L'implication, pierre angulaire du raisonnement

Marie-Line Gardes

HEP Vaud, Lausanne & IREM Lyon

APMEP
Journée de la Régionale de Grenoble
27 mars 2024

Introduction

Objectifs

- Présenter les travaux d'un groupe Inter-IREM sur l'objet « implication ».

Introduction

Objectifs

- Présenter les travaux d'un groupe Inter-IREM sur l'objet « implication ».
- Vous proposer de réfléchir sur l'utilisation de l'implication dans des raisonnements et sur ses difficultés d'apprentissage.

Introduction

Déroulé :

- **Temps 1** : Définition de l'implication

Introduction

Déroulé :

- **Temps 1** : Définition de l'implication
- **Temps 2** : Deux règles de raisonnement liées à l'implication

Introduction

Déroulé :

- **Temps 1** : Définition de l'implication
- **Temps 2** : Deux règles de raisonnement liées à l'implication
- **Temps 3** : Démontrer une implication en utilisant différents raisonnements

Introduction

Déroulé :

- **Temps 1** : Définition de l'implication
- **Temps 2** : Deux règles de raisonnement liées à l'implication
- **Temps 3** : Démontrer une implication en utilisant différents raisonnements
- **Temps 4** : L'implication et le raisonnement par récurrence

Introduction

Déroulé :

- **Temps 1** : Définition de l'implication
- **Temps 2** : Deux règles de raisonnement liées à l'implication
- **Temps 3** : Démontrer une implication en utilisant différents raisonnements
- **Temps 4** : L'implication et le raisonnement par récurrence
- **Synthèse**

Quelques principes de la logique des propositions

- le principe du tiers exclu
  Une proposition est vraie ou fausse, c'est-à-dire
  (P OU non P) est vraie

Quelques principes de la logique des propositions

- le principe du tiers exclu
  Une proposition est vraie ou fausse, c'est-à-dire $(P$ *OU non* $P)$ *est vraie*
- le principe de non-contradiction
  Une proposition est vraie ou fausse, jamais les deux en meme temps, c'est-à-dire $(P$ *ET non* $P)$ *est fausse*

Quelques principes de la logique des propositions

- le principe du tiers exclu
  Une proposition est vraie ou fausse, c'est-à-dire *(P OU non P) est vraie*
- le principe de non-contradiction
  Une proposition est vraie ou fausse, jamais les deux en meme temps, c'est-à-dire (P ET non P) est fausse
- la vérifonctionnalité
  La valeur de vérité d'une proposition complexe ne dépend que des valeurs de vérité des propositions en jeu et de la définition des connecteurs qui les relient.

Qu'est-ce qu'une proposition mathématique ?

C'est une phrase mathématique (qui contient un verbe) dont on peut décider si elle est vraie ou fausse.

Qu'est-ce qu'une proposition mathématique ?

C'est une phrase mathématique (qui contient un verbe) dont on peut décider si elle est vraie ou fausse.

Il existe des propositions « ouvertes » avec des variables pour lesquelles il faut préciser leur domaine et leur quantification.

Définition de l'implication

L'implication est un connecteur logique binaire qui à partir de deux propositions P et Q définit une nouvelle proposition notée $P \Longrightarrow Q$ qui n'est fausse que si P est vraie et Q est fausse.

Définition de l'implication

L'implication est un connecteur logique binaire qui à partir de deux propositions P et Q définit une nouvelle proposition notée $P \Longrightarrow Q$ qui n'est fausse que si P est vraie et Q est fausse.

On obtient donc la table de vérité suivante :

P	Q	$P \Longrightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Autre définition

$P \Longrightarrow Q$ peut se définir uniquement avec les connecteurs disjonction et négation.

$(P \Longrightarrow Q)$ est logiquement équivalente à $\left[(\text{NON}P) \text{ OU } Q\right]$.

On retrouve le résultat suivant :
$(P \Longrightarrow Q)$ est vraie dès que P est fausse OU Q est vraie.

Contraposée d'une implication

Toute proposition $(P \Longrightarrow Q)$ est équivalente à sa contraposée $(\text{NON } Q \Longrightarrow \text{ NON } P)$

Contraposée d'une implication

Toute proposition $(P \Longrightarrow Q)$ est équivalente à sa contraposée (NON $Q \Longrightarrow$ NON P)

En effet, (NON $Q \Longrightarrow$ NON P) qui est équivalent à Q OU NON P qui est donc équivalent à $(P \Longrightarrow Q)$.

La proposition « pour tout x, $P(x) \Longrightarrow Q(x)$ » et sa contraposée « pour tout x, NON $Q(x) \Longrightarrow$ NON $P(x)$ » sont équivalentes.

Contraposée d'une implication

Toute proposition $(P \Longrightarrow Q)$ est équivalente à sa contraposée $(\text{NON } Q \Longrightarrow \text{ NON } P)$

En effet, $(\text{NON } Q \Longrightarrow \text{ NON } P)$ qui est équivalent à Q OU NON P qui est donc équivalent à $(P \Longrightarrow Q)$.

La proposition « pour tout x, $P(x) \Longrightarrow Q(x)$ » et sa contraposée « pour tout x, NON $Q(x) \Longrightarrow$ NON $P(x)$ » sont équivalentes.

On remarque que la quantification est identique pour une implication et sa contraposée. Ce n'est pas le cas lors de la démonstration par l'absurde d'une implication.

Négation de l'implication

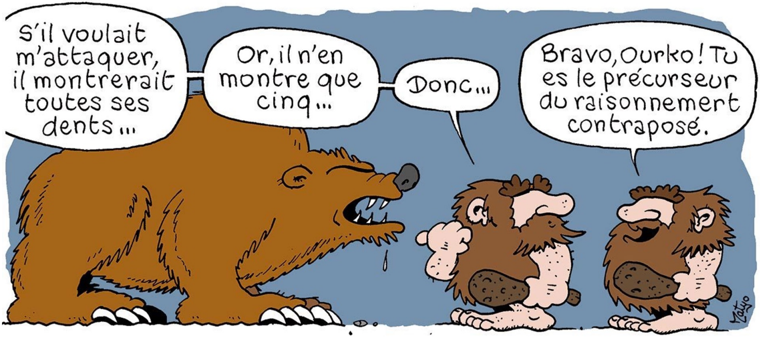
La négation d'une implication n'est pas une implication.

Négation de l'implication

La négation d'une implication n'est pas une implication.

En effet :
$P \Longrightarrow Q$ est équivalent $(\text{NON } P)$ OU Q.

D'après les lois de Morgan NON $(P \Longrightarrow Q)$ est équivalent à P ET $(\text{NON } Q)$.


S'il voulait m'attaquer, il montrerait toutes ses dents...
Or, il n'en montre que cinq...
Donc...
Bravo, Ourko ! Tu es le précurseur du raisonnement contraposé.
Matyo

Le *modus ponens* et le *modus tollens*

D'après la table de vérité de l'implication :

P	Q	$P \Longrightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

on en déduit les deux règles suivantes :

Le *modus ponens* et le *modus tollens*

Règle du *modus ponens* (la plus couramment utilisée) :

en logique des propositions :

$$\left.\begin{array}{l} (P \Longrightarrow Q) \text{ Vraie} \\ P \quad \text{Vraie} \end{array}\right\} \text{DONC} \quad Q \quad \text{Vraie.}$$

Le *modus ponens* et le *modus tollens*

Règle du *modus ponens* (la plus couramment utilisée) :

en logique des propositions :

$$\left.\begin{array}{l}(P \Longrightarrow Q) \text{ Vraie} \\ P \quad \text{Vraie}\end{array}\right\} \text{DONC} \quad Q \quad \text{Vraie.}$$

en logique des prédicats :

$$\left.\begin{array}{l}\forall x \ (P[x] \Longrightarrow Q[x]) \text{ Vraie} \\ P[a] \quad \text{Vraie}\end{array}\right\} \text{DONC} \quad Q[a] \quad \text{Vraie.}$$

Le *modus ponens* et le *modus tollens*

Règle appelée *modus tollens* :

en logique des propositions :

$$\left.\begin{array}{l}(P \Longrightarrow Q) \text{ Vraie} \\ Q \quad \text{Fausse}\end{array}\right\} \text{DONC} \quad P \quad \text{Fausse.}$$

Le *modus ponens* et le *modus tollens*

Règle appelée *modus tollens* :

en logique des propositions :

$$\left.\begin{array}{l}(P \Longrightarrow Q) \text{ Vraie} \\ Q \quad \text{Fausse}\end{array}\right\} \text{ DONC } \quad P \quad \text{ Fausse.}$$

en logique des prédicats :

$$\left.\begin{array}{l}\forall x \ (P[x] \Longrightarrow Q[x]) \text{ Vraie} \\ Q[a] \quad \text{Fausse}\end{array}\right\} \text{ DONC } \quad P[a] \quad \text{ Fausse.}$$

Le *modus ponens* et le *modus tollens*

Ainsi le théorème de Pythagore permet :

- d'écrire que $AB^2 = AC^2 + BC^2$ si le triangle ABC est rectangle en C (*modus ponens*) ;

Le *modus ponens* et le *modus tollens*

Ainsi le théorème de Pythagore permet :

- d'écrire que $AB^2 = AC^2 + BC^2$ si le triangle ABC est rectangle en C (*modus ponens*) ;
- d'affirmer qu'un triangle ABC n'est pas rectangle en C si $AB^2 \neq AC^2 + BC^2$ (*modus tollens*).

Le *modus ponens* et le *modus tollens*

Ainsi le théorème de Pythagore permet :

- d'écrire que $AB^2 = AC^2 + BC^2$ si le triangle ABC est rectangle en C (*modus ponens*) ;
- d'affirmer qu'un triangle ABC n'est pas rectangle en C si $AB^2 \neq AC^2 + BC^2$ (*modus tollens*).

Cela évite de parler de contraposée.
En effet, le *modus tollens* avec $P \Longrightarrow Q$ est le *modus ponens* avec la contraposée NON $Q \Longrightarrow$ NON P.

Le *modus ponens* et le *modus tollens*

On peut résumer tout ceci dans des tableaux :

Pour le *modus ponens* :

Implication	Donnée	Conclusion par *modus ponens*
Théorème de Pythagore	ABC rectangle en A	$BC^2 = AB^2 + AC^2$
Réciproque du théorème de Pythagore	$BC^2 = AB^2 + AC^2$	ABC rectangle en A
Contraposée du théorème de Pythagore	$BC^2 \neq AB^2 + AC^2$	ABC non rectangle en A

Le *modus ponens* et le *modus tollens*

Pour le *modus tollens* :

Implication	Donnée	Conclusion par *modus tollens*
Théorème de Pythagore	$BC^2 \neq AB^2 + AC^2$	ABC non rectangle en A
Réciproque du théorème de Pythagore	ABC non rectangle en A	$BC^2 \neq AB^2 + AC^2$
Contraposée du théorème de Pythagore	ABC rectangle en A	$BC^2 = AB^2 + AC^2$

Analyse de quelques démonstrations

Analyse de quelques démonstrations

C Démonstration par l'absurde

Pour démontrer qu'une proposition P est vraie, on suppose que la proposition non P est vraie et on en déduit une contradiction.

Énoncé : Démontrer que $\sqrt{2} \neq 1{,}414$.

Solution

On suppose que $\sqrt{2} = 1{,}414$. Deux nombres égaux ont le même carré donc $2 = 1{,}414^2$. Or $1{,}414^2 = 1{,}999396$, on obtient ainsi une contradiction. Donc la proposition $\sqrt{2} = 1{,}414$ est fausse.

Analyse de quelques démonstrations

C Démonstration par l'absurde

Pour démontrer qu'une proposition P est vraie, on suppose que la proposition non P est vraie et on en déduit une contradiction.

Énoncé : Démontrer que $\sqrt{2} \neq 1{,}414$.

Solution

On suppose que $\sqrt{2} = 1{,}414$. Deux nombres égaux ont le même carré donc $2 = 1{,}414^2$. Or $1{,}414^2 = 1{,}999396$, on obtient ainsi une contradiction. Donc la proposition $\sqrt{2} = 1{,}414$ est fausse.

Exercice - Montrer que 0 n'est pas racine de $A(x) = x^4 + 12x - 1$.

On raisonne par l'absurde. Supposons que 0 soit racine de A. Par définition, on aurait donc $A(0) = 0$; or le calcul montre que $A(0) = -1$, d'où $-1 = 0$. On obtient une contradiction.

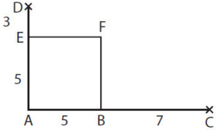
Analyse de quelques démonstrations

Exemple

Sur la figure ci-contre, où ABFE est un carré dont chaque côté a pour longueur 5, E ∈ [AD] avec DE = 3 et B ∈ [AC] avec BC = 7, montrons que les points D, F et C ne sont pas alignés. Supposons que les points D, F et C soient alignés.

Dans ce cas :

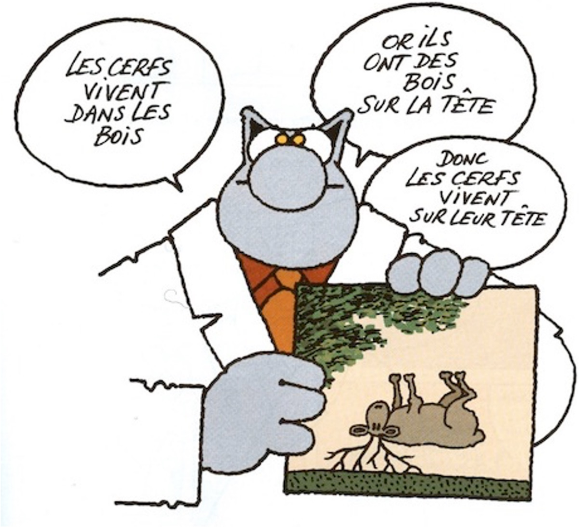
- D, F et C sont alignés ;
- A, B et C sont alignés ;
- (DA) // (FB) (puisque (AE) et (DE) sont confondues et que ABFE est un carré).



On peut donc appliquer le théorème de Thalès, qui affirme que $\frac{FB}{DA} = \frac{BC}{AC}$.

Ici, on a $\frac{FB}{DA} = \frac{5}{8}$ et $\frac{BC}{AC} = \frac{7}{12}$ donc $\frac{FB}{DA} \neq \frac{BC}{AC}$, ce qui constitue une contradiction.

L'hypothèse de départ (D, F et C C sont alignés) est donc fausse, autrement dit, D, F et C ne sont pas alignés.


LES CERFS VIVENT DANS LES BOIS
OR ILS ONT DES BOIS SUR LA TÊTE
DONC LES CERFS VIVENT SUR LEUR TÊTE

Comment démontrer une implication ?

- Démontrer que :

pour tout entier naturel *n*, si $10^n + 1$ est divisible par 9, alors $10^{n+1} + 1$ est divisible par 9.

Comment démontrer une implication ?

• Démontrer que :
pour tout entier naturel *n*, si $10^n + 1$ est divisible par 9, alors $10^{n+1} + 1$ est divisible par 9.

Deux méthodes pour démontrer cette implication :
- démontrer que si P est vraie alors Q est vraie
- démontrer que P est toujours fausse

Comment démontrer une implication ?

• Soit P[*n*] : $\dfrac{3^n}{n!} \leqslant 2^{7-n}$ pour n entier naturel.
Pour quelles valeurs de n entier naturel, a-t-on :
P$[n] \Longrightarrow$ P$[n+1]$?

Comment démontrer une implication ?

• Soit P[n] : $\dfrac{3^n}{n!} \leqslant 2^{7-n}$ pour n entier naturel.
Pour quelles valeurs de n entier naturel, a-t-on :
P$[n] \Longrightarrow$ P$[n+1]$?

On démontre que P$[n] \Longrightarrow$ P$[n+1]$ pour $n \geqslant 5$ en démontrant que si P$[n]$ est vraie, alors P$[n+1]$ est vraie.

On démontre que P[0], P[1], P[2], P[3], P[4] et P[5] sont vraies.
Donc P$[n] \Longrightarrow$ P$[n+1]$ est vraie pour $n \leqslant 4$

Comment démontrer une implication ?

Démontrer que pour tout n entier naturel, si n est non nul alors $\sqrt{n^2+1}$ n'est pas entier.

Comment démontrer une implication ?

Démontrer que pour tout n entier naturel, si n est non nul alors $\sqrt{n^2+1}$ n'est pas entier.

Deux méthodes possibles :
- démonstration par la contraposée
- démonstration directe

Comment démontrer une implication ?

En utilisant un raisonnement par l'absurde

Dans l'ensemble des suites réelles, si $u_0 > 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} = u_n^2$ alors (u_n) diverge.

On suppose qu'il existe une suite (u_n) vérifiant $u_0 > 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} = u_n^2$ et (u_n) converge vers une limite ℓ finie. Comme $u_{n+1} = u_n^2$, $\ell^2 = \ell$. Donc $\ell = 0$ ou $\ell = 1$, ce qui entraîne $\ell \leqslant 1$. D'autre part,(u_n) est croissante et $u_0 > 1$ donc $\ell > 1$.

Comment démontrer une implication ?

En utilisant un raisonnement par l'absurde

Dans l'ensemble des suites réelles, si $u_0 > 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}\ u_{n+1} = u_n^2$ alors (u_n) diverge.

On suppose qu'il existe une suite (u_n) vérifiant $u_0 > 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}\ u_{n+1} = u_n^2$ et (u_n) converge vers une limite ℓ finie. Comme $u_{n+1} = u_n^2$, $\ell^2 = \ell$. Donc $\ell = 0$ ou $\ell = 1$, ce qui entraîne $\ell \leqslant 1$. D'autre part, (u_n) est croissante et $u_0 > 1$ donc $\ell > 1$.

Il est nécessaire de savoir nier une implication universellement quantifiée. En effet, la négation de $\forall x, P[x] \Longrightarrow Q[x]$ est $\exists x, P[x]$ ET NON $Q[x]$.

Comment démontrer une implication ?

En utilisant un raisonnement par l'absurde

Analyser les extraits de copies du point de vue de la non-maîtrise de l'implication.

Comment démontrer une implication ?

En utilisant un raisonnement par l'absurde

Analyser les extraits de copies du point de vue de la non-maîtrise de l'implication.

Il est aussi difficile pour les élèves de repérer la différence entre un raisonnement par contraposée et par l'absurde.

Comment démontrer une implication ?

En utilisant un raisonnement par l'absurde

Analyser les extraits de copies du point de vue de la non-maîtrise de l'implication.

Il est aussi difficile pour les élèves de repérer la différence entre un raisonnement par contraposée et par l'absurde.

La non maîtrise de l'implication est à la source des difficultés des élèves pour comprendre une démonstration par l'absurde.

Comment démontrer une implication ?

Plusieurs méthodes :

- utiliser les valeurs de vérité de P et Q

Comment démontrer une implication ?

Plusieurs méthodes :

- utiliser les valeurs de vérité de P et Q
- démontrer que si P est vraie alors Q est vraie

Comment démontrer une implication ?

Plusieurs méthodes :

- utiliser les valeurs de vérité de P et Q
- démontrer que si P est vraie alors Q est vraie
- démontrer la contraposée

Comment démontrer une implication ?

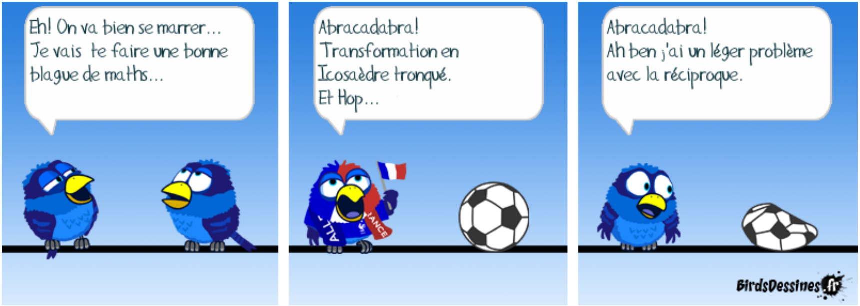
Plusieurs méthodes :

- utiliser les valeurs de vérité de P et Q
- démontrer que si P est vraie alors Q est vraie
- démontrer la contraposée
- démontrer par l'absurde

Comment démontrer une implication ?

Plusieurs méthodes :

- utiliser les valeurs de vérité de P et Q
- démontrer que si P est vraie alors Q est vraie
- démontrer la contraposée
- démontrer par l'absurde
- démontrer par disjonction des cas


Eh! On va bien se marrer...
Je vais te faire une bonne blague de maths...
Abracadabra! Transformation en Icosaèdre tronqué. Et Hop...
ALLEZ LA FRANCE
Abracadabra! Ah ben j'ai un léger problème avec la réciproque.
BirdsDessines.fr

Implication dans l'hérédité

Dans les manuels ou les corrigés de bac, l'hérédité est très rarement présentée correctement sous la forme d'une implication universellement quantifiée.

Implication dans l'hérédité

Dans les manuels ou les corrigés de bac, l'hérédité est très rarement présentée correctement sous la forme d'une implication universellement quantifiée.

On démontre par récurrence que pour tout entier naturel $k \geqslant 1$, la propriété $\mathrm{P}(k)$: « $\mathrm{Card}(\mathrm{E}^k) = n^k$ » est vraie.

- **Initialisation :** pour $k = 1$, $\mathrm{E}^1 = \mathrm{E}$. Son nombre d'éléments est n, c'est-à-dire n^1. La propriété $\mathrm{P}(1)$ est donc vraie.
- **Hérédité :** on suppose que pour un entier naturel $i \geqslant 1$, la propriété $\mathrm{P}(i)$ est vraie, c'est-à-dire que $\mathrm{Card}(\mathrm{E}^i) = n^i$ (hypothèse de récurrence). Or, E^{i+1} est le produit cartésien $\mathrm{E}^i \times \mathrm{E}$, donc $\mathrm{Card}(\mathrm{E}^{i+1}) = n^i \times n = n^{i+1}$. La propriété $\mathrm{P}(i+1)$ est donc vraie.
- **Conclusion :** pour tout entier naturel $k \geqslant 1$, la propriété $\mathrm{P}(k)$ est vraie, c'est-à-dire $\mathrm{Card}(\mathrm{E}^k) = n^k$.

Extrait de Hyperbole page 32

Implication dans l'hérédité

PROPRIÉTÉ **Principe de récurrence**
Si une propriété est vraie pour un entier naturel n_0 et s'il est prouvé que lorsqu'elle est vraie pour un entier naturel p supérieur ou égal à n_0, elle est vraie aussi pour l'entier naturel $p+1$, alors elle est vraie pour tous les entiers naturels supérieurs ou égaux à n_0.

Extrait de Indice page 12

Implication dans l'hérédité

Théorème Principe du raisonnement par récurrence

Soit $P(n)$ une propriété dépendant d'un entier naturel n. On suppose que :

1. $P(0)$ est vraie.
2. Pour tout entier naturel n fixé, si $P(n)$ est vraie, alors $P(n+1)$ est vraie.

Alors pour tout entier naturel n, $P(n)$ est vraie.

Extrait de Magnard page 16

Implication dans l'hérédité

Théorème Principe du raisonnement par récurrence

Soit $P(n)$ une propriété dépendant d'un entier naturel n. On suppose que :

① $P(0)$ est vraie.

② Pour tout entier naturel n fixé, si $P(n)$ est vraie, alors $P(n+1)$ est vraie.

Alors pour tout entier naturel n, $P(n)$ est vraie.

Extrait de Magnard page 16

On préférerait écrire que l'hérédité consiste à démontrer que : pour tout $n \geqslant n_0, P[n] \Longrightarrow P[n+1]$ est vraie. Pour cela, il suffit de prouver que pour tout $n \geqslant n_0$, si $P[n]$ est vraie alors $P[n+1]$ est vraie.

Implication dans l'hérédité

Il nous semble important que la conclusion de l'hérédité rappelle qu'il s'agit de démontrer que pour tout $n \geqslant n_0, P[n] \Longrightarrow P[n+1]$ est vraie et non s'arrêter à $P[n+1]$ vraie.

Soit $P(n)$ la proposition « $0 < v_n < 3$ » pour $n \in \mathbb{N}$.

- $0 < 1 < 3$ donc $P(0)$ est vraie.
- Supposons $P(n)$ vraie pour un certain rang n càd $0 < v_n < 3$. Alors $-3 < -v_n < 0$ et donc $3 < 6 - v_n < 6$. Or la fonction inverse décroît sur $]3\,;\,6]$ donc on obtient $\frac{1}{6} < v_{n+1} < \frac{1}{3}$. Comme $\left]\frac{1}{6}; \frac{1}{3}\right[\subset]0;3]$, on a bien $0 < v_{n+1} < 3$: $P(n+1)$ est vérifiée.

Ainsi, pour tout entier naturel n on a $0 < v_n < 3$.

Implication dans l'hérédité

Sinon,

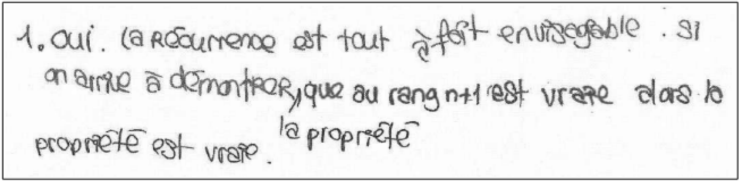

1. oui. la récurrence est tout à fait envisageable. si
on arrive à démontrer, que au rang n+1 est vraie alors la
propriété est vraie. la propriété

Figure 27 – *Extrait d'une copie d'élève de Terminale S, partie 2 du questionnaire*


Fenzel
C'est pas parce que
UN et UN font DEUX
que deux et deux
ont le droit de faire QUATRE

Quelques points de vigilance

- bien distinguer l'implication (en tant que connecteur logique) de la règle du *modus ponens* ;

Quelques points de vigilance

- bien distinguer l'implication (en tant que connecteur logique) de la règle du *modus ponens* ;
- mentionner la règle du *modus tollens* et l'utiliser dans des raisonnements ;

Quelques points de vigilance

- bien distinguer l'implication (en tant que connecteur logique) de la règle du *modus ponens* ;
- mentionner la règle du *modus tollens* et l'utiliser dans des raisonnements ;
- travailler différentes manières de démontrer une implication, ce qui suppose de :

- distinguer : implication, contraposée et réciproque ;
- maitriser la négation de l'implication ;

Quelques points de vigilance

- bien distinguer l'implication (en tant que connecteur logique) de la règle du *modus ponens* ;
- mentionner la règle du *modus tollens* et l'utiliser dans des raisonnements ;
- travailler différentes manières de démontrer une implication, ce qui suppose de :
  - distinguer : implication, contraposée et réciproque ;
  - maitriser la négation de l'implication ;
- mettre en évidence que l'hérédité du raisonnement par récurrence consiste à démontrer une implication

Quelques points de vigilance

Pour en savoir bientôt plus : voir la future brochure de la CII Lycée consacrée à la logique...sortie et présentation lors des prochaines JN au Havre !

MERCI !

marie-line.gardes@hepl.ch