50 ans de carrière d'un enseignant-chercheur

Roger Cuppens

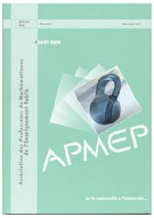
son engagement mathématique

Brochure APMEP n° 197

Numéro ISBN : 978-2-912846-72-3

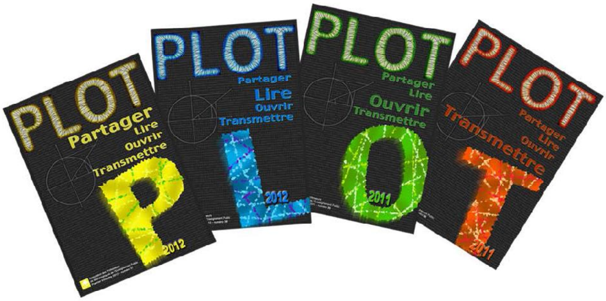
Coédition APMEP - IREM de Toulouse

L'APMEP vous propose



Le BULLETIN VERT (5 numéros par an), avec ses dossiers et ses rubriques : dans nos classes, pour chercher et approfondir, matériaux pour une documentation, les problèmes de l'APMEP...

Le BGV (6 numéros par an) : pour être vite et bien informé sur l'actualité de l'enseignement des mathématiques, la vie de l'association,...



PLOT (4 numéros par an) destiné plus particulièrement aux « jeunes » collègues, enseignants en école, collège et lycée.

Son SITE INTERNET www.apmep.asso.fr : tout sur l'APMEP, ses positions, son espace d'échange entre adhérents, ses Régionales,...

Ses BROCHURES : une centaine de titres mis à la disposition des adhérents à des prix très attractifs (voire le site et quelques exemples en troisième page de couverture).

Ses JOURNÉES NATIONALES annuelles : trois jours de conférences, débats, ateliers, expositions, échanges proposés aux 800 participants.

Ses JOURNÉES RÉGIONALES : lieux pribvilégiés cde débats et d'échanges pédagogiques.

Publimath — Base de données bibliographiques APMEP-IREM sur l'enseignement des mathématiques riche de plus de 10 000 fiches.

Professeurs de l'enseignement public, agricole ou privé, n'hésitez pas, ADHÉREZ !

Sommaire

Préface

Roger CUPPENS n‘est pas de ceux avec lesquels le premier contact laisse indifférent. La première fois que je l’ai rencontré et entendu, ce fut au cours d’une réunion à l’IUFM de Toulouse : je me suis demandé qui était cet original. Ce que je compris bien plus tard après l’avoir côtoyé dans le groupe IREM dont il fut longtemps le responsable avant qu’il ne m’en confie les rênes, c’est que cet homme était différent, différent de tous ceux qui l’entouraient. Sa différence qui apparaît à tous moments et en toutes circonstances force ses collègues et ses amis à l’humilité.

En face de lui, il faut toujours écouter et ne pas se contenter d’entendre : pour chaque problème qui se pose à lui, il enregistre et analyse en silence, et lorsqu’il prend la parole, ses facultés de synthèse (englobant toujours la problématique traitée dans une problématique plus large) sont si impressionnantes qu’il dérange toujours ceux qui n’attendent qu’une approche de convenance. Jean-Marie LABORDE a fait la même expérience que moi lorsque Roger lui délivra ses premières impressions au sujet de Cabri 2 au cours d’une mémorable université d’été à Grenoble. C’est encore plus le cas lorsqu’il aborde des problèmes mathématiques : je me souviens d’une séance de notre groupe IREM où il prit la parole pour nous improviser les grandes lignes de ce que pouvait être une réflexion pertinente sur la stabilité en géométrie : quelques semaines plus tard, nous retrouvions ce thème développé dans un article qu’il avait rédigé en validant de manière démonstrative tout ce qu’il avait précédemment annoncé.

Au cours des réunions, toujours informelles mais si enrichissantes de notre groupe IREM, combien de fois ne l’avons nous pas entendu évoquer tel ou tel épisode de sa vie professionnelle, telle ou telle rencontre avec des personnages qui pour nous sont des références, tels George PÓLYA, Paul LÉVY, Jean-Pierre KAHANE par exemple. Tous ces retours en arrière venaient toujours éclairer soit un problème que nous cherchions à traiter soit une problématique de notre Institut.

C’est pourquoi, j’ai rapidement pensé qu’une brochure comme celle-ci, venant présenter les conférences offertes pour le Jubilé de Roger CUPPENS, se devait d’éclairer le lecteur sur la manière dont sa carrière avec sa vie en arrière-plan s’était déroulée jusqu’à présent. Après de longues heures passées à le questionner pour tenter de mettre de l’ordre dans tous les récits et anecdotes que j’avais déjà entendus, j’ai finalement préféré que ce soit Roger lui-même qui fasse ce travail de mémoire et surtout de rédaction. Le résultat est à la hauteur de mes espérances.

Le choix des conférenciers a été relativement facile : Jean-Marie LABORDE, le père de Cabri, c'est grâce à lui que Roger s'est impliqué avec autant de succès dans la géométrie dynamique, Rudolf BKOUCHE, c'est la référence incontournable en géométrie (il ne put être présent physiquement mais la qualité du document qu'il a rédigé honore les organisateurs et tout particulièrement Roger), Michel CARRAL, c'est d'après Roger celui qui lui a appris la géométrie. Enfin Daniel JUSTENS, c'est une rencontre que nous devons à l'APMEP : Roger a découvert chez lui du talent et de la compétence dans le domaine de la modélisation avec cette faculté de prendre du recul et un don dans l'exposition de ses idées. Roger lui-même se devait de parler autour d'un thème qui nécessitait connaissances mathématiques, connaissances historiques et un recul suffisant sur l'enseignement des mathématiques à l'Université : il le fit avec brio dans une conférence sur la vérité en mathématiques qui venait en point d'orgue d'un travail qu'il avait commencé à présenter aux journées de l'APMEP.

Nous nous devions d'organiser ce Jubilé pour reconnaître un grand : cette grandeur qui se mesure à la culture d'abord, à un esprit de synthèse puissant, à un parcours hors du commun et à une production riche que l'APMEP a contribué à diffuser. Nous espérons que cette brochure montrera le chemin aux jeunes générations qui y trouveront ce qui manque peut-être aux générations de l'instantanéité, une vraie curiosité qui permet d'aller vers plus de connaissances, avec un goût de l'effort et une persévérance dans l'accomplissement des tâches que l'on se donne. Ce chemin, c'est le chemin de la Science que Roger CUPPENS a parcouru avec honneur.

Jean-Jacques DAHAN

Une carrière bien remplie

Les amis de Roger CUPPENS ont célébré ses cinquante ans de carrière au service des mathématiques et de leur enseignement en organisant un colloque à Toulouse au printemps 2011. À travers ce livre qui reprend les conférences données à cette occasion vous découvrirez comment Roger CUPPENS a mis ses compétences au service de l'enseignement des mathématiques et de la formation des enseignants de mathématiques à l'université Paul Sabatier et à l'IREM de Toulouse ainsi qu'à l'APMEP. Il a publié de nombreux articles, en particulier dans Repères IREM et dans le Bulletin Vert de l'APMEP. Il a aussi écrit une série de brochures, publiées à l'APMEP, dans lesquelles il décrit une approche originale de la géométrie en utilisant avec talent le performant outil CABRI géomètre.

Vous découvrirez à travers ces pages sa capacité à expliquer clairement des situations ou des notions complexes et sa remarquable indépendance d'esprit, qui parfois en a agacé certains… Simplement, discrètement il a mené une carrière riche et bien remplie dont il peut légitimement être fier.

Adhérent à l'APMEP depuis la fin des années 90, il s'y est très vite impliqué à travers diverses responsabilités : président de la régionale de Toulouse, membre du comité national, de la commission formation des maîtres et depuis plus de 12 ans il assure la lourde charge de la mise en page du Bulletin Vert. À ce jour, c'est près de 80 Bulletin Vert qu'il a réalisé bénévolement pour l'APMEP ! C'est un travail colossal pour lequel les adhérents de l'APMEP et moi même le remercions vivement.

Jean-Paul BARDOULAT, responsable des publications de l'APMEP

Roger Cuppens est un des piliers de l'IREM de Toulouse. Son engagement au service de l'IREM n'a pas failli depuis sa création. Sa participation au groupe « Mathématiques et Informatique, Géométrie Dynamique » dont il a longtemps été responsable contribue au rayonnement national et international de l'IREM. Il a su transmettre sa curiosité, son esprit critique, qualités scientifiques indispensables. C'est avec un grand plaisir que l'IREM a soutenu les membres de son groupe qui lui ont témoigné leur reconnaissance en organisant un jubilé en son honneur. C'est avec le même plaisir que l'IREM co-édite cette brochure avec l'APMEP. Le lecteur s'enrichira incontestablement au contact des thèmes chers à Roger. Je lui souhaite bonne lecture.

Xavier BUFF, Directeur de l'IREM de Toulouse

Y-a-t-il une vérité en mathématiques ?

Roger Cuppens(*)

« L'acceptation populaire d'une idée ne prouvait(1) en aucun cas sa validité »
(Dan Brown, *Le symbole perdu*)

« La seule attitude raisonnable, la seule qui ne déçoive pas, c'est la recherche de l'erreur, et non pas la recherche de la vérité … »
(Roger Martin du Gard, *Les Thibault, Épilogue*)

Introduction

En préparant mon jubilé, je me suis d'abord posé la question « Comment en suis-je arrivé là ? ». On trouvera la réponse par ailleurs dans cette brochure.

Mais une autre question que me pose souvent ma femme est « Pourquoi, après une dizaine d'années de retraite, t-occupes-tu tant de mathématiques ? ». La réponse à cette question est simple et tient même en un mot : l'IREM(2).

En effet, comme on peut le voir ailleurs, il y a eu pour moi un avant et un après mon entrée à l'IREM. Avant, j'étais un professeur d'université traditionnel bien imprégné par le formalisme bourbakiste ambiant(3).

Lorsque je suis entré à l'IREM, la révolution informatique commençait et l'on y faisait beaucoup de stages de programmation. J'en ai fait, mais surtout en utilisant Logo, ce qui était assez original(4). Puis je m'intéressais très vite à l'Intelligence Artificielle(5) avec la grande question : une machine peut-elle faire des mathématiques ? La réponse est loin d'être simple, mais toujours passionnante.

Lors de colloques d'Intelligence Artificielle, je découvris les deux premiers tuteurs intelligents français : Aplusix de Jean-François Nicaud et surtout Cabri.

(*) Professeur émérite à l'Université Paul Sabatier, Groupe « Géométrie dynamique » de l'IREM de Toulouse. Courriel : roger.cuppens@orange.fr.

(1) Personnellement, j'aurais mis « prouve » au lieu de « prouvait », mais j'ai laissé la traduction sans modification.

(2) et l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public, mais mon activité dans cette association, bien qu'importante en temps, a moins d'influence sur ma pensée.

(3) Il y avait bien eu au début des années soixante-dix ma rencontre avec Pólya, mais elle n'eut une influence profonde que beaucoup plus tard…

(4) Pourquoi s'obstine-t-on à faire de l'algorithmique avec des tant que, des boucles, etc. alors que avec des langages comme Logo ou LISP on peut faire beaucoup plus simplement en programmant récursivement et en laissant la machine agir (presque) tout toute seule.

(5) Je découvris avec surprise que les ouvrages de Pólya sur l'heuristique mathématique y étaient très souvent cités même par des non mathématiciens.

Cabri a révolutionné ma vie(6) : grâce à mon ami Michel Carral, je découvris le lien étroit entre la première version de Cabri et la géométrie d'Euclide et me passionnais pour celle-ci, puis redécouvris les grands auteurs français Desargues, Poncelet, Chasles, … J'étais loin du formalisme ambiant et du « À bas Euclide » de Dieudonné.

Simultanément, j'avais avec Michel Cayrol, ancien professeur de mathématiques dans le secondaire et professeur d'université en informatique, de passionnantes discussions. Lors de l'une d'elles, il me demanda : « toi qui es mathématicien, que penses-tu des travaux de Gödel ? ». Je n'en pensais rien car je les ignorais et j'y allais voir : mon formalisme en prit un coup. Un autre jour, il me demanda : « Que penses-tu de la logique intuitionniste ? ». De nouveau je dus avouer mon ignorance totale. La découverte de l'intuitionnisme me convertit presque : j'étais d'accord avec les idées de base des intuitionnistes, mais incapable de lire vraiment leurs textes, non qu'ils soient très difficiles, mais j'étais beaucoup trop imprégné de la culture traditionnelle(7).

Arrivé à ce point, il était normal de se poser la question « Où est la vérité mathématique ? » : dans le formalisme, dans l'intuitionnisme ou dans … ? Et même la question du titre de cet article « Y a-t-il une vérité en mathématique ? ». On trouvera dans la suite ma réponse à celle-ci, réponse qui bien entendu ne prétend pas être la vérité. On verra qu'au passage je parlerai de la notion de modèle mathématique et de l'existence des objets mathématiques.

Mon exposé comprend deux parties(8) :
– dans la première, une étude historique montrera l'évolution de la géométrie jusqu'au programme d'Erlangen ;
– dans la deuxième, l'étude de la notion de nombre réel montrera certaines questions liées aux fondements des mathématiques.

N.B. Je ne suis ni philosophe, ni historien et encore moins didacticien des mathématiques. Les lignes qui suivent doivent donc être considérées comme les réflexions accumulées pendant des années par un mathématicien ordinaire. Si un lecteur y relève des erreurs ou simplement veut contester certaines de mes affirmations, son avis sera le bienvenu.

(6) Avant, je n'aimais pas la géométrie au point que ma femme qui me connaît depuis nos études universitaires m'a dit un jour : « Si on m'avait dit quand je t'ai connu que tu passerais ta vie à faire de la géométrie, je ne l'aurais jamais crû ».

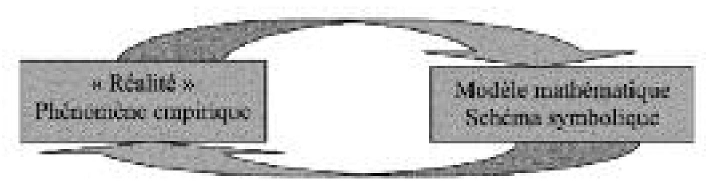
(7) J'ai quand même regardé du côté des logiques modales et j'en ai été très content car je peux discuter avec mon fils qui est chercheur en informatique et qui travaille à coup de logiques modales, mais elles sont tellement éloignées de mon mode de pensée que j'ai du mal à suivre ce qu'il fait. Il peut quand même m'en parler…

(8) Ces deux parties ont été présentées pour la première fois sous forme d'ateliers lors des Journées nationales de l'APMEP à Rouen en 2008. Seule la deuxième partie, considérablement remaniée, a été présentée lors de mon jubilé.

Première partie : la vérité de la géométrie euclidienne[9]

1. La notion de modèle mathématique

On verra qu'une notion importante pour décrire l'histoire de la géométrie est celle de modèle mathématique. Dans son article [Du], Jean-Claude Duperret ne la définit pas, se contentant de proposer pour la modélisation le schéma suivant :



En cherchant dans la toile, j'ai trouvé la définition suivante :

Un modèle mathématique est une traduction de la réalité pour pouvoir lui appliquer les outils, les techniques et les théories mathématiques, puis généralement, en sens inverse, la traduction des résultats mathématiques obtenus en prédictions ou opérations dans le monde réel[10].

Si cette définition peut convenir pour modéliser un monde « réel », elle ne semble pas convenir pour des modèles historiques comme les modèles de Poincaré de la géométrie hyperbolique ou le modèle de Klein de la géométrie elliptique.

Je dirai qu'un monde (mathématique) M′ est un modèle d'un monde M s'il existe un mode de représentation des objets du monde M par des objets du monde M′ qui permet de déduire une connaissance du monde M de celle du monde M′.

Nous verrons dans la suite des exemples de modèles montrant toute la richesse d'une aussi vague notion.

On voit tout de suite une propriété essentielle que doit posséder le modèle M′ : il doit être non contradictoire car on sait que s'il contient une contradiction alors toutes les propositions sont contradictoires et il ne peut servir à rien.

Lorsque M est un monde « réel », on parlera de modèle appliqué tandis que lorsque M est un autre monde mathématique, on parlera de modèle pur[11].

(9) Au départ, cette partie avait été écrite en réaction aux articles de Daniel Perrin [Pe] et de Jean-Claude Duperret [Du] qui proposent tous deux de bâtir un enseignement de la géométrie fortement inspiré du Programme d'Erlangen de Felix Klein.

(10) Daniel Lacombe faisait remarquer que cette définition est contraire à l'usage du mot dans les arts où le modèle est ce que l'on cherche à reproduire.

(11) Les changements de cadre chers aux didacticiens sont souvent liés à un modèle pur sous-jacent.

2. La géométrie grecque

2.1. La géométrie euclidienne

Tout le monde semble d'accord pour considérer que le premier modèle mathématique, celui qui a inspiré tous les autres, est la géométrie euclidienne. Nous ne parlerons ici, pour simplifier, que de la géométrie plane, la géométrie dans l'espace reposant sur des idées semblables.

Pour simplifier les choses de manière presque caricaturale, la géométrie euclidienne modélise le monde des dessins réalisés à la règle et au compas comme le montre la présentation des premières notions :

Monde des dessins	**Géométrie euclidienne**
Tracer la droite AB	Existence de la droite AB
Placer un point P sur la droite AB	Relation : le point P est sur la droite AB
Tracer le cercle de centre O passant par M	Existence du cercle de centre O passant par M
Placer un point P sur le cercle de centre O passant par M	Relation : le point P est sur le cercle de centre O passant par M

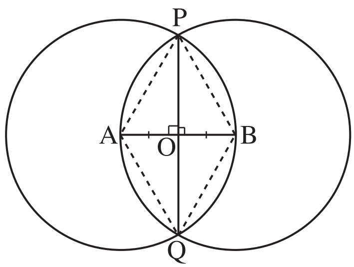
Remarques. 1. La relation « le point P est sur la droite *d* » peut se lire « la droite *d* passe par le point P », de même que la relation « le point P est sur un cercle *c* » peut se lire « le cercle *c* passe par le point P ».

2. Une exigence impérative chez les Grecs était le refus de l'infini actuel qui apparaît ici sous deux formes :
– *la droite chez Euclide est non bornée, mais pas illimitée* : autrement dit, une droite euclidienne est ce que l'on appelle maintenant un segment avec la condition qu'un tel segment puisse être étendu d'un côté ou de l'autre autant que l'on veut : si A et B sont deux points, il existe des points C et D différents de A et B tels que le point A soit sur la droite CB et le point B soit sur la droite AD.
– *la droite ou le cercle ne sont pas des ensembles de points* : tout ce que l'on peut dire en étudiant une figure, c'est que dans une figure un point est sur une droite ou un cercle ; par contre, on peut à tout moment ajouter un objet « auxiliaire » sur une figure, mais une telle figure ne comprendra toujours qu'un nombre *fini* d'objets.

3. La géométrie euclidienne a des applications dans le monde des dessins, mais aussi dans de nombreuses disciplines scientifiques : optique géométrique, astronomie, architecture, cartographie, …

4. On peut définir d'autres mondes dont la géométrie euclidienne est un modèle : par exemple, le monde des dessins de la première version Cabri I du logiciel bien connu Cabri-Géomètre(12).

Dans le monde des dessins, on peut *vérifier* certaines propriétés. Par exemple, se donnant deux points A et B, en traçant le cercle de centre A passant par B et le cercle de centre B passant par A, on peut vérifier qu'aux erreurs de mesure(13) près la droite joignant les points d'intersection de ces deux cercles est la médiatrice de AB :



En géométrie euclidienne, on va *démontrer* cette propriété : ceci peut se faire en appliquant l'un des cas d'égalité des triangles(14) aux triangles obtenus à partir des segments ajoutés en pointillés.

Pour définir des notions telles que longueur, aire ou mesure des angles, Euclide développe une théorie des grandeurs sur laquelle nous reviendrons dans la deuxième partie.

La géométrie euclidienne et la théorie des grandeurs fournissent ainsi un bon modèle pour mesurer la terre (c'est bien l'étymologie du mot *géométrie*).

2.2. Les trois grands problèmes

Le fait qu'on se restreigne *a priori* aux constructions à la règle et au compas a engendré trois problèmes célèbres :
– *le problème de la duplication du cube* qui revient en langage moderne à : se donnant un segment de longueur 1, peut-on construire à la règle et au compas un segment de longueur $\sqrt[3]{2}$?

(12) Dans cette version, des outils permettaient de tracer à l'écran des objets de base : points, droites ou cercles. Les droites de base ne comprenaient aucun point et les cercles de base n'avaient pas de centre connu et ne contenaient aucun point. À partir de ces objets, d'autres outils permettaient de tracer à l'écran un dessin représentant la figure à étudier. On trouvera plus de détails dans [C1].
(13) En raison de ces erreurs de mesure, un modèle des dessins doit avoir une certaine stabilité comme je l'ai étudié dans [C6].
(14) Dans ma jeunesse, on « démontrait » aux élèves ces cas d'égalité en invoquant des « déplacements » des triangles, puis on leur interdisait de tels raisonnements. Actuellement il serait préférable d'admettre ces cas d'égalité comme des axiomes de la théorie, les « démonstrations » par déplacement servant de justificatif à l'introduction de ces axiomes.

– *le problème de la trisection d'un angle* : se donnant un angle de mesure α, peut-on construire à la règle et au compas un angle de mesure $\alpha/3$?
– *le problème de la quadrature du cercle* : se donnant un segment de longueur 1, peut-on construire à la règle et au compas un segment de longueur $\sqrt{\pi}$?

Ces problèmes restèrent ouverts jusqu'au 19^{e} siècle où ils furent tous les trois résolus par la négative. Mais pour les résoudre de manière approchée, les grecs introduisirent un certain nombre de nouvelles courbes :
– les trois coniques dont une théorie approfondie fut donnée par Apollonius ;
– des courbes « mécaniques » : trisectrice, cissoïde, conchoïde, …

3. La géométrie cartésienne

Au début du 17^{e} siècle, en introduisant la notion de *repère*, Descartes définit ce que l'on peut considérer comme un modèle algébrique de la géométrie euclidienne selon le dictionnaire suivant :

Géométrie euclidienne	**Géométrie cartésienne**
Point	Couple de coordonnées
Droite	Courbe du premier degré
Conique	Courbe du second degré

et la validation par démonstration de la géométrie euclidienne est remplacée par une validation par le calcul.

Il connaît immédiatement un énorme succès car il s'applique à d'autres courbes et permet le développement sur une base géométrique du calcul différentiel (problème des tangentes) et intégral (calcul de l'aire d'une arche de cycloïde par exemple). La géométrie trouve ainsi de nouveaux domaines d'applications : mécanique, …

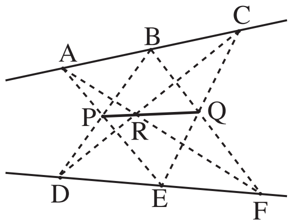
De plus elle s'étend facilement à l'espace avec l'étude des surfaces et des courbes tracées sur ces surfaces.

4. La géométrie projective

4.1. Le théorème de Pappus

Le premier théorème relevant de la géométrie projective telle que nous la définirons dans la suite est un *théorème de Pappus* (vers 340 de notre ère) :

Soient A, B, C, D, E et F six points et P (resp. Q, resp. R) le point d'intersection des droites AE et BD (resp. BF et CE, resp. CD et AF). Si les trois points A, B, C sont alignés de même que les trois points D, E et F, alors les points P, Q et R sont alignés.



Pappus introduit aussi la notion du *rapport anharmonique* de quatre points alignés que l'on appelle maintenant *birapport* et que l'on définit par

$$(A,B,C,D) = \frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} \times \frac{\overline{BD}}{\overline{BC}}$$

(avec des notations évidemment anachroniques) et démontre son invariance par projection. Mais cela ne semble guère aller plus loin…

4.2. La géométrie arguésienne

Contemporain de Descartes, Girard Desargues était architecte. Des considérations de perspective l'amenèrent à affirmer dans une œuvre intitulée *Brouillon project d'une atteinte aux evenemens des rencontres du cone avec un plan* que, dans un plan, deux droites parallèles ont un point commun à l'infini, ces points se trouvant tous sur une droite, la droite de l'infini.

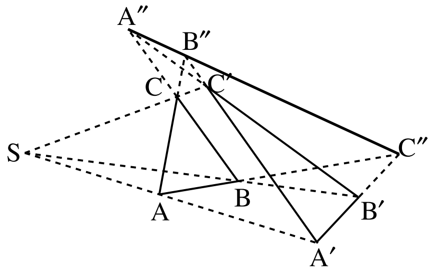
Nous appelons *géométrie arguésienne* cette modification de la géométrie euclidienne : elle est le modèle qui a servi à la réalisation de la version Cabri-II de Cabri-Géomètre (cf. [C3] Chapitre 1).

Ce qui peut sembler une simple commodité de langage fournit en réalité une classification naturelle des coniques, les ellipses étant les coniques n'ayant pas de point à l'infini, les hyperboles en ayant deux et les paraboles étant les coniques tangentes à la droite de l'infini.

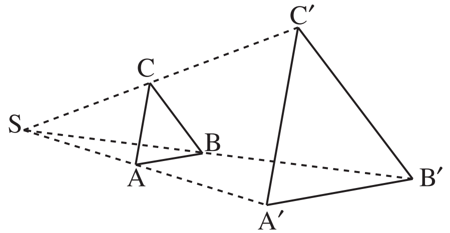
Mais Desargues va beaucoup plus loin : puisque les projections conservent les concourances de droites et les alignements de points, si un résultat ne concernant que des propriétés de ce type est valable pour un cas de figure, il reste valable pour tous les cas. Autrement dit, il suffit de le démontrer pour un cas particulier pour obtenir le résultat général.

Un exemple est ce que l'on appelle maintenant le *théorème de Desargues* :

Soient ABC et A′B′C′ deux triangles et A″ (resp. B″, resp. C″) le point d'intersection des droites BC et B′C′ (resp. CA et C′A′, resp. AB et A′B′). Si les trois droites AA′, BB′ et CC′ sont concourantes, alors les trois points A″, B″ et C″ sont alignés.



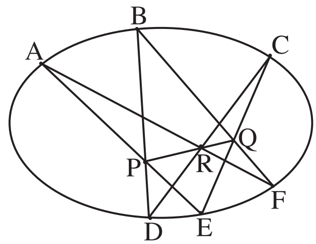
Il suffit d'examiner le cas où les deux points B″ et C″ sont à l'infini (autrement dit lorsque les droites CA et C′A′ d'une part et AB et A′B′ d'autre part sont parallèles) :



Les triangles ABC et A′B′C′ sont alors homothétiques et les droites BC et B′C′ sont parallèles : le point A″ est donc à l'infini. Le théorème de Desargues est donc valable dans ce cas particulier et donc dans le cas général.

Un autre exemple dû à Blaise Pascal est le résultat suivant que Pascal appelait *théorème de l'hexagramme mystique* et que l'on appelle maintenant *théorème de Pascal* :

Soient A, B, C, D, E et F six points et P (resp. Q, resp. R) le point d'intersection des droites AE et BD (resp. BF et CE, resp. CD et AF). Si les six points A, B, C, D, E et F sont sur une conique, alors les points P, Q et R sont alignés.



Le théorème de Pappus correspond au cas où la conique est dégénérée. Pascal le démontre dans le cas où la conique est un cercle et, puisqu'une conique quelconque est la projection d'un cercle, il en déduit le cas général.

On démontre de même la réciproque de ce théorème. Elle fournit un moyen de construire à la règle seule le point courant de la conique passant par cinq points, la tangente en un point d'une conique, etc. (cf. [C3], § 7.2).

Pascal développait sans doute ceci dans un traité dont il ne reste malheureusement qu'une table des matières recopiée par Leibniz.

Avec les idées de Desargues et la notion du birapport de quatre points alignés, Philippe de la Hire a écrit un traité où il développe en particulier la notion de pôle et polaire d'une conique quelconque à partir des propriétés du cercle. Ce traité n'eut aucun succès et à la fin du 18e siècle on ne connaissait les travaux de Desargues que par quelques citations de l'un de ses élèves, le graveur Abraham Bosse, ou de ses détracteurs : ce n'est qu'au 19e siècle que Chasles retrouva une copie manuscrite par La Hire du *Brouillon project* et au 20e siècle Pierre Moussy retrouva dans un carton de la Bibliothèque Nationale un exemplaire de l'édition originale.

4.3. Gaspard Monge et ses élèves

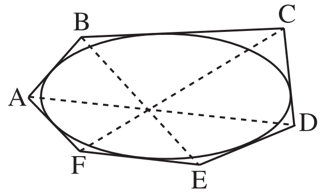
Au 18e siècle, Gaspard Monge est l'inventeur de la *géométrie descriptive* qui repose sur le fait que tout point P de l'espace peut être caractérisé par ses projections orthogonales U et V sur deux plans u et v se coupant suivant une droite d. De plus une rotation autour de l'axe d peut amener le plan v sur le plan u. Si W est le transformé du point V par cette rotation, le point P est caractérisé par les deux points U et W situés dans le plan u. La géométrie descriptive constitue donc un modèle plan de la géométrie de l'espace. Avant l'avènement des ordinateurs, il constituait même un des rares modes de représentation simple de cette dernière.

Monge est aussi connu comme enseignant d'abord à l'École Royale du Génie de Mézières, puis à l'École Polytechnique dont il est l'un des fondateurs. Il y enseignait, outre la géométrie descriptive, la géométrie à la fois pure et appliquée. On lui doit le *principe de continuité* selon lequel une propriété d'une figure géométrique valable lorsque les droites et les cercles de celle-ci se coupent reste valable lorsque les points d'intersection cessent d'exister. Une heuristique aussi vague *a priori* peu fondée s'avère néanmoins utile.

Monge eut comme élèves la plupart des mathématiciens français de la première moitié du 19e siècle. Parmi ceux-ci, nous en citerons trois. Tout d'abord, Lazare Carnot, celui que l'on surnomma lors de la Révolution l'organisateur de la victoire. Dans ses travaux mathématiques, on trouve un *Essai sur les transversales* où il étudie des figures composées seulement de droites.

Un autre élève est Charles Brianchon qui, encore élève à l'École Polytechnique, démontra le théorème suivant :

Si un hexagone ABCDEF est circonscrit à une conique, les diagonales AD, BE et CF sont concourantes.

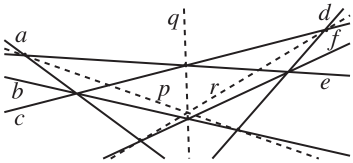


Le troisième, sans doute le plus important, est Jean-Victor Poncelet dont j'ai abondamment parlé par ailleurs [C5]. Je rappellerai simplement ici qu'il reprend le principe de continuité de Monge et qu'il introduit des intersections imaginaires lorsqu'une droite et une conique ou lorsque deux coniques ne se coupent pas. Les justifications restent assez vagues(15), mais il en déduit de nombreux résultats, par exemple :
– l'intersection (réelle ou imaginaire) d'une droite et d'un cercle mène à la notion d'*axe radical* ;
– tous les cercles coupent la droite de l'infini en deux points imaginaires fixes, les *points cycliques* ;
– les notions de *polaire* d'un point et de *pôle* d'une droite par rapport à une conique liées par la *loi de réciprocité polaire* : un point Q se trouve sur une droite p si et seulement si le pôle de la droite p se trouve sur la polaire du point Q ;
– le *théorème de Poncelet-Steiner*(16) : si on se donne un cercle dont on connaît le centre(17), toutes les constructions à la règle et au compas sont réalisables à la règle seule.

4.4. Le principe de dualité

Dans les cas les plus simples, le principe de dualité repose sur le fait que dans les axiomes de la géométrie euclidienne le point et la droite jouent un rôle semblable dans la relation « un point P se trouve sur une droite d » qui se lit aussi « la droite d passe par le point P ». Dans de telles circonstances, un théorème ne concernant que de telles relations aura un théorème dual obtenu en échangeant le rôle des points et des droites. Par exemple, le théorème de Pappus aura pour dual le résultat suivant :

Soient a, b, c, d, e et f six droites et p (resp. q, resp. r) la droite joignant le point d'intersection des droites a et e (resp. b et f, resp. c et d) au point d'intersection des droites b et d (resp. c et e, resp. a et f). Si les trois droites a, b et c sont concourantes de même que les trois droites d, e et f, alors les droites p, q et r sont concourantes.



Mais on peut aller plus loin en ajoutant deux propriétés supplémentaires :

(15) Bien que ceci soit inspiré par la volonté d'obtenir des méthodes aussi puissantes que celles de la géométrie analytique, il est absurde de prétendre comme le fait Dieudonné ([Di], p. 83) que Poncelet « se place d'emblée dans ce que nous appelons maintenant le plan projectif complexe ».
(16) Jakob Steiner est un géomètre suisse qui obtint de manière indépendante la plupart des résultats de Poncelet. Ma méconnaissance de l'allemand ne me permet pas d'en dire plus.
(17) Le résultat n'est pas valable lorsque l'on ne se donne pas le centre du cercle. En particulier, on ne sait pas retrouver le centre du cercle ou construire le milieu de deux points donnés.

– la propriété duale de « un point P est sur une courbe c » est « la droite duale du point P est tangente à la courbe duale de c » ;
– le dual d'une conique est une conique.
Avec ces deux propriétés, le théorème de Brianchon est le dual du théorème de Pascal.

Ce principe de dualité initié par Gergonne est adopté par de nombreux géomètres dont Steiner, mais refusé par Poncelet sous le prétexte que seule la méthode des polaires réciproques a les propriétés précédentes et qu'il convient donc de l'utiliser explicitement.

4.5. Michel Chasles

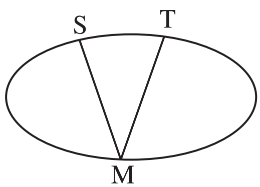
Chasles commença par étudier l'histoire de la géométrie. Il milita alors pour la création d'une chaire de Géométrie supérieure à la Sorbonne et en devint le premier titulaire. Pour ses cours, il reprit les idées de Poncelet en les ordonnant et en les simplifiant et publia deux œuvres importantes, le *Traité de Géométrie supérieure* et le *Traité des sections coniques*.

Dans la première, il donne une justification au principe de continuité de Monge en définissant de manière précise des points imaginaires conjugués (cf. [C3], § 1.2). Puis il étudie de manière systématique la notion de birapport de quatre points alignés. Ayant démontré que cette notion est invariante par projection, il peut alors définir le birapport de quatre droites concourantes. Il étudie alors les homographies (applications qui conservent le birapport) d'une droite dans une autre ou d'un faisceau de droites dans un autre. Il obtient alors le résultat suivant qui justifie le principe de dualité et donne tort à Poncelet :

Soient M_j (j = 1, 2, 3, 4) quatre points tels que trois d'entre eux ne soient pas alignés et m_j (j = 1, 2, 3, 4) quatre droites tels que trois d'entre elles ne soient pas concourantes. Il existe une application bijective f de l'ensemble des points du plan dans l'ensemble des droites du plan ayant les propriétés suivantes :
1) $f(M_j) = m_j$ (j = 1, 2, 3, 4) ;
2) f transforme des points alignés en droites concourantes ;
3) f conserve le birapport.

Le Traité des sections coniques repose sur le théorème suivant connu sous le nom de *Théorème de Chasles* :

Soient S et T deux points distincts sur une conique γ. Si le point M parcourt la conique γ, alors l'application qui à la droite (SM) associe la droite (TM) est une homographie du faisceau des droites passant par S dans le faisceau des droites passant par T :

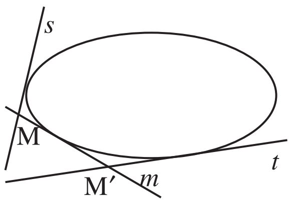


On a aussi la réciproque. Soient S et T deux points distincts. Si f est une homographie du faisceau $\mathcal{S}$ des droites passant par S dans le faisceau $\mathcal{T}$ des droites passant par T, le lieu des points d'intersection d'une droite du faisceau $\mathcal{S}$ avec sa transformée par f est une conique passant par S et T.

Ceci fournit une nouvelle construction à la règle seule du point courant d'une conique passant par cinq points donnés.

Par dualité les résultats précédents deviennent :

Soient s et t deux droites tangentes à une conique γ. Si une droite m varie en restant tangente à cette conique, l'application qui au point d'intersection M des droites s et m associe le point d'intersection M′ des droites t et m est une homographie de la droite s dans la droite t.



Réciproquement, soient s et t deux droites. Si f une homographie de la droite s dans la droite t, l'enveloppe des droites joignant un point de s à son transformé par f est une conique tangente aux droites s et t.

À partir de ces résultats, Chasles construit la plupart des résultats déjà connus pour les coniques. Il montre aussi que le problème de la trisection des angles se ramène au problème de l'intersection d'un cercle et d'une hyperbole équilatère (cf. [C3], § 11.3). Il résout aussi le problème posé par Newton de la construction à la règle et au compas du point courant de la cubique passant par neuf points donnés (cf. [C3], tome II).

4.6. Géométries synthétique, projective et affine

Le but de Poncelet et de Chasles était de donner à la géométrie euclidienne des méthodes de démonstration aussi puissantes que celles données par le calcul en géométrie euclidienne. On appelle en général *géométrie synthétique* l'ensemble des connaissances qu'ils ont obtenues.

Mais on peut remarquer que la plupart des résultats de Chasles concernent des figures composées uniquement de droites. En définissant le birapport de quatre points alignés indépendamment de la notion de longueur dans le plan(18), on obtient ce que l'on appelle maintenant la *géométrie projective*. Cette géométrie peut donc être considérée comme un modèle du monde des dessins à la règle seule. On peut

(18) Ceci peut se faire en remarquant que si A, B, C sont trois points distincts d'une droite d, l'application f qui à un point M de la droite d associe le birapport (A,B,C,M) est l'unique application continue bijective de la droite d dans l'ensemble $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ vérifiant $f(\mathrm{A}) = \infty$, $f(\mathrm{B}) = 0$ et $f(\mathrm{C}) = 1$.

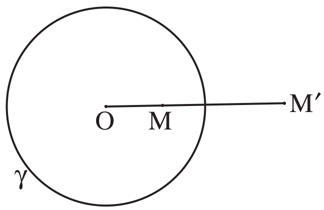
l'obtenir dans Cabri-Géomètre avec un menu composé des seuls outils *Point* et *Droite* et d'une macro *BirapportPointsAlignés*. Dans cette géométrie, le théorème de Chasles permet de définir des coniques, mais on ne sait pas définir, par exemple, le milieu d'un segment (cf. [C3]).

Si on ajoute à la géométrie projective la possibilité de tracer des parallèles, on obtient une géométrie où l'on peut définir des droites parallèles que l'on appelle en général *géométrie affine*. On peut l'étudier dans Cabri-Géomètre en ajoutant au menu précédent l'outil *Droite parallèle*. Le fait d'avoir dans cette géométrie la notion de milieu de deux points permet de définir sur chaque droite une notion de longueur. Néanmoins, il n'y a pas de notion de longueur isotrope et donc pas de cercle.

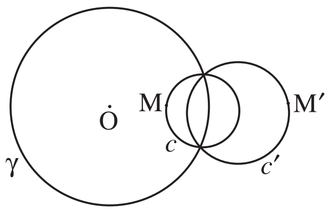
4.7. Géométrie anallagmatique

D'autres géométries sont apparues au 19$^{\text{e}}$ siècle, par exemple celle liée à l'inversion que l'on peut définir comme suit :

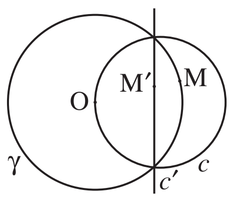
Soit γ un cercle de centre O et de rayon r et M un point distinct de O. On appelle *inverse* du point M par rapport au cercle γ le point M′ de la droite (OM) vérifiant : $\overline{\mathrm{OM}} \cdot \overline{\mathrm{OM'}} = r^2$.



Avec cette définition, on vérifie que si le point M parcourt un cercle c ne passant pas par le centre O, alors l'inverse M′ parcourt un cercle c' :



tandis que si M parcourt un cercle c passant par le point O, alors le point M′ parcourt une droite c' :



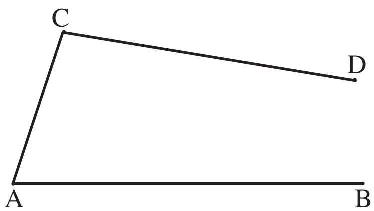
On voit le rôle particulier joué par le centre du cercle : il n'a pas d'inverse et les droites et les cercles qui passent par ce centre ont pour inverse des droites. On peut pallier cette exception en ajoutant au plan un point à l'infini (un seul) qui serait l'inverse du centre et en disant que les droites ne passant pas par le centre sont les cercles centrés au point à l'infini. Avec ceci, l'inverse d'un cercle est toujours un cercle. On appelle *géométrie anallagmatique* la géométrie ainsi définie. L'outil *Inversion* de Cabri II permet d'étudier cette géométrie.

5. Les géométries non euclidiennes

5.1. L'axiome des parallèles

Dans la géométrie euclidienne, l'un des axiomes est l'égalité (c'est-à-dire la possibilité de superposer par déplacement) des angles droits. On en déduit immédiatement l'unicité d'une droite passant par un point donné et perpendiculaire à une droite donnée et donc le fait que deux droites perpendiculaires à une même troisième sont parallèles.

Mais Euclide ne peut pas démontrer une réciproque qui entraînerait l'unicité des droites parallèles à une droite donnée et passant par un point donné. Pour pallier cette difficulté, il introduit l'axiome suivant : si deux droites AB et CD sont telles que la somme des angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{ACD}$ est plus petite que deux droits, elles ont un point commun.



Ce postulat a semblé très vite le point faible de la théorie car il demande l'existence d'un point commun à deux droites, ce point pouvant être très éloigné de la région contenant la figure étudiée.

5.2. Les tentatives de démonstrations directes

De nombreux essais pour démontrer le cinquième axiome à partir des autres ont été tentés. Citons en particulier les diverses « démonstrations » de Legendre dans les éditions successives de 1794 à 1823 de ses *Éléments de géométrie*. Mais on a très vite remarqué que toutes ces démonstrations utilisaient des propriétés non démontrées et qui se sont avérées dans la suite équivalentes au postulat des parallèles.

Des exemples de ces propositions sont :
– par un point pris hors d'une droite passe une seule parallèle à cette droite ;
– deux droites parallèles sont équidistantes (c'est-à-dire la distance d'un point de l'une à l'autre est une quantité fixe) ;
– l'ensemble des points situés du même côté d'une droite et équidistants de celle-ci est une droite ;

– la somme des angles d'un triangle est égale à deux droits ;
– il existe des triangles semblables non superposables (Wallis) ;
– il existe des triangles d'aire arbitrairement grande ;
– par trois points non alignés du plan passe un cercle et un seul ;
– par tout point intérieur à un angle passe une droite coupant les deux côtés de l'angle ;
etc.

5.3. Saccheri et Lambert

Une des tentatives les plus intéressantes a été celle de Saccheri (1667-1733). Il est parti d'un quadrilatère ABCD tel que les angles $\widehat{A}$ et $\widehat{B}$ soient droits et tels que AD = BC(19). Il a rapidement montré que les angles $\widehat{C}$ et $\widehat{D}$ sont aigus ou droits et il a cherché à montrer que l'hypothèse que les angles $\widehat{C}$ et $\widehat{D}$ sont tous deux aigus est contradictoire. Devant l'étrangeté des résultats obtenus à partir de cette hypothèse (par un passage à l'infini, il obtenait deux droites se coupant en un point et ayant une perpendiculaire commune en ce point) il en a conclu abusivement à une contradiction.

Une autre tentative est celle de Lambert (1728-1777) qui est parti, lui, d'un quadrilatère ABCD tel que les trois angles $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$ soient droits(20). Il montre que l'angle $\widehat{D}$ ne peut pas être obtus. Sous l'hypothèse d'un angle $\widehat{D}$ aigu, il arrive à l'existence d'une unité absolue pour la mesure des longueurs, propriété qu'il déclare lui aussi contradictoire.

5.4. La géométrie hyperbolique

Peu après et indépendamment, Bolyai (1802-1860), Gauss (1777-1855) et Lobatchevski (1793-1856) ont développé une nouvelle géométrie où ils admettaient les quatre premiers postulats et la négation de l'axiome des parallèles.

Le fait que l'on puisse développer une telle théorie sans trouver de contradiction a évidemment causé un grand choc car elle remettait en question la croyance en la vérité de la géométrie euclidienne qui semblait pourtant fermement établie par ses applications quotidiennes. Néanmoins, cette géométrie a finalement été admise sous le nom de *géométrie hyperbolique*.

Mais le fait que l'on n'ait pas trouvé de contradiction ne signifie pas qu'il n'en existe pas et puisque la vérité de la géométrie euclidienne était remise en question,

(19) Ce quadrilatère, appelé actuellement quadrilatère de Saccheri, avait déjà été utilisé au 11e siècle par Omar Khayyam pour démontrer le postulat des parallèles à partir de la propriété d'équidistance de deux droites parallèles.
(20) Ce quadrilatère, actuellement appelé quadrilatère de Lambert, avait déjà été utilisé au 10e siècle par Ibn al Haytam pour démontrer l'axiome des parallèles à partir de la propriété que l'ensemble des points situés d'un même côté d'une droite et équidistants de celle-ci est une droite.

l'un des problèmes fondamentaux à résoudre était : les géométries euclidienne et hyperbolique sont-elles exemptes de contradictions ?

Une deuxième question tout aussi importante était : quelle est la géométrie de l'espace qui nous entoure ?

Ces deux questions se sont compliquées avec l'apparition d'une nouvelle géométrie.

5.5. La géométrie elliptique

Riemann définit la géométrie elliptique en définissant sur une sphère S :
– des points comme étant les couples de points diamétralement opposés sur S ;
– des droites comme étant les grands cercles de S.
Dans cette géométrie, une droite n'est pas illimitée et deux droites quelconques ont toujours un point commun.

Cette géométrie avait déjà été considérée par Lambert, mais pour ce dernier une sphère ne pouvait pas être un plan. Se pouvait-il qu'il en soit autrement ?

Dans son ouvrage *Grundlagen der Geometrie*, Hilbert résolut cette question en remplaçant les cinq axiomes d'Euclide par un système de 21 axiomes liant les points, les droites et les plans sans aucune référence à l'intuition géométrique : on peut, disait-il, remplacer les mots point, droite et plan par verre de bière, chaise et table pour définir cette géométrie.

Avec une telle idée, on se retrouvait avec trois géométries pouvant modéliser le monde qui nous entoure, l'euclidienne, l'hyperbolique et l'elliptique, que l'on peut distinguer par diverses propriétés : par exemple le nombre de droites passant par un point donné et ne coupant pas une droite donnée (resp. 1, une infinité ou 0) ou par la somme des angles d'un triangle (resp. égale, plus petite ou plus grande que π).

Et les questions posées à la fin du paragraphe précédent se compliquaient encore.

5.6. Les modèles des géométries non euclidiennes

Plusieurs modèles euclidiens de la géométrie hyperbolique plane avaient été proposés avant les travaux de Hilbert, le plus commode étant le *modèle circulaire de Poincaré* :

Géométrie hyperbolique	**Modèle circulaire de Poincaré**
Plan	Intérieur d'un cercle
Point	Point situé à l'intérieur du cercle
Droite	Diamètres du cercle et Arcs de cercle orthogonaux au cercle

et Klein avait fourni de même un modèle plan de la géométrie elliptique :

Géométrie elliptique	**Modèle circulaire de Klein**
Plan	Disque
Point	Point situé à l'intérieur du disque ou couple de points situés sur la frontière et diamétralement opposés
Droite	Diamètres du disque et Arcs de cercle passant par deux points situés sur la frontière et diamétralement opposés

En implantant ces modèles dans Cabri, on peut avoir une bonne vision des géométries hyperbolique et elliptique et développer facilement ces théories (cf. [C4]).

Mais ils ont une importance théorique beaucoup plus grande. En effet, les théorèmes de géométrie hyperbolique ou elliptique peuvent être interprétés comme des théorèmes de géométrie euclidienne. Si on aboutit à une contradiction dans l'une des géométries non euclidiennes, elle apparaîtra aussi dans la géométrie euclidienne. Autrement dit, on a le résultat suivant :

Si la géométrie euclidienne est non contradictoire, alors la géométrie hyperbolique et la géométrie elliptique sont non contradictoires.

6. Le programme d'Erlangen

Quand Klein a conçu son Programme d'Erlangen, il connaissait de nombreuses géométries : euclidienne, projective, affine, anallagmatique, hyperbolique, elliptique, sphérique, … Son programme a permis :
– de montrer ce qu'elles avaient de commun et de définir ce qu'est une géométrie ;
– de les comparer, les classer.

Il est évident qu'un enseignement de ce programme à des élèves ne connaissant pas quelques-unes de ces géométries serait aussi absurde que l'enseignement que l'on a bâti sur les structures abstraites sans que des exemples permettent de donner du sens à ces développements abstraits.

On peut alors se demander ce que peut apporter le programme dans l'enseignement actuel : pas grand chose à mon avis comme le montre l' exemple du nombre de cercles pour construire un point donné ([Du], p. 653). En effet dès que l'on a un cercle, on est dans l'euclidien et, à moins de connaître le théorème de Poncelet-Steiner, il est peu vraisemblable que l'on arrive à une construction avec un seul cercle et les classifications entre euclidien, projectif et surtout affine ne peuvent pas aider à trouver des constructions aussi artificielles. Si c'est tout ce que l'on a trouvé pour justifier les problèmes de construction de grand-papa… Alors que l'utilisation des logiciels de géométrie dynamique permettrait de rendre un attrait aux mathématiques que n'aura jamais la mathématique « presse-bouton » qui semble se généraliser.

Quant à l'aide supposée apportée par le programme d'Erlangen pour les démonstrations, on peut remarquer qu'il me semble préférable de rester au niveau de Desargues, Poncelet ou Chasles : les idées intuitives de géométrie projective non formalisée suffisent pour comprendre des démonstrations telles que celle du théorème de Desargues présentée ci-dessus.

7. Choix du modèle

Quant à la question de savoir quelle est la géométrie du monde qui nous entoure, on pourrait penser qu'il suffit de mesurer les angles d'un triangle et de calculer leur somme. Si on le fait, on trouve toujours aux erreurs de mesure près 180°. Est-ce suffisant pour conclure que la géométrie euclidienne est la bonne ? Non, car on a le résultat (cf. [C4], chapitres 15 et 25) que les géométries hyperbolique et elliptique dépendent d'un paramètre (par exemple, pour simplifier, le rayon du cercle de leur modèle) et que la limite de ces géométries quand ce paramètre augmente indéfiniment est justement la géométrie euclidienne. On ne peut donc pas trancher de manière aussi simple lorsqu'on est dans un domaine raisonnable (disons à l'échelle terrestre). Dans ce cas, le choix pourra se faire au gré de l'utilisateur, mais on peut penser que la non existence des triangles semblables dans les géométries non euclidiennes sera une raison de rejet encore plus valable que les raisons de Saccheri ou de Lambert.

On sait que pour des domaines très grands ou très petits, les progrès de la physique ont amené l'introduction de nouvelles géométries. À l'échelle terrestre, pour des raisons de simplicité (et d'habitude), il n'y a aucun argument valable pour abandonner la géométrie euclidienne qu'il faut continuer à enseigner de même que la mécanique newtonnienne…

Deuxième partie :
Formalisme ou intuitionnisme

1. Les nombres réels

1.1. Introduction

Comme nous le verrons dans la suite, l'introduction des nombres entiers « naturels » constitue pour tous les mathématiciens la base des mathématiques(21). Le passage de ces nombres aux entiers négatifs et aux rationnels est assez aisé(22). Par contre le passage des rationnels aux réels constitue un changement complet de pensée : les nombres qui au départ ne servaient qu'à compter des ensembles finis peuvent servir à mesurer des objets beaucoup plus complexes.

Comment introduire les nombres réels ?

Dans ma jeunesse, on commençait par une idée intuitive, celle de droite numérique et au collège et même au lycée on se contentait de cette idée. Mais alors qu'est-ce-qu'une droite et qu'un point sur une droite ?
Les mathématiques modernes sont passées par là et on a introduit dans le secondaire une définition de la droite(23) dont personne ne comprenait plus rien et on est arrivé à ce paradoxe sémantique de définir les réels à partir d'une droite définie à partir des réels…

Une deuxième idée consiste à définir un réel x par son développement décimal illimité :

$$x = k, x_1 x_2 \ldots x_n \ldots$$

Je n'insiste pas, tout le monde connaît cela. Mais alors qu'est-ce qu'une suite infinie d'entiers ?

Et à un niveau plus élevé, on peut donner une définition axiomatique, par exemple celle de Dieudonné :

L'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels est un corps commutatif totalement ordonné contenant l'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels et vérifiant l'axiome des intervalles emboîtés :

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_n \leq x_{n+1} \leq y_{n+1} \leq y_n \Rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} [x_n y_n] \neq \varnothing.$$

(21) Il ne s'agit pas de l'introduction de l'ensemble $\mathbb{N}$ qui, elle, pose le problème de l'existence des ensembles infinis.
(22) Bien que historiquement l'introduction des nombres négatifs n'ait réellement été acceptée qu'au 19e siècle.
(23) On appelle droite un ensemble D d'éléments dits points, muni d'une bijection g de D sur $\mathbb{R}$, et de toutes celles f qui s'en déduisent de la manière suivante : a étant un nombre réel arbitraire on a : soit $f(\mathrm{M}) = g(\mathrm{M} + a)$, soit $f(\mathrm{M}) = - g(\mathrm{M} + a)$.

À la question « un tel ensemble existe-t-il ? », une réponse évidente vient : « oui, puisque tout le monde mathématique y croît ». Comme le fait remarquer Dan Brown, ce n'est pas un argument. Et puis ce « tout le monde » est-ce que c'est réellement le cas ?

Allons plus loin. On trouve en analyse des phrases telles que : « Soit x un nombre réel quelconque. Une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est continue en x si quel que soit le nombre réel positif ε, il existe un nombre réel h tel que … ».

Devant une telle phrase on peut se poser quelques questions :
– qu'est-ce qu'un nombre réel quelconque ? La réponse évidente « c'est un élément quelconque de $\mathbb{R}$ » ne peut évidemment être satisfaisante, puisque $\mathbb{R}$ est un ensemble infini.
– existe-t-il un tel nombre ?
– existe-il des fonctions continues et des fonctions qui ne le sont pas ?
etc(24).

L'histoire des mathématiques va nous montrer que les réponses à de telles questions ne sont pas aussi évidentes qu'il n'y paraît à première vue.

1.2. Les grandeurs d'Eudoxe(25)

Eudoxe (ou plutôt Euclide qui attribue cette théorie à Eudoxe) introduit quatre sortes de grandeurs : les nombres (entiers positifs, évidemment), les longueurs, les aires et les volumes.

On sait définir l'égalité de deux grandeurs de même nature (par exemple, par superposition pour les longueurs de deux segments). On sait les additionner (par exemple, en les mettant bout à bout pour les longueurs de deux segments) et les soustraire, les multiplier par un entier.

Pour comparer deux grandeurs de même nature, on fait appel à un raisonnement qu'on appelle *antyphérèse*(26).

Pour deux grandeurs ℓ et m de même nature, l'anthyphérèse consiste à construire des suites de grandeurs (x_n) et (y_n) telles que $\ell = x_0$ et $m = y_0$ et telles qu'il existe un entier q_n et une longueur r_n vérifiant :

(24) J'ai assisté un jour à une conférence d'un didacticien de l'analyse qui disait avoir des difficultés en première année d'université avec son premier cours et son polycopié commençait par une phrase de ce type. À la fin de la conférence, j'ai demandé ce qu'il y avait avant cette page et il n'y avait rien…

(25) Mes propos n'étant pas ceux d'un historien des mathématiques, je ferai une présentation rapide et souvent anachronique du problème de la mesure des grandeurs. Pour une présentation plus fidèle et plus détaillée, on pourra consulter l'article [Pr] et surtout la brochure [Bk] que vient de publier l'IREM de Lille.

(26) Dans le cas des nombres, c'est ce qu'on appelle maintenant l'algorithme d'Euclide pour trouver le pgcd de deux nombres.

$$\begin{cases} x_n = q_n y_n + r_n, \\ 0 \leq r_n < y_n. \end{cases}$$

Si $r_n = 0$, le processus s'arrête et on déduit alors facilement l'existence de deux entiers p et q tels que $\ell = py_n$ et $m = qy_n$ (on dit alors que ℓ et m sont commensurables).

Si $r_n \neq 0$, on itère avec $x_{n+1} = y_n$ et $y_{n+1} = r_n$.

Si, pour tous les entiers n, $r_n \neq 0$, on dit que ℓ et m sont incommensurables. Ceci n'a jamais lieu pour les entiers, mais peut se produire pour les autres grandeurs, par exemple pour les longueurs de la diagonale et du côté d'un carré.

Avec cette méthode, on va introduire une nouvelle égalité : si ℓ et m sont deux grandeurs d'une même première nature et ℓ' et m' deux grandeurs d'une deuxième nature (pouvant être identique ou différente de la première), on dit que le rapport ℓ/m est égal au rapport ℓ'/m' si le processus d'antyphérèse appliqué aux couples (ℓ,m) et (ℓ',m') donne la même suite d'entiers dans les deux cas.

Remarques. 1. On ne définit pas avec précision ce que sont les rapports de longueurs, mais seulement leur égalité. De plus puisque l'on ne sait pas définir d'opération sur ces rapports, il faut être Dieudonné pour voir dans ces rapports des précurseurs directs des nombres réels.

2. Dans le cas où $\ell = py$ et $m = qy$ sont deux grandeurs commensurables, on peut voir que le rapport ℓ/m est égal au rapport de nombres entiers p/q.

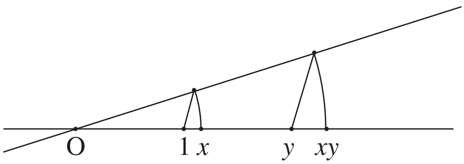
Avec cette définition, on peut démontrer un certain nombre de résultats fondamentaux :
– une démonstration complète du théorème de Thalès(27) ;
– une définition du nombre π, non pas sous cette forme, mais en montrant que le rapport des longueurs de deux circonférences est égal au rapport des rayons et de même pour les aires, etc. ;
– des formules d'aires et de volumes.

1.3. La droite numérique

Le problème évolue(28) jusqu'au 17e siècle où apparaît la notion de droite numérique (en particulier dans les travaux de Descartes) :

En ajoutant aux grandeurs d'Eudoxe la notion d'unité (qui n'est pas chez Euclide), on peut considérer les mesures comme des nombres que l'on sait additionner et soustraire. De plus en associant aux points d'une droite leur distance à un point origine, on obtient avec le théorème de Thalès une représentation de la multiplication de ces nombres.

(27) Combien d'élèves de nos classes actuelles ont vu une démonstration complète du théorème de Thalès ?
(28) et c'est très bien décrit dans la brochure [Bk].



On a alors une droite numérique qui peut servir de base à la géométrie analytique et de modèle aux nombres réels.

Mais ce n'est réellement qu'au 19e siècle (c'est un des paradoxes de l'histoire) qu'apparaissent les nombres négatifs et donc les axes orientés. Elle n'est par exemple pas mise en évidence dans les travaux de Chasles(29).

1.4. Les infiniment petits

Entre temps, l'analyse est apparue et on a besoin d'un domaine où définir la notion de dérivée. Une proposition a été les infiniment petits avec la définition de Leibniz(30) :

h est un *infiniment petit* si

$$\begin{cases} h \neq 0, \\ \text{pour tout réel } x \neq 0, x + h = x. \end{cases}$$

Exemple. Pour calculer la dérivée de x^2, on introduit un infiniment petit h et on écrit :

$$\frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \frac{2hx + h^2}{h} = 2x + h = 2x.$$

Bien entendu, une telle introduction a fait l'objet de nombreuses critiques. L'un des principaux opposants a été un évêque anglican qui s'appelait George Berkeley(31) et qui se piquait de philosophie et de mathématiques. Il a produit une critique véhémente mélangeant tout : théologie, etc. Exit les infiniment petits.

Le principal argument que l'on peut retenir est que l'ensemble des nombres réels ainsi complété n'est pas archimédien. Tout le monde sait que la propriété archimédienne est nécessaire pour mesurer. Donc qu'est-ce-que cela vient faire pour mesurer des grandeurs ?

1.5. Cauchy

Au 19e siècle le besoin de bâtir sur des fondements solides l'analyse se fait sentir. L'un des principaux réalisateurs a été Cauchy qui, pour ses cours à l'École

(29) En particulier, Chasles n'a jamais écrit sous la forme actuelle sa fameuse relation car la notion de mesure algébrique n'apparaît pas dans son œuvre, bien qu'elle soit implicite dans tous ses discours.
(30) Il faudrait maintenant pour que ceci soit rigoureux mettre une relation d'équivalence au lieu du signe =.
(31) C'est lui qui a donné son nom à la fameuse université américaine.

Polytechnique, reprend une notion de limite qui faisait déjà l'objet d'un article de l'Encyclopédie de Diderot, mais dont à ma connaissance on n'avait pas tiré grand chose jusque là. En l'utilisant, il donne une définition d'une suite convergente et démontre le théorème suivant lequel toute suite convergente est ce qu'on appelle maintenant une suite de Cauchy.

Mais on a besoin à tout prix de la réciproque et Cauchy en propose une démonstration. Faute d'une définition précise des nombres réels, cette démonstration est, disons, un beau laïus qui n'a ni queue, ni tête, ce que des gens comme Bolzano lui ont fait remarquer assez véhémentement. La théorie de Cauchy repose donc sur du sable…

Une solution à ce problème a consisté à « construire » les nombres réels à partir des rationnels. Deux constructions équivalentes furent proposées : les coupures et les suites de Cauchy.

1.6. La construction par les coupures de $\mathbb{Q}$

La première fut proposée par Richard Dedekind avec la notion de coupure. L'idée en est simple car très proche du domaine de la droite numérique : quand on met un point sur une droite, on partage la droite en deux demi-droites formant une partition de la droite.

Dedekind définit donc une coupure de l'ensemble $\mathbb{Q}$ des rationnels comme une partition de $\mathbb{Q}$ en deux sous-ensembles non vides A et B tels que :

$$\forall x \in \mathrm{A}, \forall y \in \mathrm{B}, x < y.$$

Mais une telle définition a l'inconvénient qu'à un nombre rationnel p on peut associer deux coupures différentes :

$$\mathrm{A} = \left\{x \in \mathbb{Q} \middle| x < p\right\}, \mathrm{B} = \left\{x \in \mathbb{Q} \middle| x \geq p\right\}$$

et

$$\mathrm{A}' = \left\{x \in \mathbb{Q} \middle| x \leq p\right\}, \mathrm{B}' = \left\{x \in \mathbb{Q} \middle| x > p\right\}.$$

L'existence de ces deux coupures complique les choses.

Aussi préfère-t-on actuellement la définition suivante : A est une coupure de l'ensemble $\mathbb{Q}$ si A est un sous-ensemble non vide de $\mathbb{Q}$ vérifiant les deux propriétés suivantes :

- $\forall x \in \mathrm{A}, \forall y \in \mathbb{Q}, y < x \Rightarrow y \in \mathrm{A}$,
- l'ensemble A n'a pas de plus grand élément.

Si p est un nombre rationnel, la coupure associée est $\left\{x \in \mathbb{Q} \middle| x < p\right\}$. L'ensemble des coupures contient donc un sous-ensemble isomorphe à $\mathbb{Q}$. Mais, il y en a beaucoup d'autres ; par exemple, $\mathbb{Q}_- \cup \left\{x \in \mathbb{Q} \middle| x^2 < 2\right\}$ peut être associé à $\sqrt{2}$.

Sur l'ensemble des coupures, on définit :

- une relation d'ordre, l'inclusion,

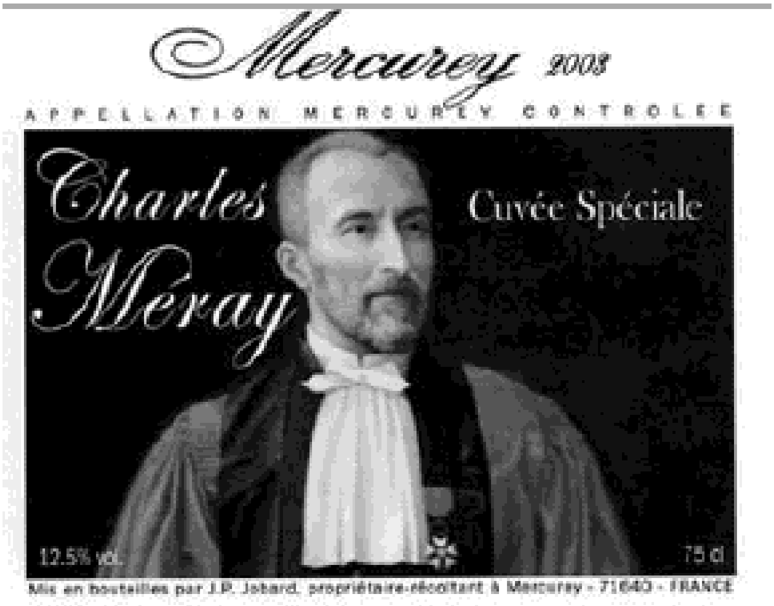
• une addition : $\mathrm{A}+\mathrm{B}=\left\{x \in \mathbb{Q} \middle| \exists y \in \mathrm{A}, \exists z \in \mathrm{B} : x = y+z\right\}$,

• une multiplication : $\mathrm{AB}=\left\{x \in \mathbb{Q} \middle| \exists y \in \mathrm{A}, \exists z \in \mathrm{B} : x = yz\right\}$ pour deux coupures A et B positives et l'on étend cette définition au cas général en respectant la règle des signes.

On montre facilement que l'ensemble des coupures ainsi défini est un modèle de l'ensemble $\mathbb{R}$ des réels.

1.7. La construction par les suites de Cauchy de $\mathbb{Q}$

Une deuxième construction utilisant les suites de Cauchy dans $\mathbb{Q}$ est proposée indépendamment par deux mathématiciens : George Cantor et un professeur à la faculté de Dijon, Charles Méray. Je ne sais pas si beaucoup de gens ont entendu parler de Méray, mais il faut croire qu'à Dijon c'est une vedette car voici ce que j'ai trouvé sur Internet comme image de Méray :



Dans cette construction, on part de la notion de suite de Cauchy dans $\mathbb{Q}$, c'est-à-dire de suites de rationnels (x_n) vérifiant[32] :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{Q}_+, \exists n \in \mathbb{N} : q > p > n \Rightarrow \left|x_p - x_q\right| < \varepsilon.$$

Sur l'ensemble de ces suites, on définit la relation d'équivalence

$$(x_n) \sim (y_n) \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}(x_n - y_n) = 0,$$

(32) J'insiste sur ces définitions pour montrer que l'on ne sort pas de l'ensemble $\mathbb{Q}$.

c'est-à-dire

$$(x_n) \sim (y_n) \Leftrightarrow \left(\forall \varepsilon \in \mathbb{Q}_+, \exists n \in \mathbb{N} : p > n \Rightarrow \left| x_p - y_p \right| < \varepsilon \right).$$

En notant $\overline{(x_n)}$ la classe d'équivalence de la suite (x_n), on peut définir sur l'ensemble C de ces classes d'équivalence :

- une addition : $\overline{(x_n)} + \overline{(y_n)} = \overline{(x_n + y_n)}$,
- une multiplication : $\overline{(x_n)} \cdot \overline{(y_n)} = \overline{(x_n y_n)}$,
- une relation d'ordre : $\overline{(x_n)} \leq \overline{(y_n)} \Leftrightarrow \left(\exists \overline{(x'_n)} \sim \overline{(x_n)}, \exists \overline{(y'_n)} \sim \overline{(y_n)} : \forall n \in \mathbb{N}, x'_n \leq y'_n \right)$.

On peut alors montrer que l'ensemble C est un autre modèle de l'ensemble $\mathbb{R}$.

1.8. Les objections

Ces constructions reposent sur des ensembles infinis achevés de nombres rationnels. Or nous avons vu dans la première partie que depuis les grecs la considération de ces ensembles constituait pour la communauté mathématique un tabou absolu. Le problème de la validité de ces constructions était donc loin d'être résolu.

Le premier opposant célèbre a été Leopoldt Kronecker(33) et sa phrase célèbre « Dieu a créé les entiers, l'homme a fait le reste », on voit comment il faut l'interpréter : les entiers, on sait ce que c'est (c'est Dieu qui les a créé), mais le reste…

On appellera *intuitionnistes* ces opposants car, pour eux, les mathématiques doivent reposer sur l'intuition que tout le monde a des nombres entiers. Mais le reste est loin d'être aussi achevé que les entiers.

2. La théorie des ensembles(34)

2.1. La théorie naïve

Richard Dedekind a donné une première étude des ensembles infinis qui ne va pas très loin. Ses idées sont présentées dans un livre intitulé *Was sind und was sollen die Zahlen ?*(35)

À partir de 1874, Georg Cantor présente ses idées qui le rendront célèbre(36). Pour chaque ensemble E, il introduit une notion de cardinal (noté card(E)) qui permet de définir une relation d'ordre :

card(E) ≤ card(F) s'il existe une application injective de E dans F.

(33) Kronecker était un éminent spécialiste de la théorie des nombres.
(34) Pour une étude plus complète sur cette partie, on pourra consulter le livre [Be] de Jean-Pierre Belna.
(35) Que sont et à quoi servent les nombres ?
(36) L'origine de son intérêt pour les ensembles infinis est le problème de l'unicité des séries de Fourier : à quelles conditions deux fonctions périodiques ont-elles même série de Fourier ?

En particulier

card(E) = card(F) s'il existe une application bijective de E dans F[37].

Pour un ensemble E fini, card(E) est tout simplement le nombre d'éléments de E.

Pour les grecs, le tout devait être plus grand qu'une partie. On interprète souvent cette proposition par

$$E \subset F, E \neq F \Rightarrow \mathrm{card}(E) < \mathrm{card}(F).$$

Cette propriété est vraie pour les ensembles finis, mais ne l'est pas pour les ensembles infinis. Par contre, on a la propriété

$$\mathrm{card}(\wp(E)) > \mathrm{card}(E),$$

où $\wp(E)$ est l'ensemble de tous les sous-ensembles de E.

L'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels est le plus petit ensemble infini. On note $\aleph_0$ son cardinal[38]. Il démontre que le cardinal de l'ensemble $\mathbb{R}$ des réels est plus grand que $\aleph_0$ (argument de la diagonale) et il pose la question : est-ce que le cardinal de $\mathbb{R}$ est le deuxième des cardinaux $\aleph_1$ des ensembles infinis (hypothèse du continu). Il en cherche une démonstration, il la cherche toute sa vie et ne la trouve pas…

Cantor introduit aussi une notion d'ordinal et quelques autres notions et propriétés dont je ne parlerai pas ici.

Mais très vite apparurent des paradoxes tels que l'existence de l'ensemble de tous les ensembles est paradoxale.

La théorie « naïve » de Cantor ne peut pas subsister puisque chacun sait que dans une théorie mathématique où il y a un paradoxe, un résultat contradictoire, tout tombe par terre : tous les résultats que l'on peut en déduire sont tous frappés de la même tare.

La solution va être de limiter la notion d'ensemble : en gros, on ne peut pas avoir des ensembles excessivement grands.

Ainsi on élimine les paradoxes connus à l'époque, mais on n'est jamais sûr qu'il n'y en aura pas d'autres. Autrement dit se pose la question : la théorie des ensembles est-elle consistante[39] ?

La théorie des ensembles peut fournir des modèles de $\mathbb{N}$, par exemple :

$$\{\} = 0, \{\{\}\} = 1, \{\{\{\}\}\} = 2, \cdots$$

Donc un problème *a priori* plus simple (?) se pose aussi : démontrer la consistance de $\mathbb{N}$ en tant qu'ensemble achevé.

---

(37) On dit alors que les ensembles E et F sont équipotents.

(38) $\aleph$, c'est le a hébraïque, mais dans la bible c'est aussi le commencement (est-ce un hasard ?).

(39) Une théorie est consistante si elle est exempte de toute contradiction.

2.2. Axiome du choix et bon ordre

En 1900, lors du premier congrès mondial des mathématiques à Paris, David Hilbert donna une conférence historique. Il commença par définir une nouvelle conception des mathématiques connue maintenant sous le nom de *formalisme* et que l'on peut résumer ainsi :

Tant que l'on manipule des ensembles finis, les mathématiques sont sûres, ce qui implique que la majeure partie de l'arithmétique est sûre. Mais pour justifier l'utilisation d'objets abstraits et en particulier des ensembles infinis, il suffit de démontrer par des méthodes finitaires la consistance de la théorie qui les introduit.

Il énonça ensuite 23 problèmes qui lui semblaient essentiels pour le développement des mathématiques. Le premier était l'hypothèse du continu, le deuxième était la consistance de $\mathbb{N}$.

En réalité, on commença par étudier le problème du bon ordre qui semblait une étape possible pour établir l'hypothèse du continu : l'ensemble $\mathbb{R}$ des réels peut-il être bien ordonné, c'est-à-dire muni d'une relation d'ordre telle que tout sous-ensemble non vide ait un plus petit élément ?

König donne une réponse négative au problème du bon ordre lors du deuxième congrès des mathématiciens en 1904. Mais, très rapidement, on découvre que sa démonstration comporte une erreur !

Dans la même année, Ernst Zermelo démontre le théorème qui porte son nom : Tout ensemble peut être bien ordonné. Même $\mathbb{R}$!

Sa démonstration utilise l'*axiome du choix* (AC) :

Soient E et I deux ensembles. Si $\left(\mathrm{E}_i\right)_{i\in\mathrm{I}}$ est une partition d'un ensemble E, on peut choisir un élément dans chaque E_i. Autrement dit,

$$\exists f : \mathrm{I} \to \mathrm{E} : \forall i \in \mathrm{I}, f\left(i\right) \in \mathrm{E},$$

ce qu'on appelle une fonction de choix.

Si I est fini, il n'y a pas de problème

Quand I est dénombrable, on est prêt à l'admettre.

Mais quand I n'est pas dénombrable (ce qui est le cas pour le théorème de Zermelo), ceci pose quand même de sacrés problèmes, d'autant plus qu'on n'indique pas comment on fait.

Et ceci n'apporte rien pour l'hypothèse du continu…

2.3. Réactions

Les premiers à réagir furent les intuitionnistes qui revenaient toujours au fait que la seule base possible des mathématiques était l'intuition des nombres entiers. Kronecker était mort, mais d'autres partageaient cette idée parmi lesquels Hermann Weyl et surtout Henri Poincaré que tout le monde connaissait et qui mettait carrément les pieds dans le plat en posant la question : Quand un objet mathématique est-il défini ?

Quelqu'un dont vous n'avez peut-être jamais entendu parler, Luitzen Brouwer, fut encore plus radical. Il va jusqu'à refuser ce qu'il appelle le *principe d'omniscience* : considérons une suite binaire, prenant deux valeurs 0 et 1 :

$$x_n = \begin{cases} 0 & \text{si } \mathrm{P}(n) \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

P étant une proposition sur les entiers naturels.

Dans les mathématiques classiques, on a un ensemble magnifique, un ensemble de 0 et de 1 qui est donc borné. Tout le monde sait qu'un ensemble borné a une borne supérieure et une borne inférieure. Ici la suite (x_n) a un maximum m qui est égal à 0 si la suite est nulle et 1 dans le cas contraire. Mais ce qu'ajoute Brouwer, prétendre que m existe et est parfaitement défini, c'est savoir résoudre à peu près toutes les conjectures sur les entiers – à l'époque on utilisait le théorème de Fermat, mais depuis Wiles est passé par là, on se rabat sur la conjecture de Goldbach (et si on démontre la conjecture de Goldbach, on utilisera n'importe quelle conjecture sur les entiers) : P(n) est la propriété « $2n$ est la somme de deux nombres premiers » –. On peut quand même en douter.

Brouwer va plus loin dans ses réflexions. Pour lui, on ne peut pas dire qu'une propriété quelconque est vraie ou fausse : il rejette donc le principe du tiers exclus. D'où découle le rejet d'un raisonnement par l'absurde (si la négation d'une propriété amène une contradiction, la propriété est vraie), le rejet d'un raisonnement par contraposée, etc.

Mais alors il rejette tout un tas de résultats classiques, par exemple :

– tout ensemble majoré de $\mathbb{R}$ a une borne supérieure (base du principe d'omniscience),
– toute suite croissante majorée de $\mathbb{R}$ converge,
– le théorème du maximum,
– le théorème des valeurs intermédiaires,
– …

puisque tous ces résultats reposent sur des méthodes de démonstration rejetées. Qu'est-ce qui reste ? De l'analyse, pratiquement rien.

En réponse à ces attaques, le principal argument de Zermelo est que l'axiome du choix a été utilisé, souvent et subrepticement, par de nombreux mathématiciens[(40)], en particulier en analyse.

David Hilbert est absolument d'accord et résume son opinion dans sa phrase célèbre : « Du paradis de Cantor, nul n'a le droit de nous exclure ».

(40) y compris des intuitionnistes.

En 1908, Zermelo développe un système d'axiomes pour les ensembles. Ce système est amélioré en 1922 par Abraham Fraenkel et on parle tous du système Z-F pour ce système et on distingue soigneusement :
– le système ZF (sans l'axiome du choix)
– le système ZFC (avec l'axiome du choix)
– le système ZFD (avec l'axiome du choix dénombrable))
Mais se pose alors le problème de la consistance de ces systèmes.

Il est apparu plus tard que l'axiome du choix donne des résultats quasi paradoxaux tels que le théorème de Banach-Tarski (1924) : on prend une boule et on la coupe en un certain nombre (fini) de morceaux et on peut avec ces morceaux reconstituer deux boules identiques à la première. On peut donc réaliser la multiplication des petits pains décrite dans la Bible. Moi qui ne suis plus croyant depuis pas mal d'années, j'ai du mal à admettre ce théorème et je le considère comme assez paradoxal.

À signaler quand même (et ceci sera important pour la suite) que pour l'analyse « classique », on n'a pas besoin de l'axiome du choix général, mais que l'axiome du choix dénombrable (ACD) suffit et il y a quand même alors moins d'opposants.

Une position intermédiaire est celle de l'école française de l'époque qui travaillait autour d'Émile Borel sur la mesure et qui proposait de distinguer soigneusement les résultats dépendant de l'axiome du choix des autres.

Un exemple qui, pour moi, est tout à fait caractéristique de leur position est le problème de l'existence des ensembles non mesurables.

On connaît la solution de Lebesgue(41) : on prend l'ensemble E = [0,1] et sur cet ensemble on regarde la relation d'équivalence $x - y \in \mathbb{Q}$. Elle définit une partition de E en une infinité d'ensembles. Si on admet l'axiome du choix, on peut prendre dans chacun de ces ensembles un élément et on forme ainsi un sous-ensemble F de E. Si F est mesurable, la mesure de F est donc un nombre compris entre 0 et 1. Si cette mesure est nulle, puisque $\mathbb{Q}$ est dénombrable, tout ceux qui ont fait un peu de théorie de la mesure savent qu'une réunion dénombrable d'ensembles de mesure nulle est de mesure nulle. Donc E est de mesure nulle. Si F est de mesure positive, le même raisonnement donne que E est de mesure infinie. Puisque la mesure de E est égale à 1, F est non mesurable ! Mais F existe-t-il ? En réalité Lebesgue démontre le résultat suivant : si F existe, F est non mesurable.

Ceci se trouve dans tous les cours de théorie de la mesure(42).

Lebesgue ajoutait que, pour lui, cette démonstration n'entraînait pas l'existence d'ensembles non mesurables. Il demandait une démonstration constructive d'ensembles non mesurables où l'on expliquerait la manière de faire les choix.

Dix ans après, les premiers livres de théorie de la mesure reproduisaient la démonstration de Lebesgue en oubliant les réticences de Lebesgue sur la question.

(41) Sur ce point, il avait été précédé par Vitali.
(42) Je l'ai moi-même enseigné.

2.5. La fin des illusions

En 1929, Kurt Gödel publie un premier résultat qui semble aller dans le sens du programme de Hilbert :

Le calcul des prédicats du premier ordre – celui où on manipule des prédicats et des variables et où seules les variables peuvent être quantifiées – est complet(43).

Mais en 1931, Gödel met un grand coup de pied dans la fourmilière en démontrant deux résultats fondamentaux :

1. Le premier résultat est un théorème non pas de consistance (il en existe très peu), mais de consistance relative : si ZF est consistant, alors ZFC est consistant.
Le problème de la consistance de ZF n'est donc pas lié à l'axiome du choix.

2. Le deuxième détruit définitivement le programme de Hilbert : Tout système contenant un modèle de $\mathbb{N}$ contient une proposition P indécidable, c'est-à-dire qu'on ne démontrera jamais à l'intérieur du système ni P, ni la négation de P.
On ne pourra donc jamais démontrer avec des méthodes finitaires la consistance de l'ensemble $\mathbb{N}$.

On pourrait penser que ces résultats aient produit un séisme dans le monde mathématique. Seuls John von Neumann et Paul Bernays semblent avoir compris l'importance de ces résultats. Depuis la situation n'a pas changé. Les mathématiciens sont tous plus ou moins inspirés par le formalisme(44). Le principal argument utilisé contre l'absence de consistance est que si une contradiction apparaissait un jour, il suffirait de modifier un peu les axiomes utilisés pour la faire disparaître.

2.6. La méthode du forcing

En 1963(45), Paul Cohen publie ses travaux sur l'axiome du choix et l'hypothèse du continu. Ses travaux lui valent la médaille Fields en 1966(46).

Le premier de ses résultats est :

Dans ZF, l'axiome du choix est indécidable (il n'y en aura jamais de démonstration, ni de démonstration du contraire).

et beaucoup plus fort (c'est ceci qui a sûrement étonné) :

Dans ZFC, l'hypothèse du continu est indécidable(47).

---

(43) Un système formel est complet si pour toute proposition de P on peut démontrer ou P ou la négation de P.

(44) Les travaux du groupe Bourbaki ont été un essai de rebâtir l'ensemble des mathématiques sur une base formaliste.

(45) Cela m'a marqué car j'étais au service militaire, juste à la fin de la guerre d'Algérie et il y avait dans ma compagnie plusieurs professeurs de mathématiquess en exercice. Un article du Monde décrivait les travaux de Cohen et ils m'ont demandé si moi, universitaire, je pouvais leur expliquer le contenu de cet article. Mes souvenirs de ce que j'avais entendu en première année d'université m'ont permis de parler plusieurs soirées sur ce sujet.

(46) À ma connaissance, c'est la seule fois qu'un logicien a obtenu la médaille Fields.

(47) Cantor qui a passé une bonne partie de sa vie à la recherche d'une démonstration pouvait chercher longtemps, le pauvre.

Sa méthode appelée méthode du *forcing* a révolutionné la logique. Tout le monde s'est précipité dessus et voici deux travaux importants.

Le premier est l'*analyse non standard* d'Abraham Robinson. En gros si l'ensemble des réels est consistant, alors l'ensemble obtenu en ajoutant les infiniment petits est encore consistant : on peut calculer des dérivées comme je l'ai montré au § 1.4[48].

Le deuxième résultat dû à Robert Solovay aurait sûrement comblé d'aise Henri Lebesgue : il a démontré que si ZFD est consistant, alors le système ZFD avec l'axiome « tous les ensembles de $\mathbb{R}$ sont mesurables » est consistant.

On voit que pour faire de l'analyse on a l'alternative d'admettre l'axiome du choix général ou d'admettre l'axiome du choix dénombrable et celui de Solovay. On peut se demander laquelle est la plus satisfaisante[49].

2.7. L'intuitionnisme

Revenons à Brouwer. C'est quelqu'un de très méconnu. Si on regarde ce qui est peut être une bible pour tout le monde, c'est-à-dire Wikipedia, l'article sur Brouwer est à faire et on trouve dans l'Encyclopedia Universalis la phrase suivante : « Brouwer ne réussit pas à imposer les mathématiques intuitionnistes qui demeurent un sujet de curiosité ».

À signaler que Brouwer était loin d'être un mathématicien de seconde zone. Il a démontré un théorème fondamental en topologie, le théorème du point fixe (là il était tout à fait orthodoxe). Il était rédacteur en chef de l'une des principales revues de mathématiques de l'époque, les *Mathematische Annalen* (Brouwer était néerlandais, donc tout à fait de culture germanique). Hilbert a littéralement persécuté Brouwer et a fini par réussir à le faire exclure non seulement de son poste de rédacteur, mais même du comité de lecture des Mathematische Annalen. Et on a finalement presque effacé son nom puisqu'on cite partout le théorème du point fixe, mais jamais associé au nom de Brouwer[50].

On lui a quand même laissé son poste à l'Université d'Amsterdam qui a été pendant des années comme le fameux village gaulois d'Astérix : le refuge des intuitionnistes, un endroit rejeté par tout le monde : il n'est pas étonnant qu'il n'ait pas réussi à imposer son point de vue.

Quand même, en 1928, un de ses élèves, Arend Heyting a développé la logique intuitionniste pour reprendre les arguments de rejeter le tiers exclus, etc. Il est très

(48) Ceci me rappelle quelqu'un que les gens qui fréquentent l'IREM de Toulouse ont connu, Pierre Gautier qui, professeur de physique, à sa retraite a fréquenté assidûment l'IREM jusqu'au moment où la maladie d'Alzheimer l'a frappé. Quand il m'a demandé un jour si je pouvais lui expliquer l'Analyse non standard, il m'a dit : cela veut dire que ce que je faisais avec mes étudiants pour calculer les dérivées et qu'ils me disaient Monsieur, vous n'avez pas le droit de faire ainsi car les mathématiciens le disent, au fond j'en avais parfaitement le droit.
(49) Pour moi qui a beaucoup enseigné la théorie de la mesure et les probabilités, la deuxième me satisfait beaucoup plus que l'axiome du choix général.
(50) Ne trouvez-vous pas là un comportement sectaire ?

difficile de présenter en peu de temps cette logique car on en a fait plusieurs présentations différentes. L'une des plus simples est de remplacer la logique binaire traditionnelle (où une propriété est vraie ou fausse) en ajoutant une troisième valeur (disons non démontré : tant qu'on ne sait pas, on la met de côté).

3. L'analyse constructive(51)

En 1909, Henri Poincaré dans *La logique de l'infini* propose en réaction au programme de Hilbert un programme dont les idées fortes sont :
1. Ne jamais envisager que des objets susceptibles d'être définis en un nombre fini de mots.
2. Ne jamais perdre de vue que toute proposition sur l'infini doit être la traduction, l'énoncé abrégé de propositions sur le fini.
3. Éviter les classifications et les définitions non prédicatives.

Le développement de la théorie du calculable par Alan Turing permet de préciser la pensée de Poincaré en disant que pour démontrer l'existence d'un objet mathématique il faut fournir un algorithme permettant de construire cet objet.

Les mathématiques constructives développées sur cette base sont donc ce que pourrait faire un ordinateur idéal. Si on veut vraiment regarder les mathématiques que peut faire un ordinateur, il faut en passer par là.

Dans le cas de l'analyse, le livre fondamental paru en 1967 est le *Foundations of Constructive Analysis* de Errett Bishop. Je n'en donnerai que quelques exemples.

3.1. Les nombres calculables

Un nombre réel $x = k, x_1 x_2 \ldots x_n \cdots$ est *calculable* s'il existe un algorithme fournissant x_n pour chaque entier n.

Si vous entrez l'algorithme et le nombre n, au bout d'un temps fini on aura la valeur x_n. Ce temps peut être excessivement long : pour π, on a des algorithmes théoriques pour calculer les décimales, mais calculer de nouvelles décimales de π est une manière de montrer la puissance des plus gros ordinateurs. On est dans un monde théorique où l'algorithme peut tourner sans limitation de temps ou de mémoire.

Mais cette définition – en réalité, j'ai pris la plus simple, mais il y en a d'autres équivalentes – fournit des nombres ayant des propriétés assez bizarres. Si on se restreint à l'ensemble de ces nombres, on ne retrouve plus l'ensemble des réels. En particulier, l'ensemble des nombres calculables étant dénombrable, il y a beaucoup plus de nombres non calculables que de calculables !

3.2. Relation d'ordre

On ne sait pas dire pour n'importe quel nombre calculable s'il est nul ou différent de 0 : la propriété $(x = 0) \vee (x \neq 0)$ n'est pas vraie pour tout x calculable. En effet il n'y a pas d'algorithme qui, quand on met un nombre calculable quelconque dans la

(51) Pour plus de détails sur les mathématiques constructives, on peut lire l'article de Henri Lombardi [Lo].

machine, fournisse la réponse. Démontrer qu'il n'y en aura jamais est difficile, mais, intuitivement, c'est très facile à comprendre. Si on fait tourner un algorithme et si on trouve un certain nombre de 0 et si on s'arrête là, on ne sait pas ce qui va se passer à l'instant ultérieur : on n'est pas capable de dire si le nombre suivant est 0 ou non. Il va donc falloir parcourir toute la suite pour savoir si le nombre est nul, mais on n'a plus affaire à un algorithme : un algorithme doit s'arrêter au bout d'un certain temps, même si ce temps est très grand.

Une conséquence est que la propriété bien connue $(y < x) \vee (x \leq y)$ n'est pas vraie pour tous les couples (x,y), autrement dit la relation d'ordre sur les nombres calculables n'est pas totale. Supposons un algorithme censé étudier cette propriété : pour beaucoup de ces couples, quand les nombres sont très différents, l'algorithme saura le faire ; mais on pourra toujours imaginer deux nombres qui échapperont à l'algorithme.

Par contre un résultat important (en analyse constructive, on a le souci de mettre en évidence les résultats qui ne sont plus vrais, mais aussi les résultats que l'on peut récupérer) : si $x < y$, il existe un rationnel a tel que $x < a < y$. On retrouve la densité des rationnels.

3.3. Les fonctions calculables

Le théorème du maximum est faux en analyse constructive : une fonction continue sur un segment admet une borne supérieure, mais cette borne supérieure n'est pas nécessairement un maximum.

Le théorème des valeurs intermédiaires n'est pas vrai en général (on a vu précédemment que ce résultat était connu de Brouwer). Mais on a une version affaiblie :

Si f est continue sur [0,1] avec $f(0) < f(1)$, alors

$$\forall y \in [\mathrm{f}(0), \mathrm{f}(1)], \forall \varepsilon > 0, \exists x \in [0,1] : |\mathrm{f}(x) - y| < \varepsilon.$$

On ne peut pas trouver un x tel que $f(x) = y$, mais on peut trouver un nombre x tel que $f(x)$ soit aussi proche que l'on veut de cette valeur.
L'existence d'un x tel que $f(x) = y$ sera vraie si on ajoute des conditions supplémentaires, par exemple lorsque f est strictement croissante.

Je terminerai par un résultat sensationnel :

Théorème de continuité. Si f est définie sur un segment $[a,b]$, alors f est continue sur $[a,b]$.

Autrement dit, en analyse constructive, il n'existe pas de fonction discontinue qui soit partout définie. Pensez à la fonction de Dirac positive d'un côté de 0 et négative de l'autre. C'est justement ce qui ne marche pas dans les relations : on va avoir un endroit autour de 0 où on ne pourra pas calculer la fonction réellement. Les physiciens sont quand même ravis car quand ils utilisent la fonction de Dirac, ils savent très bien qu'ils ne savent pas ce qui se passe quand on passe de 0 à 1. Il y a bien une continuité mais elle est absolument imprévisible.

Conclusion

Au début du 19e siècle on pensait que l'arithmétique et la géométrie euclidienne étaient – comme beaucoup d'autres sciences – une vérité. Mais à la fin de ce siècle, cette illusion avait disparu.

Le point de vue admis depuis presque unanimement est que les mathématiques n'ont plus pour but de découvrir une vérité, mais d'élaborer des théories consistantes, c'est-à-dire non contradictoires : à partir de certains axiomes, démontrer des théorèmes. Bien entendus, les théorèmes peuvent dépendre de la théorie étudiée : par exemple, la somme des angles d'un triangle n'a pas la même valeur en géométrie euclidienne, hyperbolique ou elliptique. Mais, plus sournoisement, la validité des théorèmes dépend des modes de démonstration : par exemple, un intuitionniste rejettera les démonstrations par l'absurde. Et même les mots du langage courant – par exemple, le mot « existe » – n'ont pas le même sens pour tout le monde. On peut donc penser qu'apparaissent un grand nombre de théories distinctes et, à la limite, que chaque mathématicien a des croyances différentes.

Or il n'en est rien : le point de vue hilbertien dont le bourbakisme n'est qu'un avatar semble avoir rallié la presque totalité des mathématiciens et ceci malgré les théorèmes d'incomplétude de Gödel qui auraient dû mettre un sérieux frein aux idées de Hilbert. Pour expliquer ce phénomène, on peut évidemment invoquer un comportement sectaire, mais on peut proposer d'autres arguments, en particulier ceux de simplicité et d'efficacité : une théorie a plus de chances d'être admise si elle repose sur un système d'axiomes simples et si elle fournit beaucoup de résultats jugés intéressants par l'ensemble des personnes concernées. Ces idées et le poids écrasant de certains mathématiciens peuvent expliquer le succès de l'école bourbakiste.

Mais un autre courant de pensée peut être décelé, celui des mathématiciens appliqués pour lesquels les théories mathématiques peuvent servir de modèles à d'autres domaines de pensée. Comme exemple important on peut citer les travaux de Kolmogorov qui relia le domaine des probabilités à la théorie de la mesure. Très vite cette idée s'avéra très féconde et fournit par exemple un modèle mathématique du mouvement brownien.

L'importance des mathématiques appliquées a été évidemment amplifiée par le développement des ordinateurs : la puissance de calcul ainsi obtenue allait-elle permettre de grandes avancées ? On développa alors en particulier des logiciels de calcul formel de plus en plus élaborés, mais on s'aperçut très vite que leur emploi posait de nombreux problèmes comme le montre la quantité d'articles écrits sur ce sujet. Le développement des mathématiques constructives peut fournir un cadre plus adapté que les mathématiques formelles, mais, dans la lignée de cet article, on peut aller plus loin et suggérer un quasi antagonisme entre les mathématiques formalistes et l'informatique puisque, dans cette dernière, l'infini ne peut être que potentiel – la philosophie des grecs réapparaît.

Il me reste à espérer que notre enseignement fasse une place aux théories non orthodoxes. Ceci donnerait une image des mathématiques plus vivante et moins rébarbative et il est essentiel pour l'avenir de notre discipline qu'un utilisateur éventuel puisse choisir le modèle dont il a besoin en toute connaissance de causes…

Bibliographie

[Be] Jean-Pierre BELNA. *Histoire de la théorie des ensembles*. Ellipses, 2009.

[Bk] Rudolf BKOUCHE, Jacqueline LUBET & Anne-Marie MARMIER. *Grandeurs et nombres*. IREM de Lille, mai 2009.

[C1] Roger CUPPENS. *Faire de la géométrie en jouant avec Cabri-Géomètre*, Tome I. Brochure APMEP n° 104 (juin 1996).

[C2] Roger CUPPENS. *Avec Cabri-Géomètre II, jouez … et faites de la géométrie*. Brochures APMEP n°s 136 et 137 (juillet 2003).

[C3] Roger CUPPENS. *Faire de la géométrie supérieure en jouant avec Cabri-Géomètre II*. Deuxième édition. Brochures APMEP n°s 124 et 125 (octobre 2003).

[C4] Roger CUPPENS. *Découvrir les géométries non-euclidiennes en jouant avec Cabri-Géomètre II*. Brochures APMEP n°s 160 et 161 (2004).

[C5] Roger CUPPENS. Défense et illustration de la géométrie de Poncelet. *Bulletin de l'APMEP* n° 453 (septembre-octobre 2004) p. 582-596.

[C6] Roger CUPPENS.La stabilité en géométrie. *Bulletin de l'APMEP* n° 478 (2008), p. 671-684.

[Di] Jean DIEUDONNÉ. *Abrégé d'histoire des mathématiques 1700-1900*. Hermann, 1978.

[Du] Jean-Claude DUPERRET. De la modélisation du monde au monde des modèles (1). *Bulletin de l'APMEP* n° 484 (septembre-octobre 2009) p. 648-672.

[Pe] Daniel PERRIN. Quelques réflexions sur la géométrie et son enseignement. *Bulletin de l'APMEP* n° 480 (janvier-février 2009) p. 83-92.

[Pr] André PRESSIAT, A. La place des grandeurs dans la construction des mathématiques. *Bulletin de l'APMEP* n° 483 (juillet-août 2009) p. 467-490

Variations sur un thème de Fermat

(de Fermat à CABRI en passant par Galois)

Rudolf Bkouche[*]

Introduction

Dans l'appendice à son « Introduction aux Lieux Plans et Solides »[1] Fermat explique comment la résolution d'une équation du troisième ou du quatrième degré se ramène à l'intersection de deux coniques. Dans un article ultérieur, la « Dissertation en trois parties »[2], Fermat montre de façon générale que la résolution d'une équation algébrique se ramène à la recherche de l'intersection de deux courbes algébriques. On peut alors classer les équations en fonction du degré des courbes qui interviennent dans leur résolution. On retrouve ainsi le fait que la trisection de l'angle ou la construction de la double moyenne proportionnelle se ramène à l'intersection de deux coniques. On peut ainsi montrer que la construction de l'heptagone régulier se ramène à l'intersection de deux coniques et la construction de l'hendécagone régulier (onze côtés) à l'intersection d'une conique et d'une cubique.

On voit ainsi comment les logiciels de géométrie dynamique en permettant de construire des intersections de courbes algébriques prolongent ainsi les classiques constructions à la règle et au compas, permettant ainsi de résoudre les grands problèmes de la géométrie grecque[3]. Par exemple, le logiciel CABRI II que nous avons utilisé pour cet article, en permettant de construire des intersections de coniques, conduit à la construction des solutions des équations des troisième et quatrième degrés et aux constructions géométriques associées : trisection d'un angle, construction de l'heptagone régulier, double moyenne proportionnelle[4].

On peut intégrer ces résultats dans le cadre d'une théorie de Galois générale. En particulier on peut prolonger le résultat de Gauss sur les constructions de polygones réguliers, la théorie de Galois permettant de définir les degrés minimaux des courbes permettant de construire les polygones réguliers.

(*) Irem de Lille. rbkouche@wanadoo.fr

(1) Pierre de Fermat, « Introduction aux Lieux Plans et Solides », in *Œuvres de Fermat,* tome troisième, p. 96-101.

(2) Pierre de Fermat, « Dissertation en trois parties », in *Œuvres de Fermat*, tome troisième, p. 109-120.

(3) On peut trouver ces problèmes dans les ouvrages cités de Pappus d'Alexandrie et d'Eutocius. Pour une approche historique de ces problèmes nous renvoyons au premier chapitre des *Leçons sur les constructions géométriques* de Lebesgue.

(4) Sur les constructions de coniques et de cubiques sur CABRI nous renvoyons aux ouvrages de Roger Cuppens cités en bibliographie.

Résolution des équations et intersections de courbes

Soit P un polynôme de degré n ; on peut écrire

$$\mathrm{P}(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n .$$

On se propose de résoudre l'équation

$$\mathrm{P}(x) = 0.$$

On notera $y = x^2$.
– Si n est impair, on notera $n = 2p - 1$, auquel cas on peut écrire

$$\mathrm{P}(x) = xy^{p-1} + a_1 y^{p-1} + \ldots + a_{n-2} y + a_{n-1} x + a_n .$$

– Si n est pair, on notera $n = 2p$, auquel cas on peut écrire

$$\mathrm{P}(x) = y^p + a_1 xy^{p-1} + \ldots + a_{n-2} y + a_{n-1} x + a_n .$$

On appellera courbe associée à l'équation la courbe d'équation

$$\mathrm{F}(x, y) = 0$$

où

$$\mathrm{F}(x, y) = xy^{p-1} + a_1 y^{p-1} + \ldots + a_{n-2} y + a_{n-1} x + a_n$$

dans le cas où n est impair, et

$$\mathrm{F}(x, y) = y^p + a_1 xy^{p-1} + \ldots + a_{n-2} y + a_{n-1} x + a_n .$$

dans le cas où n est pair.

Dans les deux cas, la résolution de l'équation $\mathrm{P}(x) = 0$ revient à chercher les points d'intersection de la parabole d'équation $y = x^2$ et d'une courbe de degré p.
On trouve ainsi $2p$ points. Lorsque n est pair, $2p = n$ et on a bien le nombre de solutions. Lorsque n est impair on trouve $2p = n + 1$ points d'intersection dont le point à l'infini dans la direction Oy qui ne correspond pas à une solution de l'équation donnée.
Lorsque n est impair, on peut aussi se ramener à l'équation de degré $n + 1$

$$x\,\mathrm{P}(x) = 0.$$

On trouve ainsi $n + 1$ points d'intersection dont l'origine des coordonnées, mais ce point ne correspond pas à une solution sauf si la parabole et la courbe correspondante à l'équation sont tangentes à l'origine.

On peut résumer les remarques ci-dessus de la façon suivante :
– les équations de degrés 3 et 4 se ramènent à l'intersection d'une parabole et d'une conique,
– les équations de degrés 5 et 6 se ramènent à l'intersection d'une parabole et d'une cubique,
…

– les équations de degré $2p - 1$ et $2p$ se ramènent à l'intersection d'une parabole et d'une courbe de degré p.
La question se pose alors, une équation de degré n étant donnée, de réduire le degré des courbes intervenant dans sa résolution.

Équations du troisième degré et du quatrième degré

Soit l'équation du troisième degré

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0.$$

Alors les racines de l'équation sont les abscisses des points d'intersection de la parabole et de l'hyperbole d'équations respectives

$$y = x^2,$$

$$xy + ay + bx + c = 0.$$

Soit l'équation du quatrième degré

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0.$$

Alors les racines de l'équation sont les abscisses des points d'intersection des deux coniques d'équations respectives

$$y = x^2,$$

$$y^2 + axy + by + cx + d = 0.$$

Si $a \neq 0$, la seconde courbe est une hyperbole.
Si $a = 0$, la seconde courbe est une parabole dont l'axe est parallèle à Ox. Il s'ensuit que le faisceau défini par les deux paraboles dont les axes sont perpendiculaires contient un cercle. De façon précise les racines sont les abscisses des points d'intersection d'une parabole et d'un cercle d'équations respectives

$$y = x^2,$$

$$x^2 + y^2 + cx + (b-1)y + d = 0.$$

On peut aussi définir les racines comme les abscisses des points d'intersection d'un cercle et d'une hyperbole équilatère d'équations respectives

$$x^2 + y^2 + cx + (b-1)y + d = 0,$$

$$y^2 - x^2 + cx + (b+1)y + d = 0.$$

On sait que l'on peut toujours se ramener au cas $a = 0$; autrement dit la résolution d'une équation du quatrième degré se ramène à l'intersection d'une parabole et d'un cercle.

Soit l'équation du troisième degré

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0.$$

On lui associe l'équation du quatrième degré

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx = 0,$$

ce qui implique que les racines de l'équation sont encore définies par l'intersection d'une parabole et d'un cercle ou encore d'un cercle et d'une hyperbole équilatère.

Division des angles

Soit θ un angle ; on a la relation de Moivre

$$\cos n\theta + \mathrm{i}\sin n\theta = (\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^n ,$$

ce qui implique les relations

$$\cos n\theta = \cos^n\theta - \mathrm{C}_n^2\cos^{n-2}\theta\sin^2\theta + \mathrm{C}_n^4\cos^{n-4}\theta\sin^4\theta + \ldots,$$

$$\sin n\theta = n\cos^{n-1}\theta\sin\theta - \mathrm{C}_n^3\cos^{n-3}\theta\sin^3\theta + \ldots,$$

où les C_n^k sont les coefficients binomiaux.

Notons que cos $n\theta$ s'exprime comme un polynôme en cos θ. Nous noterons

$$\cos n\theta = \mathrm{R}_n(\cos\theta)$$

où R_n est un polynôme de degré n.

Lorsque n est impair, sin $n\theta$ s'exprime comme un polynôme en sin θ. Dans ce cas, nous noterons

$$\sin n\theta = \mathrm{S}_n(\sin\theta)$$

où S_n est un polynôme de degré n.

Quelques calculs

On peut écrire

$$(x + \mathrm{i}\,y)^n = \mathrm{P}_n(x,y) + \mathrm{i}\,\mathrm{Q}_n(x,y)$$

où

$$\mathrm{P}_n(x,y) = x^n - \mathrm{C}_n^2 x^{n-2}y^2 + \ldots,$$

$$\mathrm{Q}_n(x,y) = nx^{n-1}y - \mathrm{C}_n^3 x^{n-3}y^3 + \ldots.$$

Ainsi P_n est un polynôme de degré n, pair en y et Q_n est un polynôme de degré n, impair en y.

Supposons n impair et notons $n = 2m + 1$. Dans ce cas les polynômes $x\mathrm{P}_n$ et $y\mathrm{Q}_n$ sont homogènes de degré $n + 1$, pairs en x et en y. Si on note $u = x^2$ et $v = y^2$, on peut écrire

$$x\mathrm{P}_n(x,y) = \mathrm{C}_n(u,v),$$

$$y\mathrm{Q}_n(x,y) = \mathrm{D}_n(u,v)$$

où C_n et D_n sont des polynômes homogènes de degré $m + 1$.
On vérifie aisément la relation

$$Q_n(x,y) = (-1)^m P_n(x,y),$$

ce qui implique la relation

$$D_n(u,v) = (-1)^m C_n(u,v).$$

On en déduit que le polynôme $u + v$ divise le polynôme $C_n + D_n$, ce qui permet d'écrire

$$C_n(u,v) + D_n(u,v) = (u+v)\,A_n(u,v)$$

où A_n est un polynôme homogène de degré m.

Division des angles

Soit α un angle ; on se propose de déterminer les angles θ tels que

$$n\theta = \alpha.$$

Notons que si $n = pq$, la division par n se décompose en une division par p et une division par q. Si on note $n = 2^k l$ où l est un nombre impair, alors la division par n se décompose en une division par 2^k et une division par l.
Lorsque $n = 2^k$, alors la division se décompose en une suite de divisions par 2, ce qui se fait à la règle et au compas.
Lorsque $n = 2m + 1$, la division par n se réduit à la résolution des équations

$$\cos\alpha = R_n(x),$$

$$\sin\alpha = S_n(y)$$

où l'on a posé

$$x = \cos\theta, \quad y = \sin\theta.$$

Soit (x,y) une solution des équations ci-dessus, alors le point de coordonnées (x,y) est un point d'intersection du cercle trigonométrique et de la courbe d'équation

$$A_n\left(x^2, y^2\right) - x\cos\alpha - y\sin\alpha = 0.$$

On obtient ainsi $4m$ points d'intersection.
Soit

$$x = \cos\varphi, \quad y = \sin\varphi$$

une représentation paramétrique du cercle trigonométrique.
Notons que

$$A_n\left(\cos^2\varphi, \sin^2\varphi\right) = \cos\varphi \cdot \cos n\varphi + \sin\varphi \cdot \sin n\varphi = \cos(n-1)\varphi,$$

ce qui implique

$$\cos(n-1)\varphi = \cos(\varphi - \alpha)$$

et par conséquent

$$n\varphi = \alpha,$$

$$(n-2)\varphi = -\alpha.$$

Trisection des angles

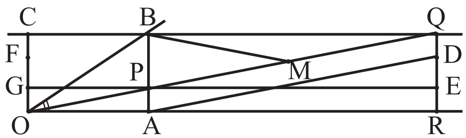
La résolution du problème de la trisection des angles par des intersections de coniques est bien connue. Nous citerons une solution donnée par Pappus dans sa *Collection Mathématique*(5).

Soit xOy un angle, B un point de Oy et A sa projection orthogonale sur Ox.

Soit Oz la demi-droite telle que l'angle xOz soit le tiers de l'angle xOy ; cette demi-droite rencontre le segment AB au point P et la parallèle à la droite Ox passant par le point B au point Q.

Soit M le milieu de PQ. Puisque les angles xOQ et BQO sont égaux (angles alternes-internes), on en déduit aisément que les angles BMO et MOB sont égaux, ce qui implique que le triangle BOM est isocèle et que les côtés BM et BO sont égaux. Il s'ensuit que PQ = 2OB.

Réciproquement si une demi-droite Oz située dans le secteur angulaire xOy rencontre le segment AB en un point P et la parallèle à la droite Ox en un point Q de sorte que PQ = 2OB, on montre aisément que l'angle xOz est le tiers de l'angle xOy.



La trisection de l'angle revient donc à construire une demi-droite Oz telle que PQ = 2OB.

On notera C la projection orthogonale du point O sur la parallèle à la droite Ox passant par le point B. Pour construire le point Q, il suffit de construire le quatrième sommet du parallélogramme APQD ; alors AD = 2OB et par conséquent le point D est sur le cercle de centre A et de rayon 2OB. En outre l'aire du rectangle CQDF est égale à l'aire du rectangle CBAO, ce qui montre que le point D est sur l'hyperbole d'asymptotes les droites CB et CO passant par le point A.

On laisse au lecteur le soin d'écrire la solution analytique du problème.

Résolution analytique

On a les relations

$$\cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta,$$

$$\sin 3\theta = 3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta.$$

Soit $\alpha = 3\theta$, on note $x = \cos\theta$ et $y = \sin\theta$; alors x et y sont les solutions des équations

$$4x^3 - 3x - \cos\alpha = 0,$$

(5) Pappus, *Collection Mathématique*, tome premier, p. 210-213

$$4y^3 - 3y + \sin\alpha = 0.$$

Les points (x,y) cherchés sont sur le cercle trigonométrique d'équation

$$x^2 + y^2 = 1$$

et sur la courbe d'équation

$$x^2 - y^2 - x\cos\alpha - y\sin\alpha = 0$$

qui est une hyperbole équilatère.

Soit

$$x = \cos\varphi, \quad y = \sin\varphi$$

une représentation paramétrique du cercle.
Les points d'intersection du cercle et de l'hyperbole sont définis par l'équation

$$\cos 2\varphi = \cos(\varphi - \alpha).$$

On en déduit les relations

$$3\varphi = \alpha,$$
$$\varphi = -\alpha.$$

La première relation résout la trisection de l'angle.
La seconde relation montre que le quatrième point d'intersection du cercle et de l'hyperbole est le point d'affixe $\exp(-\mathrm{i}\alpha)$.

Polygones réguliers

Les racines de l'équation :

$$z^n - 1 = 0$$

sont les sommets d'un n-gone régulier sur le cercle unité.
Les racines distinctes de 1 sont les racines de l'équation dite *cyclotomique*

$$\Phi_n(z) = z^{n-1} + z^{n-2} + \ldots + z + 1 = 0.$$

C'est une équation réciproque de degré $n - 1$, c'est-à-dire que si α est une racine, alors $1/\alpha$ est une racine.

Quelques calculs préliminaires

On notera $x = z + 1/z$ et, pour tout entier k, $x_k = z^k + 1/z^k$. On montre aisément que pour tout entier k, x_k est un polynôme en x. En particulier

$$x_2 = x^2 - 2,$$
$$x_3 = x^3 - 3x,$$
$$x_4 = x^4 - 4x^2 + 2,$$
$$x_5 = x^5 - 5x^3 + 5x,$$
$$x_6 = x^6 - 6x^4 + 9x^2 - 2.$$

Si $z = \exp i\theta$, alors $x = 2\cos\theta$ et, pour tout entier k, $x_k = 2\cos k\theta$. Alors, pour tout angle θ et tout entier k, $\cos k\theta$ est une fonction polynomiale de $\cos\theta$.

Polynômes cyclotomiques

Lemme : *Si p divise n, alors le polynôme* Φ_p *divise le polynôme* Φ_n.

En effet si $n = pq$, alors

$$\Phi_n(z) = \Phi_p(z)\Phi_q(z^p),$$

ce qui prouve que Φ_p divise Φ_n.

Soit n un entier, on peut écrire $n = 2^k l$ où l est un nombre impair. On a la relation

$$\Phi_n(z) = \Phi_{2^k}(z)\Phi_l\left(z^{2^k}\right) = \Phi_l(z)\Phi_{2^k}\left(z^l\right).$$

Cela nous conduit à considérer deux cas, le cas où n est une puissance de 2 et le cas où n est impair.

Supposons $n = 2^k$; on vérifie la relation

$$\Phi_{2^k}(z) = \prod_{i=0}^{k-1}\left(z^{2^i}+1\right).$$

Ainsi

$$\Phi_2(z) = z+1,$$

$$\Phi_4(z) = (z+1)\left(z^2+1\right),$$

$$\Phi_8(z) = (z+1)\left(z^2+1\right)\left(z^4+1\right),$$

$$\ldots$$

Supposons $n = 2m+1$. On a la relation

$$\frac{1}{z^m}\Phi_n(z) = x_m + x_{m-1} + \ldots + x + 1$$

et le second membre est un polynôme en x que l'on notera $\Psi_n(x)$.

La résolution de l'équation cyclotomique se réduit ainsi à la résolution de l'équation

$$\Psi_n(x) = 0.$$

Lemme : *Soit n un entier impair ; si p divise n, alors le polynôme* Ψ_p *divise le polynôme* Ψ_n.

Supposons $n = pq$ où $n = 2m+1$, $p = 2r+1$, $q = 2s+1$. On a la relation

$$\Phi_n(z) = \Phi_p(z)\Phi_q(z^p),$$

et par conséquent

$$z^m \Psi_n(x) = z^r \Psi_p(x) z^{ps} \Psi_q(x_p),$$

Puisque $m = r + ps$, on a la relation

$$\Psi_n(x) = \Psi_p(x) \Psi_q(x_p),$$

ce qui prouve que Ψ_p divise Ψ_n.

Pour résoudre l'équation cyclotomique, il suffit donc de résoudre les équations cyclotomiques pour les entiers impairs et pour les puissances de 2.

Exemples

– $n = 3$ (triangle équilatéral)

Dans ce cas

$$\Phi_3(z) = z^2 + z + 1,$$

$$\Psi_3(x) = x + 1.$$

– $n = 5$ (pentagone régulier)

$$\Phi_5(z) = z^4 + z^3 + z^2 + z + 1,$$

$$\Psi_5(x) = x^2 + x - 1.$$

– $n = 7$ (heptagone régulier)

$$\Phi_7(z) = z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1,$$

$$\Psi_7(x) = x^3 + x^2 - 2x - 1.$$

– $n = 9$ (ennéagone régulier)

$$\Phi_9(z) = z^8 + z^7 + z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1,$$

$$\Psi_9(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 - 2x + 1.$$

– $n = 11$ (hendécagone régulier)

$$\Phi_{11}(z) = z^{10} + z^9 + z^8 + z^7 + z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1,$$

$$\Psi_{11}(x) = x^5 + x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 3x + 1.$$

– $n = 13$

$$\Phi_{11}(z) = z^{12} + z^{11} + z^{10} + z^9 + z^8 + z^7 + z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1,$$

$$\Psi_{13}(x) = x^6 + x^5 - 5x^4 - 4x^3 + 6x^2 + 3x - 1.$$

Constructions géométriques

On notera

$$\theta_n = \frac{2\pi}{n}.$$

Alors θ_n est l'angle sous-tendant le côté du n-gone régulier Π_n.
Supposons que $n = pq$, les entiers p et q étant premiers entre eux. Il existe donc deux entiers relatifs r et s tels que

$$rp + sq = 1,$$

ce qui implique la relation

$$r\theta_q + s\theta_p = \theta_n.$$

On en déduit que si on sait construire Π_p et Π_q, on sait construire Π_n.

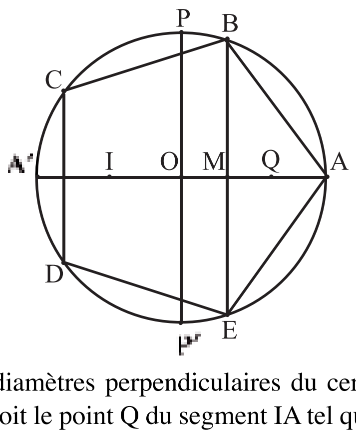
Pentagone régulier

Le polynôme Ψ_5 étant du second degré, le pentagone régulier est constructible à la règle et au compas. On obtient alors la relation

$$\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}.$$

Pour construire le pentagone régulier, il suffit alors de construire sur le cercle trigonométrique le point d'abscisse $\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

On peut procéder de la façon suivante :



Soient AA′ et PP′ deux diamètres perpendiculaires du cercle trigonométrique, I le milieu du segment A′O. Soit le point Q du segment IA tel que IQ = IP′ et M le milieu du segment OQ. Alors

$$\text{OM} = \cos\frac{2\pi}{5},$$

ce qui permet de construire le pentagone régulier ABCDE.

Heptagone régulier

Le polynôme Ψ_7 étant du troisième degré, la construction de l'heptagone régulier se réduit à des intersections de coniques.
Pour construire l'heptagone régulier on doit construire les racines de l'équation

$$x^3 + x^2 - 2x - 1 = 0,$$

ce qui revient à chercher les points d'intersection des deux courbes d'équations respectives :

$$y = x^2,$$
$$xy + y - 2x - 1 = 0.$$

Notons que ces deux courbes ont un point commun à l'infini dans la direction de Oy. Reste alors trois points d'intersection dont les abscisses sont les doubles des abscisses des sommets de l'heptagone.

Ennéagone régulier

Le polynôme Ψ_9 étant du quatrième degré, la construction de l'ennéagone régulier se réduit à des intersections de coniques.
Pour construire l'ennéagone régulier on doit construire les racines de l'équation

$$x^4 + x^3 - 3x^2 - 2x + 1 = 0,$$

ce qui revient à chercher les points d'intersection de la parabole et de l'hyperbole d'équations respectives

$$y = x^2,$$
$$y^2 + xy - 3y - 2x + 1 = 0.$$

On peut aussi procéder de la façon suivante. On construit le triangle équilatéral de sommet 1, j, j^2, et on trisecte l'angle $2\pi/3$, ce qui revient, si on s'appuie sur la trisection de l'angle défini ci-dessus, à chercher les points d'intersection distincts du point d'affixe 1 du cercle trigonométrique et de l'hyperbole équilatère d'équation

$$2\left(x^2 - y^2\right) + x - y\sqrt{3} = 0.$$

Hendécagone régulier

Le polynôme Ψ_{11} étant du cinquième degré, la construction de l'hendécagone régulier se réduit à l'intersection d'une parabole et d'une cubique.
Pour construire l'hendécagone régulier on doit construire les racines de l'équation

$$x^5 + x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 3x + 1 = 0,$$

ce qui revient à chercher les points d'intersection de la parabole d'équation

$$x^2 - y = 0$$

et de la cubique d'équation

$$xy^2 + y^2 - 4xy - 3y + 3x + 1 = 0.$$

Ces deux courbes ont en commun le point à l'infini dans la direction Oy. Reste alors cinq points d'intersection dont les abscisses sont les doubles des abscisses des sommets de l'hendécagone.

On sait qu'une cubique peut être paramétrée par des fonctions elliptiques, ce qui permet d'exprimer les coordonnées des sommets de l'hendécagone régulier en termes de fonctions elliptiques.

Une seconde construction

Diviser le cercle en n parties égales, c'est résoudre l'équation

$$n\theta = 0.$$

Il suffit de résoudre l'équation pour n impair (cf. ci-dessus).
Notons $n = 2m + 1$.
Si on note

$$x = \cos\theta, \quad y = \sin\theta,$$

alors les solutions sont des points d'intersection du cercle trigonométrique et de la courbe d'équation

$$\mathrm{A}_n\left(x^2, y^2\right) - x = 0.$$

Soit

$$x = \cos\varphi, \quad y = \sin\varphi$$

une représentation paramétrique du cercle trigonométrique ; alors les points d'intersection des deux courbes sont donnés par l'équation

$$\cos(n-1)\varphi = \cos\varphi,$$

ce qui implique

$$(n-1)\varphi = \pm\varphi,$$

soit les équations

$$n\varphi = 0,$$

$$(n-2)\varphi = 0.$$

La première définit les sommets d'un n-gone régulier.
La seconde définit les sommets d'un $(n-2)$-gone régulier.
On peut alors montrer si $n > 3$ la relation

$$\mathrm{A}_n\left(x^2, 1-x^2\right) - x = (x-1)\Psi_n(2x)\Psi_{n-2}(x).$$

Pour vérifier cette relation, on remarque que les deux termes ont les mêmes racines et on montre que les termes constants sont égaux. On peut aussi poser $x = \cos\varphi$ et on remarque que les deux termes sont égaux à $\cos(n-1)\varphi - \cos\varphi$. Nous laissons le détail des calculs au lecteur.

Les moyennes proportionnelles

On appelle *suite proportionnelle* une suite $(a, x_1, x_2, \ldots, x_n, b)$ telle que

$$\frac{a}{x_1} = \frac{x_1}{x_2} = \ldots = \frac{x_{n-1}}{x_n} = \frac{x_n}{b}.$$

Insérer n moyennes proportionnelles entre deux quantités a et b, c'est chercher n quantités x_1, x_2, …, x_n telles que la suite $(a, x_1, x_2, \ldots, x_n, b)$ soit proportionnelle, ce qui implique la relation

$$x_1^{n+1} = a^n b$$

et pour tout $p \leq n$ on a la relation

$$x_p = \frac{x_1^p}{a^{p-1}}.$$

On dit que la suite $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ est la suite des n moyennes proportionnelles entre a et b. Lorsque les grandeurs sont des nombres positifs, x_1 est la solution positive de l'équation

$$x_1^{n+1} = a^n b.$$

– Le cas $n = 1$ (moyenne proportionnelle)

On cherche x tel que

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{b},$$

soit

$$x^2 = ab.$$

– Le cas $n = 2$ (double moyenne proportionnelle)

On cherche x et y tels que

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b},$$

soit

$$x^3 = a^2 b.$$

Pour résoudre cette équation on est amené à chercher l'intersection de deux coniques.

On peut aussi considérer deux segments orthogonaux OA et OB de longueurs respectives a et b et chercher dans le repère orthonormé défini par les demi-droites OA) et OB) le point de coordonnées (x, y).
Les moyennes proportionnelles x et y vérifient les équations

$$x^2 = ay,$$
$$y^2 = bx,$$

ce qui montre que le point de coordonnées (x, y) est le second point d'intersection des paraboles définies par les équations ci-dessus.
Notons que ce point est aussi sur le cercle d'équation

$$x^2 + y^2 = ay + bx,$$

c'est-à-dire le cercle de diamètre AB.

– Le cas $n = 3$

On cherche x, y, z tels que

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{z} = \frac{z}{b},$$

Dans ce cas y est moyenne proportionnelle de a et b, ce qui ramène le problème à résoudre des équations du second degré.

– Le cas général.

On cherche une suite $x_1, x_2, \ldots, x_n$ telle que

$$\frac{a}{x_1} = \frac{x_1}{x_2} = \ldots = \frac{x_{n-1}}{x_n} = \frac{x_n}{b}.$$

Alors x_1 est l'unique solution positive de l'équation $x^{n+1} = a^n b$.
On obtient ainsi une équation de degré $n + 1$ et on sait ramener la résolution de cette équation à la recherche des points d'intersection de deux courbes algébriques (cf. ci-dessus).
Comme on s'intéresse, dans le cas où a et b sont des nombres positifs, à la seule solution positive de l'équation, on peut poser la question de minimiser le degré des courbes permettant de résoudre le problème.
Supposons que $p + 1$ divise $n + 1$; on peut écrire

$$n + 1 = q(p + 1)$$

et la suite $x_q, x_{2q}, \ldots, x_{pq}$ est la suite des p moyennes proportionnelles entre a et b.
Ainsi il suffit de résoudre la question lorsque $n + 1$ est un nombre premier.
Lorsque $n + 1$ est une puissance de 2, le problème se réduit à une suite de recherches de moyennes proportionnelles. Lorsque a et b sont des longueurs, le problème est résoluble à la règle et au compas.

La méthode de Fermat

Dans la « Dissertation en trois parties » Fermat a indiqué une méthode générale pour réduire le degré des courbes. S'il a développé sa méthode dans des cas particuliers(6), on peut en donner le schéma général.
La question des n moyennes proportionnelles se ramène à la solution de l'équation

$$x^{n+1} = a^n b.$$

On introduit une nouvelle variable y en égalant les deux termes de l'équation ci-dessus à l'expression $x^k y^l b$ où l'on a imposé la relation

$$k + l = n,$$

ce qui conduit aux deux équations

(6) Pierre de Fermat, « Dissertation en trois parties », in *Œuvres de Fermat*, tome troisième, p. 117-120.

$$x^{l+1} = y^l b,$$
$$a^n = x^k y^l.$$

Soit d un diviseur commun de k et l ; on peut alors écrire

$$n = dm, \quad k = dp, \quad l = dq.$$

On est donc amené à chercher les points d'intersection des courbes d'équations

$$x^{l+1} = y^l b,$$
$$x^p y^q = a^m.$$

On a ainsi réduit le degré des équations et par conséquent des courbes résolvant le problème.

Une construction de Héron

Dans la *Collection Mathématique*, Pappus donne une construction géométrique de la double moyenne proportionnelle, construction qu'il attribue à Héron[(7)].

Soit OA et OB deux segments perpendiculaires ; on définit sur des demi-droites OA) et OB) les points P et Q tels que

$$\frac{\mathrm{OA}}{\mathrm{BQ}} = \frac{\mathrm{BQ}}{\mathrm{AP}} = \frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{OB}}.$$

On en déduit la relation

$$\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{BQ}} = \frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{AC}}$$

qui montre que les triangles rectangles BCQ et APC sont semblables et que les points P, C, Q sont alignés.
Les triangles BCQ et APC étant semblables au triangle OPQ, on en déduit la relation

$$\frac{\mathrm{OP}}{\mathrm{OQ}} = \frac{\mathrm{BQ}}{\mathrm{AP}},$$

soit

$$\mathrm{PO} \cdot \mathrm{PA} = \mathrm{QO} \cdot \mathrm{QB}.$$

Autrement dit, les points P et Q ont même puissance par rapport au cercle circonscrit au rectangle OACB, ce qui implique que les segments IP et IQ sont égaux.
Réciproquement, si une droite passant par C coupe les demi-droites OA) et OB) en deux points P et Q tels que les segments IP et IQ soient égaux alors

$$\frac{\mathrm{OA}}{\mathrm{BQ}} = \frac{\mathrm{BQ}}{\mathrm{AP}} = \frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{OB}}.$$

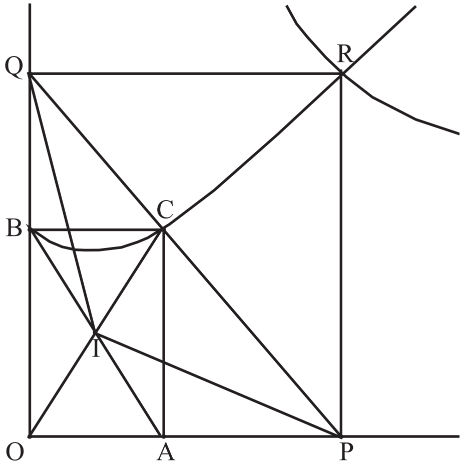
On laisse au lecteur le plaisir de démontrer cette réciproque.

---

(7) Pappus, *La Collection Mathématique*, tome premier, p. 45-47.

La détermination d'une double moyenne proportionnelle entre OA et OB revient donc à construire une droite passant par le point C et coupant les demi-droites OA) et OB) en deux points P et Q tels que les segments IP et IQ soient égaux.
Dans le repère défini par les demi-droites OA) et OB) notons

$$OA = a, \quad OB = b, \quad OP = x, \quad OQ = y.$$



Alors le pont C a pour coordonnées (a,b) ; nous noterons R le point de coordonnées (x,y). La problème revient à construire le point R.

L'égalité des segments IP et IQ implique la relation

$$x^2 - y^2 - ax + by = 0.$$

Pour que les points C, P, Q soient alignés il faut et il suffit qu'on ait la relation

$$(x-a)(y-b) = ab.$$

Le point R cherché est donc un point d'intersection des deux hyperboles équilatères d'équations

$$x^2 - y^2 - ax + by = 0,$$

$$(x-a)(y-b) = ab.$$

De façon précise c'est le point d'intersection qui se trouve dans le premier quadrant.

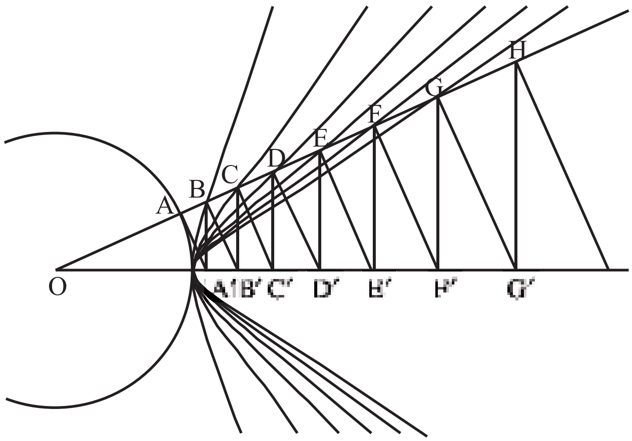
Une construction de Descartes

Dans son essai « La Géométrie » Descartes donne une construction mécanique d'une suite proportionnelle(8).
Soit A un point décrivant un cercle de centre O, la tangente en A au cercle trajectoire du point A rencontrant une demi-droite fixe Ox en un point A′. La perpendiculaire en A′ rencontre la demi-droite OA) en un point B, la perpendiculaire en B à la demi-

(8) René Descartes, « La Géométrie » in *Œuvres de Descartes*, volume VI, p. 391-392.

droite OA) rencontre la demi-droite fixe en un point B′ et ainsi de suite.
On définit ainsi deux séries de points A, B, C, … et A′, B′, C′, … respectivement situés sur la demi-droite OA) et sur la demi-droite fixe Ox, la longueur OA étant constante.
On a les relations

$$\frac{OA}{OA'} = \frac{OA'}{OB} = \frac{OB}{OB'} = \frac{OB'}{OC} = \dots$$



Ainsi la suite de longueurs OA, OA′, OB, OB′, OC, OC′, … est une suite proportionnelle.
On en déduit un procédé de construction mécanique d'une suite proportionnelle.

Un point de vue galoisien

On peut définir une *théorie de calcul* comme la donnée d'un ensemble **R**, le domaine de rationalité, et d'un ensemble d'opérations **O** sur le domaine de rationalité.

Exemples

Un anneau, c'est-à-dire un ensemble muni des lois d'addition et de multiplication.
L'anneau des fonctions polynomiales d'une variable réelle muni des lois d'addition et de multiplication et de l'opération de dérivation.
Le même anneau auquel on a ajouté les opérations définies par les fonctions élémentaires : logarithme, exponentielle et fonctions associées.

Fonction

Une *fonction* est une expression constituée par des éléments du corps de rationalité et des indéterminées et reliée par des opérations(9).
Dans la suite nous ne considérons, pour simplifier l'exposé, que des fonctions à une indéterminée.

(9) C'est une forme de la définition donnée par Euler dans son *Introduction à l'Analyse Infinitésimale*, p. 2.

Nous noterons F une fonction à une indéterminée x. Soit a un élément du domaine de rationalité ; si nous substituons dans F l'élément a à l'indéterminée x, on obtient un élément du domaine de rationalité que nous noterons F(a) : valeur de F en l'élément a.

Équation

Soit F une fonction à une indéterminée ; résoudre l'*équation*

$$F(x) = 0,$$

c'est trouver des éléments a tels que $F(a) = 0$. Ces éléments sont appelés les *solutions* de l'équation.
On appelle *solution rationnelle* toute solution qui appartient au domaine de rationalité. En général il n'existe pas de solution rationnelle comme le montre par exemple le cas simple des équations du second degré.
Se pose alors la question de déterminer des solutions, ce qui exige de construire des extensions du domaine de rationalité. Une telle extension est définie comme la donnée d'un ensemble contenant le domaine de rationalité donné et d'un prolongement des opérations à ce nouvel ensemble. Résoudre une équation revient à construire une extension dans lequel l'équation a des solutions. En fait la théorie de Galois se propose de construire des extensions ayant suffisamment de solutions, la difficulté étant de définir ce qu'on entend par « suffisamment de solutions ».
Dans le cas des corps, c'est la classique théorie de Galois. Dans ce cas, les fonctions sont les polynômes à une indéterminée (équations algébriques) et une extension associée à une équation a suffisamment de solutions si le nombre de solutions est égal au degré de l'équation.
Dans le cas des corps différentiels, c'est la théorie de Picard-Vessiot. Dans ce cas, les fonctions sont les polynômes différentiels linéaires (équations différentielles linéaires), les solutions constituent un espace vectoriel linéaire sur le corps des constantes et une extension associée à une équation différentielle a suffisamment de solutions si l'ensemble des solutions est un espace vectoriel sur le corps des constantes de dimension égale à l'ordre de l'équation.

Théorie de Galois et constructions géométriques

Dans ses *Recherches Arithmétiques*(10) Gauss a déterminé les polygones réguliers constructibles à la règle et au compas. On a montré ci-dessus que si $n = pq$ où p et q sont premiers entre eux et si les polygones réguliers Π_p et Π_q sont constructibles à la règle et au compas, alors le polygone Π_n est constructible à la règle et au compas. Il suffit donc de déterminer les n-gones constructibles à la règle et au compas où n est un nombre premier ou une puissance d'un nombre premier. Gauss a montré que ces entiers sont soit les puissances de 2, soit les nombres premiers de la forme

$n_k = 2^{2^k} + 1$.

Les nombres $n_k = 2^{2^k} + 1$ sont appelés les nombres de Fermat ; on sait que les nombres n_1, n_2, n_3, n_4 sont premiers. Le nombre n_5 ne l'est pas et on ne sait pas s'il

(10) Gauss, *Recherches arithmétiques*, p. 482-489.

existe des nombres de Fermat premiers pour $k \geq 5$.
Il est clair que si $n = 2^k$, alors Π_n est constructible à la règle et au compas. Reste à montrer le théorème de Gauss.

Pour montrer le résultat de Gauss on s'appuie sur les remarques suivantes.
Notons d'abord que le polynôme Π_n est constructible à la règle et au compas si et seulement si la résolution de l'équation

$$\Phi_n = 0$$

peut se décomposer en une suite de résolutions d'équations du second degré.

Notons $\mathbb{K}_n$ le corps des racines n-ièmes de l'unité ; c'est un extension de $\mathbb{Q}$ de degré $\varphi(n)$ où φ est l'indicatrice d'Euler (cf ci-dessous). Alors Π_n est constructible à la règle et au compas si et seulement si $\varphi(n)$ est une puissance de 2.
Si n est un nombre premier, $\varphi(n) = n - 1$.
Supposons que Π_n soit constructible à la règle et au compas ; alors on peut construire une tour de corps(11) telle que chacun des corps de la tour soit une extension quadratique du précédent, ce qui montre que $\varphi(n)$ est une puissance de 2, soit $n = 2^k + 1$ et on vérifie aisément que si k n'est pas une puissance de 2, alors $2^k + 1$ n'est pas un nombre premier. Reste à montrer que si n est un nombre premier de Fermat, alors Π_n est constructible à la règle et au compas. En effet, on sait que le groupe de Galois de $\mathbb{K}_n/\mathbb{Q}$ est un groupe cyclique d'ordre $n = 2^{2^k}$, ce qui permet de décomposer la résolution du polynôme Φ_n en une suite de résolutions d'équations du second degré.
Si $n = p^k$ où p est un nombre premier > 2 et k un nombre > 1, alors $\varphi(n) = p^{k-1}(p-1)$, ce qui montre que $\varphi(n)$ n'est pas une puissance de 2.

Pour développer une théorie générale, nous nous appuyons sur le groupe de Galois de l'équation cyclotomique. On peut montrer que le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(\mathbb{K}_n/\mathbb{Q})$ est isomorphe au groupe multiplicatif $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$ de l'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. En effet, l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité constitue un groupe cyclique d'ordre n. On appelle racine primitive tout générateur de ce groupe. Notons $\omega_n = \exp 2i\pi/n$; alors les racines primitives sont ω_n et les puissances ω_n^k où k est un nombre premier avec n, ce qui montre qu'il y a $\varphi(n)$ racines de l'unité. On définit ainsi une bijection de l'ensemble des racines primitives de l'unité dans l'ensemble $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$.
Soit g un élément du groupe de Galois $\mathrm{Gal}(\mathbb{K}_n/\mathbb{Q})$; g est défini par son action sur ω_n et $g(\omega_n)$ est une racine primitive. On définit ainsi une application du groupe $\mathrm{Gal}(\mathbb{K}_n/\mathbb{Q})$ sur l'ensemble $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$.
Soient g et h deux éléments de $\mathrm{Gal}(\mathbb{K}_n/\mathbb{Q})$; on peut écrire

$$g(\omega_n) = \omega_n^k, \quad h(\omega_n) = \omega_n^l,$$

et par conséquent

(11) On rappelle qu'une tour de corps est une suite de corps emboités : $\mathbf{k}_0 \subset \mathbf{k}_1 \subset \ldots \subset \mathbf{k}_n$.

$$hg(\omega_n) = \omega_n^{kl},$$

ce qui montre que l'application de Gal($\mathbb{K}_n/\mathbb{Q}$) dans $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$ est un morphisme de groupe. On vérifie aisément que ce morphisme est un isomorphisme. Il s'ensuit que le degré de $\mathbb{K}_n$ sur $\mathbb{Q}$ est égal à $\varphi(n)$.

La conjugaison complexe est un élément de Gal($\mathbb{K}_n/\mathbb{Q}$) ; plus précisément c'est l'élément qui envoie ω_n dans ω_n^{-1}.

Notons $\mathbb{H}_n$ le sous-corps de $\mathbb{K}_n$ stable par la conjugaison complexe ; c'est le corps des racines de l'équation

$$\Psi_n(x) = 0.$$

Supposons que n soit premier ; alors $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$ est un groupe cyclique d'ordre $n - 1$.

Si on note $n = 2m + 1$, alors $\mathbb{H}_n$ est de degré m sur $\mathbb{Q}$ et le groupe de Galois Gal($\mathbb{H}_n/\mathbb{Q}$) est un groupe cyclique d'ordre m. La décomposition de m permet alors de décomposer la résolution de l'équation

$$\Psi_n(x) = 0$$

en résolutions d'équations de degrés inférieurs. La décomposition de m en facteurs premiers permet donc de déterminer le degré des courbes intervenant dans la construction de Π_n.

Exemples

– $n = 7$. Alors $m = 3$ et la construction de Π_7 se ramène à une intersection de coniques.

– $n = 11$. Alors $m = 5$ et la construction de Π_{11} se ramène à l'intersection d'une conique et d'une cubique.

– $n = 13$. Alors $m = 6$. Le groupe de Galois Gal($\mathbb{H}_{13}/\mathbb{Q}$) est isomorphe au groupe cyclique d'ordre 6.

La résolution de l'équation

$$\Psi_{13}(x) = 0$$

se réduit à la résolution d'une équation d'ordre 2 et d'une équation d'ordre 3, ce qui ramène la construction de Π_{13} à des intersections de courbes de degré au plus 3.

De façon précise, si g est un générateur du groupe Gal($\mathbb{H}_{13}/\mathbb{Q}$), on considère le sous-groupe d'ordre 2 engendré par l'élément g^3 et on note $\mathbb{L}$ le sous-corps invariant par ce groupe.

Notons $\alpha = 2\cos\omega_{13}$. Alors α est un élément primitif de l'extension $\mathbb{H}_{13}/\mathbb{Q}$; il s'ensuit que le sous-corps $\mathbb{L}$ est l'extension de $\mathbb{Q}$ définie par l'équation dont les racines sont $\alpha + g^3(\alpha)$, $g(\alpha) + g^4(\alpha)$, $g^2(\alpha) + g^5(\alpha)$, soit

$$x^3 + x^2 - 4x - 1 = 0.$$

La résolution de cette équation se ramène à l'intersection de deux coniques.

Enfin $\mathbb{H}_{13}$ est une extension quadratique du corps $\mathbb{L}$, ce qui renvoie à une construction à la règle et au compas.

– $n = 17$. Alors $m = 8$. Le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(\mathbb{H}_{17}/\mathbb{Q})$ est isomorphe au groupe cyclique d’ordre 8.
Il s’ensuit que la résolution de l’équation

$$\Psi_{17}(x) = 0$$

se réduit à la résolution d’équations du second degré et que le polygone Π_{17} est constructible à la règle et au compas.

– $n = 19$. Alors $m = 9$. Le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(\mathbb{H}_{19}/\mathbb{Q})$ est isomorphe au groupe cyclique d’ordre 9.
Il s’ensuit que la résolution de l’équation

$$\Psi_{19}(x) = 0$$

se réduit à la résolution d’équations du troisième degré et le polygone Π_{19} peut être construit en utilisant des coniques.

De façon générale, si $n = 2m + 1$ est un nombre premier, le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(\mathbb{H}_n/\mathbb{Q})$ est un groupe cyclique d'ordre m. Il s'ensuit que la résolution de l'équation de l'équation

$$\Psi_n(x) = 0$$

se réduit à la résolution d'équations dont les ordres sont les diviseurs premiers de m.

Supposons que $n = p^k$ où p est un nombre premier.
Pour construire le polygone régulier Π_n, on commence par construire le polygone régulier Π_p. Reste alors à diviser l’arc défini par deux côtés consécutifs en p parties égales et on recommence autant que nécessaire jusqu'à ce qu'on ait obtenu Π_n.

Bibliographie

Roger Cuppens, *Faire de la géométrie supérieure avec CABRI-Géomètre*, tome I, brochure APMEP n° 124, deuxième édition, octobre 2003.

Roger Cuppens, *Faire de la géométrie supérieure avec CABRI-Géomètre*, tome II, brochure APMEP n° 125, deuxième édition, janvier 2004.

René Descartes, « La Géométrie » in *Discours de la Méthode* in *Œuvres de Descartes*, publiées par Charles Adam et Paul Tannery (volume VI) (1896), Vrin, Paris 1996.

Leonard Euler, *Introduction à l’Analyse Infinitésimale*, traduit du latin en français, avec des notes et des éclaircissements, deux tomes, Barrois, Paris 1796, réédition ACL-éditions, Paris 1987.

Eutocius, « Commentaires », in *Archimède*, tome IV, texte établi et traduit par Charles Mugler, Les Belles Lettres, Paris 1972.

Carl-Friedrich Gauss, *Recherches Arithmétiques* (1801), traduites par A.C.M. Poullet-Delisle, Blanchard, Paris 1979.

Pierre de Fermat, *Œuvres de Fermat* (tome troisième), éditées par Paul Tannery et Charles Henry, Gauthier-Villars, Paris 1896.

Henri Lebesgue, *Leçons sur les constructions géométriques*, (professées au Collège de France en 1940-41), préface de Paul Montel (1950), Éditions Jacques Gabay, Paris 1987.

Pappus d'Alexandrie, *La Collection Mathématique* (deux tomes), œuvres traduites pour la première fois en français avec une introduction et des notes par Paul Ver Eecke (1932), nouveau tirage, Blanchard, Paris 1982.

Appendice : Sur les polygones réguliers constructibles à la règle et au traceur de coniques

Après la rédaction de cet article Roger Cuppens m'a fait connaître le théorème de Pierpont qui caractérise les polygones constructibles à la règle et au traceur de coniques. Ce sont les polygones Π_n tels que

$$n = 2^k 3^l \prod_{j=1}^{p} \mathrm{P}_j$$

où les P_j sont des nombres premiers de la forme $2^p 3^q + 1$ (nombres de Pierpont)(12).

Il est clair que les polygones réguliers dont le nombre de côtés est une puissance de 2 ou une puissance de 3 sont constructibles à la règle et au traceur de coniques.

Supposons que le polygone régulier Π_n où n est un nombre premier soit constructible à la règle et au traceur de coniques ; alors l'équation

$$\Psi_n(x) = 0$$

peut être résolue par une suite d'équation de degré ≤ 3, ce qui implique que le groupe de Galois du groupe $\mathrm{Gal}(\mathbb{H}_n/\mathbb{Q})$ est un groupe cyclique admettant une décomposition de Jordan-Hölder dont les quotients sont d'ordre ≤ 3, ce qui implique la relation

$$n - 1 = 2^p 3^q,$$

autrement dit que n est un nombre de Pierpont.

Réciproquement, si n est un nombre premier de Pierpont, alors le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(\mathbb{H}_n/\mathbb{Q})$ est un groupe cyclique admettant une décomposition de Jordan-Hölder dont les quotients sont ≤ 3, et par conséquent l'équation

$$\Psi_n(x) = 0$$

peut être résolue par une suite d'équations de degré ≤ 3, donc le polygone régulier Π_n est constructible à la règle et au traceur de coniques.

Si $n = p^k$ où p est un nombre premier et $k \geq 2$, alors $\varphi(n) = p^{k-1}(p-1)$, ce qui montre que $\varphi(n)$ a un diviseur premier ≥ 5. Il s'ensuit que Π_n n'est pas constructible à la règle et au traceur de coniques.

(12) Roger Cuppens, *Faire de la géométrie supérieure avec CABRI-Géomètre*, tome I, p. 147.

Mathématiques mixtes : géométrie et physique

Michel Carral(*)

Ce thème est un thème très ouvert et très large surtout que les termes « mathématiques » et « physique » ont changé au cours de l'histoire et que l'étude des relations entre sciences mathématiques et sciences physiques (Physique, Mécanique, Astronomie, Géographie, Navigation, etc.) doit prendre en compte les raisons de ces changements. En ce sens ce sera plus les relations entre sciences mathématiques et sciences physiques, que ce soit au niveau des concepts ou des outils que du statut de la géométrie que je vais essayer de traiter.

Nous reviendrons à la signification de ces termes, de la naissance de la géométrie rationnelle avec les géomètres grecs à la révolution scientifique du XVII^{e} siècle et l'époque contemporaine qui a vu la naissance des géométries non-euclidiennes et le développement des méthodes formalistes. Nous ne parlerons pas d'histoire des sciences ou des mathématiques bien que la Science possède une histoire et que la compréhension de celle-ci se construit à travers les chemins par lesquels l'histoire nous enseigne comment ils se sont élaborés. Autrement dit, l'histoire nous indique les problématiques qui ont permis la construction de la connaissance et qui peuvent permettre à un apprenant d'acquérir cette connaissance.

En ce qui concerne la pertinence de l'enseignement des branches de cette Science si nous prenons, par exemple, la géométrie élémentaire qui intervient dans de nombreux chapitres de physique, son enseignement aujourd'hui est contesté depuis la réforme des « mathématiques modernes ». On peut comparer son développement à celui de la mécanique rationnelle, domaine dans lequel se poursuivent des recherches tant théoriques que techniques. Or ces deux disciplines ne sont pas seulement des discours cohérents, elles représentent la réalité et en cela elles sont toujours d'actualité.

Citons Douglas Hofstadter sur sa conception de la géométrie euclidienne et sa nécessité de l'enseigner :

Les gens qui émettent des revendications aussi sèches ne font rien d'autre que révéler la pauvreté de leur imagination… Que serait-il advenu si un physicien émettait la même revendication sur l'épuisement de la mécanique classique (qui fut au summum aux dix-huitième et dix-neuvième siècles, mais a été supplantée par la mécanique quantique durant le premier quart de siècle) ? Un argument apparemment en faveur d'une telle configuration serait que la mécanique classique s'est avérée fausse. Ainsi comment pourrait-il y avoir quelque chose de sensé à travailler encore dans ce domaine ? La faille dans ce raisonnement stupide est que

(*) Professeur émérite de l'Université de Toullouse.
michel.carral@laposte.net

la mécanique classique est un système cohérent interne tout comme un cas limite canonique de la mécanique quantique ; en fait, on ne peut pas espérer comprendre la mécanique quantique sans avoir d'abord absorbé et maitrisé la mécanique classique. Ceci parce que les humains pensent naturellement en termes classiques…

La géométrie euclidienne est un système conséquent interne tout comme un cas limite canonique de la géométrie non-euclidienne ; en fait on ne peut pas espérer comprendre la géométrie non euclidienne sans avoir d'abord absorbé et maitrisé la géométrie euclidienne. Ceci parce que les humains pensent naturellement en termes euclidiens.

La géométrie euclidienne, qu'elle soit applicable ou non à notre univers physique, joue un rôle central en mathématique, et il en sera toujours ainsi.

Note : Pour écrire ce texte je me suis basé principalement sur des textes de R. Bkouche, publiés ou non.

La géométrie élémentaire

L'objet essentiel de la géométrie est la mesure de l'étendue. Or cette mesure ne peut s'effectuer par comparaison directe d'où la nécessité d'accumuler des connaissances pour atteindre cet objectif. En cela on fait appel à des propriétés qui peuvent être classées en deux catégories à savoir **propriétés métriques** et **propriétés descriptives**. La Géométrie ne s'est pas instituée sur cette distinction qui est récente car, dans l'étude de presque toutes les figures, on doit considérer de manière concomitante des propriétés métriques et des propriétés descriptives.

J'ai parlé de « figure », mais qu'est-ce une figure ? C'est une représentation d'un objet physique, c'est-à-dire d'un objet de la connaissance empirique. Mais pas seulement cela : de manière succincte de l'analyse de figures on a des objets élémentaires : « points », « lignes », « triangle », etc. et des relations entre ces objets. Au sens de cette idéalité la Géométrie Élémentaire se situe à la croisée des sciences mathématiques et des sciences physiques, parce que ses objets ont une origine empirique et que son étude résulte d'une méthode déductive. Ainsi on peut considérer la géométrie élémentaire comme participant de la physique des corps solides. Sous la forme donnée par Euclide, la Géométrie Élémentaire apparait comme la première étude rationnelle de phénomènes naturels (les corps solides) devenant un modèle avec la révolution scientifique du XVII^e^ siècle qui fit de la physique un chapitre des mathématiques. Ce développement de la physique s'inscrit dans la continuité de l'œuvre d'Euclide, et cette conception implique que l'enseignement de la géométrie élémentaire participe de l'enseignement des sciences mathématiques et de l'enseignement des sciences physiques.

Mais qu'entend-t-on par les termes « mathématiques » et « physiques » ? Ces termes changèrent avec le temps. Aristote disait dans la « Physique » (livre) :

« … la géométrie, en effet, examine la ligne physique, mais pas en tant que physique, alors que l'optique étudie la ligne mathématique, non pas en tant que mathématique, mais en tant que physique. »

Pour Aristote le terme « physique » renvoie à la nature, c'est-à-dire aux objets de la connaissance empirique, et le terme « mathématique » à la connaissance scientifique, celle que nous atteignons par la démonstration. Il fait une distinction entre l'objet physique donné par la connaissance empirique, ici la ligne considérée comme un objet lumineux, et l'objet mathématique qui intervient dans le discours démonstratif. On peut considérer que c'est *via* l'activité de raisonnement que se constitue l'objet mathématique en tant qu'il se distingue de l'objet de la connaissance empirique ; c'est la démonstration qui donne aux objets leur statut d'idéalité mathématique, et c'est le discours qui modèle les objets. Il faut distinguer entre la chose donnée par la connaissance empirique et l'objet de discours qui la représente.

Au moment des fondements de la théorie de la relativité, de la géométrie non-euclidienne, de la construction de Hilbert, …, Einstein faisant la différentiation entre la géométrie mathématique, c'est-à-dire celle de la construction de Hilbert où le langage des mathématiques est indépendant de toutes significations extérieures au discours mathématique (au moins sur le plan de la méthode), et la géométrie pratique, celle qui relève de la connaissance du monde, soulignait une certaine irréductibilité en disant :

« *Pour autant que les propositions de la mathématique se rapportent à la réalité, elles ne sont pas certaines, et pour autant qu'elles sont certaines, elles ne se rapportent pas à la réalité.* »

Ces deux points de vue posent en fait la même question : c'est la question du lien entre l'expérience sensible et les constructions intellectuelles qui permettent de la rendre intelligible. On peut développer deux conceptions :

• **Celle de la pureté** : les mathématiques sont une construction arbitraire convenablement réglée, une pure création de l'homme qui permet de représenter les phénomènes. Ceci renvoie à Wigner qui parle de *la déraisonnable efficacité des mathématiques dans les sciences de la nature.*

• **Celle du mixte** : au sens du XVII^{e} siècle, si la perception puise sa source dans l'expérience sensible, elle n'est jamais pure de toute théorisation, de même que toute construction théorique n'est jamais pure au sens qu'elle puise dans l'expérience, lors même que le discours s'en détache.

C'est une conception proche de Gonseth :

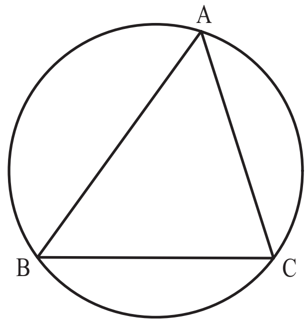
« *Dans toute expérimentation il y a un résidu abstrait, et dans toute abstraction (mathématique), il y a un résidu intuitif.* ».

précisant :

« *La distinction entre l'abstrait et l'expérimental n'est que de tendance, mais non d'essence.* »

Revenant à une préoccupation plus proche de notre profession d'enseignant, dans la classe lorsqu'on parle de figure en voyant un dessin que voulons nous dire ? Le dessin est une représentation d'une figure donc imparfait, et de raisonner sur des figures conduit à des idéalités. C'est la problématique qui donne au dessin le statut de figure, et la notion de figure considérée dépend de l'avancement de la démonstration en cours, des conjectures que nous faisons. Ce qui fait que deux personnes voyant un même dessin peuvent voir des figures distinctes, et changer de figures avec le temps en raison de l'avancement de leur compréhension et du travail en cours réalisé, travail qui s'appuie sur le support dessin comme représentation d'une figure. Quand l'acte d'enseigner est par trop répétitif (on refait les mêmes exercices ou presque) il n'y a plus de questionnement pour l'enseignant ; il peut avoir tendance à considérer que la figure et sa représentation par un dessin ne font qu'un, que le lien qui les unit est figé. Cette attitude peut engendrer des difficultés dans l'apprentissage.

La différenciation « dessin/figure » se pose avec plus d'acuité dès le début de l'apprentissage avec un logiciel de géométrie dynamique ; on ne peut remettre à plus tard cette prise en compte. En ce sens c'est un excellent outil qui permet d'approcher la compréhension de cette différenciation et de construire les idéalités qui en découlent. En effet un dessin informatique est un dessin dynamique doté d'un mouvement spécifique propre à sa construction. On ne peut décider, comme avec un dessin papier de changer de figure sans reprendre la construction du dessin informatique.



Pour éclairer ce propos, considérons le dessin papier ci-contre composé d'un cercle et d'un triangle. De quelle figure est-il la représentation ? D'un cercle et d'un triangle n'ayant aucun lien entre eux ? D'un cercle circonscrit au triangle ? D'un triangle inscrit dans le cercle ? … Dans un « travail papier » c'est ce que décidera l'apprenant ou le géomètre. Si ce dessin est un dessin informatique vu à l'écran de son ordinateur c'est la dynamique du logiciel qui permet de le dire, et les mouvements possibles ou non diront les liens qui unissent ces deux objets, mouvements dépendants de la construction réalisée par l'utilisateur (et de l'implémentation de l'objet par le concepteur du logiciel). C'est plus qu'un dessin représentant une figure : on est entre le dessin « papier » (écran de l'ordinateur) et la figure (idéalité pensée). C'est la dynamique du logiciel qui permet de s'approcher de l'idéalité de la figure. Ceci engendre une difficulté conceptuelle supplémentaire dans la construction d'une représentation d'une figure avec un logiciel de géométrie dynamique, et il est nécessaire d'aborder cette question avec un apprenant afin de lui permettre d'appréhender et de surpasser cet obstacle lors de son apprentissage.

Si on considère que la géométrie élémentaire est la première science physique, qu'est ce qui différencie la géométrie de la physique et de la mécanique ? Une réponse est le mouvement.

Quand on est en géométrie élémentaire on nie très souvent le mouvement. Je me rappelle d'une conférence avec un collègue sur un pentagone particulier où on avait deux droites d'un système articulé, situées dans un même plan, l'une de pente négative et l'autre de pente positive. À la fin du mouvement les signes des pentes étaient inversés, c'est-à-dire celle de pente négative était de pente positive et celle de pente positive était négative. Lorsqu'on a affirmé qu'à un certain moment de ce mouvement les deux droites étaient parallèles, pour une majorité de professeurs, ce n'était pas une démonstration. Pourtant en analyse ce raisonnement fait parti de leur culture commune : c'est le théorème des valeurs intermédiaires. Mais nous étions en géométrie… Était-ce seulement un problème de culture ou de rigidité d'esprit ? Car il semble difficile d'attribuer cette attitude à une incompréhension. En défense de cette position il faut remarquer que le développement de la géométrie rationnelle tend à éliminer le mouvement.

Les démonstrations faites en géométrie n'utilisent pas le mouvement, même lorsqu'on travaille avec des rotations, des translations, des symétries. L'utilisation de ces transformations est statique. Mais si on regarde le corpus donné par Euclide, le mouvement est à la racine. En effet le premier problème qui se présente est la comparaison des étendues. Les cas d'égalités sont des invariants qui permettent de dire que l'on peut superposer deux triangles sans avoir la nécessité de faire la comparaison directe, c'est-à-dire sans avoir le recours à l'expérimentation. Pour les établir on fait une expérimentation de pensée basée sur le mouvement, et comme elle est reproductible avec le même succès il n'est pas nécessaire de la refaire une autre fois. **L'égalité est définie par le mouvement**, même si cela a posé problème. Citons à ce sujet D'Alembert(1) sur *l'égalité par superposition* :

« *Ce dernier principe n'est point, comme l'ont prétendu plusieurs Géomètres, une méthode de démontrer peu exacte et purement mécanique. La superposition, telle que les Mathématiciens la conçoivent, ne consiste pas à appliquer grossièrement une figure sur une autre, pour juger par les yeux de leur égalité ou de leur différence, comme l'on applique une aune sur une pièce de toile pour la mesurer ; elle consiste à imaginer une figure transportée sur une autre, et à conclure de l'égalité supposée de certaines parties des deux figures, la coïncidence du reste : d'où résulte l'égalité et la similitude parfaite des figures entières. Cette manière de démontrer a donc l'avantage, non seulement de rendre les vérités palpables, mais d'être encore la plus rigoureuse et la plus simple qu'il est possible, en un mot de satisfaire l'esprit en parlant aux yeux.* »

Rappelons l'établissement du premier cas d'égalité :

« *Deux triangles sont égaux si et seulement si ils ont un côté égal compris entre deux angles égaux chacun à chacun* ».

On considère de tels triangles ABC et A′B′C′. Comme BC est égal à B′C′ on peut déplacer le triangle A′B′C′ sur le triangle ABC de telle sorte que B′C′ coïncide sur BC, le point B′ sur le point B, et le point C′ sur le point C. Comme l'angle en B est égal à l'angle en B′ le point A″, transporté du point A′, est situé sur la demi-droite BA ; de même l'angle en C étant égal à l'angle en C′ le point A″ est situé

(1) D'Alembert, *Essai sur les éléments de philosophie*, 1759.

sur la demi-droite CA. Deux droites se coupant en un seul point les points A″ et A coïncident et les triangles ABC et A′B′C′ sont superposables : ils sont égaux.

Mouvement sans déformation, c’est-à-dire mouvement qui conserve la forme, la grandeur ce qui renvoie à une certaine circularité. Pour éviter cette circularité du type « qui a fait la poule/qui a fait l’œuf » Bkouche considère « *que les notions de corps solides et de mouvement sont issues de l'expérience du monde et que la géométrie a pour objet d'étudier les propriétés des corps solides, lesquelles restent invariantes par le mouvement, autrement dit il convient d'expliciter les relations entre corps solides et mouvement.* ».

Cette lecture empiriste que nous propose Bkouche des *Éléments* d’Euclide positionne la géométrie sur l’explicitation de l’invariance des corps solides par rapport au mouvement ; définition des corps solides et invariance par le mouvement allant de pair. Corps solides et mouvement sont du domaine de la connaissance empirique. En cela la géométrie, comme la physique, relève à la fois de la connaissance empirique et de la construction rationnelle.

Cette explicitation des propriétés d’invariance est à la base des critères permettant d’affirmer l’égalité de deux corps solides.

Deux corps solides sont égaux lorsqu'ils ont même forme et même grandeur, ce que l'on peut reconnaître à la possibilité de les superposer. Cette superposition pose problème pour les corps solides tridimensionnels. Comment superposer deux cubes de bois égaux ? Comment fait-on pour savoir qu’ils sont égaux ? De cette difficulté et de la nécessité de le savoir il convient d’énoncer des critères permettant, *a priori*, d’affirmer que deux corps solides sont égaux. La construction d’une géométrie rationnelle implique d’obtenir des critères d’égalité qui évitent tout lien avec l’expérimentation pour s’appuyer seulement sur le discours démonstratif. C’est le rôle des fameux cas de congruence dits d’égalité. En cela ils éliminent le mouvement, ce qui est, peut être, la (ou une ?) cause de l’oubli du mouvement en géométrie.

Ces critères d’égalités vont de pair avec les transformations usuelles : ceux sont des invariants qui permettent d’affirmer qu’une certaine transformation existe. Un mathématicien confirmé sait combien il est souvent difficile d’affirmer l’existence ou la non existence d’une transformation, aussi il cherche les invariants qui lui permettent de répondre à cette question. L’existence d’une transformation, sans avoir la nécessité de l’exhiber, lui permet de déduire des propriétés et d’aller plus avant dans ses questionnements.

L’étude des transformations (isométries, similitude, inversion, homologie, …) fait partie intégrante de la géométrie moderne, et on peut regretter que celles qui sont étudiées par les élèves, surtout au début de l’apprentissage, soient vues de manière statique, surtout que pour un élève elles ne transforment pas vraiment ! Il convient toutefois de faire la distinction entre mouvement et isométrie comme le fait Bricard :

« *On appelle déplacement toute opération qui fait passer un corps d'une position à une autre. Un déplacement résulte toujours, dans la pratique, d'un mouvement au* *cours duquel le corps occupe une série continue de positions, depuis la position initiale jusqu'à la position finale… Un déplacement donné peut être réalisé par une infinité de mouvements différents entre eux, soit par leurs définitions géométriques, soit par leurs lois du temps.*(2) »

Le déplacement d'une figure de manière purement géométrique et non mécanique est appelé Géométrie cinématique.

L'étude des transformations va changer la vision de la géométrie : ce sera l'étude d'un espace sur lequel va opérer un groupe de transformations. Cette vision a eu quelques difficultés à s'imposer au début, bien que parfois ce soit encore d'actualité. Je renvoie pour cela à des propos de Laisant :

« *L'idée générale des transformations, c'est une démonstration nouvelle de ce fait que la Mathématique ne crée rien et que son rôle est constamment de nous présenter la vérité sous une forme plus accessible qu'elle ne l'était primitivement.* »

Ceci même que Laisant ne cache son enthousiasme avec **le principe de dualité** avec les transformations par polaires réciproques en rendant un hommage appuyé à Chasles.

Note : On peut remarquer qu'assez souvent un élève pense, avec la présentation qui lui en est faite, que l'on veut lui compliquer la vie ! C'est une présentation totalement différente qui devrait lui en être faite car toute sophistication ne se justifie que si elle est source de simplifications.

Avant d'aborder ce thème, j'aimerai dire deux mots sur une méthode très importante en géométrie, méthode d'application générale à savoir celle des *lieux géométriques*.

Les lieux géométriques nous ont été légués par les géomètres de l'Antiquité, et leurs usages les plus fréquent sont pour des problèmes de construction d'un point (un point se trouve à l'intersection de deux lieux géométriques), d'objets géométriques par abandon de contrainte, surtout maintenant avec l'usage des logiciels de géométrie dynamique, etc. ; ils permettent une redéfinition d'objets de la géométrie par leur fonction comme pour la médiatrice (lieu géométrique des points situés à égale distance de deux points donnés), pour l'arc capable (lieu géométrique des points d'où l'on voit un segment donné sous un angle donné), etc., et celle des lieux solides, c'est-à-dire les coniques.

Géométrie et cinématique

La cinématique est l'étude du mouvement indépendamment des causes qui le produise mais prend en considération le temps, en cela elle n'est pas « purement géométrique ». Les notions de vitesse et d'accélération ne sont pas des notions géométriques. C'est plus tard, avec les travaux de Chasles, de Schönflies et de Mannheim que se développera une « géométrie cinématique » qui propose d'étudier le mouvement indépendamment du temps.

(2) Raoul Bricard, *Cinématique et mécanismes*, Armand Colin, Paris 1947, p. 1.

Il n'y a pas si longtemps la cinématique et la mécanique faisait encore partie du corpus de la formation d'un mathématicien. C'était la partie de la Mécanique qui étudiait le mouvement des corps d'un point de vue purement géométrique en faisant abstraction des causes de ce mouvement. On étudiait le mouvement d'un point, d'un corps solide, la composition de mouvements, et par conséquent les concepts de vitesse, d'accélération, et de compositions de celles-ci.

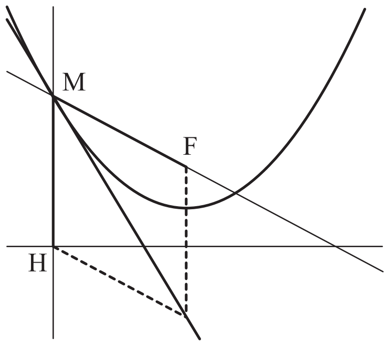
Quelques exemples

1) Construction de tangentes

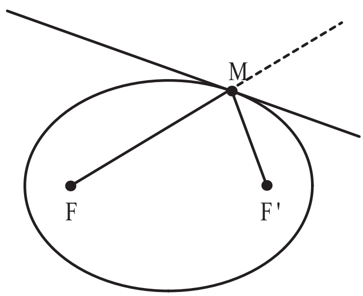
Méthode de Roberval : cette méthode consiste à comparer des mouvements de même vitesse. Roberval considère que la direction du mouvement d'un point qui décrit une courbe est la tangente à cette courbe et que la direction de ce mouvement est la composition de deux mouvements qui sont spécifiques à la courbe. Autrement dit toute courbe est engendrée par la composition de deux mouvements, et la tangente est la bissectrice de l'angle formé par les directions de ces deux mouvements.

Application aux coniques :

Parabole : le point M est situé sur une droite mobile perpendiculaire à la directrice, et sur une droite qui tourne autour du foyer. Étant à égale distance de la directrice et du foyer, les vitesses de ces deux mouvements sont égales. Le parallélogramme donnant la résultante de ces deux vitesses est un losange d'où la tangente est la bissectrice de l'angle HMF.



Ellipse : Soit E une ellipse de foyer F et F′, on note M un point se déplaçant sur l'ellipse, alors MF + MF′ reste constant. On peut considérer que le mouvement du point M est le composé de deux mouvements, celui d'un point se déplaçant sur une droite tournant autour du foyer F et celui d'un point se déplaçant sur une droite tournant autour du foyer F′.



La somme MF + MF′ restant constante, il s'ensuit que les vitesses des deux mouvements sont égales et que si le point M se rapproche du foyer F, l'autre s'en éloigne. Il s'ensuit que les vitesses forment un losange et que la vitesse du mouvement composé est portée par la bissectrice extérieure de l'angle FMF′;

Hyperbole : Il en est de même que pour l'ellipse en considérant la différence des distances du point M aux foyers F et F′.

2) Centre instantané de rotation

C'est une notion qui intéresse plus les mécaniciens que les mathématiciens. Cette notion est d'utilité dans les problèmes de base et roulante, de mouvement inverse, de mouvement d'équerre, de podaire d'un point par rapport à une courbe, de caustique, … et dans la simplification des équations traduisant un mouvement. Comme m'a dit un collègue physicien lorsqu'un corps tombe, modulo une translation, il n'y a que la rotation qui présente un intérêt !

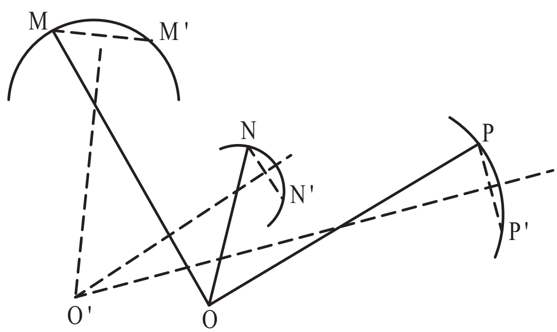
En cinématique on se préoccupe du comment sont distribuées les vitesses des points d'un solide en mouvement (entre vitesse d'entrainement et vitesse relative). Dans le cas où un plan A lié à un solide en mouvement glisse et reste en coïncidence avec un plan B lié à un repère, les vitesses des points du plan A par rapport au plan B sont en général, à un instant quelconque, les mêmes que si le plan A était animé par rapport au plan B d'une rotation autour d'un de ses points. Ce point, dont la position dans chacun des plans dépend du moment (de l'époque) considéré, est appelé centre instantané de rotation à ce moment. C'est le seul point du plan dont la vitesse, au moment t, soit nulle. Géométriquement :

Théorème : *Soient deux figures directement égales dans un plan, si ces deux figures ne sont pas translatées l'une de l'autre, il existe un point et un seul de la première qui coïncide avec son homologue dans la seconde.*

En effet, hormis la translation, deux figures directement égales se déduisent l'une de l'autre par rotation. Considérons ce dernier cas : si on rapproche indéfiniment la deuxième figure de la première ce centre de rotation tend vers un point appelé *centre instantané de rotation*.

Propriété : *Soit* O *le centre instantané de rotation d'une figure en mouvement, alors pour tout point* M *de la figure la droite* OM *est la normale à la trajectoire du point* M *en ce point.*

Reprenons les écrits de Hadamard. Il représente la situation par le dessin suivant :



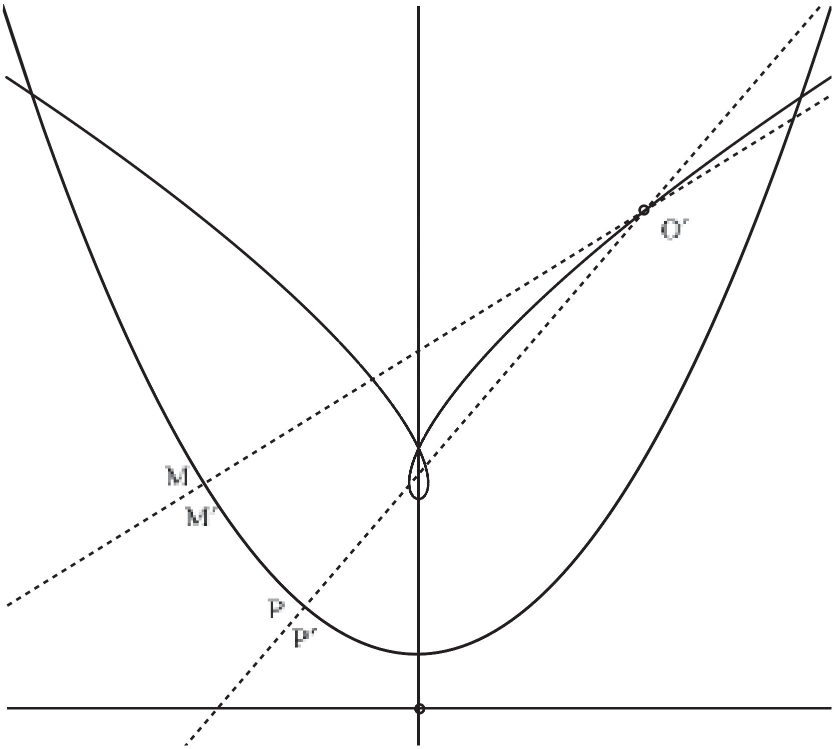
O′ est le centre de rotation qui amène la figure de la première à la seconde position et O le centre instantané de rotation.

On considère trois points M, N, P de la figure, telles que les normales aux points M et N se coupent au point O (le cas des normales parallèles est éliminé). Notons, dans une position voisine, leurs points homologues M′, N′, P′.

Les médiatrices des segments MM′, NN′, PP′ sont concourantes en un point O′, centre de rotation qui fait passer de la première position à la seconde position. Si on rapproche indéfiniment la deuxième position de la première, le milieu du segment MM′ tend vers le point M, et la droite MM′ tend vers la position de la tangente au point M et la médiatrice de MM′ vers la normale de la trajectoire. Il en est de même si on considère les segments NN′ et PP′. Par suite le point O′ tend vers le point O : c'est le centre instantané de rotation.

Note : Il est aisé avec un logiciel de géométrie dynamique de tracer le lieu géométrique du centre instantané de rotation d'un mobile se déplaçant sur une courbe donnée.

Ci-dessous le centre instantané du mouvement d'un mobile dont deux points M et N, distant de 1, se déplacent sur une parabole d'équation $Y = 0{,}2\ X^2 + 1$.



3) Problèmes d’équilibre

Tétraèdre :

Si on construit un tétraèdre dans une matière homogène, on est sûr que la projection orthogonale du centre de gravité du solide sur le plan d’au moins une face est un point intérieur à la face.

En effet, dans le cas contraire le tétraèdre serait instable et on aurait ainsi un mouvement perpétuel. Ce problème de géométrie est un classique de la formation des professeurs de mathématiques en France, mais la démonstration géométrique est un peu moins triviale et moins lumineuse.

De fait l'équilibre d’un tétraèdre, est atteint lorsque le centre de gravité est le plus bas ce qui implique que la projection du centre de gravité sur la face dont il est le plus proche est à l'intérieur de cette face. La démonstration géométrique consiste à montrer que la projection du centre de gravité sur la face dont il est le plus proche est à l'intérieur à cette face. Comme nous pouvons le voir ci-après les considérations mécaniques guident la démonstration géométrique :

On considère un tétraèdre constitué d'une matière homogène et les projections orthogonales du centre de gravité sur les faces du tétraèdre ; alors une au moins de ces projections est à l'intérieur de la face correspondante.

Démonstration mécanique :

Le tétraèdre reposant sur une face, si la projection du centre de gravité n'est pas située à l'intérieur de la face, il ne peut y avoir équilibre.

Si l'on veut éviter le recours au mouvement perpétuel, il faut remarquer que l'énergie potentielle du tétraèdre reposant sur une face est proportionnelle à la distance du centre de gravité au plan de la face considérée. Il y aura donc équilibre lorsque cette distance est minimale, ce qui implique que dans ce cas la projection orthogonale du centre de gravité sur le plan de la face correspondante est à l'intérieur de cette face.

Démonstration géométrique :

L'idée de la démonstration est donnée par le raisonnement mécanique ; on montre que lorsque la distance du centre de gravité au plan d'une face est minimale, la projection orthogonale du centre de gravité est à l'intérieur de la face.

Soit ABCD les sommets du tétraèdre, G le centre de gravité, on notera respectivement A', B', C', D' les projections orthogonales respectives des sommets A, B, C, D sur chacun des plans de la face opposé.

Si l'on note G_D le centre de gravité du triangle ABC, G'_D la projection orthogonale du point G sur le plan (ABC), on a la relation

$$4G'_D = 3G_D + D'.$$

Par conséquent

$$\overrightarrow{G_D G'_D} = \frac{1}{4}\overrightarrow{G_D D'}.$$

On a de même, avec des notations évidentes, les relations

$$\overrightarrow{G_A G'_A} = \frac{1}{4}\overrightarrow{G_A A'},$$

$$\overrightarrow{G_B G'_B} = \frac{1}{4}\overrightarrow{G_B B'},$$

$$\overrightarrow{G_C G'_C} = \frac{1}{4}\overrightarrow{G_C C'}.$$

Supposons que le segment GG_D soit le plus petit des quatre segments GG_A, GG_B, GG_C, GG_D, alors, puisque les quatre tétraèdres GABC, GBCD, GCDA, GDAB ont même volume, la face ABC a une aire égale ou plus grande que celles des autres faces du tétraèdre : on montre que le point G'_D est intérieur au triangle ABC.

Puisque les aires des faces DAB, DBC, DCA sont au plus égales à l'aire de la face ABC, il s'ensuit que le point D est intérieur à chacun des trois cylindres de révolution d'axes respectifs (AB), (BC), (CA) et de rayons respectifs AH, BK, CL où AH, BK et CL désignent les hauteurs du triangle ABC. Il s'ensuit que le point D′ est intérieur au triangle $A_1B_1C_1$ homothétique du triangle ABC dans l'homothétie $(G_D, -2)$.

Puisque le point G'_D est l'image du point D′ par l'homothétie $\left(G_D, \frac{1}{4}\right)$, il s'ensuit que le point G'_D est intérieur au triangle ABC. En fait il est intérieur au triangle dont les sommets sont les milieux des côtés du triangle ABC.

Note : On montre la même propriété pour un polyèdre convexe.

4) Un problème de Fermat

Soit un triangle ABC. *Déterminer le point* M *du plan du triangle tel que la somme de ses distances aux trois sommets soient minimum.*

Les démonstrations géométriques relatives à la position de ce point ne sont pas aisées, bien que ce résultat puisse faire partie de la panoplie d'un futur professeur de mathématiques. En cherchant l'origine de ce problème j'ai trouvé dans FGM(3) que Fermat avait proposé ce problème et que Torricelli l'avait résolu. Alors pourquoi ne pas l'attribuer à Torricelli, et ne lui avoir attribué qu'un point au travers de l'histoire, n'ayant *a priori* aucun lien avec ce problème, alors que le point de Fermat et le point de Torricelli ne font qu'un si les angles du triangles sont inférieurs à 2π/3 et le lien qui les unit est évident au regard des solutions géométriques et mécaniques. Dans le cas où un angle est supérieur à 2π/3, il y a rupture de la situation physique, et le point de Fermat n'est autre que le sommet du triangle dont l'angle est supérieur à 2π/3.

(3) FGM, Exercices de Géométrie, maison Mame et fils, Tours, 1920.

L'éclairage donné par la démonstration de Torricelli permet de comprendre les outils utilisés pour trouver le point de Fermat.

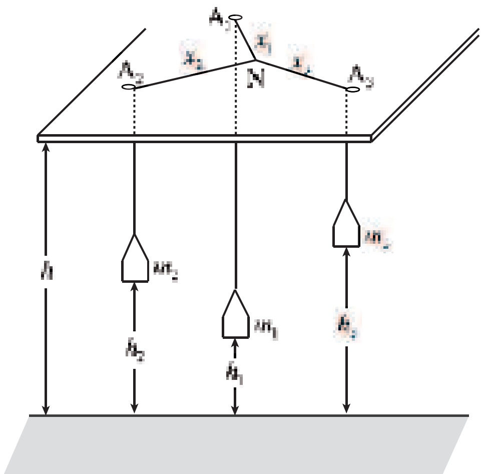
4 bis) Point de Torricelli

On construit extérieurement à un triangle trois triangles équilatéraux sur les côtés du triangle donné. Les cercles circonscrits à ces trois triangles sont concourants en un point, appelé point de Torricelli.

C'est le point d'où l'on voit les trois côtés d'un triangle sous un angle de 120°.

Problème posé par Fermat :

On considère une table horizontale dans laquelle on a fait trois trous A_i, $i = 1, 2, 3$. D'un nœud N partent trois fils passant par ces trois trous à l'extrémité desquels on a attaché trois masses m_i égales. Le système se stabilise de telle sorte que le nœud se trouve sur la table. Déterminer cette position.



Une réponse est de dire que les trois masses sont le plus bas possible, … globalement ! Il reste à savoir ce que veut dire « globalement ». Un physicien dira que le système se stabilisera lorsque l'énergie potentielle du système sera minimum. En écrivant l'équation exprimant l'énergie potentielle, il n'est pas difficile de voir que c'est le problème de Fermat (à condition que le nœud reste sur la table).

Pour $i = 1, 2, 3$, notons l_i la longueur de la ficelle du nœud à la masse M_i, x_i celle du nœud aux trous A_i, h_i celle des masses au sol, et h celle de la table au sol. L'énergie potentielle du système est égale à $P = mg\sum h_i$. Comme $\sum h_i = \sum x_i + 3h - \sum l_i$, la $\sum h_i$ est minimum si $\sum x_i$ l'est ; le système se stabilisera au point appelé point de Fermat, c'est la position qui résout le problème de Fermat.

Une autre vision : le point de Torricelli

Le système se stabilise lorsque la résultante des forces qui s'exercent au nœud est nulle.

Soient $\overrightarrow{NA}$, $\overrightarrow{NB}$, $\overrightarrow{NC}$, ces trois forces et $\overrightarrow{ND}$ la résultante des forces $\overrightarrow{NA}$, $\overrightarrow{NB}$. Les trois forces étant égales le parallélogramme ANBD est un losange, et pour que le système se stabilise il est nécessaire que les forces $\overrightarrow{NA}$ et $\overrightarrow{ND}$ soient de même intensité. Par suite les triangles AND et BND sont équilatéraux : l'angle ANB vaut π/3. Il en est de même des angles ANC et BNC. Le système se stabilise lorsque le point N se trouve être le point de Torricelli.

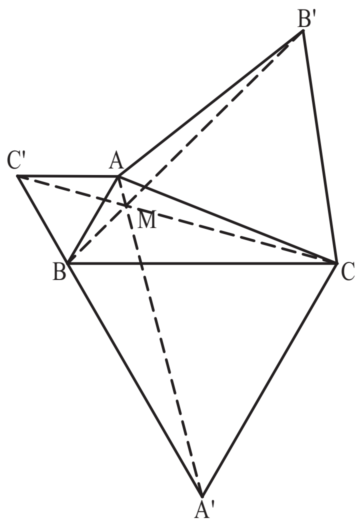
Note : i) Ceci explique la rupture dans la solution du problème de Fermat dans le cas où un angle du triangle est supérieur à 2π/3. La raison est physique : le nœud passe dans le trou défini par cet angle. On n'est plus dans le plan du triangle, on est dans une autre situation.
ii) De même on peut demander que deux fils fassent entre eux un angle donné. Par exemple pour un angle de 90°, une réponse immédiate est que les valeurs des masses soient entre elles comme les côtés d'un triangle pythagoricien. C'est la vision physique qui donne immédiatement le résultat.

Solution géométrique :

Soit un triangle ABC*, déterminer le point* M *intérieur au triangle tel que la somme* MA + MB + MC *soit minimale.*

On suppose que le triangle ABC est direct ; il s'ensuit que l'angle $\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}\right)$ est direct.

On notera C′ le troisième sommet du triangle équilatéral construit sur le côté BA du triangle ABC et extérieur à ce triangle, il s'ensuit que le point C′ est l'image du point A par la rotation (B,π/3).



Soit M un point intérieur au triangle, M′ le point image de M par la rotation (B,π/3), on vérifie aisément les relations MB = MM′ et MA = M′C′, ce qui implique l'égalité

$$MA + MB + MC = M'C' + MM' + CM$$

et par conséquent la somme est minimum lorsque les points C, M, C′ sont alignés. Le point M, s'il existe, est situé sur la droite CC′. Par un même raisonnement il est situé sur les droites AA′ et BB′ où le point A′ (resp. B′) est le troisième sommet du triangle équilatéral construit sur le côté BC (resp. CA) extérieurement au triangle ABC.

Il reste à montrer que ces trois droites sont concourantes. Si l'on remarque que le segment CC′ est l'image du segment A′A par la rotation (B,π/3), il s'ensuit que l'angle $\left(\overrightarrow{MC},\overrightarrow{MA}\right) = 2\pi/3$. Ainsi le point M est sur l'arc capable sous lequel on voit le segment CA sous l'angle 2π/3 (il s'agit évidemment de segments orientés et d'angles orientés). On montre aisément que les trois arcs capables ainsi définis sont concourants en un point, ce qui prouve l'existence du point M cherché.

Notons que cette démonstration suppose que le point M soit intérieur au triangle, ce qui implique que chacun des angles du triangle est au plus égal à 2π/3.

Lorsque l'un des angles du triangle est supérieur ou égal à 2π/3, par exemple l'angle BAC, le minimum est obtenu lorsque le point M est au point A.

5) Théorème de Poncelet

La tangente et la normale à un point d'une ellipse sont les bissectrices extérieure et intérieure de l'angle formé par le point et les foyers.

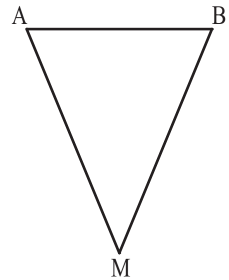
On considère deux clous A et B sur une paroi, et une roulette qui peut rouler sur un fil attaché aux deux clous. Déterminer la position d'équilibre de la roulette.

La position doit être la plus basse possible, c'est-à-dire l'énergie potentielle du système est minimum, ou en plagiant Clairaut lorsque la tangente ne penche pas plus d'un côté que de l'autre, c'est-à-dire lorsque la tangente est horizontale.

Premier cas :

Les clous A et B se situent à la même hauteur.

Pour des raisons de symétrie, si le point M est la position d'équilibre, les segments AM et BM sont égaux, c'est-à-dire que le triangle AMB est isocèle de sommet M.



D'autre part, la roulette appartient à l'ellipse de foyer A et B, lieu des points tels que PA + PB soit égal à la longueur du fil ; le point le plus bas est celui où la tangente à l'ellipse est horizontale, il s'ensuit que la normale au point d'équilibre est la bissectrice de l'angle AMB, la tangente étant la bissectrice extérieure de ce même angle.

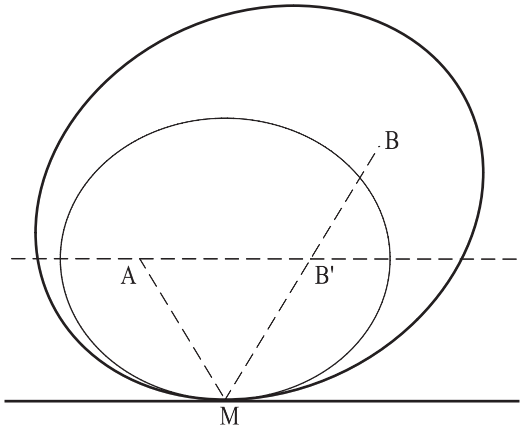
Deuxième cas :

Les deux points A et B ne sont pas à la même hauteur, par exemple le point B est plus haut que le point A.

Soit B′ le point situé sur le segment MB à la même hauteur que le point A, on plante un clou au point B′ et l'on y attache le fil ; dans ce cas la position d'équilibre de la bobine ne change pas et le triangle AMB′ est isocèle (cf. premier cas).

La roulette appartient à l'ellipse de foyer A et B lieu des points tels que PA + PB soit égal à la longueur du fil, le point le plus bas est celui où la tangente à l'ellipse est horizontale, il s'ensuit que la normale à l'ellipse est la bissectrice de l'angle AMB, la tangente étant la bissectrice extérieure de ce même angle.

Cette démonstration peut se lire sur la figure suivante, où la tangente cherchée est tangente commune à deux ellipses :



Note : La démonstration de ce théorème peut se faire aussi bien en optique en considérant la trajectoire d'un rayon lumineux.

Un problème de géométrie : construire une tangente à une ellipse donnée de direction donnée.

Note : Ces derniers exemples montrent les liens entre les problèmes de minimum en géométrie et des problèmes de mécanique. Un problème de minimum d'une fonction scalaire (en géométrie) se traduit souvent en mécanique comme un problème de minimum d'énergie potentielle, qui exprime un problème d'équilibre.

Géométrie et optique

Où on retrouve la ligne droite ! Dans les livres on trouve la phrase « la lumière se propage en ligne droite ». Que signifie cette assertion ? De fait c'est plus une définition de la droite qu'une propriété.

La notion de ligne droite est donnée par l'expérience, c'est la trajectoire d'un rayon lumineux, la direction du regard lorsqu'on voit un objet et qui nous fait dire que l'on va tout droit. C'est un lien très étroit entre la géométrie et l'optique.

D'un autre côté, que signifie dans la théorie de la relativité générale « la trajectoire des rayons lumineux est courbée par la gravitation » ? C'est la notion de la courbure de l'espace temps qui fait problème, et la notion de courbure d'une surface dans un espace nous renvoie à notre propre expérience.

En d'autres mots on n'a pas une seule vision de la droite !

On a plusieurs visions de celle-ci, visions qui se superposent les unes aux autres et qui nous donnent une notion de droite et nous font penser que l'on sait ce qu'est une droite.

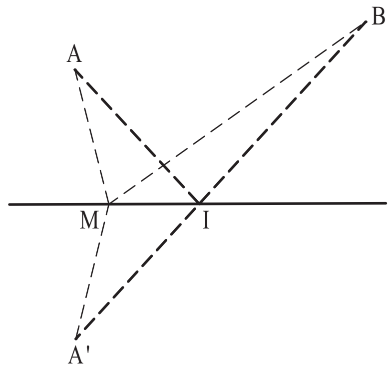
Pour Leibnitz : deux points suffisent à déterminer une droite, il énonce que lorsqu'un corps solide se déplace en laissant deux points fixes, tous les points fixes sont situés sur la droite définie par les deux points fixes.

Pour Fermat : la trajectoire d'un rayon lumineux entre deux points A et B est celle de la plus courte durée.

De ce dernier principe on peut obtenir les lois de la réflexion et de la réfraction. Évoquons seulement les lois de la réflexion qui sont sources de problèmes géométriques intéressants, comme périmètre minimum, trajet minimum et problème d'ergodicité (problème de billard, sur des polygones, miroirs paraboliques, sphériques, etc.).

Détermination de la trajectoire d'un rayon réfléchi

Soient M un miroir, et un rayon lumineux issu d'une source A tombant sur le miroir en un point I : déterminer le rayon réfléchi.



Le rayon issu du point A arrive au point B ; le principe de Fermat dit que le trajet AIB réalise un minimum de la fonction $f(\mathrm{M}) = \mathrm{AM} + \mathrm{MB}$. Si A′ est le symétrique de A par rapport au plan du miroir, le chemin est minimal si et seulement si le chemin A′MB l'est, autrement dit si et seulement si les points A′, M, B sont alignés ce qui implique que le point M est le point I.

On déduit aisément les lois de la réflexion : le triangle AIA′ est isocèle, la droite IM est bissectrice de l'angle AIA′ et la perpendiculaire à la droite IM est bissectrice de l'angle AIB. L'angle d'incidence est égal à l'angle de réflexion.

GÉOMÉTRIE ET PHYSIQUE

Il n'est pas facile de tracer une frontière entre la géométrie et la physique ; pour illustrer cette affirmation, rappelons les deux théorèmes suivants qui font parti de notre culture :

• *Il existe à similitude près cinq et seulement cinq polyèdres réguliers.*

• *Pour un polyèdre convexe on note s le nombre de sommets, a le nombre d'arêtes et f le nombre de faces on a la relation* $s - a + f = 2$.

Ces deux énoncés sont considérés traditionnellement comme des énoncés de mathématiques, mais si l'on considère que ces deux théorèmes énoncent des propriétés profondes de l'espace on peut affirmer qu'ils participent de l'étude des corps solides, et donc des sciences physiques. Cependant il existe une différence profonde entre ces deux énoncés :

La formule d'Euler peut être approchée à partir de quelques situations, ce qu'a fait Euler pour conjecturer ce résultat, alors que l'assertion sur le nombre de polyèdres réguliers résulte *a contrario* du seul raisonnement. C'est le raisonnement qui nous permet ici d'appréhender l'une des propriétés profondes de l'espace.

En Physique moderne, celle issue de la Révolution Scientifique de XVII^{e} siècle, on nous a habitués à cette appréhension purement déductive des propriétés du monde, l'expérience ayant pour objet moins de découvrir ces propriétés que de les vérifier une fois connues, vérification qui s'appuie sur un discours théorique déjà construit, même si l'on sait que les instruments utilisés pour cette vérification sont eux-mêmes construits à partir des résultats théoriques. Ainsi Bachelard, après avoir rappelé que « *les instruments ne sont que des théories matérialisées* », écrit « *Après avoir formé, dans les premiers efforts de l'esprit scientifique, une raison à l'image du monde, l'activité spirituelle de la science moderne s'attache à construire un monde à l'image de la raison. L'activité scientifique réalise, dans toute la force du terme, des ensembles rationnels.* ».

La mathématisation croissante des sciences de la nature et la naissance des méthodes formalistes au début du XX^{e} siècle renforceront cette emprise du rationnel sur le réel, renforcement qui apparaît comme un renouvellement de la pensée scientifique. Mais *ce nouvel esprit scientifique*, pour reprendre une expression de Bachelard, s'inscrit dans une histoire de la mathématisation des sciences de la nature.

Bkouche considère que cette transformation a commencé avec la géométrie grecque :

Si la physique aristotélicienne, se voulant au plus proche de la connaissance intuitive, participe de la construction d'une raison à l'image du monde, et la *géométrie grecque, telle qu'elle a été codifiée par Euclide, participe de la rationalisation du monde, la découverte des polyèdres réguliers en étant l'une des marques les plus profondes.*

Ainsi Aristote distingue l'objet physique donné par la connaissance empirique, par exemple la ligne considérée comme rayon lumineux, et l'objet mathématique qui intervient dans le discours démonstratif. C'est *via* l'activité de raisonnement que se constitue l'objet mathématique ; dans une perspective gonséthienne, on pourrait dire qu'un objet de connaissance devient objet mathématique dès qu'il devient objet de discours démonstratif. En ce sens c'est la démonstration qui donne aux objets leur statut d'idéalité mathématique, autrement dit, y compris dans les mathématiques euclidiennes, c'est le langage qui modèle les objets. Il faut alors, pour éviter tout malentendu, distinguer entre la chose qui nous est donnée par la connaissance empirique et l'objet, lequel représente la chose *via* le discours.

C'est cette réduction au discours qui constitue la science rationnelle, celle qui se construit *via* le raisonnement comme l'explique Aristote dans les *Seconds Analytiques* :

« *Mais ce que nous appelons ici savoir c'est connaître par le moyen de la démonstration.* »

Une théorie rationnelle se construit sur une réduction langagière du monde, c'est cette réduction langagière qui permet une connaissance du monde. Cette réduction langagière n'est pas formaliste, les objets du discours mathématique représentent des *idéalités mathématiques* que l'on peut considérer comme des constructions de l'esprit humain, lesquelles nous permettent de parler des objets du monde empirique. Par suite les objets empiriques originels deviennent de simples représentations, plus ou moins grossières, de ces idéalités.

GÉOMÉTRIE ET MÉCANIQUE

La Physique a commencé à se mathématiser avec la mécanique, considérée comme science du mouvement. Pour Newton la géométrie s'inscrit dans une mécanique universelle dont elle n'est que la partie consacrée à l'art de mesurer. Newton différencie la géométrie comme science de la grandeur (*magnitude*) des corps et la mécanique comme science du mouvement des corps.

Cette attitude lui permet de donner une exposition déductive de la mécanique en s'appuyant sur le modèle euclidien : c'est comme une continuation des *Éléments*. Mais cela a un coût : il faut géométriser le temps, c'est-à-dire concevoir à une réduction du temps à une idéalité sur le modèle des idéalités géométriques : le temps ne représente plus cette notion complexe liée au devenir comme le pensait Aristote, il n'est qu'une forme qui permet d'étudier le mouvement que Newton définit de la façon suivante :

« *Absolute, true and mathematical time, of itself, and from its own nature, flows equally without relation to anything external…* »

La référence au mouvement uniforme « *flows equally* » apparaît comme un cercle analogue à celui dont nous avons parlé à propos des relations entre corps solides et mouvement.

Le problème est moins de relier la définition du temps au mouvement uniforme mais de définir le temps comme étant lui-même un mouvement uniforme de référence qui permet de mesurer les autres mouvements. Le mouvement d'un corps n'est plus lié à son devenir pour n'être plus que la correspondance qui associe à chaque instant la position du corps. On peut dire que le temps se définit comme un mouvement uniforme qui permet de définir les autres mouvements.

Le temps perd son statut de devenir, il se réduit à un objet géométrique, il est pensé comme statique. Cette réduction du devenir à l'être a permis de développer une théorie mécanique déductive ; étant liée au mouvement, elle est analogue à celle opérée par la géométrie grecque pour les corps solides et les objets de discours ainsi construits. Ce qui renvoie à de nouvelles idéalités mathématiques.

Un problème se fera jour : c'est celui de l'irréversibilité du temps, ce qui n'apparaît pas dans la construction newtonienne : les équations de la mécanique rationnelle sont invariantes lorsqu'on inverse le temps. Mais alors qu'est-ce qui différencie le passé du futur ? On peut considérer que le second principe de la thermodynamique constitue la première formulation théorique de l'irréversibilité ; celle-ci se précisera avec la mécanique statistique.

Le non-euclidien

La relation entre la géométrie mathématique et la géométrie physique prend une forme différente avec l'apparition des géométries non-euclidiennes.

Le postulat d'Euclide sert à montrer que les angles alternes-internes définis par une sécante sur deux droites parallèles sont égaux. Il paraissait raisonnable de prouver cette propriété, propriété qui était la réciproque d'une propriété démontrée et dont les conséquences jouaient un rôle de premier ordre dans le développement de la géométrie grecque à ne citer que la méthode des aires et celle de la théorie de la proportion. Le recours au cinquième postulat apparaissait comme la marque d'un échec, ce qui explique les nombreuses tentatives tout au long de l'histoire pour le démontrer.

Le début de la naissance de la géométrie non-euclidienne est le moment où on a commencé à penser que le plan usuel pouvait ne pas être euclidien.

Gauss disait[(4)] :

« *J'en viens de plus en plus à la conviction que la nécessité de notre géométrie ne peut pas être démontrée, ou du moins qu'elle ne peut pas l'être par la raison humaine ni pour la raison humaine. Peut-être atteindrons-nous, dans une autre existence, une compréhension de la nature de l'espace qui nous est maintenant inaccessible… Jusque là, il nous faut mettre la géométrie non au même rang que l'arithmétique dont la vérité est purement a priori, mais plutôt au même rang que la mécanique.* »

C'est la question de la vérité physique du postulat des parallèles qui est posée, et c'est une question de physique qui conduira à penser la possibilité d'une géométrie non-euclidienne.

De l'échec des tentatives de la démonstration de ce postulat Gauss, Bolyai, Lobatchevski émirent l'idée d'une possibilité de nier ce postulat et construisirent une géométrie dans laquelle on pouvait tracer plusieurs droites parallèles à une droite données passant par un même point.

Le modèle était logiquement cohérent, mais la pluralité de géométries incompatibles posait un problème de physique : Quelle est la géométrie de notre espace ? Quelle est la vraie géométrie ?

Pour Lobatchevski :

« *En réalité, dans la nature, nous ne connaissons que le mouvement : c'est lui qui rend possible les perceptions des sens. Tous les autres concepts, par exemple ceux de la Géométrie, sont produits artificiellement par notre esprit et tirés des propriétés du mouvement et, pour cette raison,* ***l'espace en lui-même, pris à part, n'existe pas pour nous****… Cela étant, notre esprit ne trouve aucune contradiction à admettre que certaines forces de la nature suivent une géométrie et d'autres leur géométrie propre*. »

Lobatchevski mettant en doute l'unité de la mathématique géométrique, mettait en doute l'unité de la physique pour représenter le monde : le passage de la géométrie aux géométries implique de redéfinir la relation entre la géométrie née d'une construction axiomatique et la géométrie physique, c'est-à-dire la géométrie du monde.

La pluralité des géométries renouvelle la question de l'espace. Dans sa dissertation de 1854 « *Sur les hypothèses qui servent de fondement à la géométrie* », Riemann émet la notion d'un espace général, ce qui lui permet de s'interroger sur la nature de l'espace physique.

Il consacre la première partie de sa dissertation à la notion générale de multiplicité à n dimensions ; dans la seconde partie il introduit les relations métriques, essentiellement infinitésimales, cherchant à généraliser les constructions de Gauss sur les surfaces et introduit la courbure de l'espace. Il se propose dans la troisième partie de définir la nature de l'espace physique, renvoyant à l'expérience pour une réponse à cette question. Dans cette dernière partie Riemann pose la question de savoir si la géométrie de l'espace est indépendante des corps, auquel cas la courbure de l'espace est constante, les observations astronomiques montrant qu'elle est nulle, ou si au contraire la présence des corps influe sur la géométrie de l'espace.

(4) Gauss n'a rien publié de son vivant « *par crainte des clameurs des Béotiens* » comme il l'écrit à Bessel. Cependant son traité de 1827 sur les surfaces et l'étude des triangles géodésiques (c'est-à-dire dont les côtés sont des géodésiques) montre qu'il connaissait le lien entre les géométries non-euclidiennes et la géométrie des surfaces.

Les travaux de Riemann ont conduit à penser que la géométrie pouvait dépendre de la distribution des corps matériels. C'est parce que Riemann et après lui Clifford ont pensé les relations entre géométrie et matière que Einstein, découvrant la géométrie de Riemann dans les travaux de Ricci et Levi-Civita, travaux qui font un lien explicite entre les espaces de Riemann et la physique, inventera la théorie de la relativité générale.

L'article « Sur les transformations des équations de la dynamique » de Levi-Civita sur la géométrisation de la mécanique analytique s'appuie sur le fait que si un système mécanique est définie par son énergie cinétique qui est une forme quadratique sur les vitesses, alors la question de l'équivalence de deux systèmes mécanique est la même que celle de deux espaces de Riemann. Cet article de Levi-Civita est un pas essentiel dans l'étude des relations entre géométrie différentielle et physique mathématique.

En mathématiques cette notion d'espace général va nous amener à la géométrie différentielle moderne, et en physique aux deux grandes problématiques suivantes :

• **La nature de l'espace physique** : compte tenu des divers espaces que l'on peut construire, quels sont ceux qui représentent l'espace de la physique ?

• **Quelles relations étroites** y a-t-il entre la géométrie différentielle et ses espaces abstraits généraux et la physique mathématique. La représentation géométrique de la mécanique analytique comme exposée par Levi-Civita conduit à mettre en relation mécanique et géométrie différentielle.

Poincaré montre que la nature de l'espace physique est plus complexe qu'on ne le supposait et que le lien à l'expérience n'est pas simple car l'expérience nécessite des instruments de mesure, instruments construits à partir d'une théorie géométrie déjà élaborée. Comme on ne pouvait pas répondre à cette question de manière unique, Poincaré explique que le problème n'est pas de choisir une réponse vraie illusoire mais la réponse la plus commode.

En conclusion on peut résumer très rapidement cette longue histoire :

• Au début la géométrie été une, et il se fit une distinction entre la géométrie rationnelle s'appuyant sur la démonstration pour trouver des propriétés vraies du monde et la géométrie pratique, plus empirique qui sait utiliser les résultats de la géométrie rationnelle pour résoudre des problèmes pratiques : leur différenciation étant surtout dans leur mode d'approche, l'une purement rationnelle et l'autre laissant plus de place à l'empirisme.

• Le séisme du non-euclidien montre la multiplicité des géométries en mathématique, mais on considère que la physique est une. L'expérience permettant de déterminer la « vraie » géométrie.

• Le troisième moment est celui où la géométrie physique n'est pas unique. Cela remet en question l'hypothèse d'une structure mathématique du monde, mathématisation du monde qui a commencé avec la géométrie grecque et qui fut suivie de la mécanique du XVII^{e} siècle. On est dans l'esprit de ce que préconisait

Poincaré, à savoir celui de la commodité de la réponse à apporter. La géométrie physique étant celle qui traduit le mieux la relation de l'homme au monde, le problème n'est pas celui de sa véracité mais celui de son adéquation au monde. Ceci se traduit par la cohérence du discours rationnel, l'expérimentation traduisant cette cohérence.

Dans ce parcours scientifique que nous venons d'évoquer le rôle de l'expérimentation a changé : proche d'une pratique venant du monde sensible, son rôle initial était de permettre de découvrir des propriétés, de mettre à jour des vérités afin d'élaborer une théorie qui puisse expliquer cela ; plus tard il est devenu un moyen de confirmer ou d'infirmer des propriétés découvertes par la théorie.

Je terminerai en disant que compte tenu des liens étroits entre géométrie et physique, si on veut penser un enseignement de la géométrie, il faudrait à mon humble avis le penser en relation avec la physique.

Bibliographie

• Aristote, *Physique*, texte établi et traduit par Henri Carteron, Les Belles Lettres, Paris 1973, Livre II, p. 63, 194 a,

• Aristote, *Les Seconds Analytiques* (traduction et notes par Tricot), Vrin, Paris 1979.

• Aristote, *Physique*, traduction et présentation par Pierre Pellegrin, GF Flammarion, Paris 2000.

• R. Bkouche, La Géométrie entre mathématiques et sciences physiques, in *Proceedings of 4th International Colloquium on the Didactics of Mathematics*, volume II, édité par M. Kourkoulos, G. Troulis, C. Tzanakis, Université de Crète, 2006. ISBN 960-88712-3-9.

• R. Bkouche, La Géométrie entre mathématiques et sciences physiques, http://www.math.ens.fr/culturemath/histoire%20des%20maths/pdf/Bkouche.pdf

• R. Bkouche, La géométrie élémentaire, une science physique ?
http://michel.delord.free.fr/rb/rb-geo_phys.pdf

• Janos Bolyai, La science absolue de l'espace, traduction par Jules Hoüel, *Mémoires de la Société des Sciences Physiques et Naturelles de Bordeaux*, tome 5, 1867, p. 207-378.

• Michel Carral. Démontrer. Pouquoi ? *Repères-IREM* 2002, n° 49.

• Michel Carral & Roger Cuppens. Les tribulations d'un pentagone. *Repères-IREM* n° 12, juillet 1993.

• Albert Einstein, La Géométrie et l'Expérience in *Réflexions sur l'électrodynamique, l'éther, la géométrie et la relativité*, textes traduits par Maurice Solovine et Marie-Antoinette Tonnelat, Gauthier-Villars, Paris 1972, p. 75-91.

• David Hilbert, *Les Fondements de la Géométrie* (1899) (édition critique préparée par Paul Rossier), Dunod, Paris 1971.

• David Hilbert, S. Cohn-Vossen, *Geometry and Imagination*, translated by P. Nemenyi, Chelsea, New York 1952, p. iii.

• Douglas R. Hofstadter, *From Euler to Ulam : Discovery and Dissection of a Geometric Gem*, The Center for Research on Concepts and Cognition, Indiana University, 1992.

• C.-A. Laisant, *La mathématique, Philosophie, Enseignement*, Gauthiers-Villars, 1907.

• T. Levi-Civita, Sulla tranformazione delle equazioni dinamiche, *Annali di matemetica pura ed applicata*, Serie II, Tomo XXIV, 1896, p. 255-300.

• Nicolas Lobatchevski, Nouveaux principes de la géométrie, (1835-1838), traduit du russe par F. Mailleux, *Mémoires de la Société Royale des Sciences de Liège*, 3ème série, tome 2, 1900

• Nicolas Lobatchevski, Études géométriques sur la théorie des parallèles, traduction par Jules Hoüel, Mémoires de la Société des Sciences Physiques et Naturelles, tome 4, 1866, p. 83-120, réédition sous le titre *La théorie des parallèles*, Monom, 1980.

• Henri Poincaré, *La Science et l'Hypothèse* (1902), préface de Jules Vuillemin, Flammarion, Paris 1968, p. 74-76.

• Bernhart Riemann, Sur les hypothèses qui servent de fondement à la géométrie (traduction Jules Houël), in *Œuvres Mathématiques*, p. 280-299.

Quelques surprises en manipulant Cabri

Jean-Marie Laborde(*)

Conférence présentée en juin 2010 en l'honneur de Roger Cuppens à l'occasion de son jubilé célébré la même année à l'université Paul Sabatier (Toulouse).

Roger Cuppens est sûrement l'un des plus fins contributeurs d'un certain renouveau de la géométrie. Réalisant tout le potentiel des outils informatiques modernes ayant conduit à la naissance de la géométrie dynamique Roger Cuppens s'est employé à la populariser auprès de des étudiants, de ses collègues et de nos politiques. Ses travaux sur les concepts de géométrie booléenne, sa relecture, à la lumière de Cabri, de l'œuvre de Chasles sur les cubiques sont des modèles du genre. Sans ses critiques, sans ses encouragements le projet Cabri ne serait pas ce qu'il est devenu. Depuis l'université d'été « Informatique et enseignement des mathématiques » qu'il organisait en 1990 à Toulouse, Roger Cuppens a marqué l'histoire de Cabri en particulier au tournant de sa transformation, d'une sorte de réification de la géométrie euclidienne en un outil ayant pour ambition d'aborder la modélisation et les mathématiques de façon beaucoup plus générale que sous le seul angle de la géométrie purement euclidienne.

C'est ainsi un grand honneur que d'avoir l'occasion de présenter ce qui suit à cette occasion.

Le projet Cabri est né avec la révolution apportée par l'apparition de terminaux d'ordinateurs graphiques permettant de créer d'authentiques images et représentations graphiques sur papier puis sur un terminal, prenant la forme d'un écran. Demander à un ordinateur de produire des images ne date pas d'hier, on se souvient des imprimantes à chaîne créant des portait d'hommes célèbres (en 1977 cela constituait encore un exhibition de foire aux USA). Au MIT en 1963 Ivan Sutherland développait déjà un système graphique piloté par un ordinateur et prenant la forme d'un *sketchpad*, d'un cahier de brouillon.

C'est autour d'un ersatz d'Apple II qui disposait dès 1977 d'un écran graphique, que le premier prototype de Cabri a fonctionné à Montpellier en 1983, avant que dans notre équipe de l'IMAG à Grenoble, ne le développe successivement sur une machine Lisa puis à partir de 1984 sur le fameux Macintosh.

La visualisation a toujours été au centre du projet Cabri, dès sa naissance en 1981 en tant qu'outil d'expérimentation en théorie des graphes [BenHabib-Laborde].

Cependant l'originalité de Cabri se situe véritablement dans la possibilité qu'il offre de manipuler directement les éléments géométriques constitutifs d'une figure et plus généralement les entités mathématique abstraites — dès qu'on peut leur donner une représentation graphique. Ceci démarquait Cabri de la majorité des autres

(*) jean-marie.laborde@cabri.com

logiciels de mathématiques que l'utilisateur, fondamentalement, pilote par des lignes de commande c'est à dire très indirectement.

C'est dire que les concepts de visualisation, de représentation graphiques, d'imagerie, d'images, de manipulation directe, … jouent en rôle central dans Cabri et je voudrais profiter de l'opportunité de cette présentation pour remonter à certaines découvertes cruciales de l'humanité pour lesquelles le dessin, l'expérimentation graphique, le support graphique à l'intuition (l'imagerie mentale) ont joué un rôle décisif en même temps que les limites de ces techniques, trop marquées par l'imprécision du dessin (du moins tant que ce dessin ne pouvait que rester approximatif, compte tenu des techniques employées) ont conduit les mathématiciens à se détourner du graphisme, du dessin, de la géométrie concrète, au profit d'approches algébriques et plus formelles, particulièrement valorisées sans doute à partir de Descartes.

Dürer et la forme de l'ellipse

Dès l'antiquité grecque s'est partagée l'idée qu'un cercle, même parfaitement « circulaire », nous apparait, tel que perçu, sous une forme aplatie, allongée, ovale.
Dès l'antiquité certains mathématiciens tel Apollonius avaient effectué un lien entre la forme d'un cercle perçu dans la nature et les sections de cônes : la forme que nous percevons d'un cercle n'étant que « le résultat » de la section d'un cône circulaire (non droit en général).

Apollonius fait le lien entre les ellipses définies comme certaines sections d'un cône et celles définies sous la forme $a + b =$ Cte (Coniques, Livre III).

Pour un mathématicien il n'est pas difficile alors de se persuader à partir de cette propriété, qu'une ellipse possède deux axes de symétrie (perpendiculaires), son grand axe évidement mais aussi son « petit » axe.

Pourtant tout au long de la Renaissance et même après on trouve des représentations d'ellipses qui «visiblement» ne possèdent qu'un seul axe de symétrie. L'ellipse est dessinée comme une sorte d'œuf avec un côté nettement moins «rond» que l'autre.

Sébastien Le Clerc, géomètre, physicien, ingénieur et graveur en fournit un exemple dans les planches de sa Pratique de la géométrie sur le papier et sur le terrain de 1684 cf. figure de la page suivante),

Dürer en tant qu'artiste, graveur, géomètre a voulu déterminer l'exacte forme des sections coniques et pour cela il invente dans son ouvrage « Underweysung »[1] une méthode mathématiquement irréprochable pour « dessiner » point par point n'importe quelle conique, section d'un cône circulaire droit donné par sa section frontale.

(1) Le titre complet en est «*Underweysung der messung, mit dem zirckel und richtscheyt, in Linien ebnen unnd gantzen corporen* » (1525 Nuremberg). C'est à dire, en français et sans faute d'orthographe, *Introduction à la mesure, à la règle et au compas, des lignes, surfaces et corps solides*.

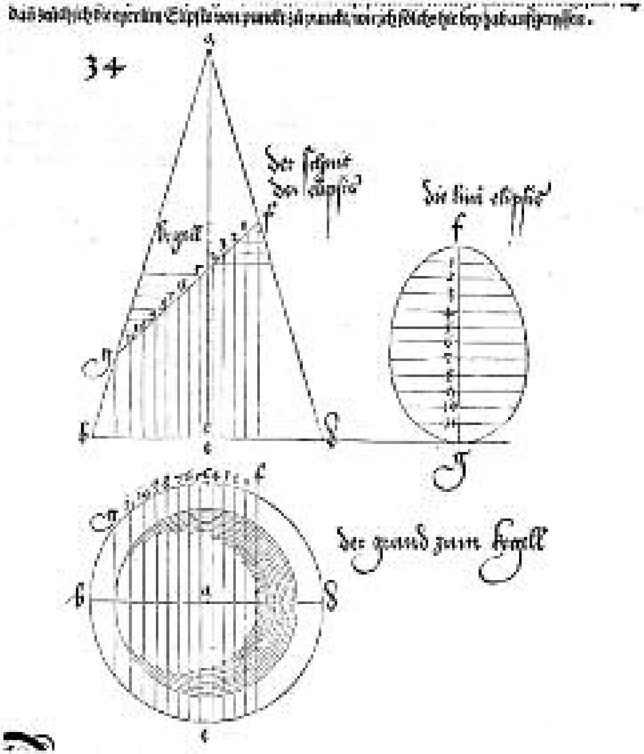

PRINCIPES DE GEOMETRIE

DES

FIGVRES COVRBES,

OV COVRBELIGNES.

Sébastien LeClerc, Pratique de la géométrie…
(Paris 1669 pour l'original. Ici une édition contrefaite, très bien réalisée mais sans mention d'auteur, datant de 1684, comme il en existe de nombreuses…)

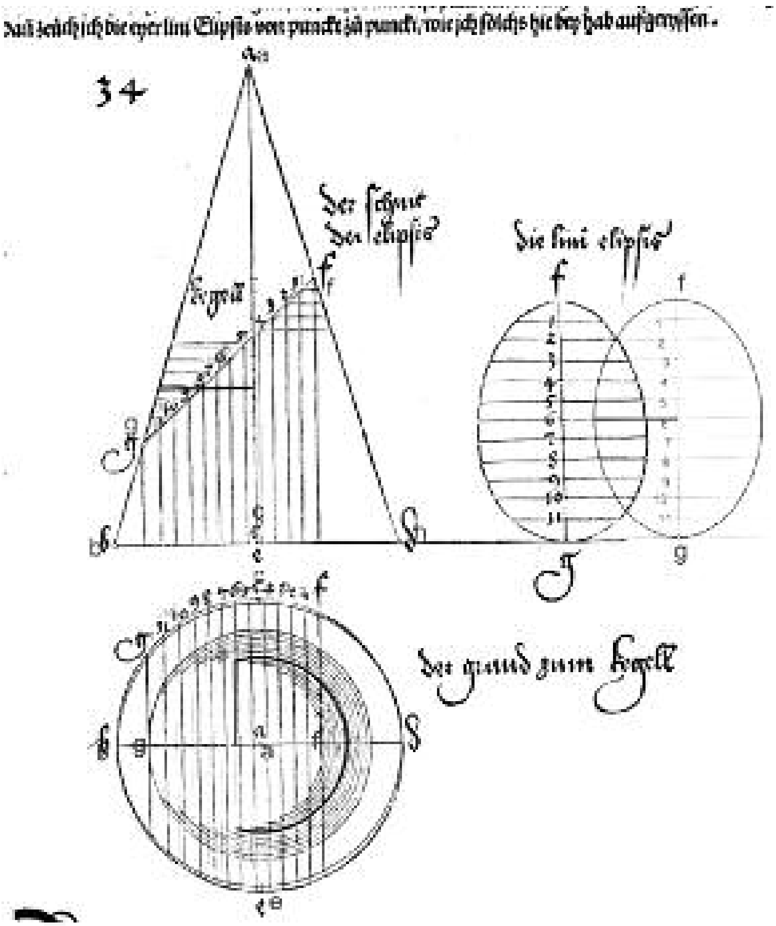


Reproduction de la page 34 de l'original de 1525 du traite de géométrie de Dürer

On s’intéresse ici plus spécialement au cas de l’ellipse pour laquelle un point quelconque est obtenu en reportant le segment pris dans la partie inférieure de la figure « en vraie gardeur » selon une technique qui inspirera bien après Monge et ses techniques de géométrie descriptive.

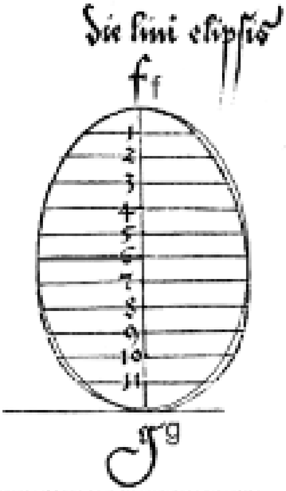
Le processus même s’il n’est pas le plus « économique » donne théoriquement un résultat parfait. Dans Cabri on reproduit aisément la construction de Dürer et l’on obtient l’ellipse comme le « lieu » d’un point générique quand son point pilote parcourt le segment *fg*.

Si l’on superpose à la gravure originale de Dürer (de 1525) on n’obtient que de très loin la superposition escomptée et « l’ellipse » obtenue Dürer présente nettement une forme d’œuf :



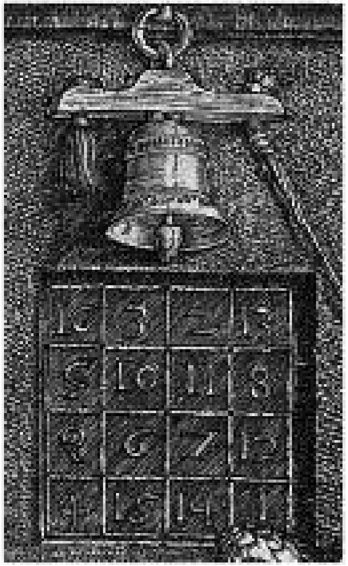
L’ellipse tracée par Dürer est extérieure à l’ellipse dans la partie inférieure et intérieure dans la partie supérieure, ce qui lui donne la forme d’un œuf

Le phénomène est très intéressant car ici l’on peut supposer que Dürer pour qui la forme d’une ellipse est essentiellement ovoïde, s’efforce de « tricher » un peu sur les intersections produites par la méthode. Il parvient ici à « valider » mathématiquement i.e. géométriquement un dessin fondamentalement erroné, même s'il est en accord avec une conception largement répandue de la forme de l'ellipse(2).



Je me souviens d'avoir moi-même eu du fil à retordre avec certains élèves professeurs qui me soutenaient que lorsqu'on coupe un cône par un plan, l'ellipse obtenue est plus « pointue » d'un côté que de l'autre, sans d'ailleurs qu'il y ait un net consensus pour savoir si ce devait être le sommet le plus proche du sommet du cône ou son opposé où l'ellipse soit la plus « pointue ».

On pourrait penser que cette caractéristique de la forme ellipse obtenue par Dürer est contingente, qu'elle ne soit le résultat que d'un fâcheux concours de circonstances. Pourtant en se reportant à d'autres oeuvres de Dürer comme à la fameuse gravure « Mélancolie », on distingue nettement, au-dessus du carré latin une cloche vue en perspective :



(2) On peut remarquer que ce livre de géométrie de Dürer, cette *Underweysung* s'inscrit dans une tendance, à l'époque de Dürer, à « germaniser » les termes scientifiques jusqu'alors venus du ou à travers le latin. C'est ainsi que *Messung* (mesure) souvent synonyme de *Messkunst* (ou art de mesurer) est le terme qui avait été forgé en allemand pour supplanter celui de *Geometrie*. De même le terme *Richtscheyt* (j'ai rajouté les majuscules), désuet aujourd'hui, existe encore sous forme de *Rechtscheid* pour désigner une sorte de règle de maçon. *Richtscheyt* avait été introduit pour remplacer le terme d'origine latine *Lineal* qui est employé de nouveau aujourd'hui et signifie *règle* au sens de « règle et compas ». À la même époque le terme même d'ellipse tendait à disparaître au profit de la forme germanique *Eilinie*, mot à mot la « courbe de l'œuf ».

La base de la cloche (comme le sait Dürer) aurait dû être représentée par une ellipse et celle qu'il dessine est nettement « pointue » d'un côté.

Ce cas chez Dürer et chez d'autres n'est pas isolé et on peut trouver bien d'autres exemples comme celui de la Cène gravée en 1523 :

Ici le plat figurant au premier plan est nettement représenté par une forme plus pointue (à nouveau du côté à gauche que du côté droit.

Les lois de Kepler et la gravitation universelle.

On sait que sur la base des relevés astronomiques de Tycho Brahé, Kepler s'est résolu à énoncer en 1609 trois Lois (dites de Kepler) qui portent sur

– les orbites elliptiques des planètes,
– les aires balayées par les rayons vecteurs,
– les périodes de révolution rapportées à la taille des orbites.

Newton après avoir énoncé la loi de la gravitation universelle (vers 1666 ?) publie en 1687 dans les *Principia* les conséquences qu'il en avait titrées sur sa trajectoire d'un corps soumis à une attraction centrale, en l'occurrence celle d'une planète soumise à l'attraction du soleil.

Dans ce qui suit on va s'intéresser aux illustrations accompagnant le discours de Newton dans les éditions successives des *Principia*, en occurrence la première, la deuxième et celle d'Émilie du Châtelet, c'est à dire de la traduction des *Principia* en français réalisée sous l'impulsion de Voltaire et datant de 1756.

Dans l'édition originale de 1687 on trouve p. 37 le texte suivant se référant à une illustration en pleine page

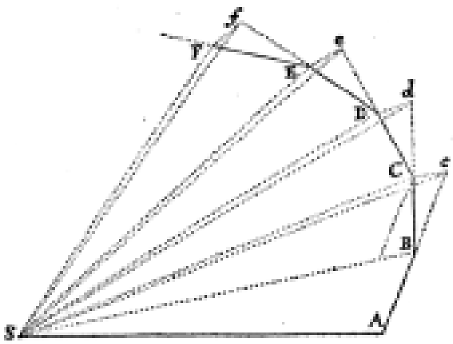
SECT. II.

De Inventione Virium Centripetarum.

Prop. I. Theorema. I.

Areas quas corpora in gyros acta radiis ad immobile centrum virium ductis describunt, & in planis immobilibus consistere, & esse temporibus proportionales.

Dividatur tempus in partes æquales, & prima temporis parte describat corpus vi insita rectam *AB*. Idem secunda temporis parte, si nil impediret, recta pergeret ad *c*, (per Leg. I) describens lineam *Bc* æqualem ipsi *AB*, adeo ut radiis *AS*, B*S*, *cS* ad centrum actis, confectæ forent æquales areæ *A S*B, B*Sc*. Verum ubi corpus venit ad B, agat vis centripeta impulsu unico sed magno, faciatq; corpus a recta B*c* deflectere & pergere in recta B*C*. Ipsi B*S* parallela agatur *c*C occurrens B*C* in *C*, & completa secunda temporis parte, corpus (per Legum Corol. 1) reperietur in *C*, in eodem plano cum triangulo A*SB*. Junge *SC*, & triangulum *SBC*, ob parallelas *SB*, *Ce*, æquale erit triangulo *SBc*, atq; adeo etiam triangulo *SAB*. Simili argumento si vis

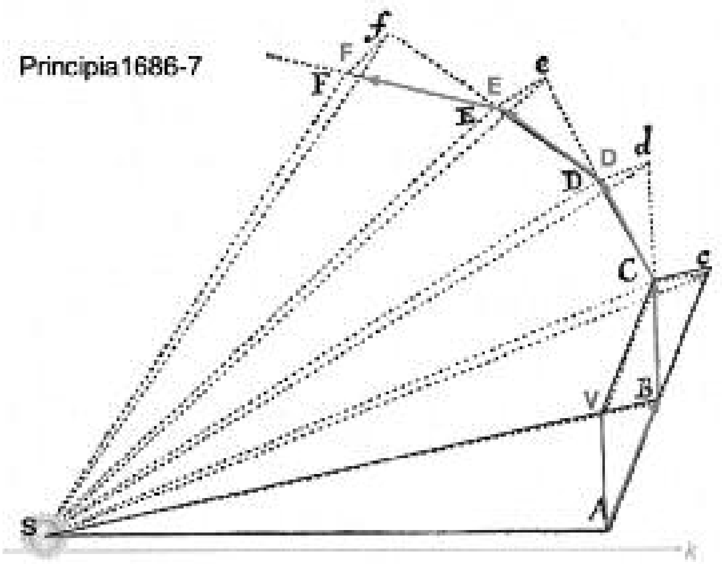


La page 37 de la Première édition des Principia (1687)

Même sans connaissance du latin scientifique du XVII^{e} on comprend facilement que Newton divise le temps en parties égales et qu’il considère le déplacement du corps considéré, de A en B au cours de la première période de temps. Au terme de la deuxième période le corps se trouverait en *c*, tel que B*c* = AB si rien ne l’en « empêchait ». En fait à cause de l’action de la force d’attraction de S (le soleil), le corps doit être placé en C, avec *c*C parallèle à BS. Newton écrit que l’aire de SAB est égale à celle de SB*c* puis celle de SBC ce qui lui permet d’énoncer la « Loi des aires » (i.e. la deuxième loi de Kepler) comme une conséquence de l’attraction universelle à l’origine de la force centripète attirant les planètes en direction du soleil.

Dans l’environnement Cabri on crée sans difficulté une macro permettant de construire itérativement les point C, D, E, F, … connaissant les points « initiaux » S, A, B tout en fixant un constante liée à la gravitation à représenter par la longueur d’un segment auxiliaire. Pour cela on a besoin, étant donné le centre d’attraction S et

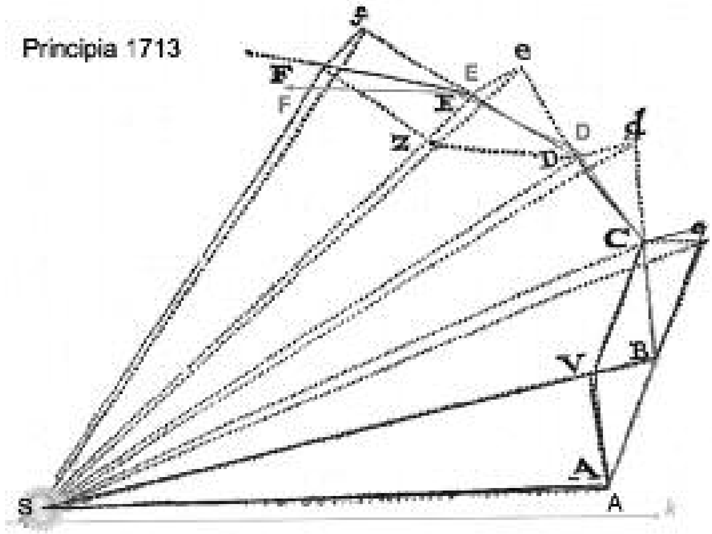
le point générique B, de construire le «vecteur» issu de B en direction de S et représentatif de la force de gravitation proportionnelle à $1/SB^2$. Dans des éditions ultérieures des *Principia* l'extrémité de ce « vecteur » sera nommé V. On construit alors C en tant que quatrième sommet du parallélogramme déterminé par AP et AV. Une macro reproduisant cette construction permet de créer en trois pas supplémentaires les segments CD, DE et EF.
En ajustant la constante (c'est à dire en déplaçant le point *k* extrémité de son segment représentatif) on obtient une superposition quasi parfaite de la gravure des *Principia* avec la construction Cabri. À l'évidence cela montre que les dessins fournis par Newton à son graveur, n'ont pas été réalisés « pour l'occasion » au jugé comme on peut le constater sur la figure suivante :



La superposition presque parfaite (hormis sans doute en F) de la construction Cabri avec l'original de la première édition des Principia de Newton.

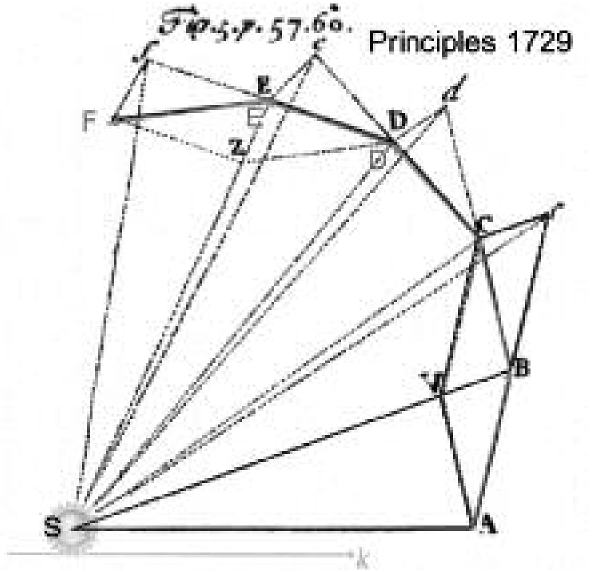
Dans la seconde édition[3] (de 1713) pour laquelle Newton s'est moins investi dans le minutieux travail d'édition, on voit que le parallélogramme, maintenant nommé B*c*CV ne l'est plus vraiment. D'autre part la superposition est nettement moins satisfaisante dans cette édition.

(3) Dans [Rigaud 1838] reprenant la correspondance entre Newton et son ami l'astronome Edmond Halley, on peut apprendre que Halley s'est trouvé un artisan essentiel, moralement et financièrement, des premières éditions des *Principia*. Halley par exemple n'a pas reculé devant un prix plus nécessairement plus élevé pour la réalisation de planches en xylographie, un procédé plus cher que la gravure sur cuivre mais permettant d'insérer les figures dans le texte même, afin de faciliter la compréhension, comme y était attachés aussi bien Halley que Newton lui-même. La deuxième édition n'est pas allée sans tracas et finalement Newton semble ne pas y avoir prêté autant attention aux détails d'édition hormis aux ajouts et corrections apportées dans le texte.



Net défaut, dans la gravure de la deuxième édition, au niveau du parallélogramme BcCV, assorti d'une superposition très moyenne de la construction Cabri avec la gravure de 1713.

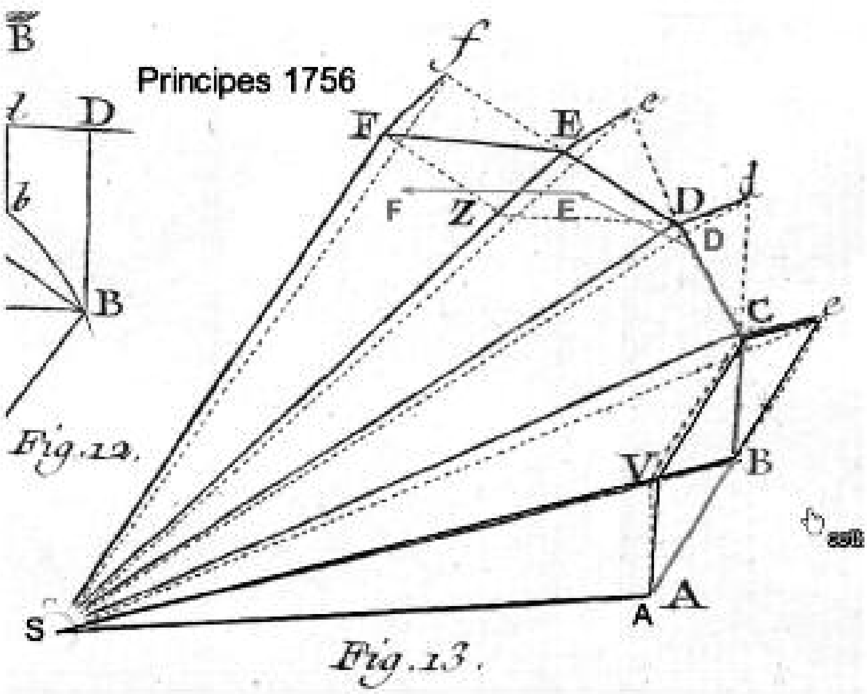
On pourrait examiner la troisième édition qui fournit une assez bonne superposition, ou encore la quatrième, c'est à dire la première en anglais, datant de 1739 et pour laquelle la superposition est excellente et correspond à une gravure séparée sur cuivre (et donc en général plus précise) :



La superposition remarquable de la construction Cabri avec la gravure figurant dans la première édition en anglais des Principia (Londres 1729).

On en vient à l'examen de la planche accompagnant, en tant que figure séparée (et non pas dans le texte), l'édition correspondant à la traduction d'Émilie du Châtelet, imprimée à Genève en 1756.

Comme précédemment on essaie de « calibrer »au mieux la construction Cabri pour la superposer au mieux avec la gravure correspondant au texte des pages 49 et 50. On peut sûrement discuter du calibrage optimal, quoi qu'il en soit le suivant est proche de ce qu'on peut faire de mieux :



La planche, séparée du texte, des figures des Principes dans la traduction de la Marquise du Châtelet en arrière-fond de la construction Cabri.

Comme on le voit la gravure (sur cuivre) est très loin de coïncider avec la construction Cabri; si l'on arrive à faire coïncider les points A, B et C, les points D, E et F de la construction Cabri et de la gravure originale s'éloignent les uns des autres. Dans l'édition de 1759 publié à Paris le défaut est encore plus marqué.

Une hypothèse et le retour d'une formule célèbre

Mon hypothèse pour expliquer cette « évolution » dans les gravures des Principia est la suivante :

La gravure de la première édition, à laquelle Newton a apporté un maximum de soin, reflète très fidèlement ses propres dessins qu'il avait conçus et réalisés et lui avaient permis, entre autres, de montrer que sa théorie de la gravitation en $1/r^2$ était tout à fait en accord avec la *Première Loi de Kepler* (sur les ellipses des trajectoires des planètes dont le soleil occupe un des foyers(4)) et de plus avec la *Deuxième Loi* affirmant que les aires « couvertes » par les rayons successifs joignant le soleil à une planète sont proportionnelles au temps, ainsi que le « prouve » le Théorème de Newton introduisant la Section 2 des *Principia*.

Dans la deuxième édition le graveur introduit une erreur car *c*C n'y est vraiment pas représenté comme parallèle à BS mais cela ne nuisait pas (trop) à la correction de l'ensemble.

Dans la l'édition de la Marquise du Châtelet le parallélogramme est rétabli mais en revanche aucun soin n'est apporté pour s'assurer que la suite de la construction correspond vraiment à la mise en jeu de forces variant comme $1/r^2$.

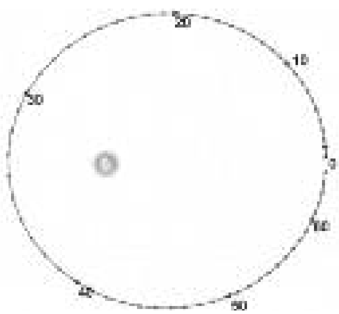
Entre la genèse de la découverte de Newton (le principe de la gravitation universelle et ses conséquences) et les éditions successives l'illustration graphique change de statut.

Lors de la genèse de l'œuvre et poursuivant encore dans la même direction pour la deuxième édition des *Principia*, Newton voit dans le dessin un élément crucial de sa démarche scientifique. En revanche dans des éditions postérieures le dessin perd souvent et de plus en plus toute valeur heuristique, il n'est là que comme un simple support permettant au lecteur de suivre le raisonnement qui fondamentalement, est entièrement du côté du texte (formel) alors qu'à l'origine le raisonnement se trouvait partagé entre texte et représentation graphique.

Au cours de l'histoire d'autre situations relèvent de ce phénomène faisant glisser la compréhension d'une dialectique Représentation graphique/Raisonnement verbalisé vers un raisonnement plus formel, sans rapport fécond à une représentation picturale ou graphique, sans doute pour se garder de toute erreur que le statut approximatif d'un dessin peut engendrer, comme cela semble avoir été le cas chez Dürer. Cette hypothèse est à rapprocher de la thèse de Lakatos à propos de ce qu'il appelle le style « déductiviste » partie intégrante de la méthodologie euclidienne. Il dénonce l'orientation formaliste qui aboutit à vider l'exposition scientifique de tout contenu heuristique, il écrit [Lakatos 1976, p. 142] : « *Le style déductiviste cache la lutte, cache l'aventure* ».

Aujourd'hui pourtant le dessin lui-même peut être contrôlé par des moyens techniques (en l'occurrence des algorithmes informatiques) et sa qualité peut être telle qu'elle en change la nature en permettant de redonner aux représentations visuelles calculables (Luis Moreno Armera dirait exécutables) un caractère de composant authentique de la connaissance. C'est ainsi que qu'un part des raisons qui

(4) Avec Cabri on peut facilement « itérer » la construction de Newton un plus grand nombre de fois, ce que Newton a probablement fait aussi – mais « à la main » – : Ci-contre on a fait figurer 65 pas « d'intégration » en utilisant des paramètres raisonnables (i.e. qui assurent que la trajectoire ne s'approche pas « trop » du soleil, et l'on obtient un trajectoire qui semble se refermer: En fait elle se superpose parfaitement à une ellipse dont on vérifie que le soleil occupe l'un des foyers.



ont conduit, disons —encore une fois en simplifiant— à partir de Descartes, à se détourner des approches géométriques, trop marquées par des représentations picturales et les sens et qui ne répondaient plus aux niveaux critères de rigueur dans la démarche mathématique et scientifique, se trouve aujourd'hui réduite. J'imagine même qu'au côté, ou en conjonction, avec des systèmes de type CAS, c'est à dire des systèmes informatiques de calcul formel, il soit possible d'aborder de nouveau de très nombreux problèmes sous un angle très géométrique et graphique. Aujourd'hui les systèmes de mathématiques dynamiques, quand ils sont de qualité, peuvent fournir à l'apprenant comme au chercheur des moyens de connaissance tout aussi sûrs que ceux fondés sur l'approche formelle et plus algébrique, qui reste aujourd'hui dominante même si elle n'est pas la plus féconde. Il est en effet possible de demander au système de développer ses calculs internes en précision arbitraire, ou même en arithmétique exacte, de façon à garantir, quand cela est nécessaire la qualité voulue aux phénomènes produits à la surface d'un écran ou même, rêvons un peu, d'un système de mathématiques « assisté par ordinateur » dans un environnement de réalité virtuelle autant qu'augmentée.

Bien sûr par un juste retour des chose, de façon interne toutes les techniques algébriques développées depuis Descartes seraient à l'œuvre pour donner une nouvelle jeunesse à la fameuse formule de Leibniz « Calculemus ».

Références bibliographiques

[Albrecht Dürer 1525] Underweysung des messung, mit dem zirkel und richtscheyt, in Linien ebnen unnd gantzen corporen, Nuremberg 1525

[Michel Ben Habib et Jean-Marie Laborde 1981] Projet Cabri, Rapport pour la création d'un PRC (Programme de Recherche Cordonnée) au CNRS, Paris 1981.

[Imre Lakatos 1961] Proofs and Réfutations, the Logic of Mathematical Discovery, Cambridge University Press Cambridge (GB) 1976. Traduction française Preuves et réfutations, essai sur la logique de la découverte mathématique, Éditions Herrman, Paris 1984.

[Sébastien LeClerc 1669] *Pratique de la géométrie sur le papier et sur le terrain*, Lausanne, chez Gentil, 1684

[Luis Moreno-Armella 2006] Movimiento y evolución del objeto geométrico, Actes du 3me Congrès Iberoaméricain Cabri, Universidad de Bogotá, Jorge Tadeo Lozano, Bogota, 2006

[Issac Newton 1686] Philosophiae Naturalis Principia Mathematica, Londres 1687 (1re édition), Londres 1713 (2me édition), Londres 1729 (1re édition en anglais : The Mathematical Principles of Natural Philosophy, traduction de Andrew Motte), Genève 1856 (1re édition an français : Principes Mathématiques de la Philosophie Naturelle traduction de Émilie Marquise du Châtellet), Londres 1687 (1re édition)

[Stephen Peter Rigaud 1838] Historical Essay on the First Publication of Sir Issac Newton's Principia, Oxford University Press, Oxford 1938

[Ivan Sutherland 1963] Sketchpad: A Man-machine Graphical Communication System, Thèse PhD; MIT , Boston USA 1963 — et pour une très intéressante vidéo : http://all-in-one-computers.com/ivan-sutherland-sketchpad-demo-22.php

Quelques réflexions sur la nature des modèles mathématiques

Daniel Justens(*)

La notion de *mathématique* pose problème. On n'en connaît pas de définition universellement acceptée. Le mathématicien Jean Dieudonné n'hésitait pas à déclarer(1) :

> *Si l'on demande « qu'est-ce que les mathématiques ? », ou « que fait un mathématicien ? », il est rarissime qu'on obtienne de l'interlocuteur autre chose qu'une réponse saugrenue s'il n'a pas reçu un enseignement mathématique allant au moins jusqu'à la fin des deux premières années de l'université.*

Si l'on passe sur le mépris relatif aux non mathématiciens contenu dans cette proposition, il n'en demeure pas moins que le fonds en est bien réel : définir correctement la discipline mathématique n'est pas une évidence. L'opinion de Michel Demazure (Président de la Cité des Sciences et de l'Industrie de la Villette), exprimée avec plus de tact, n'est pas fondamentalement différente :

> *Il n'y a guère de discipline plus mal connue et plus mal décrite que la mathématique. Combien pourraient répondre à la question : « les mathématiques ça parle de quoi ? ça porte sur quoi ? ça propose quel but ? »*

Le même problème se pose manière plus générale lorsque l'on tente de donner une définition cohérente de toute activité scientifique. Le philosophe Karl Popper a bien heureusement déblayé le terrain en proposant la notion de falsification : est scientifique, une théorie qui peut être réfutée. Ce n'est pas un paradoxe mais une avancée significative de notre mécanisme de pensée.

Il n'en demeure pas moins que les notions de « science » et plus précisément de « mathématique » sont des concepts flous pour lesquels il ne semble exister aucune définition acceptable par le cénacle des acteurs dans ces disciplines. Nous allons oser quelques propositions argumentées tout en étant loin d'être définitives.

Un peu d'histoire

C'est l'un des inventeurs de la logique, le mathématicien et philosophe allemand Friedrich Ludwig Gottlob Frege (1848 – 1925) qui va poser les bases de la réflexion contemporaine en distinguant trois mondes, trois empires selon ses propres termes : le monde réel, le monde des émotions et le troisième monde, le troisième empire (qu'il a baptisé curieusement(2) « Das drittes Reich ») est le monde des idées, monde auquel appartiennent évidemment toutes les activités scientifiques.

(*)IREM de Bruxelles-HEFF. Place Anneessens, 11. 1000 Bruxelles - Belgique
daniel.justens@scarlet.be

(1) *Pour l'honneur de l'esprit humain*, Hachette, 1987, collection « Pluriels », page 15.

(2) On peut le dire car à la fin de son existence, Frege nourrissait une grande sympathie pour les thèses racistes d'un presque inconnu de l'époque, un certain Adolf Hitler.

Cette idée sera formalisée par celui que l'on peut considérer comme l'un des plus importants philosophes du 20e siècle : Karl Raimund Popper[3] (1902, Vienne – 1994, Londres) :

> *Le monde 1 est notre environnement physique habituel y compris les organismes naturels.*
> *Le monde 2 est celui de nos expériences subjectives, le monde de nos espoirs, de nos craintes, de nos pensées.*
> *Le monde 3 est le monde des théories en soi, le monde du contenu des livres.*

Pour Popper ces trois mondes interagissent, mais sont distincts. Cette façon de voir établit une distinction entre matériel et spirituel qui n'est plus nécessaire aujourd'hui comme nous allons l'établir dans la suite. Ce qui est surtout remarquable dans la pensée de Popper, c'est la notion de *falsificationnisme* que l'on peut présenter schématiquement comme suit. Toute attitude scientifique comprend trois phases que l'on peut reprendre en boucle indéfiniment :

- l'élaboration d'une théorie,
- la confrontation avec les faits,
- la réfutation ou conservation provisoire de la théorie.

Dans cette optique, est scientifique toute théorie réfutable ! Reprenons les termes mêmes du philosophe[4] :

> *La science se compose de théories qui sont notre œuvre. Nous construisons des théories, nous allons vers le monde avec nos théories. Mais le monde ne nous livre aucune information si nous n'allons pas vers lui en l'interrogeant : nous demandons au monde si telle ou telle théorie est juste ou est fausse. Ensuite nous soumettons ces questions à l'examen le plus approfondi possible sans jamais parvenir à aucune certitude.*

Assez curieusement, pour certains philosophes, cette façon de pensée est réductrice et peu enthousiasmante. Ainsi selon Laurence Bouquiaux[5] :

> *Le falsificationnisme présente l'avantage de reposer sur une démarche logiquement valide. Mais il y a un prix à payer : il faut renoncer à l'idée qu'il existe des vérités scientifiques.*

Est-ce vraiment un prix à payer ? La seule vraie question que l'on peut se poser est tout simplement : « l'hypothèse de l'existence de vérités scientifiques nous est-elle utile? ». En quoi cette hypothèse non réfutable[6] (donc non scientifique) peut-elle nous servir dans notre démarche de compréhension ? Il me semble que poser la question revient à y répondre. Cette hypothèse ne nous permet en rien d'augmenter notre capacité de gestion ou de compréhension de l'univers. Sans cette hypothèse,

---

(3) *La société ouverte* Collection « champs - Flammarion » n° 318, page 121 (relecture par Popper en 1984).
(4) op. cit. page 61.
(5) Entre croyances et connaissances, où se situe l'enseignant ? In *CIFEN, Centre interfacultaire des enseignants*, n° 27, avril 2010, Ulg, pages 29 à 35.
(6) Ce n'est pas parce que nous ne pouvons établir de « vérités » que celles-ci n'existent pas.

notre démarche prend autant de sens : nous tentons simplement de donner la meilleure description possible de notre conception du réel étant donné nos moyens et notre information limités.

Premières définitions

Nous pouvons à présent proposer une première définition (partiellement auto-référente donc critiquable) de la notion de « science ». Procédons en deux étapes. On appelle « modèle », toute construction mentale (monde 3) hypothético-déductive (mathématique ?) ou descriptive (scénario) permettant la gestion localement dans le temps d'un fragment de phénomène appartenant au monde 1. On appelle « science », l'ensemble (au sens naïf) des modèles réfutables ayant été confrontés au réel (monde 1) et non encore invalidés par cette confrontation.

Envisageons à présent une description succincte de l'attitude scientifique. Le point de départ commun à toute investigation est l'observation de situations concrètes et le relevé de mesures associées à certains éléments bien ou mal choisis faisant partie intégrante de ces observations (phase 1). Le choix de ces mesures pourrait sembler *a priori* arbitraire. Il apparaît historiquement que ce n'est pas le cas. Certains ensembles de mesures conduisent à des résultats scientifiques, d'autres pas. C'est ici que s'observe un phénomène difficilement qualifiable ou quantifiable, qui s'appelle l'intuition. Afin d'éviter tout malentendu, nous considèrerons l'intuition comme une démarche analytique rationnelle partiellement inconsciente. On peut aussi y inclure une certaine dose de préjugés, d'idées préconçues. Dans ce cas, l'efficacité de la démarche n'aura pas nécessairement le niveau espéré.

Après cette phase expérimentale on tente un premier passage à la théorisation et à la construction de modèles (phase 2). Ces derniers peuvent s'identifier à des structures mentales représentant une partie des situations concrètes étudiées. Ces modèles prennent la forme de systèmes hypothético-déductifs ou de scenarii que l'on espère non contradictoires. Cet espoir peut être vain : on ne sait toujours pas aujourd'hui si l'axiomatique de la théorie des ensembles, qui constitue le fondement des objets mathématiques utilisés dans la plupart des applications est non contradictoire.

Suit ensuite une procédure de validation des modèles par « comparaison » entre les observations et les résultats annoncés ou prévus par les modèles (phase 3). Il s'agit d'une procédure utilisant les modèles dans un cadre descriptif. Ces représentations mentales sont ajustées « au mieux » aux observations. Cette étape est fondamentale, elle procède de ce que nous nommons « compréhension » d'une situation. Lorsque mesures effectivement observées et résultats prévus par le système hypothético-déductif retenu et calibré, ne diffèrent pas trop, nous considérons nos hypothèses comme acceptables provisoirement et estimons avoir « compris » le phénomène, avoir proposé un schéma explicatif compatible avec les observations. De nouvelles mesures, différentes, ont obligatoirement pour conséquence le rejet du modèle et la recherche d'un autre système englobant l'ensemble de toutes les observations.

Cette phase nous permet de définir la notion de *compréhension* d'un fragment de réel : on a compris un phénomène, lorsqu'on peut en produire un modèle non contradictoire sous forme descriptive ou hypothético-déductive, qui en donne une présentation synthétique conduisant à des résultats ne s'écartant pas trop des observations.

C'est ici que commence à se construire le monde des *mathématiques*. Il ne retient que les structures mentales associées aux phénomènes qu'ils doivent représenter. Ces structures détachées de contexte réel sont alors réutilisables, elles peuvent être complétées, améliorées. D'autres structures obéissant aux mêmes exigences de cohérence peuvent être proposées, agrandissant l'ensemble du matériel dans lequel les scientifiques peuvent puiser.

Lorsqu'un modèle est accepté, on passe enfin à une procédure d'analyse des conséquences de la représentation mentale du réel que l'on vient de valider en tentant d'anticiper des résultats non encore mesurés (phase 4). Une nouvelle phase expérimentale peut alors avoir lieu donnant naissance à un nouvel ensemble de mesures concrètes. Ces nouveaux résultats sont à nouveau confrontés au modèle et peuvent une nouvelle fois conduire à son acceptation ou à son rejet. Dans ce cas, il y a utilisation des modèles dans un cadre prédictif.

Remarquons que la phase prédictive n'est pas obligatoire. Aucun modèle n'a été autant validé que le modèle synthétique amélioré de l'évolution basé sur les travaux de Darwin (modèle descriptif de 1859 validé entre autre par la découverte de la génétique). Néanmoins, ce modèle ne sera jamais prédictif. Nul ne peut anticiper ce que seront les animaux ou les plantes du futur.

Résumons : un modèle est construit en phase 2, validé et éventuellement accepté en phase 3 et ensuite utilisé dans la phase 4 lorsque la phase 3 est jugée satisfaisante. Une analyse critique conduit on l'a vu au retour à la phase 1 puis à nouveau à la phase 3, le modèle subissant de nouveaux tests de validation. C'est cette remise en question perpétuelle qui fait la richesse et l'efficience de l'attitude scientifique.

C'est néanmoins cette remise en cause et l'obtention de résultats toujours partiels qui est mise en avant par certains pour dévaloriser la démarche des scientifiques, par comparaison avec les affirmations définitives – mais non vérifiables – des gourous. C'est le cas des fanatiques religieux qui prétendent apporter des réponses à toute question. C'est également le cas de certains philosophes pour qui le recours aux hypothèses d'existence de vérités absolues est une nécessité pour justifier la construction de leur système de pensée.

Nous entendons montrer que ces hypothèses sont inutiles et, d'une certaine façon, réductrices. En effet, dans un cadre où un problème est définitivement résolu, il n'y plus de place ni pour la recherche, ni pour l'enthousiasme qu'elle peut engendrer. Un monde de vérités absolues est un monde mort intellectuellement. Et je suis personnellement heureux de savoir que le théorème de Gödel a définitivement mis un terme au projet prétentieux de Hilbert.

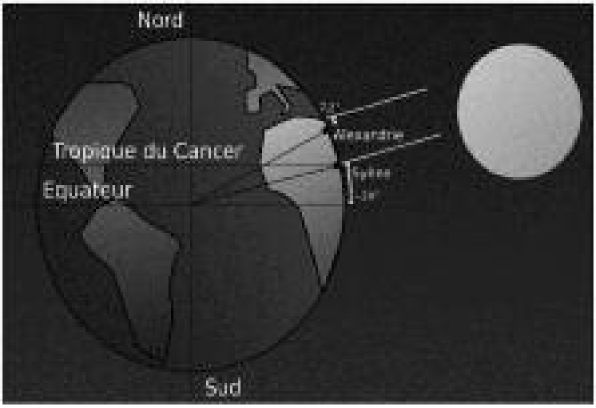
Déduction versus induction

Pour Popper, la seule démarche cohérente est déductive et tout part des modèles[7] :

> *L'idée de l'induction est en définitive la suivante – et je précise que je décris là quelque chose que je tiens pour faux du début à la fin – : tout savoir nous vient de nos organes des sens, c'est le principe de base. Et lorsque les mêmes effets ont agi pendant longtemps et très fréquemment sur les organes sensoriels, nous émettons une hypothèse généralisatrice.*
>
> *Le véritable apprentissage n'est pas inductif, c'est toujours une démarche d'essais et d'erreurs entreprise avec la plus grande activité dont nous soyons capables.*

On peut peut-être comprendre le point de vue de Popper en tant que physicien (un exemple suit) mais en tant qu'économiste, des nuances s'imposent.

Illustrons tout d'abord le premier point de vue en prenant pour exemple le modèle d'Ératosthène (276 – 194 BC) qui lui permit de calculer une approximation remarquable du diamètre de la terre. L'observation lors du solstice d'été du fond d'un puits à Assouan (l'antique Syène) éclairé sans ombre aucune à midi, et, le même jour de l'année au même instant, de l'ombre d'une colonne à Alexandrie, conduisit Ératosthène à proposer le modèle basé sur les trois hypothèses suivantes :

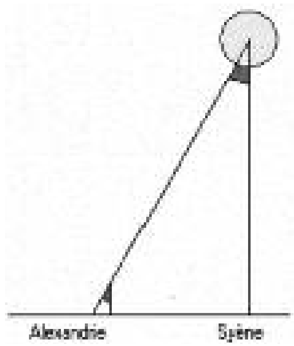


H1 : la terre est sphérique.
H2 : le soleil est situé à très grande distance de la terre et ses rayons sont presque parallèles.
H3 : la lumière se propage en ligne droite.

Nous avons aujourd'hui validé le modèle d'Ératosthène.

Mais à l'époque, les mêmes observations auraient pu conduire à une représentation tout à fait différente du système solaire. Envisageons en effet le modèle :

(7) op. cit. Page 33.

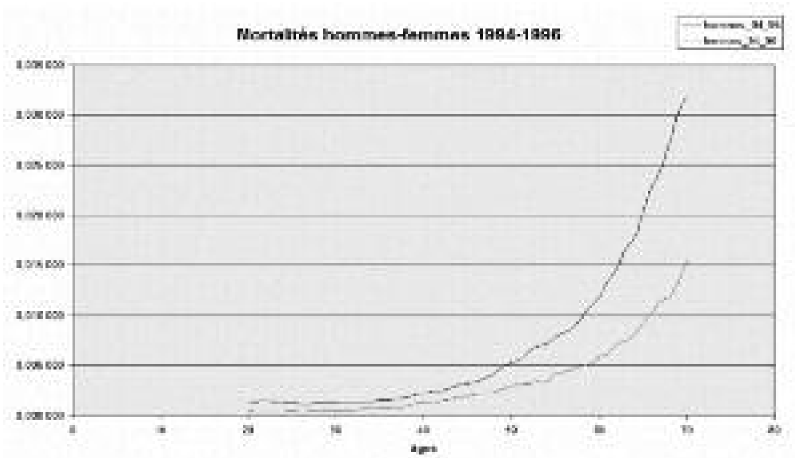


H1 : la terre est plate.
H2 : le soleil est un petit astre situé près de la terre. Ses rayons ne sont plus parallèles.
H3 : la lumière se propage en ligne droite.

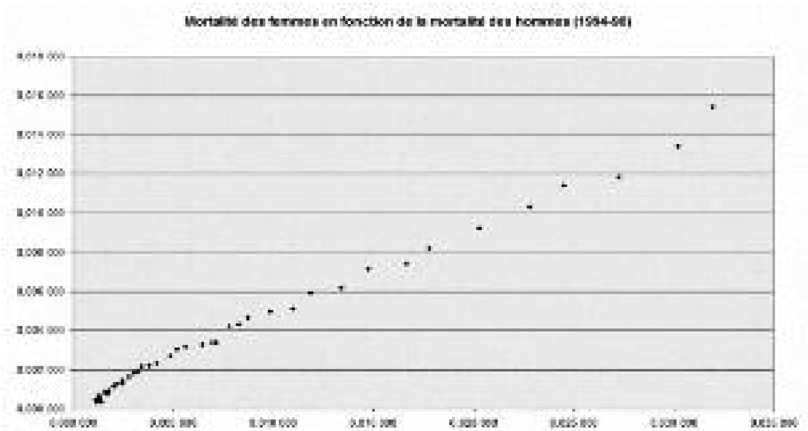
Cette représentation est parfaitement conforme aux observations et conduit évidemment à une toute autre image mentale. Force nous est donc de reconnaître une certaine intuition au précepteur du pharaon Ptolémée IV.

Venons-en à notre contre-exemple. Les « sciences économiques » font-elles partie de notre ensemble baptisé « science » ? La question mérite d'être posée mais il faut bien constater que, depuis quelques décennies, les économistes et les financiers usent et abusent des mathématiques pour donner du poids à leurs conclusions. La différence essentielle entre l'utilisation des modèles en physique et en économie réside dans le fait qu'il est parfaitement impossible de réaliser une expérience économique répétable dans des conditions comparables, afin d'assurer la validation d'une représentation : on doit toujours se contenter d'observations partielles imposées par le monde réel. De plus, l'intervention de la variable temps nécessite toujours une hypothèse lourde et non vérifiée : la permanence des résultats observés.

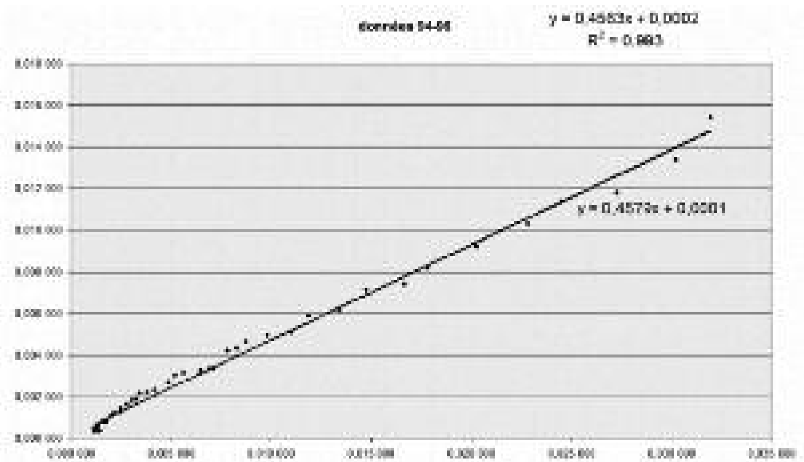
Néanmoins, certaines observations peuvent nous conduire à une modélisation utile. Dans ce sens, des modèles sont induits par les faits, contrairement aux *a priori* de Popper. Prenons pour illustration un modèle actuariel décrivant la mortalité d'une population en fonction de l'âge et du sexe. Le graphique qui suit représente les taux de mortalité des hommes et des femmes de 20 à 70 ans observés entre 1994 et 1996, ce qui, par classe d'âge, permet deux observations seulement. Ceci explique une certaine volatilité observée pour des catégories d'âge permettant peu d'observations.



On observe qu'hommes et femmes constituent deux populations manifestement distinctes. Mais comment quantifier simplement ces différences en fonction du sexe ? Pour introduire explicitement cette distinction, on décide de représenter cette fois les taux de mortalité féminins en ordonnées et les taux masculins en abscisses(8). Le résultat obtenu est surprenant. S'établit presque naturellement une représentation affine, si pas vectorielle :



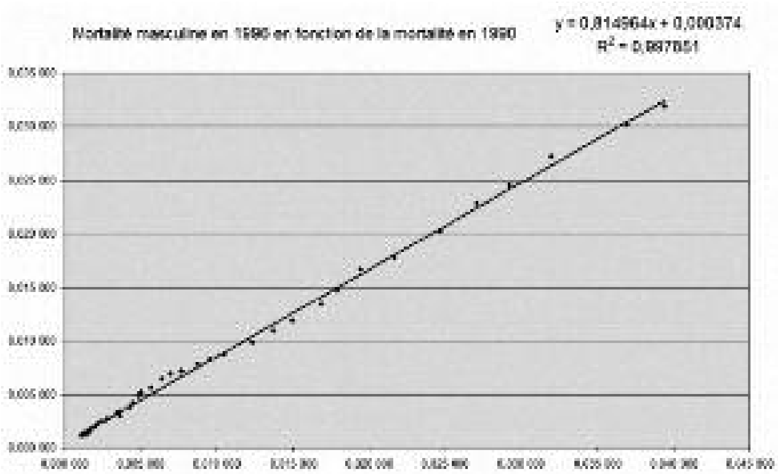
Le réflexe est alors souvent de procéder à une régression linéaire qui n'a évidemment pas de sens dans ce cas précis, les deux variables jouant des rôles absolument symétriques. Certes la forte détermination rend l'hypothèse de linéarité manifestement réaliste mais la mise en équation ne peut se faire que par le recours à la notion de composante principale. Le graphique qui suit donne la représentation de cette composante (équation $y = 0.4579\ x + 0.0001$) et également l'équation de la droite de y en x (y = 0,4563 x + 0,0002), de pente légèrement plus faible comme il se doit.



(8) Ce choix est évidemment arbitraire.

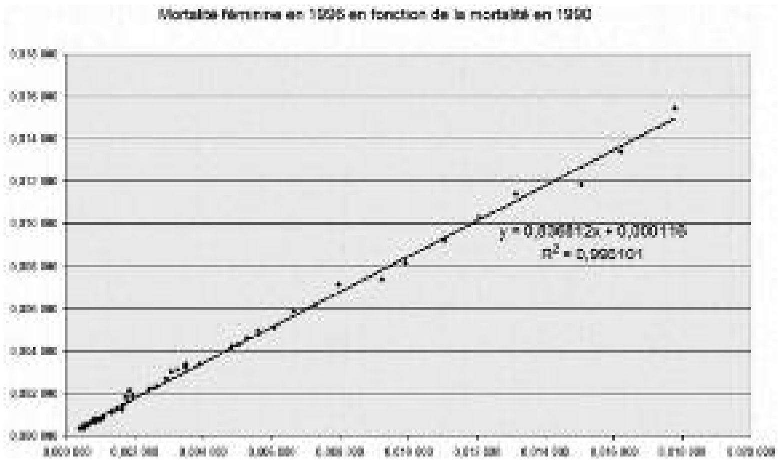
En gros, on constate que la composante est presque vectorielle. On peut donc résumer l'information de cette base de données en affirmant : la mortalité des femmes vaut approximativement 46% de la mortalité des hommes. Le modèle ainsi développé (simple proportionnalité) est entièrement dicté par les observations.

Observons à présent l'évolution de la mortalité des hommes entre 1990 et 1996. Le graphique donne cette fois :



Dans ce cas-ci, la régression linéaire a un sens : on tente de calculer la mortalité en 1996 en fonction de la mortalité observée en 1990.

Encore une fois, une relation affine, voire vectorielle semble évidente. On peut donc écrire que la mortalité en 1996 est approximativement égale à la mortalité en 1990 multipliée par un coefficient d'atténuation (0,815). On peut aussi établir une loi, voire un modèle, exprimant toute simplement que cette mortalité a, en 6 ans, diminué de 18,5%. En tablant sur un coefficient d'atténuation constant par an, on peut même construire un modèle projectif totalement inspiré par les observations.



On remarque que l'atténuation de la mortalité est un peu plus faible pour la population féminine :

Nous avons établi sur base inductive, au moins localement, des lois parfaitement utilisables. Reste à admettre que le domaine exploré appartient bien à l'ensemble « science »…

Le rasoir d'Occam[9]

Il est assez remarquable de constater à quel point philosophes et mathématiciens aimaient avoir recours à l'hypothèse d'existence de lois immuables, universelles, éternelles. Cette attitude est-elle d'un apport quelconque au progrès scientifique ? En vertu du principe du rasoir d'Occam, écartant drastiquement toute hypothèse non nécessaire, nous ne le pensons pas. Beaucoup de mathématicien font néanmoins cette hypothèse en postulant l'existence d'un monde mathématique préexistant, immuable à la découverte duquel ils partent comme autant d'explorateurs intrépides. L'argument est toujours le même : les propriétés découvertes par les mathématiciens sont vraies de toute éternité.

Des arguments de ce type sont aussi introduits par des personnalités plus médiatiques que scientifiques pour justifier l'existence d'un être suprême. Nous pensons par exemple aux frères Bogdanov dont le dernier opuscule a bénéficié d'une couverture médiatique exorbitante étant donné le peu de teneur scientifique de l'ouvrage. L'exemple qu'ils citent explicitement est toujours le même : le théorème de Pythagore est vrai depuis toujours et éternellement.

Ce genre de propos dénote une très mauvaise connaissance du contenu des objets mathématiques. Qu'est un théorème ? Il s'agit d'une propriété découlant d'un ensemble d'axiomes choisi plus ou moins rationnellement et donc en fait, implicitement contenue dans ces axiomes et dans les définitions introduites dans le cadre du modèle. Dans le cas du théorème de Pythagore, les axiomes choisis permettent la construction de l'espace euclidien qui est une excellente représentation mentale de notre monde usuel mais uniquement localement. Nous vivons en effet sur une sphère. Sur une sphère le théorème de Pythagore n'a aucun sens puisque l'on peut y construire un triangle trirectangle équilatéral.

Ces propos nous ramènent à notre sujet : comment arriver à donner une définition acceptable de la notion de « mathématique » ? Historiquement, les premiers objets mathématiques étaient tous totalement ancrés dans le réel dont ils devaient donner une représentation utilisable pragmatiquement. C'est le cas du plus ancien d'entre eux, le fameux bâton d'Ishango[10], comme de la plupart des tablettes cunéiformes babyloniennes, des collections de résultats et d'exercices égyptiens dont nous disposons.

(9) Guillaume d'Occam (1285 - 1347), franciscain philosophe logicien et théologien scolastique anglais.
(10) La première règle à calcul connue : elle date de plus de 20 000 ans.

C'est aussi le cas des éléments d'Euclide qui donnaient une représentation mentale remarquable et surtout utilisable de la réalité physique observable, même si certains résultats semblaient obtenus pour le seul plaisir de l'esprit. C'est en Grèce que naît le concept de « mathématicien ». En effet, les élèves de Pythagore se divisaient en deux groupes. Les *akoustikoi* recevaient un enseignement sans aucune démonstration donné par le disciple Hippase de Métaponte(11). (*akoustikoi*, du grec *akousmata* qui signifie « les choses entendues »). Les véritables initiés, les *mathematikoi*, recevaient quant à eux l'enseignement complet donné par Pythagore en personne. (Leur désignation provient du terme *mathemata* qui signifie « les choses apprises »). On le voit l'aspect sectaire des prêtres de la mathématique ne date pas d'hier et l'on comprend mieux les propos déjà cités de Jean Dieudonné qui disait en substance « seuls les mathématiciens savent ce que sont les mathématiques », que l'on peut traduire par « seuls les initiés ont accès au savoir ». Les principes communs aux religions et à la mathématique sont plus nombreux qu'on ne pense.

Ces exemples nous permettent d'émettre plusieurs propositions. Tout d'abord, il existe un lien historique entre l'invention progressive des mathématiques et la réalité. On peut donc oser la proposition suivante :

> *On appelle « objet mathématique » toute interface (constituée en fait d'un réseau neuronal) construite par notre cerveau pour concevoir un fragment de réel trop complexe, et sa propre structure. Cette interface permet à notre cerveau l'accès à la compréhension (au sens défini plus haut) d'un fragment de notre univers.*

Un exemple simple va nous permettre d'illustrer le passage du concret vers l'abstrait qui constitue l'essentiel du travail du mathématicien. Dire que « 18 est supérieur à 12 » a un sens. Un panier contenant 18 pommes en contient plus qu'un panier contenant 12 pommes, un immeuble de 18 étages est plus haut(12) qu'un immeuble de 12, un cycliste roulant à 18 kilomètres heures dépasse un cycliste roulant à 12 km/h. Le concept « 18 est supérieur à 12 » est donc tout simplement la formalisation de relations de ce type observables entre objets.

Mais, m'opposera-t-on, étant donné leur côté abstrait, les mathématiques pourraient-elles ne reposer que sur des relations matérielles ? De plus, certains concepts mathématiques anticipent leur correspondant réel. Tout se passe comme si l'esprit humain était capable d'imaginer mentalement des relations non encore observées mais qui pourront éventuellement être découvertes dans la nature ultérieurement. Certains concepts abstraits développés par les mathématiciens dits « purs » n'ont pas encore (ou n'auront peut-être jamais) d'équivalent dans le monde qui nous entoure. Pour évacuer ce problème apparent, il suffit d'émettre la thèse selon laquelle notre cerveau est une machine capable de construire une gamme étendue de relations, que ces dernières aient été observées ou non. Cette thèse est reprise par les neurologues(13). Dans ce cadre, les objets mathématiques pourraient être constitués

(11) Qui fut exclu du cénacle pour avoir montré l'irrationalité du nombre « racine de deux ».
(12) Cela dépend de la hauteur des étages.
(13) Voir par exemple le point de vue de Jean Pierre Changeux développé dans *Matières à pensée*, Collection point, OJ 22.

de réseaux neuronaux particuliers[14]. Ils deviendraient matériels.

Ce point de vue nous permet de comprendre la difficulté de communication. Si tous les concepts se réduisent à des réseaux neuronaux, il parait peu probable d'avoir à admettre que tous ces réseaux éminemment complexes soient absolument identiques chez tous les individus. Un concept doit alors être compris comme la classe d'équivalence des réseaux neuronaux qui conduisent à une utilisation identique de son contenu. Ce genre de considération est classique des concepteurs des réseaux neuronaux artificiels pour lesquels les processus d'apprentissage mis en œuvre conduisent à des systèmes conduisant la plupart du temps à des systèmes donnant les mêmes résultats mais dont la structure, aléatoire et construite indépendamment, est forcément différente. Les mathématiques échappent-elles à ce sentiment d'à peu près que nous venons de faire naître ? Les mathématiciens s'épuisent à créer un langage formel le plus éloigné possible des champs sémantiques usuels pour échapper à ce risque. Mais notre scénario permet d'expliquer la multitude d'interprétations que l'on peut donner à chaque concept.

En définissant l'objet mathématique comme étant l'interface entre notre cerveau et le réel, nous avons ouvert une autre boîte de Pandore : qu'est le réel ? Il y a une différence extraordinaire entre notre perception de la réalité et cette réalité. Notre confrontation avec l'univers se fait via nos sens (sélectionnés dans un contexte de survie et non de tentative de modélisation optimale) qui nous livrent une information utilisable certes mais très éloignée de l'essence même des choses que nous nous représentons. Ce que nous appelons réel est, au mieux, l'image mentale que nous construisons de l'univers qui nous entoure. Ce que nous prenons pour la réalité n'est jamais que l'information dont nous disposons sur l'univers. Notre réalité subjective pourrait bien n'être en fait qu'une hallucination informationnelle. Ceci est surtout vrai dans l'infiniment petit, aux limites de la matière, ou dans l'infiniment grand aux confins de l'univers observable. C'est ici que le recours aux modèles mathématiques et autres prend tout son sens. Selon N. Bohr :

> *Les mathématiques offrent la clé permettant l'accès à une intuition d'une réalité qui n'est plus nécessairement visible ou tangible immédiatement. Lorsque la réalité se dérobe à notre regard, les mathématiques significatives nous en offrent encore une intuition par la puissance d'un langage riche en invariants.*

En quoi les mathématiques participent-elles à ce type de construction mentale ? Pour que notre cerveau puisse connaître d'abord puis reconnaître les réalités qui nous entourent, il faut que ces dernières manifestent une certaine permanence. La reconnaissance d'un objet ou d'un être implique l'existence d'un acte mental consistant à repérer, classer et enregistrer certaines des caractéristiques permanentes de cet objet ou de cet être. Pour que nous puissions identifier des objets que nous découvrons et les inclure dans un ensemble structuré, il faut que nous établissions des classes d'équivalences de caractéristiques. C'est ainsi qu'ayant observé quelques

(14) Ou tout au moins de classes d'équivalences de réseaux neuronaux comme nous l'expliquons plus loin.

chats particuliers, un enfant est à même de reconnaître tous les chats, même celui dessiné par Philippe Geluck[15].

Le processus mental de reconnaissance est donc lié à la construction d'objets mentaux caractérisés par des invariants et à celle de classes d'équivalences. Or la recherche des invariants et des classes d'équivalences est précisément une part importante de ce que nous baptisons « activité mathématique ». Les mathématiques constitueraient donc une réserve conceptuelle de structures invariantes dans lesquelles nous pouvons puiser pour mieux concevoir et aborder l'univers réel. Là est son intérêt primordial et probablement son utilité sélective. L'homme n'est pas un animal particulièrement fort physiquement, il ne court pas très vite. Comment a-t-il fait pour ne pas disparaître, victime des terribles prédateurs qu'il a du affronter ? En fait, étant donné sa morphologie, seul *homo mathematicus* pouvait survivre dans ce monde hostile.

Un contre exemple à l'universalité des mathématiques

Osons un peu d'humour. La prétention à l'universalité des mathématiques s'appuie sur une multitude d'exemples et relève en cela d'un procédé démonstratif non scientifique. En cela cette prétention sort du cadre mathématique. En effet, l'alignement d'une suite d'exemples plus ou moins convaincants ne constitue en rien une démonstration. Je reprends l'un d'entre eux : il va me servir. *17 est un nombre premier* depuis toujours et cette propriété fait partie du grand livre des vérités ! En fait, cette vérité est simplement contenue dans la définition de « nombre premier » qui est propre à l'espèce humaine et qui n'a rien de « naturel ». Un exemple simple va nous montrer le défaut de ce type de proposition. Définissons la *puissance de divisibilité d'un nombre naturel* comme le rapport entre la somme de ses diviseurs propres (1 et lui-même exclus) et ce nombre. Cette définition est plus naturelle que celle de *nombre parfait*[16] qui inclut 1 et exclut le nombre dans la prise en compte des diviseurs. Ainsi, on calcule à titre d'exemple :

$$p(24) = \frac{2+12+3+8+4+6}{24} = \frac{35}{24} = 1{,}458\ 333\ 3\ldots$$

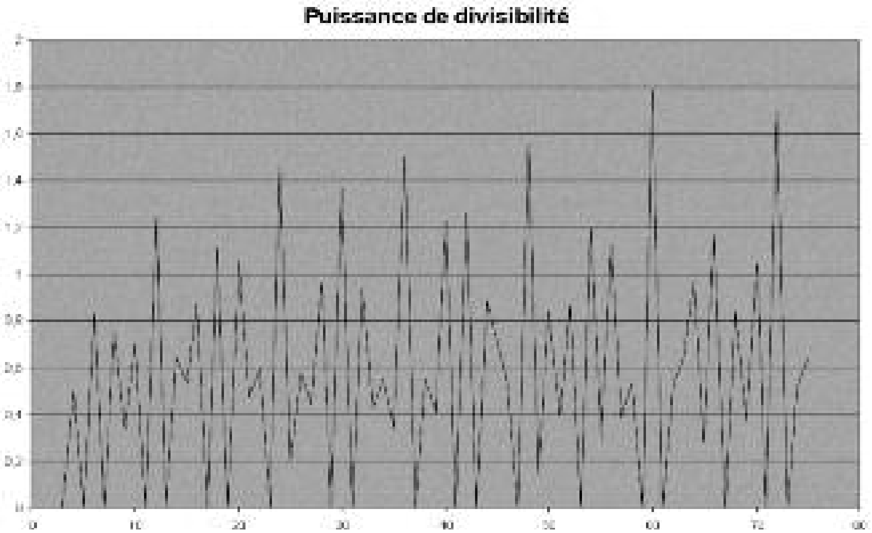
Cette définition nous permet d'énoncer un grand théorème vrai de toute éternité :

La puissance de divisibilité de tout nombre premier est nulle.

Nous en laissons la démonstration comme exercice. Trêve d'humour : notre résultat est néanmoins amusant. En représentant la fonction des naturels dans les rationnels positifs $p(n)$, on en vient à comprendre les Babyloniens qui avaient choisi de compter en base 60, dont la puissance de divisibilité est un extremum local. Voyons cela graphiquement (et maladroitement représenté dans excel) :

(15) Pourquoi ne puis-je m'empêcher d'y faire référence ?

(16) Un nombre parfait est égal à la somme de ses diviseurs, lui-même exclu. 6 est parfait puisque 6 = 1 + 2 + 3.



On peut à nouveau se poser la série de questions : qu'appelle-t-on théorème ou propriété d'un objet mathématique ? Dans quelles mesures, ces derniers ne sont-ils pas dissimulés dans nos définitions ou stimulés par nos axiomes ? Dans cette mesure, peut-on en déduire qu'ils pré-existent ? Ou sont-ils construits par le cerveau du mathématicien qui élabore sa théorie ?

Mais d'autres problèmes se posent qui disparaissent dès que l'on travaille hors hypothèse de préexistence des notions : quelle est la définition de « l'intuition » ? Qu'en est-il des propositions indécidables ?

Les structures mathématiques ont-elles toujours un sens?

On entend souvent les mathématiciens affirmer l'universalité de leur discipline en présentant plusieurs phénomènes totalement indépendants, mais malgré tout susceptibles d'être modélisés par la même structure mathématique. Cet argument est un leurre. Nous allons en apporter la preuve par un contre-exemple(17). Certes des réalités très différentes peuvent être représentées par des objets mathématiques identiques. Mais c'est le modélisateur qui impose sa structure au fragment de réel et non l'inverse. Le modèle n'est en rien la représentation des propriétés intrinsèques de ce fragment. Nous allons le montrer en considérant deux problèmes très différents en apparence et néanmoins représentés classiquement dans tous les manuels et dans toutes les formations par la même structure mathématique : le processus d'actualisation en finance et la modélisation des taux de survie d'une population en actuariat financier.

Considérons notre premier problème : la construction d'un processus d'actualisation. Notre démarche va tenter de répondre à la question : quelle est la valeur aujourd'hui- (t = 0) d'un capital C(t) échéant à l'horizon t ? Pour y arriver, nous utilisons une

(17) Pour infirmer une règle, un seul contre exemple suffit. En mathématique. Dans le langage courant, on dit que l'exception confirme la règle. Une proposition sans aucun contenu.

méthode « déductive » en imposant des conditions économiques et mathématiques raisonnables. On fait tout d'abord l'hypothèse économiquement incontournable selon laquelle l'accroissement de capital (bénéfice ou perte) doit être proportionnel au capital. Ceci est évident, si on investit dix fois plus, on gagnera ou on perdra dix fois plus. Cette condition se traduit par l'égalité :

$$\mathrm{C}(t+\Delta t)-\mathrm{C}(t)=\ldots\mathrm{C}(t).$$

Choisissons à présent le contexte - déterministe ou stochastique - dans lequel nous entendons travailler. Pour ce faire, il convient de bien comprendre la définition de la notion de dérivée lorsque la variable considérée est le temps. En fait, une fonction dérivable est une fonction localement linéaire. En effet, pour des accroissements suffisamment petits, on ose écrire :

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x},$$

$$f(x_0+\Delta x)=f(x_0)+f'(x_0)\Delta x.$$

Si la première limite existe quelle que soit la suite de valeurs Δx tendant uniformément vers 0, rien ne nous empêche, pour le calcul pragmatique de f' de ne choisir que des valeurs Δx strictement négatives. Lorsque la variable est le temps, le calcul de f' peut donc se faire exclusivement en fonction des observations du passé immédiat. Une fonction du temps dérivable est alors une fonction prolongeable localement. Le phénomène modélisé est localement déterministe. En effet, en choisissant *a posteriori* (après calcul de f') des valeurs Δt strictement positives, la représentation linéaire

$$f(t_0+\Delta t)=f(t_0)+f'(t_0)\Delta t$$

nous donne localement une description de l'état futur du système (Δt strictement positif) en fonction de son état présent ($f(t_0)$) et de son évolution passée récente ($f'(t_0)$). Une fonction dérivable du temps est donc une fonction localement déterministe puisqu'une description dans un futur proche en est parfaitement possible. Remarquons que la dérivabilité nous livre aussi la propriété suivante : les accroissements de capital sont, localement, proportionnels au temps écoulé(18) :

$$\mathrm{C}(t+\Delta t)-\mathrm{C}(t)=\ldots\Delta t.$$

En regroupant nos deux conditions, on obtient :

$$\mathrm{C}(t+\Delta t)-\mathrm{C}(t)=\ldots\mathrm{C}(t)\times\Delta t,$$

$$\mathrm{C}(t+\Delta t)-\mathrm{C}(t)=r(t)\mathrm{C}(t)\times\Delta t.$$

La dernière équation nous permet d'obtenir une équation différentielle à variables séparées soumises à la condition initiale : $\mathrm{C}(t_0)=\mathrm{C}_0$, en notant le coefficient de proportionnalité $r(t)$

(18) Le coefficient de proportionnalité étant précisément la dérivée de la fonction en ce point.

$$\frac{\Delta C}{\Delta t} = r(t)C(t) \times \Delta t.$$

dont la solution est classique (exponentielle négative à taux variable) :

$$C(t) = C(0)e^{\int_0^t r(s)ds}.$$

Revenons à présent à notre problème initial, la recherche de la valeur actuelle d'un capital futur. C'est le capital futur qui est connu (noté C(t)) et l'on cherche sa valeur présente (ici C(0)). L'équation précédente peut s'écrire :

$$C(0) = C(t)e^{-\int_0^t r(s)ds}.$$

Considérons à présent le modèle viager développé par Benjamin Gompertz (1779-1865) et qui est aujourd'hui encore à la base de la plupart des modèles actuariels. Gompertz propose la modélisation d'une population fictive de survivants à partir d'une population initiale d'effectif S_0 et des probabilités de survie des individus d'âge x, notées p_x et observées pendant un certain nombre d'années. Ces valeurs sont effectivement observables empiriquement. On pose successivement :

$$S_{x+t} = p_x \cdot S_x.$$

Gompertz définit alors le *taux instantané de mortalité par unité de temps* défini naturellement(19) par :

$$\mu_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{S_x} \frac{S_x - S_{x+\Delta x}}{\Delta x}.$$

On vérifie que

$$\mu_x = -\frac{d}{dx}[\ln S_x].$$

Ce qui permet de calculer :

$$\frac{d}{dx}[\ln S_x] = -\mu_x,$$

$$[\ln S_{x+s}]_0^t = -\int_0^t \mu_{x+s}\, ds,$$

$$\frac{S_{x+t}}{S_x} = e^{-\int_0^t \mu_{x+s} ds}.$$

Le membre de gauche de cette égalité représente le taux de survivants à partir de l'âge x, t années plus tard, ou encore, théoriquement, la probabilité de survivre pendant t années pour un individu d'âge actuel x.

On constate ici que les deux phénomènes réels ont été structurés de la même manière,

(19) Il s'agit évidemment du nombre de décès calculés par unité de temps (l'accroissement de vieillissement est noté Δx) relativement à la population de départ (S_x) et cela instantanément, ce qui explique la limite.

au moyen d'une fonction exponentielle négative à taux variable. Mais la vraie question se pose ici : les phénomènes sont-ils liés par une même structure ou … est-ce mon cerveau qui, par souci d'économie, leur attribue cette même structure ? Mais il y a une question plus angoissante : cette structure a-t-elle un sens ou s'agit-il d'une coquille vide ? On peut exprimer la question sous une autre forme : l'exponentielle à taux variable traduit-elle certaines caractéristiques du phénomène modélisé ? La réponse à cette question est négative. On peut vérifier assez aisément que toute fonction à variation bornée et continue (pas plus !) peut être représentée par ce type de structure. C'est assez intuitif, il suffit d'adapter l'intégrant de l'exposant ! Pour nous en convaincre, considérons l'exponentielle à taux variable :

$$e^{\int_0^t \frac{1}{1+r} dr}.$$

On calcule très aisément :

$$e^{\int_0^t \frac{1}{1+r} dr} = e^{\left[\left(\ln|1+r|\right)\right]_0^t} = e^{\ln|1+t|} = 1+t,$$

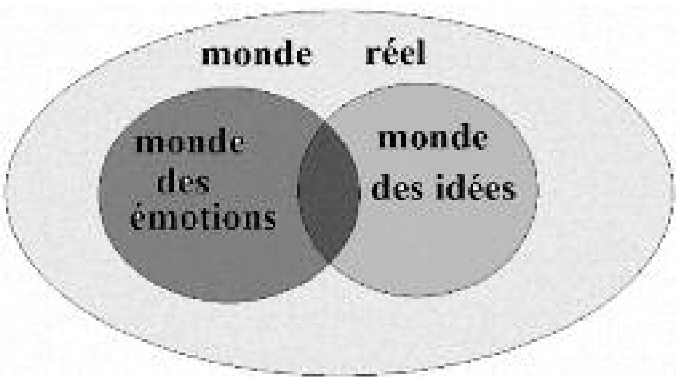
dont le caractère « exponentiel » n'est pas particulièrement manifeste.

Conclusions provisoires

Nous émettons la proposition suivante :

> *Les mondes 2 et 3 de Popper sont des productions matérielles de notre cerveau et sont donc inclus au monde 1.*

Cette proposition est un élément du monde 3 : elle est donc à valider ou invalider. Il semble néanmoins de plus en plus pertinent d'affirmer que ce sont des des processus chimiques qui déterminent nos sentiments, nos ressentis. et des processus électriques qui constituent la structure et le support de nos idées. (voici encore deux propositions de monde 3 à valider ou invalider). Le passage du matériel au spirituel devient alors, non un changement de nature, mais un saut quantitatif : le « spirituel » qualifiant une activité matérielle de grande complexité ! Notre cerveau n'a pas encore nécessairement construit de modèles pour les niveaux de complexité qu'il développe lui-même ! Notre proposition conduit à la représentation suivante dans laquelle les mondes 2 et 3 sont inclus au monde 1.



Cette proposition permet de fournir des éléments de réponse à plusieurs interrogations légitimes.

Que sont les mathématiques dans ce nouveau schéma ? Elles font partie du monde de la réalité (monde 3 inclus au monde 1). Chaque concept correspond à un certain câblage neuronal mais plusieurs câblages différents peuvent représenter la même idée dans deux cerveaux différents ; une idée, un concept est donc une classe d'équivalence de câblages neuronaux. Attention : ceci est une théorie du monde 3 et correspond à un certain câblage neuronal : on retombe donc sur une certaine forme d'autoréférence avec tout ce que ce genre de proposition comporte de niveaux d'indécidabilité. Mais ceci est heureux. Encore une fois, le programme de Hilbert rêvant la construction d'un formalisme mathématique définitif et complet est intellectuellement inhibant. Quelle joie de vivre dans le non définitif et l'indécidable!

Qu'en est-il du concept souvent rabâché et très difficile à définir de « beauté des mathématiques » ? Faisant partie du ressenti, cette notion est un élément – probablement chimique – du monde 2.

Qu'en est-il de l'efficacité des mathématiques ? Nous allons donner à cette question pertinente une réponse se situant à la fois dans le contexte darwinien et suivant la méthode poppérienne. En effet, le processus de validation de Popper joue le rôle de la sélection naturelle dans la jungle du monde 3, qui écarte les modèles moins pertinents pour ne retenir que les plus adaptés à certaines exigences. Sous cet éclairage, les maths ne peuvent qu'être efficaces ! Ce ne sont pas les mathématiques qui sont aptes à décrire le réel, c'est l'inverse : nous baptisons du nom « mathématique » toute structure cérébrale cohérente nous permettant compréhension et gestion efficace de notre univers. Et par extension, toute structure assortie des mêmes qualités de cohérence, que nous baptisons de « mathématique pure ». Galilée avait mis la charrue avant les bœufs en affirmant :

> *La philosophie est écrite dans ce livre gigantesque qui est continuellement ouvert à nos yeux (je parle de l'univers), mais on ne peut le comprendre si d'abord on n'apprend pas à comprendre la langue et à connaître les caractères dans lesquels il est écrit. Il est écrit en langage mathématique.*

Le monde n'est pas écrit en langage mathématique : les mathématiques constituent le langage que la structure particulière de notre cerveau a élaboré pour comprendre et être capable de gérer et d'anticiper certains éléments de la nature.

Pourquoi y a-t-il des mathématiques partout ? Dans le cadre de cet exposé, la question ne se pose plus puisqu'on appelle « mathématique » toute construction mentale (monde 3) permettant la compréhension (au sens défini plus haut) d'un fragment de réel (monde 1). En souhaitant accéder à la compréhension de quoi que ce soit, on met en place une structure mentale que l'on inclut dans l'ensemble « mathématique ». Et cette constatation en amène une autre : on observe que les mathématiques n'ont pas les faveurs du grand public ! Quel dommage ! Pour lui !

Elles représentent en fait le seul moyen, adapté à la structure de notre cerveau, pour comprendre, gérer et modeler notre univers.

Mes cinquante années d'enseignant-chercheur

Roger Cuppens

I. Mes études

Je suis né à Lille le 15 octobre 1939, quelques semaines après la déclaration de guerre. Mon père, qui avait été mobilisé, eut droit à une permission pour cette occasion. Il fut fait prisonnier lors de la débâcle de juin 1940 et je ne fis réellement sa connaissance qu'à la fin de la guerre.

Le seul souvenir que je garde de ma prime enfance est celui d'un soir où nous étions tranquillement en train de souper (dans le Nord, les trois repas sont le déjeuner, le diner et le souper) dans notre cuisine. C'est alors qu'un avion lâcha plusieurs bombes dont l'une tomba dans la maison voisine juste derrière le mur mitoyen de notre cuisine : à quelques mètres près nous étions tous morts, mais le hasard nous fut favorable.

Je fis toute ma scolarité (de la dixième à la terminale) dans une institution religieuse située près de chez nous, le collège Jeanne d'Arc (on ne parlait pas de lycée pour les institutions privées), aujourd'hui disparu. J'ai toujours été le plus jeune et le premier de ma classe, sauf en éducation physique. De ces études, je me souviens surtout de mon année de Math Élem (la terminale de l'époque) où nous avions beaucoup d'heures de mathématiques. Je me passionnais pour l'arithmétique, ce qui décida de mon orientation. Par contre je me désintéressais de la géométrie et abhorrais la géométrie descriptive. Évidemment à l'oral du bac (alors obligatoire), j'ai tiré à la session de juin une question de géométrie descriptive pour laquelle l'examinateur m'accorda un royal 7 sur 40 (je crois). Bref, je fus ajourné, l'un des rares de ma classe. La honte ! Heureusement, il y avait une deuxième session à laquelle je fus facilement reçu.

Ce semi-échec eut une heureuse conséquence. J'avais présenté un dossier pour les classes préparatoires du Lycée Faidherbe de Lille et j'étais convoqué à un concours d'entrée quelques jours après mon admission au bac. Je ne m'y présentais pas et, rétrospectivement, ce fut une sage décision car, pour moi, le régime classe prépa aurait été le bagne…

Je m'inscrivis donc à la rentrée 1956 au propédeutique Mathématiques Générales de la Faculté des Sciences de Lille. Le régime était alors très différent du régime actuel. Il y avait une dizaine d'heures de cours et TD (en amphi), le travail principal étant un devoir (copieux) à rendre chaque semaine. Ce régime me convenait parfaitement car je me suis toujours levé tôt (même très tôt pour mon entourage) et je travaillais beaucoup avant de me rendre à l'université. En dehors des cours, je passais beaucoup de temps au cinéma et à jouer à la belote et au bridge. Je passais donc pour un parfait fumiste dont les résultats étaient incompréhensibles !

Il y avait deux cours différents : l'un, classique, enseigné par Marcel DECUYPER tandis que Georges POITOU assurait un cours d'algèbre linéaire, ce qui à l'époque était une nouveauté absolue (il n'y avait même pas de livre sur la question). POITOU était absolument fascinant, faisant son cours sans notes et apparemment sans difficultés(1). Si l'enseignant était remarquable, j'avais – comme tout le monde – du mal à assimiler toute cette nouveauté et ne parvins à établir un rapport avec mes études précédentes que quand on en arriva à une classification des coniques (vues abondamment en terminale) et à celle des quadriques (une grande nouveauté, mais combien sympathique).

Georges POITOU (1926-1989).

a enseigné à la Faculté des sciences de Lille jusqu'en 1965. Il participa ensuite à la fondation de la Faculté des Sciences d'Orsay, dont il fut doyen de 1968 à 1970. En 1981, il devint directeur de l'École normale supérieure de la rue d'Ulm jusqu'à sa mort brutale en 1989. Il réalisa en particulier la fusion de la rue d'Ulm et de l'ENS de jeunes filles de Sèvres, intervenue en 1985.

En définitive ce fut une bonne année de transition entre les mathématiques classiques et ce qui allait suivre… Je la finis sans trop forcer avec une mention Bien.

L'année suivante, je commençais une licence qui comportait les « trois glorieuses », Calcul Différentiel et Intégral, Mécanique Rationnelle et Physique Générale, qu'il était normal de faire en trois ans. Je m'inscrivis aux deux premiers et préparais sérieusement le premier. Le certificat CDI comportait deux parties : Analyse par Roger DESCOMBES et Géométrie Différentielle par Jean FRENKEL. Comme je faisais partie d'un groupe qui faisait le pitre lors des intercours de Monsieur DESCOMBES, celui-ci me prit en grippe. Mon écrit fut satisfaisant et m'aurait valu une mention avec le régime actuel, mais je passais l'oral (encore obligatoire) avec … Monsieur DESCOMBES. Il me posa la dernière question traitée dans l'année, à savoir le théorème d'EULER sur l'existence des solutions d'une équation différentielle. Je lui énonçais à peu près correctement le théorème, mais n'avais aucune idée de la démonstration… Il me renvoya à un oral de rattrapage avec son collègue FRENKEL qui, lui, fut satisfait et j'obtins donc en juin le CDI avec la mention passable…

Je travaillais un peu pendant les vacances la Mécanique, mais ne comprenais pas grand chose à cette matière, n'étant réellement intéressé que par la méthode des multiplicateurs de LAGRANGE : c'était peu pour réussir et j'appréhendais l'année suivante à repréparer cette matière, sans parler de la Physique !

Mais là divine surprise ! Il y eut une réforme de la licence (la première d'une longue série). Les trois glorieuses étaient remplacées par cinq certificats : deux de mathématiques (correspondant à l'ancien CDI), un de mécanique générale (une

(1) Une seule fois, il eut un trou durant une démonstration. Il sortit alors une carte de visite de sa poche, y jeta un coup d'œil, dit « ah, oui ! » et il reprit son cours comme si rien ne s'était passé. Je n'ai jamais su ce qu'il y avait sur cette carte…

moitié de l'ancien Mécanique rationnelle), un de physique (un tiers de Physique générale) et un certificat optionnel de mathématiques. Je m'inscrivis donc à trois certificats (Mécanique générale, Optique, Calcul des probabilités) pour compléter ma licence et, à tout hasard, j'y ajoutais un certificat intitulé Géométrie supérieure qui était nécessaire pour pouvoir passer l'Agrégation.

Le premier que je passais fut celui de mécanique. Je n'en ai guère de souvenir, le seul important étant que le problème d'examen était trivial quand on connaissait les multiplicateurs de LAGRANGE qui n'étaient plus au programme. Je fis tout le problème en les utilisant et me retrouvais avec une mention très bien (la seule de mes études) sans avoir vraiment assimilé les rudiments de la mécanique !

Le cours sur le calcul des probabilités était une nouveauté pour l'époque. Il fut assuré par Christiane CHAMFY qui, au moins en apparence, n'en connaissait guère plus que nous. Elle nous fournit comme références les deux livres classiques de FELLER et LOÈVE (en anglais, bien sûr) et le cours consistait surtout en une confrontation de nos lectures. Pour problème d'examen, elle en choisit un dans le LOÈVE et je fus le seul à traiter la deuxième question, tous les autres candidats venant seulement à bout de la première question. Tout le monde fut reçu avec la mention passable alors que j'obtenais une mention Assez Bien (rétrospectivement plus méritoire que la mention Très Bien en mécanique).

Pour le certificat d'Optique, je fis une épreuve écrite honorable, une épreuve de TP catastrophique et, à l'oral, le professeur ROIG me déclara que si j'avais eu l'intention de faire de la physique, il ne me donnerait pas l'examen, mais qu'il valait mieux que je continue en math où l'on avait alors besoin de nombreux enseignants.

Quant au certificat intitulé Géométrie supérieure, je retrouvais Georges POITOU qui y enseignait … la théorie de Galois. Je le présentais en septembre et y étais le seul candidat. Sans doute pour ne pas avoir fait un problème pour rien, je bénéficiais comme on dit de l'indulgence du jury et me retrouvais donc pour mon vingtième anniversaire et avec beaucoup de chance à avoir terminé mes études universitaires.

II. Début de carrière

À vingt ans, je postulais à un poste d'enseignant provisoire (je ne me rappelle plus le terme exact) et m'inscrivis à la préparation à l'agrégation. Comme il me restait un peu de loisirs, j'appris que le directeur de l'Observatoire de Lille, Vladimir KOURGANOFF, faisait un cours du soir pour apprendre à des scientifiques suffisamment de russe pour pouvoir lire un texte de leur discipline. Comme on le verra par la suite, j'eus la bonne idée de m'y inscrire.

Ma candidature à un poste d'enseignant posa de gros problèmes. En effet, à l'époque, la majorité était encore à 21 ans et mon père dut accepter de m'émanciper avant que ma candidature ne soit acceptée. Je me retrouvais en poste au Collège Technique Baggio de Lille (devenu depuis Lycée Technique) avec des enseignements en quatrièmes techniques et commerciales et quelques heures en BTS. Je n'eus pas à assurer ces dernières car mes élèves, qui étaient tous plus âgés que moi, décidèrent qu'ils pouvaient en faire l'impasse, vu le coefficient de la matière à l'examen. Les conditions dans lesquelles s'est passée cette année m'ont dégoûté de l'enseignement secondaire et je n'aurais pas persisté dans cette voie. Ne parlons pas non plus de l'agrégation pour lequel j'étais à l'époque beaucoup trop tendre(2).

À la fin de cette année scolaire, l'Université de Lille obtint la création de plusieurs postes d'assistant en mathématiques et je présentais ma candidature. Compte tenu de l'hostilité de Roger DESCOMBES, je fus le premier des candidats non pris. Mais à la rentrée, Georges POITOU reçut de son collègue Jean-Pierre KAHANE, alors professeur à Montpellier, l'avis qu'il avait un poste d'assistant non pourvu et lui demandait s'il avait un candidat à proposer. Il me demanda si cela m'intéressait et, au début de la semaine suivante, je débarquais comme assistant stagiaire à Montpellier (actuellement le poste resterait vacant ou pourrait même être perdu). Je devais assurer des TD en Mathématiques Générales sous la houlette de Jean-Pierre KAHANE.

Jean-Pierre KAHANE

a enseigné à Montpellier jusqu'en 1961, date à laquelle il rejoignit l'Université de Paris-Sud Orasy qu'il présida de 1975 à 1978 et dont il est encore professeur émérite. Il est membre de l'Académie des Sciences depuis 1998.

J'avais moins de 21 ans et en paraissais 16, m'a dit un peu plus tard un de mes collègues. Cela me permit une entrée en matières triomphale. À l'époque je devais faire mes TD dans une salle dans laquelle un appariteur essuyait les tableaux avant l'arrivée de l'enseignant – cette pratique a bien entendu disparu. Quand j'entrais dans la salle, il me dit avec une belle superbe « Vous saurez que cette porte est réservée aux enseignants ». « Mais je suis l'enseignant » lui rétorquais-je, déclenchant dans l'auditoire un immense éclat de rire. Des années plus tard, lors d'une de mes rares visites à Montpellier, je rencontrais cet appariteur qui s'excusât une fois de plus de son erreur et je lui affirmais au contraire que j'aurais dû le payer pour son intervention car, après avoir si bien ri tous ensemble, je ne connus plus jamais de problèmes de discipline.

Jean-Pierre KAHANE avait l'habitude de réunir une fois par semaine ses assistants pour leur dire ce qu'il avait traité dans la semaine et leur suggérer des exercices à traiter. Ces séances étaient très enrichissantes, mais très fatigantes. En effet, elles étaient souvent interrompues par une visite ou un coup de téléphone. Nous en profitions pour nous reposer et nous divertir un peu, mais quand Jean-Pierre KAHANE revenait, il reprenait son discours comme s'il n'y avait pas eu d'interruption (sa faculté de passer sans effort apparent d'un sujet à un autre est une de ses caractéristiques qui m'a toujours fasciné).

Bref, j'appris énormément de choses durant cette année, mais j'échouais une deuxième fois à l'écrit de l'agrégation, mais cette fois dans un rang tout à fait

(2) Mon seul souvenir de cette préparation est la critique suivante d'une leçon d'oral par Georges POITOU : « une définition ne doit être introduite que si on peut fournir plusieurs exemples et contre-exemples ». J'adhère évidemment à cette remarque, mais pourquoi ne l'avait-il pas appliqué plus souvent dans son cours d'algèbre linéaire ?

honorable. Le principal obstacle était la première épreuve « Élémentaires et Spéciales » qui consistait en général en un long problème de géométrie que j'étais incapable de traiter et comptait pour 60 sur 200 : ce n'était évidemment pas la meilleure manière de débuter un difficile concours. De plus, mon travail de l'année ne fut pas jugé suffisant pour pouvoir me titulariser et cette première année d'enseignement supérieur n'augurait pas d'une carrière brillante. Le seul fait positif fut que je profitais des vacances de Noël pour remonter dans le Nord me marier avec ma fiancée et nous nous installâmes tous les deux à Montpellier(3).

L'année suivante me permit d'être plus à l'aise dans le métier d'assistant et j'eus le plaisir à l'agrégation de constater que le problème de « Élémentaires et Spéciales » comportait une partie d'arithmétique pour laquelle il suffisait de connaître l'identité de BÉZOUT. Au lieu de la bulle attendue, j'obtins la moyenne et les deux autres épreuves d'Analyse et de Mécanique ne me posèrent guère de problèmes. La dernière épreuve était une épreuve de Mathématiques Appliquées qui comportait une grosse partie de calculs (à faire à la main avec le seul outil des tables de logarithmes, les calculatrices étant alors tout à fait inconnues). C'était mon point fort, mais l'écrit à Montpellier se passait par une température caniculaire et j'eus un trou énorme : je mis deux heures (sur les quatre) à retrouver la formule de la série du binôme que j'avais vu la semaine précédente avec mes étudiants ! Dans le temps imparti, je ne pus aborder le calcul et dût me contenter d'un 16 sur 40, somme toute honorable. Néanmoins j'étais admissible et un examinateur de Montpellier me donna même l'information que mon écrit devait me permettre d'être admis sans problème.

L'oral comportait deux leçons : pour celle de « Spéciales », je n'eus aucun problème à présenter les extensions de la notion d'intégrale de RIEMANN. Par contre, pour celle d'« Élémentaires », je tirais l'une des deux leçons de géométrie descriptive restant au programme : les intersections des cônes et cylindres de révolution. Il fallait montrer que sous certaines conditions (que j'ai oubliées depuis), la quartique intersection se décomposait en deux coniques, le raffinement étant de montrer que parmi ces deux coniques l'une au moins était une ellipse. Je passais mon temps d'exposé à établir complètement ce résultat et les questions du jury se résumèrent à une seule : « Pouvez-vous nous donner une idée de l'épure ? ». Ma réponse laconique « Non » mit fin à l'épreuve. J'obtins quand même la moyenne. Comme on passait l'oral en fonction inverse de la distance à Paris, je faisais partie du dernier groupe et restais donc pour assister à la proclamation des résultats : il y avait 185 reçus et la proclamation se faisait en commençant par le dernier ! Bien que je pensais avoir réussi, quand arriva le quarantième, je commençais à m'inquiéter et ma femme qui me tenait compagnie n'en menait pas large mais finalement j'étais reçu 21ème et premier des non normaliens. Je pus fêter à la fois mon succès et ma titularisation comme assistant.

La rentrée d'octobre 1962 fut marquée par deux événements : la naissance de mon fils Frédéric et le début de ma collaboration avec Madame Monique LAFON-AUGÉ4). Elle enseignait les probabilités et cherchait un assistant intéressé. Je fis donc pendant quelques années les TD de probabilités sous sa direction. On verra dans la suite la part essentielle qu'elle jouera, ainsi que son mari Jean-Pierre, dans ma

(3) Nous avons fêté l'an dernier nos noces d'or.

carrière.

Ainsi, je commençais à m'intéresser à l'Arithmétique des lois de probabilités. Cette théorie était née dans les années trente d'une série d'articles de Paul LÉVY où il conjecturait que si la somme de deux variables aléatoires indépendantes suit une loi normale, il en est de même de ces deux variables. Il n'avait pas été capable de démontrer ce résultat, mais en déduisait une foule de conséquences intéressantes. Le résutat fut démontré peu après par Harald CRAMÉR en utilisant la notion de fonction caractéristique (c'est-à-dire la transformée de Fourier) d'une loi de probabilité qui avait été introduite par … Paul LÉVY. Puis Dmitry RAIKOV démontra le résultat analogue pour les lois de Poisson. Tous les résultats qui suivirent étaient exposés dans le livre *Characteristic functions* d'Eugene LUKACS qui devint mon livre de chevet.

Puis j'appris l'existence d'un livre en russe de Yuri LINNIK qui venait de démontrer de nouveaux résultats sur le sujet, dont le plus simple était que le théorème de Lévy-Cramer était encore vrai pour les produits d'une loi normale et d'une loi de Poisson. J'achetais le livre et me mis à la traduction en essayant de me souvenir des connaissances du cours de Lille. Les premières pages me prirent plusieurs jours, puis le reste suivit facilement. Ces lectures me fournirent le contenu de trois notes que Monique LAFON se chargea de confier à Daniel DUGUÉ et qui furent publiées aux Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences. Rétrospectivement, ce n'était pas grand-chose, mais il faut bien un début !

Yuri LINNIK (1915-1972)

avait déjà obtenu d'importants résultats en théorie des nombres lorsqu'il publia ses résultats sur l'arithmétique des lois de probabilité. Il était professeur à l'Institut Steklov de Leningrad et membre de l'Académie des Sciences de Russie.

III. Service militaire

Comme je ne voyais pas comment aller plus loin et comme la guerre d'Algérie venait de se terminer, je résiliais mon sursis et partis au service militaire avec la promesse de travailler comme expérimentateur de ce qui deviendra plus tard les scientifiques du contingent. Je commençais par deux mois de classes à Évreux et trois mois de stage dans les transmissions à Épinal (en plein hiver…). J'attendais mon poste de scientifique et ne voyais rien venir… De mon séjour à Épinal, je retiendrais surtout le jour où des collègues professeurs de mathématiques qui avaient comme moi résilié leur sursis et qui, habitant Épinal, bénéficiaient d'un peu plus de

(4) Monique LAFON-AUGÉ (dont je n'ai malheureusement pas de photo) a été professeur à Montpellier de 1960 à 1968, à l'université Paul-Sabatier de Toulouse de 1968 à 1974, puis à l'université de Paris XII de 1974 à 1984, assurant la présidence de cette université de 1982 à 1984. Elle fut nommée recteur de l'académie d'Orléans-Tours en avril 1984, puis de l'académie de Nice en décembre 1985. En 1988, elle devint Inspecteur général de l'Éducation nationale jusqu'à sa retraite et fut membre du CSA (conseil supérieur de l'audiovisuel) de 1989 à 1997.

liberté, me mirent sous le nez un article du Monde annonçant la démonstration par Paul COHEN de l'indépendance de l'hypothèse du continu. Ils me demandèrent si je pouvais leur expliquer un peu l'importance de ce résultat qui ne leur était pas du tout évidente. Cela pouvait occuper plusieurs soirées à condition d'avoir accès à un tableau, donc à une salle de cours. Ils se chargèrent de la demande et revinrent en me disant que l'adjoint au commandant de compagnie, ancien Polytechnicien, acceptait à condition qu'il puisse y assister. La première séance en sa présence consista à l'écœurer et je pus ensuite satisfaire du mieux possible à la demande de mes collègues. Le deuxième souvenir fut d'avoir, avec quelques-uns d'entre eux, écopé de quelques semaines de prison au motif d'avoir volontairement raté l'examen de de fin de stage. En effet, vu le niveau des cours, nous avions décidé de ne pas répondre aux questions qui n'avaient pas été abordées à la caserne et, en particulier, nous nous avérâmes incapables de lire un schéma d'appareil puisque ceci n'avait pas été traité alors qu'il suffisait de suivre sur le schéma le parcours de chacun des fils ayant sa propre couleur ! Je ne finissais pas la peine car mon avis d'affectation à Paris arriva enfin !

J'étais affecté à la DRME (Direction des recherches et moyens d'essai, depuis le service a changé de nom) où mon travail consistait à donner un avis scientifique sur des documents tous estampillés des sceaux Secret, Confidentiel Défense et quelques autres. Pour donner une idée, les plus intéressants étaient les traductions des articles scientifiques parus dans la Pravda et dans d'autres journaux soviétiques ! En particulier, je me passionnais pour une enquête destinée à obtenir un classement des savants soviétiques et montrant que les divers critères envisagés éliminaient tous des scientifiques éminents… La goutte qui fit déborder le vase arriva avec des photocopies de pages prises au hasard dans un livre que je reconnus comme le Feller que j'utilisais pour mes TD de Probabilités. Ma réponse fut que si l'on me donnait un bon je pouvais leur acheter dans la journée le livre complet à la librairie Offilib qui se trouvait à une cinquantaine de mètres de l'immeuble abritant la DRME. Pour me remercier, on m'affecta à un laboratoire de Statistique du Centre National des Télécommunications…

Ce laboratoire travaillait sur des données recueillies par le centre de Lannion sur le comportement à divers tests des composants électroniques destinés aux futurs satellites français : résistance aux températures extrêmes, aux accélérations, aux vibrations, etc. Or les appareils utilisés étant très coûteux, il n'y avait que peu de données de chaque (en général, moins de 10). Les tests statistiques utilisés sans précaution ne semblaient pas donner satisfaction. Je mis quelque temps à comprendre le problème et beaucoup plus de temps à convaincre les autres membres du labo que 10 ne pouvait pas être considéré comme un grand nombre ! Le seul que je ne suis pas arrivé à convaincre fut le chef du labo qui, polytechnicien, avait suivi à l'École un cours de Laurent SCHWARTZ et se retranchait derrière son autorité. Heureusement que mon temps militaire se terminait car je n'avais rien à proposer en remplacement des tests classiques. Je fus, comme on dit, rendu à la vie civile et oubliait ce problème. Toutes ces expériences m'avaient rendu viscéralement aussi antimilitariste que mes études secondaires avaient fait de moi un agnostique anticlérical…

IV. Ma thèse

Je réintégrais mon poste à Montpellier. Je retrouvais Monique LAFON pour son enseignement de probabilités. Je repris aussi mes réflexions sur l'arithmétique des lois de probabilité sans voir réellement où cela pourrait me mener jusqu'au jour où Monique LAFON revint de Paris en me disant qu'elle en avait parlé avec Albert TORTRAT qui lui avait suggéré que je pouvais essayer de généraliser les résultats obtenus par LINNIK dans le cas des lois d'une variable au cas des lois à plusieurs variables, mais que c'était sans doute un problème difficile.

La raison de cette difficulté était que les résultats de LINNIK utilisaient de manière très astucieuse la théorie des fonctions entières d'une variable complexe. Leur extension concernerait donc des fonctions entières de plusieurs variables complexes. Or ce domaine d'étude était un sujet à la mode et les résultats obtenus étaient d'une grande difficulté.

Comme je ne connaissais rien à la théorie des fonctions de plusieurs variables complexes et que je n'avais aucun goût pour cette théorie (dont il y avait néanmoins un brillant représentant à Montpellier en la personne d'un élève de Laurent SCHWARTZ, André MARTINEAU(5)), j'essayais d'aborder le problème avec la première méthode qui me vint à l'esprit : une récurrence sur le nombre de variables. Et ça marchait : en quelques jours, j'avais une démonstration complète de la version multivariée du premier théorème de LINNIK, celui sur les produits d'une loi normale et d'une loi de Poisson. Bien que ce soit fort éloigné de ses préoccupations habituelles, Jean-Pierre LAFON, le mari de Monique, fut le premier à relire mes élucubrations, puis André MARTINEAU en confirma la véracité.

Jean-Pierre LAFON

a enseigné successivement à Clermont-Ferrand, Montpellier, Toulouse et Paris. Il a écrit plusieurs livres d'algèbre dont un sur le nombre π.

La première chose à faire était d'en prendre date et pour ceci il y avait les notes aux Compte-Rendus de l'Académie des Sciences pour lesquelles on était limité à quatre pages. Deuxième miracle : j'arrivais à faire tenir toute ma démonstration dans les limites imposées, mais bien entendu la note contenait peu (ou pas) d'explications supplémentaires et était donc difficilement lisible… Une fois ceci fait, Monique LAFON confia ma note à Daniel DUGUÉ pour la remettre à un académicien. Mais celui-ci n'arriva pas à se décider et il fallut qu'André MARTINEAU prenne l'affaire en main en menaçant de faire passer ma note par Laurent SCHWARTZ pour qu'elle puisse enfin paraître !

(5) André Martineau (1937-1972) a été professeur à Montpellier, puis à Nice où il est mort prématurément.

Bien entendu, je persistais dans cette voie productive et accumulais les résultats. Évidemment, je dus faire appel à toutes mes connaissances, mais aussi en apprendre de nouvelles telles que les travaux de Laurent SCHWARTZ sur les sommes d'exponentielles. Bien m'en prit car j'appris un peu plus tard qu'un élève de LINNIK, Iossif OSTROVSKII, avait obtenu indépendamment une bonne partie de mes résultats.

Lorsque j'eus terminé, Daniel DUGUÉ prit les affaires en main. Tout d'abord, il m'invita plusieurs fois à son séminaire et j'y rencontrais successivement Eugene LUKACS, le spécialiste incontesté des fonctions caractéristiques, puis Yuri LINNIK lui-même. Restait à passer la thèse : à l'époque, il n'était pas envisageable pour un jeune mathématicien de le faire en province et la soutenance devait comporter la présentation d'un deuxième sujet sans aucun rapport avec le domaine du sujet de la thèse principale et que l'impétrant n'avait que quelque mois pour maîtriser. Daniel DUGUÉ me trouva un président prestigieux en la personne de Paul LÉVY et contacta Pierre SAMUEL qui me donna comme deuxième sujet une question de théorie des nombres : la formule des partitions de RADEMACHER.

Tout semblait en place pour une soutenance au mois de juin 1967 lorsque Daniel DUGUÉ m'annonça une nouvelle alarmante : le doyen ZAMANSKI venait de créer à Paris une Commission des Thèses toute puissante pour décider de la soutenance d'une thèse. C'était une catastrophe car Eugene LUKACS m'avait invité pour l'année scolaire suivante et j'avais déjà pris des billets sur le France pour être présent à la rentrée suivante à Washington. Heureusement, Daniel DUGUÉ fournit à la commission deux rapports – parait-il fort élogieux, je ne les ai jamais lus – de Eugene LUKACS et de Yuri LINNIK et je pus soutenir ma thèse le 27 juin 1967. Je fus évidemment reçu avec la mention Très Honorable.

Daniel DUGUÉ (1912-1987)

a été professeur à la faculté des sciences d'Ager, puis de Caen avant de succéder en 1960 à Georges Darmois à la tête de l'Institut de Statistique de l'Université de Paris qu'il dirigera jusqu'à sa retraite en 1981. Il a grandement contribué au développement de la statistique en France.

Eugen LUKACS (1906-1987)

Né en Hongrie, il fit ses études à Vienne où il passa une thèse en science actuaire en 1935. Après l'Anschluss, il émigra aux États-Unis. Il enseigna à la Catholic University of America (Washington D.C.) où il fonda un Laboratoire de Statistique en 1959. En 1972, il transféra ce laboratoire à la Bowling Green State University (Ohio) et il prit sa retraite en 1976. Il est l'auteur d'un livre sur les fonctions caractéristiques qui reste la référence sur le sujet et a été élu membre de l'Académie des Sciences d'Autriche en 1973.

Paul LÉVY (1886-1971)

Après des études à Polytechnique, il passe en 1911 une thèse d'Analyse et enseigne à l'École des Mines de Paris de 1913 jusqu'au début de la guerre 14, puis à Polytechnique à partir de 1920. Révoqué par le régime de Vichy, il retrouve son poste à Polytechnique jusqu'à sa retraite en 1959. Il est élu à l'Académie des Sciences en 1964. Ses travaux concernent essentiellement l'Analyse fonctionnelle et les Pobabilités (fonctions carcatéristiques, martingales, mouvement brownien, …).

Je terminerai cet épisode de ma thèse avec quelques anecdotes complémentaires sur Monsieur Paul LÉVY. Ma première rencontre avec lui eut lieu un samedi matin. Monsieur DUGUÉ l'avait contacté pour présider le jury de ma thèse et il voulait me présenter à lui. J'avais pris le train de nuit de Montpellier à Paris et j'étais le parfait provincial débarquant à Paris. Monsieur DUGUÉ m'avait donné rendez-vous dans un café du Boulevard Saint-Germain et nous primes le métro pour le seizième arrondissement. Comme nous étions quelques minutes en avance, Monsieur DUGUÉ prit la peine de téléphoner pour savoir si nous pouvions venir. Comme il le dit dans la conversation qui suivit, Paul LÉVY avait comme voisin François MAURIAC, ce dont il semblait très fier. Nous primes un ascenseur qui s'ouvrait directement dans son appartement, ce que je n'avais encore jamais vu. Et là un petit monsieur nous attendait et la première phrase qu'il me dit fut « Vous savez, monsieur Cuppens, que vous me faites un immense honneur en me demandant de présider votre texte ». J'avoue avoir été abasourdi et il m'expliqua qu'il avait choisi d'être, comme son père, professeur à Polytechnique et qu'à l'époque les traditions étaient telles que quand on le proposait comme membre d'un jury, le Doyen de la Faculté des Sciences rayait négligemment son nom. Il ajouta que maintenant qu'il était membre de l'Académie des Sciences on n'oserait sans doute plus agir ainsi, mais que plus personne ne le lui avait proposé et que ce serait la première fois qu'il participe officiellement à un jury. Je n'ai pas vérifié, mais je crois bien que ce fut la seule.

Dans le livre de mémoires *Quelques aspects de la pensée d'un mathématicien* qu'il publia en 1970 et où il me cite très (trop ?) élogieusement, il déclarait qu'il n'avait jamais pu lire un article d'un autre mathématicien jusqu'au bout, mais qu'il essayait toujours de le réécrire à sa façon. Ce n'est pas l'impression que j'ai eue car il a passé au crible chaque ligne de mon manuscrit, m'envoyant un important courrier me signalant en particulier toutes les fautes de français (depuis j'essaye de faire la même chose). Je me souviens en particulier d'une lettre reçue un lundi matin me signalant qu'un théorème était manifestement faux, suivie d'une seconde le mardi me signalant qu'il en avait parlé à l'Académie des Sciences avec Laurent SCHWARTZ (son gendre, comme chacun sait) et que celui-ci lui avait dit qu'actuellement on employait souvent « positif » pour « positif ou nul » et que c'était peut être une explication à son désaccord. Le mercredi, arrivait une troisième lettre me disant qu'avec la définition de Laurent SCHWARTZ (dont il n'acceptait pas le laxisme), non seulement le résultat était vrai, mais qu'il était impardonnable de n'avoir pas sauté la difficulté puisque je signalais plus loin que ce résultat généralisait (de manière très astucieuse, selon lui) un théorème qu'il avait obtenu en 1937…

Ma deuxième rencontre avec lui eut lieu au séminaire Bourbaki (ce fut la seule fois où j'assistais à cette « messe »). Pierre SAMUEL m'y avait donné rendez-vous pour me parler de mon deuxième sujet et, comme je ne l'avais jamais rencontré, André MARTINEAU avait accepté de me servir de mentor. J'assistais à la première conférence où l'un des jeunes loups de l'époque (qui est décédé depuis après une brillante carrière) devait parler des travaux de Paul LÉVY à l'origine de ce que l'on appelle maintenant l'analyse fonctionnelle. Quelques minutes avant le début de la conférence, Paul LÉVY arriva, salua quelques membres de l'assistance (dont moi-même) et s'installa au premier rang. Plusieurs fois durant l'exposé, il interrompit le conférencier pour lui demander le sens exact d'un mot employé et au moins une fois il signala que de son temps on employait un autre mot qui lui semblait beaucoup plus approprié. À la fin de la conférence, il remercia le conférencier de sa patience, le félicita publiquement et s'en alla. Lors de la pause qui suivit, je ne quittais pas André MARTINEAU d'une semelle et me retrouvais dans un groupe qui entourait le conférencier et celui-ci demanda qui était ce vieux con qui l'avait constamment interrompu, ce à quoi André MARTINEAU lui répondit : « Ce vieux con, ce n'est que Monsieur Paul LÉVY ! ».

La troisième (et dernière) fois que je vis Paul LÉVY fut évidemment le jour de ma thèse. Monsieur DUGUÉ avait envoyé, comme il était convenu, un de ses élèves chercher Monsieur Paul LÉVY à son appartement et celui-ci revint affolé en disant qu'il ne l'y avait pas trouvé. Ce n'est que quelques minutes avant l'heure de début annoncée que nous le vîmes arriver. Ill nous expliqua qu'il était hors de question qu'il arrive en retard pour un tel événement, qu'il avait attendu jusqu'à l'heure où il était sûr d'arriver à l'heure en prenant le métro, ce qu'il avait fait…

V. Mon année scolaire aux États-Unis

Après un repos bien mérité durant l'été 1967, j'embarquais avec ma famille sur le France pour répondre à l'invitation d'Eugene LUKACS d'occuper un poste de *Visiting Professor* à la *Catholic University of America, Washington DC*, durant l'année scolaire 1967-68. Après une traversée sans histoires, nous débarquâmes dans le port de New York où le dépaysement se fit immédiatement sentir, le seul problème de commander à manger étant à lui seul redoutable. Néanmoins le voyage jusqu'à Washington ne fut pas trop pénible et j'arrivais sans encombre à la Catholic University.

Mon séjour commença par un incident quasi diplomatique. En effet on me fit remplir une fiche de renseignements où je barrais négligemment la case « Religion ». Peu de temps après, je fus convoqué chez le Vice-Recteur (c'est-à-dire le directeur officiel, le Recteur à l'époque étant le Cardinal SPELLMAN) où, après un dialogue de sourds (je me retranchais souvent derrière ma méconnaissance de l'anglais), il finit par me faire comprendre que je pouvais déclarer n'importe quelle religion, mais qu'il était inadmissible que je n'en ai pas. Ce à quoi je répondis que faire des mathématiques n'avait rien à voir avec une religion et qu'il pouvait me déclarer catholique puisque mes parents m'avaient baptisé quand j'étais bébé, mais que depuis des années je me considérais comme athée. La discussion s'arrêta là, mais je ne fus pas invité à la cérémonie de réception des nouveaux professeurs…

Malgré cela tout se passa bien à l'Université. Je devais assurer un cours niveau troisième cycle à huit étudiants. Le cours avait lieu de 20 h à 22 h, mais dès le début ils me firent comprendre que les traditions étaient de faire une pause à la cafétéria et ce fut agréable de leur parler de la France quoique je ne sache pas ce qu'ils purent en retenir vu la pauvreté de mon anglais… L'examen se passa de manière très curieuse pour moi : je devais donner à chacun des étudiants un sujet (très vague) et ils avaient un mois pour rassembler des éléments et des idées sur le sujet soit dans les livres, soit à partir de conversations avec d'autres professeurs… Absolument inconcevable en France !

Le reste du temps, il y avait quelques séminaires et surtout des après-midis de travail avec Eugene LUKACS. J'appris beaucoup de choses à son contact[6] et publiais plusieurs articles dans le prolongement de ma thèse.

En dehors de Eugene, le seul professeur de la Catholic University avec lequel j'eus des relations suivies fut un logicien, Gustav HENSEL, qui avait fait une thèse à Princeton avec Alonzo CHURCH. Ce n'est pas la logique qui nous réunissait, mais sa parfaite connaissance du français : il avait été étudiant à Paris et avait épousé une française. Dès que nous nous retrouvions à l'Université et après qu'il se soit assuré que personne dans les alentours ne comprenait le français, nous avions des conversations à bâtons rompus sur la vie américaine. J'appris ainsi qu'il militait contre la guerre au Vietnam, ce qui ne pouvait qu'être mal vu dans une Université dont le Recteur était le cardinal SPELLMAN. La seule fois où je l'ai vu abandonner toute prudence eut lieu à l'annonce de la mort de ce dernier : il entra dans mon bureau et me montra un journal où l'annonce de cet événement s'étalait en première page en s'écriant : « Ce cochon, il est enfin crevé ! ».

Mon séjour fut néanmoins troublé par plusieurs événements historiques. Le premier eut lieu au début du printemps : suite à l'assassinat de Martin Luther KING, il y eut une révolte noire à Washington durant laquelle l'une des principales artères du quartier noir fut entièrement détruite. J'y assistais involontairement car elle coïncida avec une fête des « Cherry blossoms » que l'on m'avait conseillé. Je descendis donc, avec ma femme et mon fils, en bus de la banlieue où j'habitais au centre ville pour y assister. Ce que j'ignorais, c'était que la fête avait été annulée et, heureusement, je trouvais un bus pour rentrer, mais sa route longeait le quartier noir ! Comme en plus il y avait un énorme embouteillage, le bus mit deux heures pour parcourir les dix kilomètres de trajet. Ce furent sûrement les deux plus longues heures de ma vie !

Le second fut évidemment les événements de mai 68 que j'ai vécus à la télévision

(6) Je me souviens surtout de la phrase suivante dans une discussion sur les mathématiques appliquées : « Lors de mes études à Vienne, j'ai suivi un cours sur les géométries finies pour lequel le professeur prenait la précaution de dire “ Voici un exemple de mathématiques qui ne servent à rien et ne serviront jamais à rien ” ! ».

américaine dont les images étaient absolument effrayantes : la France, livrée aux communistes, était à feu et à sang ! J'avais des billets sur le France pour rentrer en juin, mais il fallut que je m'inquiète pour apprendre que ce paquebot était resté en France. Comme j'avais déjà résilié la location de mon appartement, il me fallait absolument rentrer en France. Je finis par trouver trois places sur un paquebot hollandais qui allait à Rotterdam en faisant escale au Havre. Mais mon retour fut encore perturbé par l'assassinat de Robert KENNEDY car ses funérailles eurent lieu à la cathédrale de New York le jour où nous devions embarquer et je faillis arriver trop tard en raison des embouteillages. La veille de notre arrivée au Havre où mon frère habitait, je ne savais pas encore si l'escale serait maintenue. Finalement elle le fut, mais en raison de la grève du zèle des douaniers reprenant le travail, elle dura beaucoup plus longtemps que prévu. Le paquebot devait reprendre la mer à 15 h, mais je n'en descendis que vers 19 h et j'étais loin d'être le dernier ! Et l'on dit que les voyages forment la jeunesse…

VI. Mes débuts à Toulouse

Lorsque je débarquais au Havre, j'avais un peu plus d'expérience de mon métier, mais aucune idée sur mon avenir. En effet, j'étais parti en déposant une demande d'inscription sur la liste d'aptitude aux fonctions de maître de conférences(7). Cette demande avait été acceptée et j'avais candidaté sur les postes vacants dans les Universités du sud de la France. Comme, en raison des événements, les communications entre la France et les États-Unis ne fonctionnaient quasiment plus (on était loin de la situation actuelle), je n'en avais aucune nouvelle.

J'appris assez vite une bonne nouvelle : un poste m'était réservé à l'INSA de Toulouse et Jean MÉRIC, responsable du département de mathématiques de cet institut, attendait avec impatience ma confirmation, ce que je fis de suite. Je sus très vite d'où me venait cette proposition puisque je n'y avais même pas été candidat. Monique LAFON, avec son mari Jean-Pierre, étaient venus à la rentrée 1967 à Toulouse et c'était elle qui m'avait proposé à Jean MÉRIC.

J'utilisais mes vacances pour chercher un logement et je trouvais à Saint Orens, village de 600(8) habitants de la proche banlieue de Toulouse, une villa neuve que j'achetais assez vite. Ce fut la raison pour laquelle je déclinais une offre ultérieure de l'Université de Perpignan où le poste restait vacant par désistement du premier candidat classé. Aurais-je eu la même carrière à Perpignan ?

Je passais donc l'année 1968-69 à l'INSA de Toulouse avec comme charges d'enseignement le cours de deuxième année (les deux premières années étaient des copies de celles de l'université) et un enseignement de troisième année au Département de Génie Mécanique. Ce dernier me convainquit que je n'étais pas fait pour enseigner les mathématiques comme discipline d'appoint. En conséquence,

(7) Rappelons que le corps actuel des professeurs d'université était alors partagé en professeurs et maîtres de conférences. Ces derniers avaient les mêmes droits et devoirs que les professeurs sans en avoir le titre ni, bien entendu, le salaire. Pour pouvoir candidater à un poste de maître de conférences, il fallait passer une thèse d'état et être inscrit sur une liste d'aptitude établie chaque année par un organisme national appelé Comité Consultatif des Universités.
((8) Il y en a maintenant plus de 13 000 !

comme il y avait un nouveau poste vacant à l'Université Paul Sabatier, je présentais ma candidature avec les regrets de Jean MÉRIC qui soutint ma candidature à la condition de continuer à assurer provisoirement le cours de deuxième année en heures supplémentaires, ce que j'acceptais volontiers. Le provisoire fut comme de bien entendu très long, mais il n'était pas désagréable d'avoir un pied dans deux établissements si proches.

Avant de poursuivre, disons quelques mots de la situation à l'Université Paul Sabatier. Suite aux événements de mai 1968, le groupe des mathématiciens s'était retrouvé coupé dans deux UER différentes : une UER de Mathématiques et une UER pluridisciplinaire dans laquelle se retrouvaient les enseignants les plus réactionnaires. Ce qui était viable à Paris avec les Universités de Paris VI et Paris VII ne l'était pas en province comme on le verra dans la suite.

Je n'avais pas vécu mai 1968 à Toulouse, ni même en France, mais j'avais hérité des querelles de ma patronne et de son mari. J'étais donc pour certains indésirable à Paul Sabatier. Je fus donc écarté *a priori* du poste, mais classé quand même en deuxième ligne à la demande de Jean-Pierre LAFON. Or, à la rentrée 1969, le candidat classé en première ligne se désista et, tout naturellement, je fus proposé pour occuper le poste et je commençais même des cours dans une section de DEUG première année. Mais très vite les opposants à ma candidature emmenés par Henri MASCART obtinrent du Professeur MATHIS, président du Conseil provisoire, un réexamen de la situation et on me pria de suspendre mes cours au grand dam des étudiants. La situation dura près d'un mois au bout duquel le vote précédent fut définitivement entériné.

Côté recherche je m'étais rattaché au laboratoire de Statistique et Probabilités dirigé par Henri CAUSSINUS où je continuais mes recherches sur les fonctions caractéristiques. Avant la rentrée 1970, Eugene LUKACS me fit inviter à un séminaire d'une semaine à La Mendola dans les Dolomites et, au retour, j'assistais à Nice à mon premier (et unique) congrès international des mathématiciens.

VII. Membre du Conseil d'Université

Mais la mise en place de la nouvelle université à la rentrée 1970 vint bouleverser ce qui aurait pu être un long fleuve tranquille. Jean-Pierre LAFON devint directeur de l'UER de Mathématiques et m'incita à me porter candidat pour les élections au nouveau Conseil d'Université.

Je fus élu et, lors de la première séance, le professeur Louis LARENG fut élu Président à la quasi unanimité. Lors de la deuxième séance, un mois plus tard, mes camarades syndiqués me chargèrent, en tant que le plus ancien dans le grade le plus élevé, de rappeler à l'ordre le Président LARENG car, parmi ses promesses électorales dont certaines étaient exécutoires sans tarder, aucune n'avait reçu un commencement d'application. Dès le début de la séance, je demandais la parole et fis une intervention de quelques minutes qui se terminait par le souhait que la suite soit meilleure que le début. Monsieur LARENG me répondit par un « je remercie le Professeur CUPPENS de son intervention » suivi des promesses que l'on imagine. À une interruption de séance, l'une des personnalités extérieures vint me demander si j'étais vraiment professeur, ce sur quoi je lui répondis que j'étais maître de conférences, c'est-à-dire que j'avais toutes les prérogatives d'un professeur sans en avoir le salaire et il se permit alors de faire une remarque sur ma tenue car depuis des années j'avais abandonné le port de la cravate, ce sur quoi je lui répondis que je ne le forçais pas à enlever la sienne. Quelqu'un qui avait assisté à la scène et que je ne connaissais pas s'arrangea pour venir s'asseoir à côté de moi et me demanda si j'acceptais de le représenter à la prochaine séance qui comportait des votes importants et, comme je lui demandais comment il faudrait voter, il me répondit que ce qu'il venait d'entendre lui suffisait. Quand je lui demandais son nom, il me répondit en souriant qu'il était Léon EECKHOUTTE, Président du Conseil Général. Je dus alors lui expliquer que je n'étais à Toulouse que depuis peu et que je ne connaissais pas encore les personalités politiques. J'eus alors pendant le reste de la séance une biographie succinte de la plupart des intervenants.

Louis LARENG (1923-)

Louis Lareng, professeur de médecine, a été de 1970 à 1976, le premier président de l'Université Paul Sabatier (Toulouse III). Il a fondé les SAMU (le premier a fonctionné à Toulouse à partir de 1968) et créé l'Institut Européen de Télé-Médecine. Il a été député de la Haute-Garonne de 1981-1986.

Lors d'une séance ultérieure furent mises en place des commissions et je fus élu aux commissions du personnel et des structures. De la première je ne dirai rien ; par contre le rôle de la seconde devint vite très important. En effet la situation à l'université était très difficile : le conseil était une chambre d'enregistrement (ou presque car nous refusâmes toujours à Toulouse le numerus claussus imposé par le ministère) pour les questions médicales, mais passait trop de temps aux questions scientifiques en raison de l'éparpillement de ceux-ci dans de trop nombreuses UER.

J'eus l'occasion de voir les conséquences de cet éparpillement. Le Ministère décida de faire un audit de certaines universités et Paul Sabatier en essuya le feu. Le Président LARENG fut donc convoqué rue de Grenelle et il alla accompagné de son Secrétaire Général, d'un des deux doyens de médecine, le Professeur BOLINELLI, et il me demanda de représenter la partie scientifique car aucun directeur d'UER ne lui semblait représentatif.

La commission des structuresnfut donc chargée de proposer une réforme des UER scientifiques. Ce fut à ces occasions que je pus apprécier l'efficacité de Fernand WINDT que je retrouvais plus tard à l'IREM. Nous finîmes par proposer un découpage traditionnel en trois UER : MIG (Mathématiques, Informatique et Gestion), PCA (Physique, Chimie et Automatique) et Sciences de la vie et de la terre. Pour la faire adopter, il fallait qu'une majorité de membres du Conseil le demande et je me rappelle avoir fait le tour des professeurs de médecine pour obtenir leur signature ; je n'essuyais aucun refus…

Durant cette période, je continuais à travailler sur les fonctions carctéristiques et Eugene LUKACS continua à assurer ma promotion. Au début des vacances scolaires de 1972, il m'invita pour un séjour d'un mois à la Catholic University qui devait être suivi d'un congrès à Dayton. Mais quand j'arrivais à Washington, je retrouvais Gustav HENSEL qui était devenu directeur du département de mathématiques et il m'informa que Eugene LUKACS venait d'être mis à la retraite par la Catholic University et qu'il était parti à Bowling Green où on lui offrait un nouveau poste. Je me retrouvais seul et sans occupation réelle. Gustav me signala alors que la Faculté de Philosophie avait invité George PÓLYA pour parler une semaine sur la réforme des mathématiques modernes. Je connaissais bien sûr le nom de PÓLYA (j'avais même lu pendant mes années de préparation à l'agrégation le petit livre *Inequalities* qu'il avait écrit avec Godfrey HARDY et John LITTLEWOOD et qui m'avait passionné) et il m'y fit inscrire.

George PÓLYA (1888-1985)

D'origine hongroise, il enseigna à l'École Polytechnique fédérale de Zurich, puis à la Stanford University de 1940 à 1953. Il obtint des résultats fondamentaux en combinatoire, théorie des nombres, analyse numérique et théorie des probabilités. Il étudia l'heuristique en mathématiques dans son livre *How to solve it* (traduit en français sous le titre *Comment poser et résoudre un problème*).

En réalité, il y avait deux conférenciers en alternance : un historien de l'art dont j'ai oublié le nom le matin et George PÓLYA l'après-midi. La première matinée fut consacrée à une description de l'Europe des cathédrales, la thèse soutenue étant que ces dernières avait été construites empiriquement sans aucune connaissance scientifique sérieuse. À la fin de cet exposé, je rassemblai mon courage et lui demandai (dans mon mauvais anglais) si le secret entourant la transmission des connaissances dans le milieu du compagnonnage ne devait pas atténuer ses affirmations. J'entendis alors une voix dans le fond de la salle disant « Vous êtes français ? » et, sur ma réponse affirmative, elle continua « Je crains que peu de gens n'aient compris votre intervention. Si vous voulez la refaire en français, je me chargerai de la traduire au fur et à mesure ». À la pause qui suivit mon traducteur se présenta comme étant George PÓLYA et quand je me présentais, il en déduisit que j'étais un parfait représentant de l'école bourbakiste française (ce que j'étais loin d'être) et il me fit jouer pendant la semaine le rôle d'avocat du diable pour sa défense de l'enseignement de la géométrie euclidienne. À la fin de la semaine, je lui demandais s'il ne pensait pas que d'autres disciplines telles que le calcul des probabilités et la statistique ne pourraient pas remplacer la géométrie euclidienne. Il me donna alors l'argument que la géométrie euclidienne permettait un passage progressif d'un monde concret, celui des dessins, à une abstraction totale, ce que ne permettaient pas les probabilités et il conclut « Si néanmoins vous y arrivez, je serai le premier à applaudir de l'endroit où je serai ». L'état actuel de l'enseignement secondaire français montre combien il avait raison !

Mon séjour fut ensuite essentiellement touristique et je retrouvais à Dayton Eugene qui me demanda alors si je serais intéressé par l'écriture d'un livre en anglais sur mes travaux. L'année suivante, lors d'un nouveau congrès à Pittsburgh, cette fois-ci, pour lequel je ne fis que l'aller-retour, il me fit rencontrer un représentant de Academic Press et je signais un contrat en bonne et due forme.

Outre ces voyages américains, Eugene me fit inviter pour participer à une table ronde lors d'un congrès mondial de statistique à New Delhi et je pus ainsi visiter le Rajasthan. Je participais aussi à l'une des Universités d'été de Saint-Flour organisées chaque année par Paul-Louis HENNEQUIN et à un colloque à Brasov dans la Roumanie de CEAUCESCU. La rédaction de mon livre se fit assez rapidement et il parut sous le titre *Decomposition of multivariate probabilities* en 1975.

VIII. Directeur de l'UER M.I.G.

En 1976, la réforme de l'Université Paul Sabatier fut adoptée et aux élections qui suivirent Jean-Claude MARTIN, directeur de l'IUT, fut élu Président. Pour ma part, je fus élu Directeur de l'UER MIG qu'il fallait construire en réunissant des membres disséminés auparavant dans plusieurs unités et en obtenant des moyens en locaux, en personnels de secrétariat, … Cela ne se fit pas sans mal. Je n'avais comme secrétariat que quelques personnes dirigées heureusement par une personne sur laquelle je pus m'appuyer, Martine SOUDÈRES. Pour s'occuper des finances de l'UER je recrutais après une discussion de près d'une heure avec le professeur Michel LAUDET, Gino RIZZIERI qui avait été comptable avant d'être recruté à l'Université comme programmeur informatique, mais qui n'avait de son aveu que peu de travail. Il m'évita quelques impairs.

Un autre exemple fut le problème du matériel informatique. À cette époque où les microordinateurs en étaient à leurs balbutiements, le seul matériel disponible était le gros ordinateur du Centre interuniversitaire de calcul. Or il était question que les trois centres de calcul de Bordeaux, Montpellier et Toulouse soient regroupés en un seul implanté à Bordeaux, ce qui bien sûr faisait hurler les toulousains (et sans doute les montpelliérains). Or une réunion des informaticiens fit apparaître que, en raison de l'évolution du matériel, on aurait de moins en moins besoin d'un gros ordinateur pour l'enseignement, mais plutôt de minis- et de micro-ordinateurs. Comme Claude BÉTOURNÉ avait fait ses études avec la personne chargée des problèmes d'équipements informatiques au ministère, il obtint un rendez-vous auprès de cette personne et j'allais donc au ministère avec lui. Comme nous étions la première université à aller la voir, nous revinmes avec la promesse de deux mini-ordinateurs et de deux salles de micros. Mais, avant même que je puisse en informer le Président, il reçut l'avis d'une attribution de crédits correspondants ! Il me convoqua immédiatement et me passa un savon car, selon lui, ceci otait toute chance au maintien du centre de calculs à Toulouse. Je lui rétorquais que nous avions fait une visite au ministère au départ exploratoire qui s'était transformé en cette offre inespérée, qu'il pouvait refuser l'offre en indiquant que j'avais agi sans son autorisation, mais que, bien entendu, dans ce cas, je serais obligé d'en informer les enseignants concernés. Nous achetâmes notre matériel et, pour finir, le centre de calcul resta à Toulouse !

Outre cette charge de directeur d'UER, je fus élu au Comité Consultatif des Universités, organisme gérant les carrières des enseignants de l'enseignement supérieur. J'y retrouvais Daniel DUGUÉ qui y était nommé par le Ministère. Il me recommanda de présenter ma candidature au grade de Professeur titulaire à titre personnel(8) et, à ma grande surprise, je fus proposé dès ma première candidature en 1979. À 40 ans, j'étais « full professor » ! L'année suivante intervint la réforme actuelle où les maîtres de conférences devinrent professeurs de deuxième classe et les professeurs titulaires de première classe. Je fis donc partie de la dernière fournée de professeurs titulaires à titre personnel, titre beaucoup plus ronflant que professeur de première classe !

En 1982, il y eut des élections pour un nouveau Président de l'Université Paul Sabatier. Au départ il semblait y avoir un accord tacite pour une alternance science-médecine. Le corps médical présenta donc la candidature du doyen PUEL. Mais celle-ci déplut aux Syndicats qui décidèrent de rompre l'alternance et me proposèrent d'être candidat. Comme j'avais auparavant accepté de soutenir le doyen PUEL, je refusais immédiatement et ce fut Daniel BANCEL qui accepta ce rôle. Il fut élu avec la carrière que l'on sait et j'abandonnais alors sans regret toute activité administrative.

VIII. L'intelligence artificielle

Durant mes années de direction, je m'étais éloigné progressivement de toute activité de recherche et quand je redevins un enseignant-chercheur « normal », je décidais de me réorienter. Mon fils Frédéric ayant entrepris des études d'ingénieur informaticien(9), je m'intéressais progressivement à cette discipline. Comme l'IREM de Toulouse commençait à proposer des stages de formation continue en informatique, le directeur André ANTIBI me demanda s'y je pouvais y participer. Très rapidement, j'organisais un groupe de recherche en informatique. Je m'intéressais aux langages existants alors, Pascal et Logo. Avec ce dernier, je découvris les joies de la récursivité que j'appliquais à la géométrie dans *La récursivité en géométrie : les fractals* et à l'arithmétique dans *Apports de l'informatique en arithmétique*, deux brochures éditées par l'IREM de Toulouse en 1986.

Michel CAYROL, ancien professeur de mathématique et reconverti à l'informatique, me fit alors découvrir les langages *Lisp* et *Prolog* et surtout l'intelligence artificielle. Comme je l'exprime par ailleurs dans cette brochure, ses conversations à bâtons rompus me firent découvrir l'intuitionnisme, ce qui m'entraîna à une profonde réforme de ma conception pesonnelle des mathématiques. Mon intérêt pour l'intelligence aritificielle me fit fréquenter un groupe sur les Tuteurs Intelligents qu'animait Martial VIVET(10) et qui comprenait des informaticiens, des psychologues et des didacticiens, ce qui m'ouvrit des horizons nouveaux.

(8) Avant la grande augmentation du nombre d'enseignants des supérieurs, il y avait deux sortes de professeurs : les maîtres de conférences et les professeurs titulaires (de chaires). Pour éviter la multiplication des chaires et l'importance du choix local dans la nomination sur une chaire, on créa une nouvelle catégorie de professeurs, les professeurs titulaires à titre personnel occupant un poste de maître de conférences, mais ayant les prérogatives et la paye des autres professeurs.

(9) Il est actuellement enseignant-chercheur à l'antenne de Rennes de Télécom-Bretagne.

Je représentais l'IREM de Toulouse à la Commission Inter-IREM Informatique dont l'animateur était Alain CARDON, professeur d'informatique et directeur de l'IREM de Rouen. À l'époque, la commission était partagée entre ceux qui voulaient utliser les ordinateurs – c'était l'époque des TO7 et MO5 – pour aider à l'enseignement des mathématiques et ceux qui pensaient que c'était prématuré et qu'il fallait mieux développer une recherche plus fondamentale sur les liens entre les mathématiques et l'informatique. J'étais évidemment dans cette deuxième catégorie. Quand Alain CARDON quitta la Commission(11), comme j'étais le seul Professeur d'université, je pris tout naturellement sa succession.

Mais très vite la situation devint ingérable et je proposais de scinder la commission en deux : une commission informatique concernée par les applications immédiates et une commission pour une réflexion à plus long terme pour laquelle je proposais le titre de commission Intelligence Artificielle (domaine de l'informatique alors en plein développement). Ce titre fut abondamment discuté par l'ADIREM (assemblée des directeurs d'IREM), Rudolf BKOUCHE étant le principal opposant. Mais finalement elle fut créée sous ma responsabilité.

Comme responsable de cette commission, je demandais et obtins une Université d'été *Intelligence artificielle et enseignement des mathématiques* qui se tint à Toulouse du 6 au 11 juillet 1987. Elle répondait à un besoin puisque pour 80 places disponibles, j'eus plus de 200 demandes. Tous les conférenciers sollicités acceptèrent avec enthousiasme et fournirent un texte de leur intervention qui fut reproduit dans des *Actes* édités peu après par l'IREM de Toulouse.

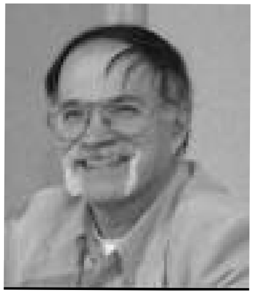
Personnellement, je présentais ce que je savais du logiciel *I am* de Douglas LENAT dont on parlait beaucoup à cette époque. Dans ce logiciel, en y injectant des évaluations de l'intérêt d'une notion ou d'un théorème mathématiques et des heuristiques telles que « Dans une notion, étudier les valeurs extrêmes » le logiciel conjecturait des résultats (sans aucune démonstration !). Par exemple, à partir de la notion de diviseur d'un nombre entier, le logiciel suggérait l'étude des nombres premiers (ceux qui ont le moins de diviseurs) et des nombres maximalement divisibles (ceux qui ont plus de diviseurs que ceux qui sont plus petits), notion que LENAT ne connaissait pas et dont il découvrit qu'elle n'avait été envisagée auparavant que par RAMANUJAN. Le fait que ce dernier était quasiment autodidacte amenait quelques réflexions sur ce logiciel, de même que le rôle joué par le langage LISP dans lequel *I am* était implanté.

Le succès de cette Université m'amena à en proposer une deuxième l'année suivante. Elle se tint du 4 au juillet 1988, eut le même succès et les *Actes* furent encore publiés par l'IREM de Toulouse.

En 1990, à un congrès sur les Tuteurs intelligents, furent présentés par Jean-François NICAUD le tuteur *Aplusix* consacré au calcul algébrique et par Jean-Marie

(10) Martial VIVET, professeur d'informatique à l'Université du Mans, eut une grande activité dans le domaine des applications de l'informatique à l'enseignement. Outre son activité dans le domaine des tuteurs intelligents, on peut signaler ses actions pour enseigner le langage Logo dès l'école primaire. Sa mort prématurée en 1999 a été une grande perte pour ce domaine.
(11) Il fut le dernier informaticien directeur d'un IREM.

LABORDE la première version de *Cabri-Géomètre*. Je fus immédiatement conquis par ce nouveau logiciel et, dans la foulée organisait une nouvelle université d'été à Toulouse du 3 au 6 septembre 1990 sur le thème *Intelligence artificielle et enseignement de la géométrie*. Lors de cette université Jean-Marie LABORDE présenta Cabri-Géomètre et Philippe BERNAT présenta un autre logiciel *Calques géométriques* qui avait d'autres possibilités pédagogiques, en particulier un multifenêtrage qui était une idée nouvelle à l'époque[12]. J'obtins aussi la participation des didacticiens Guy BROUSSEAU et Régis GRAS qui animèrent considérablement les débats. Cette université eut une conséquence inattendue : le rapprochement des deux Commissions inter-IREM Informatique et Intelligence artificielle qui se réunifièrent en une Commission Informatique dont j'ai assumé la responsabilité jusqu'à mon départ à la retraite.



Jean-Marie LABORDE
Le père de Cabri

C'est comme responsable de cette commission unifiée que je fus invité en 1993 à donner une conférence aux Journées nationales de l'APMEP qui eurent lieu au Futurosope de Poitiers. Cette conférence était prévue en parallèle avec une conférence de Gilles COHEN sur les jeux mathématiques. Il n'y avait au Futuroscope de Poitiers que deux salles pour les conférences, une grande et une petite. Or le logiciel qui gérait les inscriptions n'avait pas prévu que l'on puisse ne pas choisir entre ces deux conférences et il reporta les non réponses sur le premier par l'ordre alphabétique des conférenciers. On m'attribua en conséquence la petite salle et je fis donc mon exposé dans une salle remplie au delà du raisonnable. Ce fut la seule fois que cela m'arriva ! Il faut dire que le titre choisi *Les moyens de calcul modernes vont-ils révolutionner l'enseignement des mathématiques ?* était alléchant à une époque où l'introduction des calculatrices aux examens faisait couler beaucoup d'encre. Ma conférence qui parut l'année suivante dans le numéro 394 du Bulletin Vert fut donc un franc succès. J'eus aussi le plaisir de recontrer à ces journées Benoît MANDELBROT. Il donnait après ma conférence une conférence plénière sur les fractals et il tint à me rencontrer pour s'assurer qu'il n'y aurait pas de doublons entre nos deux interventions.

Benoit MANDELBROT
(1924-2010)
Le père des fractals

(12) Philippe BERNAT était un professeur de mathématiques du secondaire qui développa ce logiciel et l'utilisa dans sa classe. Lors de sa présentation, à Guy Brousseau qui lui demandait s'il avait réalisé une étude de comparaison entre l'enseignement avec son logiciel et un enseignement traditionnel, il répondit que non, mais qu'il avait la sensation que les résultats étaient au moins aussi bons qu'avant, mais que de plus il y avait, lui, pris beaucoup de plaisir… Il devint assistant d'informatique à l'Université de Nancy, mais sa mort prématurée interrompit le déveoppement et la maintenance de ce logiciel prometteur.

Avant d'exposer dans le prochain paragraphe mes travaux sur Cabri, j'aimerais faire un bilan de ce qui précède. Mes idées sur les mathématiques avaient considérablement évolué, la conception intuitionniste me semblant beaucoup plus appropriée pour expliquer les mathématiques faites avec un ordinateur que la conception généralement admise, ce que j'exprimais pour la première fois dans une conférence *Les mathématiques d'une machine sont-elles préhilbertiennes ?* à l'Université d'été *Les outils de calcul dans l'enseignement des mathématiques* organisée par la Commission InterIREM Informatique à Caen du 29 août au 2 septembre 1994. J'avais aussi regardé avec intérêt certains travaux de didactiques, mais en avais constaté les limites puisque les études ne peuvent s'y faire que dans le respect des mathématiques enseignées et ne peuvent donc pas anticiper ou servir des réformes profondes.

Tout ce que j'avais accumulé influença profondément mes enseignements. Si jusqu'alors j'avais été un enseignant très traditionnel (propédeutique, topologie, théorie de la mesure, probabilités), j'enseignais par la suite de l'informatique dans les satges de formation continue de l'IREM, le langage Logo dans un DEUG pour les instituteurs et les langages LISP(13) et Prolog dans un DESS Mathématiques appliquées et Informatique. Je participais même à un DEA de Didactique des Mathématiques et à un DEA d'Intelligence artificielle et assurais même un cours sur les Tuteurs intelligents dans ce dernier.

L'élargissement de mes connaissances apparaît encore plus dans les jurys de thèse auxquels j'ai participé : à côté d'une thèse de mathématiques (celle de Jean DE BIASI), je trouve deux thèses de didactique, celle de Bernard DUMONT, un élève de Daniel LACOMBE, sur les erreurs et celle d'André ANTIBI(14), deux thèses d'Intelligence artificielle, celle d'Éric BRUILLARD, un élève de Martial VIVET, sur les tuteurs intelligents et celle de Carlo INGHILTERRA, sur l'analogie en mathématique et les deux thèses de Bernard GENEVÈS et Jean-Jacques DAHAN dont je parlerai dans le prochain paragraphe. Parmi ces thèses, je mettrai à part :
– la thèse d'Éric BRUILLARD, car pendant tout le temps où je fréquentais le groupe sur les Tuteurs intelligents il fut l'un de mes plus proches, en particulier à table : je me souviens en particulier d'une séance de crèpes à Rennes avant que mon fils ne s'y installe, d'un cassoulet vespéral lors d'une de mes invitations à Toulouse et surtout du repas chez Martial VIVET la veille au soir de sa soutenance de thèse qui se termina par une dégustation des produits provenant de l'activité de bouilleur de crus du père de Martial ; après avoir cessé toute relation, il m'a fait le grand plaisir d'assister à ma journée de jubilé.


Éric BRUILLARD

(13) Voir la brochure *LISP, le langage pour mathématiciens ?* éditée par l'IREM de Toulouse en 1991.

(14) Je ne parlerai pas ici des problèmes que posa cette soutenance à l'Université Paul Sabatier où le représentant des mathématiques à la commission des thèses ne voulait absolument pas entendre parler de didactique des mathématiques. Je dus intervenir fermement pour qu'André ANTIBI soit admis à présenter sa thèse.

– les deux thèses de Laurent CHAUDRON et Gérald MOULIS pour lesquelles mon rôle fut beaucoup plus important. Un jour, mon fils qui préparait sa thèse au CERT (antenne de l'ONERA à Toulouse) me demanda si je pouvais m'occuper de ses deux camarades, que leur patron de thèse venait d'abandonner dans la nature car il avait quitté le CERT. Je les pris en main et dans les deux ans ils purent passer une thèse. Pour Gérald, j'avais proposé l'étude d'un générateur de formules mathématiques et il obtint suffisamment de résultats pour soutenir une thèse tout à fait honorable compte tenu des circonstances. Je contactais alors Daniel LACOMBE qui accepta la présidence du jury et la soutenance ne fut alors qu'une formalité. Pour Laurent, ce fut un peu moins aisé. Je lui proposais d'étudier le problème des démonstrations mathématiques. Laurent, ancien polytechnicien, fit dans le temps imparti une bonne thèse. Il insista alors pour prendre comme président un collègue informaticien dont je n'avais pas entièrement confiance car je craignais qu'il ne veuille briller aux dépends de l'impétrant. Or la veille de la soutenance, un coup de téléphone m'annonça le décès subit de ma mère. Au grand dam de ma famille, je décidais malgré tout d'assister à la soutenance, ce qui fut pour moi une grosse épreuve. Bien m'en prit car tout se passa comme je le craignais et je dus longuement rappeler les conditions de travail de Laurent pour que sa thèse soit jugée à sa juste valeur.

IX. Cabri

Comme je l'ai dit précédemment, c'est dans un congrès sur les Tuteurs Intelligents que j'ai vu pour la première fois Jean-Marie LABORDE présenter le logiciel *Cabri-Géomètre*. En réalité il avait été produit par une équipe d'informaticiens dirigée par Jean-Marie Laborde avec une équipe d'enseignants des mathématiques dirigée par Colette Laborde qui est didacticienne de la géométrie.

Colette LABORDE

Avec la première version de ce logiciel, on pouvait réaliser des constructions à la règle et au compas, forcément limitées puisqu'elles devaient comporter moins de 200 objets, la notion fondamentale de macro-construction étant elle-même limitée à 50 objets ! Mais la grande originalité était la possibilité d'animer (en temps réel !) les figures en faisant bouger les objets de base, tout en conservant les propriétés définissant les autres objets. On pouvait aussi demander au logiciel la validité d'une propriété de la figure construite.

Je revins à Toulouse avec une copie de ce logiciel et la montrais à la cantonnade. Dès que Michel CARRAL la vit, il fut passionné et me proposa la question suivante : si un pentagone a quatre diagonales parallèles à quatre côtés, que peut-on dire de la cinquième ? Cabri nous donna la réponse que la cinquième diagonale était parallèle au cinquième côté. Restait à le démontrer et nous travaillâmes un long moment à trois (Cabri, Michel et moi) pour comprendre le fond du problème. Nous exposâmes cette recherche dans un article qui fut publié dans la revue Repères.

À cette occasion, Michel CARRAL m'apprit énormément de choses sur la géométrie euclidienne et, en particulier, que dans cette géométrie, une droite n'est pas un ensemble infini de points. Moi qui n'avais jamais été intéressé par la géométrie, j'étais enfin et définitivement mordu !


Michel CARRAL

Michel CARRAL me proposa alors d'étudier un résolveur d'équations présenté dans un article de l'Encyclopédie de DIDEROT et que nous attribuâmes tout naturellement à D'ALEMBERT, ce qui s'avéra abusif par la suite. La construction Cabri correspondante fut présentée dans un deuxième article de la revue Repères et cette étude intéressa suffisamment Jean-Marie LABORDE pour qu'il fasse réaliser la machine correspondante qui fut présentée ors des Journées Nationales de l'APMEP d'Albi.

Je participais ensuite à une Université d'été sur Cabri à Grenoble où je découvris beaucoup de nouvelles idées et en particulier les travaux des grenoblois et réunionnais sur la géométrie logique que j'étudiais et améliorais sur plusieurs points. Suite à ces recherches et à la réalisation de plusieurs stages de formation continue sur Cabri, j'ai rassemblé mes travaux dans une brochure en deux tomes que j'intitulais *Faire de la Géométrie en jouant avec Cabri-Géomètre*.

– Le premier tome se voulait une initiation à une utilisation de Cabri. Mais il m'était apparu que l'utilisation raisonnée d'un logiciel complexe nécessite la compréhension de son fonctionnement et de ses limites. Or l'on a rarement accès aux secrets de fabrication. J'avais donc inventé de petites expériences pour contourner cette difficulté.
– Le deuxième comprenait un vaste échantillon des sujets que l'on pouvait traîter avec Cabri.

Je proposais ce travail à Henri BAREIL pour parution comme brochures de l'APMEP. Celui-ci demanda l'avis de plusieurs rapporteurs et il advint que l'un d'eux trouvait ce travail intéressant, mais posait la question de savoir s'il y aurait des lecteurs. Henri BAREIL contourna le problème avec l'argument qu'une association à but non lucratif comme l'APM pouvait prendre le risque d'une perte d'argent pour la diffusion d'idées nouvelles. Ces brochures parurent en 1996 et, oh surprise !, eurent un gros succès : elles furent rapidement épuisées.

Avant même la parution de ce travail, apparut sur le marché une nouvelle version, Cabri II, beaucoup plus complète : outre une refonte complète de la présentation et l'abandon des contraintes sur le nombre d'objets (la seule limitation étant la mémoire de la machine utilisée), elle incorporait de nouveaux outils tels que les coniques, une gestion de l'infini et une calculatrice accompagnée d'un report de mesures. On pouvait ainsi déborder largement le cadre de la géométrie euclidienne.

Or j'avais commencé à fréquenter la commission inter-IREM Géométrie où je découvris en particulier les réflexions profondes de Rudolf BKOUCHE et de Philippe LOMBARD. C'est à un Colloque organisé à Bayonne par cette communication où j'assistais à une confférence sur les travaux de DESARGUES, PONCELET et de CHASLES à l'origine à la géométrie projective. C'est en écoutant le conférencier que j'eus l'idée d'une représentation dans Cabri des intersections imaginaires des droites et des cercles réels.

Rudolf BKOUCHE

Dans le même temps, je participais à une Université d'été organisée à Toulouse par la Commission inter-IREM Histoire des mathématiques animée par Évelyne BARBIN. C'est lors de cette Université d'été que je fis la connaissance d'un couple de nordistes Jean-Luc et Thérèse LECHEVALIER que je retrouve encore avec joie lors des manifestations de l'APMEP. Grâce à Jean-Luc, je pus obtenir les deux livres de base de Chasles qui avaent été reproduits par l'IREM de Lille et surtout les notes aux Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences où CHASLES décrivait des constructions de cubiques beaucoup trop complexes pour être réalisées à la main. Je fus le premier à contempler la cubique passant par neuf points d'un plan et la voir évoluer lorsque l'on déplaçait les points. Ceci m'a aussi fourni une étude expérimentale des cubiques. Ces travaux sont présentés dans une brochure en deux tomes *Faire de la Géométrie supérieure en jouant avec Cabri-Géomètre II* qui fut éditée en 1999 par l'APMEP. Comme la précédente, elle fut rapidement épuisée.

Jean-Luc et Thérèse LECHEVALIER

S'est alors posé le problème de leur réédition. Le problème de la mise à jour du premier tome de la première reste une œuvre non réalisée, les différences entre Cabri I et Cabri II étant très importantes. Par contre, le développement du tome II de celle-ci a été considérable, puisqu'à lui seul il m'a fourni l'objet d'une nouvelle brochure en deux tomes que j'appelais *Avec Cabri-Géomètre II, jouez … et faîtes de la géométrie* et qui parut en 2002. Par rapport à la première, les ajouts les plus importants furent un chapitre sur les fractals et les pavages et un autre sur la Géométrie probabiliste. Une deuxième édition de la deuxième parut en 2004, le seul ajout important étant une étude de la quartique passant par 14 points !

Lors d'une nouvelle Université d'été à Grenoble, Jean-Marie LABORDE présenta une barre de menus pour le modèle de POINCARÉ de la géométrie hyperbolique. Je revins à Toulouse avec cette barre de menus et la référence au livre *Euclidean and Non-Euclidean Geometry* de GRENBERG. Je constatais que certaines macros de Jean-Marie ne marchaient pas dans tous les cas et me mis à la géométrie hyperbolique que décrivait bien le livre de GREENBERG. Par contre, ce livre ne comportait que quelques indications sur la géométrie elliptique, insuffisantes pour une étude sérieuse. Au fil de mes lectures, je finis par trouver une référence à une thèse soutenue en 1892 à Paris par un certain Louis Gérard. Quand j'en parlais à mon ami Michel Guillemot, il m'emmena à la bibliothèque universitaire et cinq minutes plus tard j'avais en main ladite thèse qui contenait tout dont j'avais besoin. J'écrivis alors une nouvelle brochure *Découvrir les géométries non euclidiennes en jouant avec Cabri-Géomètre* en deux tomes, le premier sur la géométrie hyperbolique et le second sur la géométrie hyperbolique. Ces brochures furent publiées par l'APMEP (avec la collaboration de Cabrilog) en 2004.

Avec ces brochures, on a un panorama assez complet de la géométrie plane telle qu'elle se présentait à la fin du 19e siècle. Le fait de présenter ceci sous forme expérimentale et constructive peut sembler profondément rétrograde. On peut néanmoins penser qu'une telle présentation devrait permettre une meilleure compréhension des développements ultérieurs.

Ma seule idée vraiment nouvelle depuis la publication de ces brochures a été, en collaboration avec Jean-Jacques DAHAN, l'étude de la méthode d'Euler pour les équations différentielles du premier et du second ordre, ce qui permet de montrer comment l'utilisation d'un logiciel de géométrie dynamique permettrait (si on avait le temps) une introduction expérimentale de l'exponentielle et du logarithme dans l'enseignement secondaire.

Il est évident que le groupe IREM dont j'ai évoqué la création au paragraphe VIII a évolué dans le même sens. Des tous premiers membres, je suis le seul survivant : beaucoup ont quitté l'IREM, mais l'un d'entre eux, Jean-François BERGEAUT, anime maintenant le groupe Enseignement primaire.

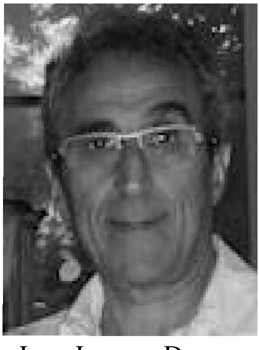
Parmi les départs, celui de Bernard GENEVÈS mérite une mention particulière. Quand il est entré dans notre groupe, il enseignait la défunte option informatique au lycée de Cahors et ses connaissances furent alors un précieux apport. Quand Jean-Marie LABORDE obtint un poste d'agrégé pour son laboratoire et me demanda si j'avais quelqu'un à lui proposer, Bernard fut intéressé. Il nous quitta donc pour Grenoble et il y soutint en 2004 une thèse dont j'ai eu l'honneur d'être rapporteur. Avec ses doubles connaissances de mathématicien et d'informaticien, il y étudie de manière brillante les fondements de la géométrie dynamique. Lors de mon jubilé, il nous annonça qu'à son départ à la retraite tout proche, il reviendrait à Cahors et réintégrerait notre groupe, ce que j'attend évidemment avec impatience.


Bernard GENEVÈS

Le groupe qui a fini par s'auto-baptiser Groupe de Géométrie dynamique est actuellement composé de cinq membres : Jean-Jacques DAHAN, Janine AMIOT, Michel CARRAL, Joël MOREAU et moi-même. Parmi ces cinq, Janine est la seule à être encore en activité et a donc moins de loisirs que les retraités.

Michel est « le » géomètre du groupe. Dès qu'il est présent, le tableau (ou la nappe du restaurant) se couvre de dessins.

Joël ramène à chaque réunion un document sur le sujet qui l'intéresse (quand il ne l'a pas présenté


Jean-Jacques DAHAN

envoyé par mél), mais ne va pas jusqu'à vouloir le publier.

À mon départ à la retraite, Jean-Jacques a accepté de me succéder comme responsable du groupe, tâche qu'il accomplit bien mieux que moi. Il a, sous la direction de Colette LABORDE, soutenu en 2005 une thèse de didactique sur la démarche de recherche expérimentale avec Cabri. Depuis il a une activité débordante sur Cabri3D multipliant réalisations, conférences dans les congrès internationaux et ateliers lors des journées de l'APMEP.

Une réunion de travail (mais si : la nappe est couverte de dessins) de notre groupe.
De gauche à droite : R. CUPPENS, J. AMIOT, J.-J. DAHAN, J. MOREAU, M. CARRAL.

X. L'APMEP

Je m'aperçois que je n'ai pas encore parlé de mon activité à l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public. Je n'ai découvert cette association qu'à Toulouse et plus précisément lors de la création de l'IREM de Toulouse. On sait que la réforme des mathématiques modernes eut au moins comme conséquence heureuse la cération des IREM demandée par l'APMEP. À Toulouse, Henri BAREIL fut évidemment l'un des premiers à s'en occuper. Malheureusement la création fut retardée par le fait que la candidate au poste de directeur (ici directrice) fut Monique LAFON-AUGÉ, ce que ne pouvaient accepter les mathématiciens dissidents et comme l'un d'eux, Albert CRUMEYROLLE, était élève de LICHNEROWICZ, la création fut retardée jusqu'à ce qu'un nouveau candidat se présente. Finalement l'IREM fut créé avec Claude FRASNAY comme directeur et Henri BAREIL comme sous-directeur.

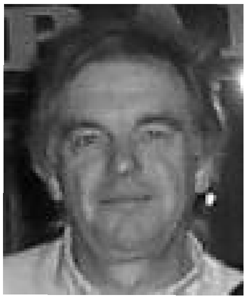
Henri BAREIL

Michel GUILLEMOT

Comme Henri BAREIL était professeur au collège Bellevue et qu'il lui suffisait de traverser la route de Narbonne pour venir à l'IREM, je le voyais très souvent. L'une de ses premières actions fut de proposer aux élèves du collège Bellevue qui n'étaient pas dans sa classe un stage pour l'utilisation des calculatrices. Mon fils Frédéric fut l'un des premiers à y participer et il en fut enthousiasmé. Rencontrant Henri dans les couloirs de l'IREM, celui-ci me dit que Frédéric l'avait surpris car il avait appris en quelques après-midi plus que la plupart des élèves de ses classes en une année. Il en conclut qu'il avait de grandes aptitudes pour la recherche, ce qui se réalisa une dizaine d'années plus tard.

Mais je n'adhérais à l'APMEP que quand je devins animateur IREM (et sur les insistances de Michel GUILLEMOT, le trésorier infatigable de la régionale). Je devais néanmoins être très prôche de l'association car le soir même de mon adhésion, je fus élu président de la régionale – il faut dire qu'il n'y avait pas d'autre candidat ! Comme président, ma principale action fut de renforcer les liens avec l'IREM qui s'étaient fort détendus au fil des années. En particulier, fut créée une revue commune IREM-APMEP.

Ma première participation aux journées nationales annuelles de l'APMEP fut un vrai baptême. En effet, elles eurent lieu dans un village de vacances à Barcarès (j'y ai depuis une petite maison de campagne) en pleine saison des pluies et le village était à ce point inondé qu'il me fallait me déchausser pour pouvour accéder à ma chambre ! Je me souviens qu'à l'assemblée générale, Jean-Pierre KAHANE proposa un moratoire pour les réformes de l'enseignement secondaire, lesquelles devaient être expérimentées avant mise en place définitive. On voit que l'on est toujours loin du compte ! Depuis, je participais à la plupart des journées, mais pas à toutes. J'ai par exemple loupé les journées de Loctudy qui finirent en tempête et, récemment, les journées du centenaire de Paris en raison d'une grève des trains… Lors de ces journées, je fis plusieurs rencontres : je ne reviendrai pas sur celle de Benoit MANDELBROT déjà évoquée, mais je citerai comme exemple celle de Daniel JUSTENS que je découvrais à un atelier où il parlait de la *Mathématique du chat* et où il montrait l'étendue d'une culture que l'on a pu admirer dans cette brochure.



Daniel JUSTENS

Je participais activement à la Commission nationale Formation des maîtres et fus élu tout naturellement au comité national comme représentant de la Régionale de Toulouse. C'est quand j'étais membre de ce comité que j'appris que Jean Barbier qui assurait la mise en page du Bulletin de l'association (le fameux « Bulletin Vert ») souhaitait abandonner et, comme j'étais proche de la retraite, je me proposais pour le remplacer. Je dus donc apprendre un nouvau métier, celui de typographe, qui heureusement est grandement facilité par l'emploi des ordinateurs. Je continue à assurer cette tâche qui occupe une bonne partie de mes loisirs de retraité.

XI. Conclusion

J'ai pris ma retraite en novembre 1999. Comme on peut le constater dans les lignes qui précèdent, j'ai gardé une double activité :

- à l'IREM dans le groupe de recherche sur la géométrie dynamique ;

• à l'APMEP, la confection du Bulletin Vert et la rédaction d'articles et de brochures. Cette activité est reconnue par l'Université Paul Sabatier qui me renouvelle l'éméritat depuis cette date.

Rétrospectivement, je constate que j'ai eu dans ma vie beaucoup de chance et que, pour un recalé à Lille qu'on envoyait à Montpellier en signalant que sa principale qualité était la jeunesse, être cinquante après professeur émérite d'une université reconnue n'est pas si mal. Mais dans les circonstances actuelles de recrutement, aurais-je même pu commencer une carrière universitaire ?

De plus, en constatant la désaffection actuelle pour les carrières scientifiques, je ne sais même pas si j'aurais envie de recommencer une telle carrière. Comme je l'ai expliqué, dans ma jeunsesse la géométrie euclidienne était la base de l'enseignement scientifique au collège et au lycée. Mais quand je lis les propos de l'ancien doyen de l'Inspection Générale Jacques MOISSAN : « Je crois qu'on peut donner une formation d'aussi bonne qualité tant en contenus qu'en compétences acquises en enseignant les mathématiques discrètes, les statistiques ou l'algorithmique qu'en enseignant la géométrie d'Euclide ! », je me retrouve quarante ans en arrière quand je prétendais la même chose à George PÓLYA, mais maintenant je pense exactement comme ce dernier. En effet, le but premier de l'enseignement des mathématiques – et plus généralement des sciences – ne doit pas consister à apprendre des recettes toutes faites pour résoudre des problèmes *ad hoc*, mais de faire comprendre le but et le fonctionnement des sciences : créer des modèles pour comprendre le monde dans lequel nous vivons. Pour ceci la démarche consiste à partir de phénomènes à expliquer, de définir des notions abstraites liées par certains axiomes ou lois, de déduire par des raisonnements de nouvelles propriétés que l'on peut vérifier ou infirmer et, dans ce dernier cas, de réitérer le processus. C'est ce que fournissait la géométrie euclidienne et ce modèle était utilisé ensuite dans d'autres sciences : optique géométrique, mécanique, etc. Il était aussi utilisé dans des domaines plus appliqués tels que l'architecture ou la cartographie. Depuis la réforme des mathématiques modernes, que reste-t-il de cet enseignement que des générations d'élèves avaient reçu ?

L'enseignement actuel semble sans âme. L'enseignement des probabilités auquel j'avais pensé est particulièrement significatif : on s'arrête à quelques exemples, mais on est incapable de définir une théorie pour la notion abstraite de probabilités et encore moins d'arriver au résultat fondamental de la théorie qu'est la loi des grands nombres. N'ayant pas de théorie formelle, on n'a évidemment pas de réels raisonnements et on arrive à dire que la simulation sur ordinateur de phénomènes par une méthode pseudo-aléatoire constitue une méthode de démonstration, ce qui est en contradiction avec la loi des grands nombes. L'impact dans la vie courante de cet enseignement est presque nul puisqu'on assiste au spectacle affligeant de journalistes commentant les résultats d'un sondage sur un scrutin devant se faire un an après où les trois premiers candidats auraient 25%, 23% et 21% d'intentions de vote et en déduisant (au moins implicitement) que les deux candidats en tête auraient toutes les chances de se retrouver au deuxième tour.

Donc, contrairement à nos chers réformateurs, **VIVE EUCLIDE** !

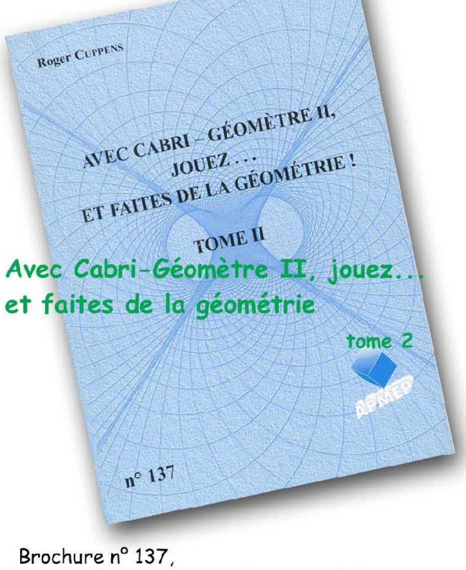
Faire de la géométrie supérieure
en jouant avec Cabri-Géomètre II

Tome 1, brochure n° 124
prix public : 3 €, prix adhérent : 2 €

Tome 2, brochure n° 125
prix public : 3 €, prix adhérent : 2 €

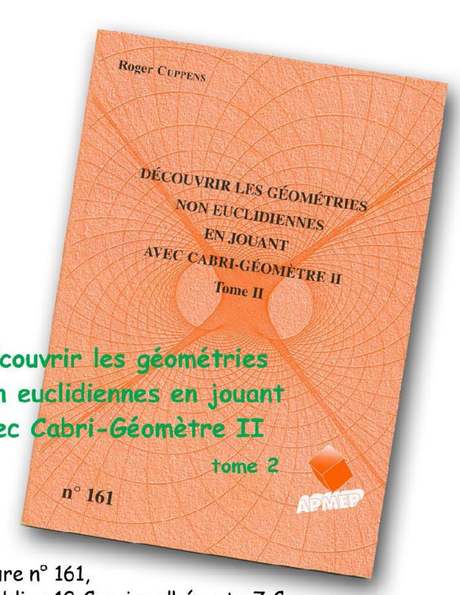
Quelques brochures de Roger CUPPENS

encore disponibles



Avec Cabri-Géomètre II, jouez...
et faites de la géométrie
tome 2

Brochure n° 137,
prix public : 10 €, prix adhérent : 7 €



Découvrir les géométries
non euclidiennes en jouant
avec Cabri-Géomètre II
tome 2

Brochure n° 161,
prix public : 10 €, prix adhérent : 7 €

Les textes rassemblés dans cette brochure sont ceux des conférences données à l'occasion du jubilé des 50 ans de carrière de Roger Cuppens.

Outre un chapitre décrivant sa carrière, les autres chapitres traitant des mathématiques sont riches d'enseignements pour bon nombre de collègues, enseignants « *de la maternelle (presque...) à l'université* ».

- Roger Cuppens lui-même s'interroge sur l'existence d'une vérité en mathématiques. On comprend très vite qu'il plaide pour que « *notre enseignement fasse une place aux théories non orthodoxes* » afin de donner « *une image des mathématiques plus vivante et moins rébarbative* ».
- Jean-Marie Laborde explique le renouveau de la géométrie grâce aux possibilités des logiciels de géométrie dynamique.
- Rudolf Bkouche fait des « *Variations sur un thème de Fermat* ».
- Michel Carral éclaire particulièrement bien ce qu'il appelle les « *mathématiques mixtes* », c'est-à-dire les rapports entre géométrie et physique.
- Daniel Justens enfin, nous livre « *quelques réflexions sur la nature des modèles mathématiques* ».

Les chapitres peuvent être lus indépendamment les uns des autres, au gré des goûts et des intérêts du lecteur qui y trouvera forcément quelque profit pour son enseignement, voire son enrichissement personnel.

Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public
APMEP, 26 rue Duméril, 75013 PARIS
Tél. 01.43.31.34.05 - Mél. secretariat-apmep@orange.fr - Site : www.apmep.asso.fr

IREM - Université Paul Sabatier, 118 route de Narbonne
31062 TOULOUSE Cedex 9.
Tél. 05.61.55.68.83 — Mél. irem@cict.fr — Site : www.irem.ups-tlse.fr