Par convention, on peut écrire $(+5) \times (+1)$.</p> <p>D'où $+5 = (+1) \times (+5) = (+5) \times (+1)$.</p>


-6
<p>-6 est ici vu comme 2 rangées de 3 jetons négatifs, soit $-6 = 2 \times (-3)$. Par convention, on peut écrire $(+2) \times (-3)$.</p>

Une question qui vient (ou à provoquer) est : a-t-on l'égalité $-6 = (-3) \times (+2)$?

En essayant de décrire par une phrase, cela signifie qu'on aurait (-3) rangées de 2 jetons positifs, ce qui a peu de sens physiquement, et à ne pas confondre avec $-(3$ rangées de 2 jetons positifs).

Pour parvenir à ce résultat, il faut démontrer un résultat et voir son effet sur le matériel.

On fait de même que dans la notion d'opposé.

On part de $((+3) + (-3)) \times (+2)$ et on demande quel en est le résultat.

On utilise ensuite la distributivité pour séparer le calcul en deux, et on obtient : $(+3) \times (+2) + (-3) \times (+2) = 0$.

Ainsi $(+3) \times (+2)$ et $(-3) \times (+2)$ sont opposés.

Cependant, $(+3) \times (+2)$ et $(+3) \times (-2)$ sont aussi opposés.

Or l'opposé de l'opposé revient à l'identité, ce qui signifie que $(-3) \times (+2) = (+3) \times (-2) = -6$.

De plus, on a $(-2) \times (+3) = (+2) \times (-3) = -6$, et les dispositions en rectangle sont les mêmes, à rotation de 90° près, ce qui montre aussi (sur un exemple, certes) qu'on peut aussi étendre la commutativité aux nombres relatifs.

L'extension à tous les nombres peut se faire comme précédemment.

Remarque :

$(-3) \times (+2)$ peut être vu comme une homothétie du nombre $+2$ et de rapport -3 de centre $O(0)$.

L'effet de ces deux propriétés sur le matériel permet de justifier la règle suivante.

Règle du matériel jeton bicolore :

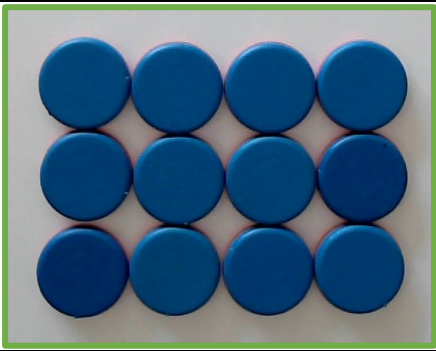

Si le premier facteur d'un produit est positif, alors on place le nombre de fois la rangée de jetons du deuxième facteur.

Si le premier facteur d'un produit est négatif, alors il faut faire pareil que le premier point, suivi d'un retournement de l'ensemble des jetons.


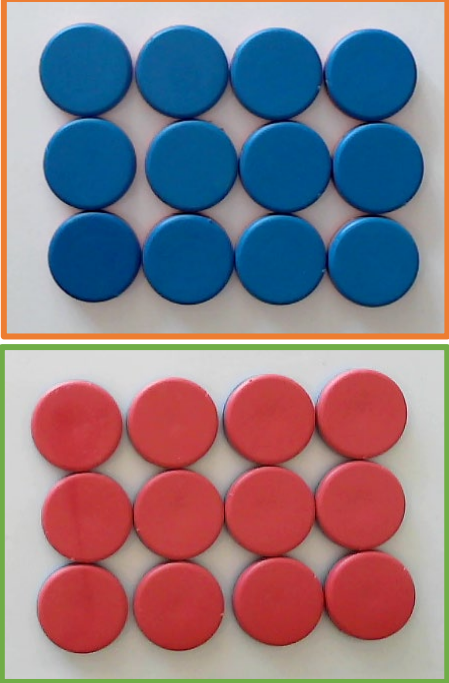
Légende pour les images des exemples :

- cadre orange : position de départ ;
- cadre vert : position finale.

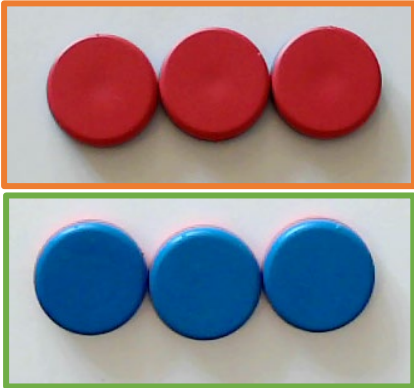
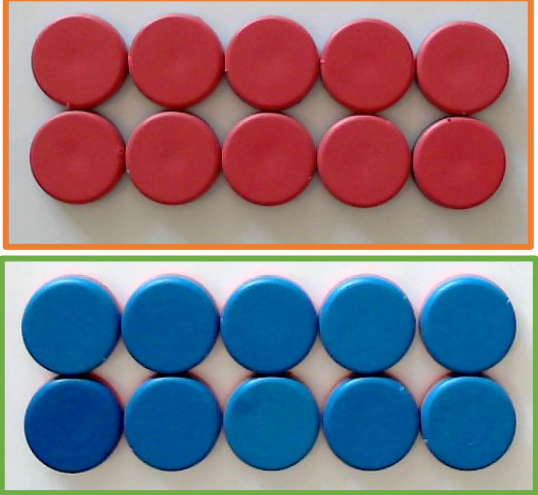
Si le premier facteur est positif :

$(+3) \times (+4)$ On construit un rectangle de 3 par 4 jetons positifs.	$(+2) \times (-5)$ On construit un rectangle de 2 par 5 jetons négatifs.
	
On obtient 12 jetons positifs, soit $+12$.	On obtient 10 jetons négatifs, soit -10 .

Si le premier facteur est négatif, alors on construit le rectangle sans tenir compte du signe du premier facteur, puis on retourne le rectangle. Une pochette plastique peut aider à ce retournement.

$(-1) \times (+2)$ On construit un rectangle de 1 par 2 jetons positifs, puis on retourne tous les jetons.	$(-3) \times (+4)$ On construit un rectangle de 3 par 4 jetons positifs, puis on retourne tous les jetons.
	
On obtient -2 .	On obtient -12 .

Même si le deuxième facteur est négatif, cela ne change pas la procédure, puisqu'il suffit de mettre des jetons négatifs, puis d'opérer un retournement.

$(-1) \times (-3)$ On construit un rectangle de 1 par 3 jetons négatifs, puis on retourne tous les jetons.	$(-2) \times (-5)$ On construit un rectangle de 2 par 5 jetons négatifs, puis on retourne tous les jetons.
	
On obtient $+3$.	On obtient $+10$.

Attention à l'enfermement dans le matériel !

Après une session de découverte, il faut ensuite que les élèves prévoient le résultat avant de le valider (ou non).

Le lien avec les règles de signes « classiques » pourra alors être fait.

Remarque :

On peut faire une table de multiplication étendue, réalisable avec un tableur ou un logiciel de géométrie dynamique, et voir les effets des retournements sur l'exemple $(+8) \times (+6)$.

-100	-90	-80	-70	-60	-50	-40	-30	-20	-10	10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
-90	-81	-72	-63	-54	-45	-36	-27	-18	-9	9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
-80	-72	-64	-56	-48	-40	-32	-24	-16	-8	8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
-70	-63	-56	-49	-42	-35	-28	-21	-14	-7	7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
-60	-54	-48	-42	-36	-30	-24	-18	-12	-6	6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
-50	-45	-40	-35	-30	-25	-20	-15	-10	-5	5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
-40	-36	-32	-28	-24	-20	-16	-12	-8	-4	4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
-30	-27	-24	-21	-18	-15	-12	-9	-6	-3	3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
-20	-18	-16	-14	-12	-10	-8	-6	-4	-2	2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
-10	-9	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
-10	-9	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	-1	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7	-8	-9	-10
20	18	16	14	12	10	8	6	4	2	-2	-2	-4	-6	-8	-10	-12	-14	-16	-18	-20
30	27	24	21	18	15	12	9	6	3	-3	-3	-6	-9	-12	-15	-18	-21	-24	-27	-30
40	36	32	28	24	20	16	12	8	4	-4	-4	-8	-12	-16	-20	-24	-28	-32	-36	-40
50	45	40	35	30	25	20	15	10	5	-5	-5	-10	-15	-20	-25	-30	-35	-40	-45	-50
60	54	48	42	36	30	24	18	12	6	-6	-6	-12	-18	-24	-30	-36	-42	-48	-54	-60
70	63	56	49	42	35	28	21	14	7	-7	-7	-14	-21	-28	-35	-42	-49	-56	-63	-70
80	72	64	56	48	40	32	24	16	8	-8	-8	-16	-24	-32	-40	-48	-56	-64	-72	-80
90	81	72	63	54	45	36	27	18	9	-9	-9	-18	-27	-36	-45	-54	-63	-72	-81	-90
100	90	80	70	60	50	40	30	20	10	-10	-10	-20	-30	-40	-50	-60	-70	-80	-90	-100

Figure 80. Tableau montrant les symétries dans les résultats de tables de multiplication selon des nombres rectangles.

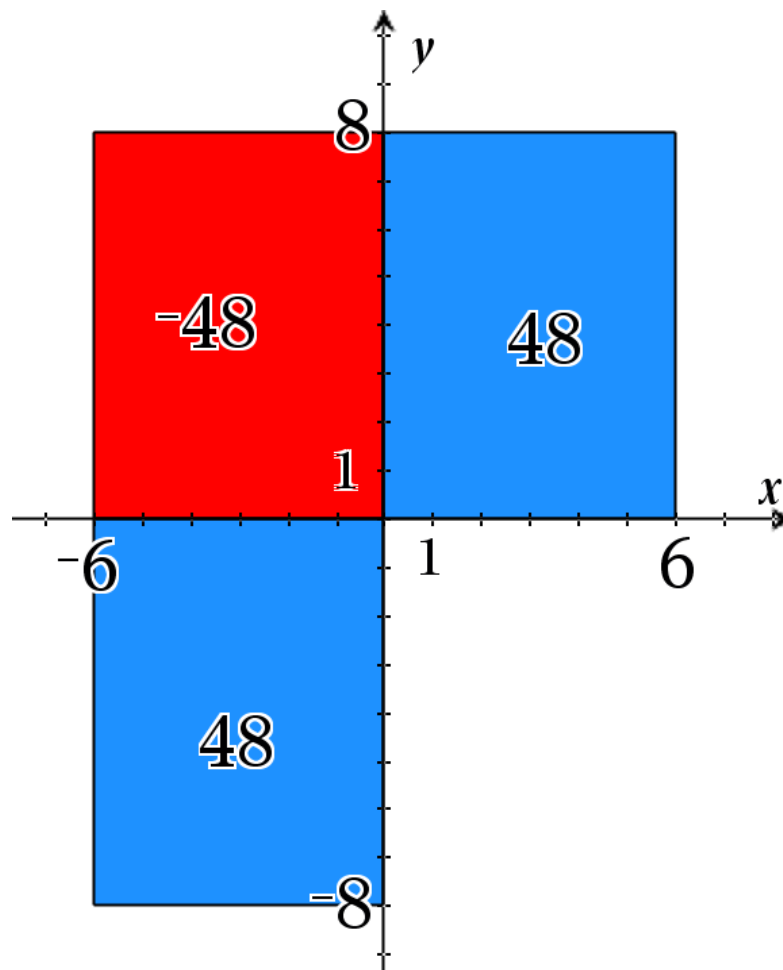


Figure 81. Image montrant les symétries dans les aires des surfaces données par des nombres rectangles.

La transformation de $(+8) \times (+6)$ en $(+8) \times (-6)$ permet de voir la transformation de $+48$ en -48 .

Puis la transformation de $(+8) \times (-6)$ en $(-8) \times (-6)$ permet de voir à nouveau la transformation de -48 en $+48$.

8.8.5. Notion d'inverse

L'inverse est défini comme le produit de deux nombres non nuls (donc l'aire) est égal à 1.

Par exemple, en partant d'un rectangle avec comme dimension imposée pour un côté de 2 :



On obtient ici une aire de 2.

Or on a vu précédemment qu'on pouvait fractionner les côtés, et on partage équitablement ici la dimension de 1 en 2.



Ainsi un rectangle de dimensions 2 par $\frac{1}{2}$ permet d'avoir une aire de 1, ce qui signifie que 2 et $\frac{1}{2}$ sont inverses l'un de l'autre, de même que $\frac{1}{2}$ et 2.

De façon générale, il vient que les nombres $n \in \mathbb{Z}^*$ et $\frac{1}{n}$ sont inverses l'un de l'autre (le cas négatif provient du point précédent sur le produit).

On pourra ainsi poursuivre avec les rationnels.

8.8.6. Quotient

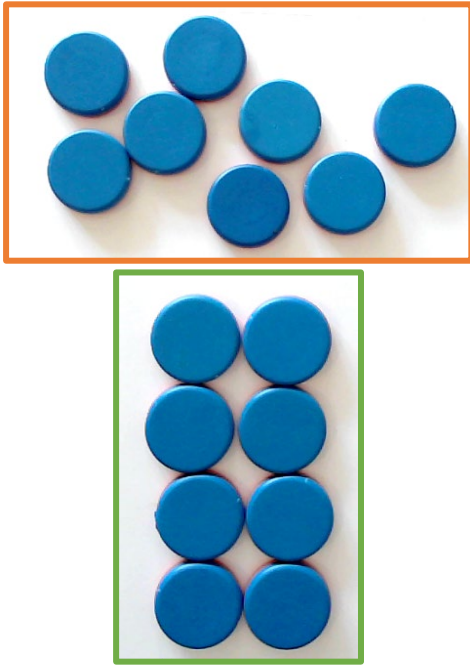

On peut voir le quotient $\frac{a}{b}$ où $(a; b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, comme $a \times \frac{1}{b}$, et utiliser la notion d'inverse, ainsi que la règle des signes issue du produit.

Légende pour les images des exemples :

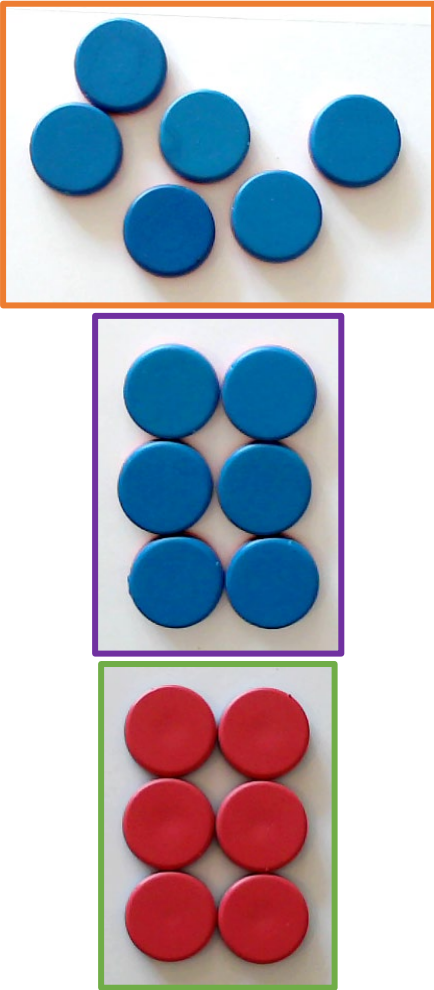
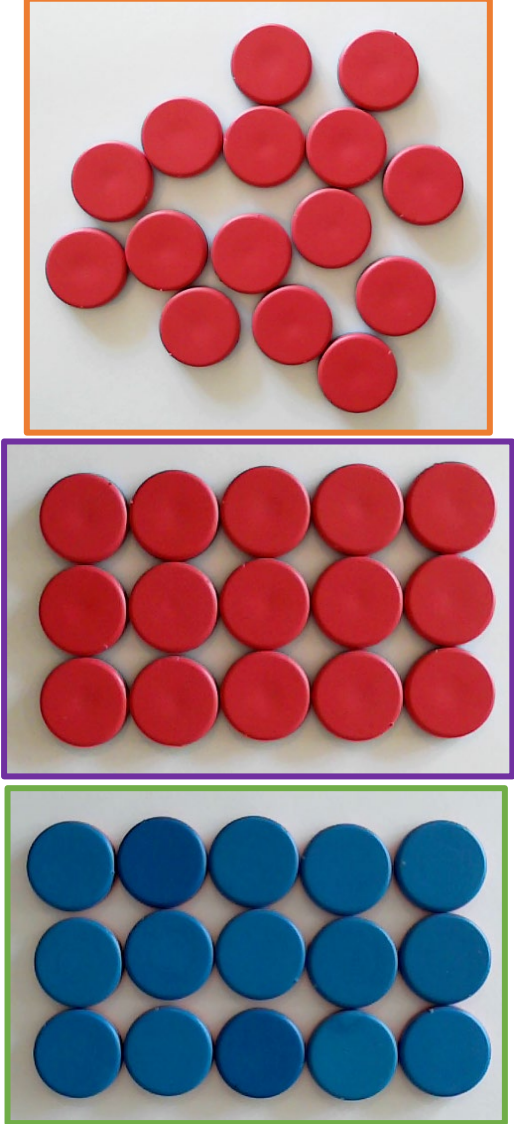
- cadre orange : position de départ ;
- cadre violet (parfois) : position intermédiaire ;
- cadre vert : position finale.

On peut aussi voir que le quotient $\frac{a}{b}$ où $(a; b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, est le rectangle d'aire a et dont une dimension est b . On cherche alors l'autre dimension.

Dans le cas où la dimension b est positive, cela ne pose pas de problème, autre que le calcul :

$(+8) \div (+4)$ On prend 8 jetons positifs et on construit un rectangle avec une dimension de 4.	$(-12) \div (+3)$ On prend 12 jetons négatifs et on construit un rectangle avec une dimension de 3.
	
On obtient pour l'autre dimension +2 (2 jetons positifs).	On obtient pour l'autre dimension -4 (4 jetons négatifs).

Dans le cas où la dimension b est négative, il faut se rappeler comment le produit a été réalisé, et notamment qu'un retournement était nécessaire, ce qui est toujours le cas :

$(+6) \div (-3)$ <p>On prend 6 jetons positifs, on construit un rectangle avec une dimension de 3, et on retourne.</p>	$(-15) \div (-5)$ <p>On prend 15 jetons négatifs, on construit un rectangle avec une dimension de 5, et on retourne.</p>
	
On obtient pour l'autre dimension -2 .	On obtient pour l'autre dimension $+3$.

Règle du matériel jeton bicolore :

Si le diviseur est positif, alors on construit un rectangle d'aire le dividende et d'un côté le diviseur.

Si le diviseur est négatif, alors on construit un rectangle d'aire le dividende et d'un côté le diviseur en valeur absolue, suivi d'un retournement.

8.9. Résolution de problèmes algébriques : tuiles algébriques

8.9.1. Recherche et constats

La recherche sur l'enseignement de l'algèbre est étayée par de nombreux didacticiennes et didacticiens : Artigue, Vergnaud, Grugeon, Pilet, Chevallard entre autres.

Ils indiquent tous la difficile transition entre l'arithmétique et l'algèbre.

Duval montre la difficulté de passer d'un registre sémiotique à l'autre, notamment passer du registre de la langue au registre des représentations, et aussi du registre des représentations au registre du calcul.

Pour faire apparaître la nécessité de l'algèbre, les élèves doivent être confrontés à des problèmes résistants. Même si les problèmes basiques permettent de poser les fondations, les problèmes complexes conduiront à une maîtrise des propriétés des égalités par exemple, comme le problème « magasin de fourniture scolaire » ([voir](#)).

L'appui sur les représentations mentales comme l'aire d'un rectangle pour la multiplication reste un outil efficace pour la compréhension des expressions algébriques, par exemple la différence entre x^2 et $2x$.

Les constats d'erreurs d'élèves sont nombreux en algèbre²⁹, pour des causes bien souvent multidimensionnelles.

8.9.2. Une proposition avec le triptyque : les tuiles algébriques

Les jetons utilisés dans la partie des nombres relatifs sont dépassés dès lors qu'on souhaite résoudre des problèmes faisant appel à l'algèbre. De plus, c'est un matériel plutôt désorganisé, bien que son utilisation sous forme de rectangle limite cet aspect. Enfin, le côté « unitaire » du jeton fait comprendre les notions sur les nombres entiers, avec cependant une difficulté à étendre aux autres ensembles, notamment en lien avec les mesures de longueurs qui sont, elles, réelles.

Il faut donc faire évoluer ce matériel.

Le matériel des tuiles algébriques est déjà formé de rectangles représentant une unité ainsi que diverses variables pour montrer le caractère « muet » d'une variable et éviter un enfermement. De plus, les tuiles sont bifaces, mathématiquement opposées l'une à l'autre, le recto est bleu et le verso rouge. On choisira les mêmes conventions qu'avec les nombres relatifs pour l'unité.

Il faudra veiller à la difficulté que « $-x$ » n'est pas obligatoirement négatif.

Les tuiles de type variable ont une longueur égale à l'unité et l'autre qui lui est propre.

Les grandeurs sur lesquelles s'appuient les tuiles algébriques sont les longueurs du rectangle, ainsi que son aire. Ce sont des points à faire émerger avec les élèves.

²⁹ Voir https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-02307662/file/Th%C3%A8se_ALMAHMOUD_VF.pdf pages 87 et suivantes

On conserve les règles de matériel des nombres relatifs, notamment : prendre l'opposé d'un nombre revient à retourner la ou les tuiles (en lien avec une homothétie de rapport -1).

Malgré l'aspect rectangle des tuiles, c'est un matériel qui peut rester désorganisé.

Les exemples choisis permettent d'aller vers une organisation en rectangle assez rapidement. Lorsqu'on souhaite créer un rectangle représentant une expression algébrique, il s'agit d'un produit, éventuellement par 1. On a donc besoin de spécifier les règles de ce nouveau matériel sur ce point.

8.9.3. Fichiers à télécharger

Les tuiles en fichier joint correspondent à un jeu pour 4 élèves environ. Les différents fichiers permettent de faire les recto/verso. Lors de l'impression, attention à bien mettre impression en taille réelle par rapport aux marges afin d'éviter certains désagréments. Une plastification des cartes est la bienvenue.

Les dimensions des rectangles ont été choisies pour éviter que par exemple « $x = 4$ » car « on peut mettre 4 unités pour égaler x ».

Néanmoins³⁰, à quelques millimètres près, suivant le découpage, l'espacement entre les tuiles, certains élèves peuvent penser que x a une valeur fixe. C'est un point de vigilance à travailler.

Un fichier numérique de diaporama permet d'avoir les tuiles dans différents coloris, en image ou en cellule textuelle avec les mêmes proportions que celles des fichiers à découper. Il est ainsi facile de prendre les tuiles souhaitées, les dupliquer sur un ordinateur et de vidéoprojeter le résultat ou les mettre dans une fiche d'exercices.

Un fichier à imprimer, plastifier et découper (à faire en A3 pour bien distinguer le 1 depuis le fond de la salle) contient aussi des tuiles qui peuvent être vues depuis le tableau. On pourra utiliser du ruban adhésif magnétique pour faciliter son utilisation au tableau, ou imprimer sur des feuilles magnétiques double face.

Les tuiles physiques utilisées pour les photos ci-après sont issues d'un (long) travail au FabLab de Sofia Antipolis³¹ à la découpeuse laser. Pour une classe, cela nécessite environ 8 h de fabrication, être à côté pour tourner les plaques et enlever les éléments (la correction de copies est suggérée !). Une personne auto-entrepreneur, Sébastien, en fait quelques-unes contre rémunération, de façon locale.

Ne pas hésiter à contacter Sylvain ETIENNE (sylvain-julien.etienne@ac-nice.fr) pour avoir les sources des fichiers pour la découpeuse laser ou pour mettre en relation avec Sébastien. Ces sources ne sont pas disponibles directement car elles nécessitent des adaptations suivant la marque de la découpeuse laser.

³⁰ On a $1,4 \times 25 = 5 \times 7$, donc 25 unités mesurent pareils que $7x$.

³¹ <http://www.sofab.tv/>



Pour éviter que les pièces tombent entre les tables lorsque des îlots sont formés, l'achat de rouleaux de tableau blanc, au format A2 (environ 40 cm × 60 cm) peut être envisagé (l'adhésif est supprimé avec de la laque à cheveux).

8.9.4. Règles du matériel tuiles algébriques

Règle du matériel tuile algébrique (utile pour le développement notamment) :

1. On commence par mettre chacun des facteurs suivant les deux dimensions d'un rectangle, comme dans une table de multiplication.
2. On place alors le produit dans chacun des rectangles constituant le grand rectangle, comme dans la table, case par case. On multiplie chaque longueur caractéristique des deux facteurs pour former un nouveau rectangle.
3. On peut retirer les facteurs de départ pour mieux lire le résultat.

Exemple : représenter le produit $3 \times x$

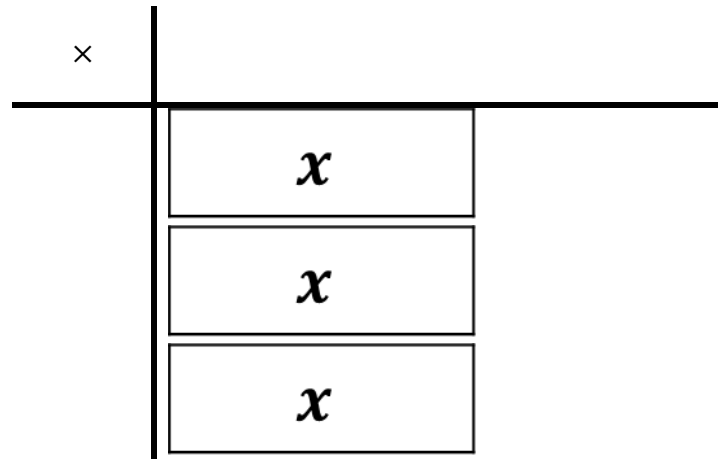
1. On commence par faire une table avec les facteurs $3 = 1 + 1 + 1$ et x .

×	x
1	
1	
1	

2. On place le produit.

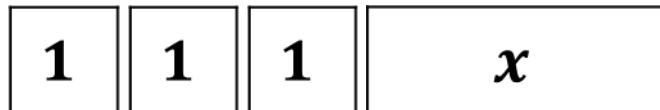
×	x
1	x
1	x
1	x

3. On enlève les facteurs et on lit alors le résultat.



On obtient que $3 \times x = x + x + x$.

On peut demander aux élèves *quid* de $3 + x$, erreur classique d'égalité avec $3x$, à réaliser avec le matériel :



Visuellement, les deux résultats sont différents. C'est une représentation mentale à favoriser.

On pourra noter que $(-3) \times (-x)$ donne le même résultat. C'est intéressant de le montrer aux élèves, pour rappeler le retournement quand on multiplie par un nombre négatif.

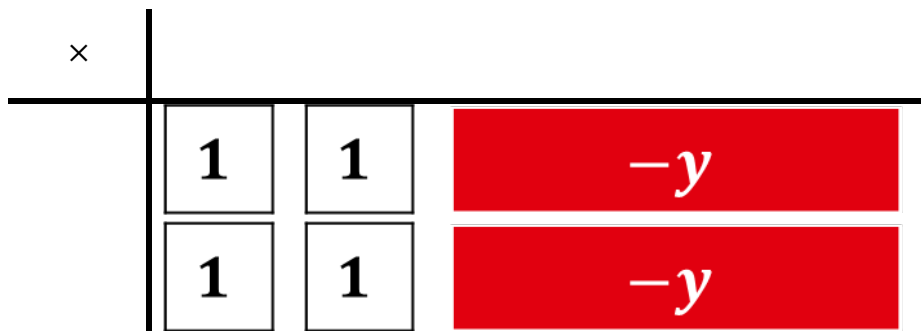
Règle du matériel tuile algébrique (utile pour la factorisation notamment) :

1. On commence par placer l'ensemble des termes suivant un rectangle si possible³² à l'intérieur de la table.
2. On décompose chaque cellule de la table et on place alors les facteurs sur l'extérieur de la table rangée par rangée et colonne par colonne, avec une attention particulière sur les signes.
3. On peut retirer l'ensemble des termes de départ pour mieux lire le produit.

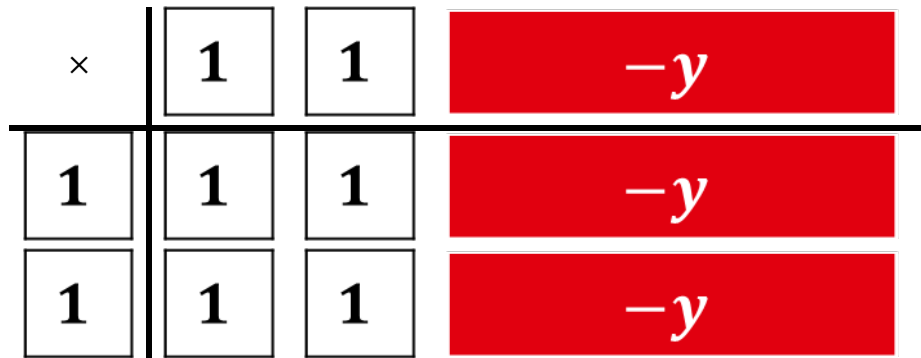
³² Certaines compositions nécessiteront d'ajouter des éléments supplémentaires, comme pour factoriser $x^2 - y^2$ par exemple. On ne peut pas former un rectangle avec l'expression $x^2 + 1$ par exemple.

Exemple : représenter la somme $4 - 2y$

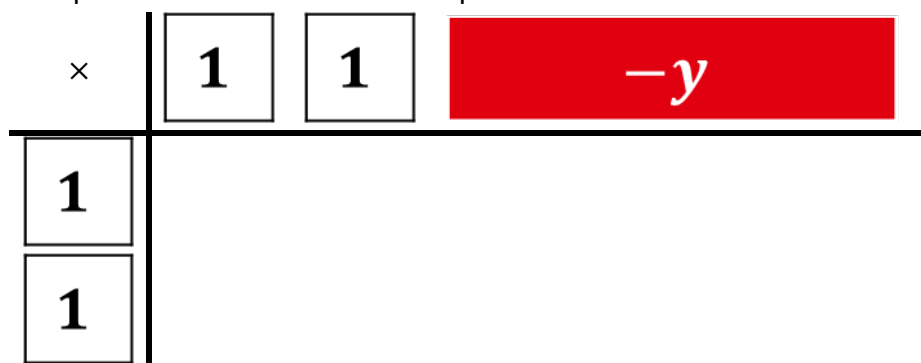
1. On commence par placer l'ensemble des termes $4 = 1 + 1 + 1 + 1$ et $-2y = -y - y$ suivant un rectangle. On a deux possibilités ici, soit une hauteur de 1, soit une hauteur de 2. C'est ce dernier choix qui a été choisi.



2. On décompose chaque cellule pour faire apparaître les facteurs sur les éléments extérieurs de la table. Dans la pratique, on choisit au plus simple.



3. On enlève les termes de départ et on lit alors le résultat sous forme de produit, avec une attention particulière sur d'éventuelles parenthèses.



On obtient ici que $4 - 2y = (1 + 1) \times (1 + 1 - y) = 2(2 - y)$.

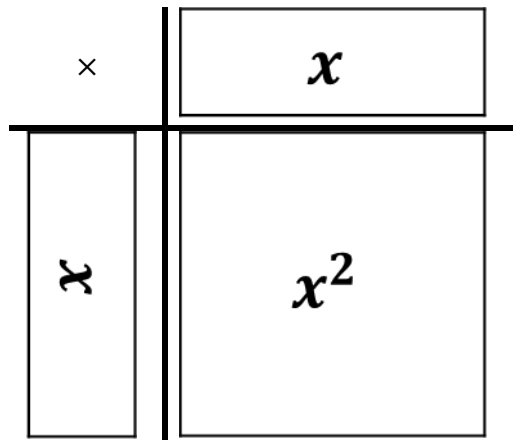
A noter que $4 - 2y = -2(-2 + y)$, que l'on peut montrer si aucun élève ne pense à le faire.

Une des idées d'utilisation des tuiles algébriques est de créer des représentations mentales, notamment pour combattre les erreurs les plus fréquentes des élèves.

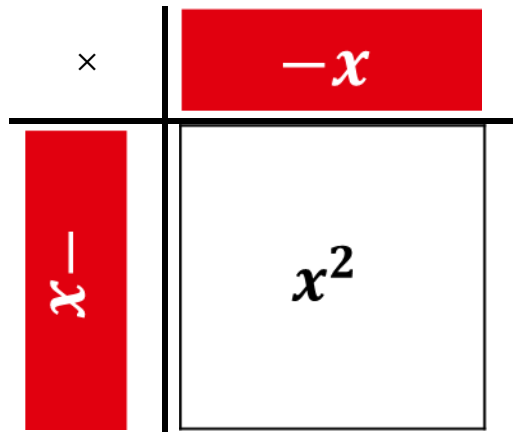
Dans le langage courant, on lit « x^2 » : x au carré, *i.e.* un carré de longueur x (étendue à l'ensemble des relatifs), et donc un carré d'aire x^2 . Les élèves ne font toujours le lien avec la figure géométrique. Parmi les tuiles, c'est une situation à questionner : on prend la tuile représentant

x^2 et on cherche une décomposition (règle de matériel de factorisation). Deux situations sont possibles.

Une première situation pour $x^2 = x \times x$:



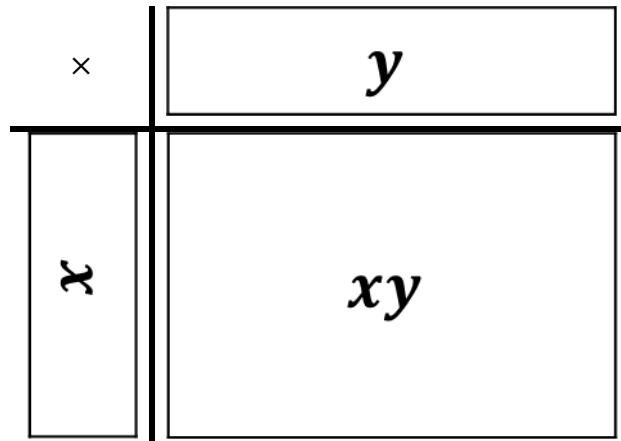
L'autre situation pour $x^2 = (-x) \times (-x)$:



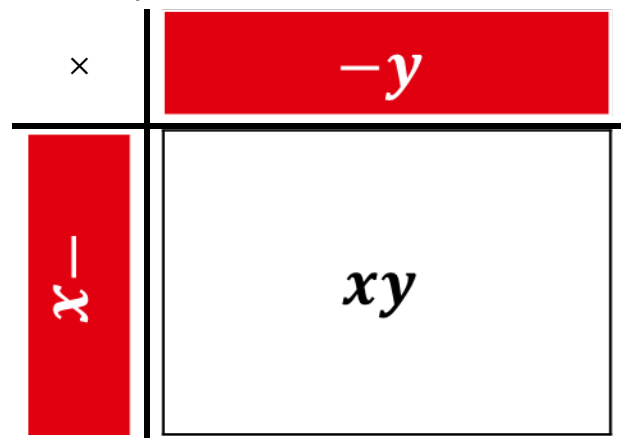
On pourra demander aux élèves de s'approprier la notion en demandant les décompositions possibles avec y^2 et z^2 dans un premier temps, puis de déterminer une décomposition de $-x^2$. Pour ce dernier cas, le fait de retourner la tuile x^2 devrait permettre de se dire qu'il y a un (seul) facteur négatif.

Les mêmes raisonnements sont à travailler sur le sens de xy , qui, dans les tuiles, signifie un rectangle d'aire xy , ce qui conduit aux deux représentations :

La première est $xy = x \times y$:



La deuxième est $xy = (-x) \times (-y)$:



On pourra utiliser les autres tuiles xz et yz , ainsi que leurs opposés respectifs afin que les élèves s'approprient bien ces premières règles et développent les représentations mentales correspondantes.

8.9.5. Applications

Le choix qui a été fait pour les applications est de répondre à la commande institutionnelle que l'on trouve dans les attendus de fin d'année³³ de cycle 4. Certaines valeurs ont été modifiées pour être accessible par le matériel, soit que les valeurs étaient trop grandes, soit qu'elles n'étaient pas entières ou n'amenaient pas à une solution entière.

Les tuiles algébriques permettent de :

- représenter des expressions algébriques ;
- les réduire ;
- les développer ;
- les factoriser ;

³³ <https://eduscol.education.fr/137/attendus-de-fin-d-annee-et-reperes-annuels-de-progression-du-cp-la-3e#summary-item-4>

- substituer une valeur numérique à une variable et calculer la valeur d'une expression algébrique ;
- travailler sur un programme de calculs ;
- trouver l'opposé d'une expression littérale ;
- résoudre des équations ;
- travailler les identités remarquables, bien que seule la différence de deux carrés soit dans le socle et exigible.

Représenter des expressions algébriques

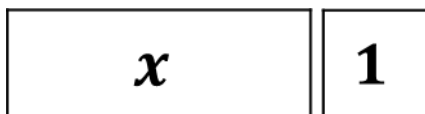
Les exemples précédents montrent déjà des représentations d'expressions algébriques, avec des manipulations.

Il peut être nécessaire de travailler ce point, notamment en début de cycle pour différencier des expressions proches ou issues des erreurs élèves que l'on trouve fréquemment.

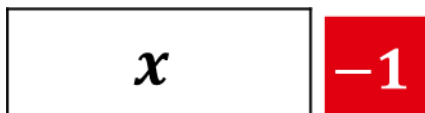
Exemple : entier consécutif

On peut travailler sur l'expression littérale de l'entier qui suit un entier n , ou l'entier qui le précède. Parmi les tuiles, il n'y a pas de n . C'est cependant une activité à développer avec les élèves que la variable peut être substituée à une autre sans changer la nature de l'expression littérale (on parle de variable muette³⁴).

L'entier qui suit un entier x , avec la précaution de considérer x comme un nombre entier.



Et l'entier qui précède un entier x .



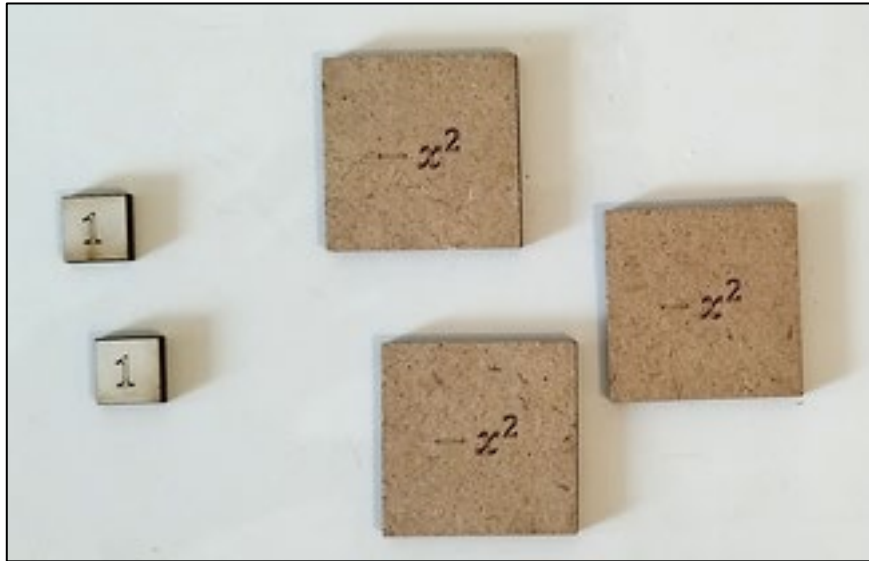
Cet exemple sera repris dans la partie factoriser ci-dessous.

Exemple : Représenter $A = 2 - 3x^2$

A ce stade, il faut être vigilant car certains élèves prendront des tuiles x^2 au lieu de $-x^2$. Il faudra leur faire remarquer que sur la table se trouve $+3x^2$ dans ce cas et rappeler le lien entre soustraction et opposé : $A = 2 - 3x^2 = 2 + (-3x^2)$.

³⁴ <https://irem.univ-reunion.fr/IMG/pdf/StageDeLogique.pdf>

On prend les différents éléments : deux unités et trois tuiles $-x^2$:



Cet exemple pourra être repris dans la partie réduire et calculer la valeur d'une expression algébrique ci-dessous.

Réduire

Exemple : Réduire si possible l'expression $B = -14 - 3z^2 + 6z - 4z^2 + 9$.

On commence par placer les différents éléments :



On rassemble alors les éléments qui sont de mêmes types : les unités avec les unités, les tuiles z avec les tuiles z et les tuiles z^2 avec les tuiles z^2 :



On réduit :

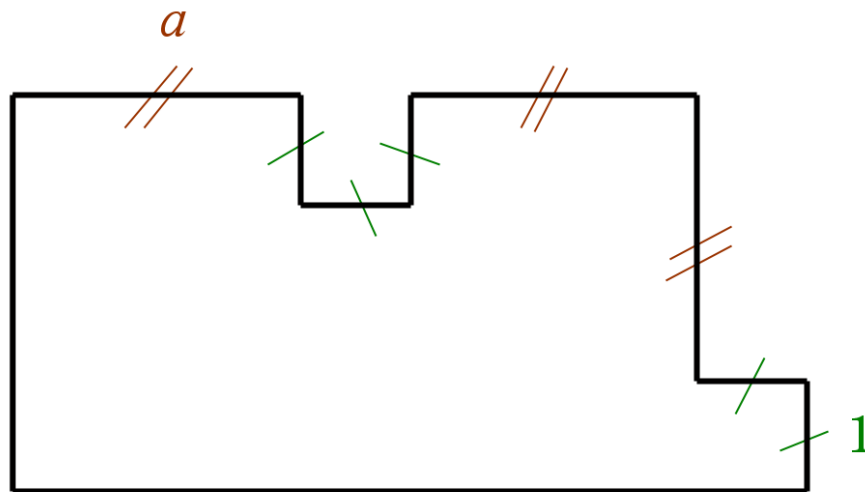


On obtient $B = -14 - 3z^2 + 6z - 4z^2 + 9 = -5 + 6z - 7z^2$.

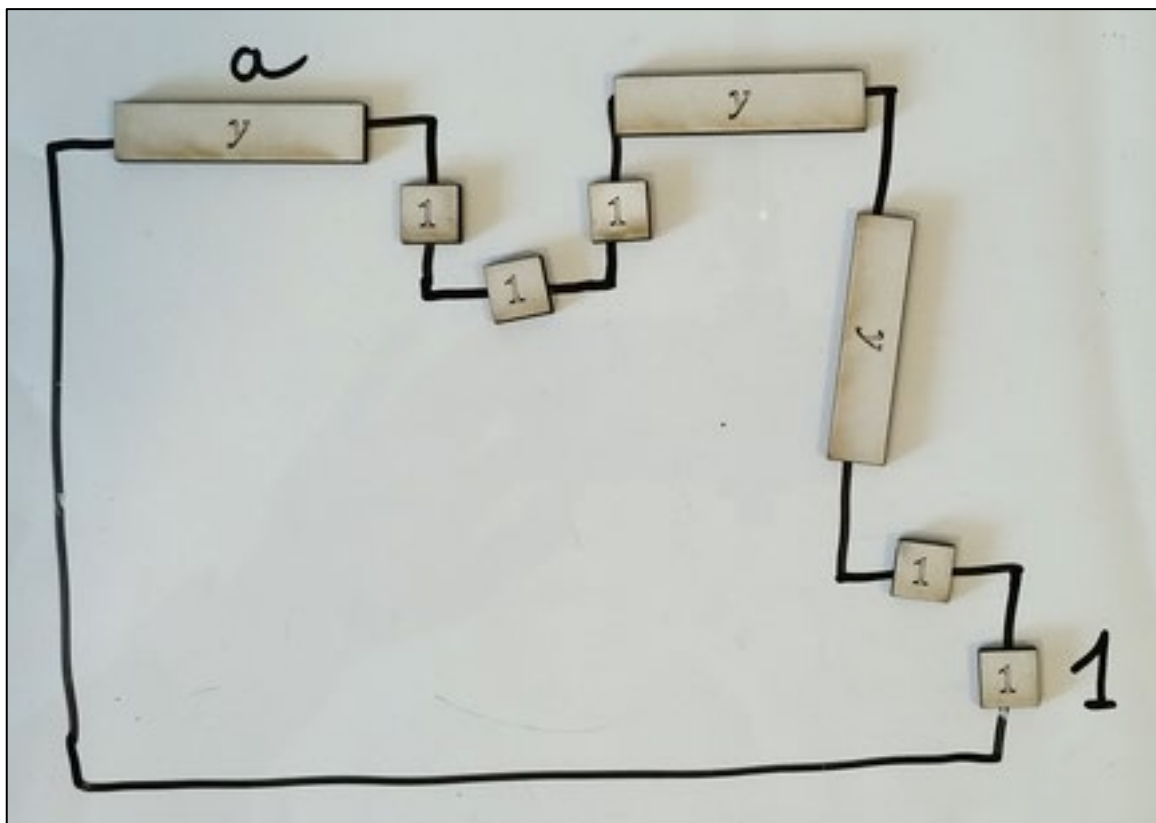
On peut demander aux élèves de mettre dans l'ordre décroissant des puissances de la variable, ce qui ne posera pas de souci pour les signes car ils sont associés à la tuile en elle-même : $B = -14 - 3z^2 + 6z - 4z^2 + 9 = -7z^2 + 6z - 5$.

Exemple : périmètre d'une figure

On souhaite déterminer le périmètre de la figure suivante en fonction de a . Tous les côtés consécutifs sont perpendiculaires.

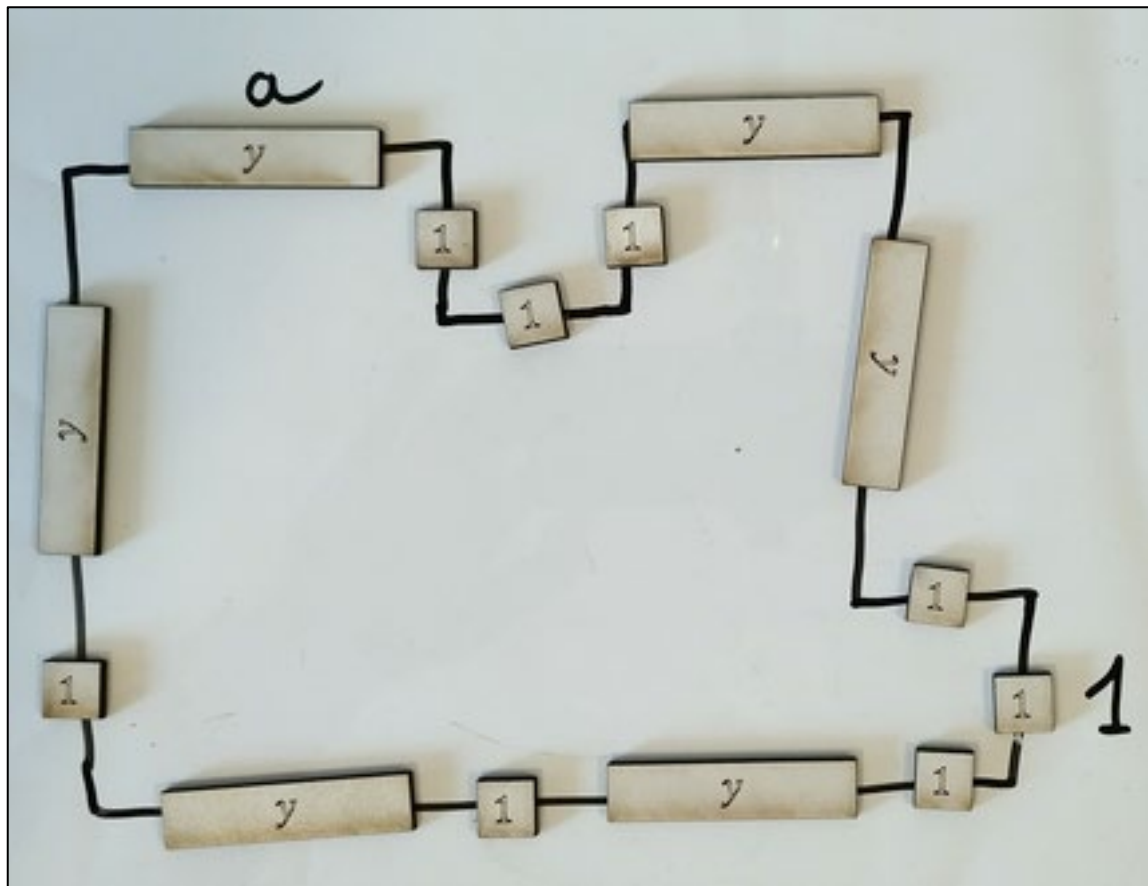


Un élève peut avoir idée de refaire la figure en plaçant les tuiles algébriques sur les longueurs adéquates. Il sera peut-être bloqué par les longueurs « inconnues ».

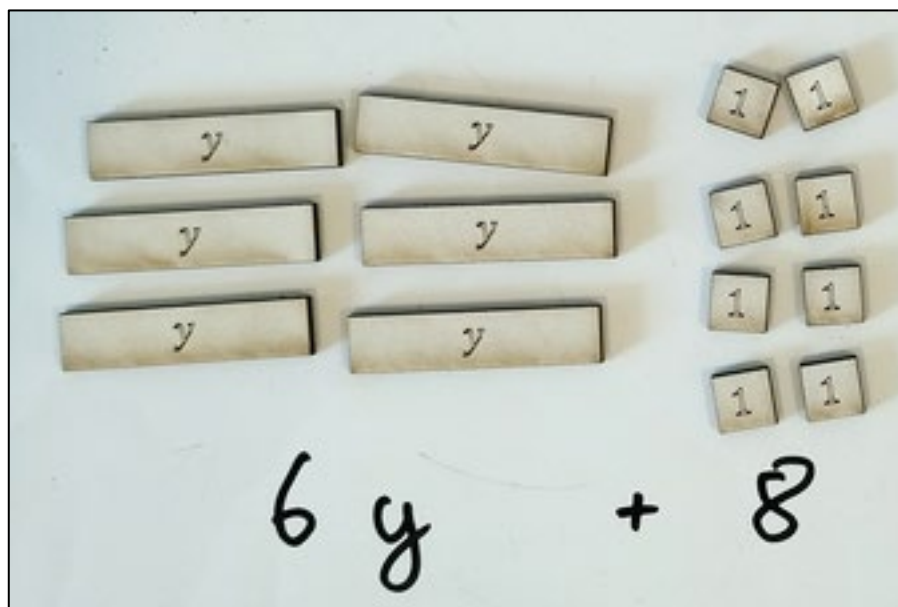


Les côtés consécutifs étant perpendiculaires, on peut reporter les longueurs connues sur celles qui ne le sont pas, quitte à faire les traits de construction.

Des oublis ou des ajouts peuvent se faire, notamment sur certaines unités.



On arrange alors les tuiles pour déterminer une expression réduite du périmètre (en fonction de y ici) :



On obtient donc $p = 6y + 8$, ou pour être en fonction de a , $p = 6a + 8$.

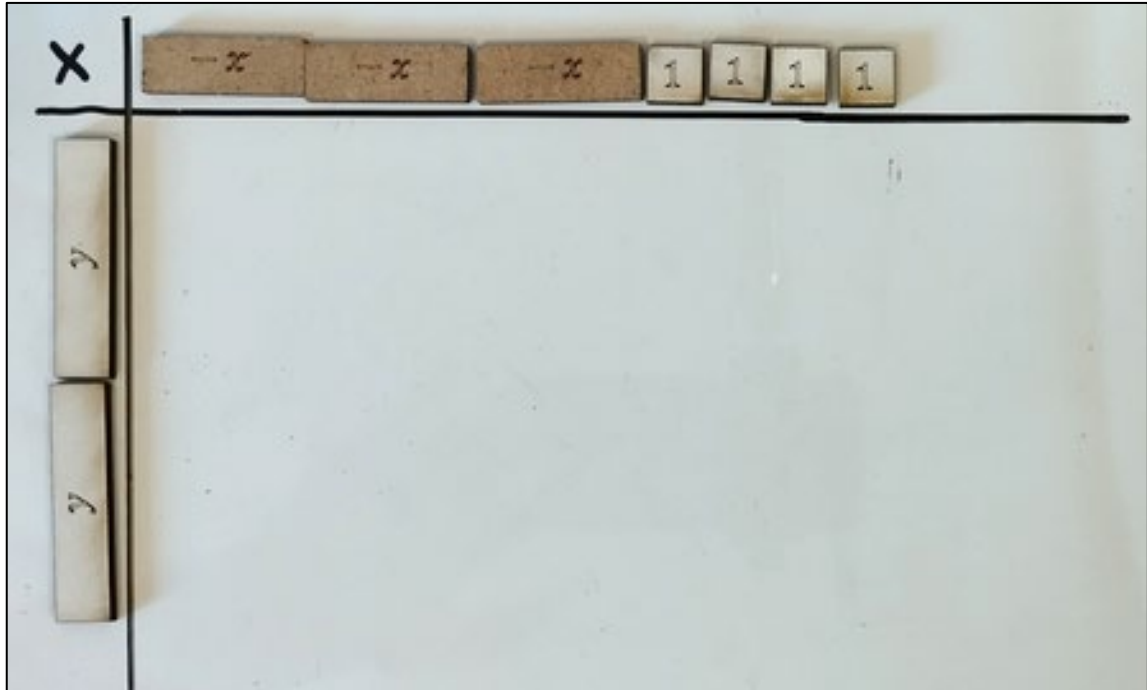
On pourra aussi proposer des expressions littérales vraies et/ou fausses en demandant aux élèves comment on arrive à ces expressions, et de les réduire.

Développer

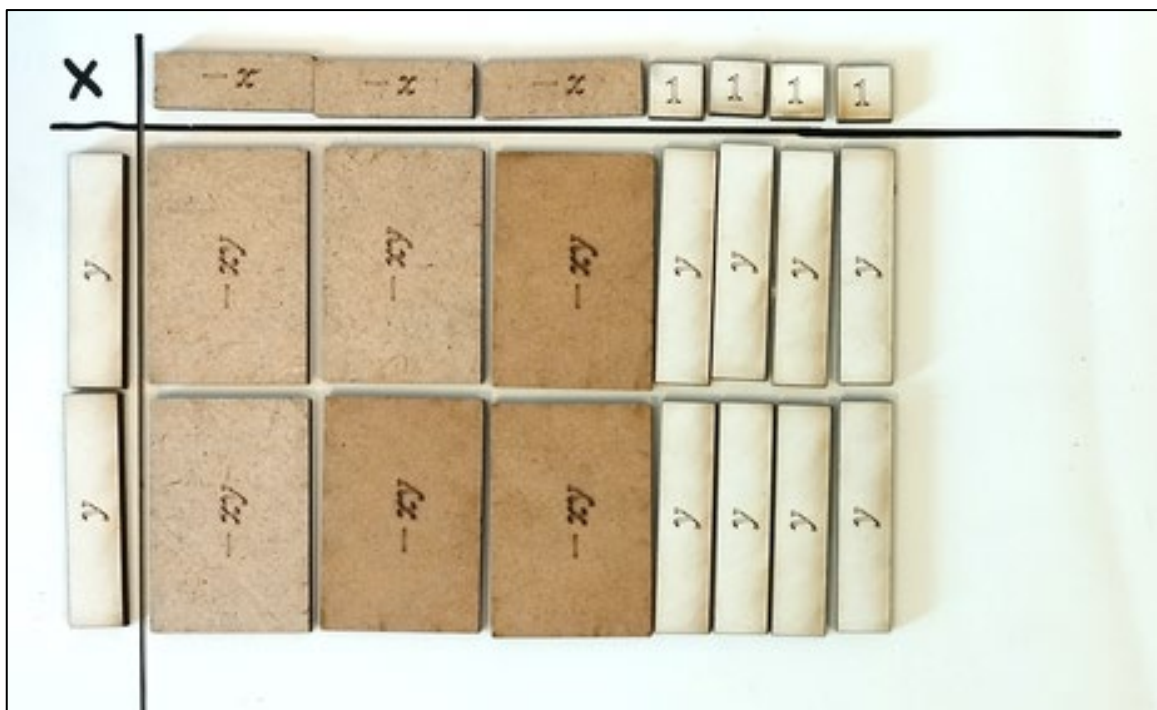
Exemple : Développer l'expression $C = 2z(-3y + 4)$.

Développer, c'est transformer un produit en une somme, il faut donc placer les deux côtés d'un rectangle dont il faut trouver l'aire.

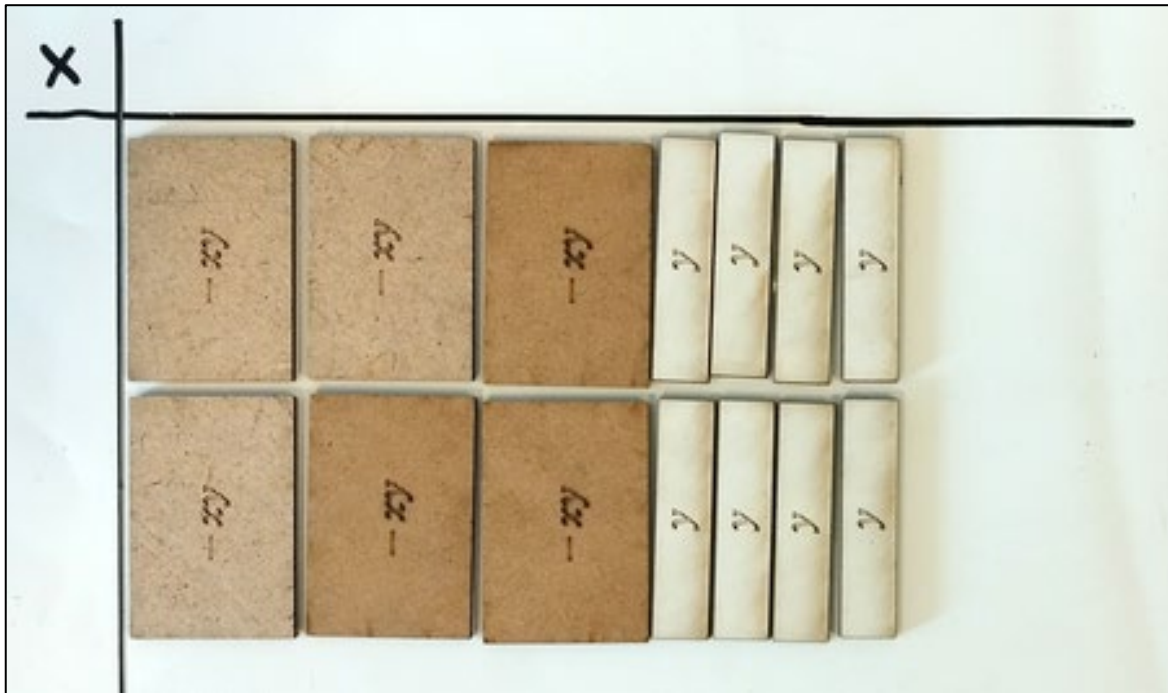
On commence par placer les deux longueurs du rectangle :



On construit alors le rectangle :



On enlève les éléments extérieurs pour mieux lire le résultat :

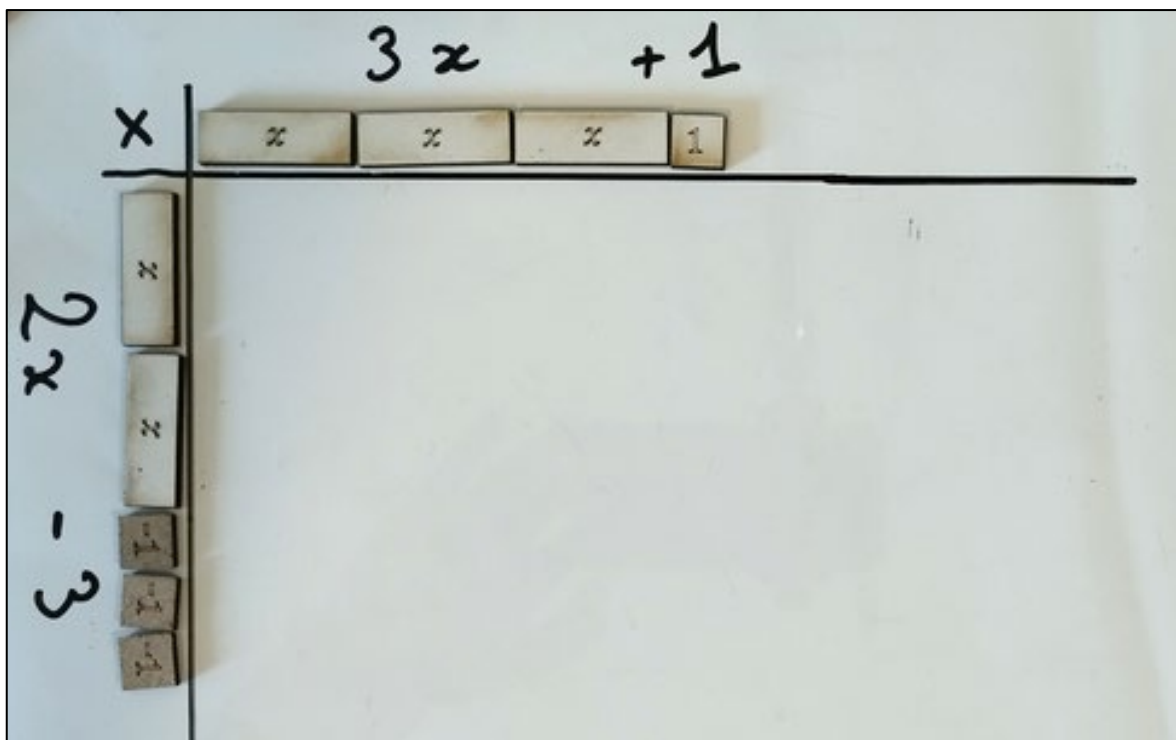


On obtient : $C = 2z(-3y + 4) = -6yz + 8z$.

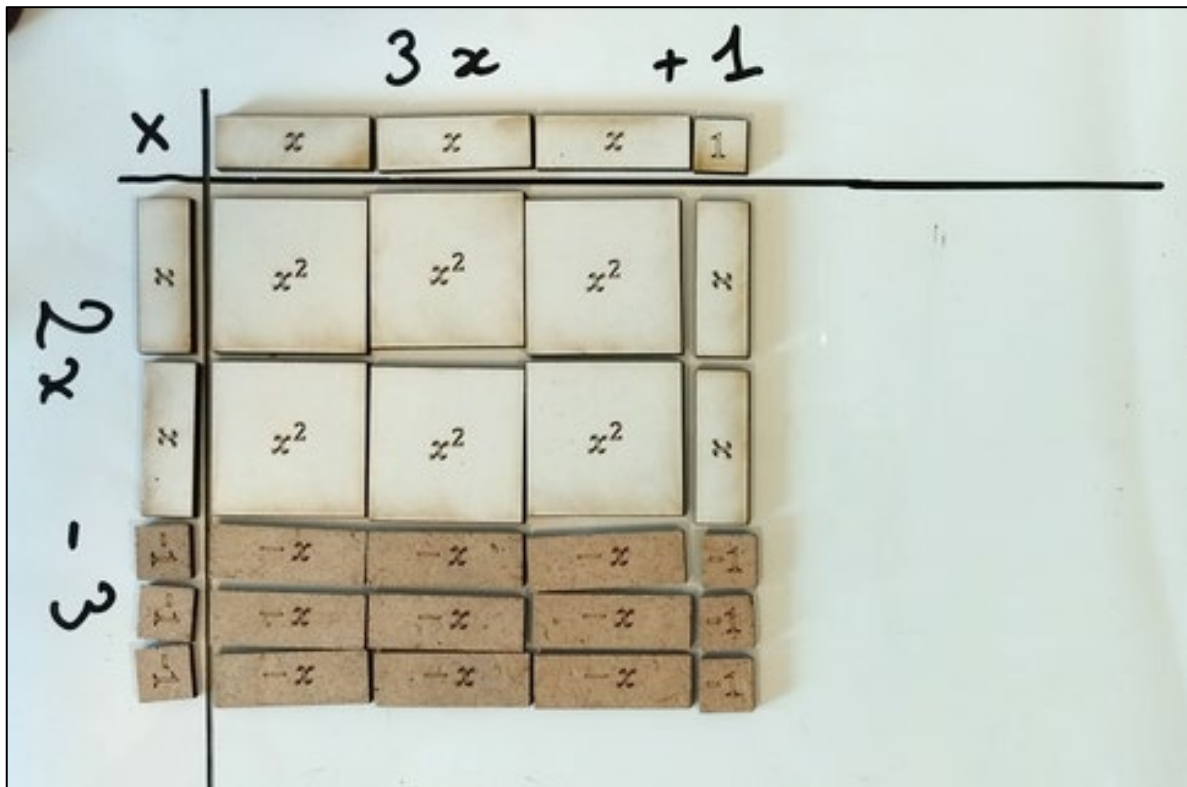
Exemple : Développer l'expression $D = (2x - 3)(3x + 1)$.

Développer, c'est transformer un produit en une somme, il faut donc placer les deux côtés d'un rectangle dont il faut trouver l'aire.

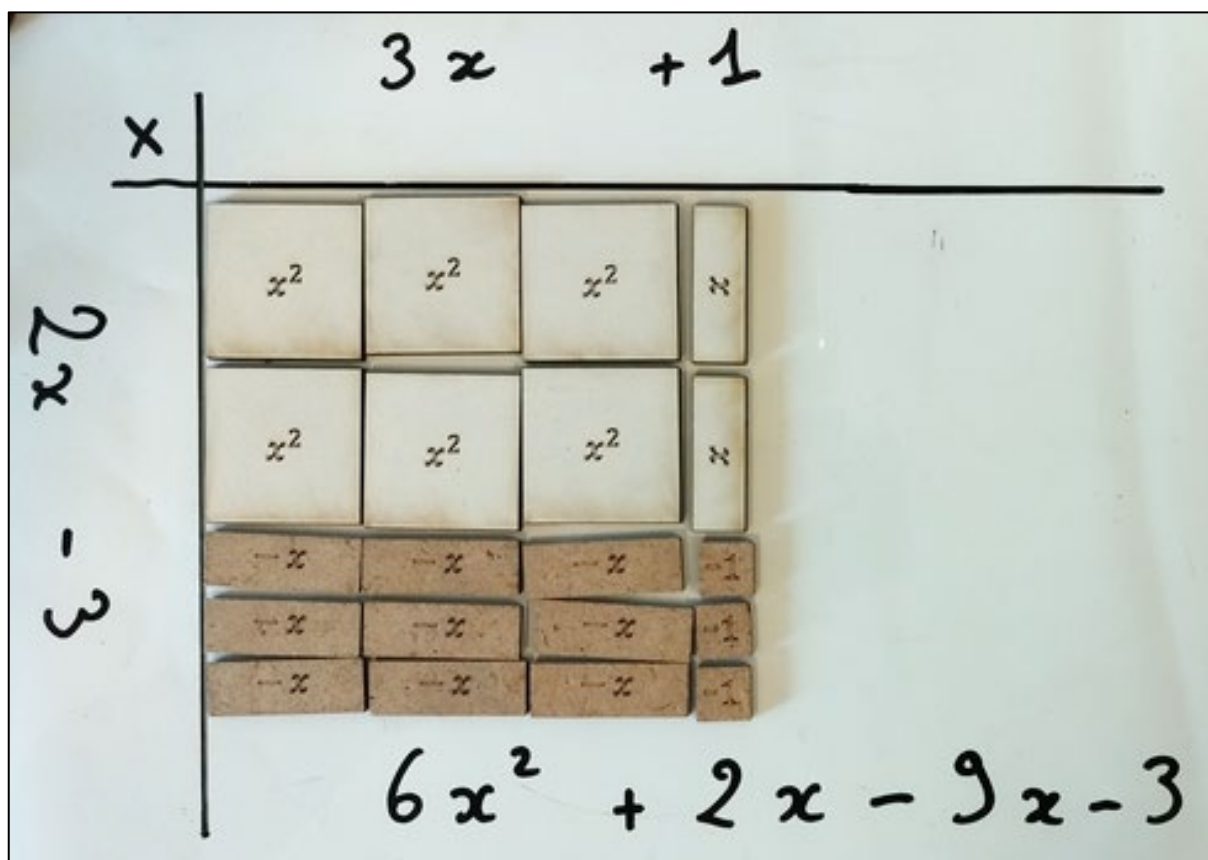
On commence par placer les deux longueurs du rectangle :



On construit alors le rectangle :



On enlève les éléments extérieurs pour mieux lire le résultat :



On réduit :

$3x + 1$
 x
 $2x$
 -3
 $6x^2 + 2x - 9x - 3$
 $6x^2 - 7x - 3$

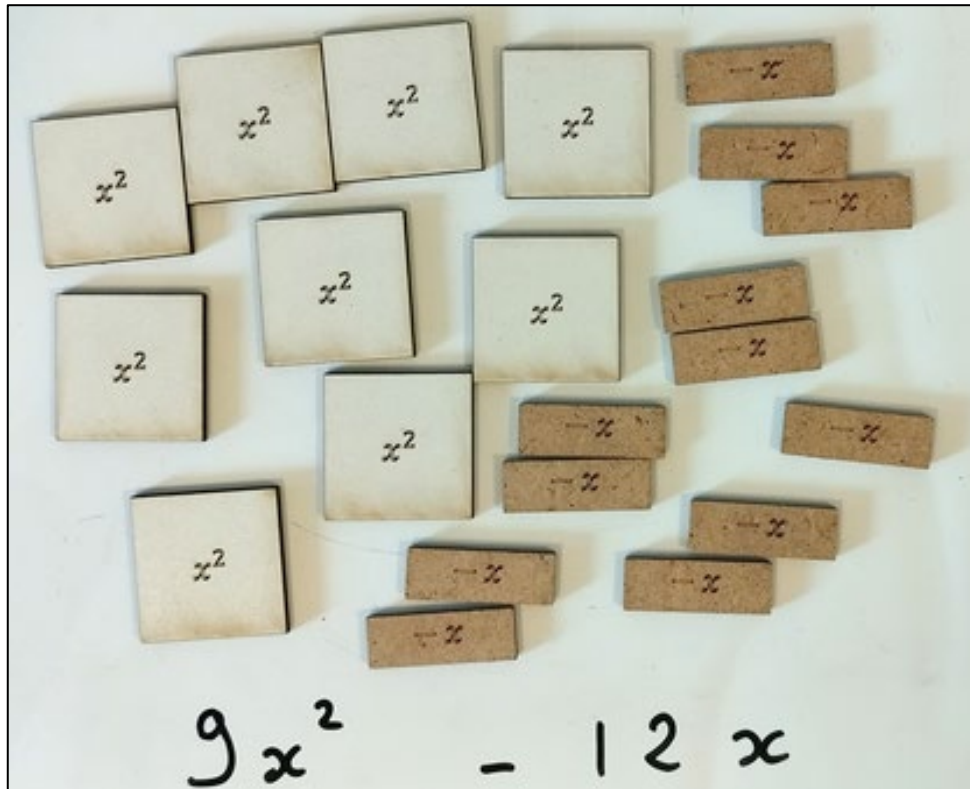
On obtient : $D = (2x - 3)(3x + 1) = 6x^2 - 7x - 3$.

Factoriser

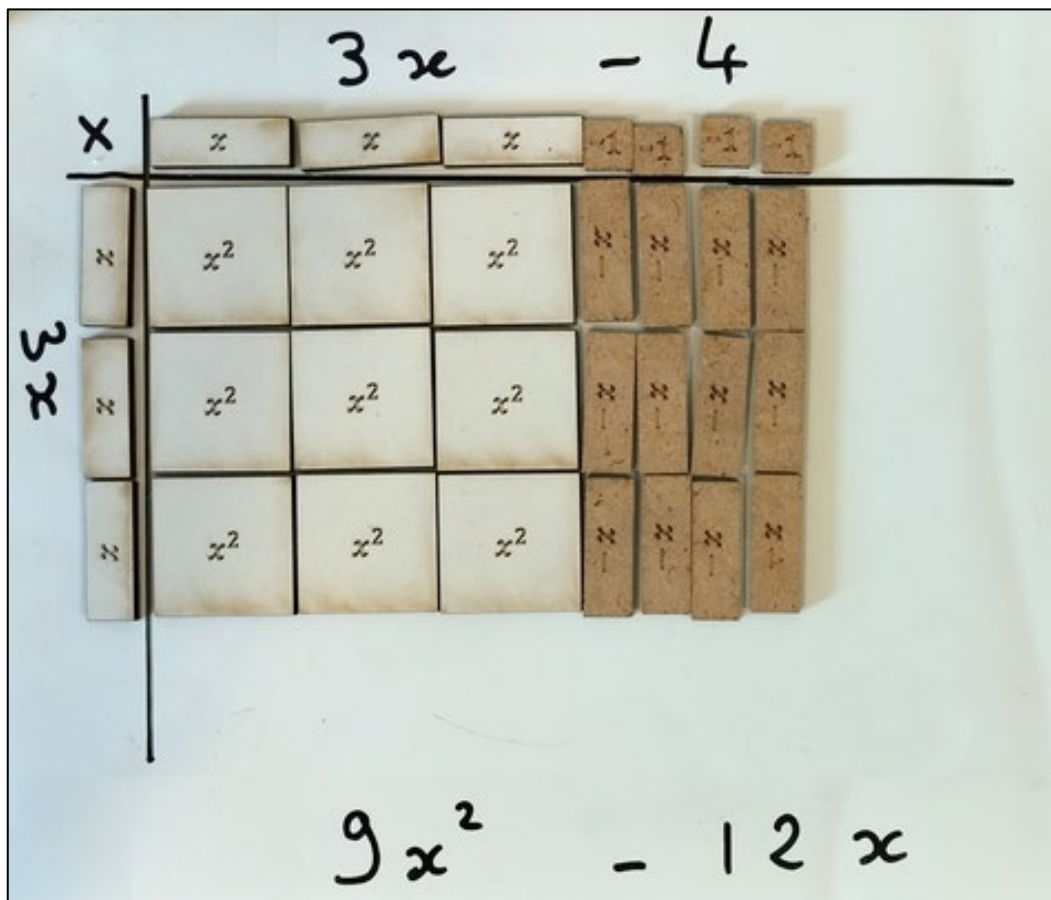
Exemple : Factoriser : $E = 9x^2 - 12x$

Factoriser, c'est transformer une somme en un produit, il faut donc arranger les termes en un rectangle.

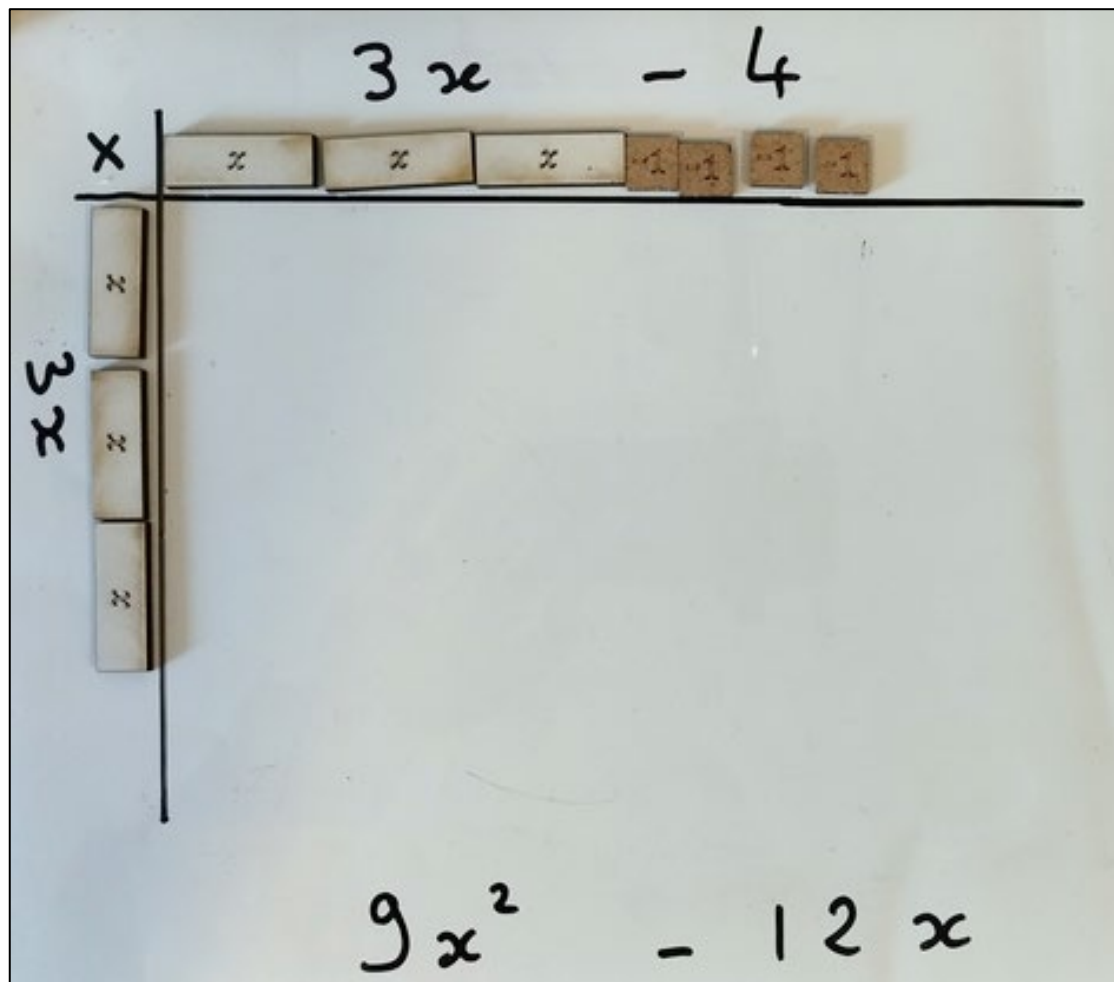
On commence par rassembler les différents éléments :



Plusieurs solutions sont possibles, en voici une :



On retire les éléments de départ pour lire le produit obtenu :

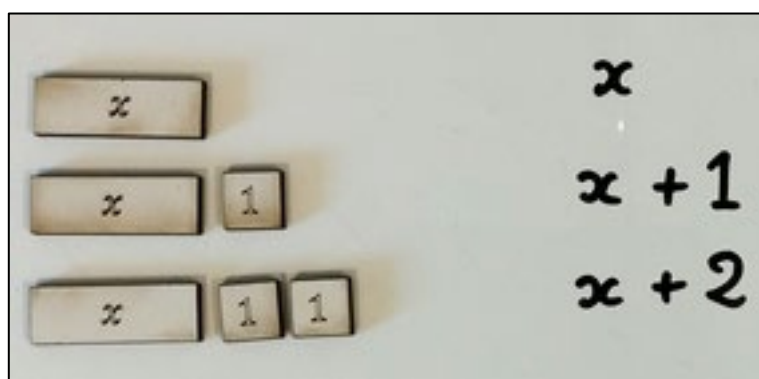


On obtient $E = 9x^2 - 12x = 3x(3x - 4)$.

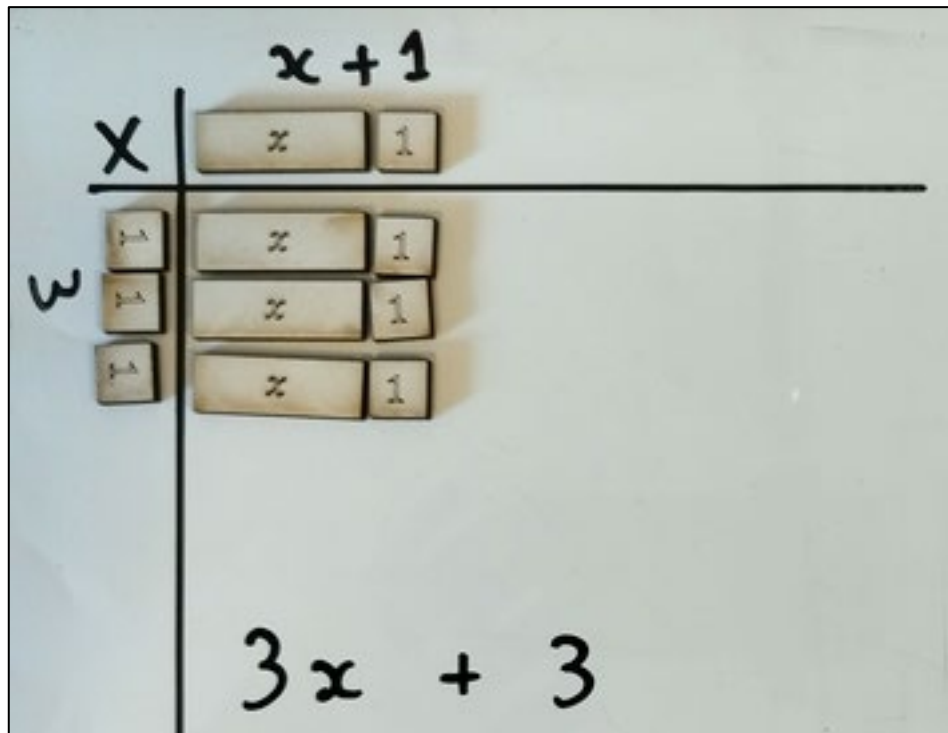
Exemple : Démontrer que la somme de trois entiers consécutifs est un multiple de 3.

On a déjà vu comme représenter un entier consécutif.

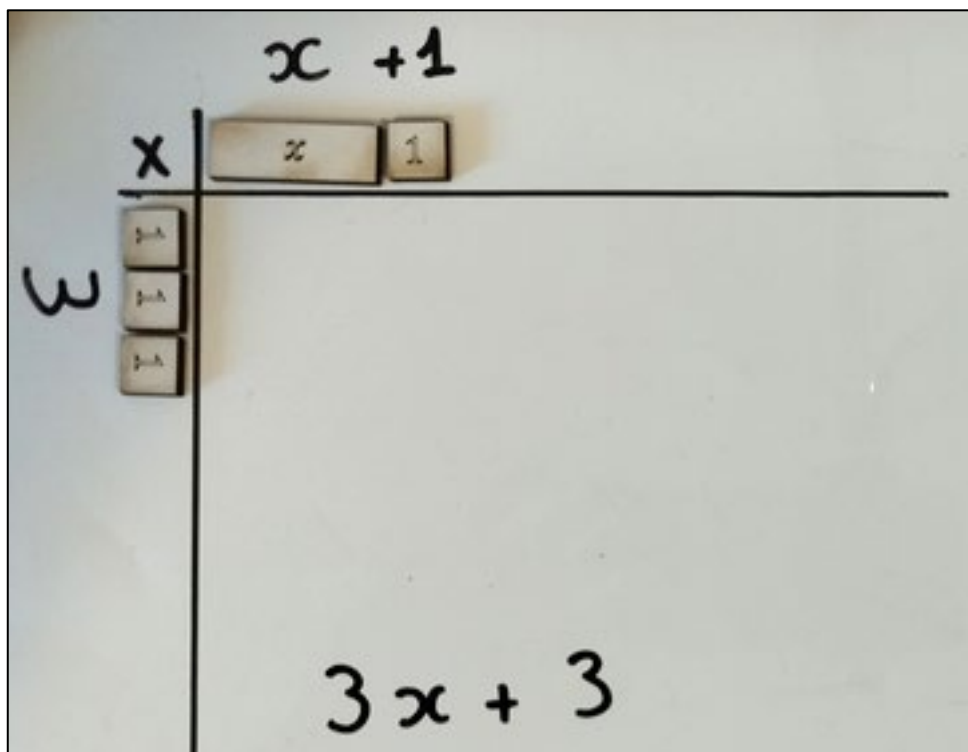
On obtient l'image suivante, avec respectivement l'entier, son consécutif et le consécutif du consécutif :



Montrer que c'est un multiple de 3, c'est chercher à avoir un rectangle dont une longueur est 3. On rassemble alors les éléments en rectangle pour répondre à cet aspect.



On retire les éléments de départ :



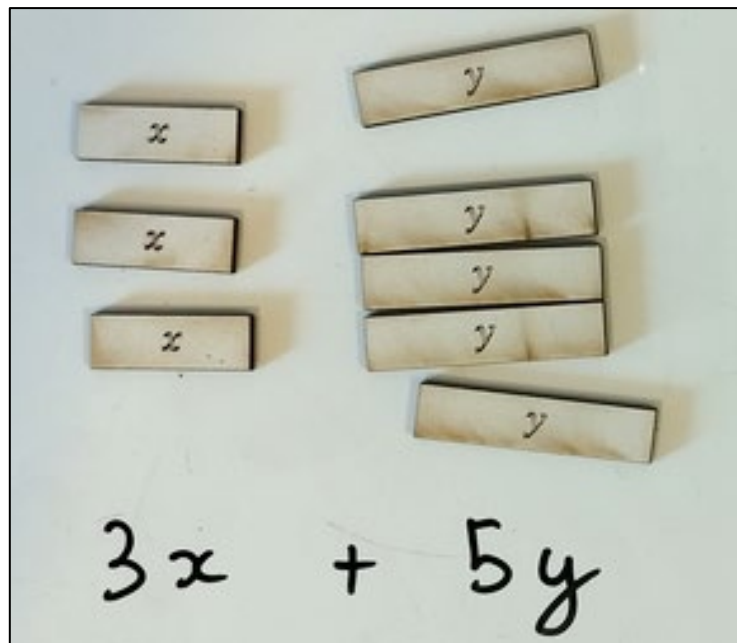
Ainsi, $x + (x + 1) + (x + 2)$ peut se factoriser en $3(x + 1)$.

A noter qu'on aurait pu établir que $(x - 1) + x + (x + 1) = 3x$.

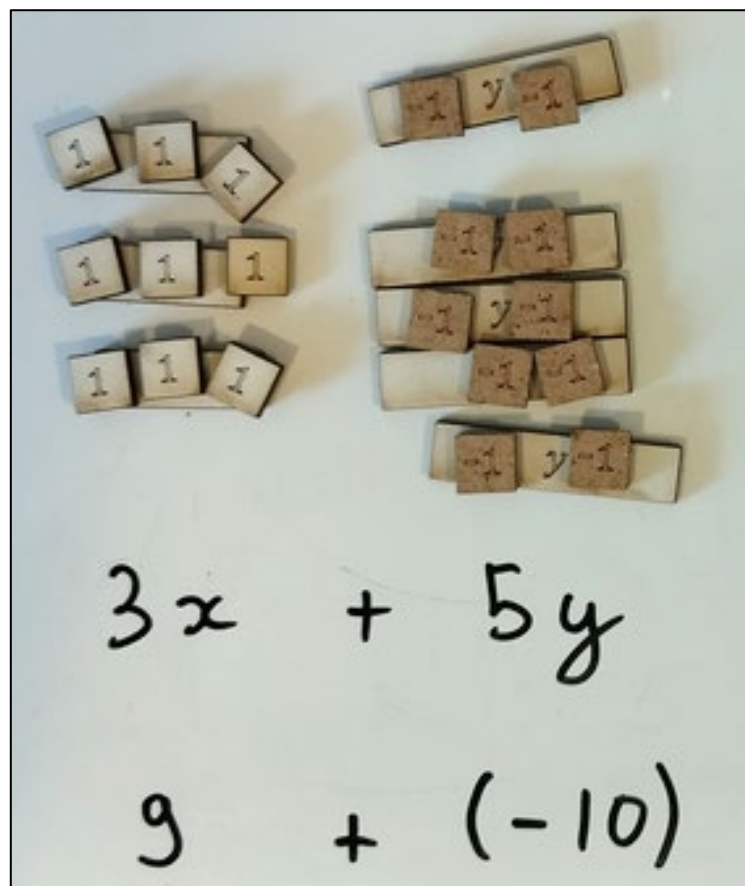
Calculer la valeur d'une expression algébrique

Exemple : Calculer l'expression $F = 3x + 5y$ pour $x = 3$ et $y = -2$.

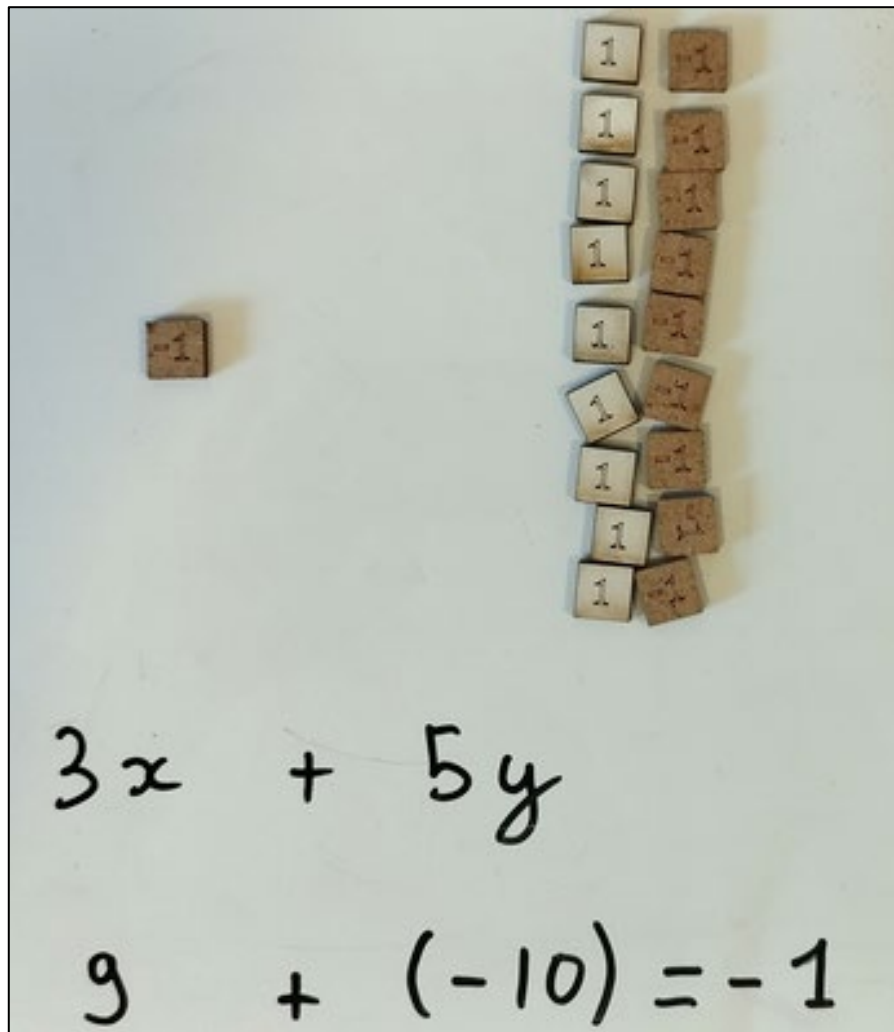
On commence par rassembler les éléments algébriques :



On remplace chaque x par trois unités positives, et chaque y par deux unités négatives :



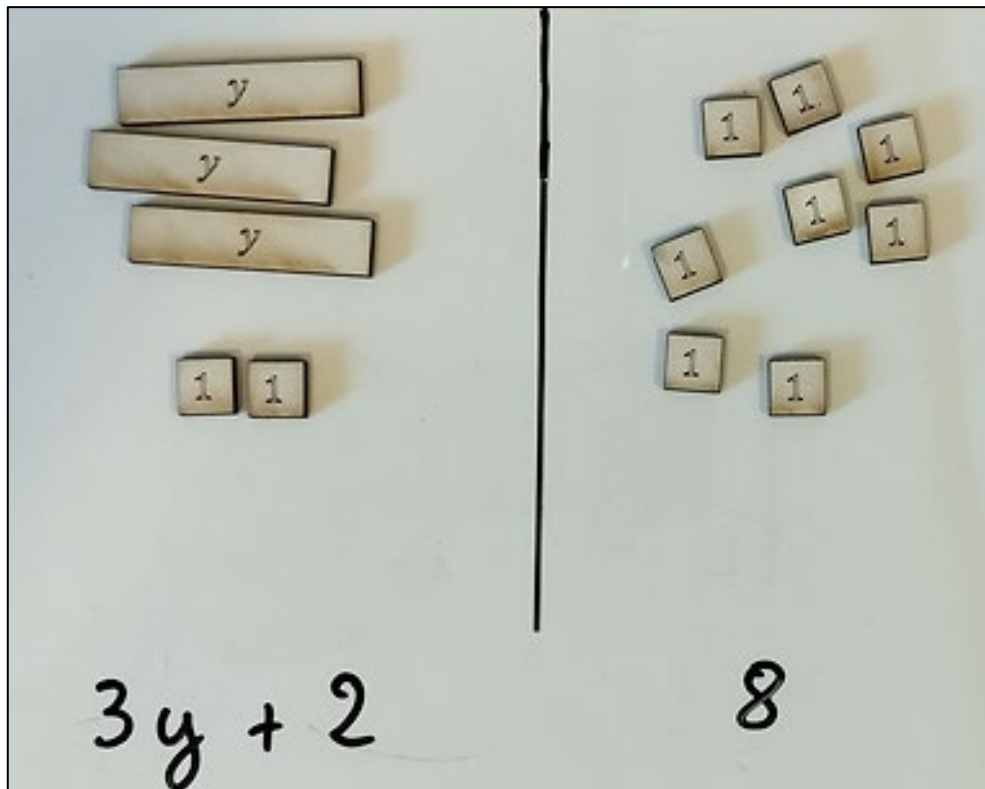
On réduit l'expression numérique obtenue :



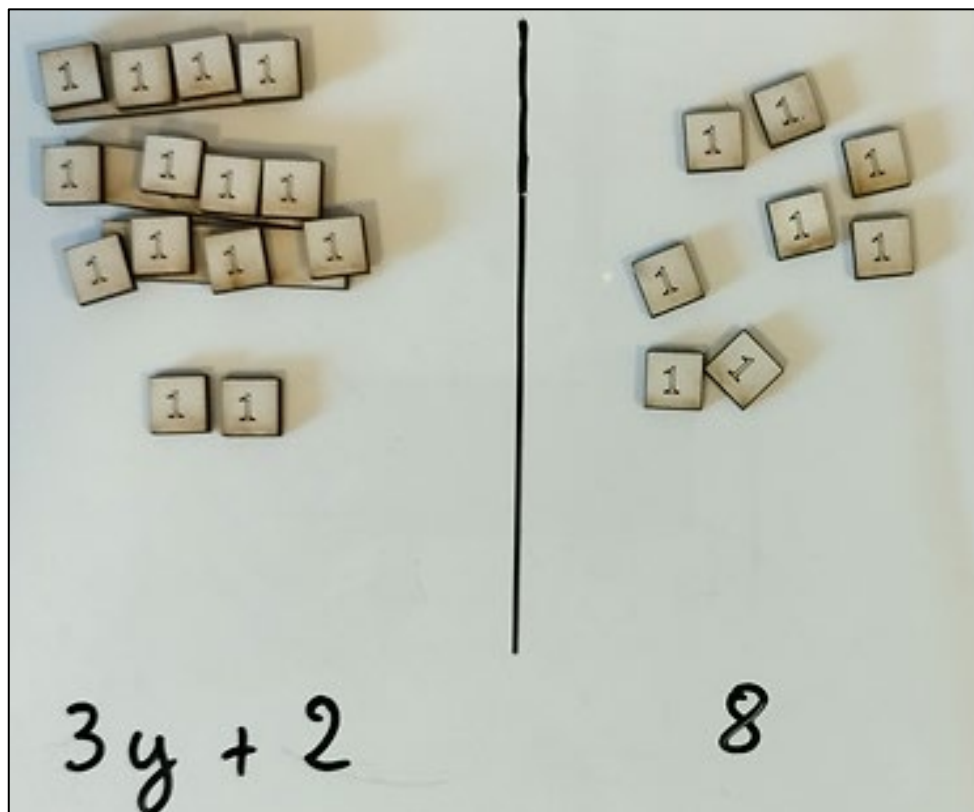
On obtient $3x + 5y = -1$ lorsque $x = 3$ et $y = -2$.

Exemple : 4 est-il solution de l'équation $3y + 2 = 8$?

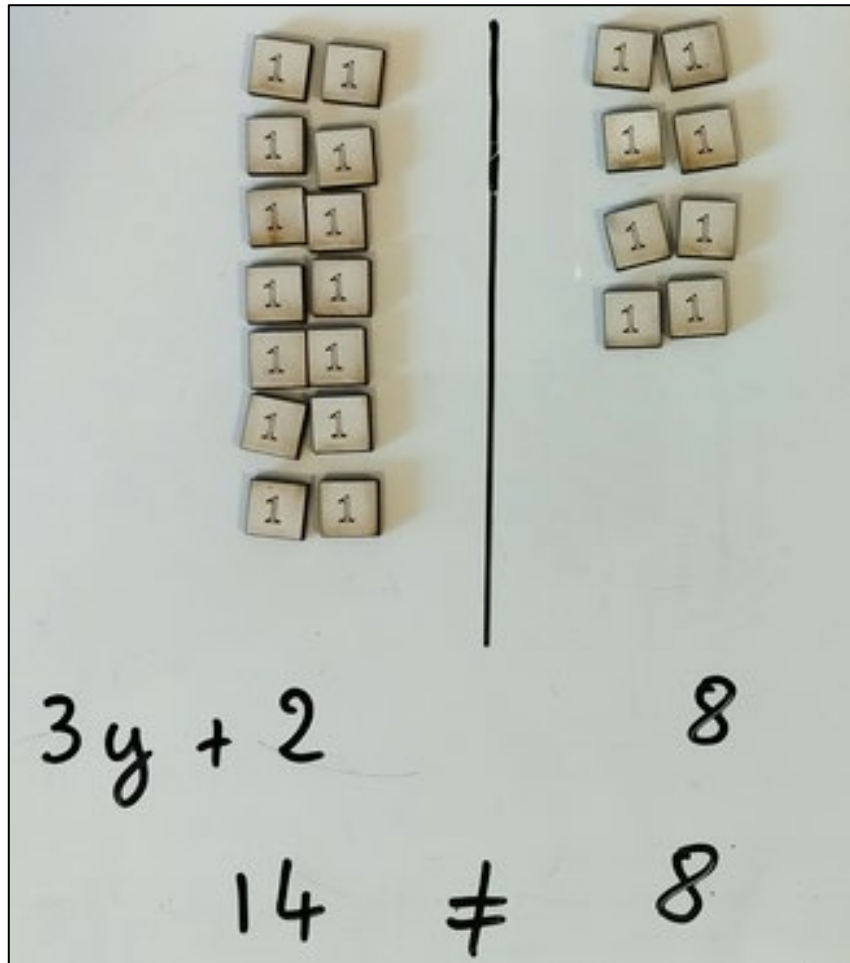
On commence par représenter l'équation.



On remplace alors chaque y par 4 unités positives.



On calcule pour savoir si les deux membres sont égaux.



Ce n'est pas le cas ici, ainsi 4 n'est pas solution de cette équation.

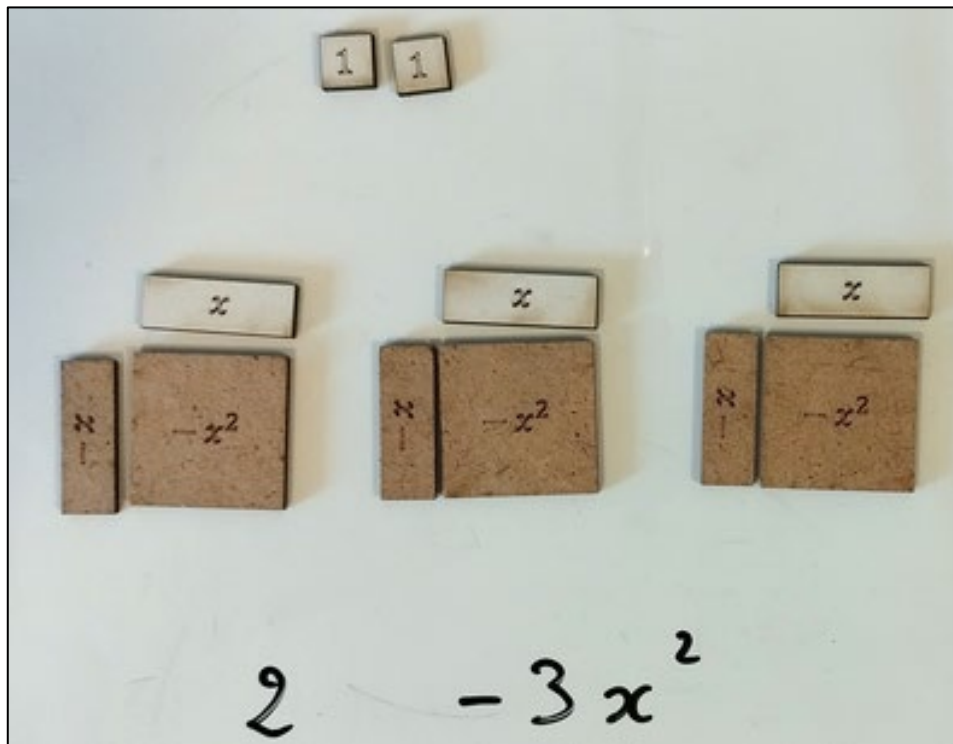
On pourra aussi proposer -4 aux élèves.

Exemple : Calculer $G = 2 - 3x^2$ pour $x = -2$.

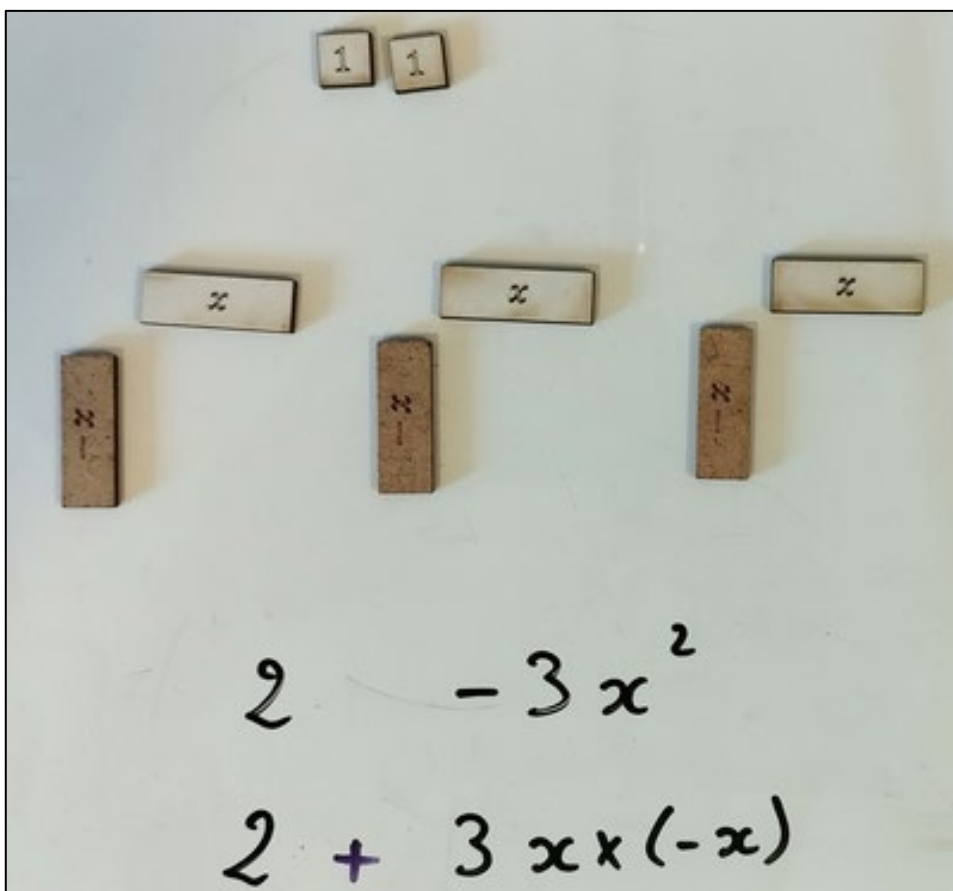
Cette expression a déjà été représentée dans la partie dédiée :



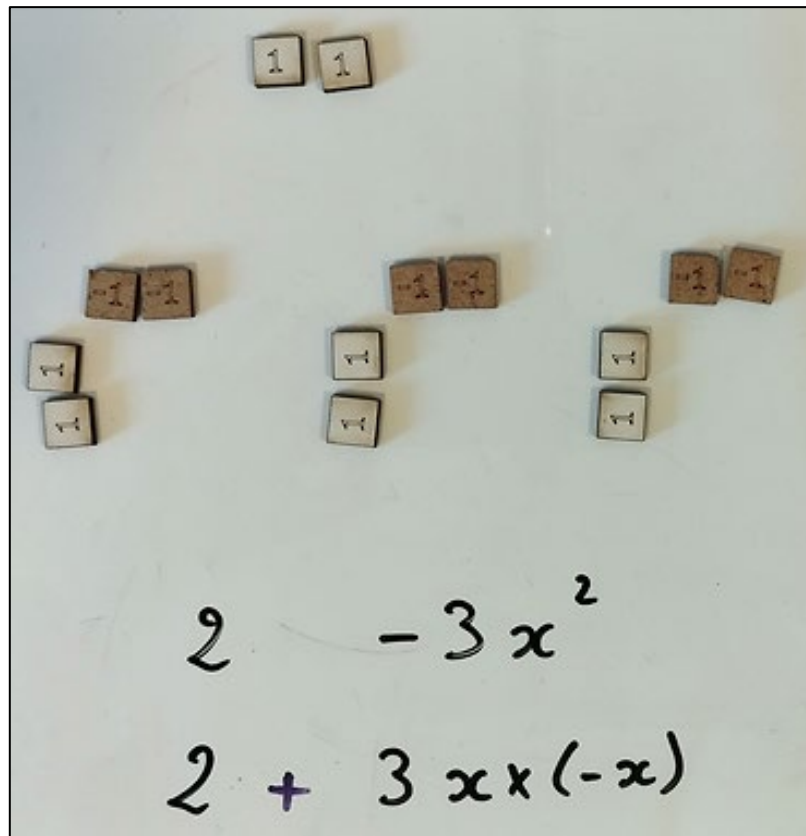
On doit substituer x par -2 , or ce sont des tuiles $-x^2$. Il faut donc revenir à la définition du carré et factoriser chaque carré pour revenir à des tuiles x .



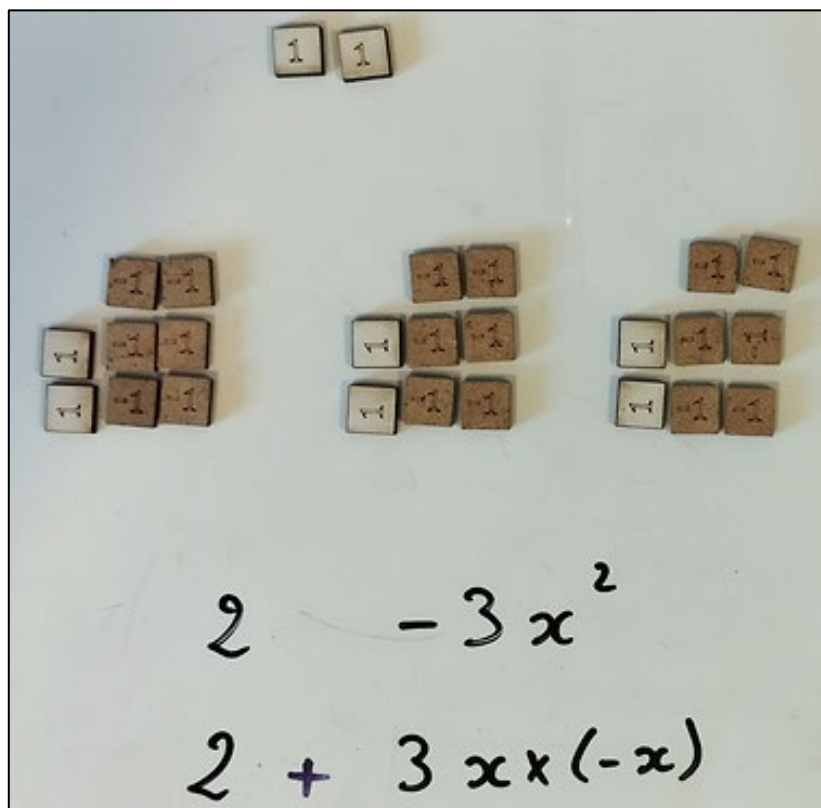
On retire les éléments $-x^2$ pour ne laisser que les formes factorisées.



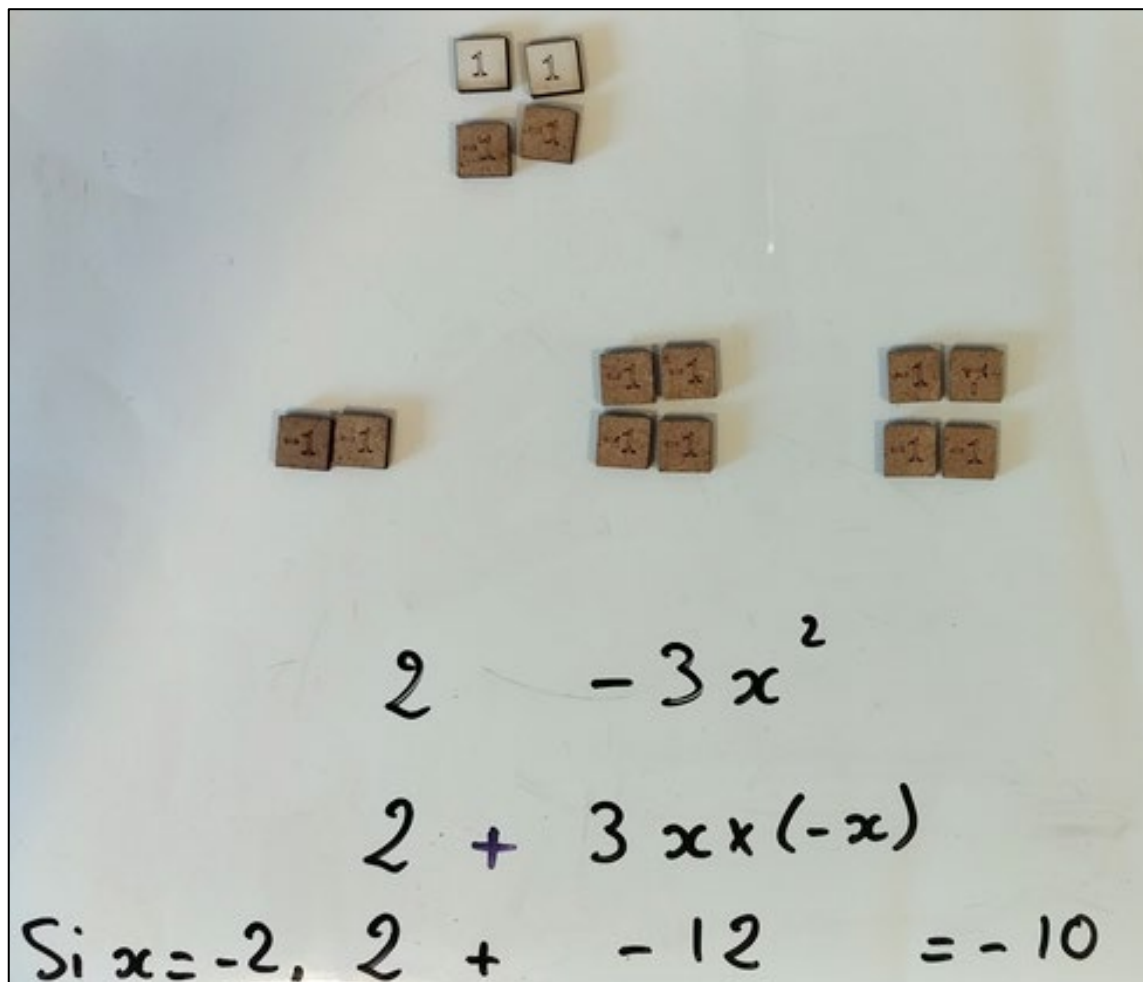
On substitue x par -2 , et $-x$ par $+2$, en faisant remarquer si besoin qu'on prend l'opposé de x , il faut donc prendre l'opposé de -2 :



On calcule les carrés :



On enlève les éléments qui ont permis de calculer les carrés afin de déterminer le résultat :



On obtient $G = 2 - 3x^2 = -10$ lorsque $x = -2$.

Programme de calculs




Exemple : programme de calculs

Exprimer en fonction du nombre initial le programme de calculs suivant :

- choisir un nombre ;
- lui ajouter 2 ;
- multiplier le résultat par 3 ;
- enlever 6.

Voici les différentes étapes :

Choisir un nombre :	 x
Lui ajouter 2 :	 $x + 2$

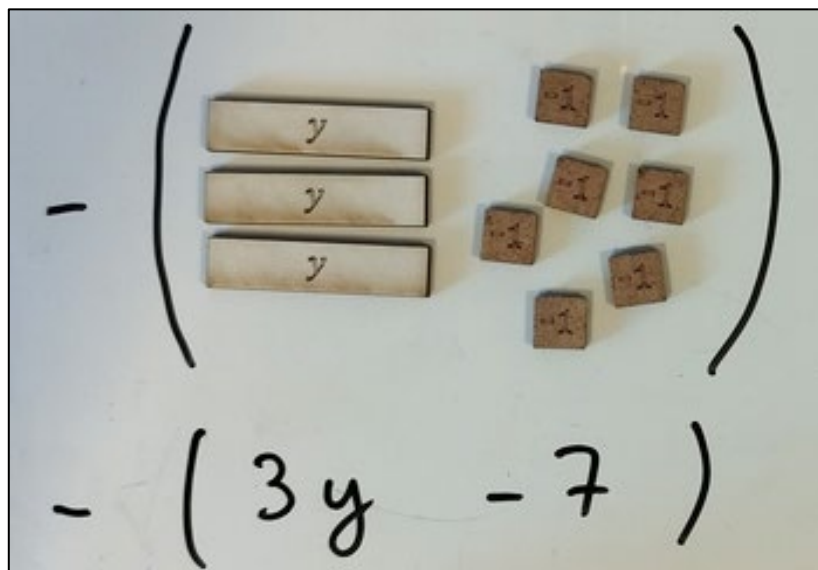
Multiplier le résultat par 3 :	
Enlever 6 : On peut remarquer ici que les 6 unités négatives annulent celles positives, il n'en reste plus.	
On obtient :	

Ainsi, l'expression obtenue est $3x$.

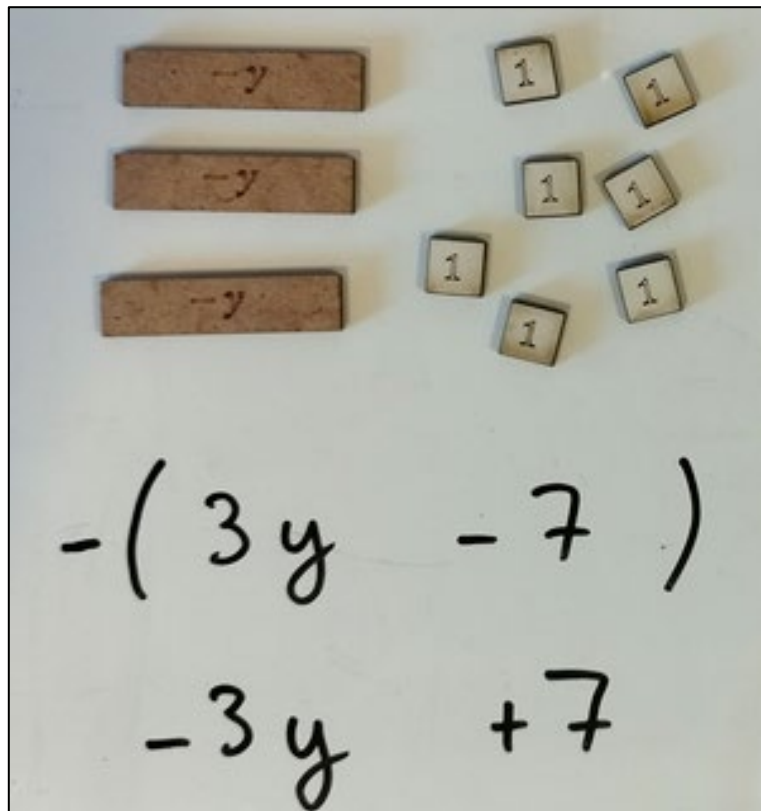
Trouver l'opposé d'une expression littérale

Exemple : Déterminer l'opposé de $H = (3y - 7)$.

On commence par rassembler les différents éléments :



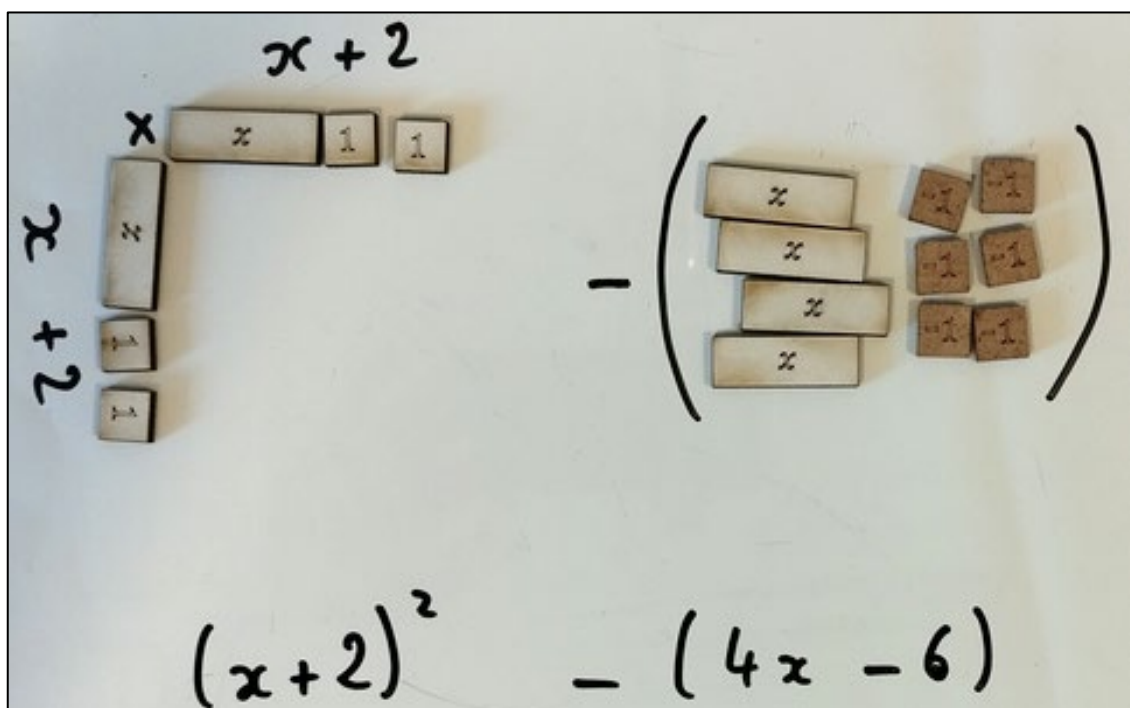
On doit prendre l'opposé de cet ensemble, on retourne donc toutes les cartes concernées :



On obtient $H = -(3z - 7) = -3z + 7$.

Exemple : Développer et réduire l'expression : $J = (x + 2)^2 - (4x - 6)$.

On commence par rassembler les différents éléments en identifiant que le premier terme est un carré, tandis que le deuxième sera un ensemble à retourner car on souhaite prendre son opposé :



On développe le carré et on oppose le deuxième terme :

Diagram illustrating the expansion of $(x+2)^2$ using algebra tiles. The tiles are arranged in a square with side length $x+2$. The top row is labeled $x+2$ and the left column is labeled $x+2$. The tiles are labeled with x , 1 , x^2 , and 1 . To the right, there are four rows of tiles representing the terms to be subtracted: four $-x$ tiles and six 1 tiles.

$$(x+2)^2 - (4x - 6)$$


On enlève les éléments extérieurs du carré :

Diagram illustrating the removal of the outer elements of the square. The tiles are arranged in a square with side length $x+2$. The top row is labeled $x+2$ and the left column is labeled $x+2$. The tiles are labeled with x , 1 , x^2 , and 1 . To the right, there are four rows of tiles representing the terms to be subtracted: four $-x$ tiles and six 1 tiles.

$$(x+2)^2 - (4x - 6)$$

$$x^2 + 4x + 4 - 4x + 6$$


On rassemble les éléments :



$$(x+2)^2 - (4x-6)$$

$$x^2 + 4x + 4 - 4x + 6$$

On réduit l'expression :



$$(x+2)^2 - (4x-6)$$

$$x^2 + 4x + 4 - 4x + 6$$

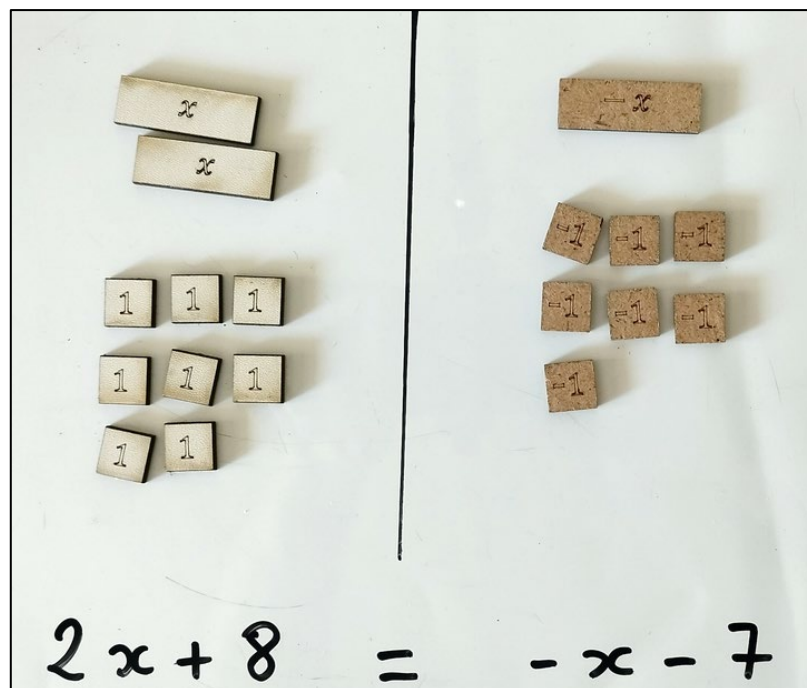
$$x^2 + 6$$

On obtient alors $J = (x+2)^2 - (4x-6) = x^2 - 4$.

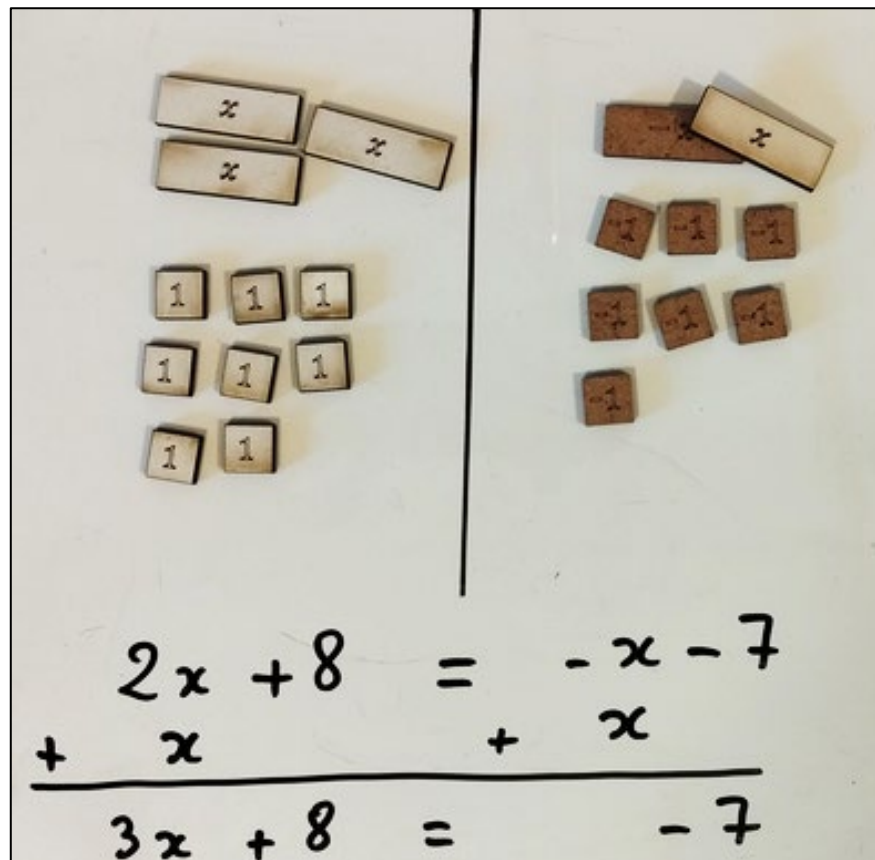
Résoudre des équations

Exemple : Résoudre l'équation $2x + 8 = -x - 7$.

On commence par représenter les deux membres de l'équation :



Pour supprimer le $-x$ à droite, il suffit de lui ajouter $+x$, qu'on doit faire de même à gauche.



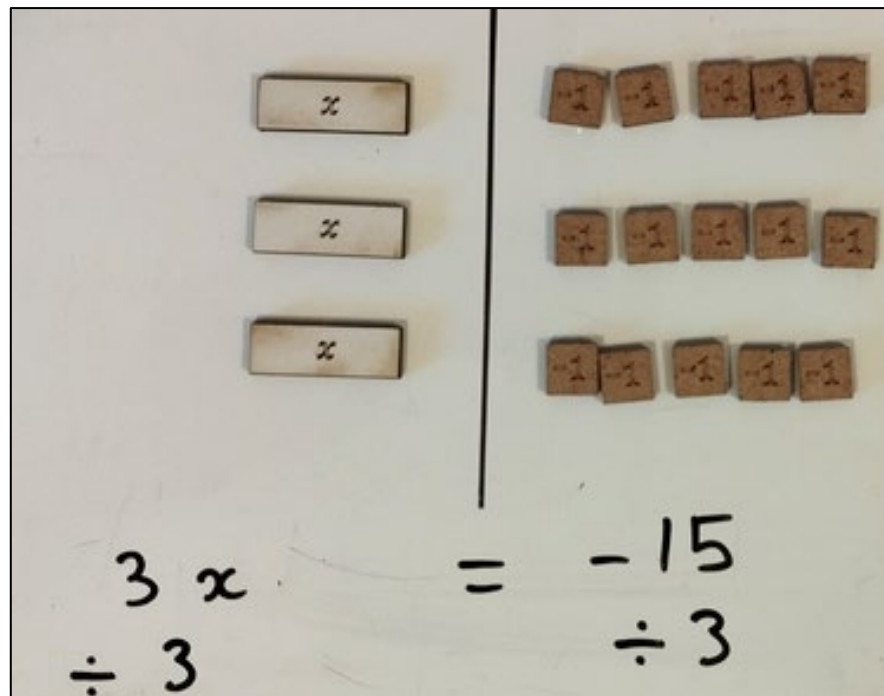
Ainsi, on obtient avec $3x + 8 = -7$.

Pour supprimer les 8 unités positives, il faut ajouter 8 unités négatives, et ce, des deux côtés.

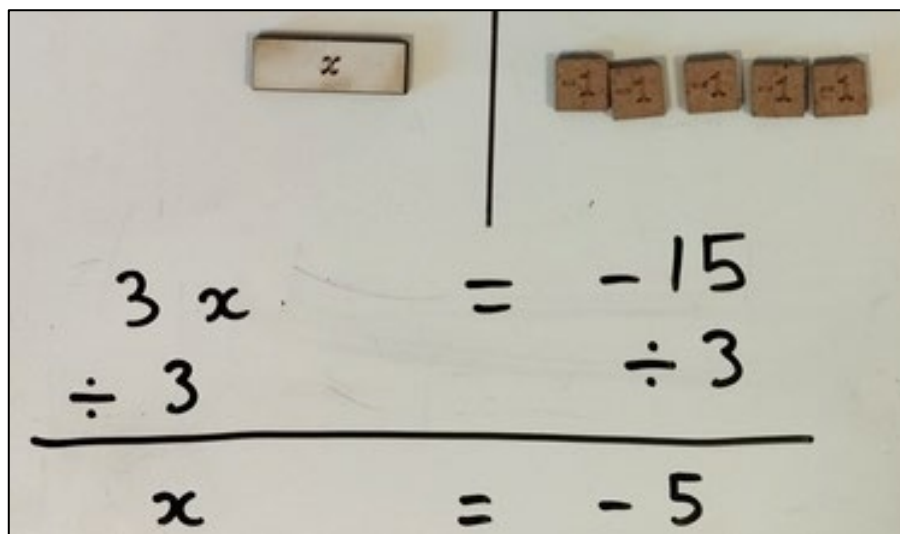
The image shows a whiteboard with algebra tiles and a handwritten equation. On the left side of a vertical line, there are three rectangular tiles labeled 'x' stacked vertically. Below them are eight small square tiles labeled '1' and eight small square tiles labeled '-1' arranged in two columns of four. On the right side of the line, there are seven small square tiles labeled '-1' arranged in two columns of three and one tile at the bottom. Below the tiles, the equation $3x + 8 = -7$ is written. Below this, -8 is written under the $+8$ and -8 is written under the -7 . A horizontal line is drawn under the second equation, resulting in $3x = -15$.

On réduit pour obtenir $3x = -15$.

On peut alors faire 3 paquets dans chaque membre. Ce qui signifie qu'on peut diviser par 3 chaque membre. Attention à bien préciser qu'on divise (partage), et non qu'on enlève (mot associé à la soustraction bien souvent).



On ne garde qu'une partie sur les trois :

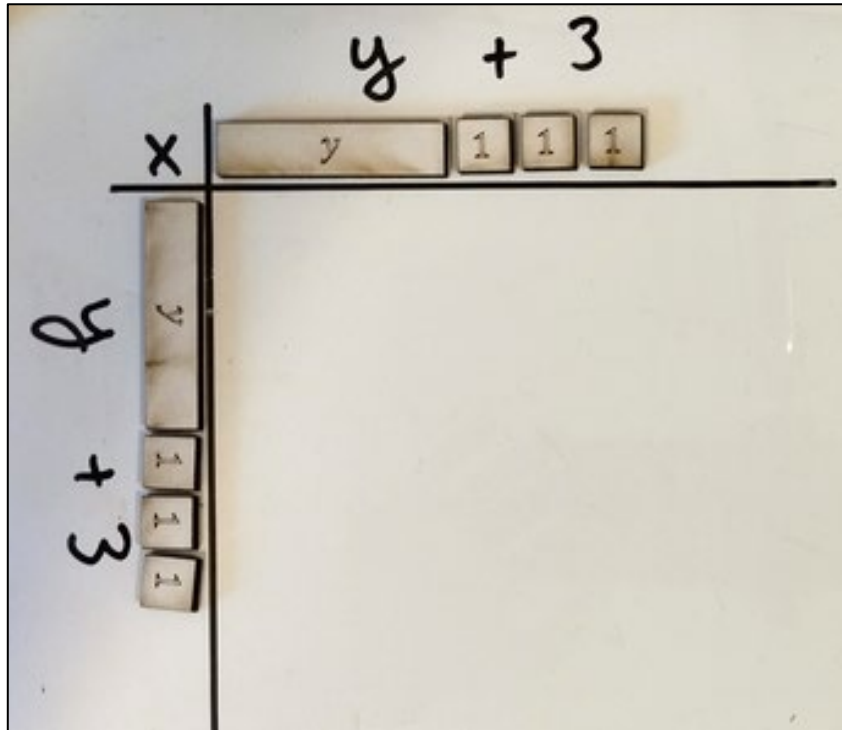


On obtient alors $x = -5$.

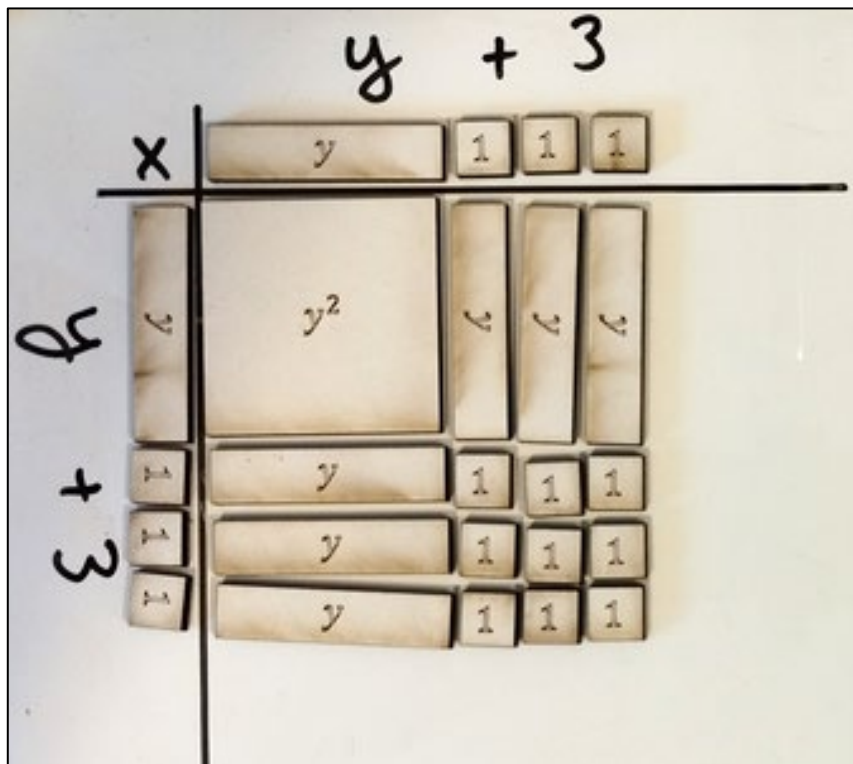
Travailler les identités remarquables

Exemple : Développer $K = (y + 3)^2$.

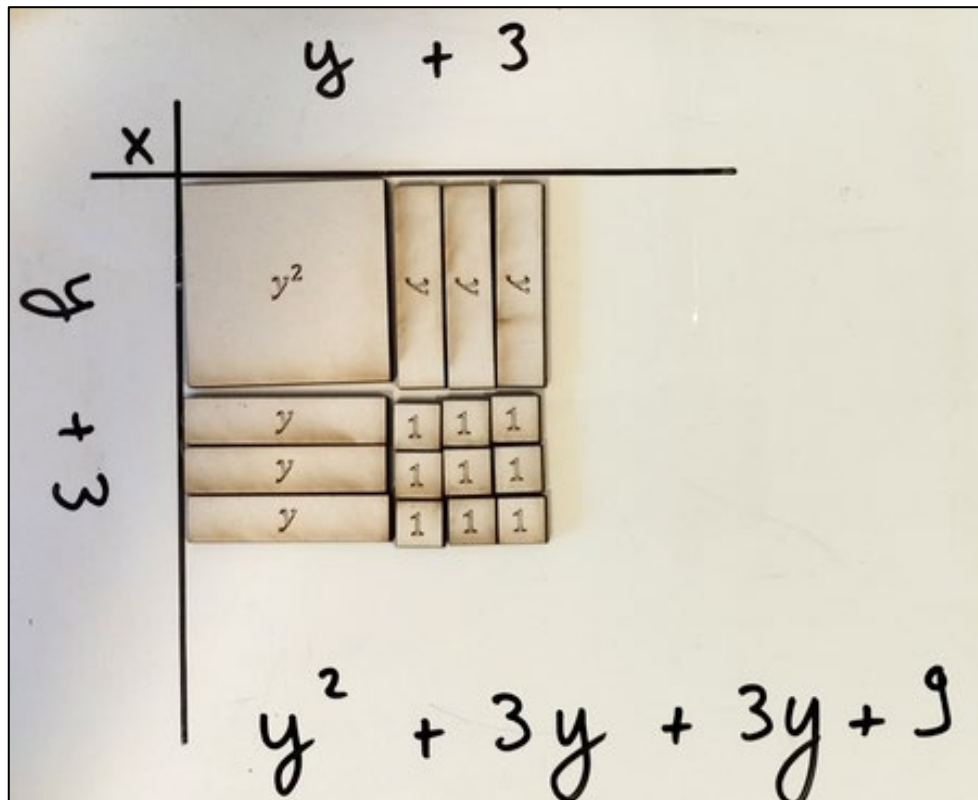
On reconnaît un carré, il faut donc utiliser cette forme pour développer en plaçant $y + 3$ sur chaque élément extérieur à la table :



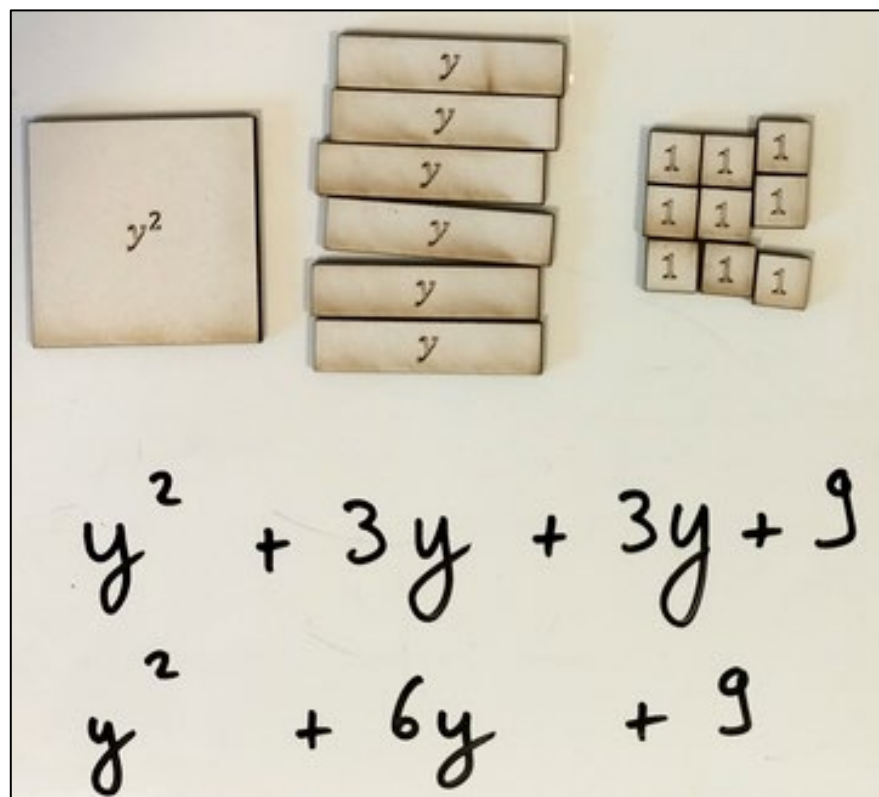
On construit le carré :



On enlève les éléments de départ :



On réarrange en mettant les éléments de même type ensemble :

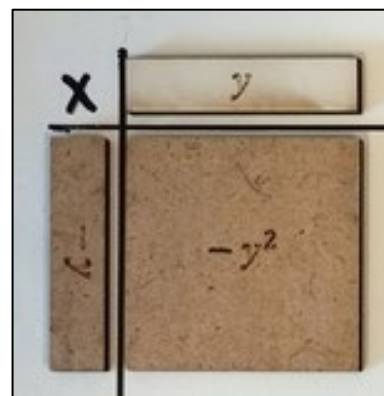
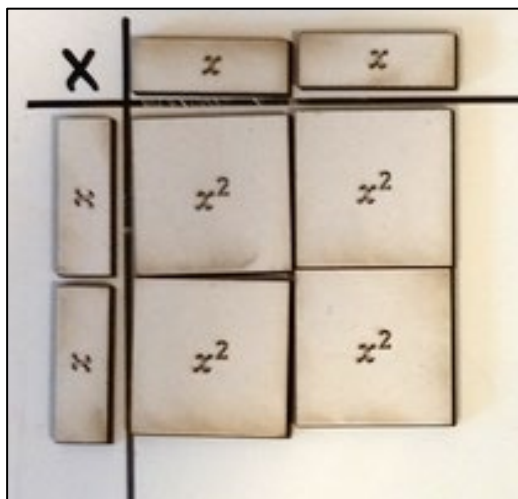


On obtient que $K = (y + 3)^2 = y^2 + 6y + 9$.

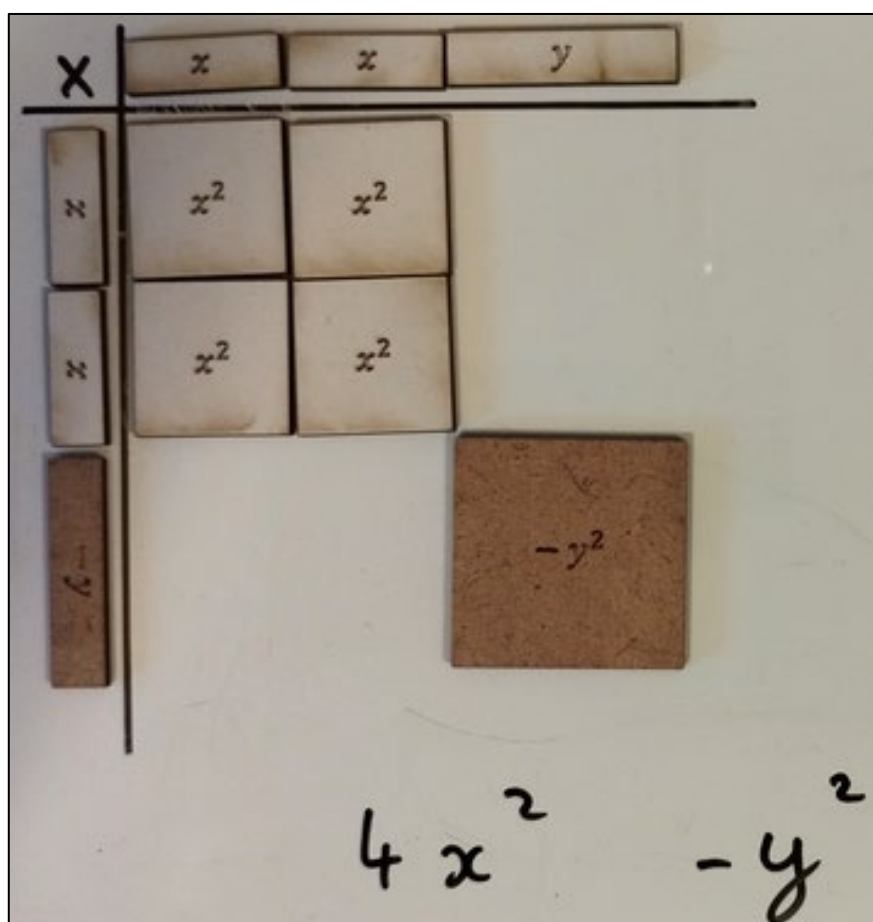
Exemple : Factoriser $L = 4x^2 - y^2$.

Il s'agit ici de trouver les dimensions d'un rectangle d'aire $4x^2 - y^2$. Les élèves vont sans doute essayer de faire une factorisation par un facteur commun comme ce fut le cas dans la partie factoriser.

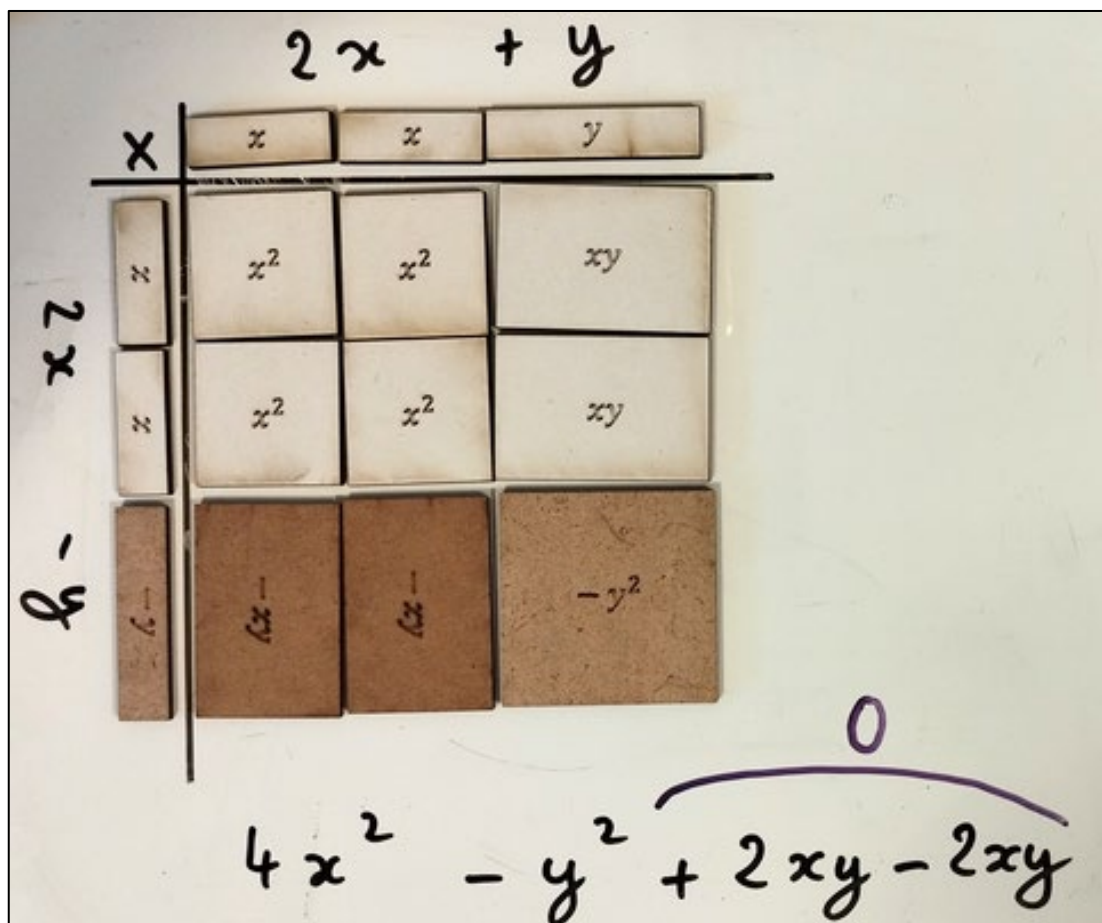
On pourra alors leur proposer de factoriser seulement $4x^2$ d'un côté et $-y^2$ d'un autre :



On pourra dire que la factorisation de $L = 4x^2 - y^2$ donne un carré avec des « trous ». Certains élèves devraient trouver comment agencer les différentes parties :



Concernant les « trous », on peut se demander comment les remplir pour avoir un carré complet et utiliser les règles du matériel. Des élèves peuvent avoir envie de compléter à partir des informations sur les bords. On fera remarquer qu'on ne peut ajouter que 0. Or $0 = xy - xy$ par exemple, ainsi, en plaçant judicieusement des tuiles qui s'annulent, on peut rajouter des éléments pour compléter le carré et ainsi déterminer une factorisation.



On obtient $L = 4x^2 - z^2 = (2x + z)(2x - z)$.

8.9.6. Limites et prolongements

Comme indiqué précédemment, il est nécessaire de créer des limites au matériel pour pouvoir le dépasser et manipuler dans le mode iconique et à terme le mode symbolique.

Pour cela, voici quelques limites qu'il est possible d'exploiter :

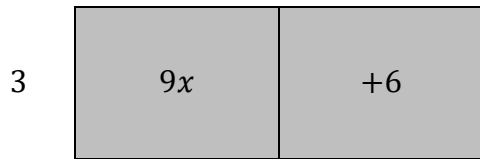
- grands nombres ;
- solutions non entières ;
- degré supérieur à 1 ;
- $2x = x + x = 2 \times x = 1 \times 2x$ (point de vigilance et d'intérêt).

Par ailleurs, voici quelques prolongements à étudier :

- complémentarité et étayage : création de représentations mentales ;
- cohérence avec les aires (intégrales) ;
- généralisation : tables de multiplications.

Exemple : tables de multiplications étendues aux expressions littérales avec une devinette

x est un nombre positif. Je suis un rectangle, mon aire est $9x + 6$ et ma largeur est 3. Quelle est ma longueur ?



\times	$3x$	$+2$
3	$9x$	$+6$

La longueur de ce rectangle est donc $3x + 2$ car $3(3x + 2) = 9x + 6$

Exemple : Développer $M = 7 + 3(-2x + 3) - 2x(3 - x)$

\times	$-2x$	$+3$
$+3$	$-6x$	$+9$

et

\times	3	$-x$
$-2x$	$-6x$	$+2x^2$

Donc $M = 7 + 3(-2x + 3) - 2x(3 - x) = 7 - 6x + 9 - 6x + 2x^2 = 2x^2 - 12x + 16$

9. Conclusion

Cet essai propose des activités corrélées aux réflexions menées pour la construction des nombres, le sens des opérations et les concepts tels que l'algèbre. Nous sommes conscients que cet essai reste en évolution et sera complété et adapté au fur et à mesure des expérimentations et des retours de collègues. La progression que nous avons choisie pour aborder ces concepts abstraits est basée sur des représentations concrètes avec toutes les difficultés induites, ce qui conduira à des ajustements concernant les « manières de faire » avec le matériel.

10. Bibliographie

- Arnoux, P. (2012). Quelques remarques sur les représentations mentales des élèves. In Actes des auditions du comité scientifique de la Conférence nationale sur l'enseignement des mathématiques à l'école primaire et au collège (pp. 24-25) : <http://educmath.ens-lyon.fr/Educmath/dossier-manifestations/conference-nationale/contributions/conference-nationale-arnoux-1>
- Chevallard, Y. (1989). Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège. *Petit x*, 19, 43-72 : <https://numerisation.univ-irem.fr/PX/IGR89002/IGR89002.pdf>
- Dehaene, S. (1992). Varieties of numerical abilities. *Cognition*, 44(1-2), 1-42.
- Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. In *Annales de didactique et de sciences cognitives* (Vol. 5, No. 1, p. 37-65).
- Grugeon, B. (2000). Une structure d'analyse multidimensionnelle en algèbre élémentaire : conception, exploitation et perspectives. *L'algèbre au lycée et au collège*, 5-39 : <https://publi-math.univ-irem.fr/numerisation/MO/IMO00003/IMO00003.pdf>
- Grugeon, B., Pilet, J., Chenevotot, F., & Delozanne, E. (2012). Diagnostic et parcours différenciés d'apprentissage en algèbre élémentaire. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 133-158 : <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01174507>
- Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics* (p. 390–419). Macmillan Publishing Co, Inc.
- Mercier, A., & Quilio, S. (2018). *Mathématiques élémentaires pour l'école ; nombres, grandeurs, calculs*. Presses universitaires de Rennes.
- Villani, C., Torossian, C., & Dias, T. (2018). 21 mesures pour l'enseignement des mathématiques.

11. Sitographie

1 de + / Montessori, maternelle et Maths au collège. (s. d.). Un de plus ! <https://un-deplus.jimdofree.com/> (consulté le 30/04/2023)

Dictionnaire de mathématiques récréatives Nombre rectangulaire. (s. d.). Récréomath Site de mathématiques récréatives. http://www.recreomath.qc.ca/dict_rectangulaire_n.htm (consulté le 30/04/2023)

Géométrie des nombres / Accromath. (s. d.). Accromath | Une revue produite par l'Institut des sciences mathématiques et le Centre de recherches mathématiques. <http://accromath.ugam.ca/2012/01/geometrie-des-nombres/> (consulté le 30/04/2023)

Les nombres figurés ou géométriques. (s. d.). Nombres, curiosités, théorie et usages : page d'orientation générale. <http://villeminegerard.free.fr/Denombre/NbFigure.htm> (consulté le 30/04/2023)

Morellato, M., & Quilio, S. (2018, mars). *Nombres rectangles Partie 1.* IA 13 1^{er} degré Mission Maths Mission Sciences. <http://www.tice1d.13.ac-aix-marseille.fr/science techno/spip/sites/www.tice1d.13/science techno/spip/IMG/pdf/ace-arithmecole module nombres-rectangles partie 1 version provence.pdf> (consulté le 30/04/2023)

Morellato, M., & Quilio, S. (2018, mars). *Nombres rectangles Partie 2.* IA 13 1^{er} degré Mission Maths Mission Sciences. <http://www.tice1d.13.ac-aix-marseille.fr/science techno/spip/sites/www.tice1d.13/science techno/spip/IMG/pdf/ace-arithmecole module nombres-rectangles partie 2 version provence.pdf> (consulté le 30/04/2023)

Tuiles algébriques. (s. d.). MathémaTICEs.be. <https://mathematice.be/enseigner-avec-des-tuiles-algebriques/> (consulté le 30/04/2023)

Working with Algebra Tiles. (s. d.). Math Bits Secondary Math Resources with the Common Core. <https://mathbits.com/MathBits/AlgebraTiles/AlgebraTiles/AlgebraTiles.html> (consulté le 30/04/2023)