L'arithmétique scolaire : discrète ou continue ?

Séminaire national 2023
APMEP – 10 juin 2023

Christine Chambris
christine.chambris@u-cergy.fr

Maîtresse de conférences en didactique des mathématiques
LDAR, CY Cergy Paris Université

Introduction

- Maths discrètes, maths continues : quelles mathématiques pour quel public ?

Introduction

- Compétente ?

Le système métrique, la numération

Les modèles en barres :

- ❑ une quantité de billes
- ❑ une quantité de soupe

- Chercheuse en didactique des mathématiques

L'arithmétique à l'école c'est-à-dire… le nombre, le calcul, les quatre opérations, la proportionnalité

Le discret et le non discret

- Quelle arithmétique pour enseigner un « bon » sens du nombre à TOUS les élèves ?

Plan

- L’arithmétique à l’école : une arithmétique pour tous ?
- L’arithmétique à l’école : discrète ou continue ?
- L’arithmétique scolaire : des pistes pour des situations

L’arithmétique à l’école : une arithmétique pour tous ?

- Des phénomènes d’enseignement

Un moment de classe en CE1-CE2, vers 2020

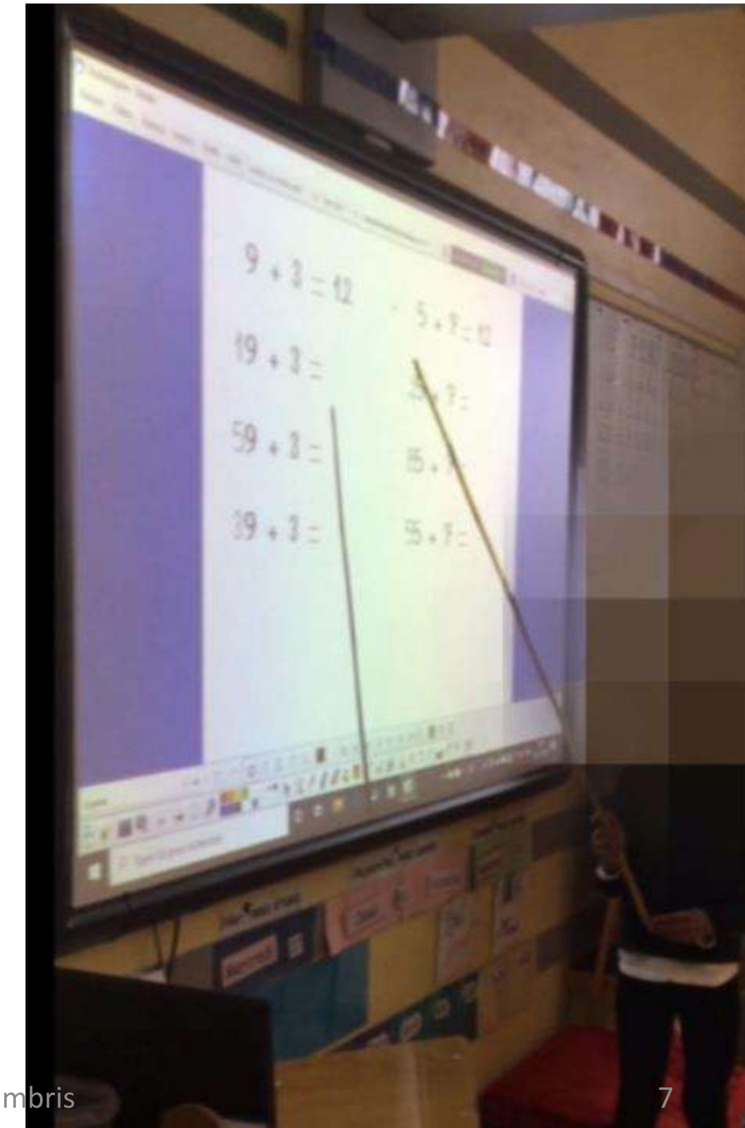
$$9 + 3 = 12$$

$$19 + 3 =$$

$$59 + 3 =$$

$$29 + 3 =$$

- Calculer 19+3



$19 + 3 = (19 + 1) + (3 - 1)$

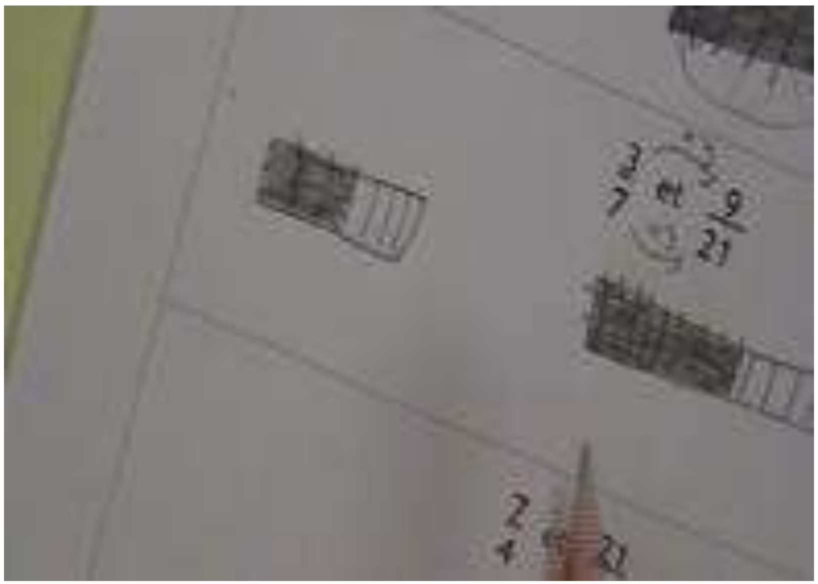
$19+(1+2)=(19+1)+2$

- Associativité ? Commutativité ?
- Propriétés de compensation (A. Batton)

Comparer 3/7 et 9/21 (CM2)

$\frac{3}{7}$ et $\frac{9}{21}$ à comparer (CM2, vers 2018)

Travail en binôme



CLEM: Trois fois, donc c’est **trois fois plus petit** et là on met **trois fois plus**. C’est pareil

Prof : Tu penses que c’est égal, d’accord.

CLEM (en s’adressant à E2) : t’es d’accord ?

E2 : oui….si tu le dis

CLEM: je veux que tu sois d’accord…pas que tu le fasses comme ça….

CLEM: donc…

E2 : oui, parce que tu rajoutes et puis…

CLEM: oui…oui…

(Chambris, Coulange, Rinaldi, & Train, 2021)

Quartier prioritaire, Bordeaux

$\frac{3}{7}$ et $\frac{9}{21}$ à comparer (CM2, vers 2018)

P : Est-ce tout le monde est d’accord pour dire que des 21 ièmes, c’est trois fois plus petits que des 7 ièmes ? (…)

P : Sauf que, elle prend, je prends trois fois plus de parts. J’ai fait des parts plus petites, trois fois plus petites mais j’en prends trois fois plus.

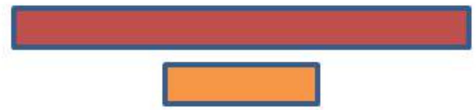
Temps collectifs

(Chambris, Coulange, Rinaldi, & Train, 2021)

Quartier prioritaire, Bordeaux

Première partie du raisonnement

Un phénomène (M)

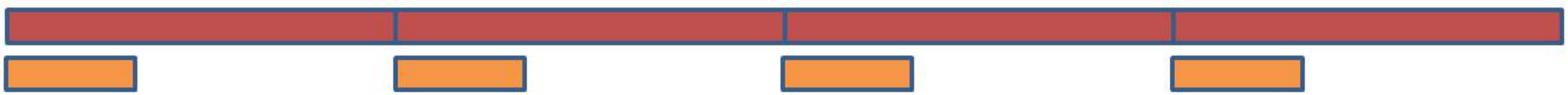


Un phénomène (M)

La quantité orange est plus petite que la quantité rouge, trois fois.

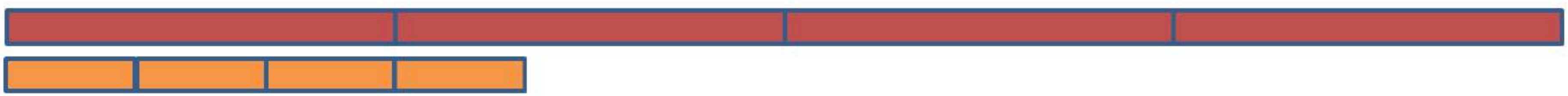
Un phénomène (M)

La quantité orange est plus petite que la quantité rouge, trois fois.



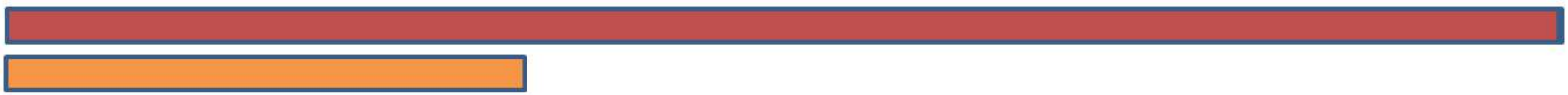
Un phénomène (M)

La quantité orange est plus petite que la quantité rouge, trois fois.



Un phénomène (M)

La quantité orange est plus petite que la quantité rouge, trois fois.



La quantité orange est plus petite que la quantité rouge, trois fois.

Pour avoir une quantité plus petite, 2 fois, 3 fois, dix fois, on peut prendre le même nombre d'unités mais des unités chacune plus petites, 2 fois, 3 fois, dix fois.

Les 21^{e} c'est trois fois plus petit que les 7^{e}. Donc, trois 21^{e}, c'est trois fois plus petit que trois 7^{e}.

Deuxième partie du raisonnement

Un autre phénomène (M')

Pour avoir une quantité plus grande, 2 fois, 3 fois, dix fois, on peut prendre les mêmes unités, mais en prendre davantage, 2 fois, 3 fois, dix fois plus.

Des 21^{e}, j'en prends 3 fois plus. C'est 3 fois plus grand !

$\frac{9}{21}$ c'est trois fois plus grand que $\frac{3}{21}$!

Une propriété

Pour rendre une quantité (exprimée sous la forme de *p* unités) *k* fois plus grande, il suffit de prendre *p* unités, chacune *k* fois plus grande.

- que TOUS les élèves doivent connaître pour avoir un « bon » sens du nombre
- à enseigner à TOUS ceux qui n’en ont pas l’intuition pour qu’elle devienne intuitive pour TOUS.

Des propriétés intuitives

- Utilisées spontanément par certains élèves
- dans des raisonnements plus ou moins sophistiqués
- Non reconnues ou non enseignées (car non enseignables) par les enseignantes

Des propriétés intuitives

- Pourquoi *non enseignables* ?
- Des propriétés qui
  - n’apparaissent pas dans les ressources pour les enseignant.e.s
  - DONC ne peuvent pas être enseignées
- Des savoirs « transparents »
- La « transparence » de certains savoirs empêchent les enseignant.e.s d’enseigner ce qu’il y a à enseigner

Une propriété

Pour rendre une quantité (exprimée sous la forme de *p* unités) *k* fois plus grande, il suffit de prendre *p* unités, chacune *k* fois plus grande.

Qu'est-ce que c'est ?

- Formellement :
  - $k.(p.u) = p.(k.u)$

- Associativité ? $k.(p.u) = (k.p).u$
- Commutativité ? $k.p = p.k$

Est-ce vraiment utile ?

Le glisse-nombre, des maths pour tous ?

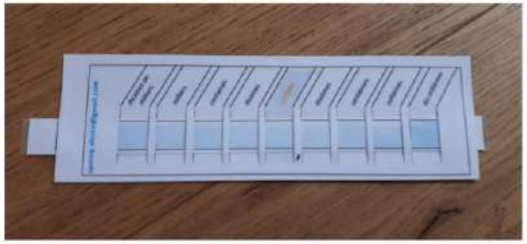
La règle à privilégier.

« Multiplier par 10, c’est donner à chaque chiffre une valeur 10 fois plus grande, le chiffre des unités devient donc le chiffre des dizaines, le chiffre des dixièmes devient celui des unités, etc. »

Cette règle permet :

- d’utiliser la même règle de multiplication par 10, 100, 1000 pour tous les nombres décimaux (entiers ou non)
- de donner du sens à la multiplication par 10, 100, par 0,1…

Présentation du glisse-nombre



Modèles individuels ou pour la classe.

https://jn2020.apmep.fr/Presentation-du-glisse-nombre

- La propriété M est « transparente » dans l'utilisation du glisse-nombre.
  - ➢ Source de difficultés d'enseignement cachées
  - ➢ Source de difficultés d'apprentissage cachées

- Oui. Elle est très importante et très utile !
- À la source des techniques de manipulation multiplicatives des écritures chiffrées (notamment)

L’arithmétique à l’école : discrète ou continue ?

- Pourquoi ces savoirs sont-ils *non* étiquetés ? *non* identifiés ?
- Qu’est-ce que cette propriété M ?

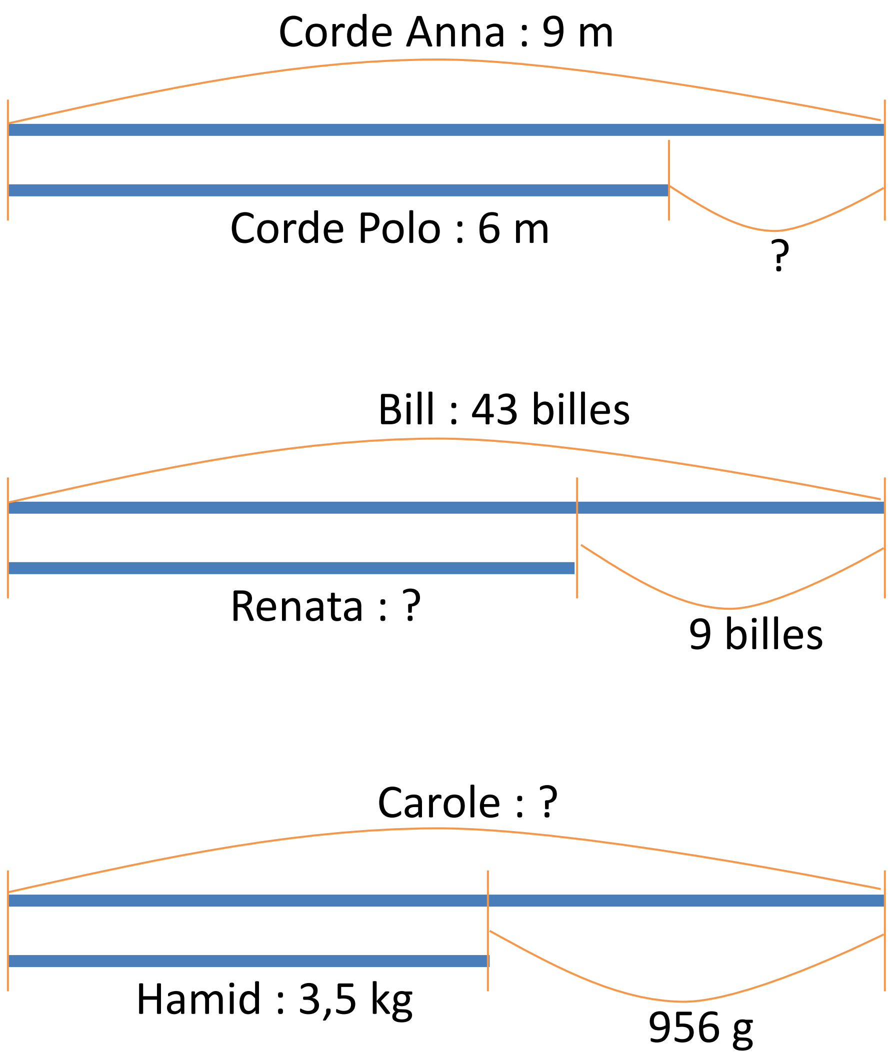
La propriété M

- Propriété intuitive qui a (au moins) une interprétation formelle.
- Comment s'attaquer au problème de son *non* enseignement ?
  - avec l'enseignement de la propriété formelle ?
  - en enseignant l'intuition ?
- Intuition de quoi ?

Modèles en barres

- BOEN avril 2018
- Guides orange (CP), violet (CM), bleu (collège)…

Modèles en barres

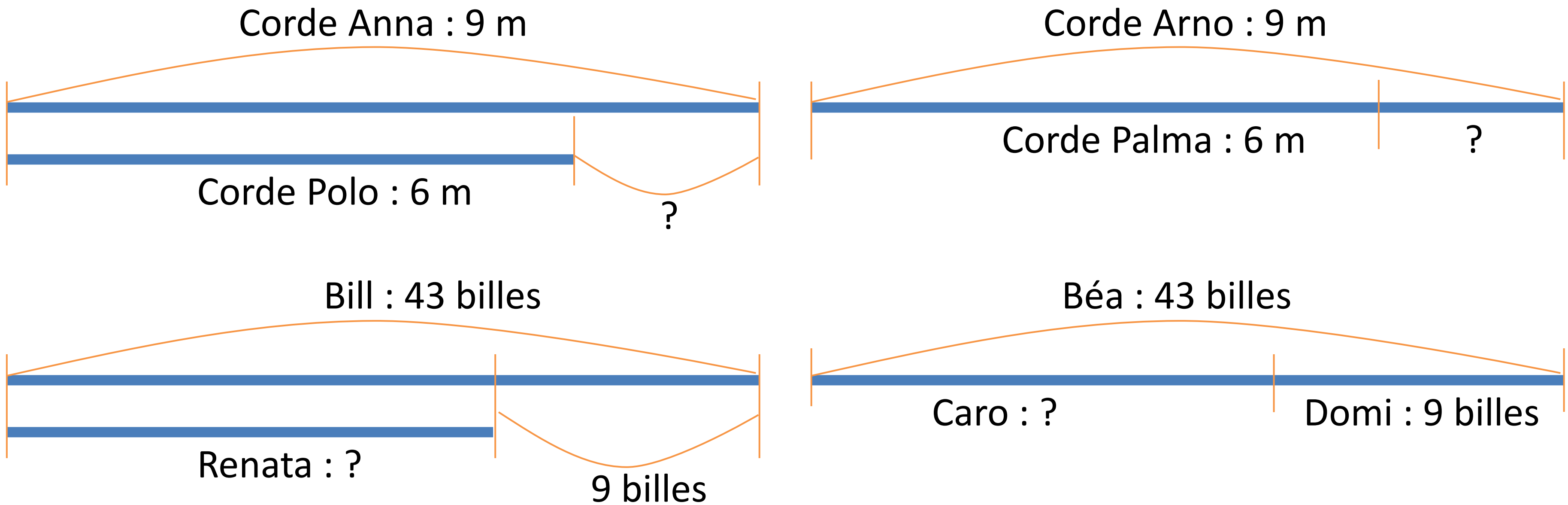


Les barres représentent des quantités plus ou moins grandes

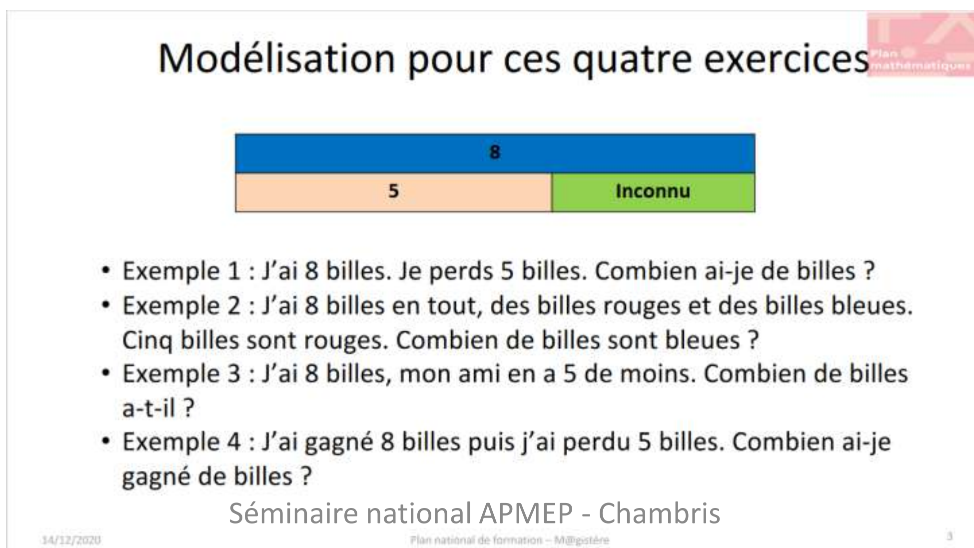
Les barres représentent des quantités continues et aussi… des quantités discrètes

Une représentation… continue du discret et du non discret !

Modèles en barres



MAIS



Magistère 2020
Formation des RMC

Pourquoi cette cécité ?

Un peu d'histoire des maths

- Jusqu'au 19e siècle : mathématique science des quantités
  - Objets de base : quantités
  - Axiomatisation : idéalisation de la réalité
  - Lien avec la réalité dans la définition des objets
- Aujourd'hui en mathématiques :
  - Objets de base : ensembles
  - Axiomatisation : non contradiction
  - Perte de lien avec la réalité dans la définition des objets
- Pour les mathématiciens, aujourd'hui : la *quantité* est (dans) l'intuition des nombres.

Pourquoi cette cécité ?

Un peu d’histoire de l’enseignement des maths de l’école

- Jusque 1940 : pas d’influence des transformations du 19e siècle
- 1940-1970 : quelques effets
- Réforme des mathématiques modernes (1970) : élimination des quantités des fondements (théoriques) des nombres, dans l’enseignement
- Et l’intuition des nombres pour les élèves ? Où est-elle ? Comment les enseignants peuvent-ils l’enseigner ?

L’arithmétique de Bézout (1764)

- La quantité :
  - ce qui est susceptible d’augmentation et de diminution
  - peut être discrète ou continue
  - l’étendue, le poids, la durée…

Commentaires

- Les quantités ont des propriétés
- La propriété M est une propriété des quantités
- Les nombres sont des quantités
- L’intuition des nombres : la quantité et ses propriétés

À l’école, aujourd’hui

- Appui *obligatoire* sur des « objets »
  - Souvent des collections
  - Parfois le continu
- Certains élèves apprennent tout seul les propriétés des quantités

L'arithmétique scolaire ?

- Une arithmétique fondée sur les quantités
- Les quantités : discrètes et « continues »
- Hypothèse :
  - Les connaissances / propriétés sur des quantités « concrètes » se « transfèrent » aux quantités « abstraites », les nombres (Davydov, 1975, appui sur théorie des quantités de Kolmogorov)
  - Et fondent l'intuition des nombres

- Des savoirs incidents

vs

- Des savoirs enseignés

- Quelles situations d’enseignement ?

L’ordre des fractions unitaires

- $1/n < 1/m \Leftrightarrow n > m$

Visnovska et Cortina

- Milieux très défavorisés (Mexique, Afrique du Sud)
- Un conte

Matériel :

- Cortina, J. L., Visnovska, J., & Zuniga, C. (2014). Unit fractions in the context of proportionality : Supporting students’ reasoning about the inverse order relationship. *Mathematics Education Research Journal*, *26*(1), 79-99.
- https://www.ru.ac.za/sanc/mathsatschool/miclegr4-7/
- Vale, P., Graven, M., Višňovská, J., & Ford, C. (2019). *Mama Khanyi and the Pots. A mathematical story and activity book*. South African Numeracy Chair Project, Rhodes University. [Mama Khanyi et les pots (traduction Chambris)]
- https://www.ru.ac.za/media/rhodesuniversity/content/sanc/documents/SANC_Storybook.pdf

Un jour Mama Khanyi partit ramasser du bois pour le feu.

Deux anciens vinrent la voir. Ils venaient d'un village qui était très éloigné. Ils voulaient demander à Mama Khanyi de fabriquer un pot vraiment très particulier. Le pot était un cadeau pour un mariage.

Il fallait que le pot fasse exactement la même taille qu'un autre pot qu'ils avaient apporté.

Comme sa mère n'était pas là, Thembi le mesura avec ses propres mains, très soigneusement.

7

Mama Khanyi et les pots

L’arithmétique scolaire : une arithmétique des quantités

Quand Mama Khanyi revint des champs, Thembi lui raconta la visite des anciens.

Mama Khanyi était triste de les avoir manqués, mais Thembi lui dit qu’elle avait fait très attention en mesurant le pot.

« Mama, » dit-elle, « ils voulaient un pot qui mesure exactement TROIS mains de haut. Ils ont dit qu'ils viendraient le chercher demain. »

Thembi partit alors jouer et laissa Mama Khanyi faire le pot.

Mama Khanyi et les pots

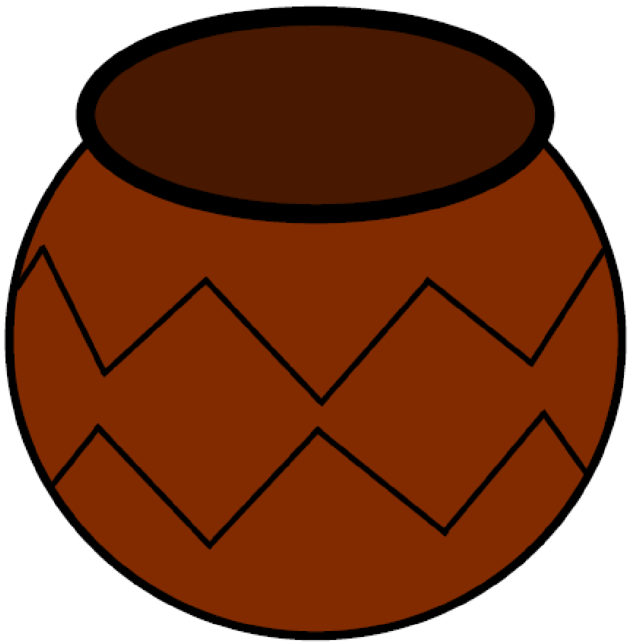
« Trois mains de haut, c’est facile à faire », se dit Mama Khanyi et elle commença à faire le pot.

Elle travailla très soigneusement pour s'assurer que le pot était EXACTEMENT de trois mains de haut.

9

Mama Khanyi et les pots

Les anciens revinrent le lendemain. Ils avaient rapporté le vieux pot et le posèrent à côté du nouveau. Le nouveau pot n’était pas de la bonne taille !



Quel est le pot que Mama Khanyi a fait ?

Qu’est-ce qui te fait dire ça ?

10

Mama Khanyi et les pots

Plus tard

« Nous devrions commencer avec un morceau si long que lorsque nous mesurerons le bâton avec lui, il tiendra exactement DEUX fois le long du bâton » dit Mama Khanyi.

Elle ajouta « Nous appellerons ce nouveau morceau un otibele, car « bele » signifie petit, et « oti » signifie DEUX. »

Un otibele tiendra exactement DEUX fois le long du bâton.

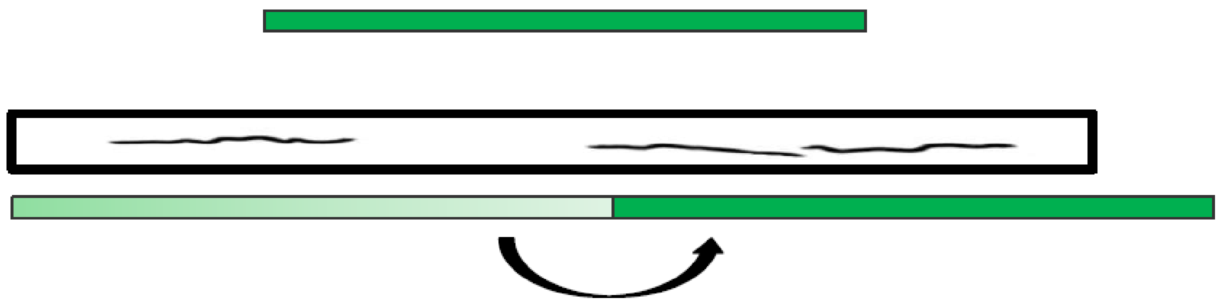
Combien d'otibele le bâton mesurera-t-il ?

25

Mama Khanyi et les pots

Mama Khanyi commença à fabriquer un otibele. Elle coupa la tige pour en faire un morceau qui tient exactement DEUX fois le long du bâton.

Elle coupa d'abord ce morceau et le plaça le long du bâton pour tester s'il tenait exactement DEUX fois…



Est-ce un vrai otibele ?

Est-ce qu'un vrai otibele serait plus court ou plus long que celui-ci ?

26

Mama Khanyi et les pots

Pour conclure

- L'arithmétique scolaire
  - Une arithmétique des quantités
  - Une arithmétique pour tous
- Avec des quantités discrètes et non discrètes
- Pour développer l'intuition des nombres, comme quantités

- Des propriétés explicitables et explicitées : condition pour être enseignables
- Quelles situations d'enseignement ? Quel enseignement ?