



Nombres figurés et résolution de problèmes

Mercredis de l'APMEP – 13 décembre 2023

Avant de commencer

► Sur le site de l'APMEP

- <https://www.apmep.fr/Nombres-figures-et-resolution-de-problemes>



Objectifs



- ▶ Mettre en œuvre le système du triptyque : Manipuler, Verbaliser, Abstraire
- ▶ Illustrer par quelques exemples
 - Nombres figurés
 - Résolution de problèmes
 - Pré-algèbre

Sommaire



- ▶ Nombres figurés : concept
- ▶ Nombres figurés : Applications et propriétés
- ▶ Vers la résolution de problèmes arithmétiques

Nombres figurés

Concept (pages 9 à 20)

Triple code de Dehaene

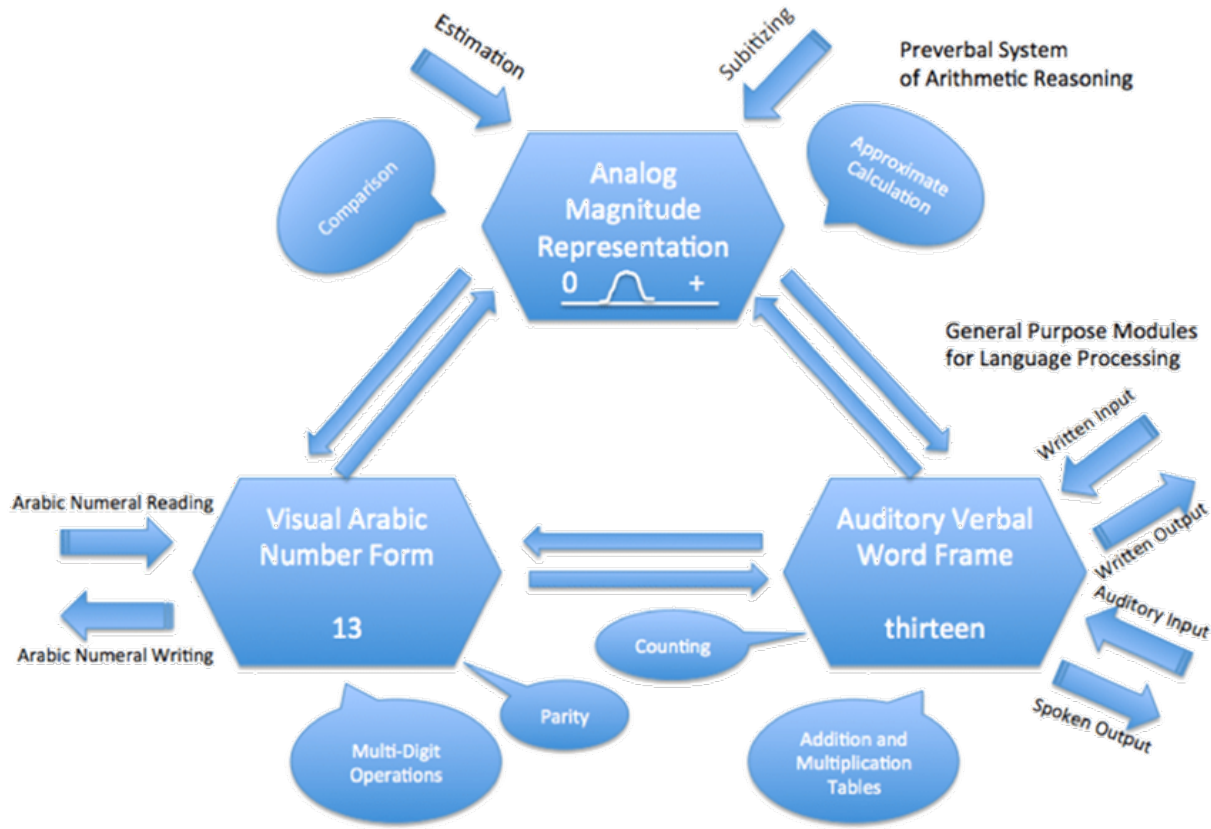


Image d'après [researchgate.net](https://www.researchgate.net)

Changement de paradigme



- ▶ Voir le nombre comme :
 - une grandeur (et sa mesure associée)
 - une figure géométrique (et ses propriétés associées)

Matériel de manipulation : première approche

- ▶ D'après [Wikipédia](#)
 - « Dans l'enseignement des mathématiques, un **matériel de manipulation** est un objet permettant à l'apprenant de percevoir certains concepts mathématiques, en le manipulant. »
- ▶ S'appuie sur un matériel tangible
 - Grandeurs : longueur, aire, volume, masse, etc. et mesure de ces grandeurs
 - De l'abstraction à la manipulation à l'abstraction
 - Expliciter les grandeurs aux élèves

Matériel et objectifs souhaités : représentation mentales

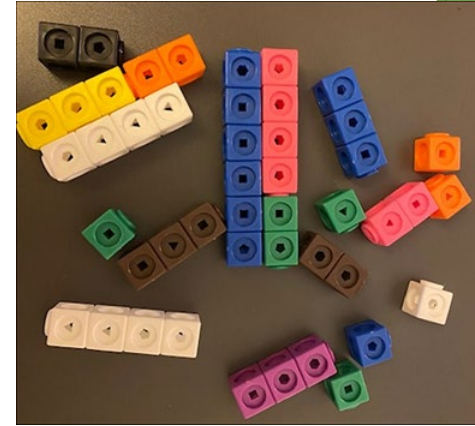
- ▶ Lien nombres et longueurs : nombres égaux, longueurs égales avec réinvestissement du codage de géométrie
- ▶ Construction du sens du signe « = » : égalité des nombres et égalités de longueurs
- ▶ Construction des propriétés des égalités
- ▶ Multiplication : aire d'un rectangle
- ▶ Factoriser : former l'aire d'un rectangle et en trouver ses dimensions

Matériel associé

▶ Jetons



▶ Cubes emboîtables



▶ Réglettes Cuisenaire



▶ Tuiles algébriques

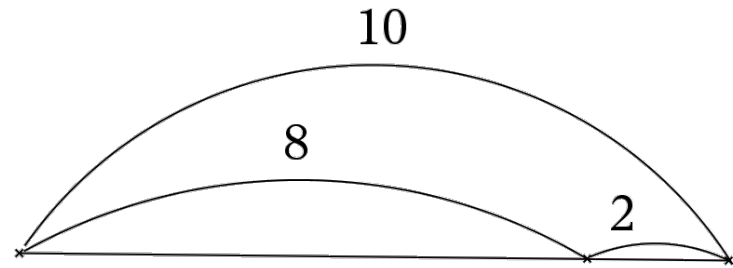


Des critères sur le matériel

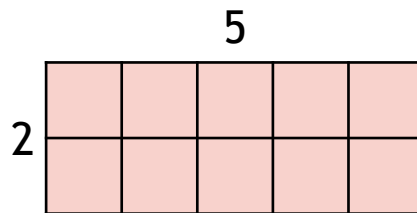
- ▶ 4 principes généraux d'application des manipulatifs (d'après Marie-Line Gardes, 2019)
 - Utiliser le manipulatif de **façon constante et sur une longue période**
 - Commencer par des **représentations transparentes** et avancer petit à petit **vers des représentations plus abstraites**
 - Eviter les manipulatifs qui **ressemblent à des objets de la vie de tous les jours** ou ont des caractéristiques non pertinentes qui déconcentrent
 - **Expliquer la relation** entre le manipulatif et le concept mathématique de façon **explicite**

Décomposition de nombres entiers

- ▶ Aspect figuratif des nombres
- ▶ Décomposition additive : longueur (d'après ACE)
 - Exemple : $10 = 8 + 2$

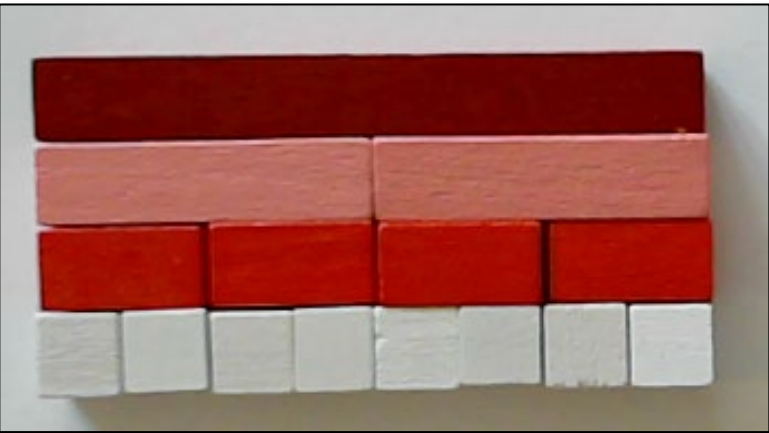


- ▶ Décomposition multiplicative : aire
 - Exemple : $10 = 2 \times 5$
 - Nombre rectangle



Avec des réglettes Cuisenaire

- ▶ Mur du nombre 8



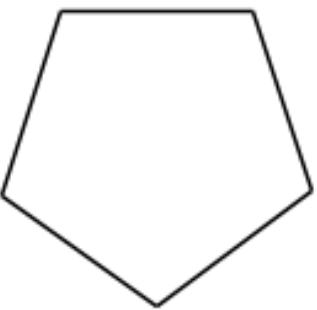
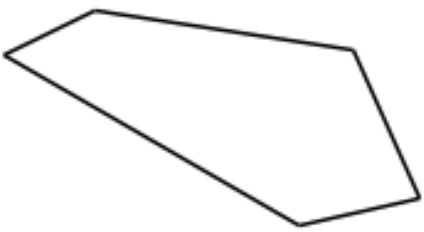
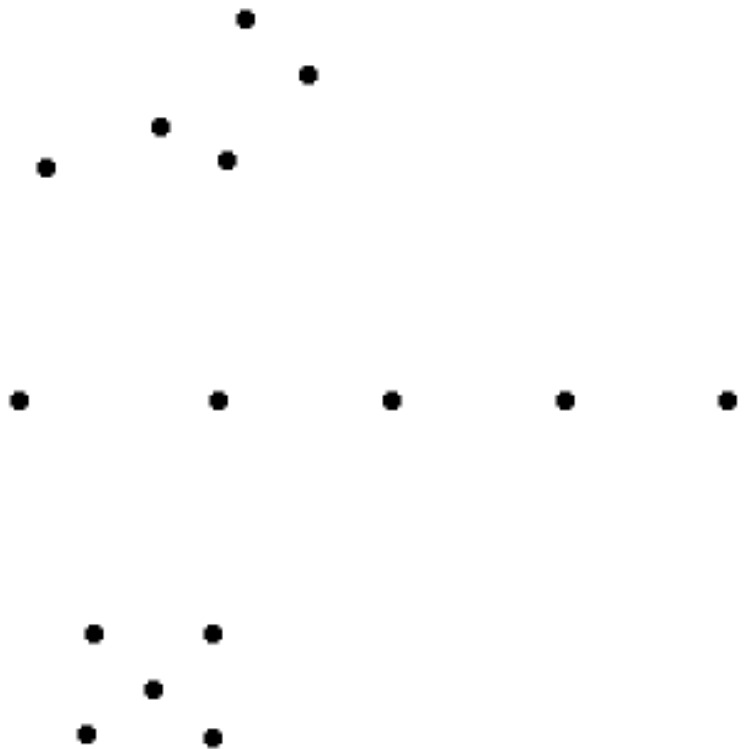
8							
4				4			
2	2	2	2	2	2	2	2
1	1	1	1	1	1	1	1

- ▶ Construction des nombres et sens des opérations

Définition : nombre figuré

- ▶ D'après le site [Recreomath](#) :
 - Nombre qui peut être représenté par un ensemble de points disposés de façon plus ou moins régulière formant une figure géométrique
 - Origine très ancienne : les pythagoriciens (585-400 avant J.-C.) assimilaient les nombres à des points
 - Théorie des nombres figurés : l'arithmogéométrie
- ▶ Définition pour la suite :
 - Nombre pouvant être représenté par des points ou un polygone convexe

Exemple avec 5



Nombre rectangle

- ▶ Définition des guides CP, collège et historique :
 - « Produits d'entiers strictement plus grands que 1, comme $6 = 2 \times 3$, $10 = 2 \times 5$, etc. »
 - Nombre ligne si « $n = 1 \times n$ »
- ▶ Définition anglo-saxonne et historique :
 - Un nombre rectangle est un nombre figuré représenté par un rectangle
- ▶ Changement de paradigme sur la multiplication
 - Addition réitérée
 - Aire d'un rectangle
 - A faire conjointement !

Exemples



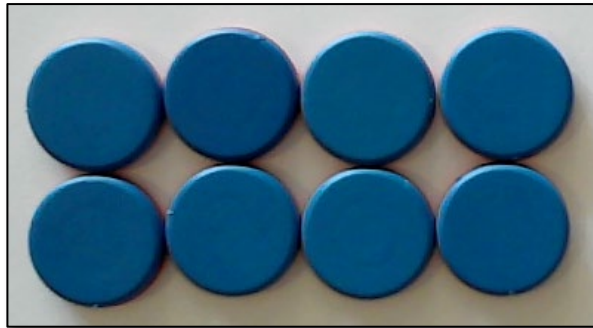
- ▶ Produire toutes les représentations en nombres rectangles de :
 - 12
 - 13
 - 25
 - 360

Nombres figurés

Applications et propriétés (pages 21 à 30)

Pair et impair

- ▶ Exemple avec 8 et 9
- ▶ Quelle définition ?



$$8 = 2 \times 4$$

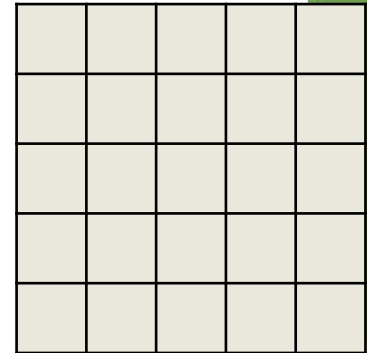


$$9 = 2 \times 4 + 1$$

Retour sur les exemples

► Nombre carré

- Une des représentations rectangulaires est un carré
- Produit de deux facteurs égaux
- Nombre impair de diviseurs



► Nombre premier

- Unique représentation avec une dimension égale à 1 et l'autre pas égale à 1 (rectangle non carré)



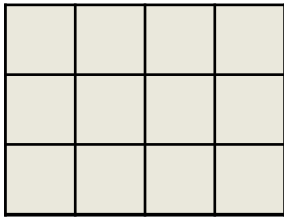
Nombre triangulaire

- ▶ Nombre triangulaire
 - Nombre qui peut se représenter en triangle
 - 1 ; 3 ; 6 ; 10 ; 15 ; ...



Propriétés avec les nombres rectangles

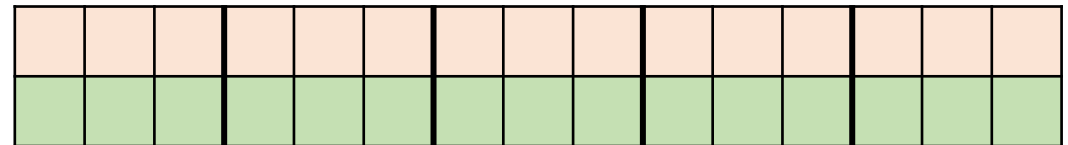
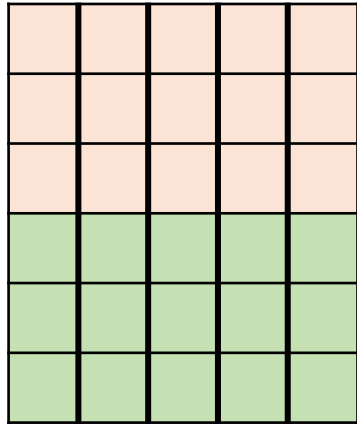
- ▶ Commutativité
 - $3 \times 4 = 4 \times 3$



Propriétés avec les nombres rectangles

► Associativité

➤ $2 \times (3 \times 5) = (2 \times 3) \times 5$



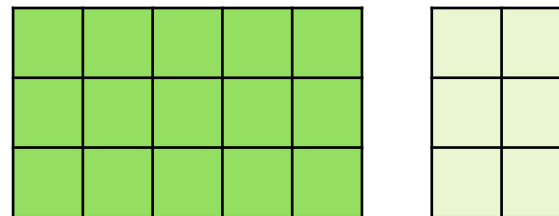
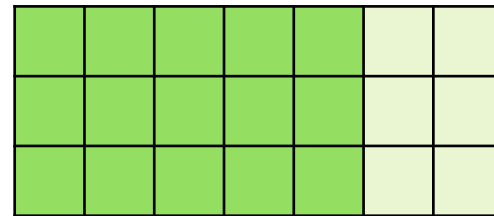
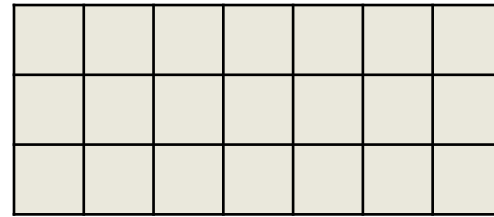
Propriétés avec les nombres rectangles

► Distributivité de la multiplication par rapport à l'addition

➤ 3×7

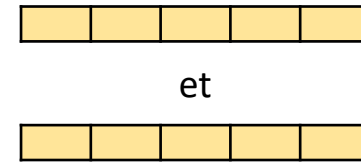
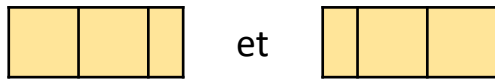
➤ $3 \times 7 = 3 \times (5 + 2)$

➤ $3 \times 7 = (3 \times 5) + (3 \times 2)$



Extension aux nombres rationnels

- ▶ Exemple avec 5 partagé en 2 équitablement



$$2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

Table de multiplication



×	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

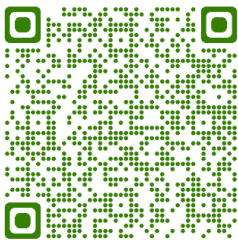
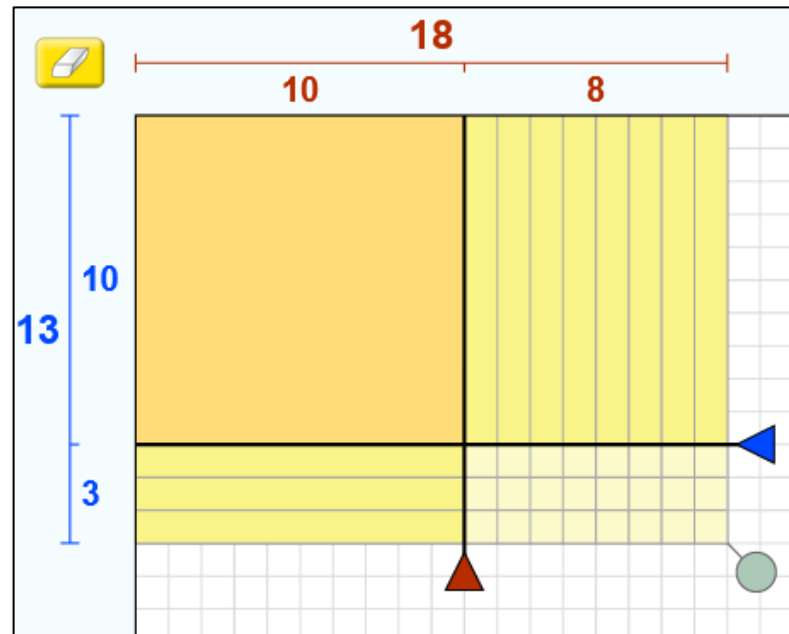
Produit avec les nombres rectangles

► Exemple avec 18×13

- $13 \times 18 = (10 \times 10) + (8 \times 10) + (3 \times 10) + (24 \times 1)$
- $13 \times 18 = 100 + 100 + 10 + 20 + 4$
- $13 \times 18 = 200 + 30 + 4$
- $13 \times 18 = 234$

► Et pour $18 \times 1,3$?

► Et pour $1,8 \times 1,3$?

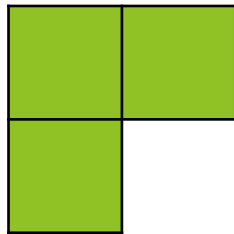


Pattern

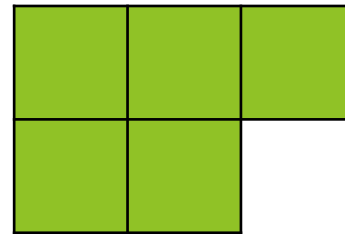
► On considère le pattern figuratif suivant



Rang 0



Rang 1



Rang 2

Rang 3

- Q1. Représenter le rang suivant en expliquant votre règle.
- Q2. En expliquant votre démarche, calculer le nombre de carreaux au rang 10.
- Q3. En expliquant votre démarche, calculer le nombre de carreaux au rang 100.
- Q4. En expliquant votre démarche, trouver une façon de calculer le nombre de carreaux à n'importe quelle étape. (On attend, suivant le niveau, une phrase ou une formule)

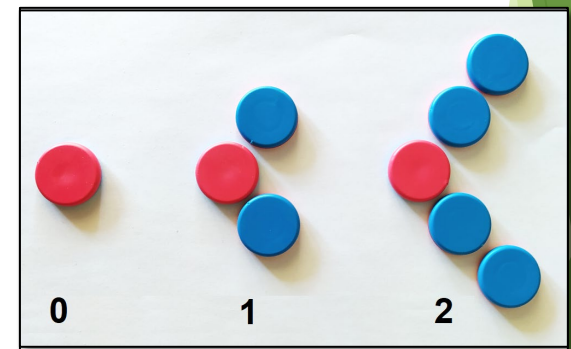
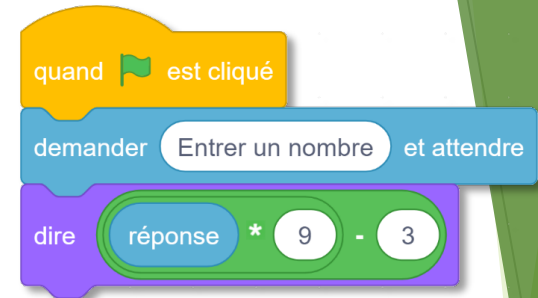
Pattern, d'après guide collège, p. 86

► On considère le programme réalisé sous Scratch ci-contre

- Affirmation : « Quand on rentre un nombre impair dans ce programme, le résultat est toujours un multiple de 6. »
- Quelles difficultés ?

► Représentation mentale d'un nombre impair

- En expliquant votre règle, calculer le nombre de jetons du motif au rang 3 ; puis 10 ; puis 100
- Trouver un moyen de calculer le nombre de jetons du motif à n'importe quel rang



Ressources



- ▶ https://www.pedagogie.ac-nice.fr/mathematiques/wp-content/uploads/sites/30/2020/04/Automatismes_nbs_rectangles_ME_M-Esteve_final.pdf
- ▶ https://www.pedagogie.ac-nice.fr/mathematiques/wp-content/uploads/sites/30/2020/04/Automatismes_nbs_premiers_nbs_carres_v2_M-Esteve_final.pdf
- ▶ http://www.tice1d.13.ac-aix-marseille.fr/science techno/spip/sites/www.tice1d.13/science techno/spip/IMG/pdf/ace-arithmecole_module_nombres-rectangles_partie_1_version_provence.pdf
- ▶ http://www.tice1d.13.ac-aix-marseille.fr/science techno/spip/sites/www.tice1d.13/science techno/spip/IMG/pdf/ace-arithmecole_module_nombres-rectangles_partie_2_version_provence.pdf
- ▶ http://www.recreomath.qc.ca/dict_rectangulaire_n.htm
- ▶ <http://www.clg-monnet-briis.ac-versailles.fr/Les-nombres-figures>
- ▶ <https://www.pedagogie.ac-nice.fr/mathematiques/plan-mathematiques-un-exemple-dactivite-autour-des-patterns/>
- ▶ <https://afdm.apmep.fr/rubriques/opinions/des-patterns-dans-les-classes/>

Vers la résolution de problèmes arithmétiques

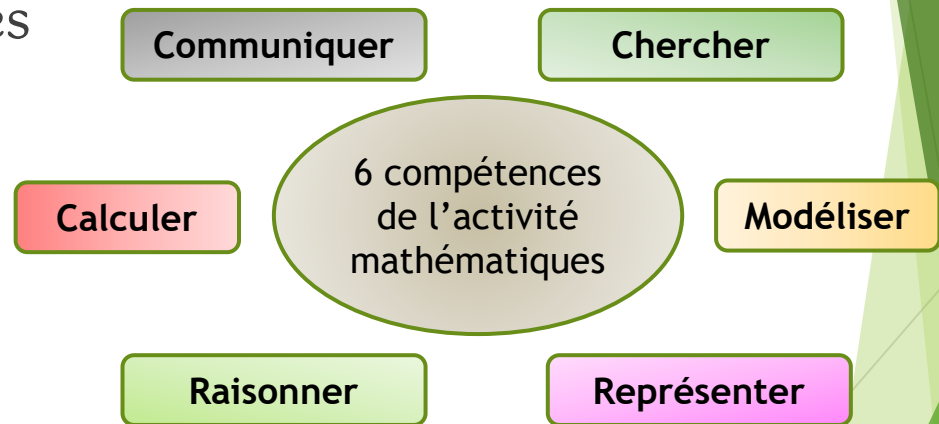
Modèle en barres (pages 31 à 56)

Problème arithmétique

- ▶ Arithmétique : domaine des mathématiques traité à haut niveau
- ▶ Problèmes du type $ax + b = cx + d$ avec a, b, c et d des nombres
 - Par exemple : « Marion achète pour son goûter d'anniversaire 4 bouteilles de 2 L de jus de fruits bio identiques et un gâteau d'une valeur de 15 €. Elle paye en tout 27 €. Quel est le prix d'une bouteille ? »
 - $4x + 15 = 0x + 27$

Les compétences de l'activité mathématique

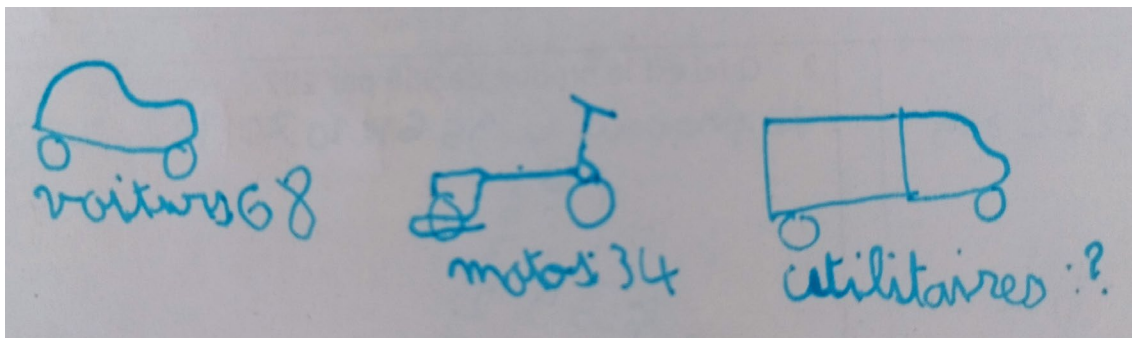
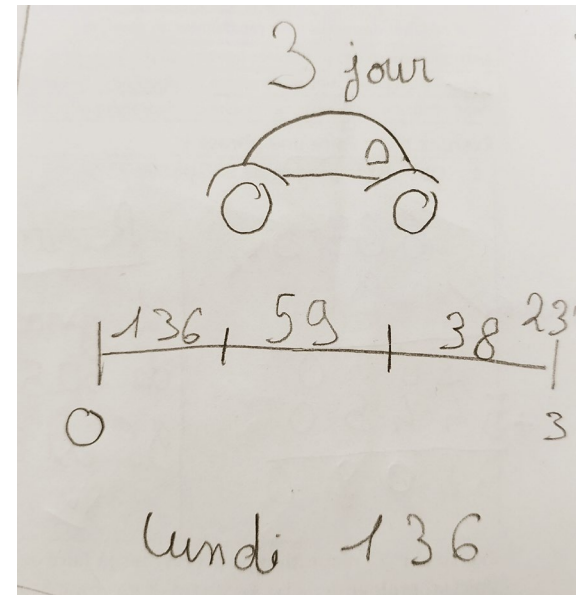
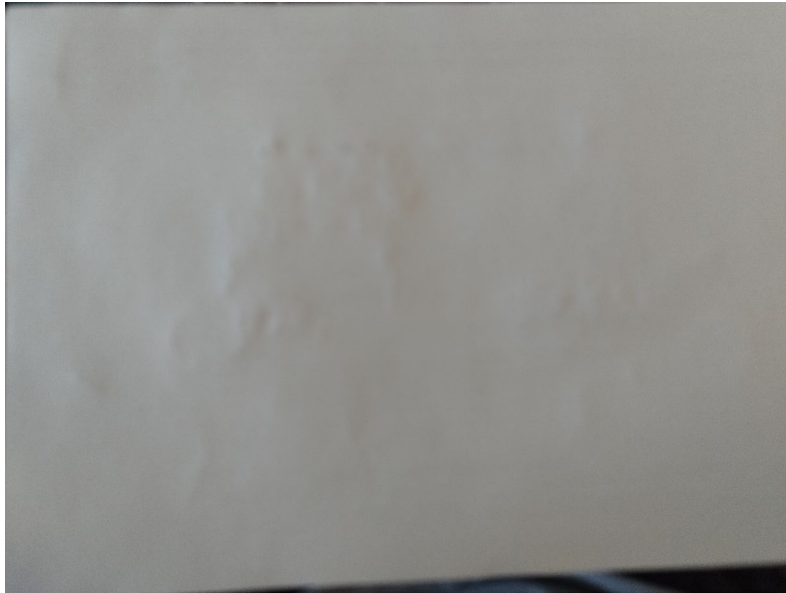
- ▶ Guide d'appui à la résolution de problèmes
 - Mise en réussite des élèves
 - Identification des besoins
 - Triptyque Manipuler, Verbaliser, Abstraire
 - Gestion de l'erreur
- ▶ Compétences transversales
 - Oral
 - Écrit
 - Argumentation, preuve
 - Esprit critique
 - Autonomie



Préconisations de l'institution : représenter, modéliser

- ▶ D'après Bulletin Officiel spécial n° 3 du 26 avril 2018
 - Développer la compétence « représenter » : faire des schémas pour aider à la résolution de problèmes
 - Ne pas tout attendre des élèves
 - Fournir des schémas simples, les mêmes sur plusieurs années : sens de « modéliser »
 - Soumettre des problèmes nombreux et variés
 - Résoudre des problèmes à chaque séance, séquence sous différentes formes (calcul mental, etc.)

Représenter : travaux élèves 6^eC



Représenter : travaux élèves 6^eC



Problème
 $\square = 10$ voitures $\circ = 5$ voitures
 $\Delta = 1$ voiture

68 voitures

$\triangle = 10$ motos $\nabla = 1$ moto

34 motos

Utilitaires
 ?

Solution 16.0.0

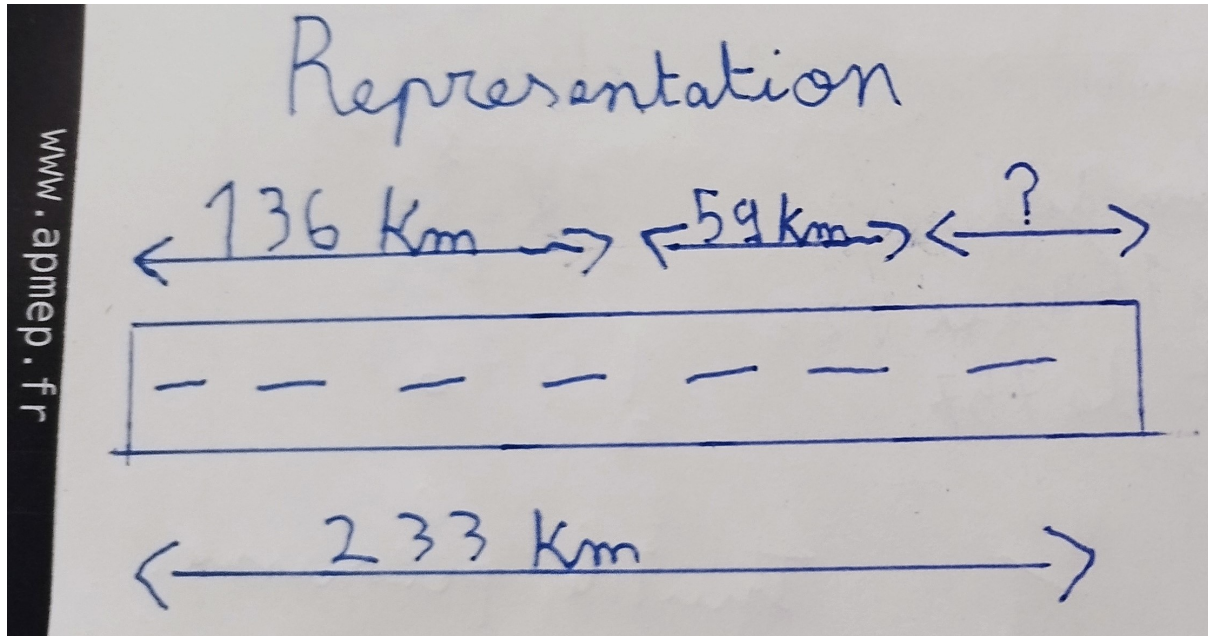
Voitures \downarrow $(\text{rectangle} \times 6) + (\text{circle} \times 8)$

Motos \downarrow $(\text{triangle} \times 3) + (\text{circle} \times 4)$

Utilitaires \downarrow ?

Total \downarrow $(\text{grid} \times 1) + (\text{rectangle} \times 2) + (\text{circle} \times 1)$

Représenter : travaux élèves 6^eC



$$136 + 59 + ? = 233$$

Problèmes à représenter

▶ Voici 2 problèmes

- Un concessionnaire fait les comptes de vente de véhicules du mois. Il a vendu 68 voitures, 34 motos et des utilitaires (camionnettes). Au total, il a vendu 121 véhicules.
 - ▶ Combien d'utilitaires a-t-il vendu ?
- Lors d'un trajet en voiture sur trois jours, Mathilda a roulé sur 136 km le lundi, puis 59 km le mardi. Au total, elle a roulé 233 km.
 - ▶ Combien de kilomètres a-t-elle roulé le mercredi ?

Exemple : Baptiste et Carmen

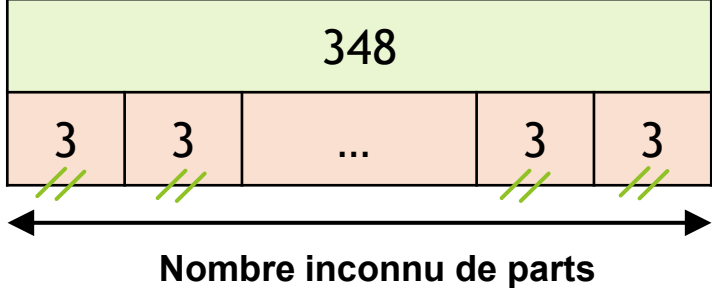
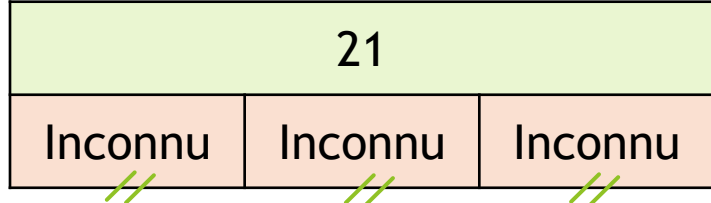
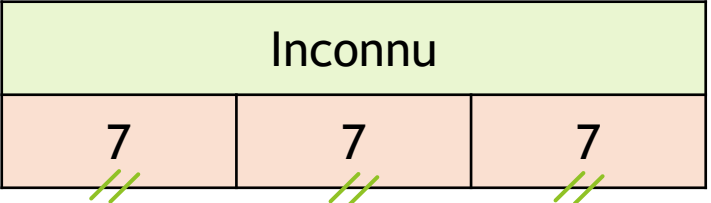
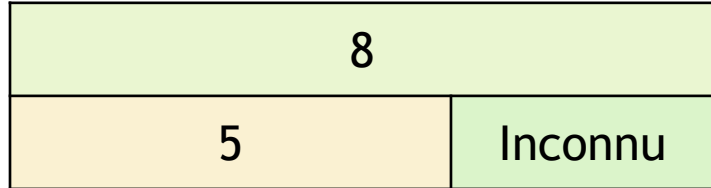
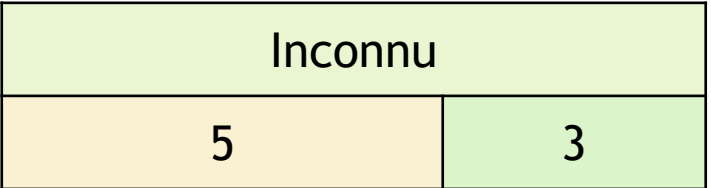
- ▶ « Baptiste a 12 crayons dans sa trousse. Carmen en a 3 de plus. Combien de crayons a Carmen ? »
- ▶ « Baptiste a 12 crayons dans sa trousse. Il en a 3 de plus que Carmen. Combien de crayons a Carmen ? »
- ▶ « Baptiste et Carmen sont dans un magasin de fourniture de classe. Baptiste achète l'édition Méga qui contient 60 crayons. Carmen achète l'édition Deluxe qui en contient 20 de plus. Combien de crayons a Carmen ? »

Paquet de biscuits (d'après attendus CP)



- ▶ « Paul apporte 3 paquets de biscuits. Il y a 7 biscuits dans chaque paquet. Combien y-a- t-il de biscuits en tout ? »

Modèle en barres : les schémas de base



Equipes (d'après attendus CE1)

- ▶ « Dans l'école, il y a 300 élèves. Les professeurs veulent constituer 15 équipes (de même nombre d'élèves).
Combien y aura-t-il d'élèves par équipe ? »
- ▶ « Dans l'école, il y a 356 élèves. Les professeurs veulent constituer des équipes de 10 élèves. Combien y aura-t-il d'équipes ? »

Boulangerie (d'après attendus CM1)

- ▶ « M. Durand achète deux baguettes de pain à 1,75 euro chacune ; une brioche à 5,10 euros et un gâteau à 14,60 euros. Étant donné qu'il est entré dans la boulangerie avec 28 euros, combien de croissants à 1,50 euro pièce pourra-t-il encore s'acheter ? »

Perles



- ▶ « Alice utilise les $\frac{4}{7}$ de son sachet de perles pour faire un collier pour sa maman. Elle donne un tiers de ce qui lui reste à sa meilleure amie Belina pour qu'elle puisse décorer ses barrettes. Maintenant, Alice n'a plus que 12 perles dans son sachet. Combien de perles Alice avait-elle au départ ? »

Taille



- ▶ « Un père et son fils Kévin ont leur taille dans le ratio de 8 pour 5 (noté 8:5). La différence entre leurs tailles respectives est de 66 cm. Quelle est la taille du père ? »

Chocolats

- ▶ $\frac{1}{4}$ des chocolats d'une boîte sont des chocolats au lait. Il y a 3 chocolats pralinés de plus que de chocolats au lait. Les 13 autres chocolats sont des chocolats noirs. Combien de chocolats y a-t-il dans la boîte ?

Problème du réservoir d'essence

- Sachant que le dernier repère permet de faire 50 km, quelle est l'autonomie de la voiture de M. Etienne ?



Intérêt du modèle en barres pour la résolution de problèmes

- ▶ Visuel : compréhension et discussion
- ▶ Analogue avec le matériel de manipulation : lien visuel et symbolique
- ▶ Simplification des modèles de bases : sens des opérations
- ▶ Problèmes avec fractions et pourcentages accessibles
- ▶ Congru à la structure mathématique voire algébrique : abstraction de la temporalité ou de l'existence physique
- ▶ Décomposition des problèmes complexes en étapes : modèles en barres simples
- ▶ Continuum didactique jusqu'au collège : fractions, pré-algèbre
- ▶ Démarche à étendre aux problèmes atypiques : heuristique, modèle
- ▶ Evaluation positive par les compétences de l'activité mathématiques
- ▶ Différenciation : matériel ou pas ?
- ▶ Nouveaux gestes professionnels

Comment négocier l'introduction du modèle en barres en résolution de problèmes ?

- ▶ Partir des représentations des élèves et de l'existant
- ▶ Utiliser le matériel qui permet de faire des analogies avec le modèle
- ▶ Travailler les analogies à partir des deux modèles de base
- ▶ Différencier les compétences « calculer » de « modéliser » pendant la résolution de problèmes mais aussi pendant l'institutionnalisation
- ▶ Verbaliser
- ▶ Construire la trace écrite, les écrits de référence avec les élèves
- ▶ Penser au devenir de ce modèle en termes de continuum vertical et horizontal : cohérence avec la structure mathématique (pré-algèbre)

Une proposition



- ▶ Partie de séance
 - Proposer trois « **petits problèmes à représenter** », sans nécessairement avec une question ; travail individuel
 - Récupérer les travaux et les scanner ou les photographier
- ▶ Séance suivante
 - Afficher 4 à 5 productions, une par une, dans un ordre bien précis : dessins, pour aller vers représentations mathématiques (modèle)
 - Dégager en grand groupe la différence entre les **compétences** représenter et modéliser
- ▶ Donner un problème avec la même structure et les mêmes données numériques que le premier par exemple, mais dans un contexte différent ; travail individuel ; ne donner que 2 minutes pour représenter ce nouveau problème à rapprocher de son analogue
- ▶ Distribuer le **matériel** pour représenter la situation ; travail en groupes
- ▶ Détourer le matériel afin de montrer les barres et la grandeur longueur associée
- ▶ Indiquer les **règles de construction du modèle en barres**

Dépassement

- ▶ Limites du matériel de manipulation
 - Grand nombre et nombre fractionnaire
 - « Long » à mettre en œuvre à terme
- ▶ Limites du modèle en barres
 - Nombre négatif
 - Degré supérieur à 1

Ressources

- ▶ Guides
- ▶ Houdement
- ▶ Jean Brun
- ▶ Sander
- ▶ M@gistère résolution de problèmes
 - <https://magistere.education.fr/dgesco/course/view.php?id=2197>

Ressources



- ▶ Vergnaud versus Singapour (Richard Cabassut), *Au Fil des maths*, APMEP
 - https://www.apmep.fr/IMG/pdf/AFDM_HS_01_cabassut.pdf
- ▶ Formation et évaluation par compétences en mathématiques
 - https://maths.ac-creteil.fr/IMG/pdf/competences_maths_socle_creteil_sept2010.pdf
- ▶ L'Évaluation par Compétences, E. SIMON, 2015
 - <https://dumas.ccsd.cnrs.fr/dumas-01271625/document>

Questions diverses



Marlène Esteve : Marlene.Esteve@ac-grenoble.fr

Sylvain Etienne : Sylvain-Julien.Etienne@ac-nice.fr