ACTIVITÉS MATHÉMATIQUES EN QUATRIÈME - TROISIÈME

Tome I

Publication de l'A.P.M.E.P.

(Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public)

N° 33

SOMMAIRE

QUATRIÈME PARTIE : ACTIVITÉS A DOMINANTE NUMÉRIQUE

CINQUIÈME PARTIE : ACTIVITÉS A DOMINANTE « DÉCONDITIONNEMENT ET OUVERTURES »

SIXIÈME PARTIE : BIBLIOGRAPHIE - INDEX

Lire aussi :

Pour le tome 2, voir appel page 7.
Envoyer les manuscrits *avant le 15 décembre 1979*

1

Christiane ZEHREN,
Présidente de l'A.P.M.E.P.

PREFACE

Pour l'ensemble des animateurs nationaux de l'A.P.M.E.P., l'enseignement des mathématiques dans le premier cycle doit constituer un tout.

Cette évidence n'en est pas une, au moins en géométrie : elle est contredite par une longue tradition. En effet, il était déjà d'usage, avant 1971, d'introduire, à partir des « cas d'égalité des triangles », une coupure dans l'enseignement de la géométrie au premier cycle. Cette coupure s'était encore accentuée avec les programmes de 1971, en raison de la rupture radicale alors introduite en quatrième.

Il s'agit là d'une tradition qui confond enseignement des mathématiques et présentation par le maître d'une théorie achevée. Cette vision de l'enseignement conduit à un exposé linéaire des mathématiques, c'est-à-dire à une organisation, hiérarchisée sur la quatrième et la troisième, d'un enseignement réduit à un discours déductif.

Dans le même temps, nos élèves, loin d'être entraînés d'abord à imaginer, à expérimenter, à chercher, à concevoir et à résoudre des problèmes, sont conditionnés à suivre des voies tracées, balisées, pauvres en activités mathématiques (cf. les sujets de B.E.P.C. et nos actuels manuels — programmes 1971 —).

Un changement radical nous paraît donc indispensable.

Or, les programmes de 1978, obtenus après bien des luttes, pourraient permettre de l'amorcer grâce :

— à la modestie de leurs ambitions théoriques ;
— aux moyens (parallélisme, orthogonalité, distance, ...) utilisables en géométrie dès le départ ;
— aux liens ainsi maintenus avec les classes antérieures ;
— et aux libertés ainsi laissées aux professeurs pour l'organisation de leur enseignement.

Mais ces libertés ne peuvent être saisies et pratiquées sans un minimum de concours.

Pouvait-on, peut-on, les attendre des autorités hiérarchiques ? de manuels souvent rédigés à la hâte ?

La nécessité d'une pluralité des sources d'information et de documentation des enseignants de quatrième - troisième exigeait que soit mis à leur disposition un outil de travail allant résolument dans le sens que nous préconisons, renforçant ainsi le travail accompli dans les IREM.

Cet outil, c'est la présente brochure.

Sur ses trente et un textes, collectés en janvier-février, 23 proviennent de professeurs de classes expérimentales, dont 16 d'auteurs qui pratiquent les nouveaux programmes depuis la rentrée 1978. Vu l'urgence, c'est notre vision de l'enseignement de la géométrie qui est prioritairement illustrée dans ce tome 1. Le numérique n'y est pas pour autant négligé, mais, pour certaines activités, notamment celles liées aux moyens informatiques, nous renvoyons à d'autres brochures A.P.M.E.P. déjà publiées et au tome 2.

Les activités proposées sont assez riches pour favoriser chez nos élèves l'autonomie, l'imagination, l'invention, les capacités de recherche et de doute.

MAIS NOUS VOUDRIONS QU'IL SOIT TRES CLAIR QUE :

1. EN TRAITANT LE PROGRAMME DE FACON MINIMALE, IL DOIT Y AVOIR DAVANTAGE D'ESPACE ET DE TEMPS POUR DES *ACTIVITES NOUVELLES*, PLUS OUVERTES ET PLUS LIBRES, QUI DEVRAIENT FAIRE EVOLUER ENSEIGNEMENT ET PROGRAMMES.

2. LES ACTIVITES PROPOSEES PAR LA BROCHURE LE SONT A DES *ENSEIGNANTS,* DONC GENERALEMENT EN LEUR LANGAGE ET EN LEURS RACCOURCIS. CELA NOUS A PERMIS DE PRESENTER UN PLUS GRAND NOMBRE D'ACTIVITES, MAIS ELLES NE SONT PAS TRANSPOSABLES TELLES QUELLES AUX ELEVES.

3. IL S'AGIT D'ACTIVITES *PROPOSEES SUR LES DEUX ANS :* QUATRIEME ET TROISIEME, SANS TRI AFFICHE : CELUI-CI DEPENDRA DES ELEVES.

4. CES ACTIVITES SONT EN NOMBRE SUFFISANT POUR QU'IL Y AIT *CHOIX, ET CHOIX SELON LES ELEVES*, CHACUN D'EUX NE POUVANT EN PRATIQUER, SUR LES DEUX ANS, QU'UNE PETITE PARTIE, PARFOIS MINIME.

5. LA BROCHURE DEVRAIT D'ABORD SERVIR A SUSCITER, ET A AIDER A DECOUVRIR, *D'AUTRES* ACTIVITES ET PROBLEMES.

6. LA BROCHURE VEUT MONTRER, *PAR L'EXEMPLE*, DES MOYENS DE RENOUVELER L'ENSEIGNEMENT. ELLE SE HASARDE PARFOIS, DE CE FAIT, AU GRE DES PROBLEMES QUI APPARAISSENT, AU-DELA DU "PROGRAMME". EN

AUCUN CAS CES ACTIVITES, QUI DECONDITIONNENT, OUVRENT, ECLAIRENT, NE DOIVENT SE VOIR CONFERER LE STATUT DE "COURS".

7. LA BROCHURE CHERCHE AINSI, NON A LIVRER DES PRODUITS FINIS, MAIS *A OUVRIR LES VOIES* D'UN ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES *MOINS LINEAIRE ET PLUS ADAPTABLE A LA DIVERSITE DES ELEVES.*

... Il devrait paraître, vers mars 1980, un tome 2 (pour lequel nous avons déjà quelques textes), dont j'espère qu'il accueillera :

— de nouveaux auteurs*, travaillant dans le cadre des options fondamentales de cette brochure (cf. ci-dessus, et pages 9-14, ou 19-30) ;
— des textes palliant les lacunes éventuelles des nouveaux manuels de quatrième ;
— les auteurs du tome 1, et un résumé de leurs échanges avec les lecteurs qui auront émis* remarques, critiques, questions et suggestions.

Que ces échanges soient nombreux et féconds, tel est le vœu que je joins à celui, toujours présent, d'I.R.E.M. aux moyens retrouvés permettant aux enseignants d'assurer, grâce à une formation continue répondant à leurs besoins, un enseignement de qualité.

C. ZEHREN.
le 25 mars 1979

Equipe de rédaction:

Henri Bareil, Louis Duvert, André Henneton, Claude Lassave, Jean-Louis Ovaert, Colette Pelé, Christiane Zehren.

* - Ecrire à Henri Bareil, 7, rue des Pivoines, 31400 TOULOUSE.
- Pour des articles différents, écrire sur des feuilles séparées.

NOTATIONS ET VOCABULAIRE

Voici les principes généraux que nous avons suivis *et qui vaudraient à plus forte raison si nous nous adressions à des élèves :*

1. Nous ne pratiquons ni ne refusons systématiquement la redondance. Ainsi écrirons-nous « droite AB », aussi bien que « droite (AB) ».

2. Nous acceptons et pratiquons un usage plurivalent de mots simples dont le contexte éclaire le sens. Ainsi parlerons-nous de « triangle » aussi bien pour l'ensemble des trois sommets, que pour celui des trois côtés, ou pour la surface plane qu'ils bornent.

3. Nous refusons les querelles byzantines qui accompagnent parfois certains choix. Par exemple il nous paraît indifférent de dire : médiatrice (resp. milieu) de {A, B}, de [AB], de A et B, de (A, B),... Plutôt que de perdre son temps à promouvoir des ostracismes insoutenables devant un collège de mathématiciens, mieux vaudrait se préoccuper des mathématiques elles-mêmes ou de leur enseignement.

4. Nous ne prenons pas parti non plus lorsque les avis sont encore très partagés. Ainsi dirons-nous indifféremment d (A, B), ou AB, pour la distance (euclidienne). Par contre nous garderons seulement d (A, B) pour toute autre distance.

5. A propos du mot « angle », nous nous refusons, même s'il est mathématiquement justifiable, à l'emploi d'un langage lourd ignoré par les gens qui appliquent les mathématiques.

6. Nous préférons éviter des mots inutiles, tel « bipoint » (« couple de points » suffit et est beaucoup plus clair).

7. Des mots tels que « conjecturer » sont expliqués par les articles qui en traitent systématiquement.

8. Pour le vocabulaire mathématique nous renvoyons, s'il y a lieu, à un Dictionnaire de mathématiques, personnel ou acheté par l'établissement.

3. *L'équipe de rédaction*

LES PROGRAMMES 1978 : TRAHIS ? SCLÉROSÉS ? OU ENRICHIS ?

La lutte menée pour obtenir la circulaire de février 1973, puis la part prise (avec le soutien unanime de nos Comités nationaux) dans les débats qui ont conduit aux programmes et aux Instructions de 1978, ainsi que l'étude corrélative des objectifs assignés par la circulaire ministérielle d'avril 1977, nous font un devoir, et nous permettent, de préciser avec force les points suivants :

I 1978 ≠ 1971

LE PROGRAMME DE 1978 ET SES OBJECTIFS SONT FONDAMENTALEMENT DIFFÉRENTS DE CEUX DE 1971.

CE SERAIT, A NOS YEUX, UNE ERREUR CAPITALE QUE DE VOULOIR PERPÉTUER A TRAVERS LE PROGRAMME DE 1978 :

1/ une conception du NUMÉRIQUE insistant, comme préalable au fonctionnement des nombres, sur leur présentation théorique, ou obligeant à une présentation hiérarchisée (**Z**, puis **Q**, puis **R**) ;

2/ une conception de la GÉOMÉTRIE comme théorie axiomatique ;

3/ une négation corrélative des acquis des classes antérieures (refusés comme étant de la géométrie "physique" et non mathématique) ;

4/ un assujettissement à la démarche dichotomique : affine, puis métrique, par le biais d'une non-utilisation, dès le début de la Quatrième, de la distance (dans le plan) et de l'orthogonalité.

*

* *

On pourrait même conjuguer toutes les aberrations : s'astreindre à une longue introduction et à une étude de **Q**, puis à une introduction de **R**, ne parler qu'ensuite de la distance dans le plan, mais s'interdire en

Quatrième l'intersection d'une droite et d'un cercle, ou de deux cercles, pour attendre la classe de Troisième et la relation de Pythagore. Ce serait le refus total d'activités géométriques réelles en Quatrième (adieu les problèmes intéressants, notamment ceux de construction de figures et ceux relatifs aux fonctionnement des transformations), sous le couvert d'un purisme mathématique QUI EST UN *PURISME D'EXPOSITION, NON D'APPRENTISSAGE OU DE FONCTIONNEMENT*, QUI N'A DONC RIEN A FAIRE DANS LE PREMIER CYCLE. (Est-il même à sa place dans le second cycle ?)

NOUS APPELONS LES ENSEIGNANTS A LUTTER CONTRE TOUT CE QUI PERPÉTUERAIT CES ERREURS-LÀ.

*

* *

Nous les appelons, corrélativement, à fonder leur enseignement sur d'autres principes :

1. EN GÉOMÉTRIE :

Dans les classes antérieures, les dessins ont été le prétexte d'une réflexion qui a déjà conduit au *FONCTIONNEMENT géométrique de nombreux concepts, notamment ceux de :*

droite, demi-droite, segment ;
distance, cercle, disque ;
parallèles et perpendiculaires ; rectangle ;
distance d'un point à une droite ; intersection droite-cercle ;
intersection de deux cercles ;
angle (ou secteur angulaire).

Il importe donc que, au début de l'année de Quatrième, le professeur :

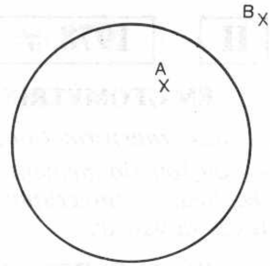
— ***refuse de remettre en question ces concepts*** *sous le fallacieux prétexte qu'il aurait maintenant à les définir "mathématiquement",*
— *ne rappelle* ***leur fonctionnement*** *qu'à l'occasion de problèmes variés issus de la suite du programme (mieux vaudrait éviter des "listes" de propriétés établies antérieurement à ce fonctionnement) ;*
— *affirme comme* ***propriétés résolument admises*** *les diverses règles de fonctionnement (Ainsi : par tout point il passe une droite, et une seule, perpendiculaire à une droite donnée. Ainsi : si $M \notin [AB]$, $MA + MB > AB$; si $M \in [AB]$, $MA + MB = AB$; et réciproquement...)*

L'approfondissement, lié au numérique, de certains de ces concepts, se fera ultérieurement et l'on sait que ce sera cohérent avec le fonctionnement géométrique antérieur.

Dès lors, il n'est nul besoin, par exemple :

— d'attendre **R** pour utiliser la distance dans le plan, ou l'abscisse de n'importe quel point d'un axe,

— d'attendre **R**, et la relation de Pythagore, pour déclarer que, dans le cas de figure ci-contre, le cercle coupe la droite (AB) et tout cercle passant par A et B.



Tout ce qui concerne ces situations relève de l'acquis géométrique des classes antérieures à la quatrième.

Dans l'optique du choix clair et net auquel nous appelons, et à cette condition seulement, le programme de quatrième :

— ***sera accessible et d'une longueur raisonnable ;***

— *pourra être l'occasion d'une* ***réelle activité mathématique,*** *enrichie et diversifiée selon les professeurs et les élèves.*

2. DANS LE DOMAINE NUMÉRIQUE :

La phrase du programme "Pratique des opérations sur les rationnels, sur les réels" a deux objets :

— écarter délibérément une "Introduction" des rationnels ou des réels qui rappellerait les verrues de 1971,

— n'imposer aucune hiérarchie entre rationnels et réels.

Alors que le statut propre des rationnels et des réels n'a AUCUNE importance dans le premier cycle (ni dans le second !), leur fonctionnement est régi par les mêmes règles.

L'important c'est de faire une large place aux calculs (expliqués !) sur les formes $\frac{a}{b}$. *Mais* $\frac{\pi}{3}$ *ou* $\frac{\sqrt{2}}{2}$ sont aussi abordables que, par exemple, $\frac{4\,278\,523}{32\,649}$. De même il est aussi logique d'écrire

$$\frac{5}{10} + \frac{7}{20} = \frac{5}{10} + \frac{3{,}5}{10} = \frac{8{,}5}{10},$$

ou, ce qui en est une traduction "mot à mot" :

$$0{,}5 + 0{,}35 = 0{,}85\ ,$$

que d'écrire $$\frac{10}{20} + \frac{7}{20}\ ,\ \text{soit}\ \frac{17}{20}.$$

*

* *

1971 ≠ 1978. Mais, comme le montrent déjà les dernières remarques à propos des réels, il n'est pas question pour autant que 1978 soit l'anti-1971.

II 1978 $\neq$ programmes antérieurs à 1971

EN GEOMÉTRIE, *soulignons le primat qui devrait être accordé :*

— aux transformations et aux constructions,

— au fonctionnement des concepts dans les divers domaines (géométrie des figures, numérique (coordonnées), vectoriel). Le vectoriel garde donc toute sa valeur.

EN ALGÈBRE, "1978" devrait :

— maintenir l'importance des *explications* et des *justifications* des calculs numériques (ou littéraux) à partir des propriétés fondamentales des opérations dans **Q** et **R** ;

— permettre le développement des activités numériques, issues des sciences physiques, de la biologie, de l'économie, d'autres secteurs des mathématiques... exploitant des *tableaux de données* et faisant intervenir des *fonctions très diverses* (exponentielles notamment !), des suites arithmétiques, des suites géométriques, ...

*

* *

Le libellé du programme de 1978 continue à écarter la mécanisation, antérieure à 1971, à base de cas d'égalité ou de similitude.

Contrairement à l'état de choses antérieur à 1971, il devrait s'agir maintenant :

— d'éviter les pseudo-démonstrations (Ce souci était déjà présent dans les programmes de 1971, mais les moyens que nous préconisons sont différents : cf. pages 23, 24).

— d'avoir conscience que "démontrer", c'est d'abord se placer dans un champ de pré-supposés, et que toute démonstration dépend de ces pré-supposés.

— de privilégier le côté opératoire par rapport au côté descriptif (ceci s'oppose à 1971 et à l'état antérieur simultanément),

— d'utiliser en conséquence, dans des situations suffisamment riches, des propriétés ou des énoncés relativement simples plutôt que de passer trop de temps à les établir.

En outre, il va de soi que, désormais :

— les activités mathématiques utilisent le langage élémentaire des ensembles et des relations ;

— à partir d'exemples variés il apparaît, dans le premier cycle, une mise au point progressive du fonctionnement des notions suivantes :
- — applications, composition des applications,
- — bijection, bijection réciproque,
- — partition d'un ensemble et relation d'équivalence.

D'autre part, divers exemples du programme, issus tant de l'algèbre que de la géométrie, suggèrent des rapprochements qui permettront de dégager progressivement la notion de groupe (Mais cela ne se produira pas nécessairement au niveau du premier cycle).

[Mais ces domaines qui, en 1971, apparaissaient comme nouveaux, ne le sont plus actuellement. Cette brochure, de ce fait, ne contient pas d'article qui leur soit spécifiquement consacré].

*

* *

Pour nous, d'autres choses devraient nous démarquer fondamentalement des programmes antérieurs à 1971, aussi bien que de celui de 1971, et nous permettre d'aller au-delà des libellés de 1978, encore victimes, malgré les efforts de l'A.P.M.E.P., de conceptions trop traditionnelles de l'enseignement des mathématiques :

III 1978 → DEMAIN ?

1. S'INTERESSER DAVANTAGE AUX COMPORTEMENTS :

Les circulaires ministérielles de février 1973, d'avril 1977, et la mise en valeur des problèmes par les Instructions de 1978 vont, encore que timidement, dans le sens préconisé par l'A.P.M.E.P. en ses divers textes. Mais beaucoup trop timidement !

S'il est important de veiller à l'acquisition de connaissances de base par les élèves, il l'est tout autant, sinon plus, de s'attacher à favoriser chez eux l'apparition ou le développement de certains comportements, notamment leur capacité d'autonomie. Cf. pages 21-28. C'est là l'effort le plus indispensable.

2. INTENSIFIER LE SOUCI D'OUVERTURE

Nous l'avons dit, dans le § II, à propos du numérique. Encore faudra-t-il également penser à l'utilisation des moyens informatiques (calculateurs de poche, programmables ou non, ordinateurs (micro, — ou mini —), ...)

En géométrie, il s'agit aussi de sortir des droites et des cercles envisagés dans des situations bien restreintes. Aussi notre brochure s'est-elle ouverte à des interventions de droites ou cercles dans d'autres situations, et à d'autres figures simples (ellipse,...). Dans notre esprit, il ne s'agit pas de faire "descendre" en Quatrième ou Troisième la géométrie du second cycle de naguère. Il s'agit simplement de montrer comment mieux appréhender des situations riches et des classes de problèmes. Les démarches en jeu y comptent bien plus que tels résultats (consignés d'ailleurs dans des documents accessibles...). Ceci relève, sur un mode plus mineur, et sans aller en ce tome 1 jusqu'aux solides de l'espace, de ces "mathématiques dans la réalité", qu'Emma Castelnuovo pratique avec ses élèves de 12 à 15 ans (Cf. bibliographie, ouvrage cité en n° 4.)

3. REFUSER UN ENSEIGNEMENT LINÉAIRE DES MATHÉMATIQUES : (Cf. pages 29, ...)

Jusqu'à présent, les cercles officiels soutiennent que l'enseignement des mathématiques ne peut être que linéaire.

Ils confondent "enseignement" avec "exposition".

Il ne suffit pourtant pas de critiquer cette attitude (pour, aussitôt après, pratiquer soi-même une progression linéaire).

Mais aller au-delà est difficile tant certaines habitudes sont ancrées en nous depuis (cela a commencé avec nos propres études) qu'on nous *expose* une mathématique toute faite.

Aussi cette brochure s'efforce-t-elle de montrer divers exemples de mise en œuvre des moyens préconisés pages 29-30.

> "1. Pour chaque activité, ou tranche d'activités, préciser les propriétés (résultats d'acquis intuitifs, de raisonnements ou d'expérimentations antérieurs) qui serviront de base.
>
> En changeant d'activité ou de tranche d'activités, ces propriétés de base pourront changer.
>
> 2. Les activités peuvent être conduites non seulement avec l'aide des théorèmes déjà établis en classe et qui font partie du lot des propriétés utilisables, mais encore avec le secours de théorèmes ou de définitions "hors programme" qui seront utilisés pour la circonstance. Ces théorèmes et ces définitions sont :
>
> — ou bien donnés par le professeur lorsque tel problème les requiert manifestement, et qu'il n'y a pas d'autre source de documentation,
>
> — ou bien issus de documents de travail (dictionnaires, encyclopédies, ...) que les élèves pourront et auront appris à consulter.
>
> 3. Une même propriété peut être, selon les cas, admise, conjecturée, ou démontrée, l'essentiel étant alors de préciser clairement son ambition."

Ces moyens seront de plus en plus efficaces au fur et à mesure que nous apprendrons à les pratiquer.

La rénovation de notre enseignement est d'abord à ce prix.

4. DE NOUVEAUX PROGRAMMES SE FORGERONT DANS NOS CLASSES :

Au lieu d'attendre tout des programmes, il importe de travailler DANS SA PROPRE CLASSE aux changements qui peuvent sembler opportuns, en diffusant ensuite (l'A.P.M.E.P. ne demande pas mieux que d'y contribuer) toutes les expériences "positives", de façon à *provoquer un effet "boule de neige"*.

Dès lors, de nouveaux changements de programmes traduiront dans les textes ce qui sera déjà amplement dans les faits.

C'est à cette œuvre de RESPONSABLES que nous appelons tous les enseignants : Elle concerne, surtout, nos élèves — d'aujourd'hui et de demain —.

PREMIERE PARTIE

MATHEMATIQUES EN QUATRIEME-TROISIEME

I.1.

Claude LASSAVE, Henri BAREIL,
Christiane ZEHREN

BREF HISTORIQUE DES PROGRAMMES DE QUATRIEME-TROISIEME DURANT L'ANNEE 1978

Si l'A.P.M.E.P. s'est intéressée aux programmes de quatrième - troisième, comme ce bref historique le rappelle, complétant ainsi la collection des Bulletins nationaux de l'A.P.M.E.P., cela ne signifie pas pour autant qu'elle isole le problème des programmes de l'ensemble des problèmes relatifs à la « Réforme Haby ». A ce sujet, nous déplorons notamment la suppression des Travaux dirigés par demi-classe et nous demandons instamment leur rétablissement.

*
* *

En juin 1978, l'Inspection Générale propose au C.E.G.T. des projets qui soulèvent l'opposition des syndicats, de l'A.P.M.E.P., de l'Académie des Sciences,..

L'A.P.M.E.P. a par ailleurs multiplié à cette occasion les contacts avec les syndicats et Parents d'Elèves.

•• Ensuite :

— d'une part, les projets de l'Inspection Générale sont refusés au C.E.G.T. (en même temps que ceux des autres matières).

— d'autre part, le Comité National A.P.M.E.P. vote, à l'unanimité, une prise de position claire et argumentée dont voici l'une des conclusions :

«... il ne peut être question d'accepter :
— ni le maintien des programmes de 1971 ;
— ni les programmes actuellement proposés par l'Inspection générale au C.E.G.T. ;
— ni aucun autre projet qui relèverait du même esprit »...

(Bulletin A.P.M.E.P. n° 314, p. 666, 667 et 668)

•• La Direction des Collèges propose de reprendre la concertation avec les différentes parties concernées et de remettre au 17 octobre 1978 le vote du C.E.G.T. sur les programmes de quatrième - troisième.

•• C'est dans cet esprit que Monsieur Rancurel, Directeur des Collèges, invite l'A.P.M.E.P., l'Académie des Sciences, ... et l'Inspection Générale à une réunion, en sa présence, le 20 juillet 1978 à Paris.

•• Le texte de compromis issu de cette réunion, et qui constitue le programme actuel, nous a paru nettement plus proche des prises de position du Comité National de juin que le précédent, donc acceptable, et le Comité national A.P.M.E.P. d'octobre a approuvé sans réserve notre position.

•• Lors des journées de Reims, nous apprenons que l'Inspection Générale a écrit un texte d'accompagnement des programmes qui, sur au moins deux points, diminuait la liberté des professeurs reconnue par le programme (il le faisait en hiérarchisant l'introduction des rationnels et des réels et en préconisant une organisation axiomatique, d'ailleurs dûment précisée, de la géométrie).

•• Les participants de la réunion du 20 juillet sont à nouveau intervenus auprès de la Direction des Collèges (l'A.P.M.E.P. l'a fait par télex dès le 26 septembre 1978).

•• De nouveaux « Projets d'Instructions » sont alors écrits par l'Inspection Générale. Ce sont ces textes-là qui ont été officialisés et publiés (cf. Bulletin A.P.M.E.P. n° 316).

I.2. *L'équipe de rédaction*

REMARQUES GÉNÉRALES SUR L'ORGANISATION DES ENSEIGNEMENTS DE MATHÉMATIQUES EN QUATRIÈME ET TROISIÈME

Le premier cycle fait partie du temps de la scolarité obligatoire.

Là, plus encore qu'ailleurs, "enseigner des mathématiques" devrait signifier, non pas "exposer les mathématiques", mais faire pratiquer des activités mathématiques aussi riches et variées que possible.

Ce choix de base en entraîne d'autres :

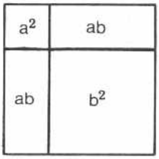
I. Une volonté de cohérence :

Il ne s'agit pas de la cohérence quant aux assertions mathématiques, qui, à ce niveau, ne soulève pas de difficultés, mais de cohérences moins évidentes :

1. En totale opposition avec ce qui se passait jusqu'à présent pour la géométrie, il est fondamental de *situer les activités mathématiques de quatrième-troisième dans la ligne des acquis (et des non-acquis) des classes antérieures* (tout en se gardant de conclure trop vite quant au bilan de ces acquis et de ces non-acquis).
Cf. pages 35-48 et 29-30.

2. *L'algèbre et la géométrie devraient être étroitement conjuguées :* "Il faut que l'élève puisse « voir géométriquement » lorsqu'il calcule sur les nombres, et inversement il doit pouvoir traduire en calcul des situations géométriques simples" (Académie des Sciences ; 1977).

Voir aussi, outre des exemples classiques (Thalès, homothétie, et rationnels ; racines carrées et théorème de Pythagore ; échelles et puissances de dix ; ...), celui de diverses approches du développement de $(a+b)^2$: calcul classique, aire d'un carré de côté $(a+b)$, cheminement sur quadrillages (Cf. pages 185 , 186), ...



De même fera-t-on sentir aux élèves que les démonstrations, et plus généralement les recherches-expériences-conjectures de la géométrie ne sont pas d'un type différent de celles de l'algèbre. (Cf. par exemple, pages 109-110)

3. *Enfin les activités envisagées devraient s'effectuer,* dans la mesure du possible, *en liaison avec les enseignants d'autres disciplines.*

Faute d'expérimentation là-dessus dans le cadre des nouveaux programmes, nous renvoyons, pour des exemples de telles activités, soit au tome 2, soit à des articles ultérieurs du Bulletin de l'A.P.M.E.P.

II. La reconnaissance du rôle fondamental des problèmes :

Déceler, poser et résoudre des problèmes constituent l'activité essentielle des mathématiques.

"Or, l'éducation mathématique n'est rien d'autre que le développement de l'activité mathématique de l'élève et il n'y a pas d'activité sans problèmes" (A. Krygowska).

Les problèmes (ce mot inclut toujours une recherche) doivent donc imprégner tout l'enseignement et non apparaître comme une simple application du cours.

Telle est, en unité de vues avec les "Instructions" de 1978, une des idées-forces de la présente brochure.

Il n'en va pas ainsi, jusqu'à présent, de l'enseignement au premier cycle : Au lieu de problèmes, la plupart des manuels offrent essentiellement, et parfois seulement, soit des exposés, soit des exercices très centrés sur une application mécanique des connaissances.

La mise en évidence de problèmes intéresse toutes les branches de l'activité mathématique au 1[er] cycle. Les applications ou fonctions, en algèbre ou en géométrie, l'exploitation de tableaux de données (Cf. page 156) s'y prêtent particulièrement. De même, l'étude d'ensembles de points soumis à une (ou des) condition(s), les tracés et les constructions. Par exemple, les activités V, 2, 3, 4 (pages 206-224) font apparaître des foisonnements de problèmes à partir d'études de base.

Les problèmes gagneront à être également empruntés à la vie pratique ou aux sciences expérimentales, économiques et sociales.

Ainsi pour les suites de nombres (hausses excessives, ..., Cf. pages 121-124, 140-141, 174-175, 179-182, 189-190), les pavages (Cf. pages 55-61), papiers peints (Cf. pages 22 et 62-63), les translations, symétries, déformations d'images à la télévision (Cf. tome 2, ...), ...

III. Une attention prioritaire à des démarches fondamentales :

"La formation à l'observation, à l'analyse, à la recherche, puis à l'abstraction et au raisonnement, importe plus qu'une acquisition plus ou moins mécanique de connaissances. Il est plus difficile de former ainsi des esprits que de se borner à transmettre un contenu mathématique ; il convient donc de subordonner cette transmission à la tâche essentielle de formation ; mais, bien entendu, toute formation suppose un minimum de connaissances solides" (circulaire de février 1973).

Par ailleurs, s'il est clair que l'existence du raisonnement de type hypothético-déductif est une des caractéristiques des mathématiques, on oublie trop souvent que les mathématiques, pour se faire, se développer ou s'apprendre, utilisent beaucoup les raisonnements de type expérimental ou inductif (Cf. "Le raisonnement plausible" de Polya).

L'enseignement des mathématiques au premier cycle devrait donc s'efforcer de développer préférentiellement les capacités qui tendent à rendre l'élève plus autonome, plus productif, plus responsable de lui-même. Sans vouloir être exhaustif, citons-en quelques-unes (on trouvera une étude plus fouillée dans la *Grille A.P.M.E.P. d'analyse des manuels scolaires*) :

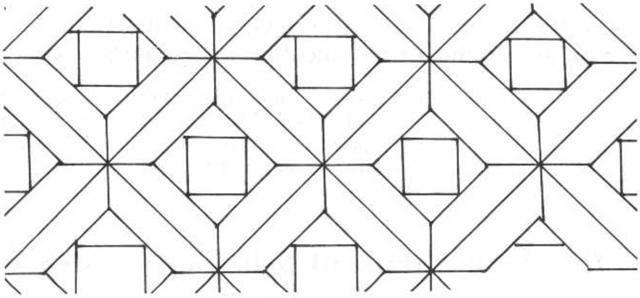
1. CAPACITÉ A MANIPULER :

Il n'est pas possible de maîtriser un concept si des images, des pratiques concrètes ne l'ont pas nourri.

Par exemple, si l'on décide de définir les symétries orthogonales à l'aide de pliages, mieux vaut que les élèves aient fait effectivement, à un moment donné de leur scolarité (mais pas nécessairement en quatrième ou troisième), des pliages, des reproductions de dessin par calques.

Les translateurs, le symétriseur axial, le symétriseur central,... permettent également de faire fonctionner concrètement les transformations correspondantes.

Le papier peint, tel que celui ci-dessous, permet de trouver le motif minimum (ou les motifs minimaux) à partir duquel (ou desquels) on reproduira tout le papier en faisant agir l'une des transformations du programme de quatrième.



Ce type d'approche des notions, exigeant en temps, est utile à tous les élèves. Il facilitera aussi bien les approfondissements théoriques ultérieurs que la mise en œuvre pratique des connaissances.

2. *CAPACITÉ A EXPÉRIMENTER, OBSERVER, CONJECTURER :*

Toute la brochure insiste beaucoup là-dessus, cette capacité, essentielle, semblant jusqu'à présent trop méprisée ou ignorée.

Cf. article III. 3. pages 111-115.

Détachons un autre exemple :

Etudier $S_A \circ S_B$ (A et B points fixes), c'est d'abord faire agir $S_A \circ S_B$ sur autant de points que nécessaire jusqu'à ce que l'on puisse conjecturer une translation (sans qu'il soit besoin du mot, ni de la connaissance préalable du concept mathématique).

De même, l'observation active de papiers peints peut utilement aider à l'introduction des translations, symétries (centrales ou orthogonales) : Cette observation s'accomodera éventuellement de termes tels que "glissement rectiligne", "retournement", "pivotement d'un demi tour", ...

Toutes les études relatives à des éléments variables (points, nombres, ...) se prêtent à merveille à la triple démarche : expérimenter - observer - conjecturer.

3. *CAPACITÉ A RECHERCHER DES EXEMPLES OU DES CONTRE-EXEMPLES :*

Les exemples conduisent à des conjectures. Cf. pages 111-115.

Les contre-exemples infirment des conjectures ou des énoncés.

Ainsi est-il facile de percer à jour de classiques erreurs d'élèves qui confondent :

a^2+b^2 et $(a+b)^2$, $\frac{x}{a}+\frac{y}{a}$ et $\frac{x+y}{2a}$, $\frac{x}{a}\times\frac{y}{a}$ et $\frac{xy}{a}$,

$ab\times m$ et $ma\times mb$,...

Le rôle des contre-exemples est fondamental et l'aptitude à en user doit être développée au maximum.

4. CAPACITÉ A TRADUIRE D'UN LANGAGE DANS UN AUTRE :

Ainsi :

— lors des programmes de construction (Cf. activité II.3. pages 49-51)

— pour l'expression de la translation en langage de vecteurs ou en langage de coordonnées, ... etc.

5. CAPACITÉ A DÉDUIRE ET A DÉMONTRER :

"Des séquences de déductions bien construites, à partir d'énoncés explicitement admis" (circulaire de février 1973) peuvent être ménagées au sein de toute activité. L'appartenance au programme n'y est pas indispensable : Cf. pages 14 et, ci-après, page 30 .

Mais il y a lieu de :

— réserver un temps suffisant à de telles séquences, quitte à ce qu'elles soient moins nombreuses (pour éviter de courir la poste en les multipliant),

— ne pas négliger pour autant les autres comportements à favoriser ou à développer,

— ne pas faire apparaître la déduction comme un jeu inutile ou fastidieux.

Ainsi "le professeur invitera à admettre, chaque fois qu'il le jugera utile, des énoncés qui pourraient en fait être démontrés ; il en fera comprendre le sens à partir de considérations intuitives ou inductives" (circulaire de février 1973).

Cf. tout l'article III.6 pages 142-145.

Ainsi le théorème général : "Dans le plan, toute isométrie peut se caractériser par la donnée de 3 points non alignés et de leurs images" se comprend très bien grâce à la traduction de toute isométrie plane par un déplacement de calque : la donnée des trois images non alignées fixe le calque.

Le recours aux démonstrations sera donc réservé aux cas où un certain nombre de conditions seront remplies :

•• **Première condition :** La nécessité d'une démonstration doit pouvoir être ressentie par l'élève.

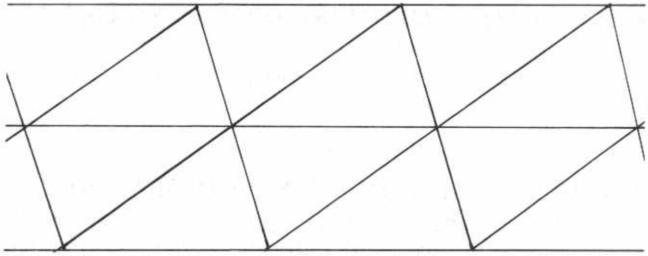
Cela exclut, en géométrie, les démonstrations de résultats que le dessin ou des manipulations rendent par trop évidents, et les démonstrations de théorèmes ainsi évidents à l'aide d'autres qui le sont parfois moins.

Voici trois exemples d'une telle exclusion :

EXEMPLE 1 :

La valeur de la somme des angles d'un triangle peut très bien être perçue de façon convaincante à partir d'un pavage (Cf. page 60, ...), tel celui ci-dessous.

Si, dès lors, une démonstration (par exemple à partir des propriétés de la symétrie centrale) risque d'apparaître superfatoire, on gagnera à admettre le théorème.



EXEMPLE 2 :

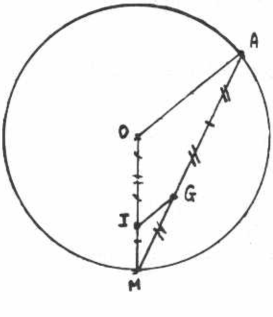
Quand on aborde la symétrie centrale (Cf. pages **75** , **143**), le ''pivotement d'un demi-tour'' conduit à admettre d'emblée les propriétés de conservation, par symétrie centrale, de la distance, de l'alignement (et aussi de la direction d'une droite, mais du changement de sens pour une demi-droite). Il est ensuite plus dangereux qu'utile d'essayer de démontrer telle ou telle de ces propriétés à partir de telle autre ou d'énoncés antérieurement établis.

EXEMPLE 3 :

Quand on aborde la symétrie orthogonale (Cf. pages **63** , **73**), le pliage autour d'une droite conduit à admettre d'emblée les propriétés de conservation de la distance et de l'alignement par la symétrie orthogonale. Naguère, au stade où cette symétrie était étudiée, la conservation de la distance pouvait être établie par la relation de Pythagore. Mais celle-ci n'était-elle pas moins évidente que la propriété à démontrer ?

•• **Deuxième condition** : Les présupposés et les règles de validation de la démonstration auront été clairement définis.

(ce qui exclut d'anciennes ''pseudo-démonstrations'' de cinquième-quatrième-troisième, celles des ''cas d'égalité'' par exemple).



Ainsi, soit en quatrième, l'étude suivante : Considérons un point A et un point G tels que l'indique la figure ci-contre.

A décrit le cercle (qui est fixe). M est fixe.

Conjecture : G est sur le cercle (I, IM).

Cette conjecture s'explique bien par le fait que le triangle IMG est une ''réduction'' (à l'échelle $\frac{1}{3}$) du triangle isocèle OMA. Mais cette explication, fort convaincante, ne saurait être une démonstration que si l'on se réfère à des propriétés précises (celles de l'homothétie si l'on veut : mais il faudrait les avoir explicitées, et préciser les présupposés).

•• **Troisième condition** : L'effort demandé doit rester à la portée de l'élève.

(ce qui exclut les démonstrations délicates... même pour des spécialistes, telle la démonstration de la transivité de l'équipollence... dans le cadre de la ''progression officielle'' adjointe aux programmes de 1971.

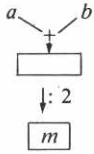
6. CAPACITÉ A RÉDIGER ET A S'EXPRIMER :

éventuellement sous diverses formes : organigrammes, textes en français, dessins et graphiques, ...

Cf. brochure "Savoir minimum en fin de troisième" : p. 181, p. 197, p. 200.

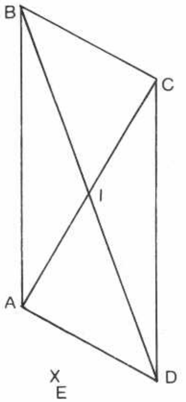
EXEMPLE 1 :

m est la demi-somme de a et b ; $m = \dfrac{a+b}{2}$;



EXEMPLE 2 :

Soit un parallélogramme ABCD, et un point E quelconque. Placer F tel que $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{FC}$.



Problème : Etudier la disposition des points E , I , F .

Voici une solution présentée en organigramme :

$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{FC}$ → EAFC est un parallélogramme → milieu de [AC] = milieu de [EF]

ABCD est un parallélogramme → milieu de [AC] = milieu de [BD] = I

→ I, milieu de [AC] = milieu de [EF]

7. CAPACITE A SAVOIR FABRIQUER OU UTILISER UNE DOCUMENTATION :

— Le "livre" sera rendu en juin.
— Le "cours dicté" est — heureusement — interdit.
— Les polycopiés éventuels sont souvent trop nourris et difficilement consultables, ne serait-ce que parce qu'ils sont peu personnalisables selon les élèves.

Aussi, entre autres méthodes, peut-il être opportun que l'élève mette lui-même, sur fiches ou sur classeur, les figures-clés avec leurs propriétés, les énoncés-clés, éventuellement classés en fonction de leur utilisation, des exemples de comportements, des contre-exemples,...

Un travail de groupe peut y aider. Quant à l'utilisation d'une documentation, cf. ci-après page 30.

8. CAPACITE A DOUTER ET A S'AUTO-CONTROLER :

EXEMPLE 1 :

x étant un décimal, donner les représentations graphiques des applications :

$x \mapsto -2x - 1$ (f)

$x \mapsto -2{,}2x - 0{,}7$ (g)

Peut-on déduire du dessin quel décimal a même image par f et par g ?

Le dessin est trop imprécis et hésitant : 1,1 ?, 1,2 ?, 1,3 ?, 1,4 ? un autre nombre ?..

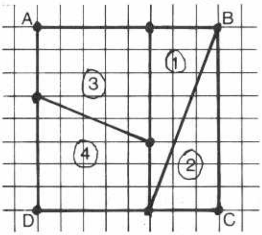
EXEMPLE 2 :

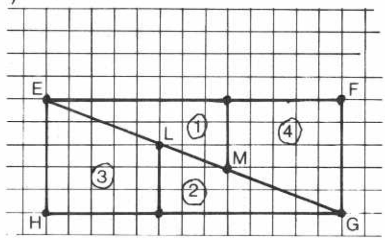
Se méfier des dessins.

Exemple classique ;

On découpe le carré ABCD et on réassemble les morceaux comme il est indiqué à droite. Or le quadrillage indique des aires :

pour ABCD : 64 carreaux
pour EFGH : 65 carreaux } d'où 64 = 65 !!





(Remarque : E, L. G ne sont en réalité pas alignés, ni E, M, G).

EXEMPLE(S) 3 :

Voir pages 113 , 115 des cas de prise en défaut de conjectures.

EXEMPLE 4 :

(Auto-contrôle). Cf. brochure *Savoir minimum en fin de troisième,* pages 161 à 165.

En particulier il est possible de contrôler, par des écritures à virgules en valeurs exactes ou approchées, les calculs sur les formes $\frac{a}{b}$. Lorsque, en quatrième, les élèves commencent à pratiquer de tels calculs, ils n'ont besoin de personne (donc pas du professeur !) pour s'assurer de la correction des calculs. Le recours aux écritures à virgules y suffit généralement.

9. CAPACITE A IMAGINER, INVENTER, CHERCHER :

Cela suppose un champ d'initiatives aussi considérable que possible. De là notre refus de nous laisser enfermer dans la lettre d'un programme nécessairement pauvre si on le veut minimal et d'avoir des activités aux frontières ouvertes...

Cf. V[e] partie de la brochure et aussi la plupart des articles qui la précèdent.

REMARQUES :

1. Pluralité des comportements dans une même phase d'activité

Toute activité mathématique met en jeu, en chacune de ses phases, un grand nombre de comportements :

Ainsi, essayons d'établir la conjecture de l'exemple (2ᵉ condition) de la page 24 . La conjecture apparaîtra d'autant mieux, et plus sûrement, que, divers points A étant pris sur le cercle, il y aura mise en évidence d'une symétrie par rapport à (OM) et utilisation, comme positions de A, de M et du point diamétralement opposé. En cette phase expérimentale la déduction joue donc, elle aussi, à plein.

Aussi peut-on obtenir, à un moment ou à un autre, un investissement des élèves dans les divers types de comportement qu'il est souhaitable de développer.

2. Motivation des élèves :

Encore faut-il que les élèves soient accrochés et motivés. La formulation des problèmes par les élèves eux-mêmes est l'un des moyens qui le permettent. Après quoi, chacun développera sa recherche et son activité, éventuellement au sein d'un groupe, selon des modes qui, dans une certaine mesure, lui seront propres.

Cf. par exemple, l'activité V. 4, pages 216 - 224

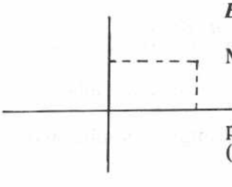
3. Activité individuelle de l'élève :

Il est certainement bon de varier les méthodes d'enseignement. Mais on court à beaucoup d'illusions si l'on pense que l'exposé plus ou moins magistral d'une connaissance suffit pour son acquisition, c'est-à-dire pour la capacité à la faire opérer.

Dans la ligne du célèbre adage de Montaigne, il est bien évident que tant que l'élève ne s'est pas approprié un concept, il ne peut le faire agir.

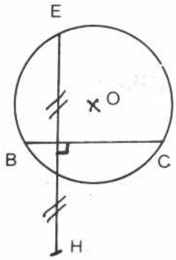
• Voici deux exemples où l'expérience montre que, le plus souvent, la simple connaissance formelle des concepts en jeu ne conduit pas directement, pour autant, à leur exploitation : (les exemples ont concerné des classes de quatrième).

EXEMPLE 1 :



M (x, y)

Dans un repère orthonormé, quel est l'ensemble des points M du plan dont les coordonnées vérifient $x^2 + y^2 = 9$?
(Concept : relation de Pythagore)



EXEMPLE 2 :

Le cercle est fixe, B et C aussi. E décrit le cercle. Soit H le symétrique de E par rapport à (BC). Quel est l'ensemble des points H ? (Concept : Conservation des distances par symétrie orthogonale).

•• Il y a donc lieu de privilégier d'autant plus les modes d'appropriation des concepts qui, par une activité individuelle maximale, favorisent une acquisition en profondeur... :

IV. Un objectif d'acquisition progressive des concepts :

••• La connaissance se fait par une phase intuitive, puis explicite. Une connaissance « impressionniste » précède une phase consciente. En fait, il y a enrichissement progressif des concepts pour faire face à des problèmes, non résolus par l'apprenant, qui se posent à lui.

Les concepts mathématiques s'enrichissent et se précisent au fur et à mesure de leur fonctionnement.

Leur introduction, leur utilisation, leur exploitation, leur appropriation sont étroitement conjuguées.

•••• « Il convient de consacrer suffisamment de temps à l'introduction d'une notion nouvelle, souvent par des approches successives dont certaines peuvent se référer à des points distincts des programmes » (circulaire de février 1973).

Voyons l'exemple du concept de symétrie :

1 Il s'agit d'abord de symétrie orthogonale ou centrale. Successivement, par exemple :

— On observe des situations de symétrie (pliages, rotations, ...)
— On commence à transformer des figures simples
— On recherche des invariants
— On étudie les figures-clés associées à ces symétries
— On utilise les coordonnées, éventuellement avec des repères quelconques
— On étudie des figures, qui possèdent des points variables, où interviennent des symétries
— On compose des symétries, que l'on compose ensuite avec d'autres transformations.

2 Plus tard :

2.1. La symétrie orthogonale est généralisée en symétrie axiale, de direction quelconque, puis en affinité, orthogonale ou non, par rapport à une droite.
2.2. La symétrie centrale est intégrée dans les homothéties.
2.3. Les études sont ensuite généralisées à l'espace.
2.4. ...

Ainsi la notion de symétrie centrale peut-elle être approchée par :

— l'intermédiaire du parallélogramme ;
— la rotation ;
— les milieux et moyennes ;
— les coordonnées ;
— la composition de deux symétries orthogonales d'axes perpendiculaires ;
— l'homothétie ;
— les figures-clés où la symétrie centrale intervient ;
— ...

••• « On se gardera le plus souvent d'épuiser un sujet au moment où on le rencontre pour la première fois » (circulaire 1973).

EXEMPLE :

Le rectangle peut se traiter directement. Mais on le rencontrera aussi comme cas particulier du parallélogramme.

Il peut également être étudié en liaison avec le losange, figure qui lui est associée dans les transformations par polaires réciproques, et qui relève du même groupe de symétries : D'où des correspondances entre propriétés du losange et propriétés du rectangle.

Puis son rôle vis-à-vis du carré apparaîtra analogue à celui de l'ellipse vis-à-vis du cercle (cf. brochure A.P.M.E.P. *Géométrie 1er cycle, Tome 2)*. Etc.

••• Dans le même ordre d'idées, des classes d'objectifs ayant été définies, il est généralement déraisonnable de vouloir se consacrer à fond à toutes, ou presque, à l'occasion d'une activité ou d'un thème de travail donnés. Enseigner, c'est aussi choisir, et non tirer tout de tout, ni exploiter jusqu'à la corde.

V. Un effort pour « délinéariser » l'enseignement des mathématiques :

Pour permettre aux activités mathématiques pratiquées de se développer sans trop d'entraves, il importe de ne point les assujettir à un déroulement linéaire de l'enseignement des mathématiques.

Le déroulement linéaire gêne en effet l'activité fondamentale de surgissement et de résolution de problèmes (cf. par exemple les activités V, 2, 3, 4).

Toute obligation stricte à un déroulement linéaire limite l'initiative des élèves, éteint leur imagination, réprime leur curiosité. Elle fait des élèves des assistés permanents. Il y a donc lieu de saisir des occasions de s'en libérer.

TROIS MOYENS SEMBLENT POSSIBLES POUR CELA (déjà cités page 14) :

1 Pour chaque activité, ou tranche d'activités, préciser les propriétés (résultats d'acquis intuitifs, de raisonnements ou d'une expérimentation antérieurs) qui serviront de base.
En changeant d'activité ou de tranche d'activité, ces propriétés de base pourront changer.

2 Les activités peuvent être conduites, non seulement avec l'aide des théorèmes déjà établis en classe et qui font partie du lot des propriétés utilisables, mais encore avec le secours de théorèmes ou de définitions « hors programme » qui seront utilisés pour la circonstance. Ces théorèmes et ces définitions sont — ou bien donnés par le professeur lorsque tel problème les requiert manifestement, et qu'il n'y a pas d'autre source — ou bien issus de documents de travail (dictionnaires, encyclopédies, ...) que les élèves auront appris à consulter.

3 Une même propriété peut être, selon les cas, admise, conjecturée, ou démontrée, l'essentiel étant alors de préciser clairement son ambition.

LA PRÉSENTE BROCHURE DONNE DE NOMBREUX EXEMPLES DE CES DIVERSES FAÇONS DE PROCÉDER.

• *Le fait même que l'on s'oblige à préciser ainsi dans quel champ d'activités on se place, quels objectifs on se donne, quels outils on se permet, favorise la distinction, toujours difficile pour certains élèves, entre « voir » et démontrer.*

VI. Une exigence de personnalisation de l'enseignement — selon les élèves et les enseignants —

Les choix qui précèdent doivent, au fur et à mesure qu'ils prendront corps, permettre de réaliser, en quatrième - troisième, aussi bien qu'en sixième - cinquième — ou au-delà de la troisième — un enseignement par « noyau-thèmes ». (Cf. textes A.P.M.E.P. de base : *Charte de Caen* 1972 ; *Texte d'orientation* 1978).

A nous tous de dégager le « noyau » de comportements (à adjoindre au noyau de connaissances indiqué par le programme) et d'inventer des « thèmes », c'est-à-dire des activités variées, non définies par le programme, permettant d'introduire, d'appliquer, d'illustrer les notions de l'un des noyaux et de pratiquer les comportements soulignés par l'autre.

Ainsi pourrons-nous aller vers des enseignements plus personnalisés selon les élèves et les enseignants.

La nécessité d'une telle personnalisation est encore accrue par l'organisation actuelle du premier cycle, l'inclusion du « soutien » — pour les quatrièmes - troisièmes — dans l'horaire global, l'extrême variété des orientations, et celle des connaissances et des comportements à l'entrée en quatrième.

Par ailleurs, nous savons bien que le comportement des élèves en mathématique est en relation avec le comportement dans les autres disciplines, le mode de vie dans l'établissement,...

Plus que jamais tout appelle à une réflexion et à une action qui évitent de compartimenter ...

DEUXIÈME PARTIE

ACTIVITÉS A DOMINANTE GÉOMÉTRIQUE

II.1. *Louis DUVERT*

CONSTRUCTIONS DE QUADRILATÈRES

Invité à dessiner un quadrilatère — en admettant qu'il sache vaguement ce que c'est — l'élève de Sixième, de Cinquième, et même de Quatrième, produit généralement un rectangle (parfois carré) dont les côtés sont portés par les traits du quadrillage de son cahier.

Après qu'on a réussi à lui entr'ouvrir l'imagination et qu'on a convenu de dessiner sur du papier non quadrillé, il enfante des quadrilatères plus variés, mais le plus souvent convexes.

Avant de le lancer dans une étude déductive des quadrilatères "classiques", il importe donc, me semble-t-il, de lui faire découvrir toutes sortes de quadrilatères, et de le familiariser avec un minimum de vocabulaire sur la question.

Les activités ci-dessous ont en outre pour objectif de lui faire développer (ou acquérir !) la maîtrise des instruments de dessin. Elles ne comportent aucun souci de démonstration ; elles se placent en début d'année, avant que l'initiation à la démonstration en géométrie soit commencée. Ce qui ne signifie pas qu'elles n'exigent aucune réflexion !

① Un commis-voyageur habite Amiens. A chaque tournée, il doit visiter trois villes : Amiens, Rouen, Chartres. Quels itinéraires peut-il suivre ?

Même question s'il habite Rouen ; s'il habite Chartres.

Représente chaque déplacement de ville à ville par un segment de droite.

Les six itinéraires que tu obtiens donnent tous le même dessin : un *triangle*, qu'on désigne indifféremment par ARC, ACR, RAC, RCA, CAR ou CRA.

On introduit ici les mots "sommet", "côté" (ce dernier désignant un segment, pour l'instant).

② Même étude pour quatre villes : Amiens, Rouen, Chartres, Dieppe. Combien d'itinéraires obtiens-tu ?

On obtient cette fois *trois* dessins différents, trois *quadrilatères*. Il n'est pas indispensable de se demander si "quadrilatère" désigne un ensemble de 4 points, ou la réunion de 4 sommets, ou une surface,..., tant que le besoin ne s'en fera pas sentir. Il est plus intéressant de *désigner* les trois quadrilatères obtenus en utilisant les quatre noms A, R, C, D donnés aux points ; on arrive, après tâtonnement, à conclure que chacun des trois quadrilatères a 8 désignations différentes.

(On peut remarquer, au passage, que les 24 désignations obtenues sont les 24 "mots" de 4 lettres différentes utilisant les lettres A, R, C, D. "Ce n'est plus de la géométrie, c'est de la combinatoire". Et après ??).

On introduit alors les mots *sommet, côté, consécutifs, opposés, diagonale, angle* (d'un quadrilatère), *convexe* (sans forcément essayer de définir rigoureusement ce terme), *concave, croisé.*

Prolongements possibles :

③ *Exercices*

a) Avec 5 points (trois quelconques d'entre eux n'étant pas alignés), combien peux-tu créer de "pentagones" ? De combien de façons chacun d'eux peut-il être désigné ?

b) On donne trois points A,B,C non alignés. Où marquer un point D de façon qu'aucun des trois quadrilatères de sommets A,B,C,D ne soit convexe ?

④ *Constructions de carrés*

a) On donne un segment [AB]. Construis un carré dont un côté soit [AB]. Combien y a-t-il de tels carrés ?

b) Même énoncé en remplaçant "côté" par 'diagonale".

Tous les instruments sont disponibles, rapporteur compris.

Il n'est pas encore question de donner une définition bien léchée du mot *carré.* On se contente d'utiliser l'idée que les enfants se font d'un carré. Ils retrouvent ou découvrent des propriétés du carré, sans qu'on essaye de trier celles qui sont caractéristiques.

Le a) admet deux solutions ; le b) n'en admet qu'une.

Prolongement possible si, dans le b), on n'a pas imposé la longueur de la diagonale donnée :

Mesure avec ton double décimètre la diagonale donnée et le côté du carré obtenu, en centimètres ; calcule le quotient de la première mesure par la seconde.

Et on compare les 25 quotients obtenus (25, si on la "chance" d'avoir une classe chargée...). "Mais ils ne connaissent ni le théorème de Pythagore, ni les racines carrées !". Et alors ??

⑤ *Constructions de trapèzes*

On appelle "trapèzes" les quadrilatères dont deux côtés sont parallèles (ces deux côtés sont nécessairement opposés). Cette définition ne soulevant pas de difficulté théorique, on peut se permettre de la donner aux élèves.

Construis :
a) un trapèze convexe
b) un trapèze croisé
c) un trapèze dont deux côtés ont la même longueur.

Dans le c), trois sortes de trapèzes peuvent apparaître : des parallélogrammes (si le mot jaillit, tant mieux ; mais il n'est pas encore indispensable de lui donner une définition précise), des trapèzes isocèles, et des trapèzes où les 2 côtés isométriques sont consécutifs. La confrontation des dessins obtenus par les divers élèves ou groupes d'élèves peut être intéressante.

⑥ *Autres constructions*

a) Construis un quadrilatère ayant un angle droit et un seul.
b) Construis un trapèze ayant un angle droit et un seul.

Bien vite, les élèves déclarent : "C'est pas possible !". Si le professeur demande : "Pourquoi ?", la grande majorité des élèves répond "Ben, ça se voit !" ou bien "C'est obligé" ; devant ce genre de réponses, il n'y a pas lieu d'insister. Si un élève répond, dans son langage, que c'est parce que toute droite perpendiculaire à un droite d est aussi perpendiculaire à toute parallèle à d (ce n'est pas exclu si, avant la présente série d'exercices, on a en classe dégagé du dessin quelques propriétés essentielles des droites parallèles et perpendiculaires), tant mieux pour lui : il vient de faire une mini-démonstration...

c) Construis un quadrilatère ayant 2 angles droits et 2 seulement.
d) Construis un quadrilatère ayant 3 angles droits et 3 seulement.

Pour ce d), mêmes remarques que pour le b).

e) Construis un quadrilatère dont les diagonales :
- ont même milieu
- ont même longueur
- sont perpendiculaires
- sont perpendiculaires et ont même milieu

etc.

f) Construis un quadrilatère ABCD tel que (AB) // (CD) et AD = BC.

On trouve des parallélogrammes et des trapèzes isocèles (convexes ou croisés)

| g) Construis un quadrilatère EGKM tel que (EG) // (KM) et EG = KM.

On trouve deux sortes de solutions (les parallélogrammes et les trapèzes à diagonales parallèles) qui se distinguent en comparant les sens des couples (E,G) et (K,M).

Voici plus difficile :

| h) Construis un quadrilatère ABJK tel que AB = JK et BJ = KA.

(On obtient les parallélogrammes et les quadrilatères dont les diagonales ont même médiatrice).

| i) Construis un quadrilatère dont les diagonales sont parallèles.

II.2. *Henri BAREIL*

UNE GÉOMÉTRIE QUI *PROLONGE* LES ACQUIS ANTÉRIEURS

• "Droite, demi-droite, parallélisme, orthogonalité, distance"... :

La mise en forme mathématique à partir du minimum possible *est un vain discours à ce niveau.* Ce n'est pas, ce ne peut être, un objectif des classes de Quatrième t Troisième. Au contraire, en celles-ci, tout appelle à *organiser l'enseignement des mathématiques autour du FONCTIONNEMENT des concepts.*

Ce fonctionnement sera provoqué par des problèmes. Il s'articulera, sans remords aucun, sur les propriétés étudiées dans les classes antérieures *sans chercher à leur donner un nouveau statut* (déclaré "mathématique" au lieu de "physique") : Cf. pages 10-11

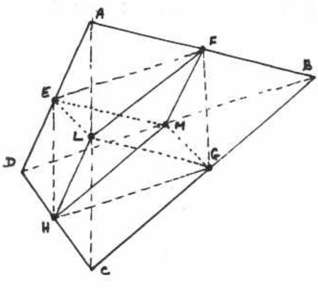
Voici, dans cette optique, quelques POSSIBILITÉS parmi d'autres DE DÉMARRAGE DE LA GÉOMÉTRIE DE QUATRIÈME :

I. Interrogation d'une situation riche

(dès les débuts de la classe de Quatrième).

EXEMPLE 1 UN QUADRILATÈRE, SES DIAGONALES, LES QUADRILATÈRES FORMÉS PAR LES MILIEUX DES CÔTÉS ET DES DIAGONALES

Telle est l'étude proposée d'emblée en Quatrième par le groupe Premier Cycle de Daniel Lehmann, de Lille. (Publication Irem de Lille — 1978)



① *Plusieurs problèmes apparaissent :*

— Existence de parallèles (par trois) et de parallélogrammes (idem),
— Existence de longueurs moitiés d'autres,
— Droites concourantes inattendues : (EG), (LM), (FH).

Faire varier ABCD renforce les conjectures.

Prendre ABCD particulier (rectangle, losange ...) particularise certains des parallélogrammes (présumés tels). Réciproquement, ... ??

② Il apparaît une figure de base : le triangle et les milieux de ses côtés, figure apparemment *associée à des parallélogrammes.*

③ *Toute étude s'organise à partir d'un acquis :*

Pour D. Lehmann, il s'agit du "fonctionnement" du parallélisme des droites et de deux caractérisations du parallélogramme : par exemple, en l'appelant STUV, soit par (ST) // (UV) et (SV) // (TU), soit par $\overrightarrow{ST} = \overrightarrow{VU}$, égalité qui, par définition, résume

$$\begin{cases} (ST) \parallel (VU), \\ [ST) \text{ et } [VU) \text{ ont le même sens,} \\ ST = VU. \end{cases}$$

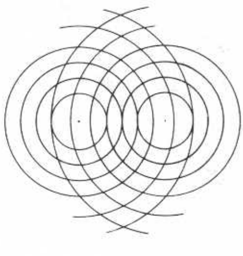
Dès lors, D. Lehmann peut démontrer les propriétés du segment qui joint les milieux de deux côtés d'un triangle, la caractérisation d'un parallélogramme par ses diagonales, ... et toutes les propriétés conjecturées en ① .

④ *Suivent, dans la foulée, des applications* : Centre de gravité du triangle, translations, additions vectorielles, ... *sans vouloir traiter à fond, mais en première approche et de façon à faciliter, en boule de neige, de nouvelles activités ...*

Voici, maintenant, un autre exemple :

EXEMPLE 2 DEUX SUITES DE CERCLES, deux par deux de même rayon, CENTRÉS les uns en A, les autres en B, A et B étant fixes.

[Cf. Article de Gattegno — L'enseignement des mathématiques — Ed. : Delachaux-Nestlé]



① *La figure suscite une foule de conjectures relatives à :*

— des orthogonalités, des parallélismes,
— des losanges, des rectangles, des parallélogrammes,
— des symétries (orthogonales et centrale),
— l'intersection de deux cercles,
— l'ensemble des points M tels que MA – MB soit constante (y compris le cas où elle vaut zéro),
— celui des points M tels que MA + MB soit constante.

Un travail des élèves par groupes peut être l'occasion d'aborder pas mal de choses, avec une mise en commun ultérieure. Il faudra ensuite organiser une (ou des) étude(s) des problèmes ainsi dégagés.

② Mais *cette figure fait fouillis* par sa richesse même.

Il faut apprendre à l'utiliser, à isoler par la couleur, à centrer attention et analyse sur telle partie.

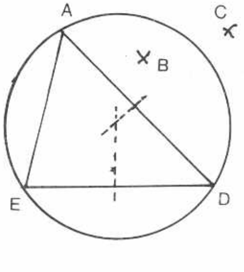
③ ***Ici, c'est à partir des propriétés évidentes de la symétrie orthogonale et des points de la médiatrice que peut être menée l'exploitation*** [Cf. étude pages 63]. Mais on pourrait aussi bien partir de la symétrie centrale et du parallélogramme avec ses deux caractérisations évoquées dans l'exemple 1.

Ces propriétés "évidentes" supposent acquis le fonctionnement du parallélisme, de l'orthogonalité, et de la distance bien entendu.

Autre exemple :

EXEMPLE 3 ***POINTS ÉQUIDISTANTS DE ...***

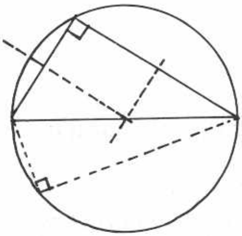
PROBLÈME INITIAL : Soit n points pris au hasard dans le plan. Pour $n = 4$, $n = 3$, $n = 2$, $n = 1$, dessiner un cercle (plusieurs, si possible) qui passe(nt) par ces points. S'il en existe plusieurs, que dire de leurs centres ?



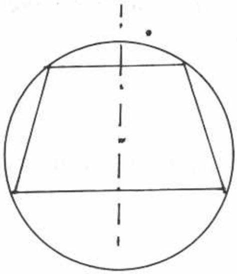
Ainsi apparaît "la médiatrice" qui, le fonctionnement de l'orthogonalité étant acquis, peut se définir à partir de celle-ci et qui est, de plus, investie de la propriété caractéristique de ses points.

Dès lors, on peut démontrer le résultat relatif à 3 points non alignés et à leur cercle.

PROLONGEMENTS (démontrables) :



① Le cercle circonscrit à un triangle ABC peut-il être centré sur l'un des côtés ? ... Réciproque ...

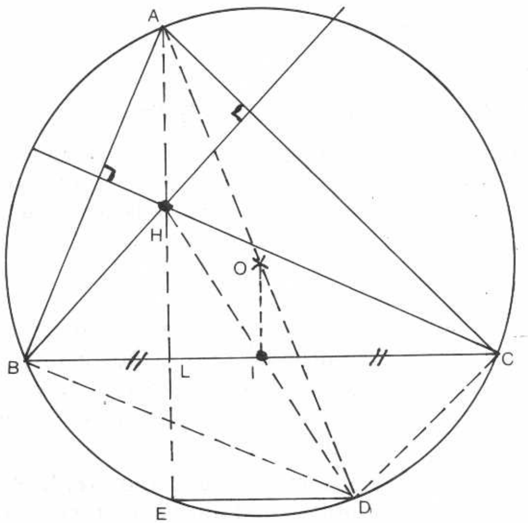


② Configurations de quatre points ABCD pour lesquelles on est sûr qu'il existe un cercle ABCD : Safari non africain où le tableau de chasse comprend au moins :

ABCD rectangle, ABCD avec deux angles opposés droits, ABCD trapèze avec axe de symétrie (trapèze isocèle), ...

PROLONGEMENTS - PROBLÈMES :

a) Figure riche suscitant pas mal de conjectures, par exemple celle-ci (où [AD] est diamètre, (BH) ⊥ (AC), (CH) ⊥ (AB), et I est milieu de [BC]) :



- $\widehat{ABD} = \widehat{AED} = \widehat{ACD} = 90°$ (démontrable avec le 1 du paragraphe précédent).
- (BH) // (CD) et (DB) // (CH) (relève du fonctionnement du parallélogramme et de l'orthogonalité).
- Donc BHCD est un parallélogramme (relève d'une caractérisation supposée acquise — comme à l'exemple 1 — du parallélogramme).
- Mais I n'est-il pas le milieu de [DH] ?
- Il semble aussi que (OI) // (AH) et AH = 2 OI.
- Mais, comme OB = OC et IB = IC, (OI) est la médiatrice de [BC]. Ceci entraîne une nouvelle conjecture : (AH) $\perp$ (BC). (Autrement dit : Tout triangle aurait ses hauteurs concourantes).
- Et L n'est-il pas le milieu de [HE] ((BC) médiatrice de [HE]) ?
- De là, laissant [BC] fixe et A variant sur le cercle, la possibilité de conjecturer de deux façons le déplacement de H (directement avec [AH], ou par l'intermédiaire de E).
- Comme E est le symétrique de A par rapport à la médiatrice $\triangle$ (fixe) de [AE], on voit apparaître ici la relation :

$$\text{Symétrie}_{(BC)} \circ \text{Symétrie} \quad = \text{translation}_{\overrightarrow{AH}}$$

Mais ces conjectures sont-elles fondées ?

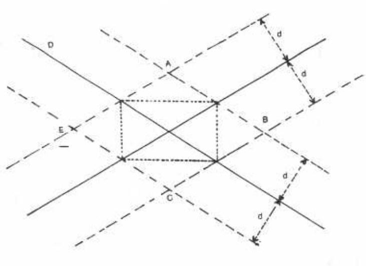
— L'étude systématique de la composition des symétries sera réservée pour plus tard.

— Les autres problèmes, au contraire, peuvent être abordés aussitôt à partir de deux outils (à établir comme il est suggéré dans l'exemple 1, ou à admettre.) :

- *propriétés du segment qui joint les milieux de deux côtés d'un triangle,*
- *caractérisation d'un parallélogramme par ses diagonales.*

b) Points équidistants de deux droites, de trois droites, ...

Pour deux droites on retrouve une figure classique avec ses losanges, son rectangle, ses symétries. [La figure réalisée construit les points qui sont à la distance d des droites D et $\triangle$].



On peut exploiter ceci à partir des symétries.

Dès lors, en exercice, à partir du résultat relatif à deux droites, on peut étendre à trois ...

c) Il serait normal que, étant donné les problèmes d'équidistances évoqués, un ou des élèves se soucient des *points équidistants d'une droite D et d'un point A*. (Lorsque A $\notin$ D, on obtient une parabole. Le tracé par points porte sur l'intersection d'un cercle et de droites et est intéressant).

Voici maintenant des exemples de démarrage de la géométrie plus classiques et plus "méthodiques" sans doute :

II. Pavages

Cf. pages 55-61

III. Symétries

Cf. pages 62-82

IV. Translations

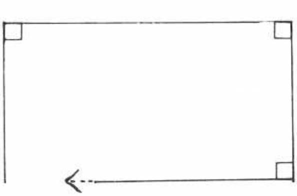
(Démarche sur laquelle nous n'insisterons pas, les programmes de 1978 ne changeant guère, là-dessus, de ceux de 1971. Nous pourrions y revenir, cependant, dans le tome 2, si aucun manuel ne s'y intéressait).

V. Programmes de construction de figures-clés

(Cf. texte pages 49-51).

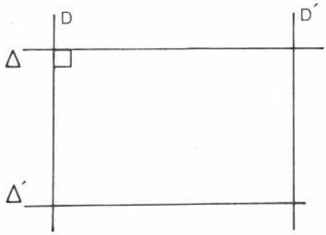
EXEMPLE 1 D'emblée, en Quatrième, *révision sur le RECTANGLE* à partir de trois "programmes" de construction.

Programme 1 :



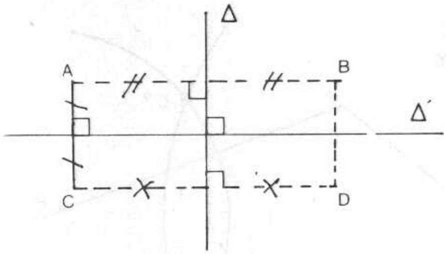
(Trois angles droits)

Programme 2 :



(D // D′ ; △ // △′ ; un angle droit)

Programme 3 :

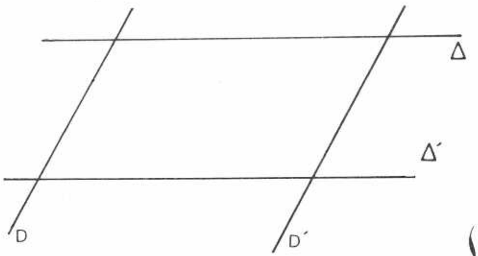


Choisir A, puis tracer B symétrique de A par rapport à △ (la construction indiquée définit B et donne un sens à cette phrase même si la symétrie n'a pas encore été étudiée), puis C ..., puis D.

- Que les trois programmes conduisent au rectangle est évident (surtout si l'on dessine en utilisant — au mieux — du papier quadrillé).
- Traduire cela permet de revoir, si on le souhaite, sans insister tellement leur évidence s'impose, les diverses propriétés du parallélisme et de l'orthogonalité.

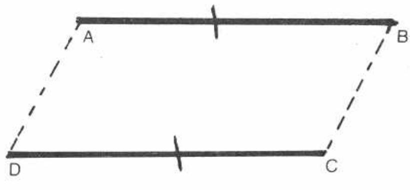
EXEMPLE 2 Dès qu'on le souhaite, et sans guère de pré-requis, *révision sur le PARALLÉLOGRAMME* à partir de deux programmes de construction.

Programme 1 :
(Double parallélisme)



D // D′ et △ // △′
(peu importe ici le "parallélogramme aplati")

Programme 2 :
(A partir de deux côtés)



$$\begin{cases} (AB) \parallel (CD) \\ AB = DC \\ \text{Sens de } (A,B) = \text{Sens de } (D,C) \end{cases}$$

Ce tracé est très commode sur du quadrillage

Que les deux programmes conduisent au parallélogramme est ici considéré comme évident (Cf. d'ailleurs, I, exemple 1).

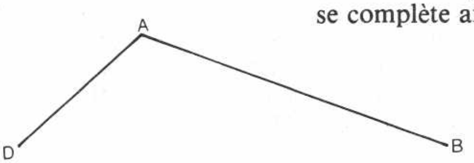
Cela étant, on a donc aussi AD = BC.

Donc, pour tout quadrilatère ABCD,

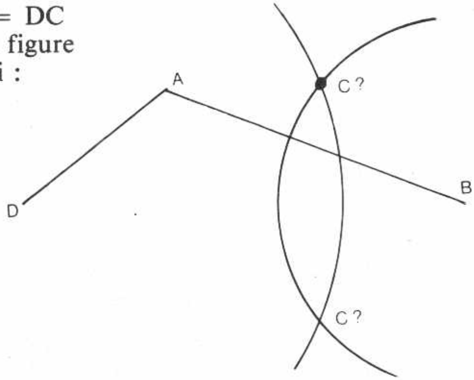
si ABCD est un parallélogramme, alors AB = DC et AD = BC.

Réciproque ?

Partons de

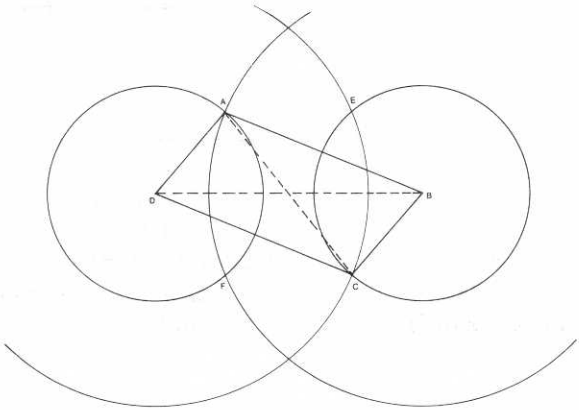


Pour avoir AB = DC et AD = BC, la figure se complète ainsi :



Il semble souhaitable, pour éviter de remuer des marteaux-pilons pour parvenir à des évidences, de rajouter la condition : ‘‘ABCD est non croisé’’ (ou ‘‘ABCD est convexe’’) et d’admettre alors le bien-fondé de la réciproque.

Certains élèves pourront tirer parti de l’étude d’une figure plus riche dont la précédente n’est qu’un fragment, figure qui apparaît si on se donne le point D, le point B et les distances AD et AB. Voici cette figure (quand les données vérifient les conditions d’existence) dans l’une de ses présentations les plus simples :



Sur cette figure (à terminer) peuvent être présentées

— deux symétries-droites
— une symétrie-point

Pour les étudier il n’est pas indispensable que les symétries aient été antérieurement ‘‘présentées’’.

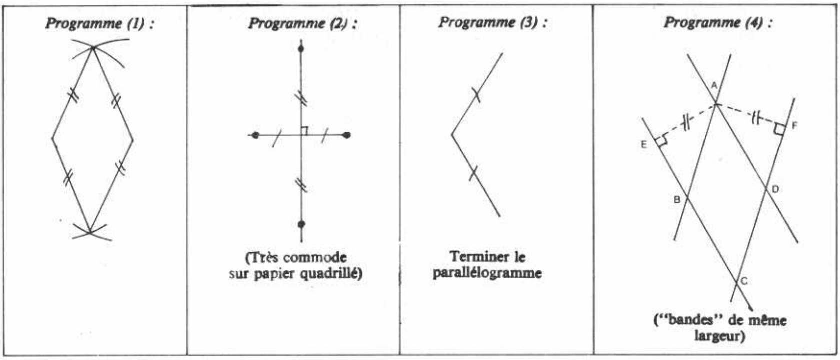
En se limitant à B, D, et aux seuls points communs à deux des cercles tracés, il apparaît : un autre parallélogramme-solution, quatre trapèzes isocèles, un rectangle, un losange, ...

Cette figure introduit un ***quatrième programme de construction du parallélogramme, relatif aux diagonales.*** *(Dès lors la figure révèle d'autres parallélogrammes ...).*

Cette nouvelle caractérisation peut s'établir ici grâce aux symétries. Mais elle peut aussi s'établir à partir de "la propriété de conservation du milieu par projection ...", ou du théorème sur le segment qui joint les milieux de deux côtés d'un triangle, ou de la deuxième caractérisation du parallélogramme exploitée par l'addition vectorielle, ou ...

Pour beaucoup d'élèves, cette démonstration mobilise d'ailleurs des démarches moins évidentes que son résultat. Mieux vaudrait alors l'admettre.

EXEMPLE 3 *LE LOSANGE et ses programmes de construction.*



Ici aussi, on peut admettre l'équivalence des quatre programmes. Mais déjà sa démonstration peut se concevoir, par exemple :

— Entre (1) et(2), grâce aux deux caractérisations de la médiatrice.

— A partir de (3), grâce aux caractérisations du parallélogramme.

— A partir de (4), grâce à la symétrie par rapport à la médiatrice $\triangle$ de [EF] et en "reconstruisant" patiemment la figure à partir de là :

- [AE] $\mapsto$ [AF]
- (EC) $\perp$ (AE), donc (EC) $\mapsto$ (FC) et C $\in \triangle$
- (AD) // (EC), donc (AD) $\mapsto$ (AB) et $\triangle$ est la médiatrice de [BD]
- Comme ABCD est un parallélogramme et que AB = AD, on retrouve le programme 3. Etc.

• *Outre les acquis relatifs au* ***fonctionnement de la distance, du parallélisme et de l'orthogonalité,*** *ce qui précède manifeste la fréquence* ***de l'utilisation dès les débuts de la classe de quatrième*** *des énoncés considérés comme évidents relatifs à :*

— ***la caractérisation du parallélogramme avec deux parallélismes,***
— ***la caractérisation du parallélogramme avec deux côtés opposés.***

• *On trouve aussi fréquemment dans le matériel de départ* ***la symétrie orthogonale et ses propriétés*** *ainsi que le "mini-Thalès" qu'est* ***la propriété de conservation du milieu par projection*** *sur une droite selon une direction donnée.* Enfin un énoncé extrêmement utile, démontrable avec le matériel relatif au parallélogramme, est celui *"du segment qui joint les milieux de 2 côtés d'un triangle".*

• *On n'oubliera pas aussi l'****utilisation corrélative et rapide des coordonnées*** *(Il suffit pour cela de la définition. Pour la formule "du milieu",* *cf. page 72).*

Les débuts de la géométrie de Quatrième proposés ici ne sont pas exhaustifs. Lecture faite des divers manuels, nous pourrons éventuellement reprendre ceci dans le tome II. *Enfin, les diverses approches ne sont évidemment pas exclusives les unes des autres, sinon éventuellement pour une question de temps.*

II.3 *Claude LASSAVE*

PROGRAMMES DE CONSTRUCTION

• L'ouvrage de quatrième Delagrave (1968) de G. H. Clopeau, R. Cluzel, P. Vissio, développe, p. 138, les deux idées suivantes :

— faire dessiner une figure nécessite une liste ordonnée de tracés à effectuer (« programme de construction ») ;

— dans cette liste il existe des choix (« paramètres de construction ») et des contraintes dépendant de ces choix.

• On peut donc faire sentir que les résultats de l'étude dépendront (ou non) de ces choix :

— s'ils n'en dépendent pas, on trouve une propriété d'un objet (par exemple, quels que soient les points A, B, C et D du plan, si [AB] $\perp$ [BC],[BC] $\perp$ [CD] et [DC] $\perp$ [DA] alors ABCD est un rectangle),

— s'ils en dépendent, on trouve une relation entre points (cf. activité II.8, pages 92-97).

• Un programme de construction peut s'exprimer :

— soit sous la forme ci-dessous (cf. Delagrave) mêlant des phrases infinitives courtes et précises de français avec éventuellement des notations et écritures mathématiques ;

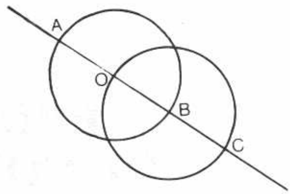
« **Programme de construction univoque**

Construire une figure, c'est effectuer un certain nombre de tracés à la règle et au compas. Certains de ces tracés sont effectués dans le but de déterminer des *points* (par intersection de lignes), d'autres sont destinés à représenter des *parties* de la figure que l'on veut construire.

La liste ordonnée des tracés à effectuer constitue le programme de construction de la figure.

Exemple : Un énoncé de problème débute ainsi :

« Soit un cercle de centre O, A un point de ce cercle, B le point diamétralement opposé à A, C le point de la demi-droite OB tel que OB = BC... ». Dressons la liste des tracés à effectuer.

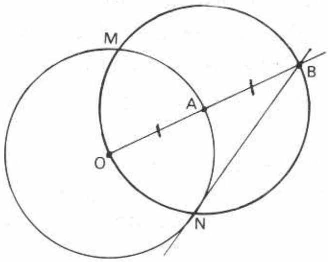
Programme de construction	Figure obtenue
o Choisir un point O. o Choisir un réglage de compas r. → Tracer le cercle (O, r). o Choisir un point A sur ce cercle. → Tracer la demi-droite [AO) ; elle coupe le cercle en B. → Tracer le cercle (B, OB) ; il recoupe [AO) en C.	

Autre exemple

Programme de construction

o Choisir un point O,
o Choisir un écartement de compas r,
→ Tracer le cercle (O, r).
o Choisir un point A sur ce cercle.
→ Tracer la demi-droite [OA).
→ Reporter la longueur OA à partir de A sur cette demi-droite; marquer B.
o Tracer le cercle de centre A et de rayon OA. Il coupe le cercle de centre O en M et N.

Figure obtenue

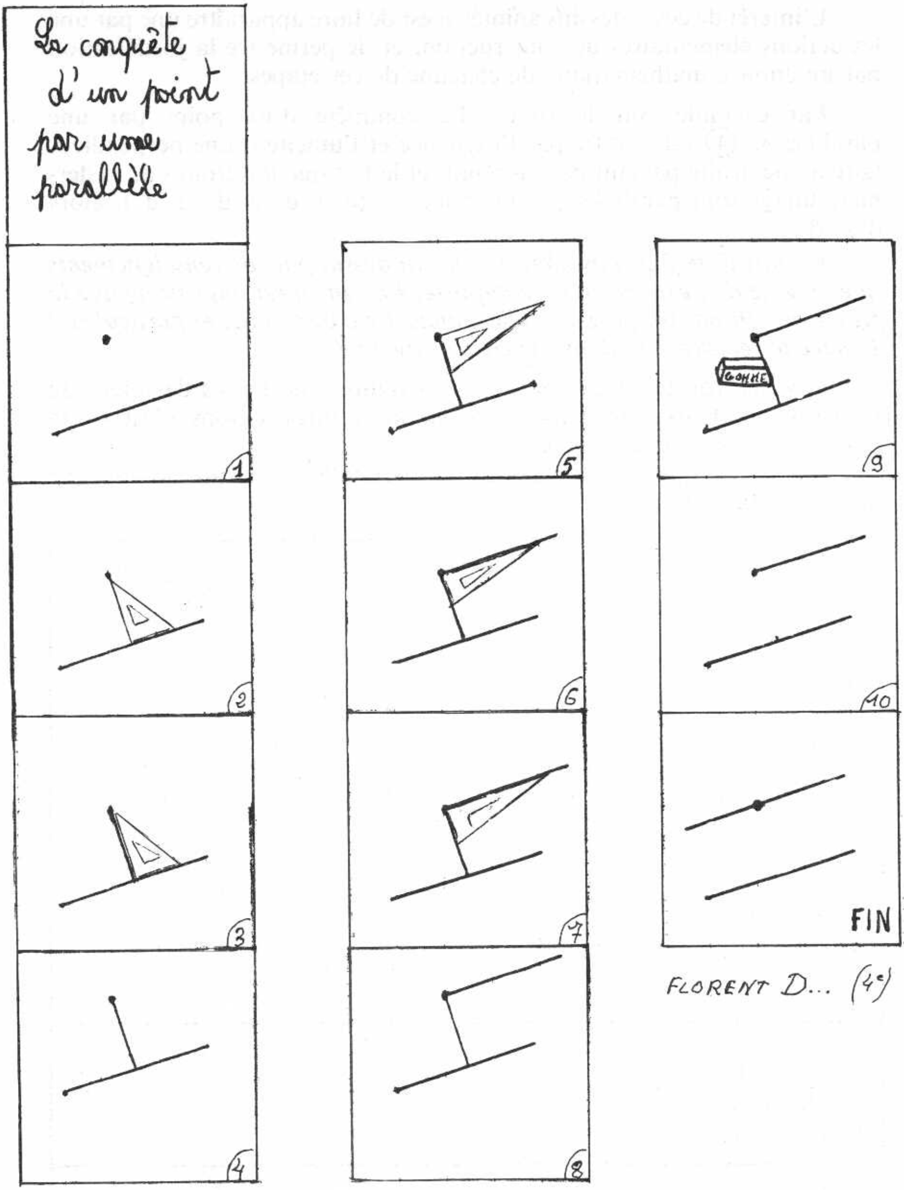


• On peut choisir le point O comme on le veut, l'écartement du compas aussi. Nous avons codé ceci : o [on a un « feu vert »].
Par contre, lorsqu'on a choisi O et A, on n'a plus le choix pour tracer la demi-droite [OA). Nous avons codé comme ceci ; → [on a un tracé obligatoire]. Dans la construction ci-dessus, on a trois libertés de choix et trois tracés obligatoires.
• Comparons les dessins de toute la classe. En quoi diffèrent-ils ?
— le choix de O : chacun l'aura mis où il aura voulu !
— le choix de r : les cercles dessinés seront plus ou moins « grands » !
— le choix de A : la demi-droite [OA) sera plus ou moins « oblique » !
Si les élèves décalquent leurs dessins, ils ne seront pas superposables...
En quoi sont-ils « pareils » ?
— Cependant les observations concernant la nature de certains triangles seront les mêmes dans tous les cas de figure. »

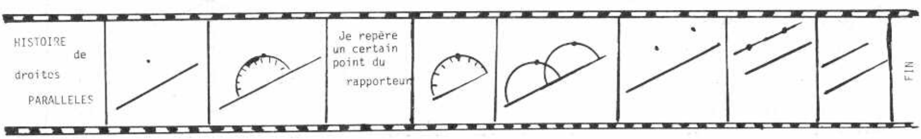
— soit en faisant un dessin où restent en évidence les traits de construction, cf. page 210 par exemple ;

— soit en écrivant une petite rédaction avec des phrases de français (notre expérience prouve que les élèves ont beaucoup de difficulté dans ce genre de travail, ce qui ne veut pas dire qu'il ne faut jamais le faire !) ;

— soit en dessinant un « film », tels les suivants (réalisés par des élèves de quatrième), qui facilite l'écriture de « programmes » au sens de G.H. Clopeau.


La conquête d'un point par une parallèle
1
2
3
4
5
6
7
8
GOMME
9
10
FIN

FLORENT D... (4e)


HISTOIRE de droites PARALLELES
Je repère un certain point du rapporteur
FIN

L'intérêt de ces « dessins animés » est de faire apparaître une par une les actions élémentaires de construction, et de permettre la justification par un énoncé mathématique de chacune de ces étapes.

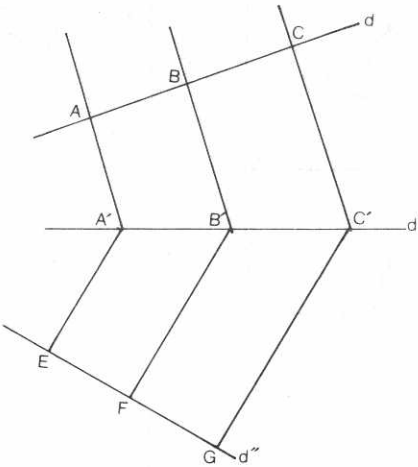
Par exemple, sur le film « La conquête d'un point par une parallèle », ④ est justifié par l'existence et l'unicité d'une perpendiculaire à une droite passant par un point, et le fait que les droites de la dernière image sont parallèles par l'énoncé : si ($d \perp d'$ et $d' \perp d''$), alors $d \parallel d''$.

• *Mais il ne faut pas mettre dans un dessin plus de renseignements que le texte de l'exercice n'en comporte. En fait, il est impossible que la figure ne soit pas un cas particulier, mais il y a particulier et particulier ! L'élève le réalisera-t-il dans l'exercice suivant ?*

« Voici trois textes d'exercices et les figures que Toto a dessinées. Je t'affirme que Toto a mis dans son dessin plus d'informations, c'est-à-dire plus de choses, que dans le texte donné.

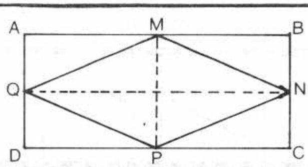
Il a fait ce que l'on appelle un cas particulier de figure ;autant que possible il faut éviter cela ».

d, d′ et d″ sont trois droites.
A, B et C sont trois points de d.
Par ces trois points on mène trois droites parallèles entre elles, qui coupent d′ en A′ , B′ , C′ .
Par A′, B′, C′ on trace trois droites parallèles entre elles qui coupent d″ en E, F, G.
Que remarques-tu ?



Dessine deux segments [AB] et [CD] ayant le même milieu I.
Que remarques-tu ?

Dessine un parallélogramme ABCD et les milieux de ses quatre côtés.
Joins ces milieux.
Que remarques-tu ?



II.4 Nicole CHOUCHAN

USAGE DES INSTRUMENTS COMMUNICATION

La classe étant installée en équipes de deux ou trois élèves, je distribue à chaque équipe un objet différent, d'épaisseur négligeable (par exemple un élément du jeu Tangram).

[On trouvera en annexe quelques-unes des formes étudiées].

1. Les élèves ont pour mission de reproduire exactement cette pièce sur le cahier.

Une contrainte autoritaire existe : il est interdit de la décalquer. D'où des activités de mesurage : longueurs, angles, recherche du centre d'un arc de cercle.

2. Je demande ensuite aux élèves d'expliquer par écrit les étapes de la construction. (Cf. pages 49-51).

3. Je reprends l'objet étudié.

4. Les élèves de l'équipe dictent le mode de construction aux autres élèves de la classe qui doivent, à leur tour, sans avoir vu la pièce ni sa représentation, la représenter exactement sur leur cahier.

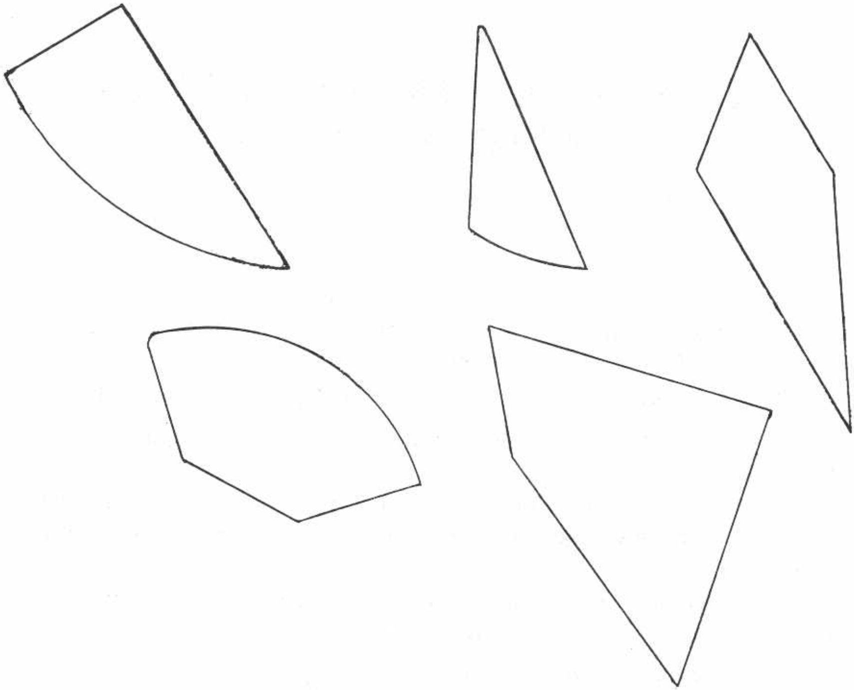
Chacun se rend compte de la qualité des consignes données : ceux qui dictent voient la plus ou moins bonne exécution, ceux qui reçoivent les consignes discutent sur les ambiguïtés ou sur les erreurs ou sur les difficultés du langage et font améliorer l'énoncé en vue d'une réalisation correcte.

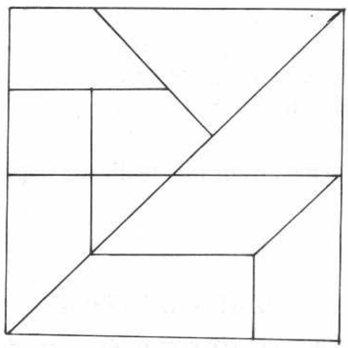
5. On reproduit le dessin sur une feuille de papier à dessin, à l'échelle 2.

BIBLIOGRAPHIE

• André MYX : *Six thèmes, six semaines* - Editions CEDIC
• Pierre GAGNAIRE : *La mise en pièces de la géométrie* - IREM de Lyon, et Bulletin A.P.M.E.P. n° 292, page 13.

ANNEXE





Exemple de jeu
"Tangram" à dix pièces
découpées

II.5

Charles PEROL,
équipe OPC de Clermont

LA GEOMETRIE DE QUATRIEME PAR LES DALLAGES

Objectifs :

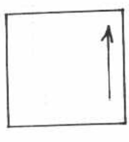
Proposer une situation permettant d'organiser en classe de quatrième une «éducation géométrique». Les élèves sont appelés à pratiquer des activités à des niveaux d'abstraction divers depuis l'observation et la manipulation physique jusqu'à la limite des possibilités actuelles de chacun. Au cours de ces activités, les élèves sont constamment amenés à :

— observer (1)
— bricoler (2)
— tâtonner (3)
— dessiner (4)
— schématiser (5)
— symboliser (6)
— communiquer (7)
— conjecturer (8)
— exprimer (9)
— formuler (10)
— argumenter (11)
— vérifier (12)
— prouver (13)
— démontrer (14)
— calculer (15)
— imaginer (16)
— généraliser (17)

Je propose à vos critiques un schéma pour motiver, dans le cadre des nouveaux programmes de quatrième, l'introduction des transformations qui y sont inscrites : translation, symétrie-droite, symétrie-point. Dans une première phase facultative, on utilisera les films « Patchwork I et II » édités par le C.N.D.P. Il est possible de se passer de cette aide en renforçant la phase manipulatoire qui suivra.

Les films :

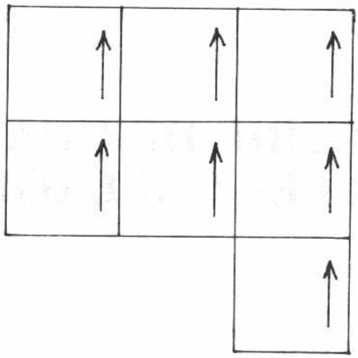
Le film I montre un carreau (carré) décoré, sans axe de symétrie. Ici, je le schématiserai de la manière simple ci-contre. Dans le film, le dessin est beau et les couleurs sont harmonieuses.



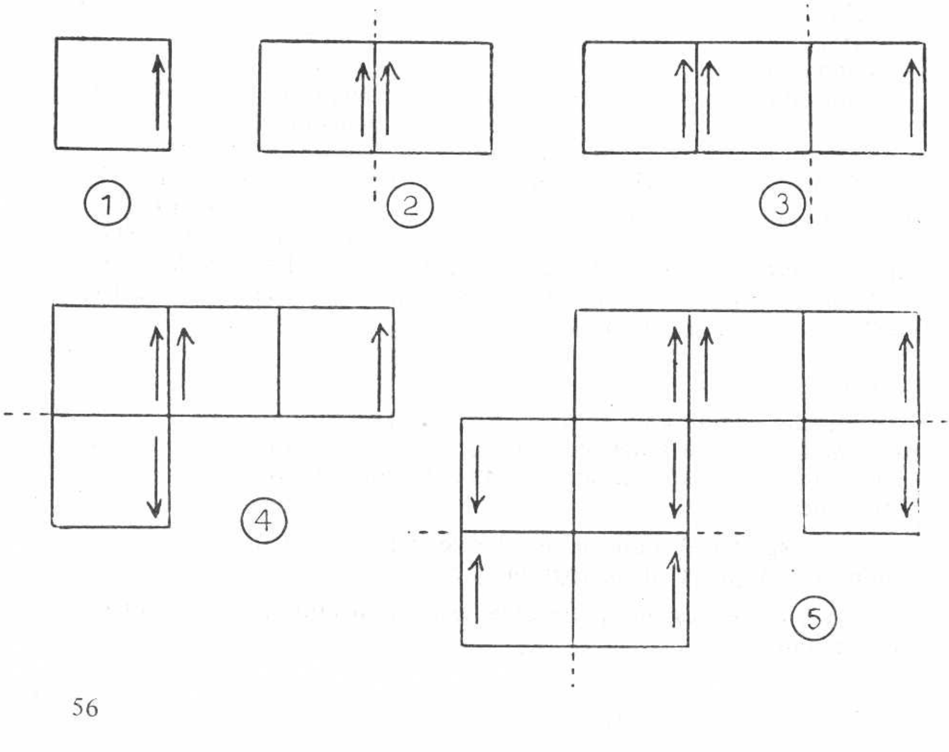
Cet aspect esthétique joue un rôle important dans l'impact du support cinématographique.

Avec de tels carreaux, on dalle le plan en utilisant seulement des translations.

La figure ci-dessous montre une image possible à un moment donné. Le dallage finit par recouvrir entièrement l'écran.



Dans le film II, on utilise le même carreau. Le dessin est visible sur les deux faces, comme s'il était réalisé dans la masse. On dalle le plan en culbutant le carreau de toutes les manières imaginables autour de n'importe lequel de ses côtés. Voici un scénario de ce genre :



L'utilisation des films

Je suggère de procéder comme ci-dessous :

- Passer une première fois le film (ou les deux) (1).
- Pendant que le film se réenroule, demander à la classe de raconter (9) ce qu'elle a vu. Il y aura peut-être controverse (11). Faire schématiser (5) la ou les descriptions.
- Repasser le film au moins une fois pour contrôler ou pour rectifier (1).
- Nouvelle discussion, puis éventuellement troisième projection. Au cours de cette discussion, les élèves sont amenés à employer un langage plus ou moins satisfaisant (9). Le professeur aura l'occasion de le faire un peu préciser.

Phase suivante (manipulatoire)

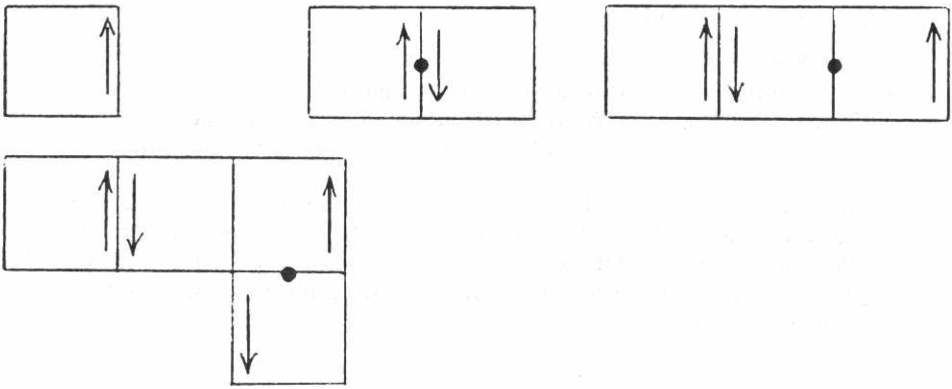
Le maître réalise par exemple sur du papier calque, pour que le motif soit visible des deux côtés, des carreaux analogues à ceux du film. Il fait reproduire par les élèves le scénario du film à l'aide de ce matériel. Si vous avez pu projeter les films, cette phase pourra être un peu allégée. Si votre établissement ne peut pas les acheter, il faudra la développer beaucoup. Le maître pourra distribuer à chaque élève ou à chaque groupe d'élèves une dizaine de carreaux. Je propose que dans un premier temps il ne donne aucune consigne. Une expérience antérieure, dans de plus petites classes il est vrai, me laisse penser qu'immédiatement ils se mettront à daller un morceau de leur table (2)(3) et que spontanément, ils rechercheront (2)(3) des régularités dans l'orientation des carreaux. Je fais le pari qu'ils réaliseront tout seuls les deux dispositions du film et quelques autres intéressantes aussi. Le maître sélectionnera les productions qui correspondent à son projet. Il décrira ou mieux fera décrire par le dessin (4) ou par des mots (9) la démarche de leur réalisation. La recherche des contradictions et des ambiguïtés du message par une controverse (11) entre les émetteurs du message et ses récepteurs est très formatrice.

Pour la description graphique, le motif étant assez compliqué, les élèves reconnaîtront l'intérêt qu'il y a à le schématiser (5). Quelles conditions doit remplir une schématisation pour être pertinente ? (16)(6).

Le programme de la classe

Le premier film permet, d'une manière assez pauvre il est vrai, d'étudier la translation et les vecteurs (qui vont avec), la composition des translations et l'addition vectorielle (12)(13)(14)(15).

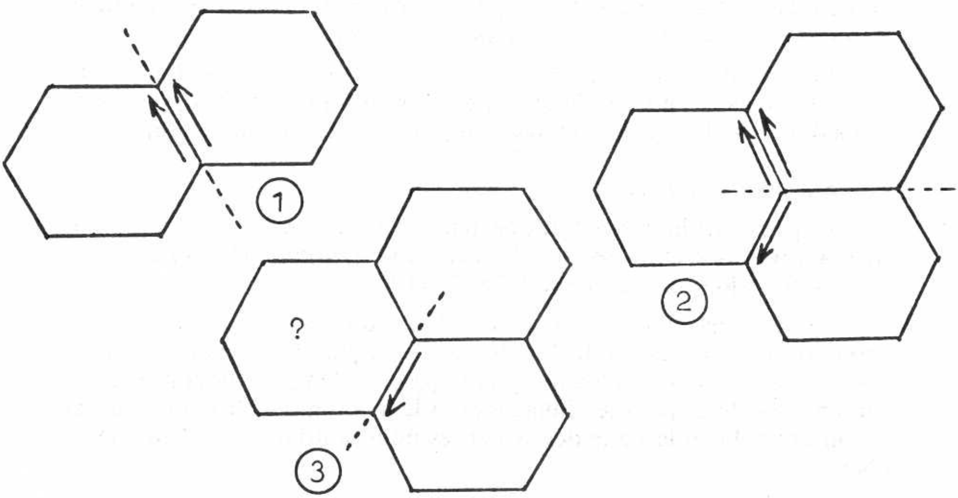
Le deuxième film est plus riche ; il introduit la symétrie-droite et les produits de symétries-droite dont les axes sont parallèles ou orthogonaux. Dans ce dernier cas, la symétrie-point apparaît. On peut alors profiter de l'intérêt des élèves pour les dallages pour leur en faire réaliser un nouveau en faisant subir à la dalle des symétries-point autour des milieux de ses côtés.



D'où retour sur la translation et son cortège de vecteurs. Le programme sera-t-il entièrement couvert de cette manière ? Probablement pas avec ce seul thème. Il sera du moins profondément engagé par des moyens francs et puissants et, je le crois, d'une manière susceptible d'intéresser les élèves.

Au-delà du bachotage

Une telle situation vivante permet de poser naturellement de vrais problèmes. Par exemple : quels sont les éléments de symétrie du dallage (et non de la dalle) ? Et surtout le procédé est-il cohérent ? On peut passer d'une position et d'une orientation du carreau de départ à tel carré par des chaînes de symétries-droite (ou de symétries-point) différentes. Arrive-t-on sur le carré final avec toujours la même orientation ? Il est probable que tous les élèves ne saisiront pas également bien la pertinence de cette question. Faites-leur donc réaliser des pavages à l'aide d'hexagones décorés.

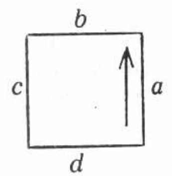


Pour quelques-uns, le film ci-dessus sera suffisant. D'autres devront réaliser concrètement la manipulation correspondante. Quelques-uns auront besoin de daller une assez grande portion du plan pour se rendre compte de l'incohérence. On peut évidemment faire un travail analogue avec des demi-tours. Parions que les élèves se poseront le problème spontanément.

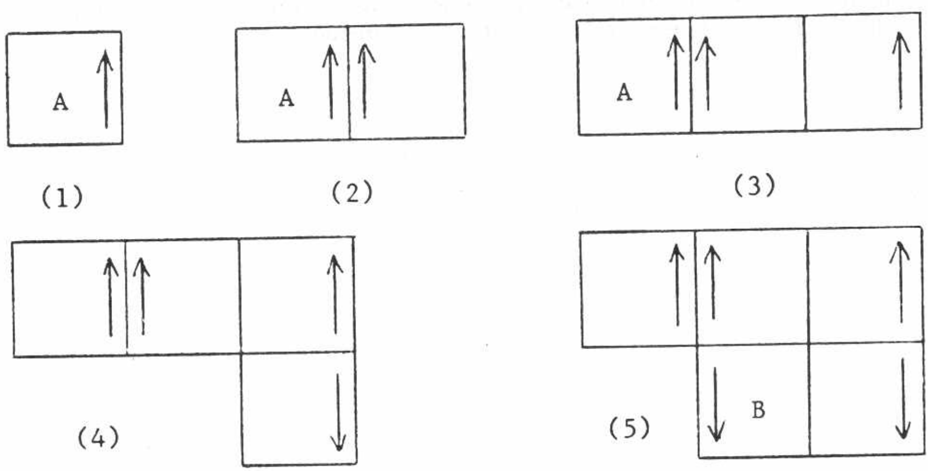
L'individualisation de l'enseignement

Naturellement, chaque maître adaptera à sa classe l'utilisation de ce matériel. Mieux, c'est chaque élève qui adaptera à son niveau l'utilisation qu'il fera de ce matériel. Un élève peu avancé devra s'attarder sur les manipulations et les constatations physiques. L'élève plus entraîné y prendra, je l'espère, le désir d'aller plus loin. Il pourra engendrer le groupe des isométries qui opère en partant de ses générateurs.

Notons *a, b, c, d* les symétries-droite autour respectivement du côté proche de la flèche, du côté désigné par la pointe de la flèche, du côté éloigné de la flèche, du côté restant.



Le passage du carré A au carré B figuré sur le petit film ci-dessous sera codé *a c d c* . C'est un mot de quatre lettres.



Le mot de deux lettres *d a* fait également passer de la position A à la position B. On peut étudier les transformations des mots faisant passer d'un mot à un autre équivalent, remarquer que la répétition de deux lettres identiques les neutralise.

Remarquer que les mots *ad* et *da* sont équivalents et que *cd* et *dc* le sont aussi...

Déduire de ces remarques, par des transformations littérales, l'équivalence signalée plus haut.

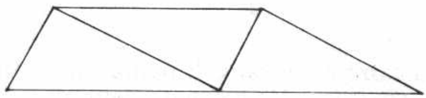
a c d c équivaut à *a c c d,* équivaut à *ad,* équivaut à *da*.

Ces activités prépareront efficacement une ultérieure introduction de la notion de groupe. On accumulera des références qui permettront alors de dépasser le point de vue formel et de rendre opérant l'outil mathématique (ce qui est si rare actuellement).

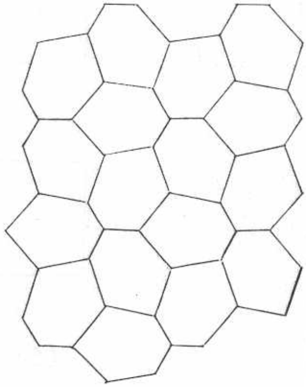
Les prolongements

Les dallages ont intéressé vos élèves ; utilisez-les encore en troisième. Les occasions ne manqueront pas.

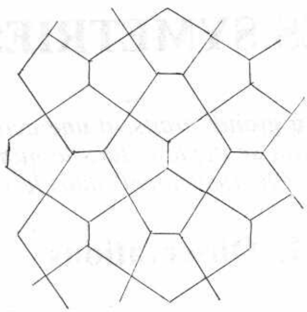
A) Somme des mesures des angles d'un triangles, dit le programme. Illustrez-la en dallant le plan. Ici encore la preuve peut être faite à divers niveaux. On peut en rester à la preuve matérielle par observation ou construire une démonstration.



b) Voici amorcé un pavage par des hexagones, non réguliers. Tous sont superposables. Ils ont un axe de symétrie, quatre de leurs côtés ont même longueur. Comment ces hexagones sont-ils faits ? Un vrai problème. (De tels dallages existent dans le commerce).



C) Voici l'amorce d'un autre pavage par des pentagones, non réguliers ; quatre de leurs côtés (au moins) ont même longueur. Comment ces pentagones sont-ils faits ?



Vous trouverez vous-même, vos élèves trouveront eux-mêmes de nombreuses situations intéressantes. Non seulement ils résoudront des problèmes, mais ils se poseront des problèmes. N'est-ce pas cela faire des mathématiques ?

BIBLIOGRAPHIE ET FILMOGRAPHIE

1 — COLOMB J. : *Patchwork* (dallage) - Films C.N.D.P. super-huit n° 1460, 1461, 1462, 1463, 1464 et 1465. Durée : moins de cinq minutes chacun. Peuvent être visionnés aux C.R.D.P. et C.N.D.P. ; ils y sont en vente au prix approximatif de 90 F chacun.

2 — Hermann WEYL : *Symétrie et mathématique moderne* - Flammarion 1964. (Traduction de l'édition anglaise de 1952)

3 — Nombreux articles à des niveaux divers dans les publications périodiques des I.R.E.M.

4 — Françoise PECAUT : *Pavés et bulles* - Brochure A.P.M.E.P. n° 23.

5 — Marcel BERGER : *Géométrie* - Editions CEDIC - Fernand Nathan.

6 — Yvon BOSSARD : *Rosaces, Frises, Pavages* - Editions CEDIC.

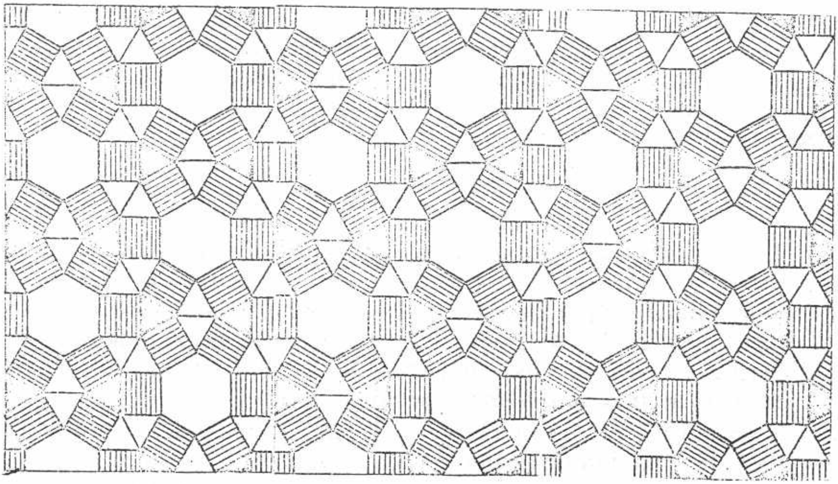
7 — André DELEDICQ : *Mathématiques buissonnières* - Editions CEDIC

Henri BAREIL

LES SYMETRIES

Exemple, esquissé à grands traits, d'une activité susceptible d'être pratiquée d'emblée, *et qui se déploie dans le numérique aussi bien que dans le géométrique ou, éventuellement, dans le vectoriel.*

I. Observations

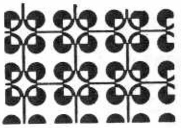
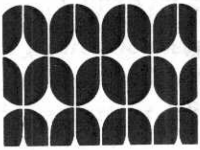
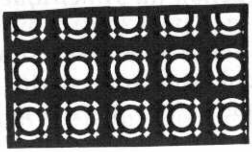
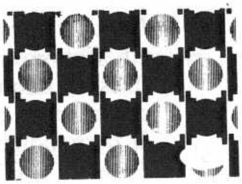


(Figure 1 : Il faudrait en donner plusieurs reproductions pour permettre des études variées et faciliter la visualisation par l'usage de couleurs).

① *Observer un choix très diversifié de papiers peints ou de pavages.*

Par la *répétition de motifs*, il met en évidence des translations, des symétries orthogonales, des symétries centrales, des rotations variées (ainsi des rotations de 60°, de 120°, sur la figure 1).

Cette étude sera l'occasion d'identifier ces transformations (*par leur fonctionnement*. Peu importe, par exemple, le nom de "translation") et même de visualiser les composées de deux de ces transformations. (Cf. aussi brochure A.P.M.E.P. : *Géométrie 1e cycle, tome 2,* thème des papiers peints). Tout cela se fera dans le langage dont disposent les élèves, sans ajout de termes mathématiques nouveaux, sauf, s'il y a lieu, celui de symétrie.

(2) Essentiellement à la maison, *les élèves auront à rechercher eux-mêmes des exemples illustrant des symétries :* photos et plans de monuments, figures élémentaires (de la géométrie, lettres majuscules, ...), cristaux taillés, ..., utilisation des miroirs, ...

• ***Remarque 1 :*** Le matériel qui précède peut aussi se prêter à l'observation de translations. Il est possible, si ce n'est déjà fait, d'utiliser la notation vectorielle ($\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ signifiant : (AB) // (DC), [AB) et [DC) sont de même sens, AB = DC) , et d'observer la composition des translations, donc d'utiliser l'addition des vecteurs.

• ***Remarque 2 :*** S'ils disposent de symétriseurs, les élèves les utiliseront avec profit pour "faire fonctionner" des symétries.

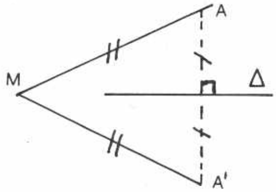
II. Symétrie orthogonale

N.B. Dans l'étude qui suit, A′ désignera le symétrique de A , D′ le symétrique de D , etc. et, sauf indication contraire, $\triangle$ désignera l'axe de symétrie.

II. 1. Observations, réalisations :

1 • La symétrie orthogonale correspond MATERIELLEMENT à un PLIAGE, imaginé, ou réalisé avec du papier calque.

② **Réciproque** (si elle n'a pas déjà été vue) :



On peut la démontrer grâce aux propriétés fondamentales admises pour la symétrie, mais cela paraît inutile et inopportun, vu l'évidence du résultat, surtout si l'on étudie expérimentalement le régionnement du plan par △.

③ **Tracés classiques de la médiatrice** (s'ils n'ont pas été déjà vus) :

- Tracés au compas (Cités pour mémoire)
- Il y a aussi l'usage de l'équerre, du double décimètre... et du papier quadrillé !

④ **Triangle isocèle** :

Il existe trois façons fondamentale de caractériser, parmi les triangles ABC, les triangles isocèles en A :

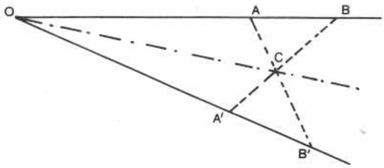
(1) AB = AC
(2) Un axe de symétrie : la médiatrice de [BC]
(3) $\hat{B} = \hat{C}$

A partir de (1) ou de (2) on peut établir les deux autres. "La réciproque" de (3) est un peu fastidieuse à établir. Elle ressemble au ② ci-dessus. Mieux vaut l'admettre.

[On peut le démontrer, mais cela paraît inutile, en prenant A sur [Ox), A' sur [Ox'), tels que OA = OA', et la médiatrice de [AA'] (voir alors ci-contre).]

③ **Tracés classiques de la bissectrice :**

- Tracé avec le compas (cité pour mémoire)
- Tracé à la seule règle :

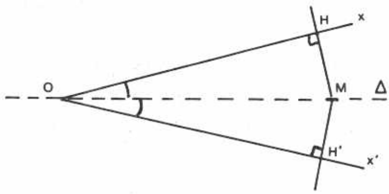


OA = OA'
OB = OB'

(justification avec le (4) du II.1)

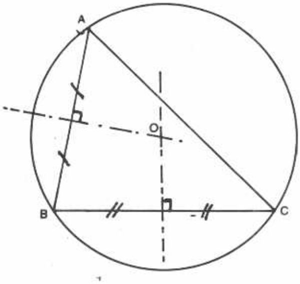
- Usage du rapporteur

④ **Distances d'un point de la bissectrice aux côtés de l'angle.**



On établit (assez vite) que H et H' sont symétriques par rapport à △.
D'où MH = MH' et le théorème classique.

⑤ **Médiatrices d'un triangle et cercle circonscrit.**



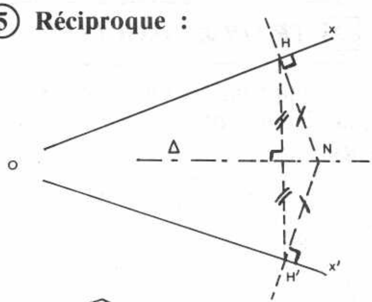
Etude classique.

On peut motiver ce ⑤ en se posant le problème :

Comment tracer un cercle qui passe par plusieurs points ?

Se méfier de la transposition au ⑦ ci-contre, en raison des "cercles ex-inscrits" (qu'il ne semble pas opportun d'introduire ici, sinon en exercice),

⑤ **Réciproque :**



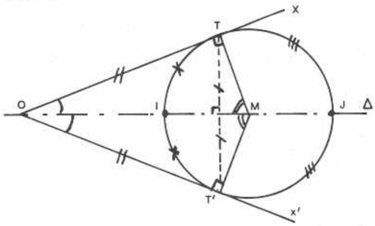
Angle $\widehat{xOx'}$ et N tel que

$$NH = NH'$$

(Hx) et (H$'x'$) sont symétriques par rapport à △, médiatrice de [HH$'$]. D'où :

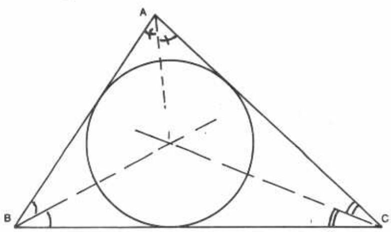
$$O \in \triangle \text{ et } \widehat{xON} = \widehat{x'ON}$$

⑥ **Cercles tangents à [Ox) et [Ox')**



(avec exploitation de la symétrie par rapport à △)

⑦ **Bissectrices (intérieures) d'un triangle et cercle inscrit.**

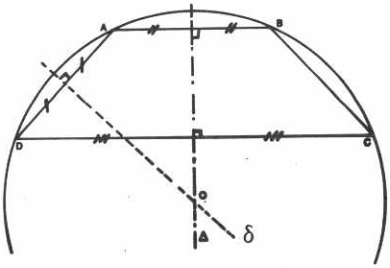


Etude classique.

(Ne pas chipoter sur le fait que les deux bissectrices considérées d'abord se coupent, mais l'admettre).

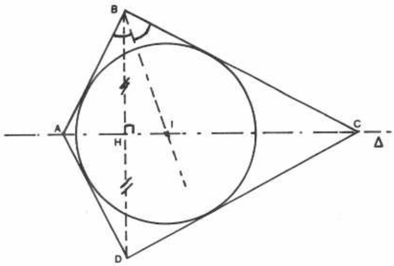
2 TRAPEZE ISOCELE

Quadrilatère tel que *deux* des quatre *côtés ont la même médiatrice* △.



2' CERF-VOLANT

Quadrilatère tel *qu'une des deux diagonales est axe de symétrie.*



Il s'ensuit les propriétés classiques. Notamment :

- *AC = BD* et *AD = BC*
- *(AC)* et *(BD) se coupent sur* △
- Si (AD) et (BC) se coupent, c'est sur △
- $\hat{A} = \hat{B}$, etc.
- Si (AB) ≠ (CD), δ, médiatrice de [AD], coupe △ .
  Soit O leur point commun.
  Comme O ∈ δ, OA = OD
  Comme O ∈ △ , OA = OB
  et OD = OC

D'où OA = OB = OC = OD et O *est le centre d'un cerle circonscrit à ABCD.*

Exercice : Tracer les tangentes au cercle en A , B , C , D. Qu'obtient-on ?

- *AB = AD et BC = DC*
- *(AC) est bissectrice de $\hat{A}$ et de $\hat{C}$*
- $\hat{B} = \hat{D}$
- La bissectrice de $\widehat{B}$ coupe △ (admis). Soit I leur point commun.
  Comme I appartient à la bissectrice de $\hat{B}$, il est équidistant de (BA) et (BC).
  Comme I appartient à △,
  — d'une part il est équidistant de (BA) et (DA),
  — d'autre part il est équidistant de (BC) et (DC).

Donc I est équidistant des quatre côtés de ABCD : il est le centre d'un *cercle tangent à ces quatre côtés.*

Exercice : Joindre les points de contact, dans l'ordre des côtés de ABCD.
Qu'obtient-on ?

Exercice : (Prolongement). TRAPEZE ISOCELE ET CERCLE

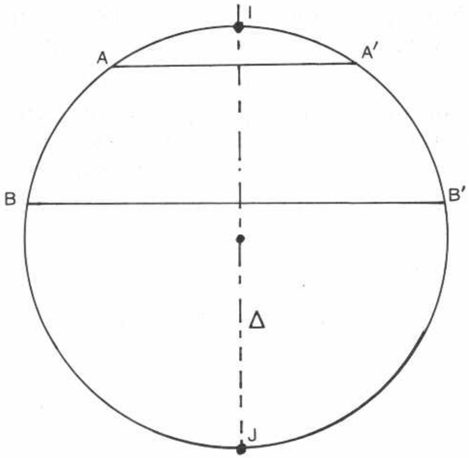
(Cordes parallèles, arcs de même mesure)

Soit un cercle et deux cordes parallèles. Elles ont une même médiatrice, axe de symétrie de la figure. D'où les diverses propriétés :

AA'B'B est un trapèze isocèle,

$\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{A'B'}$ (Il s'agit des «petits arcs»),

etc.

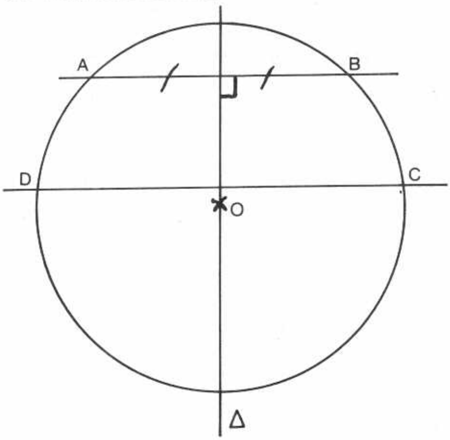


Réciproquement : Soit, sur un même cercle, A , B , C , D tels que $\overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{BC}$ (A et B étant dans le même demi-plan de frontière (DC)).

Soit △ la médiatrice de [AB].

On établit que le symétrique de D par rapport à △ est C.

Donc ABCD est un trapèze isocèle.



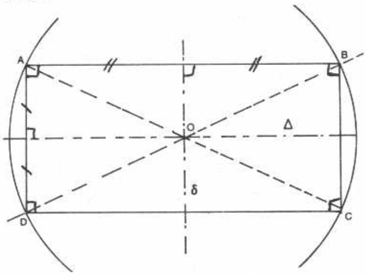
3 RECTANGLE

Figure généralement bien connue en fin de sixième, surtout comme *quadrilatère dont les angles sont droits.*

On sait aussi que si *deux côtés sont opposés ils sont parallèles et de même longueur.*

Il semble opportun, en quatrième de partir de tout cela.

On peut établir, mais il vaut mieux admettre (le résultat est évident), que *si deux côtés sont opposés ils ont la même médiatrice.*



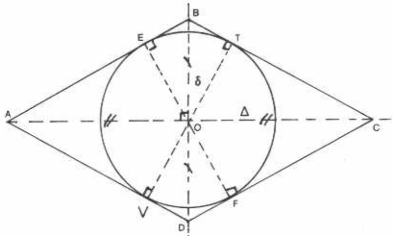
3' LOSANGE

Figure généralement mal identifiée avant la sixième (ou comme "un carré mis sur la pointe").

Elle a été rencontrée à l'occasion du tracé d'une médiatrice.

Mais l'usage du papier quadrillé rend commode la définition suivante (où le mot *diagonale* a deux sens différents...) :

Le losange est un quadrilatère ABCD tel que *chaque diagonale est médiatrice de l'autre.*



Chacune de ces figures a deux axes de symétrie perpendiculaires (soit O leur point commun)

Remarque fondamentale :

•• Le rectangle est "deux fois" trapèze isocèle.

•• Le losange est "deux fois" cerf-volant.

— Il y a donc un cercle ABCD et *son centre est* à la fois sur △ et sur δ . C'est donc *leur point commun O.*

— Donc aussi *les diagonales se coupent* sur △ et δ , donc *en O.*

•• De là :

— *la caractérisation classique du*

On établit facilement :

— la *caractérisation du losange, parmi les quadrilatères, par :*

$$AB = BC = CD = DA$$

— que *O est équidistant des quatre* côtés : il est le centre d'un cercle tangent aux quatre côtés.

rectangle, parmi les quadrilatères, par ses diagonales

— *la caractérisation classique du triangle rectangle* (Cf. page 135) *par la médiane relative à l'hypoténuse,* c'est-à-dire encore par son cercle circonscrit.

Exercice : Tracer les tangentes au cercle en A , B , C , D . Qu'obtient-on ?

— le fait que chaque diagonale est bissectrice, de $\hat{A}$ et $\hat{C}$, ou de $\hat{B}$ et $\hat{D}$, mais aussi de $\widehat{EOT}$ et $\widehat{FOV}$, ou de $\widehat{TOF}$ et $\widehat{EOV}$.

Il s'ensuit que $\widehat{EOF}$, par exemple, double l'angle droit $\widehat{BOC}$.

Donc *E , O , F sont alignés.* Donc aussi (AB) // (DC) (et, de même, (BC) // (AD)).

— que la distance entre les parallèles (AB) et (CD) est la même que la distance entre les parallèles (BC) et (AD).

Exercice : Joindre, dans l'ordre, E , T , F , V. Qu'obtient-on ?

RECTANGLES, LOSANGES, PARALLELOGRAMMES :

- Il paraît normal de tabler, en début de quatrième, sur l'acquis (au besoin remémorisé avec des dessins) de deux caractérisations du quadrilatère ABCD comme parallélogramme :

  1 avec (AB) // (CD) et (AD) // (BC) [le cas de ABCD aplati étant exclu ici].

  2 avec (AB) // (CD) et AB = CD (mais avec une condition supplémentaire empêchant de "croiser"). Ceci étant très commode avec du papier quadrillé.

  En langage vectoriel ce 2 *s'énonce aussitôt :* $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

- Dès lors rectangles et losanges apparaissent comme des parallélogrammes particuliers.
- Les propriétés établies ici pour les rectangles et les losanges manifestent que leurs diagonales ont le même milieu.
  Ceci peut ne pas être connu en début de quatrième pour les parallélogrammes. La propriété de "conservation du milieu par projection..." l'établit rapidement [On peut l'établir aussi directement par symétrie centrale, ou l'admettre].
- Dès lors on retrouve toute la kyrielle des énoncés classiques sur le parallélogramme, le rectangle, le losange, ... et le carré.

Exercices : Cf. les exercices classiques habituels, et aussi :

- Une réciproque classique : Etude de deux bandes sécantes de même largeur.
- Exercices de construction.
- Exercices de "géométrie dynamique" avec des points fixes et d'autres variables à partir de parallélogrammes, rectangles, losanges, ...

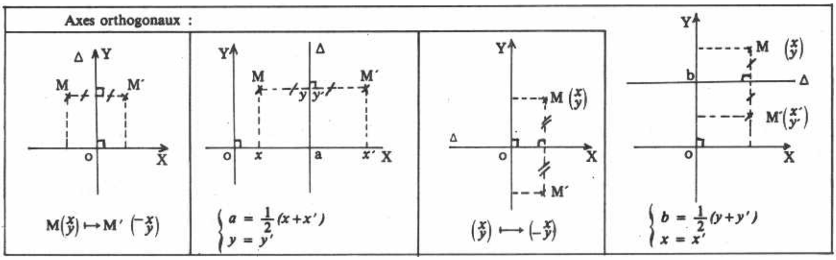
II. 3. D'autres figures à axe(s) de symétrie

Il a déjà été incidemment fait mention du cercle.

Voir aussi, en cette brochure notamment, l'ellipse, l'hyperbole, la parabole, etc, et plusieurs dessins des articles V.3 et V.4.

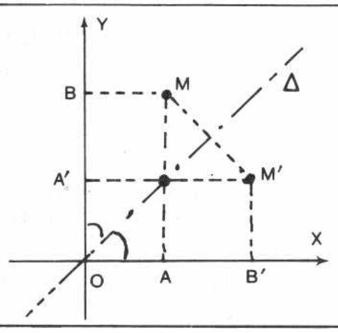
La reconnaissance de symétries facilite les tracés de courbes.

II. 4. Symétrie orthogonale et coordonnées



La formule $a = \dfrac{1}{2}(x+x')$, ou $b = ...$, n'exige aucune étude préalable de relation de Chasles (ou de relation dérivée) :

Il suffit d'admettre la "conservation du milieu par projection" et de constater que le nombre a est donc équidistant des nombres x et x' : il est leur moyenne arithmétique. [Si l'on veut, on peut poser d'abord $a-x=x'-a$, etc.]



(*Repère orthonormé*)

La symétrie par rapport à la première bissectrice △ donne :

$$M\binom{x}{y} \longmapsto M'\binom{y}{x}$$

(Ceci est vrai, de même, en repère simplement normé).

- ***Exercice 1 :*** *Symétrie par rapport à la 2ème bissectrice.*
  (Cas plus difficile et moins utile.
  Peut être abordé autrement, comme composée d'une symétrie par rapport à la première bissectrice et d'une symétrie par rapport à l'origine. Voir plus loin).
- ***Exercice 2 :*** Composer, à l'aide des coordonnées, $S_X \circ S_Y$ et $S_Y \circ S_X$. Qu'obtient-on ?
- ***Exercice 3 :*** Composer, à l'aide des coordonnées, $S_Y \circ S_X \circ S_Y \circ S_X$. Qu'obtient-on ?
- ***Exercice 4 :*** Composer, à l'aide des coordonnées, $\triangle$ étant la 1ère bissectrice : $S_\triangle \circ S_X \circ S_\triangle \circ S_Y$. Qu'obtient-on ?

II. 5. Symétrie et dénombrement

(*Exercice*)

Prélevons des carrés successifs, toujours à partir de l'origine, dans le triangle de PASCAL. (Cf. page 184, ...).

Calculons la somme des carrés des nombres de la diagonale encadrée $\triangle$.

$$\begin{array}{lccc}
 & & 1 & \\
\triangle : & \boxed{1 \quad\quad 1} & \\
 & & 2 &
\end{array}$$

$1^2 + 1^2 = 2$

$$\begin{array}{lccccc}
 & & & 1 & & \\
 & & 1 & & 1 & \\
\triangle : & \boxed{1 & & 2 & & 1} \\
 & & 3 & & 3 & \\
 & & & 6 & &
\end{array}$$

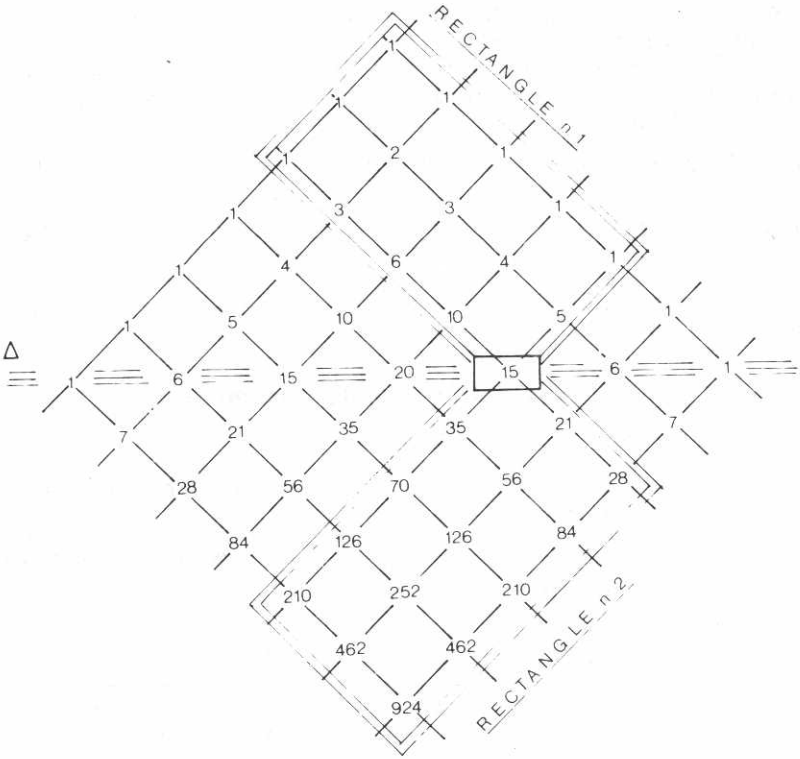
$1^2 + 2^2 + 1^2 = 6$

$$\begin{array}{lccccccc}
 & & & & 1 & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & \\
\triangle : & \boxed{1 & & 3 & & 3 & & 1} \\
 & & 4 & & 6 & & 4 & \\
 & & & 10 & & 10 & & \\
 & & & & 20 & & &
\end{array}$$

$1^2 + 3^2 + 3^2 + 1^2 = 20$

Conjecture : La somme des carrés des termes de la diagonale $\triangle$ est égale au dernier nombre du carré.

Démonstration : A chaque "noeud", le nombre écrit représente le nombre de plus courts chemins du quadrillage qui permettent d'atteindre ce noeud. (Cf. pages 185-186)



Raisonnons sur le carré ci-dessus. Pour aller du 1 initial à 924, je dois couper la diagonale △ (et la couper une fois seulement).

Choisissons de la franchir en $\boxed{15}$.

Tout plus court chemin, du 1 initial à 924, se situe alors dans les deux rectangles, de sommet commun 15, signalés par un double contour, symétriques par rapport à △ .

Le nombre de plus courts chemins pour aller du 1 initial à 15 pour le rectangle n° 1 (et c'est 15) se retrouve donc pour aller, dans le rectangle n° 2, de 15 à 924.

Le nombre de tels plus courts chemins, de 1 à 924 en passant par 15, est donc 15^2. En répétant cela pour chaque nombre de la diagonale △, j'obtiens $1^2 + 6^2 + 15^2 + 20^2 + 15^2 + 6^2 + 1^2 = 924$ (nombre total de chemins).

Le raisonnement ne dépend pas du carré choisi. Son résultat est général.

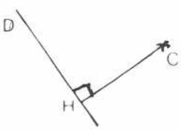
III. Symétrie centrale (Centre C)

1° PLUSIEURS ACCÈS :

(a) Cas particulier de rotation.
(b) Définition du symétrique d'un point quelconque.
(c) Cas particulier d'homothétie.
(d) Composée de symétries orthogonales d'axes perpendiculaires.

Commentaires :

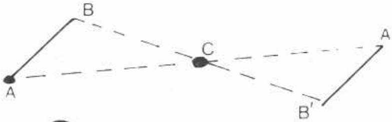
- Le (a) et le (b) se ramènent rapidement l'un à l'autre.
  Il s'ensuit immédiatement, sans démonstration, *les propriétés fondamentales de la symétrie centrale :*
  - — (1) — conservation des ALIGNEMENTS, et même de la DIRECTION des droites :

    (CH) $\longmapsto$ (CH′) et D, orthogonale à (CH), a comme image D′, orthogonale à (CH′). Or (CH) = (CH′). Donc D′ // D.
    L'image d'une droite est une droite parallèle.
    L'image d'une demi-droite est une demi-droite parallèle et de sens contraire.
  - — (2) — conservation de la DISTANCE.
  - — (3) — conservation des ANGLES.
- Grâce aux propriétés du rectangle, le (b) et le (d) se ramènent aussi rapidement l'un à l'autre.
- Le (c) est intéressant comme activité hors programme, les agrandissements et les réductions étant des transformations pratiques importantes.

2° FIGURE-CLÉ ASSOCIÉE : PARALLÉLOGRAMME.

3° TRADUCTION ÉVENTUELLE EN LANGAGE VECTORIEL :



- $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CA'}$ (et aussi $\overrightarrow{AA'} = 2\,\overrightarrow{AC}$) ,
- $\overrightarrow{AB} = -\,\overrightarrow{A'B'}$.

4° TRADUCTION EN LANGAGE DE COORDONNÉES

(simple en repère cartésien quelconque)

5° FIGURES AYANT UN CENTRE DE SYMÉTRIE :

Cercle, ellipse, ... Des figures des articles V.3 et V.4, ... Même remarque que plus haut.

IV. Composées de symétries ou ...

IV. 1. Deux symétries orthogonales d'axes perpendiculaires en C et la symétrie de centre C.

Axes : $\triangle$, δ . Point de concours C.

• Grâce aux propriétés du rectangle, ou, si l'on veut, à leur expression en langage de coordonnées, on établit immédiatement la table de la loi $\circ$ de composition des applications agissant sur

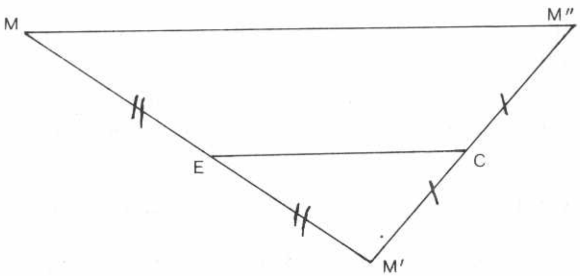
$$\{ S_{\triangle} , S_{\delta} , S_C , \text{Identité} \} .$$

• *Conséquence 1* : Cas où $\triangle$ est "la première bissectrice" des axes de coordonnées. $S_{\triangle} \circ S_C$ (C étant l'origine des coordonnées) est alors S_{δ} , δ étant "la deuxième bissectrice".

• *Conséquence 2* : Dès qu'une figure possède deux des trois symétries étudiées ici, elle possède aussi la troisième (Cf. rectangle, losange, ...).

IV. 2. Deux symétries centrales S_C et S_E

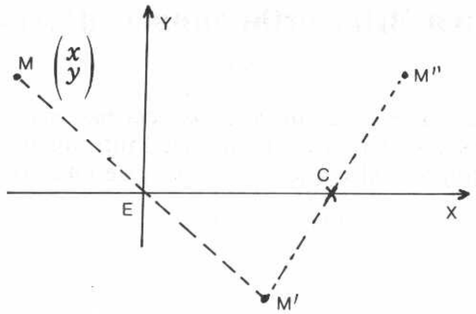
$S_C \circ S_E$:



1° *Sans coordonnées,* étude facile si l'on connaît (ou si on profite de cela pour l'établir) le théorème sur le segment qui joint les milieux de deux côtés d'un triangle, en n'oubliant pas de comparer aussi les sens de (E,C) et (M,M″). (Cf. page 48).

2° *On peut aussi prendre un repère* : (E, C, un autre point) par exemple. Alors

$$M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \xmapsto[S_E]{} M' \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix} \xmapsto[S_C]{} M'' \begin{pmatrix} x+2 \\ y \end{pmatrix}$$



③ Ainsi, avec le 1° ou le 2°, *se manifeste un passage direct de M à M″* tel que :

$$\left.\begin{array}{l} (MM'') \,/\!/\, (EC) \\ MM'' = 2\,EC \\ [MM'') \text{ et } [EC) \text{ sont de même sens.} \end{array}\right\} \quad (\text{soit, donc, } \overrightarrow{MM''} = 2\,\overrightarrow{EC})$$

Il n'y a pas besoin pour cela d'avoir déjà étudié la translation. Mais l'application (M $\mapsto$ M″) se visualise mieux, et bien, si on prend de nombreux points M et le langage translation (ou vecteurs) s'introduira quand on le jugera opportun.

④ Un minimum d'attention à la translation et aux vecteurs permet, même sans étude générale préalable, une étude directe :

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{MM'} = 2\,\overrightarrow{EM'} \\ \overrightarrow{M'M''} = 2\,\overrightarrow{M'C}\,. \end{array}\right\} \quad [\text{On convient que } \vec{u} + \vec{u} \text{ s'écrira } \overrightarrow{2u}]$$

Dès lors, les seules propriétés de l'addition vectorielle (étudiée en composant des translations) permettent d'établir que $\overrightarrow{MM''} = 2\,\overrightarrow{EC}$.

⑤ ***Remarque*** : La composée de deux symétries centrales n'est pas une symétrie centrale.

⑥ ***Exercice 1*** : Etudier $S_E \circ S_C$.

Exercice 2 : Peut-on choisir E et C pour que $S_E \circ S_C$ soit l'identité ?

Exercice 3 : Décomposer une translation en deux symétries centrales. Si on choisit l'un des centres (ce choix est arbitraire), et l'ordre des deux symétries, l'autre est alors unique.

⑦ ***Remarque*** : L'utilisation du langage de la loi $\circ$ ne semble pas faciliter les choses dès qu'elles se compliquent un peu (par exemple pour l'exercice 3 ci-dessus) : Mieux vaut, semble-t-il, utiliser alors la notation "suivie de" (éventuellement abrégée) qui, par son écriture, respecte l'ordre dans lequel on opère.

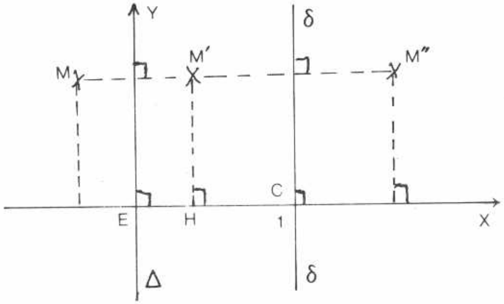
IV.3 Deux symétries orthogonales d'axes parallèles $\triangle$ et δ

① On peut faire une *étude directe sans coordonnées*. Pour éviter la multiplication des cas de figure, elle motive l'introduction de la relation de Chasles, ou doit attendre que l'on dispose de l'addition vectorielle.

② *En langage de coordonnées,* pour $S_\delta \circ S_\triangle$:

soit E sur $\triangle$, C sur δ , (EC) $\perp$ $\triangle$ (et, donc, à δ).

Prenons le repère orthogonal (E, C, un autre point de $\triangle$) :

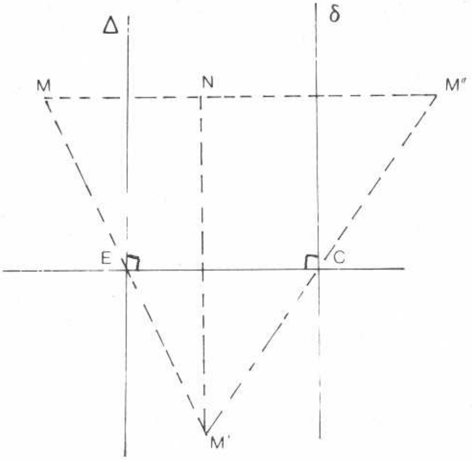


$$M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \xmapsto[S_\triangle]{} M' \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix} \xmapsto[S_\delta]{} M'' \begin{pmatrix} x+2 \\ y \end{pmatrix}$$

D'où la composée.

③ *On peut aussi utiliser le IV.1. :*

Comme $S_\triangle = S_{(EC)} \circ S_E$ et $S_\delta = S_C \circ S_{(EC)}$, nous obtenons :



$$\overbrace{M \underset{S_E}{\longmapsto} M' \underset{S_{(EC)}}{\longmapsto} N}^{S_\triangle}\ \overbrace{\underset{S_{(EC)}}{\longmapsto} M' \underset{S_C}{\longmapsto} M''}^{S_\delta}$$

D'où le "circuit court" :

$$M \underset{S_E}{\longmapsto} M' \underset{S_C}{\longmapsto} M''$$

et l'on est ramené au IV.2.

4° Avec les vecteurs, l'étude est commode :

$$\overrightarrow{MM'} = 2\,\overrightarrow{EH} \quad ; \quad \overrightarrow{M'M''} = 2\,\overrightarrow{HC} \quad ; \quad \text{d'où} \quad \overrightarrow{MM''} = 2\,(\overrightarrow{EH} + \overrightarrow{HC}) = 2\,\overrightarrow{EC}$$

(Il suffit de très peu d'études sur les vecteurs pour pratiquer ces calculs : Cf. 4° du IV.2. ci-dessus)

5° *Mêmes remarques qu'au 3° du IV.2.*

6° *Exercice 1* : Etudier $S_\triangle \circ S_\delta$.

Exercice 2 : Décomposer une translation en deux symétries orthogonales.

• Si on choisit D (direction imposée), et l'ordre des deux symétries, D′ est alors unique.

IV. 4. Une translation et une symétrie centrale

Soit la translation $t_{(C,A)}$, la symétrie S_C, et à étudier $t_{(C,A)} \circ S_C$. (On peut ou non utiliser le langage vectoriel).

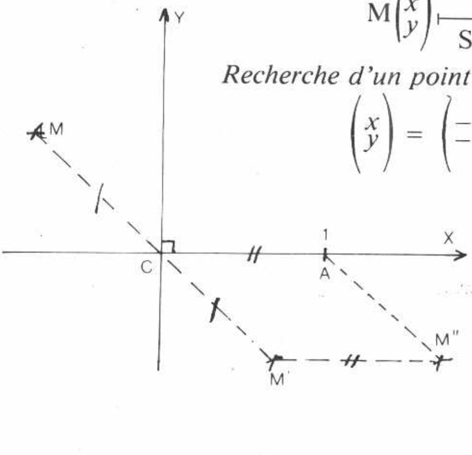
1° *Etude avec les coordonnées*

Etudier avec soin le choix du repère. Ci-contre, bien noter le choix de CA comme unité.

$$M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \underset{S_C}{\longmapsto} M'\begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix} \underset{t_{(C,A)}}{\longmapsto} M''\begin{pmatrix} -x+1 \\ -y \end{pmatrix}$$

Recherche d'un point fixe :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x+1 \\ -y \end{pmatrix} \quad \text{si et seulement si} \quad \begin{cases} x = \dfrac{1}{2} \\ y = 0 \end{cases}$$



Il y a donc un point fixe (et un seul) : le milieu I de [CA]. Mais il est aussi le milieu de [MM″]. Donc

$$t_{(C,A)} \circ S_C = S_I$$

2° *Il est possible de faire une étude sans coordonnées.* Un dessin faisant intervenir plusieurs points M permet de conjecturer l'existence, la situation et le rôle du point fixe I milieu de [CA]. La démonstration (sans coordonnées) est alors simple (Cf. théorème cité au IV. 2. 1°).

3° Si l'on fait état de l'associativité de la loi $\circ$ de composition des applications, il est également possible d'utiliser l'exercice 3 du IV.2 § 6°. Il existe un point I unique (milieu de [CA]) tel que :

$$t_{(C,A)} = S_I \circ S_C$$

D'où

$$\begin{aligned} t_{(C,A)} \circ S_C &= (S_I \circ S_C) \circ S_C \\ &= S_I \circ (S_C \circ S_C) \\ &= S_I \circ \mathrm{Id} \\ &= S_I \end{aligned}$$

4° Etudier, par les diverses méthodes, $S_C \circ t_{(C,A)}$.

IV. 5. Une translation $t_{(C,A)}$ et une symétrie orthogonale d'axe $\triangle$ tel que (CA) $\perp \triangle$

Ici aussi on peut, ou non, utiliser le langage vectoriel.

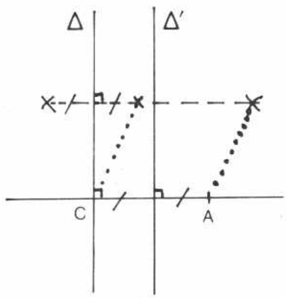
On retrouve les mêmes méthodes qu'au IV. 4. pour $t_{(C,A)} \circ S_\Delta$:

— étude avec coordonnées,

— étude élémentaire sans coordonnées,

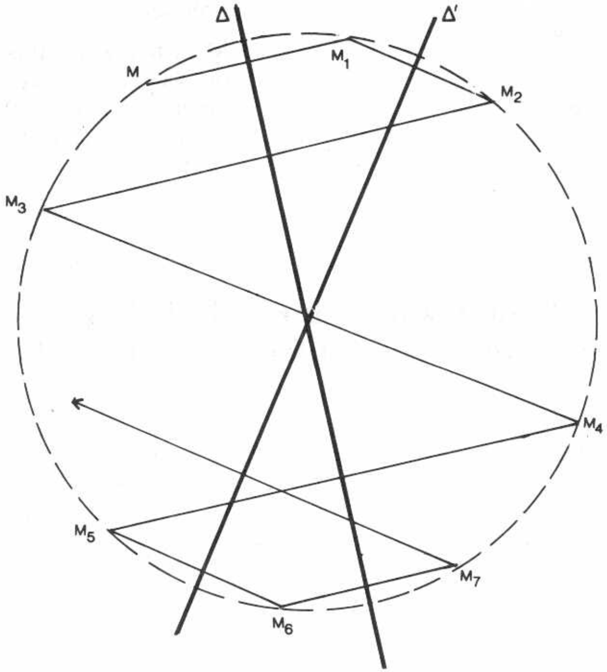
— étude en décomposant d'abord $t_{(C\,A)}$:

$t_{(C,A)} = S_{\Delta'} \circ S_\Delta$
(Cf. fin du IV.3.).
D'où… et, finalement,
$t_{(C,A)} \circ S_\Delta = S_{\Delta'}$
Etudier de même $S_\Delta \circ t_{(C,A)}$.



IV. 6. Deux symétries orthogonales d'axes $\triangle$ et δ sécants en C

① *Commençons par un intéressant exercice qui nous a été envoyé par Gérard BONNEVAL, d'Auxerre :*



On considère deux droites sécantes $\triangle$ et $\triangle'$ et les symétries orthogonales S_Δ et $S_{\Delta'}$.

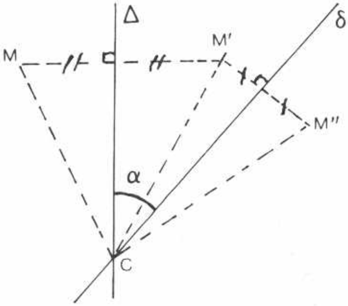
A partir d'un point M du plan, soit

sur le même dessin :
$$\begin{cases} M_1 = S_\Delta(M) \\ M_2 = S_{\Delta'}(M_1) \\ M_3 = S_\Delta(M_2) \\ M_4 = S_{\Delta'}(M_3) \\ \ldots \text{Etc...} \end{cases}$$

Recommencer d'autres figures, en variant les éléments de départ (angle de D et $\triangle$, point M).

Que dire, dans chaque cas, de la suite des images successives ?

②



- Lorsque M est tel que le montre la figure ci-contre, avec M′ intérieur à "l'angle α", il est immédiat que $\widehat{MCM''} = 2\alpha$.
  Comme $CM = CM' = CM''$, il semble alors que $S_\delta \circ S_\Delta$ est la rotation $(C, 2\alpha)$ dans un sens à préciser.
- Mais il y a des positions de M où la valeur 2α de $\widehat{MCM''}$ apparaît avec moins d'évidence ! Ne pas insister pour démontrer !

V. Retour à la figure 1 du début (ou à une figure aussi riche) et synthèse :

Il doit être désormais possible de percevoir et de traduire toute la richesse de cette figure. Si on ne l'a pas déjà fait, il est temps d'y lire ce que sont des compositions de translations si l'on s'est familiarisé, durant la présente étude au moins, avec le *fonctionnement* des translations.

II.7 Michel MASSAL

TRANSFORMATIONS DU PLAN ET QUADRILLAGES

I. AVERTISSEMENT

Il s'agit d'étudier les transformations ponctuelles simples du plan :

— en s'intéressant d'abord à celles qui stabilisent un quadrillage (ce qui signifie que tout nœud du quadrillage a pour image un nœud du quadrillage), de façon à aider l'élève à découvrir par lui-même les transformées de figures simples et les propriétés des transformations,

— en faisant ensuite apparaître l'insuffisance d'un tel point de vue et en le dépassant.

1 Une telle démarche semble présenter, outre la simplicité de l'étude à l'aide de quadrillages, de nombreux avantages :

— L'élève peut beaucoup découvrir par lui-même. Cela évite des études trop axiomatiques ou trop dogmatiques.

— On peut assez facilement adapter le niveau de l'étude au niveau de l'élève : plus ou moins de quadrillages !...

— L'étude des homothéties et des symétries doit montrer assez vite l'intérêt de se passer du quadrillage ; ce qui n'est pas le cas si on se limite aux translations.

— Translations et homothéties peuvent fournir une bonne préparation à l'étude des vecteurs du plan.

2 *Ces activités sur quadrillages pourront être considérées :*

— *soit comme une première approche des translations, des homothéties, des symétries ;*

— *soit comme une approche différente de telles transformations antérieurement étudiées sans coordonnées.*

Dans les deux cas, il semble préférable de ne pas nommer d'emblée les transformations présentées ici en langage de coordonnées.

Leur dénomination interviendra, pour les élèves :

— *soit, dans l'hypothèse 1, lorsqu'elles auront été étudiées de façon plus complète ;*

— *soit, dans l'hypothèse 2, lorsque les propriétés mises en évidence auront permis d'identifier la transformation en jeu.*

3 *Chacun pourra reprendre, compléter, modifier à son gré les activités présentées.*

On évitera (Cf. activités de relativisation, ... page 131, ...) d'induire trop facilement l'image d'un segment [AB], ou d'une droite (AB), de la seule considération des images de A et de B.

Mais on n'oubliera pas que les activités proposées ici sont d'abord expérimentales et on ne les enfermera pas dans des prétentions théoriques qu'elles n'ont pas.

4 • On trouvera par ailleurs des présentations, d'emblée générales, en langage de coordonnées. Mais la réalisation des dessins à partir de quadrillages en facilitera la compréhension.

• *DE TOUTES FACONS, C'EST DANS LES DIVERS DOMAINES (NUMERIQUE, CONSTRUCTIONS GEOMETRIQUES ET GRAPHISMES, VECTORIEL) QUE LES ELEVES DE QUATRIEME-TROISIEME ONT, AUTANT QUE POSSIBLE, A ETRE FAMILIARISES AVEC LES TRANSFORMATIONS ETUDIEES.*

II. TRANSLATION

Remarques préliminaires

1 On peut :

— soit partir de la définition classique :

$$t_{(a,b)} : \mathrm{M}\ (x,y) \longmapsto \mathrm{M}'\ (x + a,\ y + b)$$

— soit mettre en place cette définition par des activités sur quadrillage.

2 • On peut utiliser un quadrillage droit, ou oblique.

• Pour simplifier, je me borne à étudier un triangle et son image. Il serait souhaitable de multiplier les exemples avec des polygones divers, des cercles, des dessins quelconques.

A) Activités sur un quadrillage

α) **Application de la définition :**

a) Placer trois points A, B, C et leurs images par une translation t :

$$A' = t(A) \; ; \; B' = t(B) \; ; \; C' = t(C)$$

b) Mesurer les longueurs :

AA′ ; BB′ : CC′ ; AB : A′B′ ; AC ; A′C′ ; BC ; B′C′ .

Mesurer les angles $\hat{A}$; $\hat{B}$; $\hat{C}$; $\hat{A}'$, $\hat{B}'$; $\hat{C}'$.

c) Premières observations : Conservation des angles, des distances.

d) Mettre en évidence des parallèles, des parallélogrammes (sans tenir pour autant pour établi que [A′B′] est l'image de [AB] ; cf. remarques initiales. I, § 3)

e) Nature de AA′B′B , AA′C′C , ...

β) **Détermination d'une translation**

a) Calculer $(x_{A'} - x_A \, , \, y_{A'} - y_A)$; $(x_{B'} - x_B \, , \, y_{B'} - y_B)$; etc.
Que retrouve-t-on ?

b) Calculer $(x_B - x_A \, , \, y_B - y_A)$ et $(x_{B'} - x_{A'} \, , \, y_{B'} - y_{A'})$.
Que remarque-t-on ? Peut-on trouver de nouvelles translations ?

c) On peut utiliser les deux exercices précédents pour faire déterminer une translation connaissant un point et son image. Cela prépare la suppression du quadrillage.

Par exemple : Placer deux points M et M′, déterminer la translation t_1 telle que $t_1(M) = M'$; choisir un point N, placer son image N′ par t_1. Que peut-on dire de MM′N′N ?

Remarques :

① Cet exercice prépare à la notion de coordonnées d'un vecteur et, par là, à celle de vecteur.

② On peut composer des translations et préparer ainsi l'addition des vecteurs (Relation de Chasles, ou addition des composantes !).

B) Activités sans quadrillage

a) Faire le recensement des propriétés observées dans la partie A).

b) Comment déterminer une translation ?
α) par le couple formé par un point et son image ;
β) ou par ... une direction, un sens, une longueur (tiens... tiens...).

c) Placer des points A,B,C ; choisir une translation ; dessiner les images A′, B′, C′

α) en utilisant des parallélogrammes ;

β) en dessinant des parallèles passant par A,B,C et en mesurant des longueurs.

d) Mesurer les distances, les angles ; trouver des parallèles, des parallélogrammes.

C) Synthèse des propriétés observées

On peut enchaîner avec l'étude des vecteurs du plan : définition et addition des vecteurs. Relation de Chasles. Composantes dans une base donnée. Etc.

D) Exercices

On peut trouver de nombreux exercices, avec ou sans quadrillage. Par exemple :

- composer deux translations
- translation réciproque ;
- etc.

III. HOMOTHETIE

Remarques préliminaires :

La définition générale met en évidence un point privilégié (le centre d'homothétie). Comparer avec les translations.

• Aussi, choisissons, quand c'est possible, le centre d'homothétie à l'origine du quadrillage.

Dès lors, que le quadrillage soit oblique ou droit, nous partirons de la définition suivante :

Avec $\lambda \neq 0$, $h(O,\lambda)$: $M(x,y) \longmapsto M'(\lambda x, \lambda y)$

• Mais il faudra apprendre à sortir de ce cas où le centre d'homothétie est à l'origine du quadrillage.

A. Activités sur un quadrillage d'origine 0

α) Application de la définition

a) Placer les points A, B, C, et leurs images par une homothétie h de centre O, de rapport λ .

$$A' = h(A) \; ; \; B' = h'(B) \; ; \; C' = h(C)$$

b) Mesurer OA, OA' ; OB , OB' ; OC , OC' , AB , A'B' , etc.

c) Mesurer $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$; $\hat{A}'$, $\hat{B}'$, $\hat{C}'$

d) Trouver des parallèles ; des parallélogrammes si possible.

e) Premières observations :
— Les distances sont multipliées par $|\lambda|$.
— Conservation des angles.
— Observer le parallélisme : (AB) // (A′B′).
— Observer que les droites (AA′), (BB′),(CC′) sont concourantes en O.
— etc.

f) Application : Agrandissement d'un dessin. La réduction montre l'intérêt de ne pas se limiter aux homothéties qui stabilisent le quadrillage, et de prendre, pour λ, des rapports (simples) décimaux ou rationnels (ainsi $\frac{1}{3}$, ...) aussi bien qu'entiers.

β) **Détermination d'une homothétie :**

a) Il faut un centre et un rapport.

b) Dès lors, à partir d'une extension de la défintion initiale, étant donné deux couples de points (A,B) et (A′,B′), on peut chercher s'il existe une (ou plusieurs) homothétie(s) telle(s) que (A,B) ait pour image (A′,B′) [Quel est le centre ? quel est le rapport ?].

- Faire calculer $(x_B - x_A, x_{B'} - x_{A'})$ et $(y_B - y_A, y_{B'} - y_{A'})$.

c) Est-il suffisant de connaître un point et son image ? Comparer avec les translations.

Remarques :

① Cet exercice peut fournir une approche pour la multiplication d'un vecteur par un nombre.

② On peut aussi envisager un exercice du type suivant : (λ et λ' positifs pour simplifier)

Soit A et B deux points, A′, B′ leurs images par l'homothétie $h(O, \lambda)$, A″, B″ les images de A′, B′ par $h(O, \lambda')$.

Démontrer que $\frac{OA'}{OB'} = \frac{OA}{OB} = \frac{AA'}{BB'} = \frac{A'A''}{B'B''} =$ etc.

(Tiens ! On dirait "Thalès" !...)

B. Activités sans quadrillage

a) Recenser les propriétés observées en A).

b) Comment déterminer une homothétie ?

α) avec un point (centre) et un nombre (rapport) ;

β) deux segments parallèles déterminent-ils une (et une seule ?) homothétie ? (même en précisant le segment de départ ? — Et si les deux segments ont la même longueur ?).

c) Placer des points A,B,C ; choisir une homothétie. Placer les images A′, B′, C′ de A,B,C.

d) Mesurer les distances, les angles.

C. Synthèse des propriétés observées

① On peut enchaîner avec l'étude de la multiplication d'un vecteur par un nombre.

② On peut utiliser la remarque **A,** β) ③ pour introduire :
- graduation d'une droite ;
- partage d'un segment en parties égales ;
- théorème de Thalès ;
- ...

D. Exercices

Là encore, de nombreux exercices sont possibles :

— Très simples : Application directe avec ou sans quadrillage.

— Moyens : Composition de deux homothéties de centre O.
Cas particulier de $h(O,\lambda) \circ h(O,1/\lambda)$.

— Compliqués : Composition d'une homothétie et d'une translation.
Composition de deux homothéties de centres différents.

IV — SYMETRIE ORTHOGONALE PAR RAPPORT A UNE DROITE

Remarque

L'étude de cette symétrie est liée à l'orthogonalité, et à la notion de médiatrice d'un segment.

A. Activités sur un quadrillage (droit)

α) La définition générale met en évidence une droite privilégiée (l'axe de symétrie).

Aussi choisissons, quand c'est possible, cet axe pour l'un des axes de coordonnées.

Le choix du premier, axe des abscisses, conduit à la définition suivante :

$$S_1 : M(x,y) \longmapsto M'\ (x,\ -y)$$

a) Placer des points A, B, C, et leurs images A′, B′, C′.
b) Mesurer AB, A′B′, AC, A′C′, BC, B′C′.
c) Mesurer $\hat{A}$, $\hat{A}'$, $\hat{B}$, $\hat{B}'$, $\hat{C}$, $\hat{C}'$.

d) Trouver des points A, B tels que (A′B′) // (AB).

e) Soit H , L, M les points où le premier axe coupe respectivement [AA′] , [BB′] , [CC′] .

Mesurer AH, AH′, BL, LB′, CM, MC′.

Trouver la médiatrice de [AA′], de [BB′], de [CC′] .

f) Premières observations :

- Conservation des distances.
- Conservation des angles.
- Le premier axe est médiatrice de [AA′], etc.

Faire un constat de "symétrie" (au sens usuel du mot).

g) Ecrire les définitions analytiques de la symétrie par rapport au second axe, à la "première bissectrice" $y = x$.

β) **Détermination d'une symétrie.**

a) Il faut choisir une droite, dessiner des perpendiculaires, mesurer des longueurs.

b) Deux points déterminent-ils une symétrie ? Par rapport à quelle droite ?

B. Activités sans quadrillage

a) Faire un recensement des propriétés découvertes en A).

b) Comment déterminer une symétrie orthogonale ? :

— par son axe ;

— par un point et son symétrique, s'ils sont distincts.

c) Choisir une droite, trois points A,B,C ; dessiner leurs symétriques A′, B′, C′.

d) Mesurer les distances, les angles.

C. Synthèse des propriétés observées

D. Exercices

Certains semblent assez intéressants, par exemple :

Composer deux symétries d'axes parallèles (Tiens ! On retrouve une translation !...), d'axes perpendiculaires (symétrie-point... ou rotation de 180° !...) (Cf. pages 78-79 ou 76).

Composer deux symétries d'axes sécants non perpendiculaires conduit, par contre, à une rotation plus difficilement identifiable... (Cf. pages 81-82).

Yves JOYEUX

DES CARTES AUX QUADRILLAGES

Liste, non exhaustive, de quelques activités possibles.

(1) Observation et utilisation de cartes routières :
— Plis numérotés de certaines cartes et utilisation.
— Etablissement d'un itinéraire (procédés et localisation).
— Retrouver un itinéraire donné.

(2) Etude du plan d'une ville :
— Etude sur plan d'une localité supposée connue.
Etablissement d'un itinéraire (mention des rues).
Parallèlement à ces études théoriques, pourraient être effectuées des sorties en milieu urbain et rural après préparation d'un itinéraire et utilisation, en milieu rural, de moyens particuliers d'orientation (boussole en particulier).
— Etude d'une ville moderne dont les rues forment un quadrillage régulier ou presque régulier (New-York : île de Manhattan).
— Cheminements dans une telle ville.
— Codage de ces déplacements.

Ces activités pourraient faire l'objet d'un travail pluridisciplinaire intéressant :

— le professeur de mathématiques,
— le professeur de géographie,
— le professeur d'anglais,
— le professeur de français.

Le processus pourrait être le suivant :

• Observation de diapositives montrant, par exemple,Manhattan (Exploitation dans diverses disciplines).

• Examen de photographies et plans de plus en plus détaillés.

(3) Repérage sur une route de la région.

Repérage d'un point sur une droite (possibilité d'introduction des entiers).

(4) Repérage sur un plan à l'aide d'un quadrillage ou différents systèmes de repérage.

(5) Repérage d'un point du plan dans un quadrillage.
Elaboration d'un quadrillage $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ puis $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$.

(6) Travaux sur quadrillages :
— Différentes sortes de quadrillages : obliques, perpendiculaires. Coordonnés « polaires ».
— Transports de dessin : agrandissement - réduction. Changements de quadrillages.
— Cheminements dans des quadrillages : mise au point d'un codage ; unicité du codage d'un déplacement fixé.

(7) Déplacements dans un quadrillage :
— Elaboration d'un quadrillage.
— Intérêt de l'utilisation de papiers calques permettant d'utiliser plusieurs fois le même quadrillage et illustrant la superposition du plan et d'un certain produit cartésien numérique.
— Codage d'un déplacement.
— Recherche du déplacement connaissant le point de départ et le point d'arrivée.
— Coordonnés du point de départ.
— Coordonnés du point extrémité.
— Applications : Translations, Symétries.
Travaux, effectués éventuellement sur papier calque, comportant :

- Recherche de l'image.
- Recherche de l'antécédent.
- Recherche du codage de la transformation.

Application à l'étude de figures géométriques simples.

II. 8 *Henri PONTIER*

A PROPOS DE TRIANGLES, RECTANGLES, ...
• Points fixes, points variables
• "Constructions - Equations"
• Fonctionnement de symétries-points et de translations

Le commentaire des activités est en italique.

OBJECTIFS EXPLICITES FONDAMENTAUX :

a) Utiliser des correspondances relatives aux sommets et aux milieux des côtés d'un triangle pour faire FONCTIONNER :

1 : le théorème sur le segment qui joint les milieux de deux côtés d'un triangle,

2 : (éventuellement) les caractérisations classiques du parallélogramme,

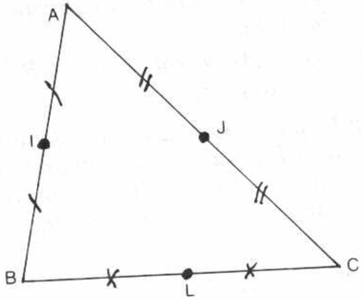
3 : des symétries-points et des translations, QU'ELLES AIENT ETE OU NON *PREALABLEMENT ETUDIEES, QU'ELLES SOIENT* OU NON *DESIGNEES PAR LEUR NOM (ceci peut être l'une des activités qui, ensemble, introduiront la translation),*

4 : des homothéties, non désignées comme telles mais comme "agrandissement" ou "réduction", évidemment sans aucun souci d'étude antérieure préalable, dans les cas simples où le rapport est 2 ou $\frac{1}{2}$ *.*

b) Montrer que les "constructions" sont des problèmes "d'équations" que l'on délimite à l'aide de conditions, au besoin de plus en plus nombreuses.

c) Susciter, à partir d'une situation de base simple, une grande variété d'études ... qui convergent vers des résultats fondamentaux ... mais pas nécessairement à mémoriser aussitôt !

I. Figure de base : triangle et milieux des côtés



Activité 1 : B C

B et C sont donnés.
Construire divers triangles ABC.

Etude dans "le plan".

Question 1 : Quel est l'ensemble de tous les points A possibles ?
Idem pour I et J.
[Pour I, par exemple, c'est tout le plan, aussi bien que pour A].

Question 2 : Préciser des relations entre points, par exemple :

$f : \mathrm{I} \mapsto \mathrm{A}$; $g : \mathrm{A} \mapsto \mathrm{J}$; $h : \mathrm{I} \mapsto \mathrm{J}$; ...

[Remarque pour $g \circ f$? Généralisation ? ... Mais ceci peut n'intervenir que plus loin ...]

Activité 2 : B et C sont toujours donnés.

Il s'agit d'être plus contraignant pour les triangles ABC.

Possibilité 1 : Exigences pour les côtés.
[Par exemple BA = ..., ou BA = BC, ou AB = AC, ou ...]

Possibilité 2 : Exigences pour les angles.
[Par exemple $\widehat{CAB}$ = ..., ou $\widehat{CAB} = \widehat{BAC}$, ou ...]

Si un élève impose $\widehat{BAC}$ = Constante ... il en appelle à "l'arc capable" ! Une étude expérimentale peut suggérer ces arcs. Une "démonstration" peut ensuite s'esquisser à partir de la donnée d'un théorème-clé tel celui comparant "angle inscrit" et "angle au centre". Mais le terrain est glissant (difficile) !

Le cas $\widehat{BAC} = 90°$ peut motiver, pour décider si la conjecture expérimentale est correcte, la donnée, ou une démonstration (p. 135), *du théorème sur "la médiane relative à l'hypoténuse", à moins que ce théorème n'ait été déjà vu.*

Possibilité 3 : Exiger d'emblée que tel point : A, I, ou J, appartienne à une ligne donnée (droite ou cercle pour simplifier, mais d'autres lignes et des figures plus complexes peuvent être traitées expérimentalement).

[Etude dérivée éventuelle : *Etude d'équivalences entre des conditions de chacun des trois groupes.*

Exemple : entre $AB = AC$ (groupe 1), $\widehat{CBA} = \widehat{BCA}$ (groupe 2), $A \in$ médiatrice de [BC] (groupe 3).]

• La "possibilité 3" paraît la plus riche et la plus féconde. Avant d'y aborder les cas généraux (si jamais ils sont abordés), des cas particuliers variés peuvent être traités par les élèves, individuellement ou par groupes, ... avec comparaison finale des résultats. IMPOSER PEU A CHAQUE ELEVE !

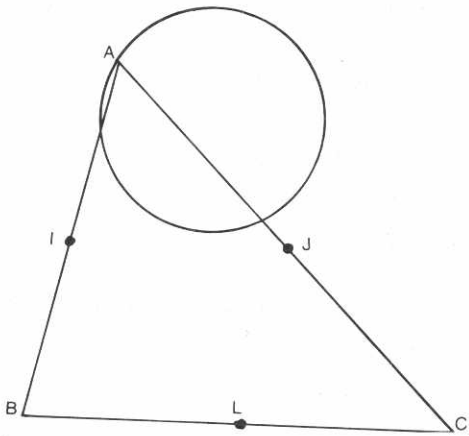
• Supposons choisie une condition pour A :

Question 1 : Tracer plusieurs triangles ABC et leurs points I, J.

Question 2 : Que dire de tous les points I possibles, de tous les points J ?

• [Il suffit généralement de cerner d'aussi près que possible, sans "étude réciproque", la façon dont le point considéré se déplace. Dès lors, éviter de parler de "l'ensemble" des points ...]

Par exemple :
A décrit un cercle donné



• [Des dessins soignés ou une bonne utilisation de résultats précis de l'activité 1 (question 2), permettent de conjecturer les réponses]

• [Les "démonstrations" sont de difficulté inégale, selon les choix faits pour A et selon la précision de la conjecture.

Il peut être préparé des "dessins de secours", sur des cas simples, suffisamment suggestifs pour aider les élèves en difficulté dès le départ. Il leur restera à "démontrer" dans ces cas, puis à transposer au(x) leur(s), ... voire à généraliser.]

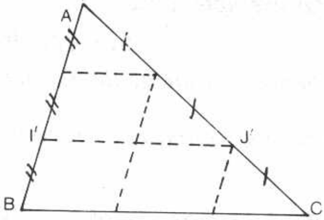
Question 3 : Reprendre *f, g, h* (activité 1, question 2) et comparer les dessins relatifs à A, I, J.

• [Décrire et démontrer ce qui se passe n'exige que des connaissances très élémentaires. La perception de la symétrie-point comme rotation de 180° peut être utile.]

• *[On sait que* g o f = t *, et que* t *est une translation — le mot n'a ici aucune importance, mais la façon de passer directement de I à J oui —.*

Il est possible de faire rechercher, *et justifier dans des cas simples, une généralisation.*

Par exemple, avec :



Activité 3 : B et C sont toujours donnés.

Imposer DEUX conditions à un même point : A, I ou J.

Exemple de question : Existence et détermination des divers triangles ABC possibles.

• *["Systèmes d'équations à inconnue A" avec, éventuellement, une "inconnue auxiliaire" I ou J]*

• *[Débattre du nombre de solutions se fait plus ou moins au fond selon les cas ...]*

Activité 4 : B et C donnés.

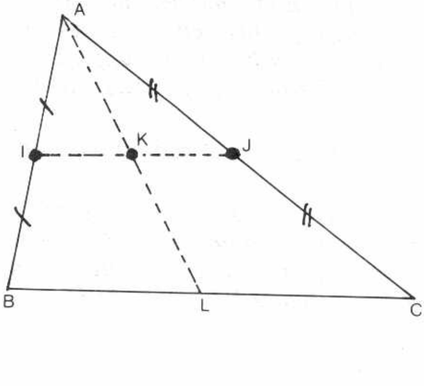
Imposer une condition à un point : A, I ou J, puis une condition à l'un des deux autres points ... etc.

[... ce qui conduit à se ramener à deux conditions relatives au même point ...]

Activité 5 : B et C donnés.

Imposer plus de deux conditions à A, I ou J, ...

Activité(s) 6 :



On peut retrouver une progression analogue d'activités (de 1 à 5, ...) en donnant, au départ, autre chose que B et C, par exemple I et J.

[En "activité 1", Q2, on pourra cette fois remarquer, avec ou sans le vocabulaire "technique" adéquat, que :

$$t_{\overrightarrow{BC}} = S_J \circ S_I \ldots]$$

[La correspondance entre A et L
permet d'introduire une autre symétrie ... et cette figure permet de "montrer" des compositions de translations et de symétries-points.
Par exemple, avec

$$S_K \circ t_{\overrightarrow{IJ}}, \quad B \mapsto A \ , \quad \text{et} \quad S_K \circ t_{\overrightarrow{IJ}} = S_I \ .$$

Quelle est l'image de C par $S_K \circ t_{\overrightarrow{IJ}}$? ...]

Etude à comparer : Triangle dont on connaît les milieux des côtés.

II. Etudes analogues à partir de rectangle, losange, cerf-volant

• *Théorèmes de base : caractérisations du rectangle, du losange, avec côtés et diagonales.*

• *Autre figure introduite : le "cerf-volant" (cf. page 68).*

• *Soit $ABCD$ un quadrilatère : rectangle, losange ou cerf-volant. Soit M le milieu de $[BD]$ et I celui de $[AB]$.*

Activité 1 : A et B sont imposés.

Que dire de tous les points C possibles ?
Que dire de tous les points D possibles ?
Que dire de tous les points M possibles ?

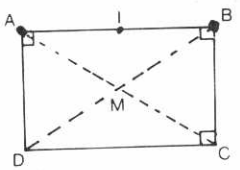


fig. I

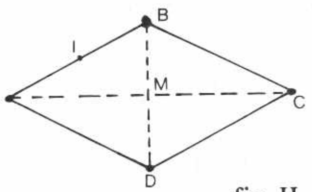


fig. II

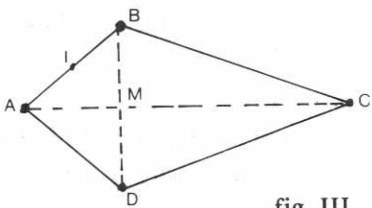


fig. III

• *On peut, pour les figures I et II, faire intervenir les milieux des côtés, ce qui multiplie les translations entre points remarquables et, comme pour le triangle éventuellement (voir plus haut), fait apparaître qu'elles sont des composées d'homothéties. De même, apparaissent des composées d'homothéties et de translations ...*

• *A noter, pour la figure I, en concurrence avec des translations, une éventuelle symétrie-droite ...*

• *Le II, pour M, loin d'exiger la connaissance du "théorème sur la médiane relative à l'hypoténuse", en fournit une démonstration (cf. aussi page 135) à l'aide du "théorème sur les milieux de deux côtés d'un triangle ". Ce même théorème joue, pour la figure III, avec ABD .*

Activité 2 : B et D sont imposés.

Que dire de tous les points A possibles ?
Que dire de tous les points C possibles ?
Que dire de tous les points I possibles ?

• *En faisant intervenir les milieux des autres côtés, on multiplie les translations entre points remarquables, et comme plus haut ou pour le triangle, on voit apparaître les translations comme des composées ...*

Une plaquette inter-IREM
de la commission inter-Irem premier cycle
présentée par cette Commission :

Quelques réflexions sur l'enseignement des mathématiques en quatrième et troisième (à propos des programmes de 1978)

Cette brochure ne représente pas l'avis de tous les I.R.E.M., mais est une juxtaposition d'écrits en provenance de certains d'entre eux et qui ont été rédigés avant la mise en place des nouveaux programmes de quatrième-troisième dans les classes.

Elle pourra être suivie d'une réflexion approfondie après mise en œuvre, réflexion qui donnera lieu à une publication inter-I.R.E.M.

★ ★
★

La présente plaquette voudrait vous aider à vous libérer de la tyrannie des commentaires autoritaires et de l'emprise des manuels. Il serait par conséquent regrettable que vous considériez son propre contenu comme une nouvelle bible. Les diverses contributions qui la composent sont d'ailleurs contradictoires entre elles.

Nous voulons montrer que plusieurs démarches sont possibles. Le choix proposé est encore trop restreint. Mais il pourra vous encourager à élaborer vous-même, de préférence en équipe, votre propre progression en prenant dans cette plaquette, dans les publications de l'A.P.M.E.P., dans les manuels aussi, les idées qui vous plaisent.

Nous aimons croire que cet encouragement, ajouté à votre expérience et à votre enthousiasme, vous aidera à bâtir VOTRE progression que vous serez heureux d'appliquer dans VOS classes pour le plus grand bien de VOS élèves.

Plaquette éventuellement disponible au siège de l'I.R.E.M. de votre Académie.

TROISIEME PARTIE

ACTIVITÉS A DOMINANTE « COMPORTEMENTS ET MÉTHODES »

III. 1 *Régis GRAS*

D'UNE CLASSIFICATION D'OBJECTIFS OPERATIONNALISABLES... A DES EXERCICES DIVERS DU PREMIER CYCLE..., OU

COMMENT METTRE LE PROJECTEUR SUR DES ASPECTS DE NOTRE ENSEIGNEMENT

(Travaux de Régis GRAS, ou de ses équipes de LANESTER ou de VANNES)

Régis Gras et ses équipes de l'I.R.E.M. de Rennes insistent sur les trois moments de toute activité mathématique :

«• Un premier, qui donne un sens aux activités scolaires et fournit des motivations, des illustrations et des champs d'application.

Les élèves bricolent, manipulent, recueillent des observations, formulent les premières hypothèses relativement aux algorithmes de construction qui modélisent l'action de l'outil manipulé, soumettent, par des simulations et des prévisions, ces hypothèses à des confrontations effectives avec le réel.

• Un deuxième, où l'élève fait fonctionner les algorithmes de construction graphique ou numériques précédemment conçus et se montre capable d'exprimer ses actes au moyen d'images ou du verbe. Les constructions servent de terrain d'apprentissage au dessin et à l'organisation de calculs où soin et minutie s'imposent.

• Un troisième, au cours duquel l'élève opère au niveau du modèle mathématique, ou tout au moins où il précise dans quel cadre théorique il peut valider ses actions antérieures.

C'est dans cette phase, également, que le retour au réel, par le biais des applications, doit permettre à l'élève de mesurer l'efficacité accrue de la pensée sur l'action.

Bien entendu, ces trois types d'activités ne sont pas toujours séparés, dans les actions, ou la pensée de l'enfant, mais un temps doit être accordé, dans chaque thème, à chacun de ces moments, afin que tout élève vive sa propre aventure, construise ses propres schémas conceptuels, et enrichisse à son gré sa propre préparation à des orientations ultérieures très différentes.»

★ ★

★

«Ainsi, les situations sur lesquelles on choisit de baser l'activité mathématique doivent être assez riches pour que l'on puisse d'une part y trouver tous ces moments, d'autre part y satisfaire à un nombre suffisant de classes d'objectifs opérationnalisables figurant dans la classification d'objectifs utilisée par les groupes et décrite ci-dessous» (extrait de *Vers un enseignement par objectifs en mathématiques.* Régis GRAS - IREM de Rennes) :

Classe d'objectifs opérationnalisables	1 Heuristique	2 Traductif	3 Classificatoire	4 Calculatoire	5 Logique	6 Technique	7 Transfert	8 Critique	9 Prédictif
verbes d'action permettant l'opérationnalisation	bricoler chercher inventer créer émettre des hypothèses	observer et choisir analyser schématiser représenter décrire modéliser transposer	organiser classifier discerner ordonner analyser synthétiser identifier	dénombrer calculer appliquer un algorithme	prouver convaincre rédiger (pour être lu) tolérer déduire résoudre des problèmes	soigner la présentation d'un dessin ou d'un calcul se montrer précis, minutieux, méticuleux se montrer persévérant et organisé	appliquer construire un exemple, un modèle illustrer faire fonctionner	contrôler interpréter évaluer maîtriser la vraisemblance critiquer (contre-exemple) remettre en question valider, invalider, optimiser	estimer (approximativement) induire prévoir conjecturer

« Pour éviter toute ambiguïté et toute fausse interprétation, indiquons, en quelques mots, quel sens nous donnons aux qualificatifs des classes d'objectifs opérationnalisables :

1. Heuristique : recouvre ce qui est lié aux séquences de recherche, à vocation de découverte par l'élève.

2. Traductif : recouvre les activités de passage d'un langage dans un autre langage (langue maternelle, dessin, tableau, graphique, etc.).

3. Classificatoire : recouvre les activités de classement selon un critère, activités supposant éventuellement une perte d'information en faveur d'une identification classifiante.

4. Calculatoire : recouvre toutes les activités algorithmiques, portant essentiellement, en 1er cycle, sur les nombres, ce qui ne sera pas toujours le cas ultérieurement.

5. Logique : recouvre les activités de type hypothético-déductif. Le développement des qualités de raisonnement y est visé.

6. Technique : recouvre les activités où soin, minutie, précision, persévérance sont fortement sollicités.

7. Transfert : recouvre toutes les activités dites d'application où les champs de représentation sont différents : on y passe, en général, d'un modèle au réel où l'on utilise les résultats établis dans le modèle.

8. Critique : recouvre les activités où s'exerce... l'esprit critique, la comparaison d'un résultat par rapport à un référentiel ou un présumé.

9. Prédictif : recouvre enfin les activités tournées vers l'extérieur du champ perçu et prospecté, activités qui mettent en œuvre les facultés inductives de l'« apprenant » » (Régis Gras).

★ ★

★

A partir du travail fait par ces groupes de l'I.R.E.M. de Rennes (en particulier ceux de Lanester et Vannes), nous avons choisi certains exercices, que nous présentons ci-après, mettant, les uns ou les autres, en jeu, la plupart des objectifs ci-dessus précisés.

Mais chacun de ces exercices a une « dominante » pour son auteur.

Celle-ci peut changer selon la formulation de l'exercice, selon le contexte de la classe (ce qui a été fait auparavant, ... le comportement du professeur).

Parmi les « projecteurs de diverses couleurs » décrits par le tableau ci-dessus, chaque exercice a le désir d'en « allumer » fortement au moins un. Vous pouvez voir ce que cela donne si, sur le même thème d'exercice, en le transformant, on n'« allume » pas celui choisi par les auteurs, mais un autre, ou plusieurs autres.

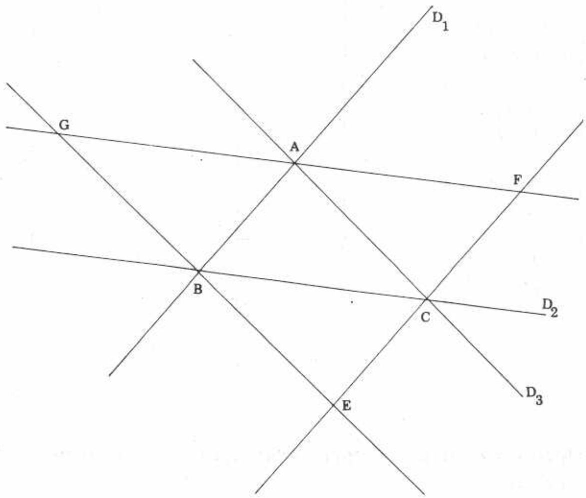
★ ★

★

Heuristique en quatrième :

• Soit une plaque carrée de 2,5 m de côté.
Une plaque rectangulaire MNPQ telle que MN = 0,5 (en m) doit tourner autour de son centre qui est aussi le centre du carré sans « sortir » du carré. Quelle est la valeur maximale de NP ?

• Voici une figure. Décris-la en exprimant en langage mathématique toutes les informations nécessaires à quelqu'un qui aurait à la refaire sans pouvoir la voir.



Ici aussi il est très enrichissant de demander à un élève de donner les informations à un de ses camarades du groupe (ne voyant pas le dessin, bien sûr) de façon que celui-ci réalise le dessin et l'on compare ensuite la figure obtenue avec le modèle.

Classificatoire :

• *Objectif : déterminer des critères qui conditionnent le nombre de solutions d'une équation.*

Prérequis : étude de la résolution d'équations, ou simplement notion de solution d'une équation :

Sans calcul, en observant les « égalités » ci-dessous, tu dois être capable de placer le numéro de « l'égalité » dans la (ou les) cases convenable(s) du tableau ci-dessous.

1 $x^2 + 1 = 0$
2 $3y - 1 = 0$
3 $25x^2 - 10x + 1 = -2$
4 $(3x - 2)(x - 5) = 0$
5 $3{,}2y - \sqrt{2} = -y\sqrt{3} - 2\sqrt{7}$
6 $x^2 = 0{,}25$
7 $a + 1 = a + 2$
8 $m^2 = 16$
9 $(k - 2)^2 = k^2 - 4k + 4$
10 $|z| = \dfrac{12}{3}$
11 $2(a - 3) - 2a = -6$

Equations dans

		N	Z	D	Q	R
nombre de solutions	*pas de solution*					
	une seule					
	deux distinctes					
	plus de deux					

Enoncer un certain nombre de remarques concernant l'ensemble des solutions d'une équation.

Calculatoire et technique :

- n *désigne un naturel.*
  - — *Si* n *est pair, on divise* n *par 2.*
  - — *Si* n *est impair, on multiplie par 3 et on ajoute 1.*
  - — *Puis on applique cette règle au résultat trouvé.*

    Quelle suite obtient-on pour n = *6 ?*

    n = *7 ?*

    n = *17 ?*

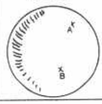
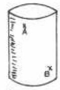
Que constates-tu ? Choisis toi-même d'autres nombres et trouve les suites correspondantes.

Heuristique puis critique :

Ici, du matériel est utilisé : les élèves peuvent se servir de balles, de cylindres de carton, de cônes, de ciseaux, etc. Au cours des manipulations, les élèves doivent répondre à différentes questions ; à ce niveau, il y a activité de type critique, dans le sens de comparaison d'un résultat par rapport à un référentiel ou à un présumé. L'élève est amené à contrôler, interpréter, valider ou invalider.

En t'aidant du matériel dont tu disposes, remplis ces tableaux

	Sphère 	*Plan* 	*Cône* 	*Cylindre* 
Nombre de grands cercles que je peux tracer, passant par le point A :				
Nombre de cercles que je peux tracer, passant par le point A				
Nombre de droites que je peux tracer, passant par A				

	Sphère 	*Plan* 	*Cône* 	*Cylindre* 
Nombre de grands cercles que je peux tracer, passant par A et B :				
Nombre de cercles que je peux tracer, passant par A et B :				
Nombre de droites que je peux tracer, passant par A et B :				

Puis on demande aux élèves de ne continuer les observations que sur les surfaces qui offrent la même réponse que « plan-droites ».

Transfert :

• *Pour augmenter le volume du lait, on peut le mélanger avec un peu d'eau, sans que cela se « voie » !*
Dans le cas suivant, peux-tu découvrir avec précision si le bidon contient du lait et de l'eau ?
Un bidon dont la contenance est 12 l pèse 1,2 kg quand il est vide et 13,5 kg quand il est plein (1 litre de lait pèse 1,03 kg).

Niveaux : tous
Contenu : masse, volume, utilisation de systèmes de deux équations à 2 inconnues (en troisième).

Critique :

• $$4 - 10 = 9 - 15$$

donc $$4 - 10 + \left(\frac{5}{2}\right)^2 = 9 - 15 + \left(\frac{5}{2}\right)^2$$

donc $$\left(2 - \frac{5}{2}\right)^2 = \left(3 - \frac{5}{2}\right)^2$$

donc $$2 - \frac{5}{2} = 3 - \frac{5}{2}$$

donc $$2 = 3$$

ce qui est, bien sûr, absurde.

Trouve l'erreur qui a été commise dans le raisonnement.

Objectif : faire découvrir, dans une chaîne de déductions, une fausse. Contenu mathématique ou prérequis :

Si $x = y$, alors $x + z = y + z$
Si $x = y$, alors $x^2 = y^2$

• (Niveau quatrième-troisième)

a et b sont deux réels.

$a = b$
donc $a^2 = ab$
donc $a^2 = b^2 = ab - b^2$
donc $(a - b)(a + b) = b(a - b)$
donc $a + b = b$
donc $2 = 1$

• *On considère l'équation* $x^2 + x + 1 = 0$

Si $x^2 + x + 1 = 0$ *alors* $1 = -x - x^2$ et $x(x + 1) + 1 = 0$
alors $x(x - x - x^2) + 1 = 0$

$$\text{alors} \quad -x^3 + 1 = 0$$
$$\text{alors} \quad x^3 = 1$$

1 *est solution de l'équation* $x^3 = 1$, *donc* 1 *est solution de l'équation*

$$x^2 + x + 1 = 0$$

Es-tu d'accord ?

- *L'unité étant le cm, un élève a trouvé pour les côtés d'un triangle :*

  - AB = 5, BC = 3, AC = 1.

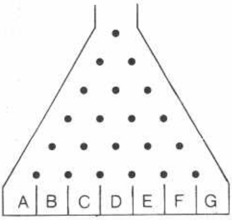
Est-ce possible ?

Prérequis : inégalité triangulaire.

Prédictif et Critique :

- *Un jeu : « planche de Galton »*

On s'aide d'un appareil réalisé avec une planche et des clous (cf. dessin). La distance entre deux clous voisins est juste assez large pour permettre à une bille de passer entre eux. La planche est inclinée et une bille peut se déplacer du haut de la planche vers le clou de la première rangée. La bille cogne ce clou, descend vers la seconde rangée, etc.



La bille termine sa course dans l'une des sept cases A, B, C, D, E, F, G.

1) Le jeu consiste à parier sur la case d'arrivée de la boule.

2) On fait un grand nombre d'expériences (exemple : 100) et on analyse les résultats trouvés.

a) Combien de fois la bille est-elle arrivée dans la case A ? Même travail pour les autres cases. REMARQUE ?

b) Essai d'explication des résultats trouvés. Nombre de chemins arrivant à la case A. Même travail pour les cases autres. Conclusions.

3) Aboutissement au triangle de Pascal (cf. p.183).

1	*1*					
1	*2*	*1*				
1	*3*	*3*	*1*			
1	*4*	*6*	*4*	*1*		
1	*5*	*10*	*10*	*5*	*1*	
1	*6*	*15*	*20*	*15*	*6*	*1*

Trouve la règle permettant de constituer ce triangle ; ensuite de prolonger ce triangle...

4) Je rajoute deux rangées de clous ; donne un nom à chaque case ; pour quelle case vas-tu parier ?

Contenu mathématique : cheminement sur un réseau, dénombrement.

BIBLIOGRAPHIE :

— Fichier « O.P.C. », IREM de Rennes ;
— *De l'action au concept — Géométrie en quatrième et troisième* IREM de Rennes ;
— *Vers un programme éducatif par objectifs en mathématiques* par R. Gras - IREM de Rennes ;
— Exposé présenté en séminaire IREM de Rennes le 27 mai 1977 sur « *l'action O.P.C.* » par D. Boisnard et R. Gras.

Recherches I.R.E.M. et publications A.P.M.E.P.

Parmi toutes les recherches suscitées, en géométrie premier cycle, par les difficultés surgies à l'occasion de la mise en œuvre des programmes de 1971, la recherche dite « O.P.C. » a, de 1973 à 1978, intéressé plusieurs I.R.E.M., cinq au départ, puis davantage.

La plupart des équipes O.P.C. refusaient la dichotomie affine-métrique, et avaient alors des programmes différents de ceux de 1971 (qui n'ont pas été pour autant exactement ceux de 1978).

Ces équipes ont conduit sur cette recherche une analyse que l'A.P.M.E.P. se propose de publier fin septembre dans le cadre d'un nouveau rayon de sa Bibliothèque de brochures, consacré à une réflexion sur les Recherches conduites dans les classes, rayon déjà ouvert par la publication, en 1978, de la brochure « Calculateurs programmables et algèbre de quatrième » et dont nous espérons qu'il s'enrichira rapidement de nouveaux ouvrages.

Un bulletin de souscription concernant la publication envisagée figurera dans le Bulletin A.P.M.E.P. à paraître à la mi-septembre.

III. 2 *Louis DUVERT*

UNE ANALOGIE DE RAISONNEMENT EN ALGEBRE ET EN GEOMETRIE

Il me paraît bon de ne pas laisser croire aux élèves qu'on ne raisonne pas de la même façon en géométrie et en algèbre. Il n'est peut-être pas superflu non plus d'en parler entre collègues, certains d'entre nous restant persuadés que c'est la géométrie seule qui apprend à bien raisonner, l'algèbre n'étant qu'une accumulation de mécanismes.

Voici des « parallèles » possibles, parmi d'autres :

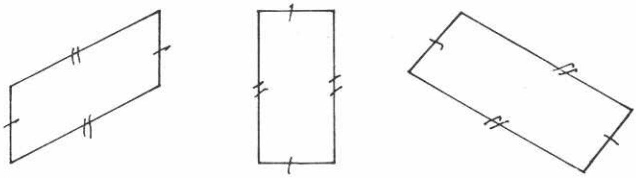
EXEMPLE 1

• $\boxed{A}$ Complète :

a	b	$\|a\|$	$\|b\|$	$\|a\| - \|b\|$	a + b	$\|a + b\|$
8	− 3					
16	− 5					
− 123	46					
250	19					

Que remarques-tu ?
La phrase
« Quels que soient les entiers[1] a, b, $|a| - |b| = |a + b|$ »
est-elle vraie ?

• $\boxed{B}$ Voici quelques quadrilatères ; chacun a deux de ses quatre côtés isométriques et les 2 autres aussi :



Que remarques-tu ?
La phrase
« Tout quadrilatère ayant ses quatre côtés 2 à 2 isométriques est un parallélogramme »
est-elle vraie ?

(1) ou "les décimaux", ou "les réels".

• $\boxed{C}$ **Comparaison**

Les deux réponses sont négatives. Un contre-exemple suffit à le ***démontrer :*** *a = 8 et b = 3, par exemple. Et, en géométrie, un « cerf-volant » (cf. page 68), sans même aller chercher des quadrilatères non convexes ; d'éminents collègues (et néanmoins amis, même depuis lors...) s'y sont laissés prendre, songeant uniquement à des côtés* ***opposés*** *2 à 2 isométriques ...*

EXEMPLE 2

• $\boxed{A}$ Complète :

t	$t + 2$	$t + 3$	$(t+2)(t+3)$	t^2	$5t$	$t^2 + 5t + 6$
2 – 5 – 12 8 0						

Que remarques-tu ?
La phrase
« Quel que soit l'entier[1] t, $(t + 2)(t + 3) = t^2 + 5t + 6$ »
est-elle vraie ?

• $\boxed{B}$ Voici 5 points A, B, C, D, E.
Construis les symétriques B', C', D', E' de B, C, D, E autour de A (ou autre formulation si on n'a pas encore parlé de symétrie centrale).
Mesure [BC] et [B'C']
[CE] et [C'E']
[EB] et [E'B']
[DC] et [D'C']
Que remarques-tu ?
La phrase
« Quels que soient les points A, M, P, les points M' et P' symétriques de M et P autour de A sont tels que M'P' = MP »
est-elle vraie ?

• $\boxed{C}$ *A partir de quoi le maître peut laisser discuter les élèves, introduire la notion de « contre-exemple », commencer à insinuer que le dessin n'apporte pas toujours la conviction intime, et ne démontre pas. Rien ne l'empêchera, plus tard, de démontrer ou de faire démontrer la dernière phrase de géométrie ; celle d'algèbre sera peut-être déjà à la portée des élèves.*

(1) ou "les décimaux", ou "les réels".

Marie-Claude CHATELAIN

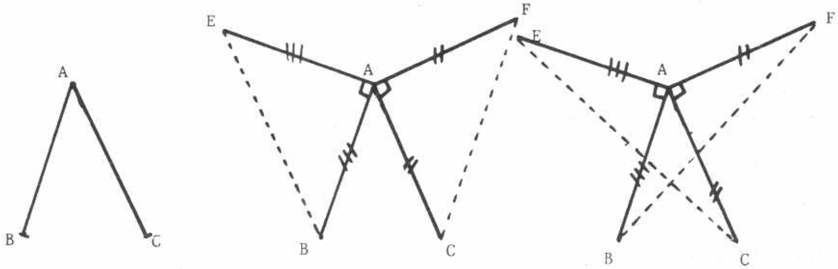
CONJECTURER

I. Exemples de conjectures

1ère SERIE : (dessins et expérimentation)

EXEMPLE 1 :

Réaliser peu à peu la figure suivante :



- Le dessin suggère que : (BF) $\perp$ (CE) .
  Avec d'autres triangles ABC, le dessin le suggère toujours.
- De là une CONJECTURE : A partir de tout triangle ABC , si E et F sont construits comme indiqué, alors (BF) $\perp$ (CE) , du moins le semble-t-il.
  Rien n'est encore "démontré", et c'est peut-être faux.
  [Cf. page 142]

EXEMPLE 2 :

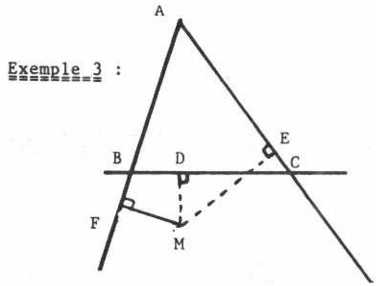
Soit deux points fixes A et B. On se limitera à un demi-plan de frontière (AB).

Placer, dans ce demi-plan, des points M tels que $\widehat{AMB} = 30°$.

- *Tous ces points semblent appartenir à un même arc de cercle : c'est une conjecture.*
  [Est-elle vraie ? Cf. page 119]

EXEMPLE 3 :

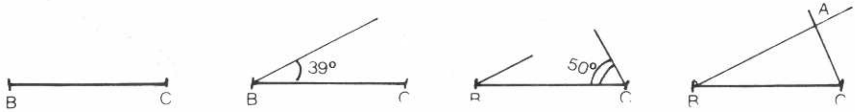
Le triangle ABC est donné.



Placer M pour avoir D , E , F alignés.
Les essais suggèrent que D , E , F sont alignés si et seulement si M appartient au cercle (ABC). Rien n'est démontré. C'est une conjecture.

EXEMPLE 4 :

(Tant que la somme des angles d'un triangle n'a pas été étudiée) Réaliser peu à peu la figure suivante :



Il semble que le triangle ABC obtenu est un triangle rectangle. C'est une conjecture (... qui se révélera incorrecte).

2ème SERIE :

(Appréciations ''pifométriques'' auxquelles celui qui les professe accorde un crédit certain qu'il fonde plus ou moins explicitement. Au lieu de dire ''conjecturer'', autant vaudrait ici dire ''hasarder'' un résultat)

EXEMPLE 1 :

Cf. *Géométrie, 1er cycle, tome II* (Brochure A.P.M.E.P.), texte de P. GAGNAIRE.

Soit A et B tels que, par exemple, AB = 3 (unité : cm).

On demande de tracer les cercles (A ; 8) , (B ; 5). Mais l'approximation des dessins fait en réalité réaliser les cercles (A ; 7,95) , (B ; 5). Du coup les cercles sont sécants (soient M et M′ les points communs).

Question : Donner un ordre de grandeur de la distance MM′. On peut répondre d'emblée, sans calculs, par une conjecture. Essayez...

A noter que le dessin, avec ses approximations, ne peut être que récusé pour apprécier si oui ou non la conjecture paraît fondée.

EXEMPLE 2 :

Quel temps nous faut-il pour compter jusqu'à 1 milliard ? ... Avancer rapidement un ordre de grandeur du résultat.

EXEMPLE 3 :

On fait subir 40 pliages à une feuille de papier. Indiquer rapidement un ordre de grandeur de l'épaisseur obtenue.

EXEMPLE 4 :

Combien existe-t-il de façons de faire asseoir dix invités autour d'une table, avec dix sièges numérotés ?

Indiquer un ordre de grandeur du résultat.

II. Prise en défaut de conjectures

① *Les estimations de la 2ème série s'y prêtent manifestement.*

Ainsi, quel élève de quatrième hasarderait que, pour l'exemple 1 de cette série, $MM' \simeq 2$? et que, pour l'exemple 4, le nombre de façons est 3 628 800 (c'est-à-dire : 10 !) ?

La "récompense" de l'inventeur du jeu d'échecs donne lieu à une remarque semblable (Cf. III exemple 4). On pourra alors reprendre l'exemple 3 ci-dessus qui se traite de façon analogue.

② *Autres exemples :*

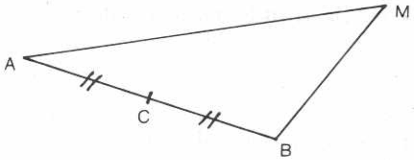
2.1 • Exemple 4 de la première série, dès que l'on connaît la somme des angles d'un triangle.

2.2 • L'orthocentre d'un triangle est-il à l'intérieur ?
Il suffit de laisser les élèves accumuler des dessins : c'est oui !
... Ils n'ont pas pensé au cas où un angle est obtus (ni au cas où un angle est droit)

2.3 • Comparer des nombres : 3 ; 6 ; 15 ; 20 ; ... à leurs carrés.
On pourrait en conjecturer que tout nombre est inférieur à son carré. Or c'est faux. Exemple : avec 0 ; 0,3 ; ... ; 1.

2.4 • Soit deux points fixes M et C, et deux points variables, A et B, symétriques par rapport à C.

Quand la distance AC augmente indéfiniment, que dire de $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}$ *?*

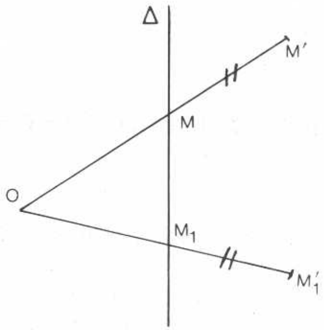


Habituellement, la conjecture est que cette somme "augmente".

$$\text{Or} \quad \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{2MC},$$

et cette somme est invariante !

2.5 • Dans le plan P, soit △ et O, fixes, donnés (et O ∉ △). Cf. figure ci-dessous.



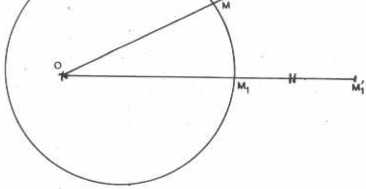
Soit l'application f ainsi définie :

$$f : \begin{cases} \triangle \to P \\ M \mapsto M' \end{cases} \quad \text{tel que} \quad \begin{cases} M \in [OM'] \\ MM' = a, \ a \text{ étant constant.} \end{cases}$$

Quelle est l'image de △ ?

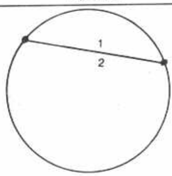
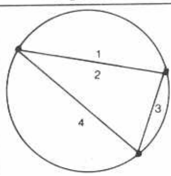
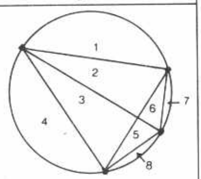
(Il s'agit d'une conchoïde de droite. L'étude est classique). Or, un dessin de △ "trop court" conduit à une conjecture erronée (les points M′ semblent se situer sur un arc de cercle).

• De même (Cf. figure) à propos des conchoïdes de cercle (Si l'on ne prend des points M que sur un arc "trop petit", les points M′ paraissent se situer, eux aussi, sur un arc de cercle).



- Les exemples précédents ont un autre intérêt : celui de détruire une "idée fixe" qu'induisent les diverses isométries et l'homothétie : à savoir que l'image d'une droite est une droite et que celle d'un cercle est un cercle [La "projection" est trop particulière pour être un contre-exemple efficace].
  Cf. dans cet ordre d'idées : Pages
  Cf. aussi l'utilisation de l'inversion (brochure A.P.M.E.P. *Géométrie au 1^er^ cycle, tome 1,* page 99)

2.6 • *Régions délimitées ...* (Dénombrement) :

Pour	1 point	2 points	3 points	4 points
		 	 	
	le nombre de régions délimitées dans le disque est :			
	1	2	4	8
soit	2^0	2^1	2^2	2^3

Continuer ! Alors que l'on s'attend à trouver la suite des puissances de 2, survient, à partir de 6 points, un déraillement...

2 . 7 •Il y a des "conjectures" qui sont autant d'erreurs classiques découlant, semble-t-il, d'une propension à croire "en la distributivité" : Ainsi quand on conjecture que $(a + b)^2$ n'est autre que $a^2 + b^2$, ou que $m(ab)$ n'est autre que $ma \times mb$, ou que $\sqrt{a + b}$ n'est autre que $\sqrt{a} + \sqrt{b}$.

Insistons sur l'intérêt des contre-exemples pour prendre éventuellement en défaut des conjectures...

III. Des conjectures vers les démonstrations

De nombreux exemples attrayants sont fournis entre autres par :

— les études de géométrie où interviennent des figures mobiles (points, droites, ...),

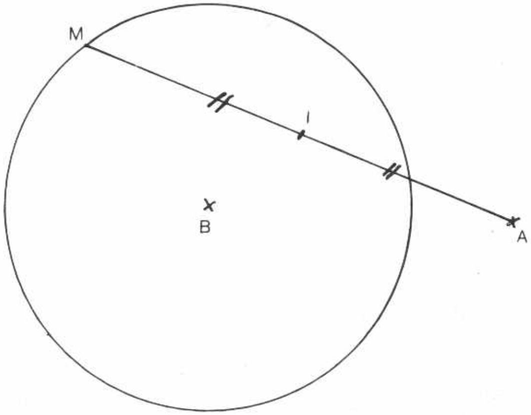
— les problèmes de calcul numérique, ou de constructions géométriques, qui se déroulent selon un programme répétitif.

En voici quelques-uns :

EXEMPLE 1 :

Données : Un cercle. Un point A.

Problème : M décrit le cercle. Que peut-on dire de tous les points I milieux des divers segments [AM] ?



Si un élève voit d'emblée l'intervention du milieu de [AB], de sa distance à I, ... il va démontrer aussitôt.

Sinon, il est possible de multiplier les positions de M *et de dessiner les points I correspondants (en mettant en évidence un axe de symétrie) avec un dessin précis, soigné.*

Dès lors, une conjecture doit apparaître *: les points I semblent appartenir à un certain cercle, apparemment centré au milieu de [AB].*

Soit O ce milieu, fixe. La conjecture met l'accent sur la distance OI. *Dès lors deux cas se présentent :*

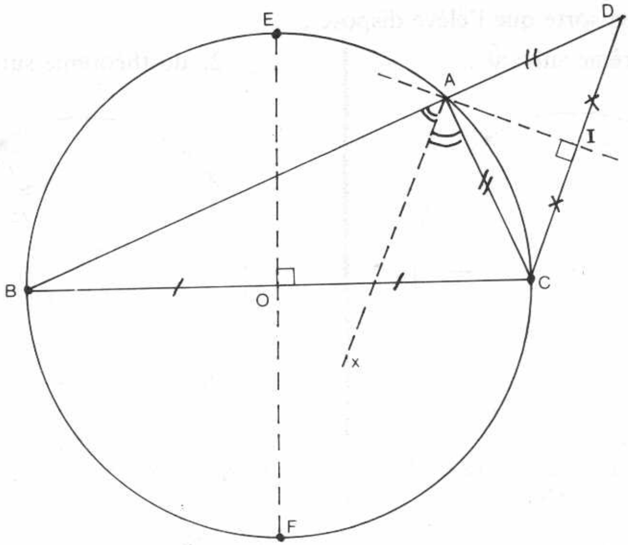
•• *Si l'élève connaît le théorème sur "le segment qui joint les milieux de deux côtés d'un triangle",* la démonstration s'ensuit.

•• Sinon, *ce problème conduit à s'interroger sur les propriétés d'un tel segment :*

- *ou bien ce sera l'occasion de les étudier,*
- *ou bien l'enseignant se contentera de les énoncer,*
- *ou bien l'élève les découvrira sur une documentation à sa portée.*

Dans les divers cas, la démonstration relative au problème posé sera donc possible à partir du théorème précité (dont l'utilisation demande encore un effort réel aux élèves de quatrième).

EXEMPLE 2 :



(• Exploitation, possible en quatrième, d'un exercice classique des programmes d'avant 1971, exploitation conduite cette fois en vue d'objectifs radicalement nouveaux.

• Cet exemple ne prend tout son intérêt que s'il n'a pas été précédé d'études "d'arcs capables" différents des demi-cercles.)

Données :
Soit un cercle de diamètre [BC] fixe, de centre O, et le diamètre [EF] perpendiculaire à [BC].
A est variable sur le demi-cercle $\widehat{BEC}$.

On prolonge [BA] d'une longueur AD égale à AC.
Soit I le milieu de [CD].

***Problème :* Que dire de tous les points D possibles ?**

L'étude est ici trop difficile pour éviter une expérimentation (multiplication des positions de A, ...) et l'étape des conjectures.

— Une difficulté : Que se passe-t-il quand A = B ? On peut alors montrer qu'il est logique de considérer la tangente en B : le fait d'étudier des positions de A très voisines de B y conduit.

— Deux indications précieuses : Quand A = E et quand A = C.

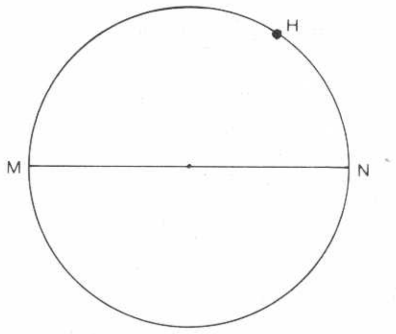
— D'autres positions de D incitent alors à la conjecture suivante : Les points D semblent appartenir au cercle de centre E passant par C.

Cela peut inciter à se préoccuper de la médiatrice de [CD] : Passe-t-elle bien par E ?

Entre divers moyens de permettre une démonstration, en voici un :

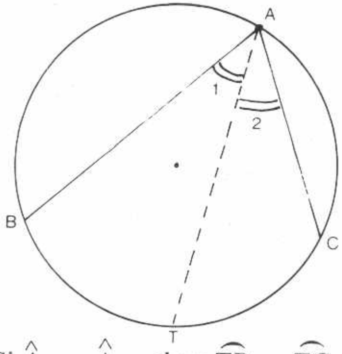
Faire en sorte que l'élève dispose :

1. du thèorème suivant :



Si H $\in$ cercle de diamètre [MN], alors (MH) $\perp$ (HN)

2. du théorème suivant :



Si $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$, alors $\overset{\frown}{TB} = \overset{\frown}{TC}$.

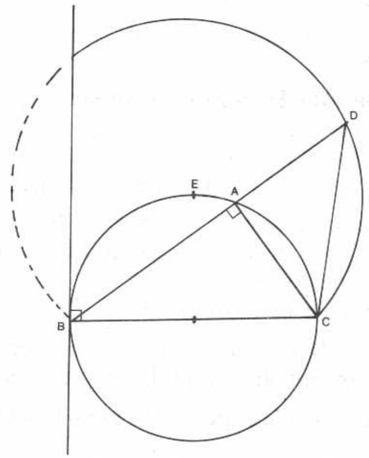
Il reste encore beaucoup à faire à un élève de quatrième, par exemple :

— *à découvrir, grâce à des symétries, que* $\overset{\frown}{BF} = \overset{\frown}{FC}$ *et que* $\widehat{CAI} = \widehat{DAI}$ *(1)*

— *à déduire de* $\overset{\frown}{BF} = \overset{\frown}{FC}$ *que* $F \in (Ax)$ *et que* $\widehat{BAF} = \widehat{FAC}$ *(2)*

— *à déduire de (1) et (2) que* $\widehat{IAF} = \frac{1}{2}\widehat{BAD}$, *et, donc, que* $(IA) \perp (AF)$ *(3)*

— *à découvrir que (AE)* $\perp$ *(AF), (4), et à déduire de (3) et (4) l'alignement de E, A, I.*



• *Commentaires.*

• *Une autre voie de démonstration peut copier de plus près la démarche traditionnelle (comparant "angle au centre" et "angle inscrit").*

• *Il semble inopportun d'envisager ici une "étude réciproque" : c'est déjà assez difficile comme cela ! D'autant que tout l'arc capable ne convient pas ... (voir figure du bas de la page 118).*

Le résultat n'a ici guère d'intérêt par lui-même. Sauf peut-être qu'il peut inciter à se poser des questions de généralisation [au lieu de $\widehat{BDC} = 45°$ *et* $\widehat{BAC} = 90°$*, envisager l'étude de points M tels que* $\widehat{BMC} = \mathrm{a}$ *associée à celle des points N tels que* $\widehat{BNC} = \frac{1}{2}\mathrm{a}$*].*

C'est la démarche suivie qui paraît présenter l'intérêt essentiel :

$\boxed{\textit{multiplicité de dessins soignés}}$

↓

$\boxed{\textit{conjecture}}$

↓

$\boxed{\textit{expressions variées de cette conjecture}}$

↓

$\boxed{\textit{utilisation de théorèmes connus, ou accessibles, ou fournis}}$

↓

$\boxed{\textit{problème de généralisation}}$

EXEMPLE 3 :

Supposons que les élèves de 4ème abordent l'étude de $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d}$

(après avoir vu que $\frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b}$ et que $\frac{1}{a} \times \frac{1}{b} = \frac{1}{ab}$) :

Première démarche : Recensement de produits du type $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d}$ que l'on sait écrire sous la forme d'un quotient :

• Comme $n = \frac{n}{1}$, $a \times c = (ac)$ s'écrit $\frac{a}{1} \times \frac{c}{1} = \frac{ac}{1}$ (1)

- $\dfrac{a}{b} \times b = a$. Donc $\dfrac{a}{b} \times \dfrac{b}{1} = \dfrac{a}{1}$ (2)

- $\dfrac{a}{b} \times \dfrac{b}{a} = 1$ (2')

- $\dfrac{1}{a} \times \dfrac{1}{b} = \dfrac{1}{ab}$ (3)

- *Comme* $a \times \dfrac{1}{b} = \dfrac{a}{b}$, $\dfrac{a}{1} \times \dfrac{1}{b} = \dfrac{a}{b}$ (4)

- Comme $0{,}5 = \dfrac{5}{10}$, que $0{,}03 = \dfrac{3}{100}$ et que $0{,}5 \times 0{,}03 = 0{,}015$, il vient :

  $$\frac{5}{10} \times \frac{3}{100} = \frac{15}{1000} \quad (5)$$

  De même, avec $0{,}5 \times 0{,}7 = 0{,}35$, il vient

  $$\frac{5}{10} \times \frac{7}{10} = \frac{35}{100} \quad (6)$$

  tandis que $0{,}5 \times 0{,}4 = 0{,}2$ conduirait plutôt à

  $$\frac{5}{10} \times \frac{4}{10} = \frac{2}{10} \quad (7)$$

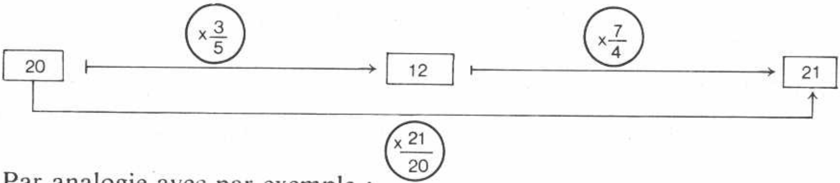
  mais on peut aussi écrire $0{,}5 \times 0{,}4 = 0{,}20$, qui conduit à

  $$\frac{5}{10} \times \frac{4}{10} = \frac{20}{100} \quad (8)$$

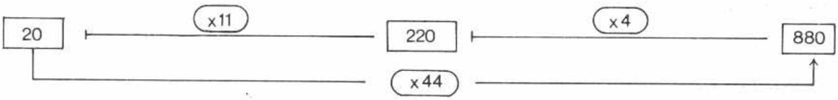
  Etc.

- Chaînes d'opérateurs :

  Ainsi :



Par analogie avec par exemple :



où l'on sait que $44 = 11 \times 4$,

on est conduit à poser $\dfrac{3}{5} \times \dfrac{7}{4} = \dfrac{21}{20}$

Deuxième démarche :

Les égalités (1), (3), (4), (5), (6), (8), et les chaînes d'opérateurs multiplicatifs, suggèrent une CONJECTURE, non démentie par (2), (2') et (7) :

Il semble que, quels que soient a et c ,
quels que soient b et d non nuls,

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

• *Si l'on dispose d'un calculateur programmable, il sera bon de réaliser un programme enregistré permettant de contrôler, pour autant de nombres que l'on voudra, la conjecture obtenue.*

Troisième démarche :

Démonstration : Par exemple, à partir de $\frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b}$, ou à partir du fait que $\frac{a}{b}$ désigne la solution unique de l'équation (d'inconnue x) :

$bx = a$ (quand cette équation n'a qu'une solution).

Remarques :

① Une progression analogue, sauf pour les chaînes d'opérateurs, peut être développée pour la somme de deux quotients.

② La multiplication du nombre d'exemples présentés sous le titre ''Première démarche'' ... risque de rendre inutile, aux yeux des élèves, toute démonstration : Ils sont déjà convaincus !

Ceci doit inciter l'enseignant à multiplier, tout au long des classes de quatrième et de troisième, les témoignages de prise en défaut de conjectures ''évidentes''.

EXEMPLE 4

''Récompense de l'inventeur du jeu d'échecs''

[Un grain de blé pour la 1ère case du jeu, 2 grains pour la seconde, 4 grains pour la troisième, 8 grains pour la quatrième, et ainsi de suite en doublant chaque fois. Il y a 64 cases]

Il s'agit donc de calculer $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \ldots + 2^{63}$
Désignons cette somme par x.

Exemples : $1 + 2 = 3$
$1 + 2 + 2^2 = 7$
$1 + 2 + 2^2 + 2^3 = 15$
$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 = 31$

Nous remarquons que les résultats successifs sont :

$$2^2 - 1 \quad ; \quad 2^3 - 1 \quad ; \quad 2^4 - 1 \quad ; \quad 2^5 - 1.$$

Conjecture : On devrait avoir $x = 2^{64} - 1$

Démonstration : $x = 1 + 2(1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{62})$
$= 1 + 2(x - 2^{63})$
$= 1 + 2x - 2^{64}$

D'où $x = 2^{64} - 1$

[Il est aussi possible de faire une démonstration par récurrence].

Remarque : $x \simeq 1{,}845 \times 10^{19}$

EXEMPLE 5

Etudier la somme

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \ldots$$

(où chaque terme est le produit du précédent par $\frac{1}{3}$) pour un nombre de termes aussi grand qu'on le voudra.

• *Essais :*

$$1 + \frac{1}{3} \simeq 1{,}333 \quad ; \quad 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} \simeq 1{,}444 \quad ;$$
$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} \simeq 1{,}481 \quad ;$$
$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} \simeq 1{,}4938 \quad ;$$
$$1 + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{3^5} \simeq 1{,}4979.$$

• *Etc. Un calculateur de poche, programmable ou non, permet de* conjecturer *facilement que la somme est de plus en plus voisine de 1,5 et le sera, semble-t-il, autant qu'on le voudra, pourvu qu'on prenne assez de termes.*

• Voici une *démonstration* :

Pour n termes, soit x leur somme.

$$x = 1 + \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{3^{n-1}}\right)$$

soit $$x = 1 + \frac{1}{3}\left(x - \frac{1}{3^n}\right),$$

ce qui est synonyme de $$3x = 3 + x - \frac{1}{3^n}$$

soit encore de $$2x = 3 - \frac{1}{3^n}$$

c'est-à-dire de : $$x = \frac{3}{2} - \frac{1}{2 \times 3^n}.$$

Il est possible, en quatrième, de concevoir que n peut toujours être choisi assez grand pour que 2×3^n soit aussi grand qu'on le veut et, donc, pour que $\frac{1}{2 \times 3^n}$ soit aussi voisin de zéro qu'on le veut.

Ce qui permet de démontrer la conjecture.

— Autres méthodes : Cf. Brochure A.P.M.E.P. *Géométrie 1er cycle. Tome 2.*

On trouvera des exemples analogues, "des conjectures vers les démonstrations", dans d'autres pages de cette brochure.

Cf. Index.

IV. Conjectures "ouvertes" :

S'agit-il de proposer aux élèves des conjectures encore "ouvertes", telle celle de FERMAT [Pour $n \in \mathbf{N}$ et $n > 3$ il n'existe aucun triplet (x, y, z) de naturels non nuls tel que $x^n + y^n = z^n$] ?

Plus probablement s'agira-t-il de problèmes *provisoirement* ouverts par insuffisance de connaissances disponibles ou de technique. Une documentation ou un savoir-faire adéquats les "fermeront". Il en va ainsi dans un certain nombre des exemples du III.

Citons-en deux autres.

EXEMPLE 1 :

Comparer $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3$

et $(1 + 2 + 3 + \ldots + n)^2$

Les exemples conduisent à la conjecture suivante : il y a égalité. Mais la démonstration est délicate en classe de quatrième.

[Une démonstration s'appuierait sur le calcul de chaque membre selon la méthode esquissée page 140].

. Une autre se développerait "par récurrence". Elle exige alors aussi le calcul de

$1 + 2 + 3 + \ldots + n \left(= \frac{1}{2} n(n+1)\right)$, et l'utilisation de $(a + b)^2 = \ldots$].

EXEMPLE 2 :

Considérons des triangles, rangés des plus petits vers les plus grands, qui vérifient le tableau suivant :

[Source : *Mathématique troisième,* G et J. ITARD, édition 1972, éditeur : Wesmaël-Charlier]

Rang des triangles considérés	Mesures des côtés des triangles			Différences pour la colonne 2 et pour la colonne 3	Nouvelles différences
	colonne 1	colonne 2	colonne 3		
1	1	0	1	4	
2	3	4	5	8	4
3	5	12	13	12	4
4	7	24	25	16	4
	… etc …				

Quelle est la nature de ces triangles ?

En quatrième, il faut se résoudre à conjecturer à l'aide de dessins.

La donnée de la relation de Pythagore permet de démontrer :

— facilement pour tous les exemples numériques,

— moins facilement (pour un élève de quatrième) dans le cas général (du "… etc …"), difficile à mettre en forme.

III.4

Henri PONTIER

RELATIVISATION D'ÉVIDENCES INTUITIVES

OBJECTIF :

Certaines propriétés paraissent évidentes dans les situations classiquès prévues par les programmes : Ainsi la conservation de l'alignement à propos des applications dans le plan. [Il n'y est question que de translation, symétries, projection]

Il s'agit de restituer ces propriétés comme étonnantes, tout en donnant l'occasion d'une activité mathématique nourrie.

I. Calcul algébrique

① • La classe de quatrième en arrive rapidement, HEUREUSEMENT d'ailleurs, à des ensembles de nombres tels que les équations en x du type $ax = b$, où $a \neq 0$, ont **une** solution, une et une seule. Il y a aussi une fâcheuse tendance à se limiter au premier degré.

• Sans doute est-il, au contraire, souhaitable de voir par ailleurs de temps à autre (sans doute pas systématiquement) **des exemples d'équations où il en va différemment :**

Exemple 1 : Soit un naturel (à citer), où manque un chiffre désigné par x. Déterminer x pour que le naturel soit divisible par ...

Exemple 2 : Equations en x du type $x^2 = a$, ou du type $|x| = a$.

Exemple 3 : Equations plus variées, telle : $x^3 - 9x - 6 = 0$.
Celle-ci peut s'étudier dès qu'on le veut, en quatrième, en liaison avec le tracé par points de la fonction f telle que $f(x) = x^3 - 9x - 6$. Il s'ensuit une recherche de solutions par approximations. (Pour tout cela, les calculateurs de poche sont précieux.)

N.B. Des exemples des types 2 et 3 peuvent venir de la vie pratique, des sciences physiques ou économiques, ...

Exemple 4 : Donner la table de multiplication, rapidement expliquée, de $Z/6$. Proposer ensuite, dans $Z/6$, une équation en x du type $ax = b$ (où $a \neq 0$).

Exemple 5 : Table classique des symétries (page 76).

② On sait que, dans les ensembles de nombres étudiés en quatrième, *si* $ab = 0$, *alors* $a = 0$ *ou* $b = 0$.

Or, *dans Z/6*, la table de multiplication montre qu'*il n'en va pas du tout de même* (alors que le théorème réciproque de celui énoncé est encore vrai).

③ *Autre activité de déconditionnement, sans doute plus compliquée, à proposer avec précautions (ou à ne pas proposer du tout en quatrième) :*

Soit E = { 0, 1, 2, 3 }, muni de lois + et × qui relèvent des tables ci-dessous :

+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	0	3	2
2	2	3	0	1
3	3	2	1	0

×	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	3	1
3	0	3	1	2

On peut vérifier que ces lois + et × "méritent" respectivement les noms d'addition et de multiplication : On y retrouve les propriétés classiques, dans **R** *(ou* **Q***), de ces opérations. [Cf : Structures, ... dans le second cycle]. Or, dans* **R** *ou dans* **Q***, pour tout x, et pour tout naturel n,*

$$nx = \underbrace{x + x + \ldots + x}_{n \text{ termes}}$$

Ici, c'est faux. Par exemple : $3 + 3 = 0$, *alors que* $3 \times 2 = 1$.

④ De même n'y a-t-il pas lieu de négliger *les équations à plusieurs inconnues,* en liaison avec les représentations graphiques des solutions, par points, dès qu'il s'agit de deux inconnues. Là aussi des exemples peuvent être empruntés à d'autres sources que le seul programme de mathématiques et on peut faire appel, pour certaines démonstrations "hors programme", à des documents (cf. page 14 ou 30).

II. Distances (Déconditionnement ...)

Il s'agit de mettre les élèves en situation d'apprécier les résultats classiques relatifs au cercle, et à la médiatrice d'une paire de points { A,B }.

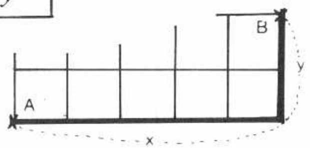
Pour cela, il est possible de faire appel à une distance non usuelle, la "taxi-distance" par exemple [En quatrième-troisième, toute théorie mathématique sur les applications-distances s'étant révélée inadéquate, cette "taxi-distance" ne présente pas d'autre avantage que le déconditionnement auquel elle provoque. Elle pourra donc être ensuite oubliée ...] :

On ne considère comme "POINTS" que les noeuds des quadrillages.

Unité : le carreau.

Etude de la distance d telle que :

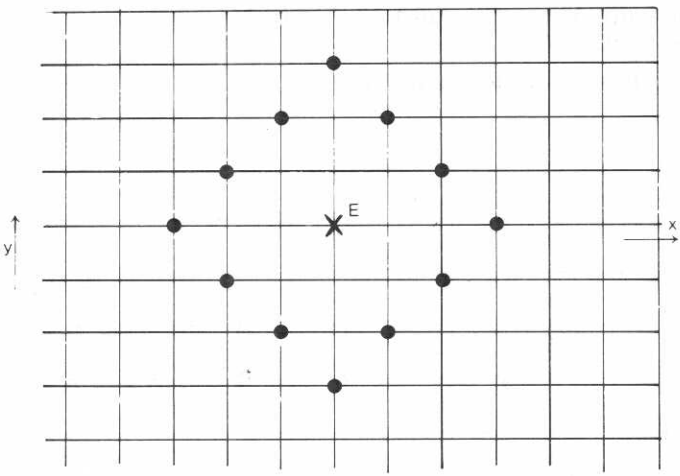
$\boxed{d(A,B) = x + y}$



(Sur ce dessin, $d(A,B) = 7$).

(Telle est la "taxi-distance").

***Exemple** : Points à la distance 3 d'un point E.*

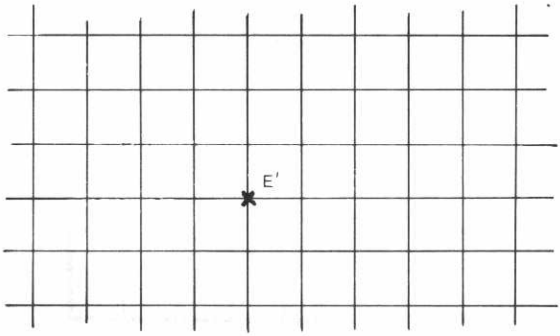


Comparer avec la distance usuelle.

EXERCICES : (à reprendre sur des quadrillages plus étendus)

① Soit un point E′.

Indiquer les points M *tels que* $d(E', M) = 4$:

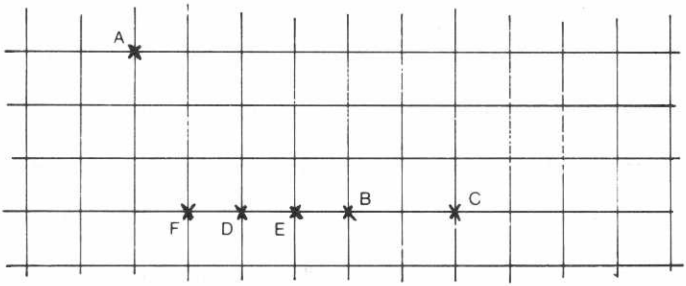


② A et B sont deux points donnés. Indiquer les points M tels que $d(A,M) + d(B,M) = d(A,B)$. (Cf. disposition ci-dessus)

③ Avec d'autres quadrillages, mais en gardant les dispositions de points indiquées, chercher les points M (nœuds de quadrillage) tels que :

$d(A,M) = d(F,M)$; $d(A,M) = d(D,M)$;
$d(A,M) = d(E,M)$; $d(A,M) = d(B,M)$;
$d(A,M) = d(C,M)$.

(Changer chaque fois de quadrillage).



Comparer avec la distance usuelle (''distance du double décimètre'').

III. Projection du milieu (Activités préliminaires)

Deux énoncés-clés, l'un relatif au parallélogramme, l'autre à la conservation du milieu par projection, peuvent, dès le début de la quatrième, fonder de nombreuses déductions.

• *La propriété de conservation du milieu peut, dans cette optique, gagner à être mise en relief par un certain nombre d'études préliminaires. Voici quelques propositions pour de telles études :*

Activité n° 1.

Dans **D** (en début de quatrième), prendre plusieurs fonctions ou applications. "Conservent-elles le milieu" ?

On peut, chaque fois, choisir des exemples numériques (prendre deux nombres, leur "milieu", et chercher ce qui se passe pour leurs images) :

— Si ces exemples poussent à répondre que le milieu est conservé, rien n'est acquis, sinon en démontrant.
— Un seul "contre-exemple" suffit pour infirmer la conservation du milieu.

Voici, en exemple, une série de telles applications ou fonctions :

$f : x \mapsto 3x$; $f' : a \mapsto a + 4$; $g : t \mapsto 3t + 4$
(N.B. $g = f' \circ f$).

$h : x \mapsto x^2$; $h' : x \mapsto \dfrac{1}{x}$; etc.

Activité n° 2.

Dans **D** (en début de quatrième), étude de $f : f(b) = |b|$.

• On peut tendre un piège en proposant des exemples avec des paires de nombres de même signe et leurs milieux.

• Contre-exemple en partant d'un positif et d'un négatif (distincts !). Ainsi, soit 8 ; − 6 ; et leur milieu 1.
Leurs images respectives sont 8 ; 6 ; 1 , et 1 n'est pas le milieu de (8;6).

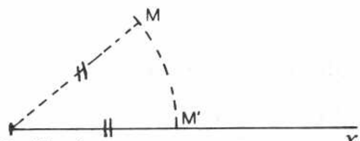
• Représentation graphique ?

Activité n° 3.

Dans le plan :

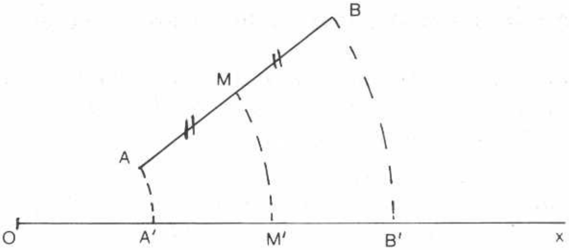
1. Application f :

M $\mapsto$ M′ selon figure



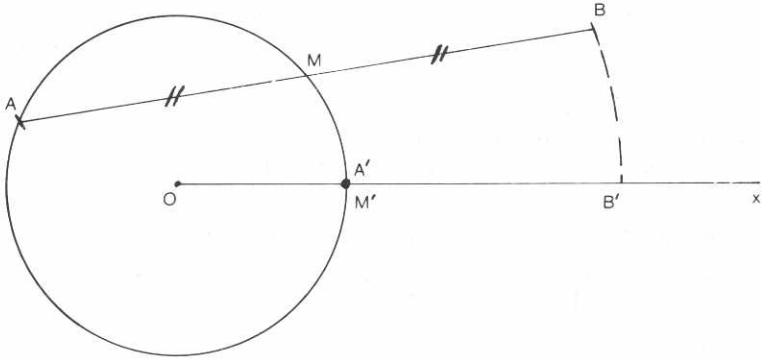
O (fixe)

(demi-droite fixe)



Question : Y a-t-il conservation du milieu ?

• ***Voici un contre-exemple :***

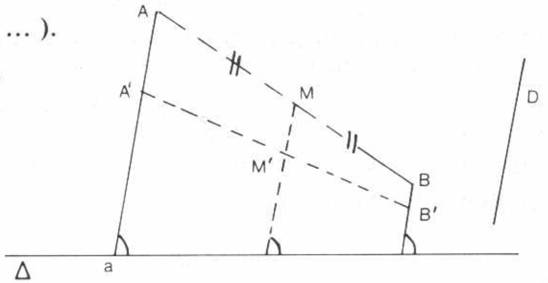


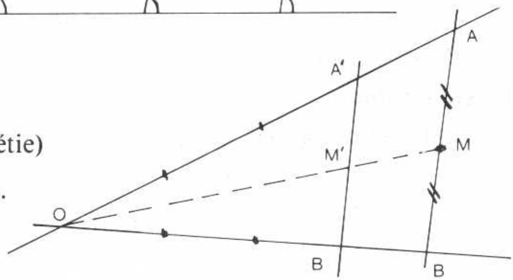
2. Application g : (affinité)

Sur le dessin : affinité d'axe $\triangle$, de direction D et de rapport $\frac{2}{3}$

($\overline{aA'} = \frac{2}{3}\,\overline{aA}$, ...).

Conjecture ?



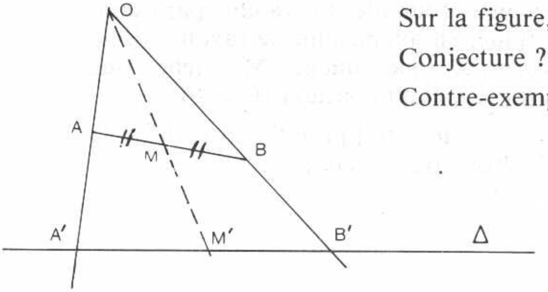


3. Application h : (homothétie)

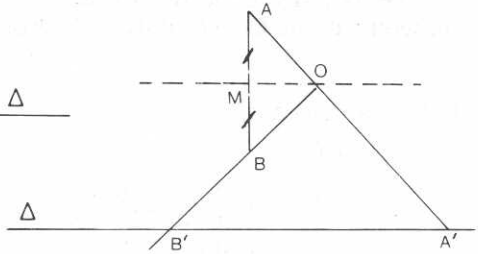
Ici $\overline{OA'} = \frac{3}{4}\,\overline{OA}$, ...

Conjecture ?

4. Projection "centrale"



Sur la figure, projection sur $\triangle$, de centre O.
Conjecture ?
Contre-exemple : (OM)// $\triangle$.



[N.B. Il ne s'agit plus d'une application].

5. Transport de papier calque (isométrie) :

Soit deux points A et B, quelconques, d'un dessin donné et leur milieu M. On calque et on reproduit le dessin dans une autre région du plan. Le fait d'être le milieu est évidemment conservé.

... Ceci peut donner l'occasion d'esquisser une approche des translations, des rotations, des symétries.

*

* *

C'est après de telles études préliminaires (il n'est pas nécessaire de les faire toutes et d'autres sont possibles) que l'on passera à la projection sur une droite selon une direction donnée et que l'on admettra la "conservation du milieu" dans une telle projection.

IV. Transformations dans le plan :
(Exemples de mise en garde)

Activité 1. Cf. brochure A.P.M.E.P. *Géométrie premier cycle. Tome 1.* "*Poussin échassier roulant une boule de neige*".

Il s'agit d'utiliser l'inversion, expérimentalement (ou avec un inverseur) pour montrer que tel cercle a pour image une droite, mais tel autre, un cercle, ... etc.

Activité 2. CONCHOÏDES

Ayant une balle, un ballon, je peux souhaiter l'agrandir, par exemple, en conservant sa forme sphérique, en augmentant le rayon. Alors, pour tout M de ma surface, j'ai une image M′ telle que OM′ = OM + k, O étant le centre et k étant constant ($k > 0$).

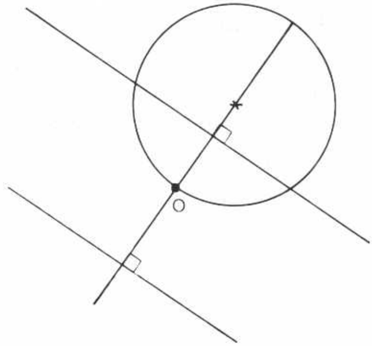
De là l'idée de la transformation suivante (qui est "en réalité" la recherche d'une CONCHOÏDE de droite ou de cercle) :

O fixe, k constant.

Avec M $\neq$ O,

$$M \mapsto M' \text{ tel que } \begin{cases} M' \in (MO) \\ O, M, M' \text{ dans cet ordre} \\ MM' = k \end{cases}$$

Transformer ce dessin (de "mobile" moderne) préalablement agrandi :



N.B. Il est possible de fabriquer un appareil simple qui réalise une telle transformation.

Activité 3. TRANSFORMATIONS DÉFINIES DE MANIÈRE ANALYTIQUE :

Soit f : $M\binom{x}{y} \longmapsto M'\binom{x'}{y'}$ x' et y' étant, sur divers exemples, définis par le tableau ci-dessous.

Questions :

— 1. Ensemble des M tels que M = M′.
— 2. Quelle est la transformée d'une droite ?
— 3. Eventuellement, quelle est la transformée d'une autre figure ?

	Exemples :	Les propositions précédées d'un "•" peuvent être établies tout de suite. Celles précédées d'un "••" pourront l'être grâce aux représentations graphiques de "$y = ax$" et "$y = ax+b$". Celles marquées d'un □ ne pourront l'être qu'avec des théorèmes postérieurs aux classes de troisième.
1	$x' = x+3y$ $y' = -x + \frac{1}{3}y$	• Un point invariant et un seul. •• Toute droite a pour transformée une droite.
2	$x' = x+y$ $y' = x+y$	• Un point invariant et un seul : O. •• Toute droite d'équation $x+y$ = Cte a pour transformée "un point". •• Tous les points de P ont leurs images sur la droite d'équation $y=x$. Conséquences ?
3	$x' = 2x+y$ $y' = x+2y$	•• L'ensemble des points invariants est une droite ($x+y = 0$). •• Toute droite a pour transformée une droite.
4	$x' = \frac{1}{3}x^2$ $y' = 2y$	• Deux points invariants. •• Etudier le cas particulier des droites parallèles aux axes. □ Cas général : une droite a pour transformée une parabole.
5	$x' = 4x$ $y' = \frac{1}{y}$	• Deux points invariants : $(0, -1)$ et $(0,1)$. • Attention : Il ne s'agit pas d'une application de P dans P. •• Etudier le cas particulier des droites parallèles aux axes. □ Cas général : une droite a pour transformée une hyperbole.
6	$x' = 4x+y$ $y' = 2x+\frac{1}{2}y$	Cf. exemple 2. Voir le rôle de $4x + y$ = Cte et voir que $y' = \frac{1}{2}(4x+y)$. Relation $y' = \frac{1}{2}x'$
7	$x' = 2x-y$ $y' = \frac{1}{3}x+1$	Cf. exemple 1.

Conclusion : **Vers les transformations usuelles :**

Un certain nombre d'applications de l'espace dans lui-même, ou du plan P vers le plan P, par exemple la rotation, peuvent être associées à des déplacements de solides indéformables.

(Attention : "l'application" mathématique considère l'état initial et l'état final et non pas le "mouvement" intermédiaire).

Il s'ensuit que les alignements, les distances, ... sont alors conservés.

Les mises en garde précédentes, ou d'autres, devraient servir de contrepoids.

Elles devraient nous amener à ne pas tenir pour évidents que, dans une application de P dans P par exemple :

— l'alignement est conservé,
— la distance est conservée,
— l'ordre est conservé.

III.5

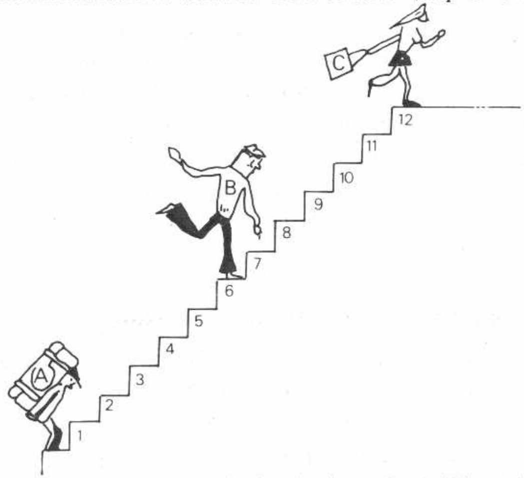
Catherine GODOVICI

DEMONSTRATIONS PAR ENRICHISSEMENT DE LA SITUATION

Exemple 1

Problème du "métro" conté par G. WALUSINSKI dans *Les bases des maths en classes terminales* (Ed. F. Nathan — pages 43-44).

« Un ami m'avait posé le problème suivant : « *Un habitué d'une station de métro a remarqué que s'il marchait à une certaine allure sur l'escalier mécanique, il comptait huit marches avant d'arriver à la sortie ; s'il marchait deux fois plus vite (en montant deux marches là où auparavant il en montait une), il comptait douze marches avant d'arriver à la sortie ; ne peut-il pas en déduire la hauteur de l'escalier (exprimée en marches) ?* »



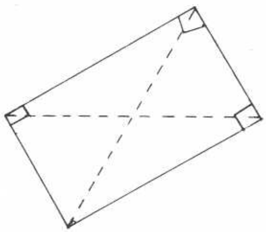
... Un jour, sans doute pris dans la foule du métro, j'imaginai trois hommes sur cet escalier : le premier A se laisse porter en restant immobile sur une marche, le second B monte des marches à la petite allure indiquée par l'énoncé, le troisième C monte des marches à l'allure rapide. Imaginons alors la situation des trois voyageurs, qui sont partis en même temps du bas de l'escalier, au moment où C arrive en haut de l'escalier. C est à douze marches au dessus de A, à 6 marches au-dessus de B. Or B aura compté huit marches quand il arrivera en haut de l'escalier ; par conséquent l'escalier monte de 6 marches pendant que B en monte deux. La hauteur totale de l'escalier est :

$8 \times 3 = 24$ marches (figure ci-dessous). »

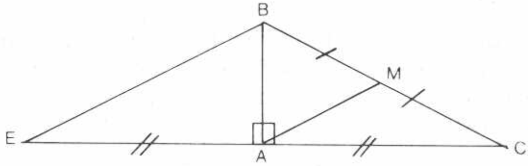
Exemple 2 **Triangle rectangle, hypoténuse, médiane...**

- Le théorème correspondant peut se démontrer à partir des "propriétés de la médiatrice" et du théorème sur la conservation du milieu par projection (ou d'un théorème dérivé plus fort).
- *Il peut aussi se démontrer en "doublant" le triangle rectangle :*

  — *soit en rectangle,* si l'on connaît la caractérisation du rectangle par les diagonales.



— *soit en triangle isocèle,* pourvu que l'on connaisse le théorème "sur le segment qui joint les milieux de deux côtés d'un triangle".



[Successivement :

$MA = \frac{1}{2}BE$. Or $BE = BC$. Donc $MA = \frac{BC}{2}$]

- Le théorème réciproque peut faire appel aux mêmes moyens.

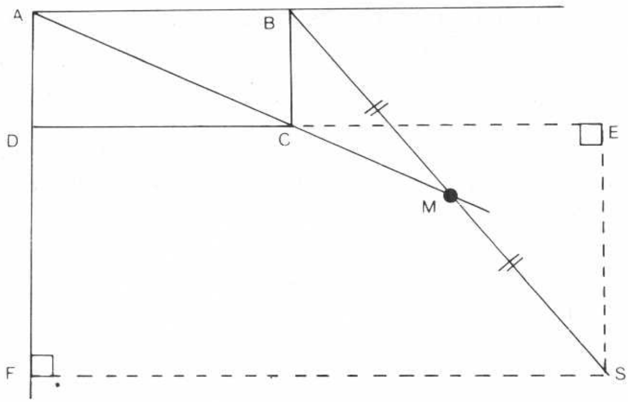
Exemple 3

D'après le *Livre du Problème,*

— *I.R.E.M. de Strasbourg, Tome 2, Ed. Cédic*

Données :

Rectangle ABCD, M sur (AC), puis S symétrique de B par rapport à M, E et F projetés de S sur... (cf. figure).



Conjecture :
E, M, F semblent alignés.

Principe d'une démonstration :
Compléter, pour [AF] , la symétrie par rapport à M. Utiliser ensuite un axe de symétrie du "grand rectangle".

- On peut aussi bien prendre le symétrique de C par rapport à M et utiliser alors une symétrie par rapport à la médiatrice de [AF].
- Dès que l'on dispose de l'énoncé de Thalès (établi en troisième, ou fourni en documentation en quatrième) il est possible de généraliser ceci à partir d'un parallélogramme quelconque ABCD (avec (SE) // (AD) et (SF) // (DC)).
- Ce serait plus simple encore si l'on disposait de la propriété de conservation de l'alignement par une symétrie axiale parallèlement à une direction quelconque.

Exemple 4

Données :

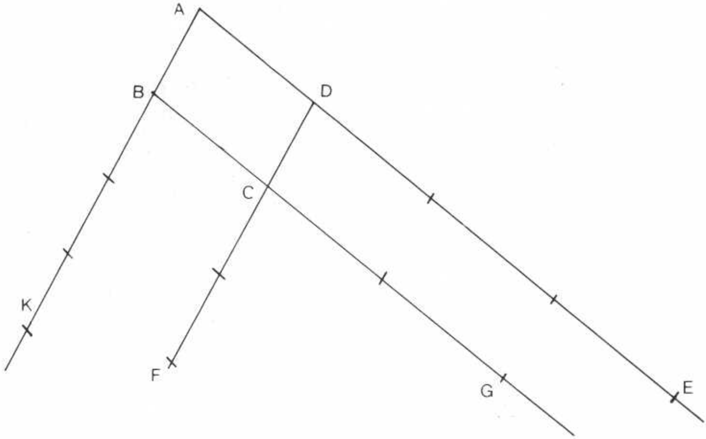
ABCD parallélogramme.

$$\left.\begin{array}{ll} E \text{ tel que } \overrightarrow{AE} & = 4\,\overrightarrow{AD} \\ F \text{ tel que } \overrightarrow{DF} & = 3\,\overrightarrow{DC} \\ G \text{ tel que } \overrightarrow{BG} & = 3\,\overrightarrow{BC} \\ K \text{ tel que } \overrightarrow{AK} & = 4\,\overrightarrow{AB} \end{array}\right\} \text{(Langage vectoriel non indispensable)}$$

Problème : Alignement de K , F , G , E ?

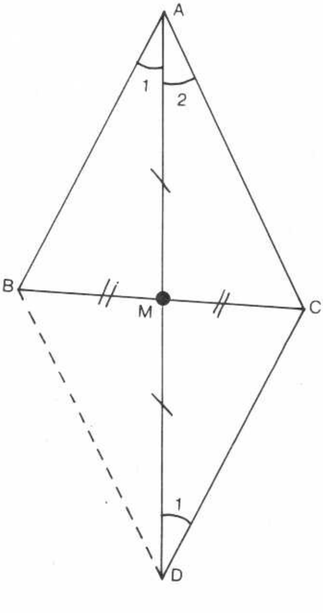
En quatrième, on peut, en complétant le dessin, se ramener à un problème de "trillage" (Cf. pages 172, ...).

N.B. : Une étude directe peut se faire par les moyens mis en jeu lors des trillages (caractérisations du parallélogramme, conservation du milieu par projection).



[La propriété de la symétrie axiale évoquée en fin d'exemple 3 ou, à défaut, l'énoncé de « Thalès-triangle » permettent une étude plus rapide. Si ABCD est un losange, la symétrie orthogonale par rapport à (AC) joue immédiatement].

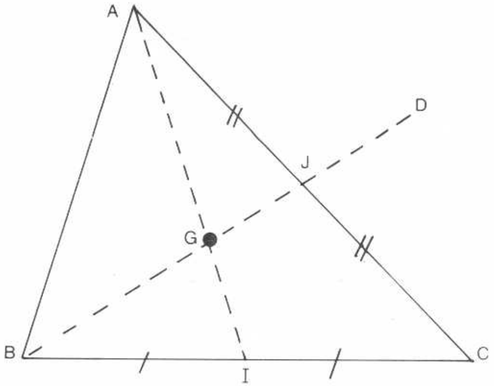
Exemple 5 **Triangle dont une bissectrice est aussi médiane.**



• *Compléter, comme l'indique le dessin, à l'aide d'une symétrie par rapport à M (d'où* $\widehat{A_1} = \widehat{D_1}$ *et* $AB = DC$*, puis* $\widehat{A_2} = \widehat{D_1}$*. D'où* $DC = AC$*. Etc.)*

• *L'idée de compléter ainsi, fort classique, provient sans doute de la considération du "chemin inverse" : le losange fournit une figure où apparaissent des triangles pour lesquels certaines bissectrices sont aussi médianes.*
Ici ABDC est... un losange.

Exemple 6 **A propos, en quatrième, du centre de gravité d'un triangle.**



Hypothèses :

I milieu de [BC],
J milieu de [AC].

Conjecture :

Il semble que GB = 2GJ. Ceci peut inciter à former 2GJ , pour le comparer à GB. D'où une *méthode de démonstration* dont voici le plan :

- Prendre D symétrique de G par rapport à J. Comparer les directions de (AG) et (DC).

- Ayant établi (AG) // (DC), projeter B,I,C sur (BD) parallèlement à (AG). Comme I est le milieu de [BC], G est le milieu de [BD] . Et BG = 2GJ.

Variante :

Obtenir D, non par symétrie, mais en projetant C sur (BG) parallèlement à (AG).

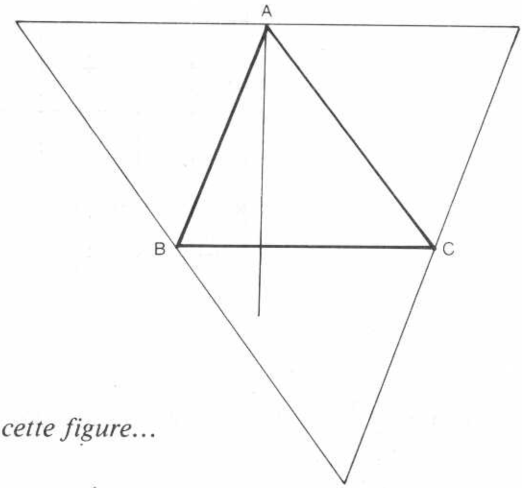
Il suffit alors de projeter d'une part B,I,C sur (BG) parallèlement
d'autre part A,J,C à (AG)

Autres méthodes utilisables en quatrième sans faire appel aux vecteurs :

— Associer K, milieu de [AB], à I et J.
ou — Associer E et F, milieux respectifs de [GA] et [GB], à I et J.
ou — Méthode par les aires (Cf. brochure A.P.M.E.P. *Géométrie 1er cycle, tome 2*).
ou — Méthode avec les coordonnées (page 148).
ou — ...

Exemple 7 **Les hauteurs d'un triangle sont concourantes**

— Très classique.



L'idée de la démonstration surgit d'un "chemin inverse" :

- *Considération d'un triangle DEF, de ses médiatrices, du "triangle des milieux des côtés" (pour lequel les médiatrices de DEF sont les hauteurs).*
- *Puis idée de reconstituer cette figure...*

Exemple 8 **Aires du triangle, du trapèze.**

Etudes classiques.

L'aire du triangle peut s'obtenir à partir de celle du parallélogramme qui le "double". (Cela vaut aussi pour le cas du triangle rectangle).

De même l'aire du trapèze.

Exemple 9 **Transformer en produit** $x^4 + 4$.

Etude classique.

On peut procéder par enrichissement :

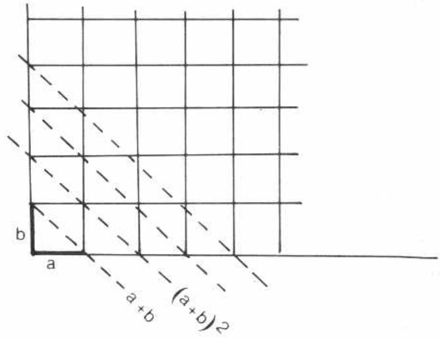
$$x^4 + 4$$
$$= x^4 + 4x^2 + 4 - 4x^2$$
$$= (x^2 + 2)^2 - 4x^2$$ *D'où la suite.*

[L'idée peut venir de la présence de $x^4 + 4$ *dans le développement de* $(x^2 + 2)^2$ *].*

Exemple 10 **Développements de** $(a + b)^2$, $(a + b)^3$, $(a + b)^4$, ...

On peut montrer que ces développements correspondent à des cheminements sur quadrillages et au triangle de PASCAL (Cf. pages 185-186).

D'où des développements immédiats ... (Celui de $(a + b)^3$ *pourra servir ci-dessous).*



Exemple 11 **Calcul de** $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots + n^2$

Voici une démonstration, classique, par appel à la puissance d'exposant immédiatement supérieur appliquée en cascade de $(n + 1)^3$ à 2^3 :

$$\begin{aligned}
(n+1)^3 &= n^3 + 3n^2 + 3n + 1 \\
n^3 &= (n-1)^3 + 3(n-1)^2 + 3(n-1) + 1 \\
(n-1)^3 &= (n-2)^3 + 3(n-2)^2 + 3(n-2) + 1 \\
\ldots &= \ldots \\
3^3 &= 2^3 + 3.2^2 + 3.2 + 1 \\
2^3 &= 1^3 + 3.1^2 + 3.1 + 1
\end{aligned}$$

Il suffit maintenant :

a) d'ajouter membre à membre ces égalités en tenant compte des simplifications provoquées par les termes qui se retrouvent dans les deux membres ;

b) de disposer de $1+2+3+\ldots+n = \frac{1}{2}n(n+1)$.

Nous obtenons successivement :

$$(n+1)^3 = 1^3 + 3(1^2 + 2^2 + \ldots + n^2) + 3(1 + 2 + \ldots + n) + n$$

$$\begin{aligned}
3(1^2 + 2^2 + \ldots + n^2) &= (n+1)^3 - (n+1) - 3 \times \frac{1}{2}n(n+1) \\
&= (n+1)[(n+1)^2 - 1 - \frac{3}{2}n] \\
&= \frac{1}{2}(n+1)(2n^2+n) \\
1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 &= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)
\end{aligned}$$

N.B. : ① Pour le calcul de $1 + 2 + 3 + \ldots + n$,

— ou bien méthode analogue à celle-ci à partir de

$$\begin{aligned}(n+1)^2 &= n^2 + 2n + 1 \\ n^2 &= (n-1)^2 + 2(n-1) + 1 \\ \ldots\ \ldots\ &\text{etc} \ldots\end{aligned}$$

— ou bien cf. méthodes analogues à celles des pages 174-175.

② La même méthode, à partir de $(n + 1)^4$, peut s'appliquer pour le calcul de $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3$.

③ etc.

Annexe (ou exemple 12)

Un problème de partage de chameaux (classique - provenance ?)

Un caravanier, sur le point de mourir, avait 3 fils qui auraient, dit-il à son intendant, à se partager ainsi son avoir en chameaux :

$\frac{1}{2}$ pour l'aîné, $\frac{1}{3}$ pour le second, $\frac{1}{9}$ pour le troisième.

Si l'intendant n'avait été chauve, il se serait arraché les cheveux : il y avait 17 chameaux !

Etant chauve, il fit mieux, réalisant le partage comme indiqué, et à la satisfaction des fils, exactement comme vous allez le faire...

[Le titre de ce groupe d'activités peut suggérer une méthode. On trouvera une solution dans cette brochure].

Emile BONNAFOUS

DES OUTILS POUR « DEMONTRER »

"Faire de courts raisonnements, à partir de faits géométriques considérés comme évidents et admis comme vrais"... [Ainsi s'expriment les instructions relatives aux nouveaux programmes. Elles le font à propos de l'enseignement de la géométrie mais cela vaut à propos des mathématiques dans leur ensemble.]

Mais ces "faits géométriques", que sont-ils ?

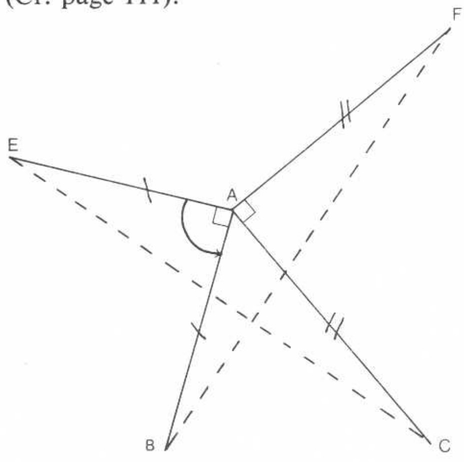
Des manipulations, éventuellement suscitées par des problèmes, réelles ou imaginées, mais toujours multipliées, conduisent à des observations et, de là, à des "faits géométriques" qui sont des propriétés expérimentalement évidentes dûment explicitées en langage mathématique.

Ceci vaut notamment à propos des transformations : translation, symétries, homothétie, rotation,...

En voici quelques exemples :

EXEMPLE 1 **ROTATION** (Exercice)

(Cf. page 111).



Données :

Deux segments [AB] et [AC].

Deux points E et F tels que l'indique la figure

(AE = AB, (AE) ⊥ (AB), etc.)

Conjecture :

BF = CE

(BF) ⊥ (CE)

Démonstration :

Envisageons une rotation de 90° autour de A (sens indiqué par la flèche).

Alors $\begin{cases} E \longmapsto B \\ C \longmapsto F \end{cases}$ et [EC] $\longmapsto$ [BF]

Explicitons les propriétés suivantes, de caractère évident :

- Dans une rotation, si [AB] $\longmapsto$ [A′B′], alors A′B′ = AB, quels que soient A,B,A′,B′.
- Pour une rotation de 90°, si [AB] $\longmapsto$ [A′B′], alors (A′B′) $\perp$ (AB) quels que soient A,B,A′,B′ (faire une figure).

D'où la démonstration pour [EC] et [BF].

EXEMPLE 2 CARACTERISATION D'UNE ISOMETRIE

Admettons que toute isométrie du plan correspond à un déplacement de calque (et réciproquement).

Dès lors, comment fixer un calque ?

Fixer un point ne suffit pas.

Fixer deux points distincts non plus (il reste la possibilité de retourner) mais fixer trois points non alignés suffit.

• D'où l'énoncé général : "Toute isométrie est déterminée par la donnée de trois points non alignés et de leurs images."

• *Si l'on conjecture, ou si l'on sait, que telle application est une isométrie, il suffit donc de trois points (non alignés) et de leurs images pour la préciser....*

EXEMPLE 3 SYMETRIE-DROITE

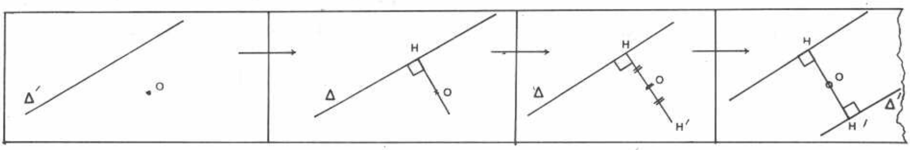
Admettons, ce qui paraît évident, que la symétrie par rapport à une droite △ correspond à un pliage autour de △ .

Dès lors la conservation des alignements de points, de la distance, des angles, est assurée. A partir de là, des démonstrations pourront se développer (Cf. article II.6).

EXEMPLE 4 SYMETRIE-POINT

Admettons l'énoncé suivant, évident à propos des points : "La symétrie par rapport à un point équivaut à une rotation de 180° autour de ce point."

De là le film suivant où O est centre de symétrie :



Dès lors, la conservation des alignements de points, des directions de droites, des distances, des angles, est assurée. Etc. (voir exemple 3)

EXEMPLE 5 TRANSLATION

Elle correspond expérimentalement à un glissement, dans le plan, sans modification des directions de droites.

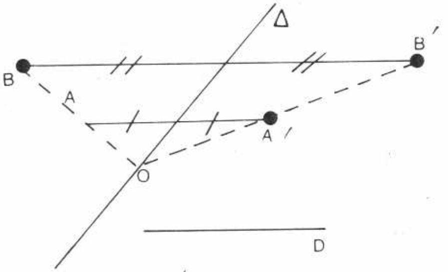
D'autre part, si A a pour image A′, si B a pour image B′,...

$$\begin{cases} (AA') \parallel (BB') \parallel \ldots \\ [AA'),\ [BB'),\ \ldots \text{ sont de même sens} \\ AA' = BB' = \ldots \end{cases}$$

Réciproquement, si ces propriétés sont vérifiées, il s'agit bien du type de glissement évoqué.

Il s'ensuit des "faits géométriques" évidents exprimant aussitôt ces constatations et à partir desquels pourront se développer des démonstrations de faits moins évidents. Dans cette optique, on sait aussitôt que toute translation est une isométrie, que l'image d'une droite est une droite parallèle,...

EXEMPLE 6 SYMETRIE-OBLIQUE

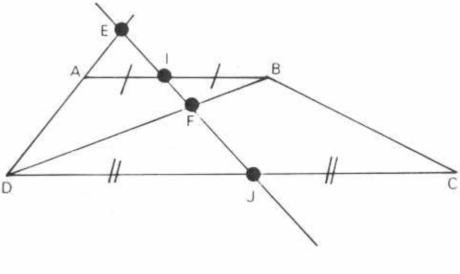


Soit une symétrie par rapport à △ selon la direction D.

Dessinons un rectangle "en perspective cavalière" : nous faisons un parallélogramme.

Examinons les ombres de rectangles avec leurs axes de symétrie (fenêtres à carreaux par exemple). Il s'en déduit un énoncé évident : *"La symétrie-oblique conserve les alignements de points"*.

Dès lors on peut démontrer une propriété classique, fort intéressante, du trapèze (non-parallélogramme) :



Symétrie-oblique d'axe (IJ) de direction (AB)

$A \longmapsto B$
$D \longmapsto C$ et ... vice-versa !
$E \longmapsto E$
$F \longmapsto F$

D'où : D,F,B, alignés, ont pour images C,F,A eux aussi alignés,
et D,A,E, alignés, ont pour images C,B,E, eux aussi alignés.

Conséquence : Dans tout trapèze (autre qu'un parallélogramme), les milieux des deux côtés parallèles, l'intersection des deux côtés non parallèles et l'intersection des diagonales sont quatre points alignés.

De même peut-on démontrer avec ce théorème que les médianes de tout triangle sont concourantes.

Béatrice BOUVIER

EXPLOITATION DE L'OUTIL "COORDONNÉES"

Etudiant des figures de géométries sans qu'aucun repère soit donné, on peut décider d'en prendre un et passer alors au langage des coordonnées.

*Les symétries, orthogonales ou centrales, la translation et l'homothétie (avec ou sans langage vectoriel) fournissent autant d'*exemples classiques *qui offrent l'avantage de montrer comment résoudre des problèmes concernant les transformations en agissant :*

— *soit dans le domaine du numérique (coordonnées),*

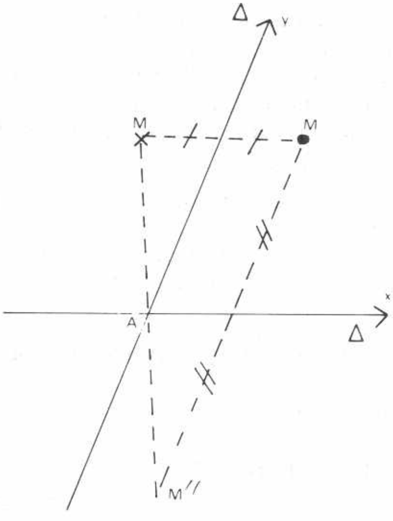
— *soit dans celui des figures elles-mêmes, sans coordonnées.*

C'est notamment le cas pour la composition des symétries et des translations (Cf. présente brochure), ...

Voici maintenant quelques autres exemples :

Exemple 1 Composition de symétries obliques :

① *Soit deux droites* $\triangle$, $\triangle'$ *concourantes en* A,
la symétrie oblique f *par rapport à* $\triangle$ *parallèlement à* $\triangle'$,
la symétrie oblique g *par rapport à* $\triangle'$ *parallèlement à* $\triangle$.



Etude de $f \circ g$:

$\triangle$ fournit, par exemple, l'axe des abscisses et $\triangle'$ l'axe des ordonnées. Soit M (x, y) quelconque dans le plan.

$$M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \xmapsto[g]{\quad} M' \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix} \xmapsto[f]{\quad} M'' \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$$

Donc A est le milieu de [MM''], et $f \circ g = S_A$ (symétrie par rapport à A).

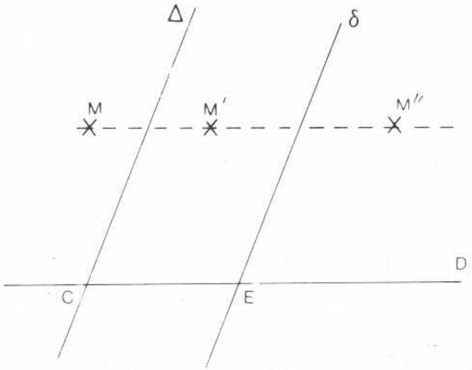
C'est donc le même résultat, aussi facilement acquis, que pour la composition de deux symétries orthogonales par rapport à deux droites perpendiculaires.

De même : $g \circ f = S_A$, $f \circ S_A = g$, etc.

On a la même table que pour $\{S_\Delta , S_\delta , S_C$, Identité$\}$ quand S_Δ et S_δ sont des symétries orthogonales dont les axes se coupent en C.

Ici aussi, on pourrait faire une étude sans coordonnées, à partir du parallélogramme.

② Soit à *étudier $f \circ g$ quand :*
g est la symétrie oblique d'axe $\triangle$ parallèlement à D,
f est la symétrie oblique d'axe δ (avec $\delta \parallel \triangle$), parallèlement à D.



On retrouve ici les mêmes possibilités que pour les symétries orthogonales, avec la même facilité (Cf. étude sur les symétries) :

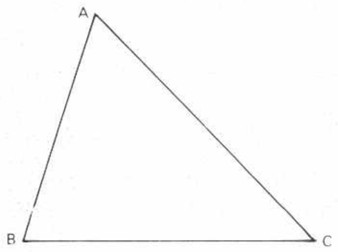
a) étude directe sans coordonnées
b) étude avec coordonnées
c) intervention de la symétrie oblique d'axe (CE) parallèlement à $\triangle$.

Résultat par a) , ou b) , ou c) :

$$f \circ g = S_E \circ S_C = t_{2\overrightarrow{CE}}$$

③ On peut, de même, étudier une composition de symétrie oblique et de translation, quand la direction de celle-ci est celle de la symétrie oblique. Cf. étude sur les symétries (pages 79-80) pour les diverses méthodes.

Exemple 2



[Pré-requis (ou bien il faut documenter là-dessus) : Traductions d'une égalité et d'une addition vectorielles en langage de coordonnées].

Soit à étudier *l'application f du plan,* ensemble de points, vers l'ensemble des vecteurs du plan, telle que :

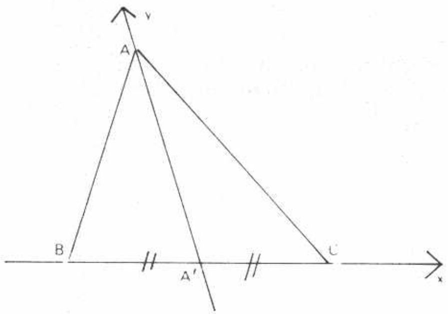
$$f : \; G \mapsto \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}$$

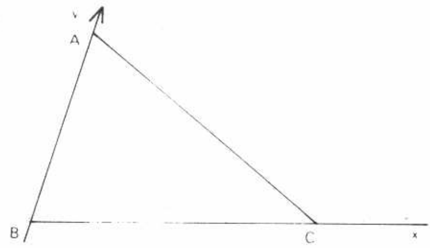
(A , B , C : points fixes donnés)

Pour que l'étude soit générale, aucune unité de longueur ne doit être pré-imposée au triangle.

C'est au contraire celui-ci qui fournira les unités.

Par exemple, voici deux possibilités :





Repère 1 :

C $\binom{1}{0}$, A $\binom{0}{1}$

Repère 2 :

C $\binom{1}{0}$, A $\binom{0}{1}$

Dès lors, avec G $\binom{x}{y}$, les coordonnées de $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}$ sont, *dans le repère 1 :*

$$\begin{pmatrix} -3x \\ 1-3y \end{pmatrix}$$

Problème : Résoudre l'équation à inconnue G, point du plan :

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$$

La réponse, immédiate, conduit au centre de gravité et au fait que les médianes de ABC y concourent.

Remarque 1 : Comparer avec un calcul dans le repère 2.

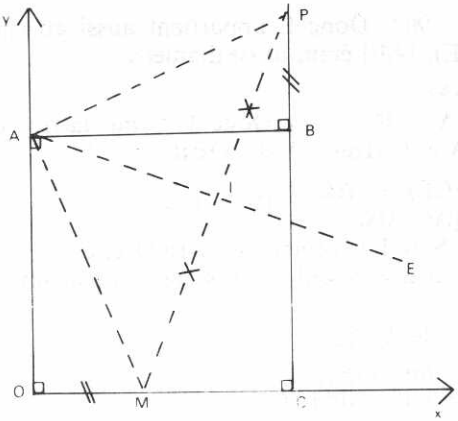
Remarque 2 : Voir de multiples autres méthodes, esquissées page 138, pour cette question du centre de gravité.

Exemple 3

Cf. figure. Carré OABC fixe.

Soit $\overline{OM} = \overline{BP} = a$ et I le milieu de [MP].

Problème : Etudier ce qui se passe pour I quand a varie.



Remarque :

- Quand $\overline{OM} = -\overline{OC}$, I = O
- Quand $\overline{OM} = \overline{OC}$, I = B
- Il est donc normal de privilégier soit O, soit B.

Repère choisi : (O, C, A)

Soit alors $\overline{OM} = x$

Sachant trouver les coordonnées d'un milieu..., il vient aussitôt :

$$x_1 = \frac{1}{2}(1 + x) \quad \text{et} \quad y_1 = \frac{1}{2}(1 + x)$$

D'où $x_1 = y_1$ et ... I ∈ (OB).

Remarque 1 : Un repère d'origine A ou C conduirait, pour I, à une relation du type $y = ax + b$ dont la représentation graphique ne peut être identifiable, en Quatrième, qu'à l'aide de documents.

Remarque 2 : Par contre, si on s'intéresse à E symétrique de A par rapport à I, comme E = C pour $\overline{OM} = 0$, c'est un repère d'origine C qui est le plus commode.

Remarque 3 : Sans coordonnées,

1. Dans une rotation de 90° de centre A,

O a pour image B
(Ox) a pour image (BP)
M a pour image P.

Donc AM = AP et $\widehat{MAP} = 90°$.

2. Le quadrilatère APEM a ses diagonales de même milieu,

$$AM = AP$$
$$\widehat{MAP} = 90°$$

C'est donc un carré.
A, P, E, M sont sur le cercle de centre I, de diamètre [MP].

3. Or $\widehat{MCP} = 90°$. Donc E appartient aussi au cercle précédent, et (AC) ⊥ (CE), [AE] étant aussi diamètre.

4. Conséquences :
   - Pour I, IA = IC, A et C fixes } Donc I ∈ médiatrice de [AC] (il s'agit de (OB))
   - Pour E, (CE) ⊥ (AC), [AC] fixe } Donc E ∈ ...

5. Remarque : Soit T le centre du carré OABC.
Après avoir étudié ce qui se passe pour I, on sait que O,T,I,B sont alignés.
Dans le triangle ACE,

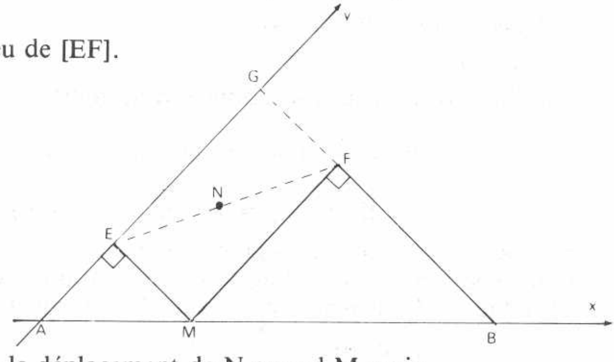
I est le milieu de [AE], T est le milieu de [AC] } Donc (CE) // (TI)

D'où la conclusion pour E.

Exemple 4

Données : A,B fixes et, dans le même demi-plan de frontière (AB), les triangles rectangles isocèles AEM et FMB (Cf. figure), construits avec M variable sur [AB].

Soit N le milieu de [EF].



Problème : Etudier le déplacement de N quand M varie.

Soit le repère (A,B,G). [G est fixe]. EMFG est un rectangle. Donc N est aussi le milieu de [MG] et $y_N = \dfrac{1}{2}$.

N se déplace donc sur la parallèle à (AB) qui passe par le milieu de [AG].

Remarque : On peut se passer des coordonnées en projetant G,N,M sur (AG) parallèlement à (AB). Le projeté de N est le milieu de [AG] et il est fixe. D'où le déplacement de N.

QUATRIÈME PARTIE

ACTIVITES A DOMINANTE NUMERIQUE

IV. 1

Gérard BONNEVAL

RECHERCHE D'ALGORITHMES ET PROBLEMES DE MINIMUM

Autres objectifs éventuels :

Révision sur multiples et diviseurs. Somme des termes d'une suite arithmétique.

I Le Savant Cosinus doit reproduire en 100 exemplaires un document dont les dimensions sont 5 cm et 9 cm.

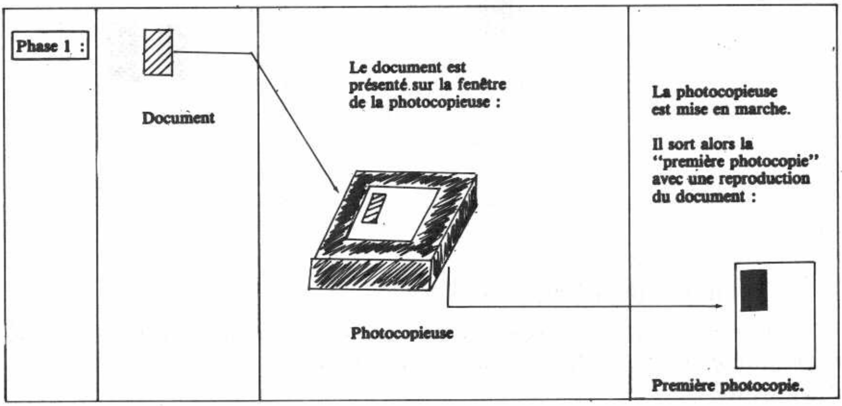
La photocopieuse disponible utilise des feuilles de papier de format 21 × 29,7 (dimensions : 21 cm et 29,7 cm).

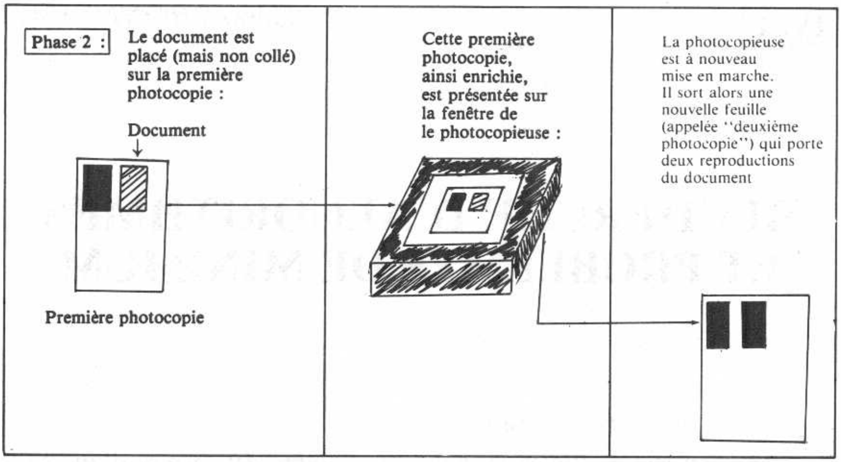
Le Savant Cosinus accepte d'obtenir sur chacune des feuilles plusieurs reproductions de son document : il n'aura ensuite qu'à découper.

Pour le moment, il n'envisage d'ailleurs pas de découper (ni de coller) quoi que ce soit avant d'avoir les cent reproductions.

Or il veut réduire le plus possible le nombre de fois où la photocopieuse doit fonctionner.

Il essaie ainsi :

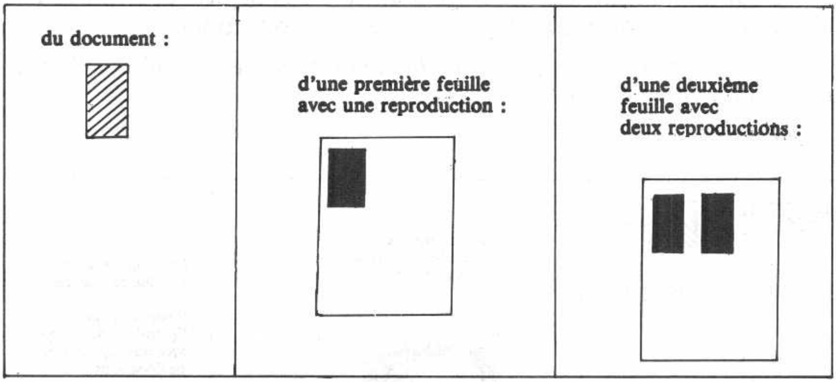




La première photocopie est retirée de la fenêtre, le document initial récupéré.

Faisons un premier bilan :

Le Savant Cosinus a fait fonctionner *2 fois la machine et il dispose maintenant :*



En tout il a déjà 3 reproductions.

Décrire la suite du processus. Etablir le nombre minimum de fois où la photocopieuse doit fonctionner pour obtenir les cent reproductions du document.

$\boxed{\text{II}}$ Le Professeur Sinus veut reproduire, en 600 exemplaires, un document de 7 cm sur 3 cm.

Il procède de la même façon que le Savant Cosinus, du moins le croit-il, et parvient à ses fins en faisant fonctionner 36 fois la machine. Le Savant Cosinus prétend qu'il aurait suffi de 35 fois. *Qu'en est-il ?*

$\boxed{\text{III}}$ Le Sapeur Camember, lui, ne se prive pas *d'utiliser très vite des ciseaux,* et de découper autant que de besoin. *Il déclare qu'il invente ainsi un procédé qui est le plus économique.* Et c'est vrai ! **Décrire et justifier ce procédé.**

LE TRAITEMENT DE TABLEAUX DE DONNÉES

Thème de travail permettant d'aborder ou d'utiliser des parties de cours du 1^er^ cycle relatives, particulièrement, à l'algèbre.

*

* *

De tels sujets permettent un travail d'équipes de professeurs : math, géographie, français, travaux manuels, parfois éducation physique, biologie, et ils peuvent être choisis en relation avec l'environnement de l'enfant.

**** Un exemple :***

Etude des activités du port de Bordeaux entre 1962 et 1975 (thème donné dans des classes de la région bordelaise, avant ou après une visite du port).

Le port autonome publie chaque année un fascicule sur le mouvement des bateaux et les importations du port. Il est donc possible d'avoir des documents.

Le professeur donne à chaque élève un dossier précisant les nombres de bateaux entrés, par pavillon, et par année, et les quantités importées pour chaque produit. (Voir deux tableaux ci-joints relatifs à une année).

Il est demandé aux élèves, répartis en groupes de trois ou quatre, de proposer des problèmes pouvant être traités grâce à ces tableaux de données. Lorsque le recensement des sujets est fait, chaque équipe choisit l'un d'eux ; il sera traité, rédigé et le dossier établi sera présenté à tous par la suite.

* Ce thème a été étudié, à Bordeaux, dans le cadre d'une expérience I.N.R.P., référence n° 73 02 9 01. Un rapport général paraîtra en mai 1979, sous le titre : «Mathématique du quotidien».

Classement des navires par pavillons

(1962)

(Extrait d'un tableau, d'une page, proposé aux élèves)

Tableau 1

PAVILLONS	NOMBRE DE NAVIRES ENTRÉS	%	TONNAGE DE JAUGE NETTE ENTRÉE	%	TONNAGE DES MARCHANDISES ENTRÉES	%	TONNAGE DES MARCHANDISES SORTIES	%
Français	1.517	51,56	3.005.114	60,70	2.138.521	61,16	1.574.931	70,33
Hollandais	473	16,10	220.317	4,45	192.388	5,51	139.798	6,26
Allemand	234	7,96	272.678	5,51	185.288	5,31	65.822	2,93
Norvégien	141	4,80	306.486	6,20	187.737	5,38	80.213	3,58
Anglais	140	4,76	187.140	3,76	182.270	5,22	131.838	5,88
Espagnol	77	2,62	55.734	1,15	43.604	1,25	26.052	1,16
Américain	76	2,60	353.167	7,15	71.373	2,05	28.566	
Suédois	72	2,45	124.014	2,51	88.442	[illegible]		
Danois	54	1,85	90.110	1,82	48.038			
Marocain	26	0,90	[illegible]506	0,26	8.[illegible]			
Finlandais		0,[illegible]		[illegible]	19.[illegible]			
R[illegible]					83[illegible]			

Importations

(1962)

(Extrait d'un second tableau, d'une page, proposé aux élèves)

Tableau 2

Produits d'origine animale.

Animaux vivants	1.798
Viandes et abats	2.307
Morue et autres poissons frais ou salés	23.145
Produits laitiers	1.263
Dépouilles d'animaux	1.214
Graisses et huiles animales	835
Peaux lainées	16.654
Autres peaux	1.528
Laines (brutes et lavées)	1.935
	50.679

Produits d'origine végétale.

Légumes frais et primeurs	19.63[illegible]
Légumes secs	
Agrumes	
Bananes	
Autr[illegible]	
C[illegible]	

Produits d'origine minérale.

Pyrites	65.839
Soufre	2.540
Amiante	10.549
Phosphates naturels	85.526
Autres minéraux	19.590
Matériaux de construction	12.262
Cendres de pyrites	2.360
Minerai de fer	108.621
Minerai de manganèse	5.556
Autres minerais	3.688
Houilles et brais	241.585
Pétrole brut	1.789.838
[illegible]roduits raffinés	168.842
[illegible]rivés du pétrole	1.401
	2.518.197

[illegible]uits fabriqués.

	18.801
	[illegible]7.145

Objectifs d'un tel thème :

En termes de comportements :

• développer une attitude critique devant une information fournie sous forme de tableaux de données, et sur les traitements qui en sont faits ;

• à partir d'un problème qui peut être d'origine non mathématique, développer des attitudes de recherche (recherche de questions, de travaux, de méthodes d'investigation) ;

• apprendre à l'enfant le travail de groupe, ce qui implique développement des moyens d'expression et de communication, sens de l'organisation et des responsabilités.

En termes pédagogiques :

développer des aptitudes à
• construire un tableau, le lire ;
• se poser des questions à son sujet ;
• rechercher des moyens pour répondre à ces questions ;
• traiter, interpréter, critiquer.

En termes mathématiques :

• approcher et préciser des notions :
partition, ordre, application, distance ;

• faire calculer dans **D**, dans **N**, dans **Q** ; travailler sur des grands nombres, sur l'ordre de grandeur ;

• réaliser des graphiques en vue d'une interprétation (importance d'échelles dans certains cas) ;

• sensibiliser aux phénomènes aléatoires, promouvoir un enseignement non déterministe.

Considérations d'utilisation du thème :

Ce thème nécessite une organisation des données, du fait de la complexité de celles-ci, et un certain nombre d'heures (10 h en moyenne). Aussi est-il préférable que les élèves soient déjà habitués au travail de groupe et que des vacances n'entraînent pas de longues interruptions dans le travail en cours.

L'emploi de machines permet d'éviter de fastidieuses répétitions de calculs.

Quelques détails sur le déroulement des travaux dans une classe

A la fin de la première heure, 17 questions différentes, à réponses non immédiates, sont relevées. Puis les groupes choisissent :

Groupe 1 : étude des importations d'animaux vivants, puis de viande ;

Groupe 2 : est-ce que le tonnage des bateaux français est à peu près le même chaque année ? Graphique.

Groupe 3 : est-ce que le tonnage des marchandises augmente régulièrement ?

Groupe 4 : quels sont les pavillons qui importent le plus de marchandises ?

Groupe 5 et 6 : est-ce que les arrivées de bateaux augmentent ou diminuent ?
est-ce que le port de Bordeaux diminue d'importance ?

Groupe 7 : comment varient les importations de pétrole ?

Groupe 8 : y a-t-il, chaque année, de nouveaux pavillons ?

La richesse des remarques, le temps d'organisation des groupes sont très différents. Les premières difficultés sont parfois péniblement franchies : prendre conscience de l'échec, de la nécessité de revenir en arrière pour prendre une autre direction, demandent du temps, de la méthode.

L'équipe 1 s'aperçoit que les données ne sont pas régulièrement signalées dans les tableaux. Après un travail nécessairement incomplet, l'équipe prend un autre sujet : étude des importations de morue, de sucre et de cacao.

L'équipe 5 a des ennuis avec les pourcentages : par rapport à quoi ? Comment comparer des pourcentages, pour en tirer une information valable ?

6 équipes sur 8 se lancent successivement dans les graphiques ; certaines choisissent des échelles, d'autres ne tiennent compte que de l'ordre.

Un groupe, après avoir conclu que le nombre des bateaux entrés diminue d'année en année mais que le tonnage augmente, décide d'étudier la variation du tonnage moyen des bateaux car « ils doivent être plus gros ? ».

Lors de la première synthèse, après 4 heures de travail de groupe, les questions posées aux rapporteurs des groupes par les élèves et le professeur portent surtout sur :

- l'intérêt d'utiliser des pourcentages ;
- l'intérêt de certaines représentations graphiques (en particulier, pourquoi des échelles ?) ;
- les pertes d'information ;
- des questions de positions géographiques ;

- l'importance de petits pays qui possèdent beaucoup de bateaux (une discussion s'engage sur les pavillons de complaisance) ;
- l'importance de certaines importations ;
- l'existence d'avant-port ...

La collaboration du professeur de géographie est précieuse.

De nombreuses questions de mathématiques sont précisées, ou évoquées par le professeur de mathématiques : rapports, valeurs approchées, applications, moyenne et moyennes partielles... ;

La baisse du nombre de bateaux entrés, étudiée sur 15 ans, est assez impressionnante. Un groupe demande : « Un port peut-il mourir ? » ;

Le groupe doit faire quelques recherches historiques. Le professeur profite de cette question pour susciter des questions de prévisions : « Peut-on prévoir ce qui s'est passé en 76 ? Il sera possible de vérifier ensuite auprès des services du port ».

Les équipes continuent ensuite leurs travaux ou envisagent des travaux complémentaires. Les graphiques terminés sont affichés. La communication entre les groupes est facilitée, suscitée.

Pour prévoir le nombre de bateaux entrés en 76, un groupe ne sait que conclure vaguement : « Il baissera ». Le professeur demande de préciser et aide à mettre en place une technique de recherche.

Graphiquement, une droite de tendance est finalement proposée. Une estimation est faite et les risques sont évalués à l'aide de deux parallèles à la droite de tendance délimitant une bande de plan incluant la majorité des points de la représentation.

La méthode fera « tache d'huile ».

Une sensibilisation aux probabilités sera faite dans une autre classe, du type : « Supposons que le 1er juillet 70, un bateau se présente à l'entrée du port ; quelle chance a-t-on pour qu'il soit anglais ? ».

Quelques remarques faites après expérimentations

Cet extrait d'un rapport d'expérimentation donne quelques principes d'utilisation pris par un groupe de professeurs lors de ce travail expérimental. Bien entendu, c'est un compte rendu d'un groupe ; une étude d'un traitement de données peut être organisée tout autrement.

Le travail de groupe

Les groupes d'élèves (trois ou quatre) se forment par affinités personnelles : cela facilite la communication, le choix et la répartition du travail, la recherche d'un rythme propre à l'équipe. Le travail de groupe ne *supprime pas le travail personnel : ce dernier se trouve stimulé par la responsabilité de l'enfant par rapport à son groupe et par la nécessité de la communication.*

En général, les heures utilisées sont celle des travaux dirigés par demi-classes. Le lancement du thème est suffisamment ouvert pour laisser l'enfant faire appel à son imagination, à sa créativité. Dans tous le cours du travail, le plus de liberté possible est laissée au groupe dans le choix de ses directions de travail, de ses méthodes de recherche, dans son organisation, dans son temps de réalisation ; tout ceci, bien entendu, dans le cadre du thème donné. Chaque groupe prend la responsabilité de son étude, responsabilité envers la classe et le professeur. Il doit réaliser un dossier, le plus complet possible, et il aura à exposer, à la classe, les résultats et les méthodes utilisées. Il sera donc amené à désigner un secrétaire qui centralisera les travaux et ordonnera leur présentation, et au moins un rapporteur. Pratiquement, le groupe reçoit une chemise dans laquelle se trouveront tous les travaux du groupe. Le dossier établi doit être tel qu'il puisse être consulté, utilisé par d'autres, peut-être par d'autres classes.

Les groupes, non soumis à un horaire déterminé, ont rapidement des plannings de réalisation très différents. Mais celui qui a travaillé une question réduite peut être amené à prolonger son étude, ou à prendre une deuxième question complétant la première. Deux ou trois groupes peuvent désirer, au début, prendre les mêmes sujets. Cela n'est pas un ennui, car, très vite, les méthodes de traitement, l'évolution de la question, différencient les travaux, et, en général, ces derniers se complètent.

Le rôle du professeur

Le professeur a un rôle d'animateur, de conseiller. Il donne un minimum de directives et intervient surtout à la demande des enfants, ou lorsque des erreurs sont à rectifier, des blocages à éliminer. Il n'est pas question de laisser un groupe prolonger une erreur, se perdre indéfiniment dans un travail sans intérêt. Mais une aide n'est apportée que lorsque les enfants ont pris effectivement conscience des difficultés et se sont efforcés de les surmonter. Il est nécessaire d'apporter des informations, d'aider à faire apparaître et expliciter des structures élémentaires mathématiques sous-jacentes.

L'emploi de structures n'apparaît, en général, qu'à la rédaction lorsque l'enfant veut préciser sa pensée. Si des notions mathématiques nécessaires ou utilisables sont signalées par des groupes, et sont mal connues des élèves, le professeur profite de la motivation pour traiter, devant la classe entière, des cours correspondants, par exemple : $(\mathbb{D}, +, \leqslant)$*, pourcentages, etc., et l'application de cet enseignement est immédiate dans des travaux relatifs au thème.*

C'est au professeur aussi d'intervenir, d'une part pour éviter la lassitude due souvent à des répétitions nombreuses des mêmes tâches, d'autre part pour changer les dimensions du travail. Le calcul numérique n'est *pas l'objectif unique, la construction de graphiques n'est pas un but en soi. Il est important de pousser les élèves vers un travail d'analyse, de synthèse, d'interprétation des résultats par rapport au milieu physique. Un moyen pour libérer des groupes de contraintes matérielles est de donner des résultats partiels ; par exemple, les résultats des calculs sur lesquels les enfants travaillent. Evidemment un travail préparatoire est à faire par le professeur, en particulier :*

- *prévoir, sans a priori, des développements possibles ;*
- *avoir des tableaux de résultats donnés par les dossiers de référence, ou obtenus à l'aide de machines à calculer (programmables, par exemple).*

Rôle des synthèses

Le travail dans le groupe est une première étape, mais ce travail doit profiter à tous les élèves de la classe. Donc, à partir d'un certain moment jugé opportun par le professeur, la communication entre les groupes est organisée. Le professeur donne à chaque groupe la possibilité de rendre compte de ce qu'il a fait et obtenu, de répondre aux questions et critiques des autres élèves et des professeurs, d'exposer ses projets, les prolongements ou les nouveaux travaux envisagés. Les synthèses permettent particulièrement de faire préciser les résultats, les buts de chaque équipe, l'expression dans les énoncés, de faire expliciter les structures mathématiques, préciser ou expliquer certains points mathématiques, comparer certaines études. Toute synthèse doit permettre, à chaque groupe, de faire le point et ensuite de prolonger la question initialement choisie, ou de compléter par un nouveau sujet. Ce sujet sera peut-être suscité par les remarques d'un professeur d'une autre discipline, présent lors d'un débat.

La dernière partie du travail a surtout pour objectifs :

- *l'interprétation des résultats, en particulier des graphiques ;*
- *la mise en évidence des structures élémentaires et des notions mathématiques ;*
- *la sensibilisation à la probabilisation et aux problèmes de décision ;*
- *la mise en forme.*

Après une synthèse, chaque groupe a la possibilité d'utiliser les idées, les méthodes, les résultats donnés par d'autres, de travailler avec un autre groupe. Il est souhaitable que, peu à peu, le travail de chacun apparaisse comme un apport à une réalisation de toute la classe, et ceci peut être réalisé par deux ou trois synthèses. Progressivement, des groupes travaillant des questions proches utilisent, réunissent leurs travaux. La dernière séance de synthèse présente un tableau général du problème et des résultats, sans pour cela être obligatoirement une fin. Des points de l'étude peuvent être repris ensuite, souvent comme motivation à une étude ultérieure, par exemple : notions de vecteur, linéarité, notions plus précises de statistiques, etc.

BIBLIOGRAPHIE

Pour plus de précisions ou *pour d'autres sujets de statistiques :*

— consulter le rapport sur l'expérience I.N.R.P., n° 73.02.9.01 « Mathématique du quotidien » :

23 sujets différents, certains demandant une enquête préalable des enfants, d'autres partant de tableaux de données, chronologiques ou non, relatifs à l'environnement de l'enfant, à ses sujets d'intérêt.

— consulter le paragraphe relatif à cette expérience dans le n° 300 du Bulletin A.P.M.E.P.

Nicole CHOUCHAN

UN PEU DE LOGIQUE A PROPOS D'ALGÈBRE

A

- Voici une phrase :
  Dans **N** , si $\underbrace{x^2=64}_{\mathrm{I}}$, alors $\underbrace{x=8}_{\mathrm{II}}$. Cette phrase est-elle vraie ?
- Voici une deuxième phrase :
  Dans **N** , si $\underbrace{x=8}_{\mathrm{II}}$, alors $\underbrace{x^2=64}_{\mathrm{I}}$. Cette phrase est-elle vraie ?

- Voici une phrase :
  Dans **R** , si $\underbrace{x^2=49}_{\mathrm{I}}$, alors $\underbrace{x=7}_{\mathrm{II}}$. Cette phrase est-elle vraie ?
- Voici une deuxième phrase :
  Dans **R** , si $\underbrace{x=7}_{\mathrm{II}}$, alors $\underbrace{x^2=49}_{\mathrm{I}}$. Cette phrase est-elle vraie ?

- Opérer de même avec les exemples suivants qui modifient ainsi I et II
  *[On opérera chaque fois dans un ensemble de nombres dûment précisé, **R** par exemple] :*

I	II	I	II	I	II
$a^2=100$	$a=10$ **ou** $a=-10$	$(x+3)(x-5)=0$	$x=-3$	$x-3=-5$	$x=-2$
$y^3=8$	$y=2$	$(a+3)(a-5)=0$	$a=-3$ **ou** $a=5$	$x+y=-3$	$x=1$ **et** $y=-4$
$b+2=5$	$b=3$	$(t+3)(t-5)=0$	$t=-3$ **et** $t=5$	$xy=36$	$x=4$ **et** $y=9$
$a+2=a+2$	$a=0$	$(a+4)+(a-2)=0$	$a=-4$ **et** $a=2$	$\|x\|+\|y\|=0$	$x=0$ **et** $y=0$
$x=0$	$x^2+5=0$	$(z+4)+(z-2)=0$	$z=-4$ **ou** $z=2$	$x=5$	$\|x\|=5$
$3a+2=0$	$a=-\frac{2}{3}$	$x\times 5=x\times 3$	$x=12$	$x\leq 5$	$\|x\|\leq 5$
$3(a+2)=0$	$a=-\frac{2}{3}$	$a\times(3+4)=28$	$a=4$	$a\leq 7$ **et** $b\leq 8$	$a\leq b$
$3t+4=0$	$t=0$	$t\times 3+4=28$	$t=4$	$y\leq 7$ **et** $t\leq 8$	$t\leq y$
$x+5=x+3$	$x=0$	$x\times(-3)=-24$	$x=8$	$x\leq 7$ **et** $a\leq 8$	$x\leq 7\leq a$

$\boxed{B}$ *Les phrases suivantes sont-elles vraies ? fausses ? Justifier les réponses. On pourra étudier ces problèmes dans* **R**, *puis éventuellement dans* **Z** *ou dans* **N**.

- $a+5=4$ est vrai pour tout réel a
- $y+3=y+3$ est vrai pour tout réel y
- $t+4=t+3$ est vrai pour tout réel t
- Il existe au moins un réel x pour lequel $x+4$ est différent de $x+3$
- Il existe un réel a tel que $a+4=-a+3$
- Le carré de tout réel inférieur à 5 est inférieur à 25
- Il existe un réel inférieur à 5 dont le carré est supérieur à 25
- Il existe un décimal compris entre 0,001 et 0,01
- Il existe un décimal compris entre 0,01 et 0,02
- Il n'existe aucun réel x tel que $x+3=-5$
- Si un décimal s'écrit 0,004 93, alors il appartient à l'intervalle [0,004 ; 0,005]
- Il n'existe aucun réel x tel que $x^2=-5$

IV.4 *Gérard BONNEVAL*

POURCENTAGES ET PRÉVISIONS

Objectifs :

Manipuler des pourcentages.
Rechercher les effets cumulatifs de pertes ou de gains établis en pourcentages.
Etudier leur commutativité ou non-commutativité éventuelle.
Vérifier ou infirmer des conjectures.

Activité :

Didier, Isabelle et Eric jouent au jeu de MAP. La règle du jeu est la suivante :

Les joueurs ont chacun, au départ, une somme de 1 000 F. Ils tirent chacun à leur tour une carte sur laquelle est marqué un gain ou une perte en pourcentage. Le gagnant est le premier joueur qui double la mise initiale.

Les cartes sont les suivantes :

$\boxed{\text{G5}}$ $\boxed{\text{G10}}$ $\boxed{\text{G15}}$ $\boxed{\text{G20}}$ qui correspondent respectivement à des gains de 5, 10, 15, 20 %.

$\boxed{\text{P5}}$ $\boxed{\text{P10}}$ $\boxed{\text{P15}}$ $\boxed{\text{P20}}$ qui correspondent respectivement à des pertes de 5, 10, 15, 20 %.

1) Au premier tour, Didier a tiré $\boxed{\text{G5}}$, Isabelle $\boxed{\text{G15}}$, Eric $\boxed{\text{P5}}$.

Quelles sont, après le premier tour, les sommes des trois joueurs ?

2) Pour les cinq premiers tours, les joueurs ont tiré successivement les cartes suivantes :

Didier :	G5	P10	P5	G20	G20
Isabelle :	G15	G10	P10	P5	P5
Eric :	P5	G20	G15	G5	P15

Quelle est la situation au bout de cinq tours de jeu ?

3) Didier dit : «Si j'avais tiré la carte $\boxed{\text{P20}}$ aux cinq premiers coups, j'aurais tout perdu». Qu'en pensez-vous ?

4) Reprenons en fin de 2).
Didier, Isabelle ou Eric peuvent-ils gagner au prochain tour ? Sinon, en combien de tours peuvent-ils gagner ?

5) Eric a gagné en 10 coups. Quelles cartes a-t-il pu tirer ?

N.B. 1) On arrondira les sommes (non entières) au franc le plus proche.
2) La somme initiale a-t-elle de l'importance ?

Jean REVERDY

A PROPOS DE PRODUITS ÉLÉMENTAIRES

OBJECTIF : Mise en œuvre, à propos de calculs élémentaires, de la démarche classique :

Exemples → conjectures → démonstrations → critique des hypothèses et généralisation

Problème 1 : A propos de trois multiples consécutifs ...

— Il n'est proposé qu'un plan d'étude, avec des commentaires —

1. Une situation :

Choisir trois multiples de 4 consécutifs a, b, c.
(Variante : trois multiples de 5, ou ...).

Problème : Comparer b^2 et ac .

2. Des exemples, une conjecture :

En prenant autant d'exemples que l'on veut, on a toujours

$$b^2 - ac = 16$$

3. Une démonstration :

• *Les multiples de 4 consécutifs sont généralement écrits* $4n$; $4(n+1)$; $4(n+2)$, *où* $n \in \mathbf{Z}$.

Voir d'autres écritures, telle : $4(n-1)$; $4n$; $4(n+1)$, *et comparer les calculs.*

• *Les diverses traduction littérales apporteront quelque chose, notamment celles qui, oubliant la qualité "multiples de", traduiront* a, b, c *par* a , $a+4$, $a+8$ *(ou* $b-4$, b , $b+4$*), ... : Elles favoriseront l'accès à l'étape qui suit.*

4. Une généralisation :

Comment choisir trois nombres a, b, c formant une suite arithmétique ($c - b = b - a$) pour avoir $b^2 - ac = 16$?

L'hypothèse du § 1 "multiples de 4" s'avère inutile. Celle d'entier le serait tout autant.

5. Une deuxième généralisation :

... avec trois nombres a, b, c tels que $a = b - n$ et $c = b + n$.

6. Une application : (à partir du § 5 précédent)

On fixe b . On suppose a et c variables.

Problème : Etudier $a + c$ et ac .

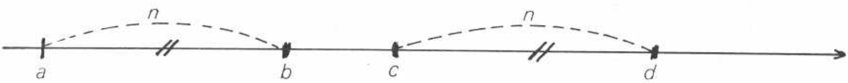
- *Le résultat est simple pour* $a + c$.
- *Pour* ac , *au § 5, il a été établi que* $ac = b^2 - n^2$.
Comme b *est constant, le maximum de* ac *est atteint pour* $n = 0$.
- *Il y a une autre approche de ce problème avec*

$$4\,ac = (a+c)^2 - (a-c)^2$$

- *Application (classique) au rectangle :*
Soit des rectangles de même périmètre. L'aire est maximum quand ...
- *Les applications du résultat relatif au maximum de* ac *lorsque* $a+c$ *est constant sont relativement nombreuses. Le tome 2 en présentera.*

Problème 2 : Etude analogue avec quatre nombres

- *Avec* a, b, c, d *tels que* $b = a + n$, $c = b + n$, $d = c + n$ *on obtient* $ad = bc - 2\,n^2$.
- *Plus généralement, on peut étudier une disposition telle que :*



On trouve $bc = ad + n\,(d - b)$, ... *formule qui ne manifeste pas la symétrie que présente le dessin. Pour retrouver cette symétrie on peut :*

— *ou bien poser* $c - b = r$ *(par exemple). Alors*

$$d - b = n + r\,, \ldots$$

— *ou bien faire des calculs, d'emblée, par rapport au milieu* m *de* (b,c). *(On peut utiliser le résultat du Problème 1, § 5).*

Autres problèmes (Cf., toujours, la démarche préconisée en tête)

Problème 3 : Suite arithmétique croissante d'entiers consécutifs

a , b, ,c .

Comparer $b^2 c^2$ et $a^2 b^2$.

[Autrement dit, $b - a = c - b = 1$]

On trouve $b^2c^2 - a^2b^2 = 4\,b^3$ *et la qualité d'entiers est inutile.*

Problème 4 : Mêmes hypothèses.

Comparer c^3 et a^3 .

On trouve $c^3 - a^3 = 2\,(3\,b^2 + 1)$. *Toute restriction relative à la nature de* a , b , c *est inutile.*

Problème 5 : On considère des couples de nombres positifs (a,b) tels que $ab = 36$ (ou $ab = 16$, ou $ab = 25$, ou $ab = 64$, ou … ?).

Etudier la somme $a + b$.

• *Un choix suffisant d'exemples conduit aisément à la conjecture : La somme* $a + b$ *est minimale quand* $a = b$.

• *Mais la "redécouverte" d'une démonstration est plus difficile :*
De façon classique :
— ou bien on utilise $(a + b)^2 = (a - b)^2 + 4\,ab$
— ou bien, par analogie avec le problème 1, on travaille à partir des écritures, en suite géométrique cette fois, $a = \frac{6}{n}$, 6 , $b = 6\,n$.

Ayant conjecturé que $a + b$ *présente un minimum égal à 12, former* $(a + b) - 12$.

Problème 6 : Soit des nombres a , b , x , y et le produit $(x + a)\,(y + b)$. (Soit p ce produit).
Permutons x et y dans ce produit : Nous obtenons $(y + a)\,(x + b)$. (Soit p' ce produit).

• Prenons une valeur numérique pour $x - y$, par exemple 8. *De quoi dépend* $p - p'$?

On trouve $p - p' = 8\,(b - a)$.

La différence $p - p'$ *ne dépend donc pas des choix de* a *et* b *séparément, mais de leur différence.*

• **Généralisation ? :**

Gardons les lettres x *et* y .

On trouve $p - p' = (x - y)\,(b - a)$, *ce qui généralise le résultat précédent.*

• Si $a = b$, comme p peut s'écrire $(x+a)(y+a)$
et comme p' peut s'écrire $(y+a)(x+a)$ $\Big\}$ alors $p = p'$.

Etudier l'énoncé réciproque.

Comme $p - p' = (x - y)(b - a)$, *si* $p = p'$ *il n'est pas obligatoire que* $a = b$. *Donc ...*

- **On aurait pu poser d'emblée**, dès la définition de p et p' , **la question :**

Si $p = p'$, que dire de a et b ? (Il y aurait alors sans doute la conjecture $a = b$, qui se révèle incorrecte).

Pour le tome 2, voir appel page 7.

Envoyer les manuscrits
avant le 15 décembre 1979

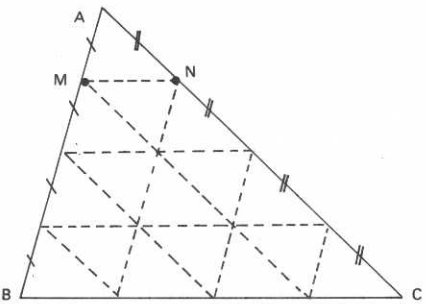
IV.6

Henri PONTIER

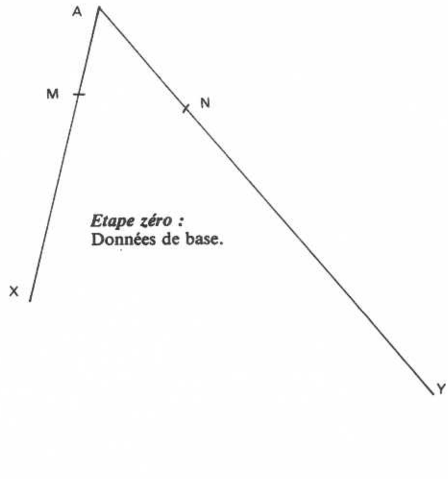
ALIGNEMENTS DE POINTS, DÉNOMBREMENT DE TRIANGLES (au rang *n*), A PROPOS DE TRILLAGES

I. Problème de reconstitution d'un "trillage"

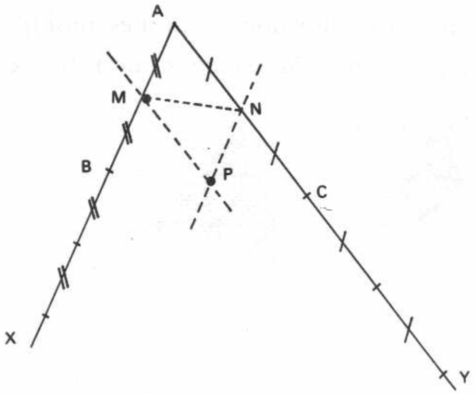
Appelons "trillage" une figure comme celle ci-dessous :



Problème : Dessiner un trillage à partir de la figure de base (A,M,N).



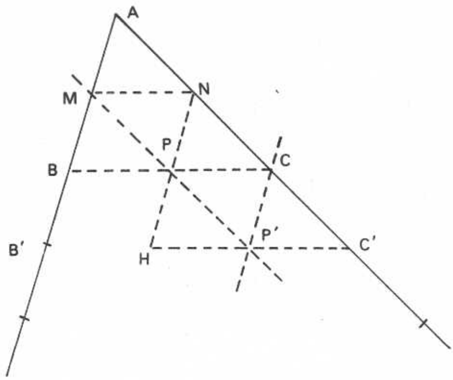
Etape 1 :



Disposition des points B,P,C ?

[Il suffit de connaître :
— ou les caractérisations classiques du parallélogramme relatives aux côtés,
— ou "la conservation du milieu par projection",
— ou le théorème relatif aux milieux de deux côtés d'un triangle,
— . . .]

Etape 2 :



Continuer les tracés et l'étude des dispositions de points.

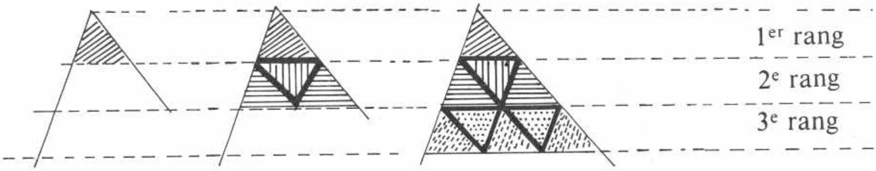
[La situation de l'étape 1, donc aussi ses résultats, se reproduisent de proche en proche.]

CONCLUSION ?

II. Dénombrement des triangles

Limitons-nous aux trois directions de droites ainsi tracées.

Considérons les *triangles élémentaires* ainsi formés. Soit à les dénombrer :



D'un rang au suivant, le nombre de triangles par rang augmente de 2.

Numéro du rang	1	2	3	4	n	...	
Nombre de triangles de ce rang	1	3	5	...	$2n-1$	...	

A la fin du $n^{\text{ième}}$ rang le nombre total de triangles est donc :

$$S = 1 + 3 + 5 \ldots. + (2n - 1)$$

CALCUL DE S :

• ***Méthode 1 :*** Compléter le triangle ABD selon le parallélogramme ABCD.

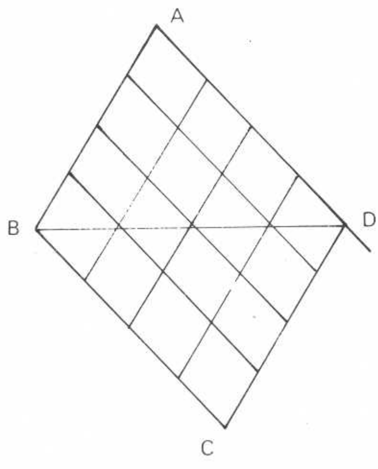
Ici $n = 4$. Nombre total de "parallélogrammes élémentaires" : 4×4, soit 4^2.

Donc nombre total, pour ABCD, de triangles élémentaires : 2×4^2.

Pour ABD ce nombre est $\frac{1}{2}(2 \times 4^2)$, soit 4^2.

La structure de ce calcul est indépendante de la valeur numérique prise par n.

Donc, de façon générale : $S = n^2$.



• ***Méthode 2 :*** (classique, mais difficile à ... imaginer sans aide) :

$$S = 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-3) + (2n-1)$$

$$\text{donc } S = (2n-1) + (2n-3) + \ldots + 3 + 1$$

D'où en ajoutant verticalement, par bandes,

$2\,S = 2\,n + 2\,n + \ldots + 2\,n + 2\,n,$ avec n termes.

Conséquence : $S = n + n + \ldots + n$, avec n termes
$S = n \times n$, soit $S = n^2$.

• ***Méthode 1 ⟷ Méthode 2 :***

Sous des dehors différents, ne s'agit-il pas de méthodes analogues ?

Par bandes, selon la direction (BD) par exemple, le triangle BCD recopie "à l'envers" le triangle DAB. [Rôle du centre de symétrie du parallélogramme].

• ***Méthode 3 :*** (par récurrence)

$$\left.\begin{array}{lll} \text{Pour } n = 1, & S = 1 & \\ n = 2, & S = 4 & \text{, c'est-à-dire } S = 2^2 \\ n = 3, & S = 9 & \text{, c'est-à-dire } S = 3^2 \\ n = 4, & S = 16 & \text{, c'est-à-dire } S = 4^2 \end{array}\right\} \begin{array}{c}\text{Il suffit de compter} \\ \text{les triangles ou} \\ \text{de calculer S.}\end{array}$$

Conjecture : Au bout du $n^{\text{ième}}$ rang, $S = n^2$.

Démonstration : Supposons la formule vraie au bout du rang $p - 1$. Alors $S = (p-1)^2$.

Ajoutons un nouveau rang, le $p^{\text{ième}}$. Il compte $(2p - 1)$ triangles (cf. page précédente). Après quoi :

$$\begin{aligned} S &= (p-1)^2 + (2p-1) \\ &= p^2 - 2p + 1 + 2p - 1 \\ &= p^2 \end{aligned}$$

Donc, si la formule conjecturée est vraie pour le rang $p-1$ elle est vraie aussi pour le rang p.

Or elle est vraie pour le rang 4. Elle l'est *donc* pour le rang 5. Etant vraie pour le rang 5, elle l'est pour le rang 6 ... *ETC.*

Conclusion : $S = n^2$ (au terme du rang de numéro n).

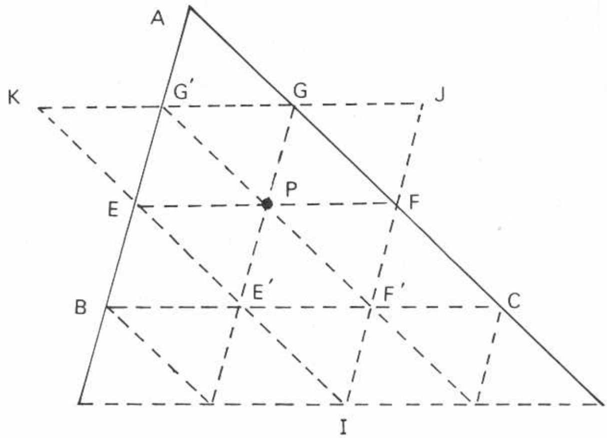
N.B. En quatrième cette démonstration est difficile. Il y aura souvent lieu de se contenter de moins...

III. Vers le centre de gravité (Cf. figure page 176)

• D'après le I, $\overrightarrow{G'G} = \overrightarrow{E'F'}$, ... donc E'F'GG" est un ...
Conséquence : milieu de [G'F'] = milieu de [E'G]

[*[Le langage "vecteurs" peut être traduit :*
(G'G)//(E'F')
G'G = E'F'
etc... (pour le sens)]

$\overrightarrow{EG'} = \overrightarrow{F'F}$, ... *Donc ...*



• Mais d'autres parallélogrammes permettent de démontrer divers alignements :

A,P,I ; P,I, milieu de [E'F'].
Donc A,P, milieu de [BC] sont alignés.
De même B,P, ...
C,P, ...

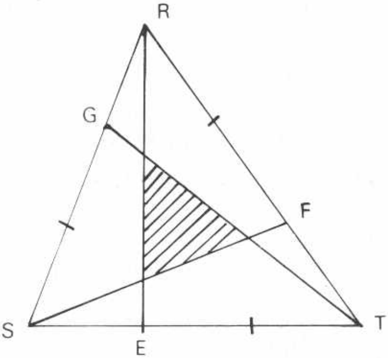
Il s'ensuit que les médianes de ABC sont concourantes.

A partir de tout triangle ABC, en levant les difficultés de la division "d'un segment" par 3, le triangle est un trillage à trois rangs, comme ici.

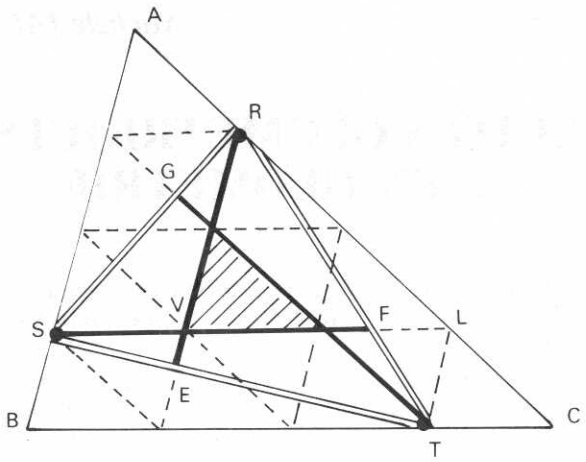
D'où le résultat.

IV. Problème :

Chaque côté du triangle RST de la figure de droite a été partagé en 3 de façon régulière. Que représente l'aire du triangle hachuré par rapport à celle du triangle RST ?



Voici une solution par immersion dans un trillage, obtenu à partir d'un triangle ABC dont les côtés ont été partagés en quatre. D'où le triangle nommé RST.



[La propriété de conservation du milieu par projection engendre que toute "graduation régulière" de droite a pour projection sur une droite, parallélement à une direction donnée, une graduation régulière. Donc RST est bien un triangle découpé comme celui de l'énoncé].

Soit s l'aire d'un triangle élémentaire.

Aire de BSLT $= 2s \times 3$	Donc aire BST $= \frac{1}{2}(6s)$	De même pour
$= 6s$	$= 3$ s.	CRT et ARS
Or aire ABC $=$ s $\times 4^2$	Donc aire RST $= 16$ s $-$ (3 s $\times$ 3)	
$= 16$ s	$= 7$ s.	

La réponse à la question posée est donc $\frac{1}{7}$.

*

* *

• La richesse des trillages offre de nombreuses ressources analogues à celles exploitées au III et au IV... Cf. six fiches sur "Triangle équilatéral et trillages", Brochure A.P.M.E.P. *Géométrie 1^er^ cycle, Tome 2.*

Michèle JACQUELINE

SUITES GÉOMÉTRIQUES ... EN GÉOMÉTRIE

Il s'agit d'abord de visualiser des suites convergentes et de montrer à leur propos comment numérique et géométrique s'appuient mutuellement.

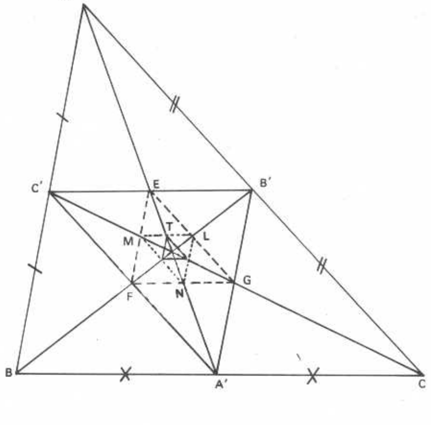
C'est aussi une occasion d'apprendre à calculer la somme des termes d'une suite géométrique (Cf. aussi p. 121-123) et de mettre alors en jeu, de façon motivée, quelques pratiques classiques de calcul.

Les autres objectifs possibles (parfaire l'étude de figures classiques, ...) sont plus accessoires.

I. A partir d'un triangle quelconque ABC, suite de "triangles des milieux"

Pré-requis (connus des élèves ou à leur fournir) :

- *Sommets et milieux des côtés de ABC déterminent trois parallélogrammes.* (Cf. figure, où E,F,G sont les milieux respectifs de [AA′], [BB′], [CC′]).
- Donc, *sans avoir besoin de savoir si les médianes, apparemment concourantes, le sont réellement (quel que soit ABC),* il s'ensuit que E, F, G sont les milieux respectifs de [B′C′], [A′C′], [A′B′]. Les droites-médianes de ABC sont donc aussi telles pour A′B′C′ et, de proche en proche, pour EFG, LMN, ...



Remarquer aussi que les médianes sont au moins "concourantes deux à deux".

Soit P′ le point commun à (AA′) et (BB′)
P″ le point commun à (AA′) et (CC′)

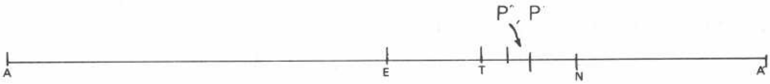
Il semble que P′ = P″.
Est-ce vrai ?

Autre remarque :

Sur (AA′), A et A′ sont de part et d'autre de (P′,P″).
A′ et E sont de part et d'autre de (P′,P″).
Etc.

Soit AA′ = 1.

Etudions la disposition :



D'où un encadrement, à la fois de AP′ et de AP″, par

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{32} + \dots \qquad \text{et} \qquad 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{16} - \dots$$

[Considérer la loi de formation des termes successifs des deux suites].

Pour n termes, soit x la première somme, y la seconde :

- $x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^5} + \dots + \frac{1}{2^{2n-3}} + \frac{1}{2^{2n-1}}$

D'où
$$x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2}\left(x - \frac{1}{2^{2n-1}} \right)$$

et
$$4x = 2 + x - \frac{1}{2^{2n+1}}$$

$$\boxed{x = \frac{2}{3} - \frac{1}{3.2^{2n+1}}}$$

- Pour y,

calcul analogue de $\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{2^{2n}}$,

ou utilisation de : $\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \dots + \frac{1}{2^{2n}} = \frac{1}{2} \times x$

d'où $y = 1 - \frac{1}{2}x$

$$\boxed{y = \frac{2}{3} + \frac{1}{3.2^{2n+2}}}$$

• Un élève de quatrième acceptera généralement d'en déduire que, en choisissant n assez grand, :

$$\left\{\begin{array}{l} x \text{ est aussi voisin de } \frac{2}{3} \text{ qu'on le veut, mais au-dessous,} \\ y \text{ est aussi voisin de } \frac{2}{3} \text{ qu'on le veut, mais au-dessus,} \\ y - x \text{ est aussi voisin de zéro qu'on le veut.} \end{array}\right.$$

Ceci peut donner lieu à des activités de calcul numérique pour voir comment rendre telle différence étudiée ici inférieure à 10^{-3}, à 10^{-6}, ...).

De là deux déductions : 1° $P' = P''$

2° $OP' = OP'' = \frac{2}{3}$

... ce qui redonne le résultat ... attendu !

Remarques :

1. On peut aussi savoir au départ que les médianes sont concourantes, sans plus, et se proposer de situer leur point de concours. L'étude précédente voit alors sa présentation de départ très simplifiée.

2. Soit P ce point de concours.

Toujours avec $AA' = 1$, AP est aussi la valeur limite, quand le nombre de termes augmente indéfiniment, de $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{1}{32} + \ldots$

N'est-ce pas un beau résultat, peut-être difficile à imaginer d'emblée ?

3. On peut aussi se placer dans le cas où l'on sait

— que les médianes d'un triangle sont concourantes,

— que leur point de concours P est tel que $\overline{AP} = \frac{2}{3}\,\overline{AA'}$.

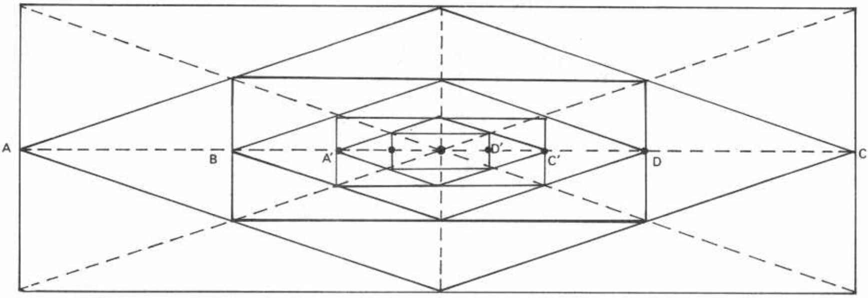
La considération simultanée de ce résultat et des sommes x et y donne $\frac{2}{3}$ comme valeur limite de ces sommes quand le nombre de termes augmente indéfiniment, résultat déjà intéressant en soi.

II. Autres modes de calcul pour des suites analogues

Cf. brochure A.P.M.E.P. *Géométrie 1er cycle - Tome 2.* Pages 206 à 209.

III. Suite infinie de "losanges et rectangles des milieux"

Peu importe qu'on parte d'un losange ou d'un rectangle.



... Etc ... [Départ : AC = 2]

• On peut voir apparaître

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots \text{ (c'est-à-dire } AB + BA' + \ldots\text{)},$$

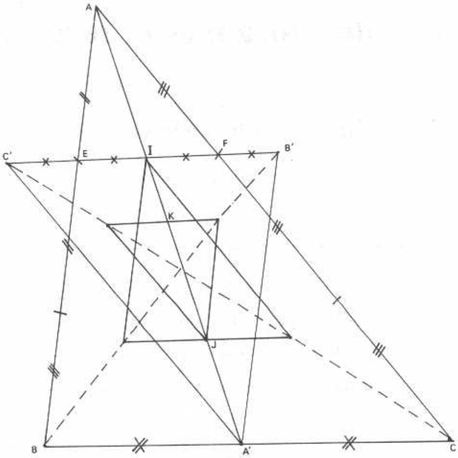
dont on sait, de par les propriétés des diagonales, ... qu'elle admet, quand le nombre de termes augmente indéfiniment, la valeur limite 1. *(N.B. : On le voit aussi, à partir d'un segment de longueur unité, en utilisant seulement la formation progressive de cette somme).*

IV. Suite infinie de pentagones réguliers

Cf. brochure A.P.M.E.P. *Géométrie 1er cycle - Tome 2.* Page 179.

V. Etude analogue à l'étude I (figure page 182) (pour la classe de troisième par exemple)

• Construction de triangles successifs. Loi de formation (Cf. figure) : Partager [AB] en trois segments de même longueur. Partager de même [AC]. D'où E et F. (EF) coupe en I la médiane [AA']. C' et B' sont les symétriques respectifs de I par rapport à E et F.
De là A' B' C'. Etc.



Soit AA′ = 1.

De là :
$$AI = \frac{1}{3}\ ,\ IA' = \frac{2}{3}$$

puis, de même,
$$JA' = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)\ ,\ \text{donc } JA' = \frac{2}{9}\ ,\ JI = \frac{4}{9}\ ,$$

puis :
$$IK = \frac{1}{3}\left(\frac{4}{9}\right)\ ,\ \text{donc } IK = \frac{4}{27}\ ,$$

....

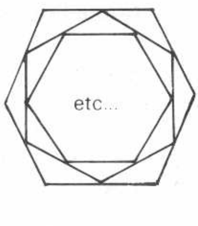
D'où des suites qui permettent à la fois :

a) de montrer que (AA′), (BB′), (CC′) sont concourantes,

b) si leur point de concours s'appelle P, de montrer que
$$AP = \frac{3}{5}\ .$$

Remarque :

- Le fait que (AA′), (BB′), (CC′) sont concourantes se démontre immédiatement par une symétrie oblique d'axe (AA′) et de direction (BC), dans la mesure où on sait que cette symétrie (aussi) "conserve les alignements de points" (Cf. page 144).
  [Démontrer l'existence de P diminue les difficultés de l'étude générale proposée.]



VI. Suite d'hexagones réguliers

[On peut travailler là-dessus avec, par exemple, l'outil cosinus, ou la relation de Pythagore, ou ...].

Benoît JOLI

TRIANGLE DE PASCAL ET DÉNOMBREMENTS D'ENSEMBLES DE POINTS

D'éventuels commentaires "hors niveau" sont en italiques, et marqués, en marge, d'un tremblé.

N.B.

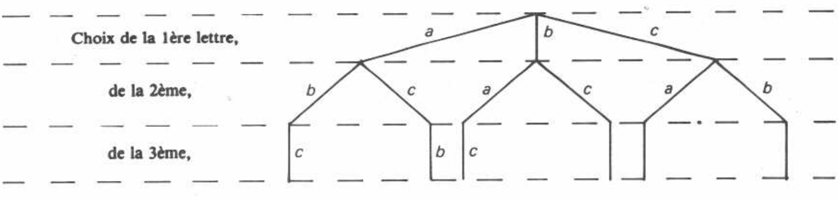
- Dans un ensemble, l'ordre des éléments n'intervient pas. Ainsi :

$$\{a, d, c\} = \{c, d, a\}$$

- Appelons "*mots*" des ensembles de lettres *munis d'un ordre.* Dès lors, en écrivant les mots sous la forme *{adc, cda* , nous aurons $adc \neq cda$.
- Considérons seulement des mots où les *lettres sont prises sans répétitions.*

1. Un triangle et ses dénominations

Soit un triangle dont les sommets s'appellent *a, b, c.* Les mots obtenus avec *a, b, c* sont les diverses façons de nommer le triangle. Quel est le nombre de ces mots ?



Il y a donc 6 mots.
Un triangle possède 6 dénominations. [Chercher d'autres méthodes pour trouver ce nombre]

2. Nombre de mots et nombre de triangles :

Considérons, par exemple, cinq lettres distinctes :

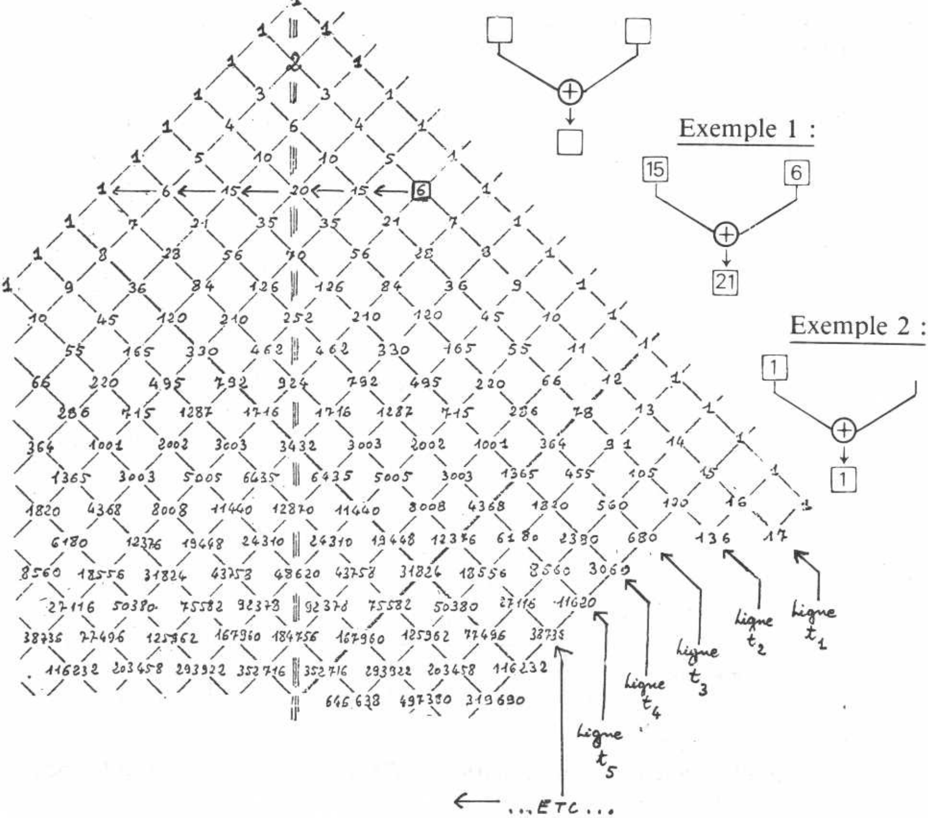
- Nombre de mots (Cf. arbre s'il y a lieu) : $5 \times 4 \times 3$.
- Nombre de triangles : $\dfrac{5 \times 4 \times 3}{6}$. Il s'agit du nombre d'ensembles de 3 lettres prises parmi les 5.

De façon générale, pour n *lettres distinctes, et* $p \leqslant n$,
- *Nombre de mots de* p *lettres* $= A_n^p$
- *Nombre d'ensembles de* p *lettres* $= C_n^p$

Ce sont les C_n^p *qui formeront le triangle de PASCAL.*

3. Triangle de Pascal :

Loi de formation (à partir du 1 initial) :

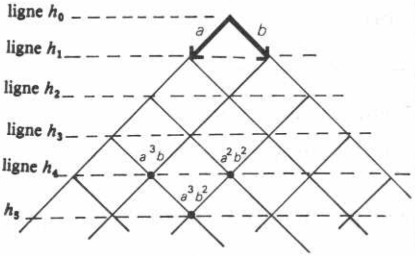


4. Triangle de Pascal et développements de $(a + b)^n$

• *On sait que les lignes "horizontales" du triangle de Pascal donnent les coefficients du développement de* $(a + b)^n$ *avec* $n \in \mathbf{N}*$.

Essayons de l'établir par des cheminements sur le quadrillage du triangle de Pascal.

CHEMINEMENTS



• Obligeons-nous à cheminer sur ce quadrillage, d'une ligne h à la suivante :

— selon l'une ou l'autre des directions, indiquées par les flèches, et selon leur sens.

— chaque fois d'un pas a ou d'un pas b.

• Partons *toujours* de la ligne zéro.

• Au bout de *5 pas, par exemple,* nous aurons réalisé des trajets tels que *aabba* ou *abbba*, et nous aurons atteint des nœuds de quadrillage de la ligne h_5.

Plusieurs chemins conduisent à un même nœud (lesquels ?). Déclarons-les égaux. (Par exemple *aabba* = *abbaa* = ... ; écrivons a^3b^2 chacun de ces chemins ; appelons aussi a^3b^2 le nœud d'arrivée correspondant. Alors la ligne h_5 n'est autre que :

a^5 ; a^4b ; a^3b^2 ; a^2b^3 ; ab^4 ; b^5 .

DEVELOPPEMENT DE $(a + b)^n$
(où $n \in \mathbf{N}*$)

Raisonnons sur $(a + b)^5$.

$(a + b)^5 = (a + b)(a + b)(a + b)(a + b)(a + b)$

Développer oblige à prendre, dans chacun de ces cinq facteurs, soit a, soit b, et à les multiplier.

Passer d'un facteur au suivant correspond bien au passage, colonne de gauche, d'une ligne h à la suivante : Il y a chaque fois, dans les deux cas à choisir soit a, soit b.

Ici aussi, *par exemple,*

aabba = *abbaa,*

et nous notons a^3b^2.

Chaque terme a^3b^2 obtenu correspond à un cheminement, sur le quadrillage de gauche, de la ligne zéro au nœud appelé a^3b^2, et réciproquement.

Le nombre de termes a^3b^2 du développement est donc égal au nombre de cheminements sur le quadrillage de la ligne zéro au nœud a^3b^2.

Quel est donc ce nombre de termes a^3b^2 ?

Le nœud a^3b^2 s'obtient à partir de deux nœuds de la ligne h_4 : le nœud a^3b et le nœud a^2b^2, avec chaque fois un seul chemin possible : de a^3b à a^3b^2, ou de a^2b^2 à a^3b^2. D'où le schéma :

nombre de chemins aboutissant à a^3b		nombre de chemins aboutissnt . à a^2b^2

$$\downarrow \; + \; \downarrow$$

nombre de chemins aboutissant à a^3b^2

C'est le schéma de formation du triangle de Pascal.

Or le raisonnement fait pour a^3b^2 ne dépend pas de cet exemple. *La conclusion est ainsi générale.*

Comme, dès la ligne h_1, le nombre de chemins obtenus pour les nœuds (1 ; 1) donne la ligne du triangle de Pascal, il en va ainsi, de proche en proche, pour toutes les lignes.

Donc, *par exemple,* la ligne h_5 du triangle de Pascal indique que

les coefficients de	a^5	a^4b	a^3b^2	a^2b^3	ab^4	b^5
sont respectivement	1	5	10	10	5	1

D'où $\quad (a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$

REMARQUE :

Le nombre de façons de former a^3b^2 est égal au nombre de façons de choisir trois pas, parmi cinq, qui donnent le trajet a , les trois pas notés a étant eux-mêmes indifférenciés. C'est donc C_5^3.

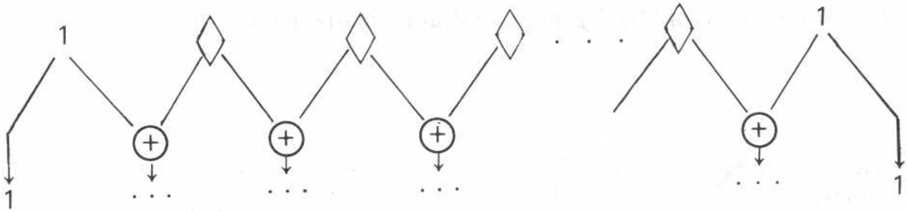
- *On pourrait aussi raisonner par rapport à b et l'on aurait C_5^2.*
  D'où $C_5^3 = C_5^2$.
- *La raisonnement ainsi fait est général et explique que les nombres de h_n du triangle de Pascal soient les C_n^p, p entier variant de zéro à n, avec $C_n^p = C_n^{n-p}$*

Somme des termes d'une ligne h_n

- Pour la ligne h_0 cette somme est : 1, soit 2^0
  Pour la ligne h_1 cette somme est : 2, soit 2^1
  Pour la ligne h_2 cette somme est : 4, soit 2^2
  Pour la ligne h_3 cette somme est : 8, soit 2^2
  ... etc. ?

• ***Première démonstration :***

Examinons comment on passe d'une ligne à la suivante :



Chacun des termes de la première ligne ci-dessus est donc doublé. Il en va donc de même pour la somme.

Donc on a, de proche en proche, les puissances successives de 2.

• ***Deuxième démonstration :***

Reprenons le développement de $(a+b)^5$ et faisons $a = b = 1$. Ceci établit que $2^5 =$ somme des termes de la ligne h_5. Le raisonnement est indépendant de l'exemple choisi. D'où une conclusion générale.

Lien avec le nombre de parties d'un ensemble (3ème démonstration)

Soit un ensemble E à n éléments.
On sait que le nombre de parties de E est 2^n. Mais ce nombre est aussi :

$$C_n^n + C_n^{n-1} + C_n^{n-2} + \dots + C_n^0$$

Ce qui fournit une nouvelle démonstration du résultat précédent.

REMARQUE :

Considérons les n premiers nombres naturels
Le nombre de suites croissantes (strictement) que l'on peut former avec p de ces entiers est C_n^p. Une telle recherche, d'abord expérimentale, peut donner lieu à exercice en quatrième.

5. D'un ensemble à $(p - 1)$ points à un ensemble à p points :

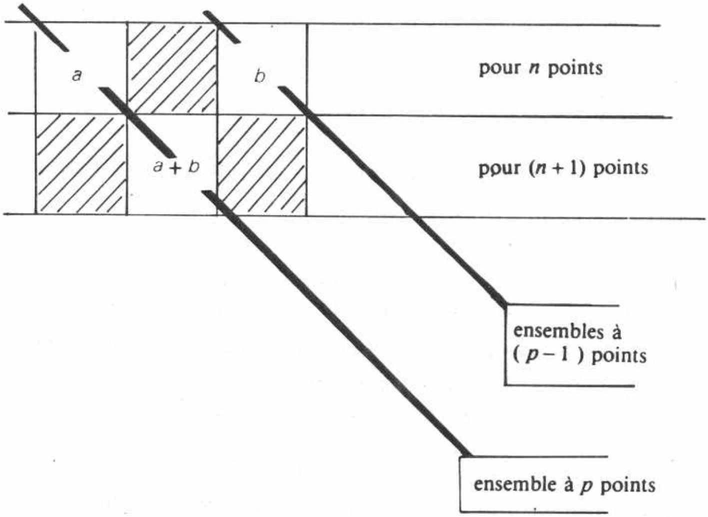
• Considérons n points distincts, $p \leq n$, et évitons toujours les répétitions de points (par exemple *aab* est interdit).

Formons des ensembles de points (à partir de ces n points) : Soit a le nombre d'ensembles de p points et b le nombre d'ensembles de (p − 1) points.

• Augmentons de 1 la valeur de n. Il y a désormais $(n+1)$ points disponibles. Les ensembles à p points possibles sont :

— d'une part les a ensembles précédents
— d'autre part les b ensembles précédents complétés chaque fois par le $(n + 1)$ème point. [Ces ensembles-là sont forcément distincts des précédents à cause de ce dernier point].
Le nombre d'ensembles à p points est donc maintenant $a + b$.

D'où
le schéma :



- [*Ceci ne fait qu'exprimer l'égalité classique*

$$C^{p}_{n+1} = C^{p}_{n} + C^{p-1}_{n}]$$

- Il s'agit de la loi de formation du triangle de Pascal.

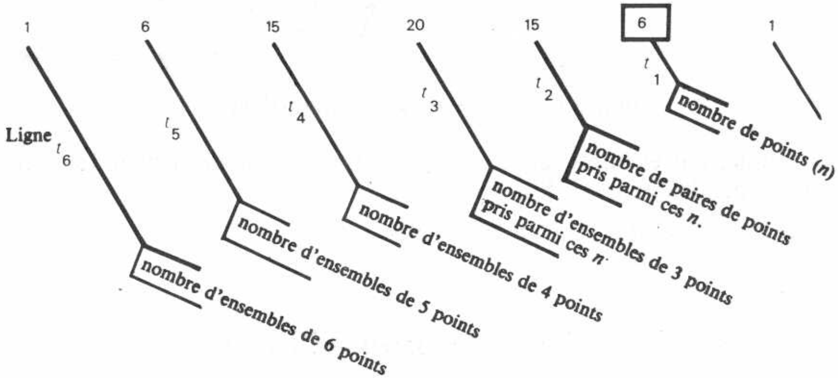
- De là l'exploitation des diverses lignes, notées "Lignes t_i du triangle de Pascal" (Cf. page 184)

6. Triangle de Pascal et dénombrement d'ensembles de points :

- Cf. § 3 et § 5 de cet article :
  - Ligne t_1 : nombre de points
  - Ligne t_2 : nombre d'ensembles de 2 points
  - Ligne t_3 : nombre d'ensembles de 3 points
  - Etc.

- Avec la disposition adoptée, on a la lecture suivante, par exemple pour 6 points:

  Prendre "l'horizontale" du nombre 6 de la ligne n° 1 (cf. page 184) :



- Evidemment, en triant, par exemple, les ensembles de 4 points (sur l'exemple *de six points donnés*), on trie aussi, avec les complémentaires, les ensembles de 2 points. Donc le nombre d'ensembles de 4 points égale le nombre d'ensembles de 2 points.

  [*Plus généralement on retrouve là l'égalité classique* $C_n^p = C_n^{n-p}$]

- La considération des résultats fournis par le triangle de Pascal est assez passionnante.

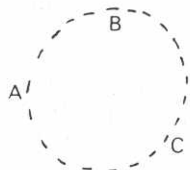
  Ainsi, 10 points on peut fabriquer 210 ensembles de 4 points, mais avec 15 points on en fabriquerait 1365. Avec 20 points on peut fabriquer 184 756 ensembles de 9 points. Etc.

7. Vers les dénombrements de polygones :

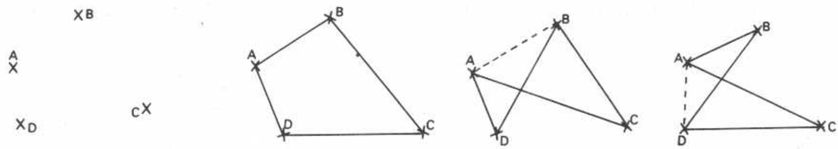
Le nombre d'ensembles de 3 points est égal au nombre de triangles qu'on peut former.

C'est moins simple au-delà :

Ainsi un ensemble de 4 points permet 3 quadrilatères. Voici une explication : A partir d'un ordre ABC, le 4ème point D peut intervenir "entre A et B", ou "entre B et C", ou "entre C et A". D'où trois quadrilatères.



[**N.B.** Cette méthode peut se généraliser pour passer des quadrilatères aux pentagones, de là aux hexagones, etc.]



Quatre points ⟶ Trois quadrilatères

Donc, par exemple, avec 6 points il est possible de former 15 × 3, soit 45, quadrilatères ($C_6^4 = 15$).

.... et avec 15 points, il y en aurait 3095.

8. Vers les probabilités :

Considérons douze boules, 7 noires, 5 blanches.
Les dénombrements relatifs à des points se retrouvent pour des boules.
Le triangle de Pascal sera donc éventuellement utile.

•• *QUESTION 1 : En choisissant 3 boules au hasard parmi les douze, quelle est la probabilité pour que ce soit 3 blanches ?*

Soit directement, soit avec le triangle de PASCAL, on trouve que :

— le nombre de façons de choisir 3 boules parmi 12 est 220

— le nombre de façons d'obtenir 3 boules parmi 5 est 10.

Il y a donc 10 chances sur 220, soit une probabilité de $\frac{10}{220}$ ($= \frac{1}{22}$) d'obtenir 3 boules blanches.

•• *QUESTION 2 : En choisissant 5 boules au hasard parmi les douze, quelle est la probabilité pour qu'il y ait 3 blanches ?*

- — le nombre de façons de choisir 5 boules parmi 12 est 792
  — le choix souhaité associe
    - — un choix de 3 blanches parmi 5 (nombre de possibilités = 10)
    - — un choix de 2 noires parmi 7 (nombre de possibilités = 21).

  Le nombre de chances d'obtenir le choix souhaité est donc

  $$10 \times 21 \; (= 210)$$

- Il y a donc 210 chances sur 792 d'obtenir le choix souhaité, soit une probabilité de $\frac{210}{792}$ ($= \frac{35}{132}$).

•• *QUESTION 3 : En choisissant 5 boules au hasard parmi les douze, quelle est la probabilité pour qu'il y ait au plus 3 blanches ?*

• Chercher le nombre de chances pour avoir 3 blanches (210)
2 blanches (350)
1 blanche (175)
0 blanche (21)

Le nombre total de chances, pour le choix souhaité, est donc : 756.
La probabilité du "bon choix" est ici de $\frac{756}{792}$ $(=\frac{21}{22})$.

•• *QUESTION 4 : ... Probabilité pour qu'il y ait au moins 4 blanches ?*
Traiter directement ou déduire ceci du résultat précédent.

•• *REMARQUE :* Au lieu de boules, on peut parler de cartes, de cartons de deux couleurs, ... ce qui se prête mieux à des manipulations.

9. Pour mémoire :

1. FACTORIELLE :

Les exercices de dénombrement font éventuellement apparaître des factorielles. Par exemple le nombre de façons de classer 21 chevaux (sans ex-aequo) est $21 \times 20 \times 19 \times \ldots \times 3 \times 2 \times 1$, soit 21 !*

Autant vaudrait qu'un élève du premier cycle ait l'occasion de rencontrer de tels problèmes, et cette notation.

Cf., de même, nombre de façons de placer *n* personnes autour d'une table, dans une auto, ...

2. ... LE TIERCE :

De même au cours du premier cycle est-il apparemment souhaitable que le nombre de chances de gagner un tiercé ait été évalué.

• Avec 21 chevaux, le choix des 3 premiers dans l'ordre présente une nombre de possibilités égal à $21 \times 20 \times 19$, soit 7980.

Dans le "désordre" les trois premiers chevaux peuvent être présentés de 6 façons.

Si je joue au hasard, j'ai donc une chance sur 7980 de gagner "dans l'ordre", et une sur 1330 "dans le désordre".

• Comparer avec le cas d'un nombre total de chevaux différent.

* 21 ! se lit « factorielle 21 ».

3. ... IL N'Y A PAS QUE DES FACTORIELLES :
(ou des "segments" de factorielles)

Exemple classique :

Nombre d'applications d'un ensemble de p *éléments dans un ensemble à* n *éléments.*

Explication avec un arbre (ou par récurrence : en passant pour l'ensemble de départ de $k-1$ éléments à k éléments, le nombre d'applications est multiplié par n, quel que soit k) : Nombre d'applications : n^p.

Exemple de ceci :

p personnes peuvent prendre leur repas de midi chacune soit au premier service, soit au second service.

En considérant les personnes comme non-équivalentes, le nombre total de possibilités est 2^p. [Mais si l'on considère les personnes comme équivalentes... il n'y a que p possibilités]

Le partage des chameaux :
Lisez d'abord le problème. Page 141.
Voici la solution (en retournant la page) :

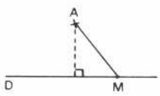
Avant la mort de son maître, l'intendant emprunte un chameau. Après le décès il fait le partage, puis rend le chameau.
N.B. : l'intendant aurait pu raisonner ainsi : je vais emprunter x chameaux... Je mets le partage en équation... j'obtient une solution, et une seule, pour x : 1.
N.D.L.R. Il nous semble que ce probème a fait l'objet de généralisations, peut-être dans « Le petit Archimède ».

Agnès GODZEH

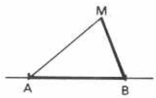
DISTANCES : Problèmes de minimum ou de maximum

I. Des situations élémentaires classiques ... :

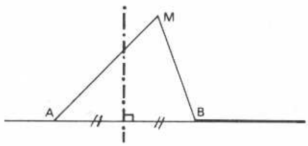
(pour mémoire).



A et D donnés.
Situer M pour que AM soit minimum.



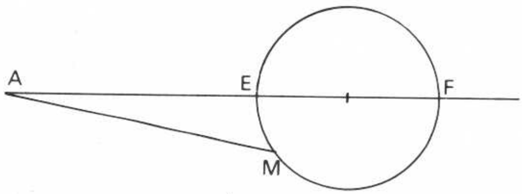
A et B donnés.
Situer M pour que MA + MB soit minimum.



A et B donnés.
MA ⩾ MB.
Situer M pour que MA − MB soit minimum.
MA − MB soit maximum.

- **UNE PREMIERE APPLICATION :** *Distance à un cercle.*

Le cercle et A sont donnés.



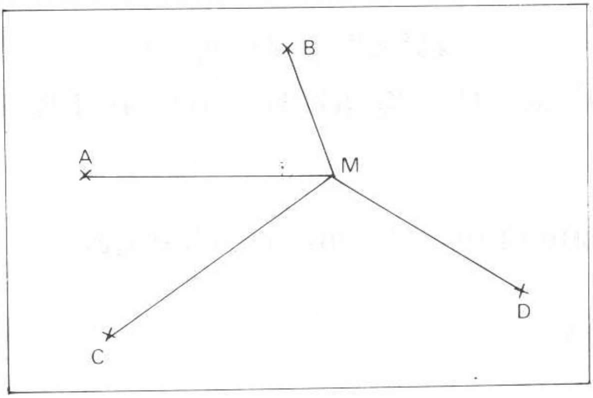
Situer M, sur le cercle, pour que AM soit minimum.
[Alors M = E, et AE est la distance de A au cercle].

- **N.B.** Les pages 218-223 proposent des activités remarquables à propos de distances à des segments ou à des paires de points.

II. Somme des distances à quatre points

A,B,C,D sont des points donnés distincts.

Problème : Choisir M pour rendre minimale la somme de MA + MB + MC + MD.



L'addition étant commutative et associative, écrivons, pour le cas de figure indiqué (où A et D sont de part et d'autre de (BC), B et C de part et d'autre de (AD)),

$$(MA + MD) + (MB + MC).$$

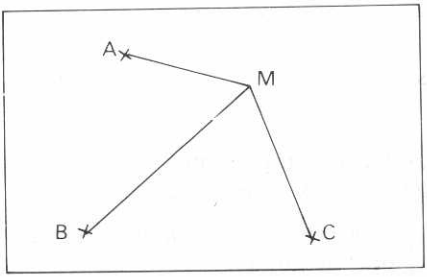
Or MA + MD est minimum quand M appartient au segment [AD],
MB + MC est minimium quand M appartient au segment [BC].

Comme [AD] et [BC] se coupent, leur point commun donne le minimum de la somme générale — Les autres cas de figure se ramènent à celui-là par simple changement de dénomination des points —.

III. Somme des distances à trois points

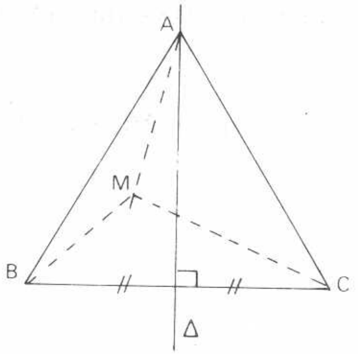
A,B,C sont des points donnés distincts.

Problème : Choisir M pour que la somme MA + MB + MC soit minimale.



En quatrième-troisième, seule une approche expérimentale, elle-même délicate, est possible, et son résultat n'est pas évident. (Cf. Mathématiques buissonnières, *de A. Deledicq, et* Géométrie, tome 2, § *9.10.6 et* § *10.4.3, de M. Berger).*

Mais le cas particulier où ABC est équilatéral est abordable, par exemple grâce à l'approche suivante :



Expérimentalement, avec une grande figure, il semble que le minimum a lieu quand M appartient aux axes de symétrie de ABC.

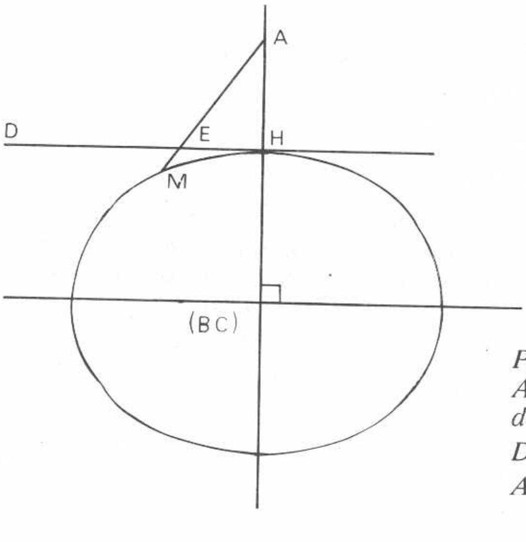
Il suffit de s'en convaincre pour l'un de ces axes. Par exemple ainsi :

La recherche du minimum conduit à des points intérieurs au triangle. Soit M un tel point. Gardons (MB + MC) constante.

Le minimum de la somme MA + MB + MC est alors celui de MA.

Mais la condition (MB + MC) constante se traduit par l'appartenance de M à une ellipse (cf. dictionnaires, présente brochure,...) dont les axes de symétrie sont (BC) et △, et MA est alors minimum quand M est sur △.

Cf. figure suivante pour s'en convaincre :



D // (BC)

Pour M ≠ H,
A et M sont de part et d'autre de la tangente D à l'ellipse.

D'où successivement :

AH<AE ; AE<AM et, donc,
AH<AM

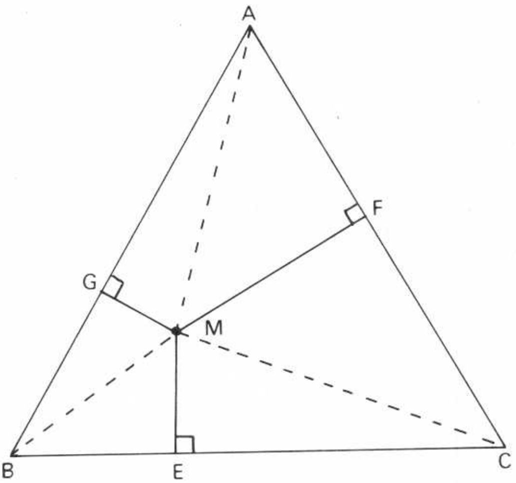
Conclusion : MA + MB + MC est minimum quand M est le "centre" du triangle équilatéral ABC.

IV. Somme des distances d'un point aux côtés d'un triangle équilatéral ABC :

Soit E,F,G les projetés (orthogonaux) d'un point M sur (BC), (AC), (AB) respectivement.

PROBLÈME :

Comment choisir M pour que la somme ME + MF + MG soit minimale ?



Le problème est ainsi posé par analogie avec celui du III.

Il y a lieu de procéder d'abord expérimentalement... Attendre de pied ferme les résultats qui seront avancés : En effet, pour tout M intérieur au triangle, la somme ME + MF + MG est constante !

En voici une démonstration avec les aires (pour BC = a).

$$\text{Aire } ABC = \text{Aire } MBC + \text{aire } MAC + \text{aire } MAB$$

$$= \frac{1}{2}\,aME + \frac{1}{2}\,aMF + \frac{1}{2}\,aMG$$

$$= \frac{1}{2}\,a(ME + MF + MG)$$

Donc ME + MF + MG est constante (et égale à la hauteur du triangle équilatéral).

V. Application (du IV) aux représentations de pourcentages :

Supposons une population, une production, une ration alimentaire, ... répartie entre trois pourcentages.

[Par exemple, une production d'électricité obtenue pour 10 % à partir d'énergie solaire, 30 % à partir de centrales hydrauliques, 60 % à partir de centrales thermiques. De là la figure 1].

Fig. 1 :

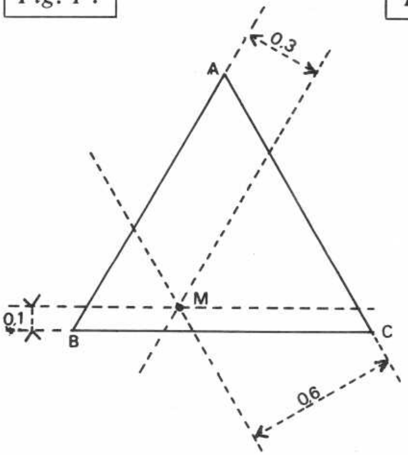
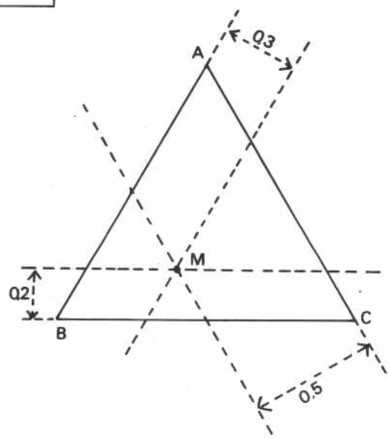


Fig. 2 :



Pour les mesures indiquées, la hauteur du triangle équilatéral est prise *comme unité*. (Faire refaire les dessins avec une hauteur de 100 mm).

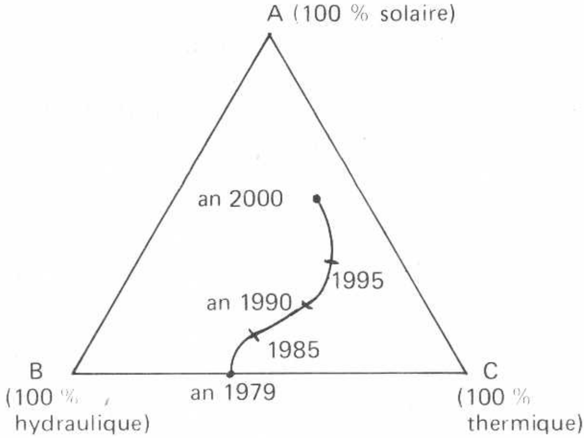
Autre exemple (figure 2) : Ration alimentaire répartie en 20 % de lipides, 30 % de protides, 50 % de glucides.

•• *Activités proposables aux élèves :*

1 Expliquer les dessins ci-dessus,
le tracé des parallèles aux côtés,
pourquoi elles sont toutes les trois concourantes,
ce que signifierait M = A , ou $M \in [BC]$, ...

2 Représenter sur des dessins analogues :
— une autre répartition de la ration alimentaire (toujours selon les mêmes trois composantes),
— une répartition en 150 g de lipides, 300 g de protides, 350 g de glucides.

3 Interpréter le dessin suivant :



Il y est représenté, dans une production d'électricité qui n'a pas d'autres provenances, les pourcentages respectifs, à diverses dates, dus

— à l'énergie solaire
— aux centrales hydrauliques
— aux centrales thermiques.

BIBLIOGRAPHIE :

A. DELEDICQ. *Mathématiques buissonnières.* Editeur : Cedic.

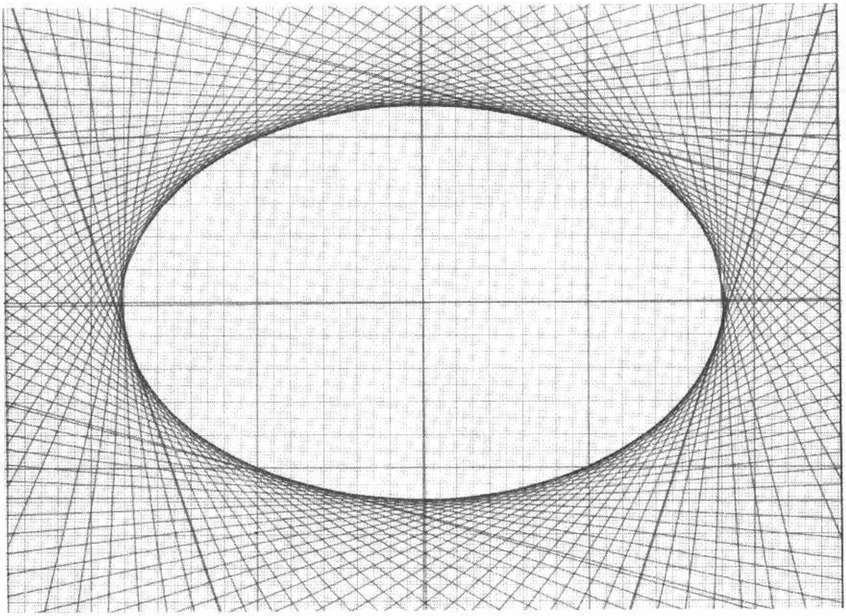
M. BERGER. *Géométrie. Tome 2.* Editeur : Cedic.

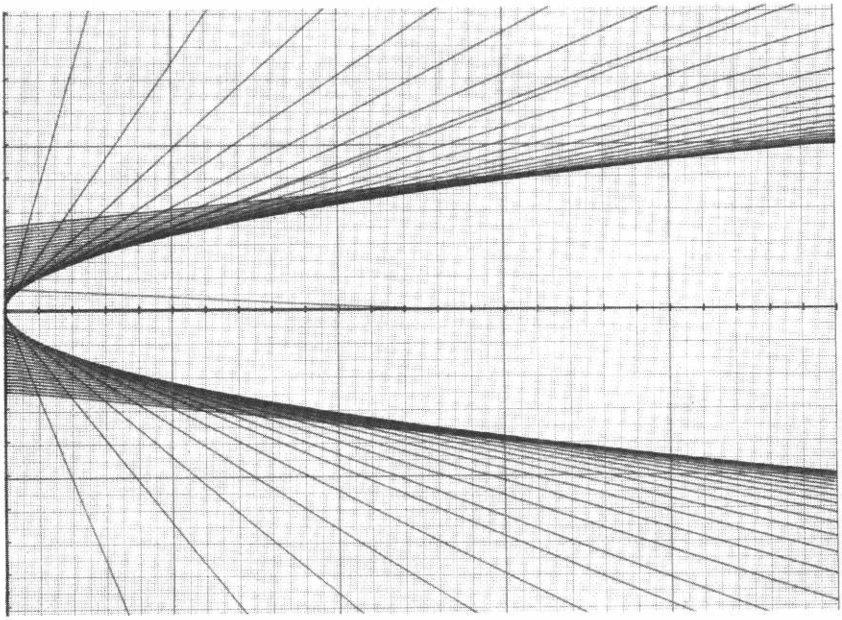
La brochure A.P.M.E.P. *Géométrie 1er cycle, Tome 2* propose, pages 193-194, une intéressante application du IV à un exercice de probabilités.

CINQUIÈME PARTIE

ACTIVITÉS A DOMINANTE « DÉCONDITIONNEMENT ET OUVERTURES »

I





II

V.1.

Claudie MISSENARD

ENVELOPPES

Ce thème est destiné à familiariser les élèves avec les instruments de dessin et à leur donner le goût de la géométrie.

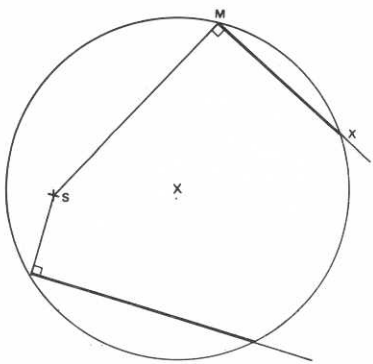
Il peut être proposé en début de quatrième, comme introduction à la géométrie, ou plus tard dans l'année, ce qui permet plus de développements.

Pour notre part, nous l'avons utilisé en début de quatrième, en nous limitant aux activités de dessin, et en classe de troisième, où les dessins ont été complétés par des activités plus théoriques.

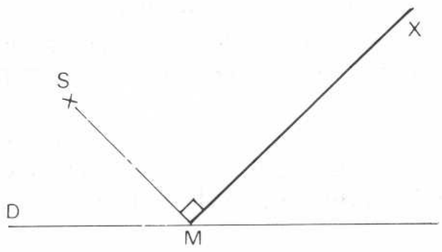
I. Activités de dessin

Les programmes de construction ci-dessous ont été distribués aux élèves. Ils ont été réalisés chez eux généralement de façon très soignée.

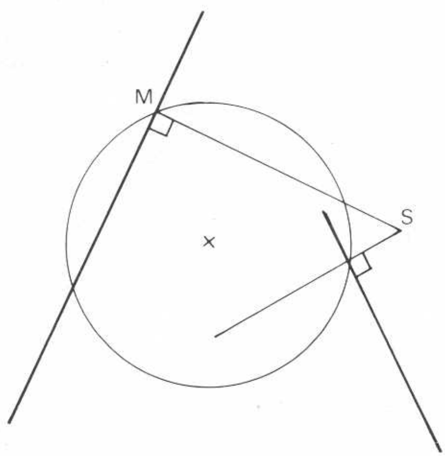
I. a. Trace un cercle aussi grand que possible dans ta feuille.
   b. Prends un point S à l'intérieur du disque - pas trop près du centre.
   c. Prends un point M sur le cercle. Au crayon à papier, trace le segment [SM] puis la demi-droite [Mx), d'origine M, perpendiculaire à [SM] et qui recoupe le cercle. Repasse à l'encre la partie de [Mx) qui est intérieure au disque.
   d. Recommence comme au c. avec de nombreux points sur le cercle.
   e. Tu constates que tes segments « enveloppent » une courbe. Dessine cette courbe au crayon à papier. Renseigne-toi sur son nom.



II. a. Trace une droite D et un point S n'appartenant pas à D.
b. Prends un point M sur D. Trace au crayon [SM] puis, en trait plus accentué, la demi-droite [Mx) qui est perpendiculaire à [SM] et qui se trouve du même côté que S par rapport à D.
c. Recommence comme au b. avec de nombreux points de D.
d. Tu constates que tes demi-droites enveloppent une courbe. Dessine cette courbe. Renseigne-toi sur son nom.



III. a. Trace un cercle pas trop grand au centre de ta feuille.
b. Prends un point S extérieur au disque, pas trop loin.
c. Prends un point M sur le cercle. Trace au crayon [SM] puis, en trait plus accentué, la droite perpendiculaire en M à [SM].
d. Recommence comme au c, avec de nombreux points sur le cercle.
e. Tu vois que tes droites enveloppent une courbe. Dessine-la. Renseigne-toi sur son nom.



On obtient (Cf. dessins pages 200 (I et II) et 205 (III) :

au I, une ellipse }
au III, une hyperbole } (la projection orthogonale du foyer sur toute tangente appartient au cercle directeur)

au II, une parabole (la projection orthogonale du foyer sur toute tangente appartient à la tangente au sommet).

La qualité esthétique du dessin obtenu est fonction de l'opiniâtreté ; elle permet de valoriser des élèves qui réussissent peu habituellement. Ce travail a en particulier obtenu beaucoup de succès dans des « classes aménagées ».

Ce type de dessin permet à l'élève une autocorrection immédiate : une perpendiculaire mal tracée saute aux yeux.

On peut terminer l'étude en organisant une exposition des dessins . Cela peut aussi susciter des réalisations genre tableaux en fils (par exemple en liaison avec l'éducation manuelle).

II. Observation des courbes :

— Ces dessins mettent en lumière un fait important et qui surprend généralement les élèves : on trace des droites, et on voit des courbes. Pas question de se lancer dans des développements à ce sujet. Mais il est bon que les élèves aient déjà fait cette constatation avant de rencontrer les notions de dérivée, d'approximation linéaire, de tangente à une courbe.

— On peut isoler la courbe (par exemple en reproduisant sur papier calque la courbe, ainsi que le foyer et le cercle ou la droite utilisés pour la construction). L'observation des courbes conduit à :

— la notion de courbes tangentes, avec tentative de formalisation ;
— la recherche des axes et centres de symétrie ;
— la comparaison des différentes courbes ; courbe fermée ou non, variation de l'allure de la courbe selon la place du foyer, etc.

— A propos des symétries, il a été remarqué que si l'ellipse ou l'hyperbole prises isolément possèdent un centre de symétrie, le programme de construction aboutissait à un dessin dissymétrique puisqu'il privilégiait un des foyers, seul utilisé pour la construction des droites de l'enveloppe. Des élèves ont corrigé le programme de construction en utilisant spontanément l'autre foyer (symétrique du premier par rapport au centre du cercle) pour obtenir un dessin symétrique.

III. L'usage du dictionnaire

Les élèves ont mis à contribution parents, grand frère, documentaliste, dictionnaires... pour trouver des renseignements sur les courbes obtenues. Une documentation ordinaire de C.E.S. ne contient presque rien concernant les mathématiques - peut-être parce que de tels documents n'existent pas. Les dictionnaires et les encyclopédies ont cependant fourni à ceux qui les ont consultés :

— les définitions métriques des coniques (foyer et directrice pour la parabole, bifocale pour les coniques à centre) ;

— les définitions des coniques comme intersection d'un cône de révolution et d'un plan.

a) La définition métrique des coniques

— donne l'occasion de rechercher d'autres ensembles de points que l'on peut définir avec une relation métrique : cercle, disque, médiatrice et aussi segment (apparaissant ici comme cas particulier d'ellipse !) ;

— permet de se livrer à des mesures sur le dessin, ce qui suppose :

- d'une part une réflexion sur la précision des mesures : la vérification n'est qu'approchée ;
- d'autre part la découverte préalable et le tracé du second foyer pour l'ellipse et l'hyperbole, de la directrice pour la parabole ; c'est une occasion pour introduire ou utiliser la distance d'un point à une droite ;

— donne l'occasion de découvrir d'autres constructions de l'ellipse (méthode du jardinier - construction point par point une fois l'excentricité donnée).

b) La section d'un cône

a permis de revoir un peu de géométrie dans l'espace et de se poser d'autres problèmes du même type : intersection d'un plan et d'une sphère, intersection d'un plan et d'un cylindre, autres possibilités pour l'intersection d'un plan et d'un cône de révolution.

IV. Dans le plan muni d'un repère (orthonormé)

Avec des élèves déjà familiarisés avec la notion de coordonnées, on a pu continuer par quelques constructions de courbes point par point :

— **Construction d'une parabole d'équation simple** ($y = x^2$ par exemple) à l'aide de la table des carrés ou d'une calculatrice. La courbe tracée fournit un bon support pour l'étude de l'application $x \longmapsto x^2$ et l'introduction de la notion de racine carrée.

— **Construction d'une hyperbole** (à partir de l'équation $xy = k$).

— **Dans le cas de l'ellipse,** on peut traduire en termes de coordonnées l'égalité $MF + MF' = a$, et écrire l'équation d'une ellipse (avec des élèves connaissant la notion de norme d'un vecteur).

On retrouve sur les courbes obtenues point par point les propriétés de symétries vues précédemment, et leur traduction en terme de coordonnées.

*
*   *

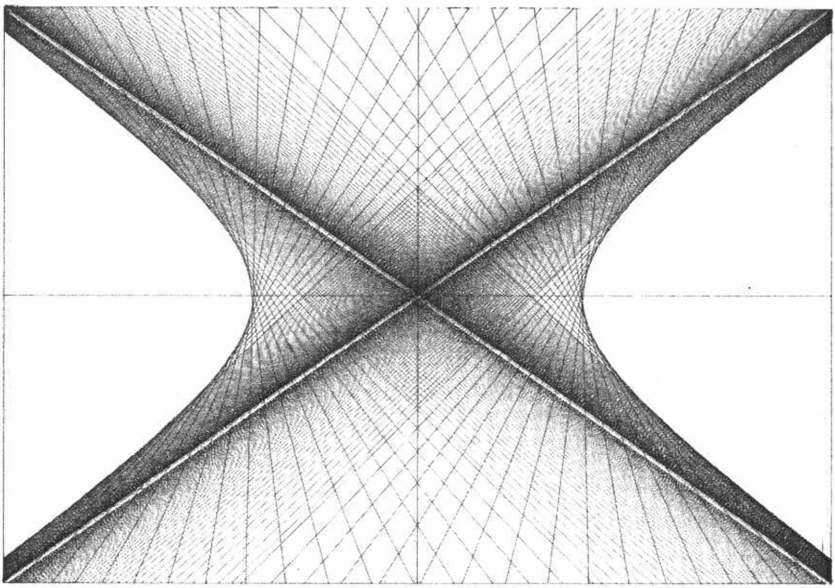
L'idée de départ de ce travail a été fournie par *Modèles mathématiques*, de H.M. Cundy et A.P. Rollett, Editions CEDIC. Il a bien montré que, ainsi que le dit cet ouvrage, « une enveloppe bien dessinée est beaucoup plus attrayante [qu'une courbe tracée point par point]. De plus, elle est bien plus facile à dessiner puisque des tracés à la règle relativement peu nombreux mènent à un résultat acceptable ».

Bibliographie complémentaire :

— Dictionnaires ou encyclopédies généraux
  — ou de mathématiques —.

— DELTHEIL-CAIRE : *Géométrie.* Classe de mathématiques Ed. J.B. Baillière.

III



V.2

Henri LABATUT

A PARTIR D'EXTENSIONS DE MA = MB : DROITES, CERCLES, ELLIPSES, HYPERBOLES

Idée générale :

• *A et B étant donnés, fixes et distincts, dans le plan, l'équation : « $M \in$ plan, quels sont les points M tels que MA = MB ? » admet un ensemble de solutions bien connu.*

• *Mais MA = MB peut s'écrire sous d'autres formes, synonymes, telles*

$MA - MB = 0$, $\frac{MA}{MB} = 1$, $MA^2 = MB^2$ *et donc* $MA^2 - MB^2 = 0$, *etc.*

• Que se passe-t-il pour M si l'on a affaire à des relations plus générales, telles :

$MA - MB = a$ *(1), à quoi l'on peut associer* $MA + MB = a$ *(2) ;*

$\frac{MA}{MB} = a$ *(3),*

$MA^2 - MB^2 = a$ *(4), à quoi l'on peut associer* $MA^2 + MB^2 = a$ *(5).*

• *Il est probablement hors de question que chaque élève fasse les cinq études ! Mais ces cinq études peuvent être réparties entre élèves ou groupes d'élèves et permettre alors d'utiles comparaisons.*

Structures de l'activité pour chacun des cas :

1. Recherche de points M :

• Résolution d'équations à deux inconnues MA, MB.

Apprendre à chercher des couples-solutions ;

à construire M chaque fois, avec le compas si possible...

Conditions d'existence ?

2. *Mise en évidence de symétries :*

• Dans tous les cas, il apparaît un axe de symétrie : (AB), et les points apparaissent (en général) deux par deux.

• Pour (2) et (4), MA et MB étant permutables, trouver un point M en donne (en général) trois autres.

Quadrilatère formé par ces 4 points. Ses symétries ?

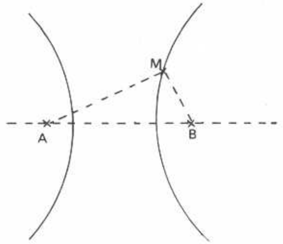
3. *Conjectures :*

(évidemment quand l'ensemble des M n'est pas vide...).

• *Cas particuliers :*
Pour (1), (3), (4), ceux qui donnent la médiatrice.
Mais aussi, pour (1) et (2), le cas a = AB.

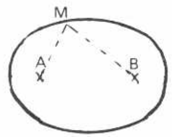
• *Cas généraux :*

① $MA - MB = -a$ $\qquad$ $MA - MB = a$



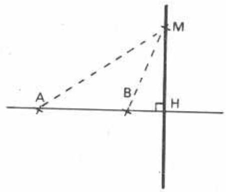
Hyperbole
Branches obtenues pour deux valeurs opposées de *a*.

② $MA + MB = a$



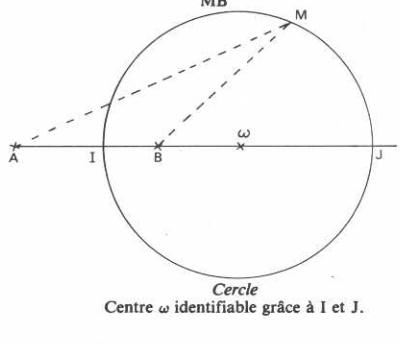
Ellipse

④ $MA^2 - MB^2 = a$



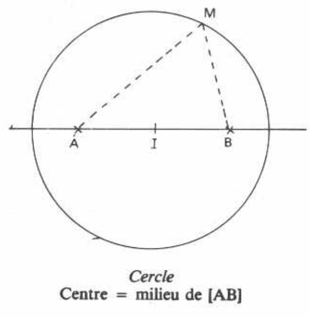
Droite **perpendiculaire à (AB)**

③ $\dfrac{MA}{MB} = a$



Cercle
Centre ω identifiable grâce à I et J.

⑤ $MA^2 + MB^2 = a$



Cercle
Centre = milieu de [AB]

4. Valeurs relatives de a et AB :

• En laissant A et B fixes, réaliser, dans chacune des cinq études, plusieurs dessins correspondant à des valeurs différentes de a.

[Cf. déjà dessin ci-dessus pour le (1)].

• Au (1), voir les cas $a > 0$, $a < 0$.

• *Au (4)*, idem.

Question : Quand la droite obtenue passe-t-elle par A (ou B) ? (Conjecture...).

• Au (3), voir les cas $a > 1$, $0 < a < 1$.

• *Au (5), question : Quand le cercle passe-t-il par A (et B) ?* (Conjecture...).

5. Démonstrations (?) :

• ***Pour (1) et (2),***
vérifier avec dictionnaire(s) usuels, ... que la condition imposée à M est une définition classique de la courbe obtenue.

Y a-t-il, d'après ces livres, d'autres caractérisations de ces courbes ?

A-t-on déjà trouvé de telles courbes au cours d'autres activités :
— en mathématique ?
— à l'occasion de dessins ? (perspective d'un cercle...).

• ***Pour (4),***
si la *relation de Pythagore* est indiquée aux élèves (ou s'ils la trouvent dans des livres ou documents), elle permet des démonstrations accessibles aux élèves de quatrième, par exemple :

$$MA^2 - MB^2 = a$$

s'écrit $$(MH^2 + HA^2) - (MH^2 + HB^2) = a,$$

égalité synonyme de $$HA^2 - HB^2 = a,$$

soit : $$(\overline{HA} - \overline{HB})(\overline{HA} + \overline{HB}) = a$$

et, donc :

$$\overline{BA} \times 2\,\overline{HI} = a, \text{ avec I milieu de [AB]}$$

égalité synonyme de $$\overline{HI} = \ldots \text{ (ou } \overline{IH} = \ldots)$$

D'où le point H.
Etc.

• Sans la *relation de Chasles* et la relation dérivée relative au milieu de deux points, il faudrait examiner plusieurs cas de figure pour se tirer d'affaire à partir de (HA − HB) (HA + HB) et, sans précautions, à partir de IH = ..., on trouverait deux points H ...

Cette étude est de ce fait une bonne mise en évidence de l'*intérêt des calculs sur les "mesures algébriques"*.

• La relation de Pythagore donne évidemment la réponse à la question : "Quand la droite passe-t-elle par A (ou B) ?"

• ***Pour (5),***
mettre une démonstration à la portée d'un élève de quatrième est-il facile ? intéressant ? ... "Démontrer" à partir de quoi ?

On peut demander aux élèves de "faire un pas" (intéressant) en leur indiquant que $MA^2 + MB^2 = 2\ IA^2 + 2\ IM^2$ (avec I milieu de [AB]).

Par contre, la relation de Pythagore (avec ses deux énoncés réciproques l'un de l'autre) permet de répondre simplement à la question : Quand le cercle passe-t-il par A (et B) ?, le résultat étant à rapprocher de ce que l'on sait (ou saura) à propos du triangle rectangle, de son hypoténuse et de la médiane associée.

• ***Pour (3),***
mettre une démonstration à la portée d'un élève de quatrième semble encore moins facile que pour (5).

Mais ici aussi on peut, par exemple, demander "deux pas" (intéressants) aux élèves en leur indiquant comme énoncés utilisables :

1 : Si $\frac{IA}{IB} = \frac{MA}{MB}$ et $\frac{JA}{JB} = \frac{MA}{MB}$, (IM) et (JM) sont les bissectrices de $\widehat{AMB}$.

Le théorème réciproque de celui-là (et qui peut être donné en premier) se démontre facilement, en 4ème, avec les aires. Par exemple, soit un triangle ABC et la bissectrice intérieure [AI] (I sur (BC)). Evaluons les aires des triangles IAB et IAC :

— d'une part avec la hauteur issue de A
— d'autre part avec les hauteurs issues de I (attention : I est équidistant de (AB) et (AC)).

Il s'en déduit aussitôt $\frac{IB}{IC} = \frac{AB}{AC}$

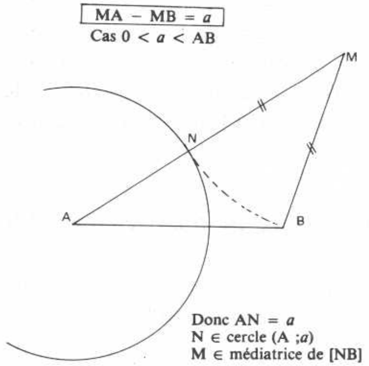
2 : Avec E, F fixes et distincts, si (GE) $\perp$ (GF) alors G est sur le cercle de diamètre [EF].
(N.B. : A une certaine époque de l'année, ce second théorème sera connu des élèves).

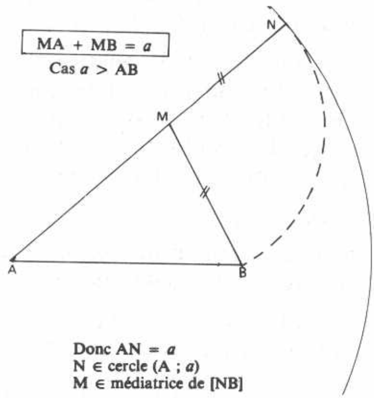
N.B. *Ces démonstrations se fondent, au moins partiellement, sur des théorèmes qui ne font pas partie du programme de quatrième.* Mais *(cf. pages 14, 30)*
— d'une part *ce qui est ici en jeu c'est essentiellement la pratique des déductions,*
— d'autre part, *si ces théorèmes sont ensuite oubliés, tant pis. S'ils ne le sont pas tout à fait, il y aura un surcroît de motivations pour procéder, le moment venu, à leur étude.*

6. Activités complémentaires pour (1) et (2) :
(Cas de l'*hyperbole* et cas de l'*ellipse*)

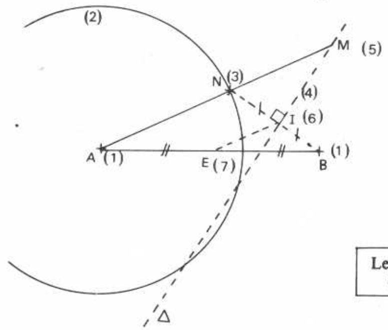
(1) : MA − MB = a
(2) : MA + MB = a

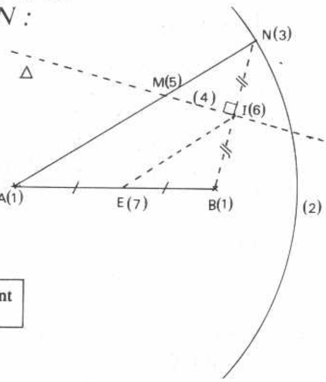
Idée générale :
"Construire" MA − MB (ou MA + MB) à partir de A ou de B.
Exploiter le dessin obtenu.





D'où des constructions de M
à partir des points N :





Les numéros indiquent l'ordre des tracés.

• Si l'on effectue les tracés à partir de nombreuses positions de N, l'hyperbole ou l'ellipse obtenues avec M apparaissent également comme les ENVELOPPES des droites △ (△ est la médiatrice de [BN]).

• *Remarques :*

① Pour l'hyperbole, cette dernière construction met en évidence les asymptotes (mot inutile en quatrième, mais ce qu'il exprime n'y est pas dépourvu d'intérêt et peut être perçu en quatrième).

② *En s'interrogeant sur la ligne décrite par I,* milieu de [BN], on suscite une *démonstration classique en quatrième,* et on retrouve deux *situations exploitées par le texte de Claudie Missenard* (pages 201-204).

Josette CASTELLI

VARIATIONS A PARTIR DE $y = x$

Problèmes. Quel est l'ensemble des points M du plan de coordonnées x et y telles que :

Problème 1 : $y - x = 0$
Problème 2 : $y + x = 0$
Problème 3 : $|y| - |x| = 0$
Problème 4 : $y + x = a$
Problème 5 : $|y| + |x| = a$
Problème 6 : $y^2 + x^2 = a$
Problème 7 : $y^2 - x^2 = a$

Il pourra éventuellement être intéressant de traiter ces problèmes dans divers repères :

— *repère* $\mathcal{R}_1$ *orthonormé,*
— $\mathcal{R}_2$ *simplement normé,*
— $\mathcal{R}_3$ *simplement orthogonal,*
— $\mathcal{R}_4$ *quelconque.*

Les problèmes 1,2,3,4 sont classiques en troisième où ils relèvent de y = ax + b. *En repère orthonormé, le problème 6 est, lui aussi, facile en troisième.*

Ces problèmes peuvent être abordés avec le seul appareil mathématique des classes de quatrième, éventuellement étoffé par l'apport d'un théorème-clé de troisième. Le problème 5 relève d'une bonne utilisation du problème 4. Mais son intérêt est sans doute ailleurs : voir ci-dessous. Le problème 7, lui, peut être précisé grâce à un "intervenant extérieur" (cf. pages 14 ou 30).

Bien entendu, il est hors de question que chaque élève aborde toutes ces études. Il y aura lieu de doser les difficultés selon les élèves, l'époque de l'année, et, parfois, de s'en tenir à un tracé expérimental par points et à la conjecture qui en découle. Ces précautions prises, les activités proposées ci-après peuvent, comme celles du V.2, servir de support à un travail d'équipes au profit du travail collectif de la classe.

Problèmes 1 et 2 : $y - x = 0$, $y + x = 0$.

Les propriétés du carré et du losange autorisent des démonstrations dans $\mathcal{R}_1$ et dans $\mathcal{R}_2$.

Par contre il faut, dans $\mathcal{R}_3$ et $\mathcal{R}_4$, se limiter à une étude expérimentale (avec de nombreux points) ou recourir à des énoncés de troisième.

Problème 3 : $|y| - |x| = 0$

Il s'agit de $y = x$ ou $y = -x$, ce qui renvoie aux problèmes 1 et 2.

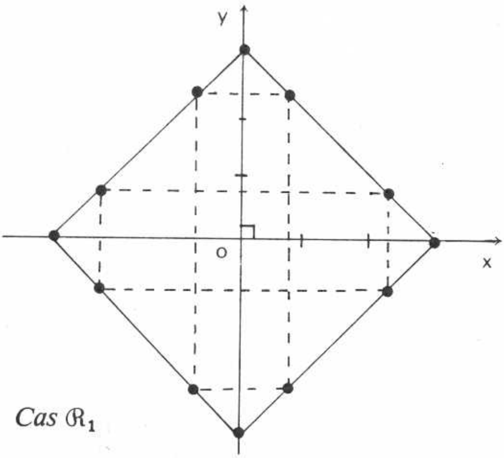
Problème 4 : $y + x = a$, a donné. Prendre par exemple $a = 3$.

Il peut être réalisé dans $\mathcal{R}_1$ et dans $\mathcal{R}_2$ des démonstrations fondées sur les seules propriétés des rectangles, carrés et losanges.

Mais c'est assez fastidieux. Mieux vaut sans doute faire une étude expérimentale, et s'y borner, ou la compléter grâce à un énoncé relatif à $y = ax + b$.

Problème 5 : $|y| + |x| = a$

Si l'on veut des solutions, il faut $a \geqslant 0$. Prendre, par exemple, $a = 3$.



Cas $\mathcal{R}_1$

L'existence des solutions exige :

$|x| \leqslant 3$, soit $-3 \leqslant x \leqslant 3$

et

$|y| \leqslant 3$, soit $-3 \leqslant y \leqslant 3$

• De plus, chaque couple-solution (x_0, y_0) en donne généralement d'abord trois autres :

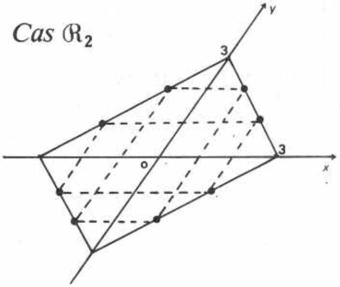
$(-x_0, y_0)$, $(x_0, -y_0)$, $(-x_0, -y_0)$,

puis quatre autres, en permutant x et y.

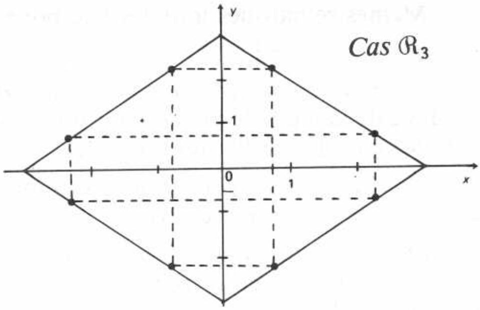
Il est intéressant de *mettre en évidence les symétries* et la nature des figures *obtenues*.

• Dès lors, il suffit de faire l'étude pour $y + x = 3$, avec $0 \leqslant x \leqslant 3$ (un intervalle moitié suffirait) — Cf.problème 4 — et de compléter par symétrie.

Cas $\mathcal{R}_2$



Cas $\mathcal{R}_3$



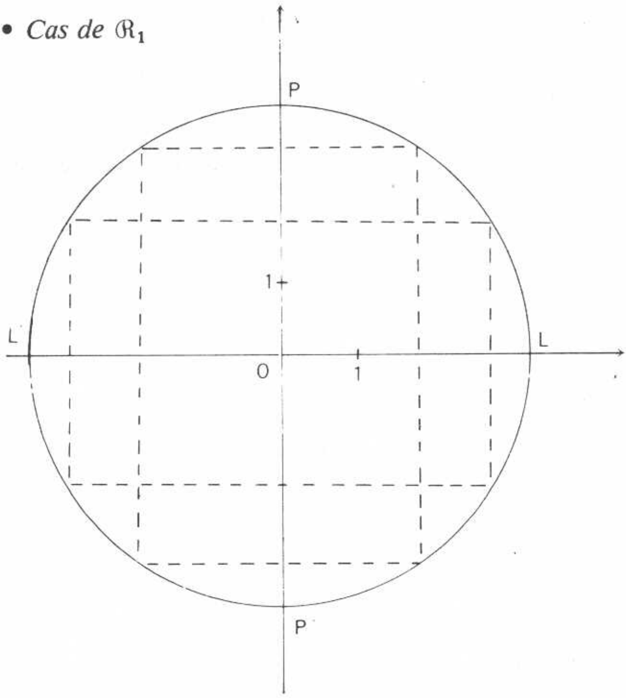
Cas $\mathcal{R}_4$
Dessin à faire.

Dans les quatre cas, étudier les configurations obtenues (symétries, carrés, losanges, rectangles, parallélogrammes).

Problème 6 : $x^2 + y^2 = a$

Ici aussi il faut $a \geqslant 0$ si l'on veut des solutions. Prendre, par exemple, $a = 9$.

• *Cas de* $\mathcal{R}_1$



Mêmes remarques initiales que pour le problème 5 :

$$-3 \leqslant x \leqslant 3 \quad ; \quad -3 \leqslant y \leqslant 3 \quad .$$

Les points vont *généralement par huit*. [Utiliser des tables de carrés ou des calculateurs de poche pour *obtenir de nombreux points*. Faire une grande figure]. Etudier *les symétries*.

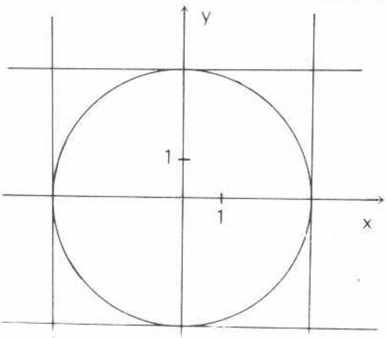
Conjecture : Il semble que les points se distribuent sur un cercle de centre 0, de rayon 3. Réciproque ?

Démonstration des théorèmes direct et réciproque : Donner le théorème de Pythagore et sa réciproque. Dès lors la démonstration est (relativement) facile en quatrième.

• *Cas de* $\mathcal{R}_2$, $\mathcal{R}_3$, $\mathcal{R}_4$: On trouve une ellipse, par points.

Pour $\mathcal{R}_3$ la démonstration est facile, sur un exemple numérique simple, si l'on sait que l'ellipse est l'image du cercle par une affinité orthogonale : il faut pour cela disposer de l'accès à une documentation adéquate ..., savoir la consulter ..., et en avoir l'idée ...

• *Etude annexe :* Dans le cas de $\mathcal{R}_1$,



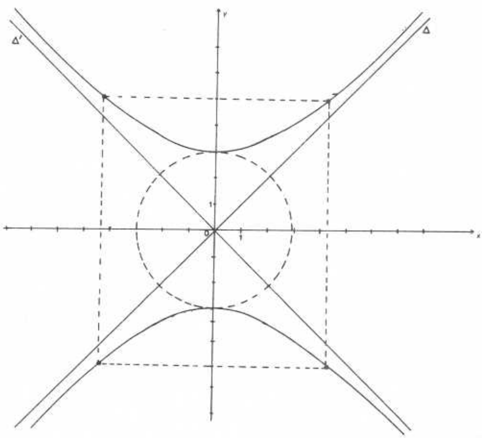
les tangentes au cercle en L, L′, P, P′ sont les ensembles de points (x, y) tels que $x = 3$ et y quelconque, ou $x = -3$ et y quelconque, ou ...

L'ensemble des points de ces tangentes est l'ensemble des points (x, y) tels que

$$(x^2 - 9)(y^2 - 9) = 0$$

Ceci reste acquis dans les autres dessins (repères $\mathcal{R}_2$, $\mathcal{R}_3$, $\mathcal{R}_4$), et c'est tout à fait du programme de quatrième.

Problème 7 : $y^2 - x^2 = a$. Par exemple : $y^2 - x^2 = 9$.



Tracé par points (en général les points vont par quatre : d'où deux axes de symétrie $(x'x)$ et $(y'y)$, et un centre de symétrie : 0)

Question 1 : Avec $x \geqslant 0$ et $y > 0$, quand x augmente de 1, que fait y ?
Tableau :

x	0	1	2	3	10	11	45	46	450	451	4500	4501
y	3	$\simeq$ 3,16	$\simeq$ 3,61	$\simeq$ 4,24	$\simeq$ 10,44	$\simeq$ 11,40	$\simeq$ 45,10	$\simeq$ 45,65	$\simeq$ 450,01	$\simeq$ 451,01	$\simeq$ 4500,001	$\simeq$ 4501,001

Question 2 : Quand x devient "très grand", que fait y ?
Comparer au problème 1.
[Il apparaît des "asymptotes"...]

Question 3 : Pour x "suffisamment grand", peut-on avoir y, avec une bonne approximation, par une formule simple ?

[• Le tableau peut suggérer

$$y \simeq x + \frac{4,5}{x}$$

auquel cas on vérifie :

$$y^2 \simeq x^2 + 9 + \frac{20,25}{x^2}$$

et ce dernier terme devient "négligeable".

• Sinon, considérer $x^2 + 9$ comme le "$a^2 + 2ab$" de $(a+b)^2$. D'où

$$y^2 = \left(x + \frac{4,5}{x} \right)^2 - \frac{20,25}{x^2} \text{ . Etc.]}$$

• Ceci répond aussi à la question 2.

• Une telle courbe est une hyperbole (équilatère).
Son identification pourrait se faire par référence à "l'équation" générale trouvée dans des documents, ou signalée :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \ .$$

• Le passage à $\mathcal{R}_2$, $\mathcal{R}_3$ ou $\mathcal{R}_4$ modifie, sans plus, le dessin de l'hyperbole et ne semble pas présenter beaucoup d'intérêt.

Henri BAREIL

VARIATIONS SUR LES DISTANCES

SITUATION-SOURCE, supposée déjà traitée :
Etude des points du plan équidistants de deux points A et B donnés.

Il s'agit ci-après d'imaginer de nouvelles études en variant la nature des éléments en jeu.

Les problèmes retenus sont à répartir entre les élèves ou groupes d'élèves. Une synthèse collective met ensuite en évidence les résultats les plus intéressants.

La présente étude signale quelques-uns *des problèmes possibles et des questions ou remarques qu'ils peuvent suggérer.*

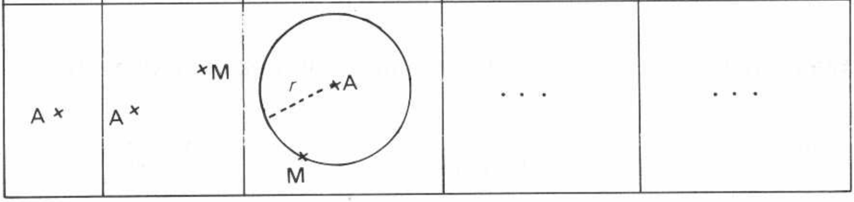
Tous ces problèmes portent sur des ensembles de points répondant à une condition donnée :

Il y a généralement lieu de dessiner d'abord des points *répondant à une telle condition. Dès que ces points sont* assez nombreux *pour le permettre,* on hasarde une conjecture, *qu'il s'agit ensuite de* démontrer, *ou de* justifier *par divers recours (cf. pages 115-123), ou d'*admettre *(**Attention** : il est important que la classe de quatrième ait assez souvent permis de prendre en défaut des conjectures pourtant fort plausibles).*

N.B. — *Les dessins sont en "modèle réduit" pour prendre moins de place. Il va de soi que, moins l'étude se révèle simple, plus il faut une figure soignée et, donc, de bonne dimensions.*

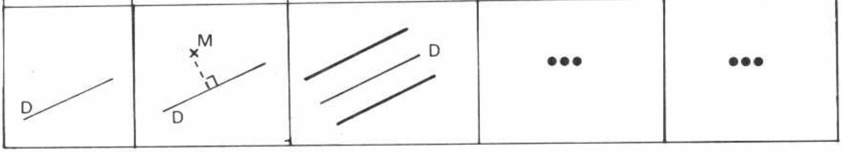
Etude de base (1) :

Phase 1 Données	*Phase 2* Concept utilisé	*Phase 3* Recherche de l'ensemble des points M du plan situés, avec r donné, à une distance d de A telle que :		
Point A donné	Distance d d'un point M au point A	$d = r$	$d < r$	$d > r$



Etude (2) obtenue, à partir de (1), en remplaçant le point A par la droite D :

Droite D donnée	**Distance de M à D**	**Ensemble des points M situés, avec *r* donné, à une distance *d* de D telle que :**		
		$d = r$	$d < r$	$d > r$



Ici les résultats font partie des énoncés évidents, à admettre.

Etude (3) obtenue, à partir de (1), en remplaçant le point M par la droite D :

Point A donné	**Droite D à la distance *d* de A**	**Droites D telles que $d = r$ (r donné)**	**Avec *r* donné, ensemble des points des droites D telles que :**	
			$d < r$	$d > r$

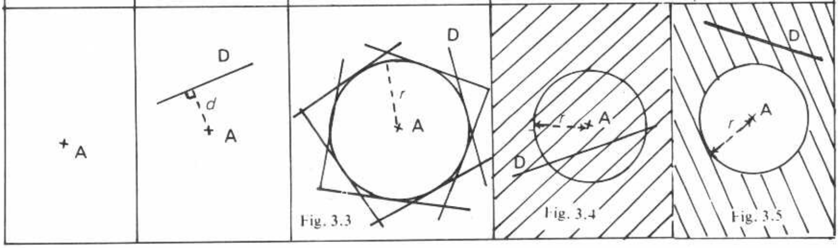


Fig. 3.3 : Il s'agit ici d'un problème simple d'enveloppe* qu'on peut reprendre en remplaçant D par un cercle.

---

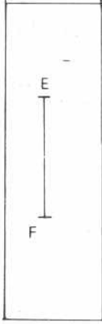
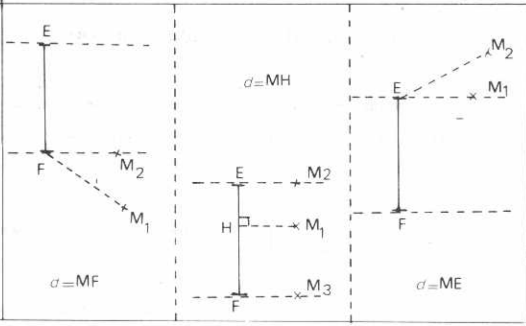
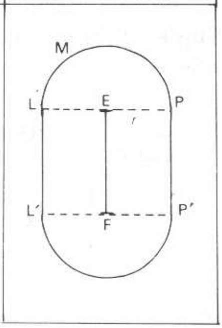
* Cf. pages 201-203.

Fig. 3.4 et 3.5 :

• Très intéressant contre-exemple de ceci : du fait que $d < r$ et $d > r$ s'excluent, on croit trop facilement que les ensembles de points M associés sont disjoints.

• Pour la fig. 3.4, le résultat, relatif aux points de D, n'est pas une condition suffisante : on peut choisir D dans la zone hachurée sans avoir $d < r$.

Etude (4) obtenue, à partir de (1), en remplaçant A par un segment [EF] :

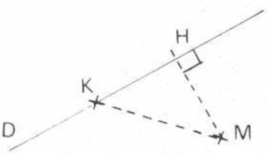
Segment [EF] donné	*Phase 2.* Cf. ci-dessous : Définition de la distance de M à [EF]	Ensemble des points M situés à la distance r de [EF]
		

N.B. — Il s'agit ici de la distance au sens que lui donne un pilote d'hélicoptère s'approchant d'une piste d'atterrissage rectiligne.

Exemple de problème classique : comment généraliser une définition ?, et généralisation pour la distance à un ensemble :

• *Commentaire pour la phase 2 ci-dessus :*

Il convient d'analyser ce qu'est la distance d'un point à une droite pour mettre en évidence un critère généralisable.



Critère n° 1 : (MH) $\perp$ D .
Critère n° 2 : H est la position de K sur D telle que MK soit minimum.
C'est ce critère n° 2 qui se révèle praticable pour la distance à un segment.

[Remarque : ce critère est effectivement l'un de ceux qui *se généralisent pour définir une distance d'un point M à un ensemble E quelconque*].

Etude (5) obtenue, à partir de (1), en remplaçant A par { E,F }, paire de points :

Paire { E,F }	Définition de la distance *d* de M à { E,F }	Avec *r* donné, ensemble des points M situés à la distance *r* de { E,F }

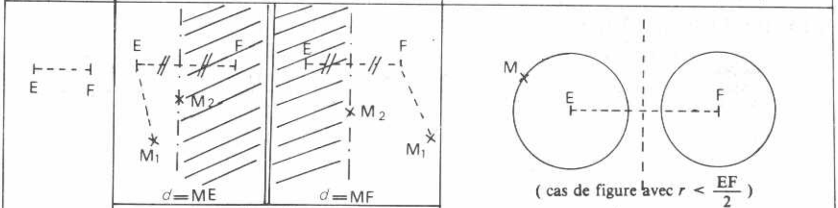


fig. 5.2

fig. 5.3

Etendue à 2 paires, cette étude revêt un intérêt certain (Cf. étude 16).

Mais déjà la figure 5.3 met en évidence, dans ce cas de figure, et sur un exemple plus simple que celui de l'hyperbole, la possibilité pour un ensemble de points M, déterminé par une condition unique, d'être formé de deux parties séparées.

Etude (6) obtenue, à partir de (1), en remplaçant M par [EF] :

Phase 1	Phase 2	Phase 3
A donné	Distance de [EF] à A : Voir Etude (4)	Ensemble des points des segments [EF] tels que ces segments soient à la distance *r* de A :

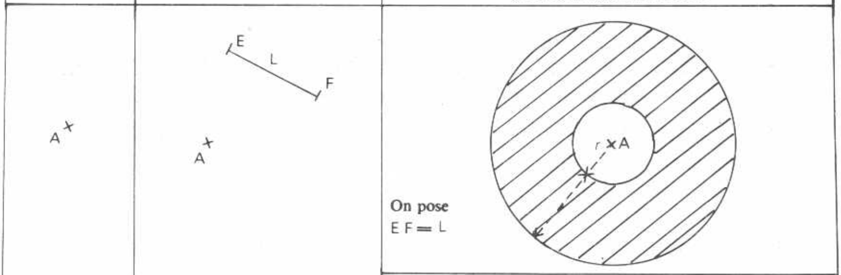


Fig. 6.3

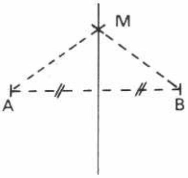
La phase 3 relève ici de problèmes d'enveloppe, de maximum et de minimum. Conjecturer le résultat sera sans doute suffisant en Quatrième.

Il y a ici un autre intérêt : La condition, nécessaire, d'appartenance des points de [EF] à la couronne hachurée n'est pas une condition suffisante pour que [EF] soit à la distance *r* de A.

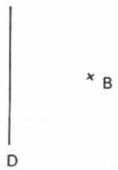
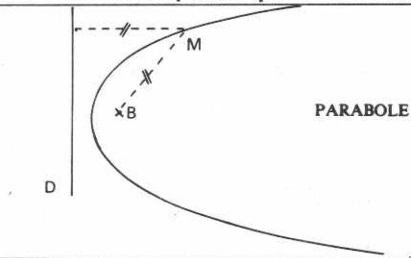
Etudes (7), (8), ... :

On peut imaginer d'autres études, à partir de (1), en remplaçant, par exemple, A ou M par une demi-droite, ou par un cercle, ...

Etude de base (10) :

Deux points donnés A et B	Ensemble des points M (du plan) tels que :		
	MA = MB	MA > MB	MA < MB
		•••	•••

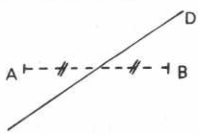
Etude (11), obtenue à partir de (10) en remplaçant A par une droite D :

Données	Ensemble des points M équidistants de D et de B	
		•••

• En dessinant trop peu de points M, le tracé devient fantaisiste. C'est alors un bon exemple de prise en défaut d'une conjecture.

• L'énoncé du résultat (parabole) relève d'un appel à des "intervenants extérieurs" (professeurs, livres, ... : Cf. page 14 ou 30).

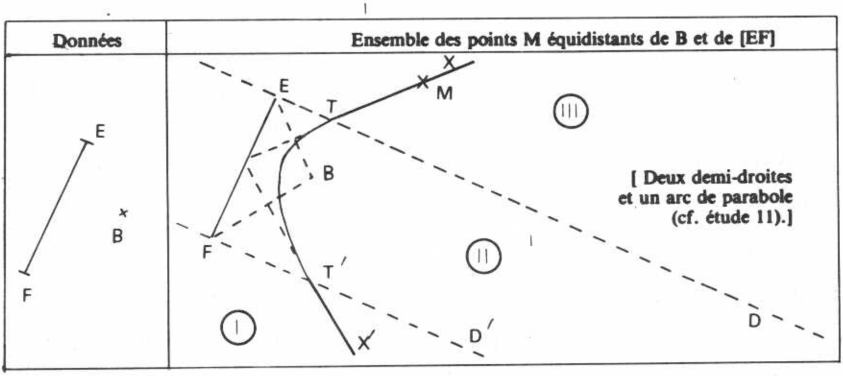
Etude (12), obtenue à partir de (10) en remplaçant M par une droite $\triangle$:

Données	Droites D équidistantes de A et de B		
	 1ère famille de droites D	 2ème famille	•••

• Les deux familles forment deux ensembles bien distincts, alors que l'ensemble des points de toutes les droites d'une famille est chaque fois le plan.

• Ici, le critère relatif à chacune des familles fournit une condition, suffisante, mais non nécessaire, d'équidistance à A et B.

Etude (13), obtenue à partir de (10) en remplaçant A par [EF] :



1^er^ intérêt : *Etude à faire par régionnements* (I , II , III) :

Il faut organiser sérieusement la recherche des points M pour qu'elle permette une bonne conjecture.

2^e^ intérêt : *Problème de la continuité et des frontières :*

Il y a, pour chaque région I, II, III, une étude propre.

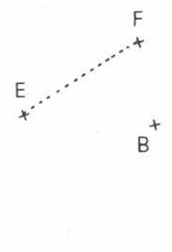
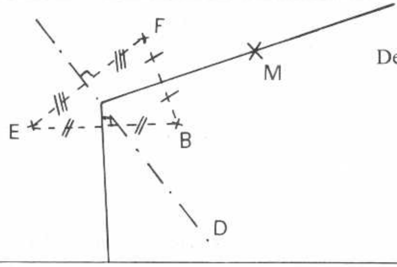
Mais y a-t-il continuité (au sens intuitif) d'une région à l'autre ?

Par exemple on a, à la fois : $D \subset$ II et $D \subset$ III. Donc il doit y avoir continuité. Cela se traduit par le point unique T, sur la frontière, à la fois point de la demi-droite de III et de l'arc de parabole de II.

De plus, [Tx) n'est-elle pas tangente en T à l'arc de parabole ? (Faire un grand dessin soigné. D'où une conjecture. — Des documents, d'un niveau assez élevé, préciseraient que [Tx) est bien tangente —.)

N.B. Les mêmes remarques peuvent être faites à propos de l'étude (4), sauf que, pour (4), il n'y a aucune difficulté à établir que les droites (LL') et (PP') sont tangentes aux demi-cercles.

Etude (14), obtenue à partir de (10) en remplaçant A par { E,F } :

Données	Ensemble des points M équidistants de { E,F } et de B	
		Deux demi-droites.

Encore un régionnement et, cette fois, pour le franchissement de D, une continuité relative aux points mais non aux tangentes ...

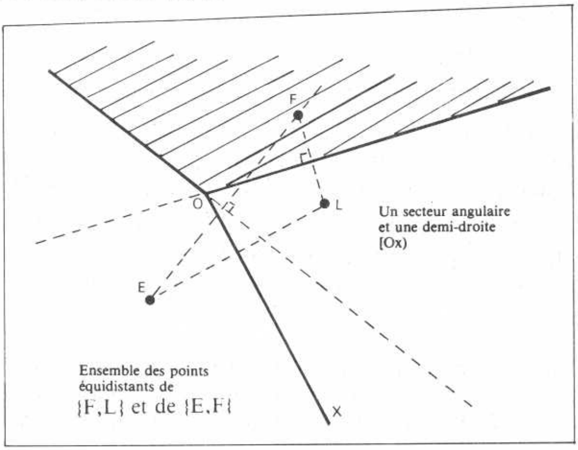
• *On peut, ici, comparer à l'étude (5), dans le cas de figure* $r > \dfrac{EF}{2}$.

Etude (15), obtenue en remplaçant A par {E,F}, B par {L,N}.

Le cas de figure général est moins intéressant que le cas particulier (16) traité ci-dessous (mais le résultat, constitué de segments ou de demi-droites portés par des médiatrices, est assez simple à établir et il utilise, pour les "raccords" d'une région à l'autre, le fait que les médiatrices d'un triangle sont concourantes.

Etude (16) (cas particulier de (15) avec N = F) :

(Cf., d'abord, étude (5)).



L'étude 16 s'inscrit en faux contre la tendance à imaginer que, dès qu'un point M est soumis à une condition d'égalité, l'ensemble des points M possibles est une *ligne,* au sens commun.

Autre remarque : le cas général de l'étude (15) ne présente rien d'analogue. Voilà avec (16) un exemple d'un cas particulier qui s'éloigne davantage du sens commun ...

Etude (17), avec [EF] et [LN] au lieu des points A et B (à faire).
Attention : toute démonstration renvoie, en partie, au (18).

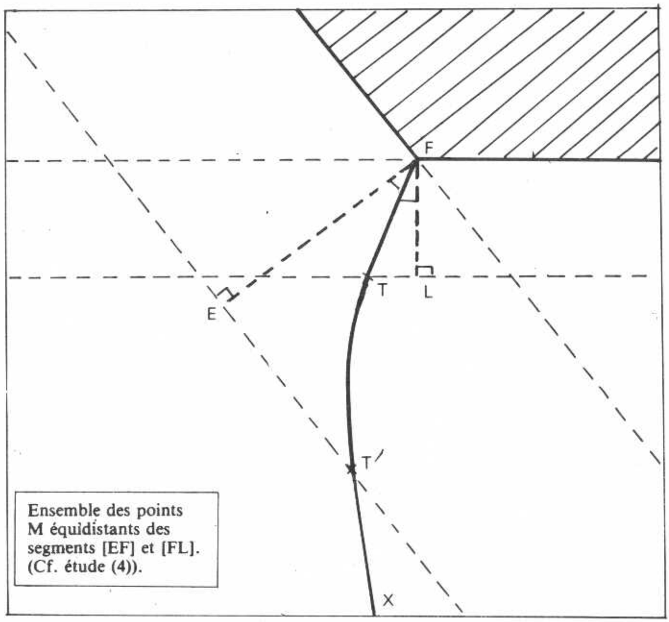
Comme pour le (15), le cas particulier N = F est plus intéressant que le cas général. (Pour celui-ci on trouve un peu de paraboles, un peu de bissectrice, un peu de médiatrices ...).

CAS PARTICULIER où N = F (étude 17').

Il y a neuf régions à étudier. Le résultat est remarquable : il est constitué par :

— tout un secteur angulaire (hachuré)
— un segment de bissectrice : [FT]
— un arc de parabole $\overset{\frown}{TT'}$
— une demi-droite [T'x), portée par la médiatrice de [EL].

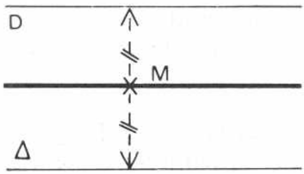
Pour la continuité, mêmes remarques que pour l'étude (13).



Ensemble des points M équidistants des segments [EF] et [FL]. (Cf. étude (4)).

Etude (18), obtenue à partir de (1) en remplaçant A et B par deux droites D et △ :

(18₁) D *et* △ *parallèles.*



Ensemble des points M équidistants de D et △ :

Ici on rencontre un résultat évident, à admettre.

(18_2) D *et* △ *sécantes.*

Cf. étude sur les symétries, pages 43,44.

• La phase de construction des (quatre) points situés à une distance *a* de D et de △, et l'étude, par ses symétries, de la figure obtenue, sont intéressantes.

• Le cas particulier : D ⊥ △ est plus facile.

• En conjuguant l'étude 18_2 et l'étude 5, on obtient d'amusantes généralisations de la "taxi-distance", dues à Irneh Lierab et popularisables sous le nom de "métro-distance" (Nous y viendrons dans le tome 2, s'il veut bien de nous). — Le partage de la mer d'Iroise entre la France et l'Angleterre a d'ailleurs relevé de principes analogues —. Nous en reparlerons ...

Louis PLANE

CALCULS SUR LES DIFFERENCES FINIES

(Thème "vertical" : quatrième, troisième, second cycle)

I. Exercice 1 : Un "tableau de différences"

n	a_n	b_n	c_n
0	0		
		3	
1	3		2
		5	
2	8		2
		7	
3	15		2
		9	
4	24		2
		11	
5	35		
6			
7			
8			

On constitue un tableau de nombres de la façon suivante :

- Dans la première colonne, on place les naturels n tels que $n \leq 8$.
- Dans la deuxième colonne on place les valeurs de $x^2 + 2x$ pour les naturels précédents. On obtient ainsi une suite (a_n).
- Dans la troisième colonne, on place les valeurs de la suite (b_n) définie par les relations

$$b_o = a_1 - a_o \ , \ b_1 = a_2 - a_1 \ , \ \ldots, \ b_7 = a_8 - a_7.$$

Ainsi, $b_k = a_{k+1} - a_k$, pour tout k élément de $[1 \ , \ 7]$.

- Enfin, dans la quatrième colonne, on place les valeurs de la suite (c_n) où $c_o = b_1 - b_o \ , \ \ldots, \ c_6 = b_7 - b_6$.

— On observe que c_n est constant et égal à 2.

— Connaissant a_o , b_o , c_o ,

- comment retrouver les valeurs de tous les nombres b_n ?
- comment retrouver alors les valeurs de tous les nombres a_n ?

On pourra apprécier la facilité des calculs des a_n successifs, à exploiter pour la représentation graphique de la fonction $x \longmapsto x^2 + 2x$.

EXERCICE 2 :

① Constituer un tableau analogue pour $x^2 - 2x$ (pris en 2ème colonne).

② On pose $P_o(x) = x^2 - 2x$; alors $a_n = P_1(n)$

Calculer $P_1(x) = P_o(x+1) - P_o(x)$

Que vaut $P_1(n)$, pour $n \leq 8$?

Calculer $P_2(x) = P_1(x+1) - P_1(x)$

Que vaut $P_2(n)$ pour $n \leq 8$?

Calculer enfin $P_3(x) = P_2(x+1) - P_2(x)$

EXERCICE 3 (à la maison) :

① Reprendre le thème précédent pour $P_o(x) = x^3 - x$ (Ici il faut une colonne supplémentaire pour aboutir à une suite constante).

② Reprendre pour $P_o(x) = x^4$

EXERCICE 4 :

Reprendre le thème pour $P_o(x) = ax^2 + bx + c$

II. Vers l'idée d'interpolation (nouveau thème)

EXERCICE 5 :

— On reprend $P_o(x) = x^2 - 2x$, et on pose $a_o' = P(0)$, $a_1' = P\left(\frac{1}{10}\right)$, $a_2' = P\left(\frac{2}{10}\right)$, …, $a_{10}' = P(1)$. Former à nouveau un tableau analogue à celui de l'exercice 1. Observer ce tableau, et en déduire un procédé de calcul de $P\left(\frac{n}{10}\right)$ où $0 \leq n \leq 10$ connaissant a_o' , b_o' , c_o'. Ce procédé évite tout recours à des multiplications et divisions.

— Calculer
$$P_1(x) = P_o(x + \frac{1}{10}) - P_o(x)$$
$$P_2(x) = P_1(x + \frac{1}{10}) - P_1(x)$$
$$P_3(x) = P_2(x + \frac{1}{10}) - P_2(x)$$

— Comparer la suite (c_n') du présent tableau (quatrième colonne) à la suite (c_n) de l'exercice 2.

EXERCICE 6 :

Soit h un nombre fixé tel que $0 \leq h \leq 1$.

On pose $P_0(x) = x^2 - 2x$

Calculer $P_1(x) = P_0(x + h) - P_0(x)$

$P_2(x) = P_1(x + h) - P_1(x)$

et $P_3(x) = P_2(x + h) - P_2(x)$

Appliquer au cas où $h = \frac{1}{100}$.

On suppose connues les valeurs $P_0\left(\frac{n}{10}\right)$, $0 \leq n \leq 10$.

Indiquer un moyen de construire la table des valeurs de $P_0\left(\frac{k}{100}\right)$ où $0 \leq k \leq 100$.

Expliciter les calculs pour $10 \leq k \leq 20$.

Quelle erreur commet-on si on remplace $P_0\left(\frac{15}{100}\right)$ par la moyenne $\frac{1}{2}\left[P_0\left(\frac{10}{100}\right) + P_0\left(\frac{20}{100}\right)\right]$?

III. Prolongement pour le second cycle :

- On considère toujours $P_0(x) = x^2 - 2x$.

a) Soit L une fonction affine : $x \mapsto ax + b$. Alors L conserve les barycentres ; en particulier si $10 \leq n \leq 20$,

$$L\left(\frac{n}{100}\right) = \frac{20-n}{10} L\left(\frac{10}{100}\right) + \frac{n-10}{10} L\left(\frac{20}{100}\right)$$

b) On prend pour L l'unique fonction affine interpolant linéairement P_0 sur $\left[\frac{1}{10}, \frac{2}{10}\right]$; alors

$$L\left(\frac{n}{100}\right) = \frac{20-n}{10} P_0\left(\frac{1}{10}\right) + \frac{n-10}{10} P_0\left(\frac{2}{10}\right)$$

c) Mettre dans un tableau

$$a_n = \mathrm{P}_0\left(\frac{n}{100}\right), \quad a'_n = L\left(\frac{n}{100}\right) \text{ et } \quad d_n = a_n - a'_n$$

d) *Remarque.* $P_0 - L$ s'annule en $\frac{1}{10}$ et $\frac{1}{20}$, donc

$$P_0(x) - L(x) = c\left(x - \frac{1}{10}\right)\left(x - \frac{1}{20}\right)$$

et $c = 1$ (comparer les termes en x^2)

donc $|a_n - a'_n| = \frac{1}{10^4}(n - 10)(20 - n)$

(maximum pour $n = 15$)*.

$$|a_n - a'_n| \leq 2{,}5.10^{-3}$$

e) *AUTRE REMARQUE : Il y a intérêt à appuyer ce calcul numérique d'une explication sur les représentations graphiques.*

* On retrouve ici, sans avoir besoin d'une étude générale sur le second degré, le maximum du produit de deux nombres dont la somme est constante. Cf. page 169.

SIXIÈME PARTIE

BIBLIOGRAPHIE

INDEX

BIBLIOGRAPHIE GENERALE

- BERGER (M.). Géométrie. 5 volumes de haut niveau. Ed. CEDIC.
- BANDWELL, SAUNDERS, TAHTA. Points de départ. Ed. CEDIC.
- BOSSARD (Y.). Rosaces, frises, pavages. Vol. 1. Ed. CEDIC.
- CASTELNUOVO-BARRA. Mathématiques dans la réalité. Trad. française. O.C.D.L.
- DELEDICQ (A). Mathématiques buissonnières. Ed. CEDIC.
- EMPAIN Louis : L'art et la géométrie ; Un module parcourt l'espace. Ed. DESSAIN et TOLRA
- IREM de Strasbourg. Le livre du problème. Ed. CEDIC. (6 volumes : *Pédagogie de l'exercice et du problème* ; Géométrie affine ; La parité ; La convexité ; Calcul barycentrique ; Géométrie d'incidence).
- de LANDSHEERE (G. et V.) Définir les objectifs de l'éducation. Ed. P.U.F.
- LASSAVE (C.). Les bases des maths, en 3^e^. Ed. NATHAN.
- LES MATHEMATIQUES AUJOURD'HUI. Plaquettes éditées par VUIBERT. (Les nombres et leur histoire - Calculateurs numériques ; mathématiques connexes. Quelques curiosités mathématiques - Les nombres de hasard ; l'induction en mathématiques, les nombres géométriques - Introduction à la théorie des jeux - Equations aux différences finies - ....etc...).
- POLYA.
  - LA DECOUVERTE DES MATHEMATIQUES (2 vol.) Ed. DUNOD
  - COMMENT POSER ET RESOUDRE UN PROBLEME Ed. DUNOD
  - LES MATHEMATIQUES ET LE RAISONNEMENT PLAUSIBLE. Ed. GAUTHIER-VILLARS
- WEYL (H.). Symétrie et mathématique moderne. Ed. FLAMMARION.

BIBLIOTHÈQUE A.P.M.E.P.

Prix avec port. (Entre parenthèses, prix sans port)

Commander à une Régionale, ou à BLONDEL,
154, avenue Marcel CACHIN, 92320 Châtillon-sous-Bagneux

NOUS SIGNALONS PARTICULIÈREMENT, POUR LE PREMIER CYCLE :

- *Toute la collection MOTS* (Il paraît une brochure tous les 1 ou 2 ans). Chacun des trois premiers tomes : 9 F (6 F). Tome IV (1978) : 11 F (7 F)
- *Savoir minimum en fin de Troisième* (Cf. page 145). 19 F (15 F)
- *Géométrie au premier cycle.* Cf. pages 242 ... Tome 1 (1977) : 29 F (25 F). Tome 2 (1978) : 30 F (25 F)
- *Calculateurs programmables et algèbre de 4ème* (1978) : 24 F (20 F)
- *Quelques apports de l'informatique* ... (1977) : 29 F (25 F)
- *Les manuels scolaires* ... (cf. page 97). Brochure à paraître en septembre 1979.

....

Sans oublier le *Texte d'orientation A.P.M.E.P. 1978*

Une bibliographie d'ouvrages fondamentaux, présentant sommairement ceux-ci, sera publiée dans le tome 2.

INDEX

MODE D'EMPLOI DES INDEX :

- *Les références des mots signalés en colonne (1) ne concernent que leurs interventions les plus significatives ou les plus intéressantes* (et non tous les passages qui peuvent les faire apparaître ou les concerner).

- De même l'index 2 ne répertorie volontairement :
  — ni les mots d'usage courant (tels : abscisse, repère, repère orthonormé...),
  — ni des mots de très faible usage, peu réinvestis (tel : cercle directeur).

- *Les références en CARACTÈRES GRAS soulignent des interventions particulièrement importantes.*

*

*   *

- Les références renvoient, dans l'ordre, aux articles et à leurs subdivisions successives. *Exemples :*

Référence	Signification
II.6	Deuxième partie de la brochure, et sixième article de cette partie. Il s'agit donc de l'article : "Les symétries". (Chaque article est ainsi référencé en tête de son texte et dans le sommaire).
III.4.IV	Troisième partie de la brochure → article n° 4 → Subdivision IV de celui-ci.
III.4.I.2	Troisième partie de la brochure → article n° 4 → Subdivision I de celui-ci → sous-titre 2 de cette subdivision.
5.3.1,5	Cinquième partie de la brochure → article n° 3 → Subdivisions 1 et 5 de celui-ci.

- Les références successives sont séparées par des points-virgules.

- *On voudra bien excuser, et nous signaler, erreurs ou omissions. Merci !*

INDEX 1 : Comportements.

INDEX 2 : Notions, concepts, *méthodes, outils, problèmes.*

. INDEX 1 : COMPORTEMENTS

N.B. *La colonne INTERSECTORIEL regroupe, pour chaque comportement signalé en ①, ce qui est étroite imbrication entre :*

— *géométrie et numérique,*
— *mathématiques, expérience physique, vie pratique.*

①	GÉOMÉTRIQUE (dont vectoriel)	NUMÉRIQUE	INTER-SECTORIEL
manipuler	I.2.III.1 ; II.5 ; II.6 : III.1 :		
réaliser de façon soignée des tâches techniques (dessins, calculs, ...)	II.1 : II.2.V : II.3 ; II.4 ; II.5 ; II.6 ; II.8 ; IV.6 ; IV.7 ; **V.1** ; V.2 ;	III.1 : III.3 ; IV.5 ; IV.7 ; V.3 ; V.5 ;	II.7 ; IV.8 ; IV.9 ; **V.3** ; V.4 ;
transférer (... ; appliquer ; construire un exemple, un modèle ; illustrer ; faire fonctionner ; ...)	**II.6** ; II.8 ;	III.1 ; IV.5 : IV.7 ; V.5 ;	III.6 ; III.7 ; IV.4 ; IV.6 : IV.7 ; IV.8 ; IV.9 : V.4 ;
observer et choisir (... ; discerner ; représenter ; schématiser ; ...)	II.2.I.2 ; II.5 ; II.6 ; II.8 : V.1 ;	IV.5 ; V.5 ;	II.7 ; **III.5.1 ; IV.2** ; IV.6 ; IV.8 ; IV.9 : V.2 ; V.3 ; **V.4 ;**
bricoler, tâtonner.	II.1 ; **II.5** ; II.6 ; II.8 ;	III.4 ;	III.6 ; III.7 ; IV.1 ; IV.6 ; IV.8 ; IV.9 ; V.4 ;
organiser, ranger, classer.	II.1 ; II.2. I.2 ; II.5 ; II.6 ;	III.1 : V.5 ;	IV.1 : **IV.2** ; IV.6 ; IV.8 ; IV.9 ; V.2 ; V.3 ; **V.4** ;
organiser une recherche en groupe	II.1 ; **II.2 ; II.5 ;** II.6 ; II.7 ; II.8 ;		**III.3** ; III.4 ; **IV.2** ; IV.8 : **V.4** ;
rechercher et utiliser des documents ; ouvrir sur l'interdisciplinarité	II.1 ; II.2 ; II.5 ; II.6 ; II.8 ; **V.1** ; **V.2** ;	III.4 ;	I.2.III.7 ; III.3 ; III.6 **; IV.2** ; IV.9 ; V.3 ; **V.4** ;
communiquer et exprimer (raconter ; rédiger ; coder ; symboliser ; formuler ; passer d'un langage dans un autre ; ...)	II.1 : II.2 : II.4 : **II.5** II.6 ; III.1 ;		I.2.III.4 : I.2.III.6 ; II.7 ; III.6 ; III.7 ; IV.1 ; **IV.2** ; IV.4 ; V.4 ;
prouver, convaincre — sans démontrer — *argumenter.*	II.5 ; II.6 ; II.8 ; V.1 ; V.2 ;	III.4 ; IV.5 ; IV.7 ;	II.7 ; **III.6** ; IV.1 ; IV.2 ; IV.6 ; IV.8 ; IV.9 ; V.3 ; V.4 ;
démontrer : à peu près partout, mais notamment :	I.2.III.5 ; **II.6** ; II.8 ; III.5 ;	**III.5 ; III.7 ;** IV.5 ; **IV.7 ;**	IV.4 ; **IV.6** ; IV.8 ; IV.9 ;**V.3.5 et 6 ; V.4 ;**

... / ...

prévoir, conjecturer (... ; évaluer ; ...)	II.1 ; II.2.I.1 ; II.2.I.3 ; II.5 ; **II.6 ; II.8 ; III.3 ;** III.4 ; V.1 ; V.2 ;	**III.3** ; III.4 ; IV.5 ; V.5 ;	III.1 ; III.3 ; III.6 ; III.7 : IV.2 ; IV.4 ; IV.6 ; IV.7 ; **IV.8** ; IV.9 ; V.3 ; V.4 ;
s'auto-contrôler			I.2.III.8 ;
critiquer (vérifier ; interpréter ; rechercher des contre-exemples ; remettre en question ; optimiser ; ...)	II.1.6 ; II.2 ; II.3 ; II.5 ; II.6 ; II.8 ; III.1 ; **III.3** ; **III.4**; V.1 ; V.2 ;	III.1 ; **III.3** ; **III.4** ; IV.3 ; IV.5 ; V.5 ;	I.2.III.3 ; III.2 ; III.3 ; **III.4** ; **IV.1** ; IV.2 ; IV.4 ; **IV.8** ; IV.9 : V.3 ; V.4 ;
chercher, faire preuve de créativité (inventer ; émettre des hypothèses ; imaginer ; multiplier les expériences ; faire varier des données ; généraliser ; ... ; déceler et poser des problèmes ; ...)	I.2.II ; I.2.III.2 ; II.2.1 ; **II.5** ; **II.6** ; II.8 ; **III.3** ; III.4 ; **III.5** ; **V.1** ; **V.2** ;	III.3 ; III.4 ; **III.5** ; IV.5 ; V.5 ;	I.2.III.9 ; III.1 ; **III.5.1 et 11** ; III.6 ; III.7 ; **IV.1** ; **IV.2** ; **IV.6** ; **IV.7** ; IV.8 ; IV.9 ; **V.3** ; **V.4** ;
aimer et apprécier (esthétiquement, affectivement, ... plaisir, ...)	II.5 ; II.6 ; V.1 ; V.2 ;		I.2.III.Rq 2 ; V.3 ; V.4 ;

INDEX 2 : NOTIONS, CONCEPTS, METHODES, OUTILS, PROBLEMES

• **Rappel :** La colonne INTERSECTORIEL regroupe, pour chaque terme de la colonne (1), ce qui est étroite imbrication entre :
— algèbre et géométrie
— mathématiques, expérience physique, vie pratique.

• ***Emploi des italiques :*** *Ce sont des méthodes, outils, problèmes qui sont ainsi signalés.*

(1)	GÉOMÉTRIQUE (dont vectoriel)	NUMÉRIQUE	INTER-SECTORIEL
absolue (valeur)		III.4.I.1; III.4.III; IV.3 ;	V.3.3 et 5
affine (application) - représentation graphique -		III.4.III et IV ; III.4.IV ; V.3.1à5;	
affinité (transformation géométrique)	III.4.III ;		
aire (voir surface)			
angles (somme des —)	2.III.5 ; II.5 ; III.3 ;		

... / ...

approximations		IV.4 ; V.5 ;	III.4.I.1 ; IV.2 ; V.3.6 et 7 ;
arbres			IV.8 ;
arc capable	II.8 ; III.3.III ;		
arrangements (nombre d'—)			IV.8.2 ;
associativité	II.6.IV ;	IV.4 ;	
asymptote			V.2.6 ; V.3.7 ;
axes (effet de changements d'—)			V.3 ;
bissectrice • bissectrice et angle inscrit • théorème $\frac{MA}{MB}$ …	II.2.1 ; **II.6** ; III.5 ; III.3 ; V.2 ;		
carré	II.1.4 ; II.5 ; III.7.3 ;		II.6.II.5 ; IV.8 ; V.3.5 ;
cercle • équation d'un — • circonscrit • inscrit • $\frac{MA}{MB} = a$ • $MA^2 + MB^2 = a$	préfaces ; I.2.III.Rq3 ; II.2 ; II.6 ; II.6 ; V.2 ; V.2 ;	V.3.6 ;	
cerf-volant	**II.6.II.2** ; II.8 ;		
CHASLES (relation de —)	II.6 ; V.2 ;		
cohérence (problèmes de —)	I.2.1 ; II.5 ;		
combinaisons (nombre de —)			IV.8.2,4,5 ;
commutativité (ou non-)	**II.6**	**III.4.III** ;	
compositions d'applications autres que symétries, translations, homothéties	I.2.III.2 ; II.8 ;	III.4.III ;	
conchoïdes	III.3 ; III.4.IV ;		
concourantes (droites—)	II.2.I.1 ; **II.6** ;		IV.7.I et V ;
conditions nécessaires, suffisantes, (ou les deux)	**II.8** ; III.3 ; V.4.(3),(6),(12) ;	III.1 ; IV.3 ; IV.5.6 ;	
cônes	III.1 ; V.1 ;		
convexité	II.1 ;		
coordonnées (outil—)	**II.6** ; II.7 ; **III.7** ;		**III.7** ;
coordonnées (de vecteurs)		II.7 ;	
cordes (d'un cercle)	II.6 ;		

... \ ...

courbes représentatives (de fonctions, ou d'équations données)		III.4.1 ;	V.3 ;
cylindres	III.1 ; V.1 ;		
dénombrements (problèmes de —)	II.1 ; III.3 ;		II.6.II.5 ; III.3 ; **IV.6 ;** **IV.8.1,2,4 à 9 ;**
différences (tables de —)	III.3.IV ;	**V.5 ;**	
distances • non classiques, entre 2 points • d'un point à une droite • d'un point à un cercle • d'un point à une paire de points • d'un point à un segment	préfaces, puis partout IV.9.I ; V.4.(2) et (3) ; **IV.9.I ;** **V.4.(5) ;** **V.4.(4)** ; V.4.(6) ;		III.4.II ;
distances (somme de —, max., min., ou invariance)	**IV.9 ;**		
distances (somme des — aux côtés d'un triangle équilatéral)	**IV.9.IV ;**		
diviseurs			IV.1 ;
droites : $MA^2 - MB^2 = a$ droites équidistantes d'1 point droites équidistantes de 2 points	V.2 ; V.4.(3) ; V.4.(12) ;		
ellipse	II.2 ; V.1 ; V.2 ;		IV.9.II ;
enveloppes	**V.1 ; V.2.6 ;** V.4.(3) ;		
enrichissement de la situation	**III.5 ;**	**III.5 ;**	**III.5 et 12 ;**
ensembles de points* (points variables)	**II.2 ; II.6 ; II.8 ;**	II.6 ;	
équations (problèmes d'—) — de droite (ou demi-droite ou segment) — de cercle — d'ellipse — d'hyperbole — de parabole	II.8 ;	III.1 ; III.4.I.1 ; IV.3 ; V.3 de 1 à 5.	V.3.6 ; V.1 ; V.1 ; V.3.7 ; V.1 ;
équidistants (points — de..) points équidistants de • 2 points • 2 demi-droites, 2 droites • 1 point et une droite	**II.2.I.3 ; II.6 ;** II.2 ; II.6 ; II.6 ; V.4 (18) ; V.4.(11),(17),(17')		

N.B. La plupart du temps, il ne s'agit cependant pas "d'ensembles", du fait que les études réciproques ne sont pas traitées [Cf. II.8.I.2. Question 2].

... / ...

quadrillages	**II.7** ;		III.4.II ;
quotients (calculs sur —)		I.2.III.8.4 ; **III.3** ;	
raccordement (problèmes de —, pour les courbes)			**V.4(3),(5),(13)à(17')**
radical • calcul et usage d'une table de carrés		V.2 ; V.3 ;	III.3 ;
rectangle	I.2.IV ; II.1.6 ; II.2.1 ; **II.2.V** ; **II.6** ; II.8 ; III.5 ; III.7.4 ; IV.7.III ;		II.6.II.5 ; V.3.5 ;
récurrence (raisonnement par —)	III.3 ;	**IV.6.II** ;	
régionnements (non classiques)			V.3.5 à 7 ; **V.4** ;
représentative (voir courbe) et représentations graphiques		V.5 ;	IV.2 ;
rotation	**II.6.IV** ; II.7 ; III.7.3 ;		I.2.III.5 ; II.6.III ; **III.6.1** ;
sphère	III.1 ; V.1 ;		
suites arithmétiques (somme des termes) • Cas $1+2+3+\ldots+n$		III.3 ; III.5.11 ;	IV.1 ; **IV.6** ;
suites de carrés, de cubes ... (somme des termes)		III.3 ; III.5.11 ;	
suites géométriques (somme des termes)		**III.3**	**IV.7.I,III,V** ;
surface (ou aire, ...)	III.5.6 et 8 ;		IV.9.IV ;
symétrie : (généralités)	I.2.IV ; II.2.III ;		
— -droite (ou axiale) orthogonale	I.2.III.5 ; I.2.III.Rq.3 ; **II.2** ; II.5 ; **II.6** ; **II.7** ; II.8, III.5 ; V.1 ; V.3 ;	II.6 ;	**II.6.2** ; **III.6.3** ; IV.9.II ;
— -droite (ou axiale) oblique	III.5.3 et 4 ;		**III.6.5** ; IV.7.V ;
— -point (ou centrale)	I.2.III.5 ; I.2.IV ; **II.2** ; II.5 ; **II.6** ; **II.7** ; II.8 ; V.1 ; V.3 ;	II.6 ;	**II.6.3** ; **III.6.4** ; IV.6 ;
composition de symétries	II.5 ; **II.6** ; II.7 ; **II.8** ;	**II.6** ; **III.7** ;	
composition de symétries et translations	II.5 ; **II.6** ; II.8 ;	**II.6** ; III.7 ;	
décomposition	II.5 ;		**II.6** ;
symétrie 1ère bissectrice	II.6 ;	II.6 ; II.7 ;	

... \ ...

GEOMETRIE AU PREMIER CYCLE

Brochure A.P.M.E.P.

Sommaire du tome I

TROISIEME PARTIE :

QUELQUES DIRECTIONS DE RECHERCHE

QUATRIEME PARTIE :

METHODES

Sommaire du tome II

SEPTIEME PARTIE :

NOYAUX-THEMES

la collection MOTS

L'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public a entrepris de publier une série de brochures, intitulées MOTS, contenant des réflexions sur quelques mots-clés utilisés en mathématique à l'Ecole Elémentaire :

égalité ; exemple et contre-exemple ; couple ; relation binaire ; nombre naturel ; entiers et rationnels ; nombre décimal, nombre à virgule ; fraction ; ensembles de nombres (Mots I, brochure 1974) ;

représentations graphiques ; application, fonction, bijection ; partition équivalence ; partages ; divisibilité ; division euclidienne ; division (Mots II, brochure 1975) ;

numération ; opération et loi de composition ; propriétés des lois de composition ; congruences ; ordre ; préordre ; propriétés des relations binaires dans un ensemble ; dictionnaires, naturels, décimaux et ordres (Mots III, brochure 1976).

Applications linéaires ; proportionnalité ; opérateurs multiplicatifs ; pourcentages, échelles,... ; équation, inéquation ; ensemble ; cardinal ; approximation (Mots IV, brochure 1978)

Chaque rubrique est détachable ; les feuilles, de format 15 × 21, sont perforées.

MOTS est une oeuvre collective ; l'équipe de rédaction, bénévole, constituée d'instituteurs, IDEN, professeurs (d'Ecole Normale, du Second Degré, du Supérieur) soumet ses projets à de nombreux instituteurs ; leurs avis lui sont précieux, surtout quand ils émanent de bacheliers littéraires qui n'ont pas eu l'occasion d'activité mathématique depuis leur sortie du lycée ou de l'école normale.

Sans être un manuel de mathématique, ni un lexique, MOTS permet au lecteur, à propos du vocabulaire rencontré dans les manuels scolaires ou les documents de formation permanente, de faire le point sur son évolution, sur les concepts et les idées qui s'y rattachent, et sur les notations utilisées.

Imprimerie VAUDREY – LYON

ASSOCIATION DES
PROFESSEURS DE MATHEMATIQUES
DE L'ENSEIGNEMENT PUBLIC

29, rue d'Ulm - 75005 Paris
Secrétariat : 37, rue Jacob - 75006 Paris

Qu'est-ce que l'A.P.M.E.P. ?

L'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public a été fondée en 1910. Elle regroupe près de 13.000 enseignants concernés par les mathématiques ("de la Maternelle à l'Université").

Les maîtres qui enseignent des mathématiques à tous les niveaux, **"de la Maternelle à l'Université"**, mettent en commun leurs expériences pédagogiques, se réunissent pour en discuter ou pour perfectionner leur culture scientifique. Ils ont défini leurs objectifs dans la Charte de Caen,* en particulier sur les finalités de l'enseignement, l'expérimentation pédagogique, la formation des maîtres. En s'appuyant sur les idées contenues dans cette Charte,* ils conjuguent leurs efforts pour améliorer l'enseignement des mathématiques (contenu, méthodes, etc...)

L'A.P.M.E.P. s'intéresse donc à toutes les questions qui concernent l'enseignement des mathématiques depuis les premières initiations (à la Maternelle et à l'Ecole Elémentaire) jusqu'aux études supérieures (recherche et formation des maîtres), sans oublier la formation permanente. En liaison avec les autres Associations de spécialistes et avec les organisations syndicales (en concurrence de qui elle ne se place jamais), elle s'attache à la sauvegarde des droits de la fonction enseignante et contribue à sa promotion.

L'A.P.M.E.P. entretient des relations amicales, échange des informations et des services avec des Associations de Professeurs de Mathématiques des autres pays de l'Europe et du Monde.

L'A.P.M.E.P. est organisée en Régionales, par académies, (certaines avec des sections départementales) qui ont leur activités pédagogiques propres. Une collaboration souvent fructueuse s'est instaurée avec les I.R.E.M. sur des objectifs communs.

L'A.P.M.E.P. édite un Bulletin (5 numéros par an) qui réunit des articles de documentation mathématique, pédagogique et administrative, et qui rapporte la vie de l'association. Elle édite aussi des recueils de sujets d'examens ou concours : B.E.P.C., E.N., Baccalauréat, D.E.U.G.

De plus, elle publie une série de brochures et d'ouvrages de documentation (vendus au prix coûtant) concernant tous les niveaux d'enseignement, et qui ne sont ni des manuels, ni des traités.

L'efficacité du travail de l'A.P.M.E.P. tient au nombre et au dynamisme de ses membres. Si vous ne les avez pas encore rejoints, faites-le donc sans tarder.

---

* et dans le Texte d'Orientation 1978.