Du monocorde de Pythagore aux frettes des guitares

Nicolas Minet (Irem de Poitiers)

On trouvera à plusieurs reprises dans le texte un renvoi noté [4] , qui propose au lecteur de consulter l'adresse suivante : http://irem-fpb.univ-lyon1.fr/feuillesprobleme/feuille7/7notes/7notes.html
On y retrouve les grandes lignes de ce compte-rendu, quelques compléments, photos, et surtout des fichiers audios qui illustrent les propos en musique, pouvant davantage convaincre qu'un texte.

➢ Prélude …

L'Histoire nous montre que la musique a été le théâtre de divers compromis, que ce soit par exemple au niveau de la forme des instruments (ce qui ne sera pas notre sujet) ou du choix des notes. Penser la musique, c'est en particulier penser "différentes hauteurs de sons", donc déterminer un système de notes avec lesquelles la musique sera exécutée. Intéressons-nous aux attitudes qui s'offrent au facteur d'instruments :

- Il peut tâtonner, fabriquer différents modèles, les tester, et les modifier jusqu'à obtenir satisfaction…
- …ou opter pour une méthode un peu moins empirique, qui consisterait à se fixer des principes a priori, avant la conception de l'objet désiré, ce qui n'exclut cependant ni les erreurs ni, par conséquent, la nécessité d'affiner les principes et de construire éventuellement un nouvel instrument !

Nous nous contenterons ici d'expliquer comment a été conçue l'échelle de sons appelée "gamme de Pythagore" , de signaler en quoi elle peut paraître insuffisante, et terminerons par un bref aperçu de la "gamme (également) tempérée" qui domine depuis plusieurs siècles notre musique occidentale.

➢ Brefissimo point historique …

Do, ré, mi, fa, sol, la, si... On dit aujourd'hui de ces 7 notes qu'elles forment la "gamme diatonique de do majeur". Il serait erroné de croire que le mysticisme du nombre 7 peut seul expliquer le choix .

La tradition accorde à la "gamme de Pythagore" une place récurrente dans des textes de la Grèce Antique, relayés au Moyen Age par des personnages tel Boèce (VIème s.) ; cette gamme, ancêtre de nos gammes "diatoniques" aurait été élaborée dans le cadre de l'Ecole Pythagoricienne qui vouait un culte aux nombres entiers et leur prêtait la faculté de permettre la compréhension de l'organisation de l'Univers.

Toujours dans la Grèce Antique, des systèmes finalement proches de la gamme de Pythagore ont été proposés par des théoriciens tel Aristoxène (IIème s. av.J.C.), par une "division du canon" ; ce canon tout à fait pacifique est un instrument rudimentaire également appelé monocorde : le son est produit par une simple corde tendue au dessus d'une caisse de résonance en bois ; nous reviendrons sur son utilisation un peu plus loin. On peut essayer en prenant une corde plus courte d'obtenir des sons consonants avec le son de départ ; des choix (arbitraire ? cf [1]) de systèmes de base à 4 notes, appelés tétracordes, ont été fait, et l'assemblage de deux tétracordes ayant une note commune a fourni des gammes à ... 7 notes !

Des nuances entre les gammes sont apparues (genres, modes,...), qui ont été conservées peu ou prou jusqu'au XV^{ème} siècle, quand des exigences liées à la transposition d'une mélodie sont devenues prioritaires. Pour autant, des gammes heptatoniques ont subsisté, même si d'autres nombres que 7 ont été utilisés : les pianistes nous étonnent sur un clavier organisé selon un schéma répétitif de 7 notes sur les touches blanches, touches blanches elles-mêmes interrompues par 5 touches noires selon une périodicité visible à l'œil nu. Les nombres 5 et 12 sont donc également "valables" ; voir [3] pour des détails.

➢ Qu'entendrons-nous par « gamme » ? …

Qu'on chante ou qu'on joue d'un instrument, on dispose d'un nombre variable de notes : si les pianistes n'ont pas d'autre issue que de jouer les 80 à 90 notes "fixes" de leur clavier, c'est une infinité de notes qu'offrent la voix, un trombone, un violon. Car si l'étendue des sons potentiels est limitée par la note "la plus grave" qu'on puisse produire et "la plus aiguë", aucune autre contrainte ne subsiste entre ces deux bornes.

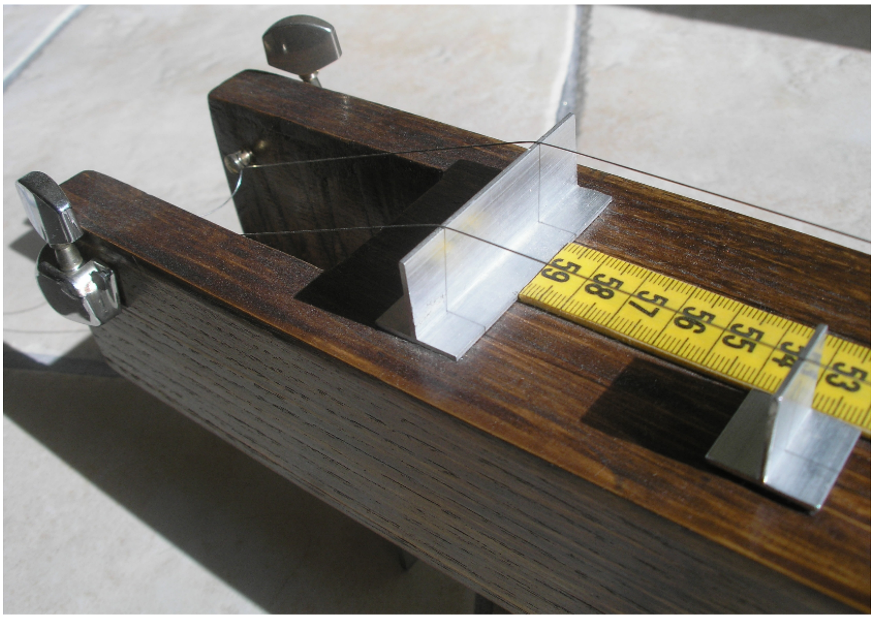
Parfois, on parle de "8 notes" en disant : do, ré, mi, fa, sol, la, si, do. Peut-on considérer que les deux "do" sont deux notes différentes alors qu'elles portent le même nom ? Bien sûr, le 2ème do est plus aigu que le 1er ; en fait, sa fréquence est double de celle du premier ; par exemple, on obtient l'un en pinçant une corde d'une longueur donnée, et l'autre en pinçant la même corde, mais deux fois plus courte.
On dit que le 2ème do est à l'octave supérieure du 1er , et que l'intervalle entre les deux notes est une octave.

En faisant l'expérience – ce à quoi j'encourage les personnes à qui tout cela n'est pas parlant ; à défaut, **voir *[4]*** – on a une impression particulière de "ressemblance" en entendant ces deux notes …
On s'autorise donc à leur donner le même nom !

A la rencontre de la gamme de Pythagore

Revenons au monocorde dont il a été question précédemment : prenons une corde dont nous notons 1 la longueur (l'unité). Nous produisons une note à l'octave (supérieure) de ce son si la corde est de longueur moitié. On peut voir dans ***[4]*** un objet qui serait en l'occurrence un bicorde, avec deux cordes aux caractéristiques identiques : même diamètre, même longueur et même tension, produisant ainsi le même son. L'intérêt d'avoir deux cordes est de pouvoir faire une comparaison entre le son de référence, produit par la corde de longueur 1, et un autre son, obtenu en réduisant la longueur de la corde vibrante (sans la couper !) en utilisant un chevalet mobile (à droite sur la photo) :

Détail du monocorde



Petite parenthèse, il n'est pas très difficile de se fabriquer un monocorde : une caisse de résonance en bois, des trépieds pour ne pas la poser à même le sol, vis et mécanique de guitare (demander au vendeur de faire ses fonds de tiroir dans un magasin de musique…) pour tendre la corde.

Nous dirons qu'une **gamme** se définit par une échelle de sons entre deux notes à l'octave l'une de l'autre, ce qui revient donc, en pensant "longueur de cordes", à choisir un ensemble de nombres compris entre et 1 …

1

note à l'octave de la fondamentale — note de départ ("fondamentale")

L'infini des possibilités sur le choix des nombres et sur leur effectif peut laisser perplexe.
Il faut donc se donner des critères.

7 notes : un idéal certain ?

7 est un nombre de notes retenu par l'Histoire... Que suggérer alors pour choisir les intermédiaires ?
En pensant à une "régularité" des intervalles entre deux notes, on peut avoir au moins deux idées :
Une division arithmétique entre les cordes de longueur 1 et (la raison de la suite est) ou une division géométrique : entre les deux longueurs de cordes, un rapport constant : ^{7} .
Voir [4] pour une écoute : le résultat apparaît dissonant à une oreille occidentale.

Pythagore aurait choisi de prendre, après la moitié, le tiers de la corde ; mais $\notin$ [; 1] , ce qui impose de prendre plutôt la note à l'octave inférieure, qui nous donne, on le sait, une impression similaire, d'où le choix du nombre . Pour les Pythagoriciens, que des fractions formées avec les premiers nombres entiers et donnent des sons consonants avec le son émis par la corde de référence était un signe fort pour les retenir, car ce sont des lois numériques qui étaient censées permettre de comprendre l'Univers.

Deux notes, ce n'est pas assez pour faire de la musique... Pythagore aurait utilisé le principe suivant pour pousuivre : puisque la corde de longueur "sonne bien" avec la corde de départ, une corde de longueur " les des " donnera la même "bonne" impression avec la corde de longueur ... On obtient ainsi une corde de longueur . Mais comme n'est pas compris entre et 1, on prend le même son.. à l'octave inférieure en multipliant par 2 la longueur. On obtient donc une corde de longueur :

Et on n'a qu'à itérer le processus.......Voici les douz mièr tions obtenues selon ce principe :

$$1 \to \frac{2}{3} \to \frac{8}{9} \to \frac{16}{27} \to \frac{64}{81} \to \frac{128}{243} \to \frac{512}{729} \to \frac{2048}{2187} \to \frac{4096}{6561} \to \frac{16384}{19683} \to \frac{32768}{59049} \to \frac{131072}{177147} \to \frac{524288}{531441}$$

➢ 7 notes : un certain idéal…

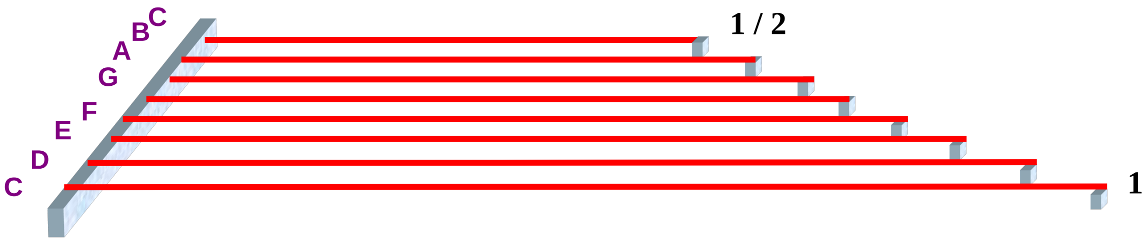
Le fait que 7 astres - hormis les étoiles - étaient connus à l'époque aurait été fortement lié au choix des Pythagoriciens de s'en tenir à 7 notes, et en annonçant que ces astres émettent des sons en se déplaçant, naissait une théorie, « l'Harmonie des Sphères », futur carrefour de la religion, de l'astronomie, de la musique et des mathématiques en Occident, et ce au moins jusqu'à la Renaissance.

Nous laisserons de côté cette approche (Cf [2] pour des détails), et constaterons plutôt que la 7ème fraction obtenue est plus proche de 1 que toutes les précédentes ! On peut considérer – en étant conscient que ce n'est pas tout à fait vrai - qu'on a quasiment bouclé la boucle ! Et la prochaine "meilleure approximation" intervient à la 12ème note ! La précédente intervenait à la 5ème note, car est "relativement proche" de . Dans l'écoute des 7 notes correspondant aux 7 premières fractions , la 4ème note peut heurter l'oreille occidentale - **voir *[4]* pour l'écoute** - remarquons que c'est la fraction la plus « compliquée » qui est en cause ; on peut considérer qu'il faut qu'elle soit plus grave, ce qui impose de choisir une fraction plus grande ; est la fraction la plus simple qui respecte ce contrat ; notons que de redonnent . Cette correction faite, nous avons (peut-être…) l'impression d'entendre une gamme "normale"...

Question légitime : peut-on trouver au bout d'un nombre fini d'itérations une note déjà rencontrée ? Voir ***[4]*** pour la réponse ... négative. Et voici donc la gamme de Pythagore (notation : C = do, D = ré, etc..)

C	B	A	G	F	E	D	C
$\frac{1}{2}$	$\frac{128}{243}$	$\frac{16}{27}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{64}{81}$	$\frac{8}{9}$	1

Voici ci-dessous un instrument possible : chaque corde a pour longueur l'une des fractions ci-dessus.



➢ Des notes « justes » …Une raison physique…

Cette gamme de Pythagore a des avantages : elle utilise un principe naturel, celui de la voix humaine, dit des "quintes justes". Traduction : la fraction « » , base de la construction de la gamme, est la cinquième note de la liste, une fois réordonnées les notes dans l'ordre croissant des fréquences (le sol (G) dans le schéma ci-dessus) ; c'est pourquoi ce cheminement est appelé le "cycle des quintes". Quant au mot "juste", en voici deux interprétations : premièrement, il a été constaté que lorsqu'un son est émis, des personnes à qui on demandait de le chanter émettaient spontanément, non pas ce son, mais.. sa quinte !
Que le rapport de quinte ait été dans de nombreuses cultures considérée comme consonant a aussi une explication scientifique : lorsqu'on pense produire avec un instrument *un* son, disons de fréquence N, c'est en fait une multitude de sons superposés qui sont émis et que notre oreille perçoit. Une théorie physique nomme ces sons "les partiels du son de fréquence N", et une modélisation mathématique propose, elle, que de tels sons puissent être assimilés à des sons dits "harmoniques du son de fréquence N" ayant tout simplement pour fréquence les multiples de N, chacun ayant une intensité propre. Cela est lié à une théorie de Fourier.

Voici un tableau (dont on peut imaginer les prolongements) permettant de constater que la note de fréquence kN avec k rationnel, ayant le maximum d'harmoniques en commun avec une note, est la quinte de cette note. (rappelons que si k est un entier pair, alors la note obtenue porte le même nom que celle de fréquence N, donc ..."ça ne compte pas"). Du coup, lorsqu'une note et sa quinte sont jouées ensemble, quoi de plus naturel qu'elles semblent consonantes, étant donné que les partiels qu'elles produisent sont, théoriquement, pour un tiers d'entre eux, les mêmes !

Harmoniques d'une note (disons : do)	N	2N	3N	4N	5N	6N	7N	8N	9N	10N
Harmoniques de la tierce majeure, Zarlino (XVIème s.) (mi)	$\frac{5}{4}$ N	$\frac{5}{2}N$	$\frac{15}{4}N$	5 N	…	…	…	10N	…	…
Harmoniques de la quarte de Pythagore (fa)	$\frac{4}{3}$ N	$\frac{8}{3}N$	4 N	…	…	8 N	…	…	12N	…
Harmoniques de la quinte de Pythagore (sol)	$\frac{3}{2}$ N	3 N	…	6 N	…	9 N	…	12N	…	15N

➢ La gamme de Pythagore : vraies notes, fausse route ?

Parmi les inconvénients de la gamme de Pythagore, elle ne permet pas de "transposer" ; le problème de la transposition peut se rencontrer dans la situation courante que voici : que fait une personne qui commence à chanter et réalise finalement qu'elle est partie "de trop haut" et qu'elle doit s'interrompre car la suite de la mélodie est trop aigüe ? Il lui faut reprendre le chant en partant d'une note plus grave, décalant d'autant les autres notes vers le grave - de manière instinctive ? - et elle parvient, ô miracle, à reconstituer un air donnant l'impression d'entendre la même mélodie.

Mais peut-on sur un instrument fabriqué avec une échelle de notes fixées (comme par exemple celui à 8 cordes dessiné au paragraphe précédent), changer la note de départ et décaler toutes les notes en donnant l'impression de conserver la mélodie ? Ou bien cela impose-t-il des règles pour l'échelle en question ?

Les réponses sont "non" à la 1ère question et "oui" à la 2nde.

Autrement dit, si on joue les trois premières cordes, puis les trois dernières, sur un instrument accordé selon la gamme de Pythagore, on n'a pas l'impression de jouer le « même air », même décalé.

Fréquencement parlant, on peut à partir d'une mélodie, la rejouer transposée (« décalée ») :

- par exemple en gardant le même *rapport* de fréquences d'une note à l'autre que dans la mélodie de départ : si la mélodie est a, b, c alors la transposée est : d, db/a, dc/b

- ou encore en gardant la même *différence* de fréquences d'une note à l'autre que dans la mélodie de départ : si la mélodie est a, b, c alors la transposée est : d, d + (b – a), d + (c – b)

Si l'on accepte ainsi que, ce qui compte pour reconnaître une mélodie transposée, c'est d'avoir une échelle géométrique (car la seconde version, transposition « arithmétique », heurte l'oreille en général ; voir ***[4]*** pour se faire une opinion), on constate que la gamme de Pythagore ne convient pas à cette exigence là car "ses fractions" ne sont pas les termes d'une suite géométrique.

➢ La gamme également tempérée

C'est l'avènement des instruments à clavier qui au début du XVIIème siècle a imposé un choix de 12 notes en Europe selon une progression géométrique des fréquences ; sa paternité est attribuée à différents noms : Werckmeister, Stévin… On appelle *gamme également tempérée* une échelle de *n* notes dont les fréquences forment une suite géométrique : l'intervalle entre deux notes consécutives est solution de l'équation $x^{n} =$. Le nombre ^{12} est donc cet intervalle pour la *gamme* dite *tempérée* qui préside à la conception "théorique" de la plupart des instruments à notes fixes actuels (piano, guitare, instruments à vent munis de clés,..).

Pourquoi 12, alors ? On peut se rappeler qu'on a proposé dans un § précédent une échelle à 7 notes dont les fréquences forment une suite géométrique ; le résultat n'était pas convenable (***voir[4]*** pour se faire une opinion sonore), trop peu de notes se rapprochant des quintes "justes" dont on a rappelé l'importance avec la théorie des partiels et harmoniques ! En fait, ce défaut est assez bien atténué en passant à 12 notes ; constatons de plus que la 12ème fraction obtenue dans le cycle des quintes est plus proche de 1 que toutes les précédentes ! Ainsi, 12 est un nombre-compromis, offrant à la fois un nombre de notes relativement important, la possibilité de transposer, et une approximation satisfaisante des quintes naturelles.

Signalons pour terminer que le nombre ^{12} est par conséquent (exercice !) la raison d'une suite géométrique bien visible : celle des longueurs des cases (de la plupart) des guitares ; mesurez pour voir !

Une gamme est une affaire de compromis, le nombre de notes n'étant qu'un paramètre parmi d'autres.

[1] SPIESSER Maryvonne.
"Histoire de moyennes". Le rôle des moyennes arithmétique, géométrique, harmonique en Grèce Antique.
Publication de l'IREM de Toulouse : http://publimath.irem.univ-mrs.fr/biblio/ITO97002.htm

[2] PROUST Dominique.
" L'harmonie des sphères"
Collection « Science ouverte », chez Seuil

[3] Bernard PARSZYSZ
« Musique et Mathématiques »
Brochure de l'APMEP n° 53

[4] Feuille à problèmes n° 7
http://irem-fpb.univ-lyon1.fr/feuillesprobleme/feuille7/7notes/7notes.html

Note : Je signale l'existence d'une émission lumineuse et captivante programmée sur la Cinquième début 2003 (voir sur le site de la chaîne), intitulée "Simple comme musique" : six épisodes de 30mn pour (re)découvrir la musique sous tous ses aspects, y compris scientifique.