ACTIVITÉS MATHÉMATIQUES EN QUATRIÈME-TROISIÈME

Tome II

Publication de l'A.P.M.E.P.

(Association des Professeurs de Mathématiques
de l'Enseignement Public) 1981
N° 38

SOMMAIRE

QUATRIEME PARTIE : Variétés

AVERTISSEMENT

Voici le tome 2 d'Activités mathématiques en 4^e-3^e, tome attendu avec quelque impatience par certains d'entre vous.

Cette demande montre la prise de conscience par des enseignants de plus en plus nombreux de la place et du rôle de l'enseignement des mathématiques dans le premier cycle.

Sous la pression de l'A.P.M.E.P., les contenus des programmes de 4^e-3^e se sont transformés de manière à permettre des activités plus riches et plus variées. Le libellé de ces programmes et les instructions qui les accompagnent, très classiques dans leur forme, permettent des interprétations de ces programmes plus "sclérosantes" que les nôtres, alors que tout bouge autour du premier cycle.

*
* *

Ainsi les programmes et instructions du cycle moyen sur les "situations-problèmes" disent :

"Dans des situations, vécues ou décrites, savoir :
— associer une question que l'on se pose, ou qui est posée, et l'information pertinente qui lui correspond ;
— organiser et exploiter cette information ;
— communiquer les résultats obtenus et la démarche suivie, et en établir la validité....

D'une façon générale, on continuera à privilégier les démarches pédagogiques qui placent les élèves dans des situations où les *notions et techniques à introduire et à réinvestir* * leur apparaissent comme *réponses* * à des problèmes, sans jamais perdre de vue qu'au cycle moyen, *comme plus tard,* * toute nouvelle notion ou technique se construit sur des acquisitions antérieures (éventuellement remises en question) et sur les expériences dont disposent les élèves....

Les problèmes peuvent être envisagés selon trois points de vue :

— situations-problèmes utilisées pour l'approche et la construction de nouveaux outils mathématiques,
— situations-problèmes permettant aux élèves de réinvestir des acquis antérieurs, d'en percevoir les limites d'utilisation (situation contre-exemple) et au maître d'en contrôler le degré de maîtrise,

---

* Souligné par moi.

— situations-problèmes plus complexes, plus globales, dans lesquelles l'élève devrait pouvoir mettre en œuvre son pouvoir créatif et affiner la rigueur et la sûreté de son raisonnement....

Il ne suffit pas de demander aux élèves de résoudre des problèmes (même en multipliant les exemples) pour qu'ils progressent dans leur capacité à faire. **Un apprentissage spécifique, d'ordre méthodologique, est nécessaire.** Les objectifs de cet apprentissage sont le plus souvent présents, simultanément, dans les situations proposées aux élèves. Il y a intérêt à travailler plus particulièrement tel ou tel d'entre eux dans certaines séquences, selon les perspectives suggérées ci-dessous :

- rechercher, sélectionner et organiser l'information....
- résoudre des problèmes....
- valider les solutions...
- communiquer les démarches et les résultats....» (BOEN n° 31, 11.9.1980)

*

* *

Ainsi les objectifs de l'enseignement des mathématiques dans les lycées et l'introduction au programme de la classe de seconde, précisent les finalités de l'enseignement des mathématiques :

«a) Développement de la formation scientifique :
capacité d'analyser une situation, d'élaborer et d'appliquer les concepts appropriés, d'explorer et de contrôler par l'expérimentation. Ce développement a ses clefs :
- acquisition de connaissances et analyse de leur portée ;
- maîtrise de l'acquis (entraînement, mémorisation) et création de nouveaux moyens (débroussaillage, conjectures) ;
- coordination des démarches grâce à l'étude de grandes questions jouant un rôle central dans le secteur considéré.

b) Développement de la formation sociale, économique et culturelle :
- initiation aux méthodes d'information, d'organisation, de traitement des données ;
- liaison des activités mathématiques au contexte culturel, et éventuellement à des perspectives historiques.

c) Développement de la formation personnelle :
- développement de l'imagination et des facultés d'observation ;
- développement des capacités de travail individuel et collectif, aisance dans l'emploi de documents et d'appareils ;
- sûreté dans le maniement des grands moyens de communication : expression écrite et orale, techniques de représentation (schémas, graphiques, dessin industriel), de codage (organigrammes, diagrammes), langages de programmation.

....

L'important est, répétons-le, d'aider l'élève à organiser la synthèse de ses connaissances pour les réinvestir de lui-même dans des domaines à priori éloignés. D'autre part, la vie de la discipline a elle-même ses règles de bon sens. A des considérations générales sur les nombres réels, sur les fonctions, on préfèrera des activités de fabrication par des suites ou des représentations graphiques. De même, en géométrie, on n'étudie pas les transformations dans l'abstrait, on en crée ou on en observe ; il s'impose par conséquent de se laisser conduire par une approche dynamique et souvent globale.

En conclusion, l'activité mathématique n'obéit pas à une ligne rigide ; sa conduite dépend de contraintes souvent fécondes, tenant à la nature du sujet abordé, au niveau espéré de traitement, aux prolongements vers les autres disciplines. Certains thèmes se recommandent d'emblée à l'attention du professeur ; ce sont tous ceux qui, à égalité d'importance dans la formation scientifique, économique et culturelle, offrent à la fois un bon terrain à l'initiative personnelle de l'élève et à un effort d'approfondissement théorique et expérimental.

....

Les actuels programmes de mathématiques pour le premier cycle ont entrepris de lutter contre un formalisme qui, maltraitant l'acquis intuitif des élèves, isolerait la démarche pédagogique des réalités de l'expérience et de l'action. A la base de tout bon apprentissage il y a le contact avec une pratique sensorielle et concrète, la stimulation de l'activité personnelle de l'élève, l'élaboration de moyens d'investigation aussitôt applicables au monde qui l'entoure.

....

La classe de mathématiques est, dans son rôle essentiel, un lieu de découverte, d'exploration de situations plus ou moins aisément maîtrisables, de réflexion sur des problèmes résolus. De ce fait, à chaque séquence du programme correspondent des thèmes d'activités, dont le choix demande à être adapté aux possibilités de la classe et éventuellement relié à son orientation ultérieure...

L'activité mathématique ne s'identifie pas au déroulement d'une suite bien ordonnée de théorèmes».

*

* *

Alors, plus que jamais, l'enseignement des mathématiques dans le premier cycle doit suivre cette évolution vers la recherche d'objectifs ambitieux et diversifiés, s'appuyant sur une détermination précise des savoirs et savoir-faire nécessaires (détermination à laquelle participent les textes de Jean-Pierre Orhan et Louis Duvert), et une volonté de pédagogie différenciée qui ne soit ni uniformisation, ni ségrégation, ni sclérose, ni appauvrissement de nos ambitions (voir le texte d'Henri Bareil).

Cette évolution est d'autant plus nécessaire qu'un champ nouveau de possibilités s'ouvre, de l'informatique à l'interdisciplinarité en passant par l'observation et la manipulation de motifs décoratifs. La deuxième et la troisième parties de cette brochure constituent quelques éclairages vers de nouvelles activités.

Enfin les mathématiques restent un divertissement pour l'élève qui accepte l'effort de s'y intéresser. Quelques variétés renouvellent nos sujets traditionnels de travail.

*

* *

Ces quelques lignes correspondent-elles bien à votre goût et à la nécessité de changement qui est la vôtre ?... Alors vous trouverez dans cette brochure, et les brochures A.P.M.E.P. qu'elle cite, un grand nombre d'activités.

Le plaisir que vous trouverez, et que trouveront vos élèves, à « parcourir un tel monde mathématique », n'est-ce pas déjà un objectif enviable ?

Claude LASSAVE
10 avril 1981

1^{ere} Partie

RÉFLÉXIONS GÉNÉRALES

I.1

LES PREREQUIS A L'ENTREE EN L.E.P.

Présentation

Le document rédigé ci-après est une tentative d'inventaire des compétences qui semblent nécessaires pour suivre l'enseignement d'un LEP après la cinquième (vers un CAP en trois ans) ou après la troisième (vers un BEP en deux ans).

Il a été conçu en tenant compte, bien entendu, des besoins du professeur de mathématique et de physique, mais aussi de ceux des autres matières et notamment de l'enseignement professionnel : pratique, technologie, dessin.

Ce n'est qu'un projet qu'il conviendra de discuter et aussi de moduler selon les spécialités préparées. En effet, les besoins mathématiques ne sont pas les mêmes dans une préparation BEP électromécanicien, BEP constructeur en bâtiment, BEP comptable mécanographe...

Jean-Pierre ORHAN

A. Les prérequis à l'entrée en LEP, préparation CAP (en 3 ans après la cinquième).

1) *Calcul numérique*

- Ecrire des nombres décimaux ($\mathbf{D}^+$ et sept chiffres maximum)
- Ordonner une liste de décimaux (liste de 3 nombres de même partie entière. Exemple : 45,25 ; 45,02 ; 45,2).
- Effectuer sur des décimaux une opération isolée (+ ; × ; − ; :)
  — à la main sur des nombres simples (deux ou trois chiffres)
  — à la machine (sans notation scientifique).
- Effectuer mentalement les multiplications et divisions par 0,1 ; 0,01 ; 10 ; 100 ; 2 sur des nombres de trois chiffres au plus.
- Calculer le carré et le cube d'un nombre décimal.
- Calculer la valeur numérique d'une expression littérale ne faisant intervenir ni parenthèses, ni exposant autre que 2 ou 3 ($V = \frac{4}{3} \pi R^3$; $S = \frac{b \times h}{2}$)

2) *Lecture de tableaux*

- Trouver par lecture directe, dans un tableau à double entrée, la valeur numérique correspondant à une valeur fixée.

3) *Représentation graphique*

- Exploiter une courbe tracée sur papier millimétré (c'est-à-dire : abscisse fixée $\rightarrow$ ordonnée ; ordonnée fixée $\rightarrow$ abscisse).
- Représenter graphiquement sur papier millimétré un tableau de valeurs (axes fournis et gradués).

4) *Mesures*

- Mesurer un segment à l'aide d'une règle graduée.
- Mesurer un angle inférieur à un plat à l'aide d'un rapporteur.

5) *Unités de mesures*

- Connaître le sens de *centi, déci, milli, déca, hecto, kilo*.
- Transformer des cm en mm et inversement, des m en cm et inversement.
- Calculer l'aire d'un carré, d'un rectangle. Calculer le volume d'un pavé droit.

6) *Proportionnalité*

- Traiter des problèmes relatifs à deux suites proportionnelles (étant donné un tableau : compléter le tableau par application des critères de linéarité et calculer le coefficient de proportionnalité, éventuellement par enchaînement d'opérateurs : $\times$; $:$).
- Reconnaître la proportionnalité ou non (par application des critères au calcul du coefficient) de deux suites de nombres (trois nombres au maximum dans chaque suite).

7) *Vocabulaire et figures en géométrie*

- Savoir reconnaître, à l'aide d'instruments, la perpendicularité de deux droites, le parallélisme de deux droites, la perpendicularité d'une droite et d'un plan, le parallélisme de deux plans.
- Savoir reconnaître, visuellement, un rectangle, un carré, un triangle rectangle, une médiatrice, une bissectrice.

8) *Constructions (instruments au choix)*

- Tracer un segment isométrique à un segment donné.
- Tracer une parallèle à une droite donnée et passant par un point donné.
- Tracer une perpendiculaire à une droite donnée et passant par un point donné.
- Tracer un cercle de rayon donné.
- Tracer un secteur angulaire d'angle donné.

B. Les prérequis à l'entrée en LEP, préparation BEP (en deux ans après la troisième)

1) ***Calcul numérique***

- Simplifier dans $\mathbf{Q}^+$ l'écriture des fractions (par 2 ; 3 ; 5 et 10...).
- Effectuer dans $\mathbf{Q}^+$ une opération isolée (+ ; × ; − ; :).
- Calculer la valeur numérique d'une grandeur donnée par son expression littérale (Ex. : $S = \dfrac{(b+B)h}{2}$) avec des chaînes de calculs courtes (par exemple : $I = \dfrac{\pi h^3}{3} (A_1 + \sqrt{A_1 A_2} + \ldots\ldots$ est exclu !)
- Transformer les égalités du type $a * b = c$ ($*$ est + ; − ; × ; :) pour exprimer a ou b en fonction des deux autres.

2) ***Fonction linéaire***

- Une situation de proportionnalité étant présentée sous l'une des formes suivantes : tableau numérique, expression algébrique, représentation graphique, passer d'un mode de représentation à chacun des deux autres.
- Utiliser le modèle linéaire pour traiter des problèmes d'échelles : connaissant deux des données suivantes : échelle, dimension réelle, dimension du dessin, trouver la troisième.
- Traiter* des problèmes d'opérateurs fractionnaires, en particulier ceux liés aux pourcentages : prendre tant % de ; augmenter ou diminuer une quantité de tant % ; savoir inverser un opérateur.
- Traiter* des problèmes relatifs à deux suites proportionnelles : trouver le coefficient de proportionnalité, l'écrire sous forme d'un pourcentage, compléter un tableau.
- Déduire si une situation est du type linéaire ou non, soit
  — en faisant une représentation graphique qui sera interprétée
  — en trouvant la forme algébrique standard } éventuellement
  — en calculant le coefficient de proportionnalité }

3) ***Fonction affine***

- Une situation liée à une fonction affine étant présentée sous l'une des formes suivantes : tableau numérique, expression algébrique standard, représentation graphique, passer d'un mode de représentation à un autre (tableau → expression algébrique et graphique → expression algébrique : exclus).

---

* *Traiter :* Ce mot signfie ici : "programmer une chaîne de calculs ou une méthode de travail qui conduira, après exécution, à la résolution de la situation". Il est extrait d'un document officiel dont il a été largement fait usage dans la rédaction du présent document.

4) *Constructions et tracés*

- Exécuter les tracés suivants : segment isométrique à un autre, parallèle à une droite donnée, perpendiculaire à une droite donnée, cercle de rayon donné, secteur angulaire d'angle donné (instruments au choix).
- En utilisant les tracés précédents, tracer un triangle connaissant les mesures des côtés, construire un secteur angulaire de même angle qu'un secteur angulaire donné, construire un rectangle connaissant les mesures des côtés.
- Tracer la médiatrice d'un segment donné.
- Tracer un cercle passant par deux points donnés et de rayon donné ; ayant pour diamètre un segment donné.
- Tracer la bissectrice d'un secteur angulaire donné.

5) *Pythagore*

- Calculer la mesure d'un côté d'un triangle rectangle connaissant les mesures des deux autres.
- Déduire si un triangle est rectangle ou non en utilisant la relation de Pythagore.

6) *Thalès*

- Calculer la longueur d'un segment en utilisant la propriété de Thalès.

7) *Vecteurs*

- Construire le vecteur somme de deux vecteurs donnés.
- Représenter graphiquement un vecteur dont les composantes sont données dans une base donnée.
- Calculer les coordonnées numériques de la somme de deux vecteurs dont les coordonnées numériques sont données.

8) *Géométrie dans l'espace*

- Conditions de perpendicularité d'une droite et d'un plan.
- Conditions de parallélisme de deux plans.

9) *Trigonométrie*

- Donner une valeur numérique approchée du cosinus, du sinus, de la tangente d'un angle inférieur à 90° (table ou calculatrice).
- Trouver, à partir du cosinus, du sinus, de la tangente d'un angle, une mesure de cet angle.
- Calculer dans un triangle rectangle la mesure d'un côté et la mesure d'un angle en utilisant une ligne trigonométrique.

I.2

LES PRÉREQUIS A L'ENTRÉE EN SECONDE

Le texte qui suit émane d'un groupe de travail A.P.M.E.P. qui a critiqué, complété, amendé un premier projet d'un de ses membres.

Il s'agissait de déterminer ce qu'on attendait d'élèves entrant en Seconde de détermination en fait de capacités relativement aux contenus d'un programme de premier cycle (qui ne serait pas exactement le programme actuel). Parallèlement, le groupe a travaillé sur un texte analogue concernant l'entrée en L.E.P., en fin de Troisième ou en fin de Cinquième.

Une telle entreprise présente des dangers sérieux :

a) Elle semble subordonner l'enseignement en premier cycle aux exigences, plus ou moins fondées, des enseignements ultérieurs. Nous pensons au contraire que le premier cycle, faisant partie de la scolarité obligatoire, n'est pas — ne devrait pas être — l'antichambre sélective du second cycle.

b) Chacun plaide éloquemment en faveur de tel ou tel aspect des mathématiques "qu'il faut absolument" maintenir ou introduire au premier cycle, sur "ce qu'il n'est pas permis d'ignorer", etc. La réunion de tous ces vœux risque de constituer un contenu trop abondant et trop ambitieux (c'est, en gros, ce qui s'est passé pour la plupart des programmes de mathématiques du second degré ces dernières années).

L'avenir dira si notre groupe a évité ces écueils. Pour l'instant, que le lecteur de ce texte veuille bien le considérer comme provisoire et destiné à être utilisé dans la visée plus ample d'une réflexion sur l'enseignement des mathématiques au premier cycle.

Louis DUVERT

1. CALCUL NUMERIQUE

- Savoir trouver mentalement un ordre de grandeur et penser spontanément à le faire.
- Savoir utiliser une calculatrice "4 opérations" et en connaître les limites.
- Savoir simplifier spontanément une fraction numérique simple.
- Savoir passer, pour un décimal, de l'écriture décimale à une écriture fractionnaire, et inversement.

- Savoir ramener une somme, une différence, un produit, un quotient de deux fractions à une seule fraction.
- **Inutile** : savoir réduire à un même dénominateur raffiné (exemple : $\frac{374}{1981} + \frac{28}{3287}$) ; savoir calculer "à la main" 372,493 : 0,7329 ou $\sqrt{385,234}$.
- Savoir que $(\sqrt{2})^2 = 2$
- Savoir utiliser les puissances de 10 à exposants naturels (*souhaitable :* savoir utiliser les puissances de 10 à exposants entiers).
- Savoir calculer le "$t\%$" d'un nombre et, inversement, étant donné deux nombres, trouver quel $t\%$ permet de passer de l'un à l'autre.

2. CALCUL LITTERAL

- Savoir, devant une écriture (littérale ou numérique), écrire un programme de calcul (par exemple sous forme d'arbre), en tenant compte des règles de priorité.
- Savoir cataloguer une écriture (est-ce une écriture polynome ? Si oui, est-elle réduite ? Quel est son degré ?...).
- Savoir transformer une écriture (développer, factoriser,...) en utilisant deux ou trois identités remarquables et la distributivité de la multiplication sur l'addition (et sur la soustraction). Mais, d'abord, savoir quel type d'écriture (factorisée ? développée ?) on souhaite.
- Savoir simplifier $\frac{2a+6b}{4a}$, $1 - \frac{x-1}{2}$, $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$,...
- Savoir exploiter une égalité pour substituer, ailleurs, un membre à l'autre, substitution qui requiert souvent l'introduction de (nouvelles) parenthèses.
- Savoir que $\sqrt{a}$ ne désigne jamais plusieurs nombres à la fois.
- Savoir que $|a|$ désigne a si $a \geqslant 0$, $-a$ si $a \leqslant 0$.
- Savoir que le machin-du-truc n'est pas toujours égal au truc-du-machin.

3. FONCTION LINEAIRE

- Savoir utiliser le modèle linéaire pour des problèmes d'échelles, de pourcentages, plus généralement d'opérateurs fractionnaires.
- Savoir associer une fonction linéaire, un tableau de nombres, une représentation graphique.
- Savoir compléter deux suites proportionnelles.
- Savoir reconnaître si une situation est de type linéaire ou non.

4. RESOLUTIONS (d'équations, d'inéquations,...)

- Savoir distinguer entre trouver *une* (ou *des*) solution(s) et résoudre (c'est-à-dire trouver l'ensemble des solutions).

- Une fois la résolution terminée, voir, pour chaque solution, si elle appartient à l'ensemble de nombres imposé par le problème initial.
- Savoir traduire un problème simple à une inconnue en une équation.
- Savoir résoudre graphiquement (avec interprétation) un système (d'équations et inéquations du premier degré) traduisant des contraintes.

5. STATISTIQUES. PHENOMENES ALEATOIRES

- Savoir lire et faire un graphique cartésien simple (*souhaitable :* savoir lire un graphique "en fromage"), un tableau à double entrée, et savoir les interpréter en termes de "tendance".
- Savoir interpréter et calculer des pourcentages liés à des données de nombres.

Et, dans le cadre de programmes de premier cycle révisés :

- Savoir condenser l'information numérique par des valeurs-types : moyenne, médiane, écart-type.
- Savoir faire un pari sensé, réfléchi, ou savoir refuser un pari, dans des situations simples (dé, pièces de monnaie, loto, tiercé).
- Savoir que, dans le cas d'événements indépendants, le hasard n'a pas de mémoire.

6. INFORMATIQUE

- Savoir utiliser une calculatrice ("4 opérations", au moins), en liaison avec des écritures numériques ou littérales.
- Savoir analyser, et traduire par un ordinogramme, un algorithme simple (1 test, 1 boucle).

7. GEOMETRIE

- Savoir manier les instruments de dessin ordinaires.
- Savoir distinguer les notations où figurent deux points (par exemple [AB], (A,B), {A,B}, $\overrightarrow{AB}$, AB, (AB),...) et savoir distinguer les notions associées.
  Inutile : notation $\overline{AB}$
- Maîtriser un minimum de vocabulaire : milieu, centre, hauteur, médiane, médiatrice,... ; savoir que de nombreux mots usuels (diamètre, côté, hauteur,...) ont chacun plusieurs sens.
- Savoir calculer aires et volumes de figures usuelles, à partir de formules.

- Savoir schématiser une situation topographique réelle simple (appartement, collège,...) en un plan ; et, inversement, savoir utiliser un plan pour se déplacer dans un lieu.
- Savoir transporter, agrandir ou réduire une figure sous certaines contraintes (faire tenir dans tel emplacement, laisser tel élément invariant,...)
- Etant donné une figure et son image par une transformation (translation, symétrie, projection), savoir reconnaître, à vue, quelle est cette transformation.
- Savoir relier "Thalès" à la proportionnalité.
- Savoir calculer des longueurs dans des "situations" de Thalès ou de Pythagore. Savoir reconnaître qu'un triangle est rectangle quand on connaît ses trois côtés.
- Savoir extraire une sous-figure d'une figure donnée.
- Savoir rédiger (en français, ou sous forme d'un déductogramme) une démonstration (cherchée et trouvée en groupe).

8. GEOMETRIE ANALYTIQUE

- Savoir placer un point dans le plan ou dans l'espace connaissant ses coordonnées. Savoir, inversement, lire les coordonnées d'un point déjà marqué dans le plan repéré.
- Savoir calculer la distance de deux points en repère orthonormé.
- Savoir, pour des distances ou des angles, contrôler les mesurages par les calculs et inversement.
- Savoir établir le parallèle entre une fonction f et sa représentation graphique R, entre l'équation $f(x) = 0$ et l'intersection de R et de l'axe des abscisses,...
- *Souhaitable :* Savoir choisir et associer trois aspects : figure sans repère, calcul analytique après choix d'un repère, calcul vectoriel.
  Savoir utiliser $x\vec{i} + y\vec{j}$ ou le couple des composants (x,y) du vecteur.
- **Inutile :** Savoir par cœur des formules donnant une équation d'une droite passant par deux points donnés, ou passant par un point donné et perpendiculaire à une droite donnée,...

9. TRIGONOMETRIE

- Connaissant 2 côtés, ou 1 côté et 1 angle aigu, d'un triangle rectangle, trouver les autres angles et côtés.
- *Souhaitable :* Savoir retrouver rapidement les sinus, cosinus, tangentes de 0°, 90°, 180°, 30°, 45°, 60° (sauf tg 90°...).

10. METHODOLOGIE

- Savoir lire l'énoncé, globalement, puis mot par mot.
- Savoir utiliser une documentation personnelle pour retrouver le sens d'un mot, l'énoncé d'un théorème.
- Savoir analyser un problème : de quoi s'agit-il ? ai-je une théorie générale à ma disposition ?...
- Savoir critiquer (courtoisement) un énoncé.
- Savoir conclure (une étude, un calcul, une résolution, une démonstration).
- Savoir tirer profit des résultats acquis ou admis dans les questions précédentes.
- Savoir distinguer entre constatation et démonstration, entre illustration (par des exemples) et démonstration.
- *Souhaitable :* Ne pas être paralysé devant un problème d'un genre nouveau ; essayer, tâtonner,... ; savoir mettre en équation puis revenir au problème posé.

I.3 *Henri BAREIL*

"PEDAGOGIE DIFFERENCIEE ?"

"Pédagogie différenciée"... Selon quelles modalités, pour quels objectifs ?

— certains, affichés, correspondent à un vœu constant de l'A.P.M.E.P. : personnaliser l'enseignement, permettre à chacun de donner sa pleine mesure tout en évitant le plus possible les ségrégations et les classifications ;

— d'autres, trop probables, sont moins avouables : économiser les dotations en personnels et en moyens d'enseignement, masquer les difficultés dues à l'hétérogénéité des classes, voire rejeter sur les enseignants les conséquences fâcheuses que peut avoir une hétérogénéité excessive...

*

Il peut y avoir pire encore, avec une pédagogie différenciée qui, en fait, rétablit et fige les ségrégations.

C'est contre cela que je voudrais m'élever ici, en laissant pour le moment de côté le problème général (pourtant combien important !) des structures scolaires et des moyens d'enseignement.

* * *

L'objectif affiché par la pédagogie différenciée n'impose à priori aucun choix (explicite ou non) relatif à la prise en compte :

— des *divers champs d'intervention* (savoirs ; savoir-faire et comportements propres aux mathématiques ; comportements généraux)

— des *trois moments, ou niveaux d'approfondissement,* des activités mathématiques, ainsi formulés par Jean-Louis Ovaert (on pourrait aussi utiliser une formulation de Régis Gras - Tome 1, page 101) :

- Activités menant à des idées intuitives correctes concernant le fonctionnement des concepts, ou à des méthodes de résolution de problèmes, sans mise en forme mathématique complète, mais permettant aux élèves de conjecturer, raisonner, calculer, dessiner,...

- Etude mathématiquement solide d'exemples ou de classes d'exemples menant à des résultats précis et permettant de dégager des idées ou des méthodes, mais ne donnant pas lieu à une synthèse théorique faisant l'objet d'un exposé structuré du professeur.
- Etude de concepts et de problèmes comportant un tel exposé, étant entendu que la part de ces exposés n'est pas dominante, et que l'essentiel demeure la résolution de problèmes.

*

Autant de choix, privilégiant, minorant, ou omettant tel champ d'intervention, moment, niveau ou forme d'activité, autant de "pédagogies différenciées".

Première contrefaçon : GOMMER LA DIFFERENCIATION

a) en centrant l'enseignement sur les "savoirs", les "contenus", en abusant d'exposés magistraux escortés d'exercices d'application stéréotypés.

Cet abus sclérose les démarches fondamentales de l'esprit (aptitude à la recherche, à l'auto-interrogation,...) et frappe d'autant plus durement que ces aptitudes sont faibles.

Dès lors une telle "pédagogie" accroît les écarts réels entre les élèves, au lieu de les réduire.

b) en remplaçant les problèmes par des enchaînements d'ordres parcellaires en marches d'escalier : cf. les énoncés traditionnels du B.E.P.C. ou ceux de certains manuels (en grand honneur) ainsi décortiqués en mini-pas obligés (1° : Démontrez que... 2° : Prouvez que... 3° : Montrez que... 4° : etc.).

Chercher ? Conjecturer ? Organiser soi-même une démonstration ? Pas question ! L'élève n'est qu'un docile exécutant tout juste bon, en caniche bien dressé, à "rapporter" le théorème qu'on lui montre du doigt. Si bien que l'essentiel, c'est alors de saisir les inflexions des ordres et de bien regarder le doigt !

Deuxième contrefaçon : ETABLIR DES SEGREGATIONS DE FAIT

Par exemple, sous le bon prétexte de permettre à chacun de réussir, on cantonnera les élèves "faibles" dans des tâches d'exécution (d'un programme de calcul, de dessin, de démonstration en escalier bien tracé,...) ou d'observation élémentaire ("constater" telle propriété dûment énoncée,...) tandis que les élèves "forts" s'affronteront seuls aux tâches plus difficiles (conjecturer, généraliser, critiquer, démontrer,...).

Ah ! les belles filières ! puis, hélas, les douloureux réveils d'élèves et parents dès qu'il s'agit d'orienter (ou que l'on est affronté à d'autres méthodes...) !

On ne peut pallier ces ségrégations (retrouvées) par des synthèses de "mise en commun" : elles sont reçues par les élèves "faibles" comme de simples parachutages étrangers à des préoccupations où on les a confinés.

* * *

Dès lors, que proposer ?

Une organisation de la classe de mathématiques qui, ne méconnaissant aucun des champs d'intervention, ou des moments ou niveaux d'approfondissement des diverses activités, *valorise prioritairement l'effort personnel, ou collectif, des élèves à partir :*

— d'une claire définition d'un *"NOYAU D'OBJECTIFS"*, (cf., pour une première réflexion, les articles précédents, de Jean-Pierre Orhan et Louis Duvert, et, du tome 1, pages 19 à 31, les "Remarques générales sur l'organisation des enseignements de mathématiques en quatrième et troisième") ;

— de méthodes d'enseignement, attentives aux "modes d'appropriation majeurs" (cf. *Géométrie au premier cycle,* Tome 1, pages 140 à 147), centrées sur les problèmes ainsi que sur la saisie, le traitement, la critique et l'utilisation de l'information.

Des "problèmes", pour tous les élèves ?

Oui, des problèmes, au plein sens du terme, et sans solutions en marches d'escalier livrées en même temps (et masquant absolument tout, tant ce sont ces marches qui, d'emblée, captent le regard).

Mais des problèmes qui restent tels pour chaque élève tout en étant mis à sa portée, de façon différenciée selon les élèves.

Pour cela des *niveaux d'aide personnalisés* interviendront, adaptés au cheminement de chaque élève et aux difficultés qu'il rencontre, niveaux d'aide destinés à promouvoir et à faciliter la recherche *sans s'y substituer.*

Pour chaque élève ?

On ne peut l'envisager qu'au prix d'une organisation de la classe où le maître est un "directeur de recherche" et où il a la possibilité matérielle de l'être dans la mesure où les élèves sont habitués à chercher et à travailler, seuls ou en groupe, sans son aide constante et où ils disposent de manuels ou de documents qui les y incitent et le leur permettent, en évitant absolument, tout d'abord, les contrefaçons dénoncées plus haut.

De telles habitudes, de part et d'autre, jointes à des manuels ou à des documents adaptés, permettent au maître des interventions ponctuelles différenciées. L'atmosphère de la classe doit aussi autoriser les élèves à intervenir librement les uns auprès des autres, non sans une forte auto-discipline.

*

Voyons quelques exemples à propos d'un point crucial du 1er cycle : le double apprentissage de l'art de conjecturer (à partir d'exemples, de cas particuliers, d'analogies,...) et de celui de démontrer ou d'infirmer les conjectures.

Cet apprentissage est d'autant plus difficile qu'il est :

— trop souvent limité à la seule géométrie, alors que l'algèbre peut être tout autant sollicitée (cf. tome 1),

— contrecarré par la conception traditionnelle de l'enseignement de la géométrie : avant la classe de quatrième, elle habitue trop souvent les élèves à croire que des constatations expérimentales fondent des propriétés. (Tel livre courant de Quatrième le fait d'ailleurs encore, à propos de figures de géométrie, quand il en utilise dans des chapitres "de calcul"). Puis la règle du jeu change totalement. Par excès inverse, on en vient même alors parfois à vouloir démontrer des évidences (ainsi : que des droites perpendiculaires se coupent) pratiquées depuis des années.

En ce qui concerne la géométrie, *les problèmes viendront essentiellement de son aspect dynamique : constructions, points variables, transformations géométriques.*

Ils ne seront nombreux, intéressants, riches de solutions diverses, donc motivants et propices à l'activité des élèves, que si ceux-ci disposent *le plus tôt possible du maximum d'outils fondamentaux.*

Voici d'abord un exemple du changement d'optique que l'on peut ainsi favoriser :

Il concerne un énoncé pris dans le chapitre 18 d'un manuel de Quatrième, après étude de la symétrie orthogonale, du rectangle, du triangle rectangle et du carré, alors que le parallélogramme ne viendra qu'au chapitre 20, la symétrie centrale au chapitre 28 et les vecteurs au chapitre 29 (le livre en compte 31). (Bien entendu, encore que le parallélogramme ait été étudié en Sixième, ce manuel s'interdit, conformément à la "tradition", d'en faire usage tant qu'il n'a pas refait, en Quatrième, les présentations mondaines de ce personnage. Comprenne, chez les élèves, qui pourra !)

Cet énoncé le voici :

18.21. On considère un carré **ABCD de centre** O et les points E, F, G et H appartenant **respectivement aux segments** [AB], [BC], [CD] et [DA] tels que :

$$AE = BF = CG = DH.$$

1. Soit E′ le symétrique de E par rapport à la droite BD. Montrez que E′ appartient au segment [BC]. Prouvez ensuite que E′ et G sont symétriques par rapport à la droite AC.

En déduire que le triangle EE′G est rectangle en E′ et que E, O et G sont alignés.

On démontrerait de même que H, O et F, sont alignés.

2. Démontrez que E′ et F sont symétriques par rapport à la droite Δ médiatrice de [BC].

En déduire que HF = EG et que EFGH est un rectangle.

3. Soit F′, le point de [AB] tel que BF′ = BF.

Montrez que EF = E′F′ et que E′F′ = FG.

Que pouvez-vous en conclure pour le rectangle EFGH ?

Voilà un "problème" en escalier qui est donc tout sauf un "problème". Il n'y a réellement qu'une question (mini) à la dernière ligne.

Imaginons, à l'opposé, une étude des outils fondamentaux dès les débuts de la Quatrième (cf. par exemple, tome 1, page 10 puis page 39 et suivantes). On peut proposer la situation qui forme le début de l'énoncé précédent, puis suggérer : quelle(s) question(s) vous posez-vous ? L'expérience — renouvelée — montre qu'il en surgit beaucoup, qui concernent des isométries de triangles, le rôle de O, la nature de EFGH, la recherche de transformations permettant de passer de E à F, de F à G,... Si vous essayez, vous serez surpris de ce foisonnement : pourquoi limiter E au segment [AB], "peut-on" le prendre en dehors de la droite (AB) ? Que se passe-t-il si ABCD est seulement rectangle ? ou... etc.

Certains élèves organisent très bien leurs recherches, parfois à partir de plusieurs positions de E, F, G, H, en remarquant le rôle "invariant" de O, et n'ont besoin d'aucune aide pour conjecturer et démontrer. Ce n'est pas le cas pour tous, mais les niveaux d'aide sont fonction des questions que les élèves se posent et des voies qu'ils explorent : il s'agit de ménager à chaque élève la possibilité d'être acteur d'une démarche scientifique à base d'auto-questionnement, conjecture, critique,...

Pour démontrer la nature de EFGH, il est commode d'utiliser, le rôle de O mis en évidence, une rotation (0, 90°). (Sinon, les égalités $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{GC}$ et $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{HD}$ sont déjà intéressantes. Des isométries font alors le reste, qu'elles utilisent ou non les symétries signalées par l'énoncé précédent).

Les études suscitées par la vague de questions complémentaires occuperont les élèves les plus rapides. De même, éventuellement, celle de $S_\triangle \circ S_{(BD)}$ ou $S_{(BD)} \circ S_\triangle$ avec débouché sur la composition de deux symétries orthogonales d'axes sécants (mais d'angle quelconque).

Voici maintenant un autre exemple de remise à jour d'un problème (classique) enfoui sous un autre escalier par le même manuel (celui-là vient en fin du chapitre 29) :

.23. Soient deux points O et I du plan P.
On désigne par $\mathcal{S}$ la symétrie centrale de centre O et par $\mathcal{S}'$ la symétrie centrale de centre I.

1. Quelle est l'image par $\mathcal{S}$ de O ? On appelle O' l'image par $\mathcal{S}'$ de O. Que représente I pour [OO'] ? Quelle est l'image par $\mathcal{S}' \circ \mathcal{S}$ du point O ?

2. Soit un point M un point du plan n'appartenant pas à la droite OI. On appelle M' l'image par $\mathcal{S}$ de M et M'' l'image par $\mathcal{S}'$ de M'. Montrez que :
- le quadrilatère OM'O'M'' est un parallélogramme,
- $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{M'O}$ et $\overrightarrow{M'O} = \overrightarrow{O'M''}$,
- le quadrilatère MOO'M'' est un parallélogramme.

En déduire que $\overrightarrow{MM''} = \overrightarrow{OO''}$.

3. Si M appartient à la droite OI, montrez que $\overline{MM''} = \overline{OO'}$.
Que pouvez-vous en déduire pour $\overrightarrow{MM''}$ et $\overrightarrow{OO'}$?

4. En conclusion, montrez que, quel que soit le point M du plan, M'' est son image dans une translation dont vous préciserez le vecteur.

5. Que pouvez-vous dire de la composée $\mathcal{S}' \circ \mathcal{S}$ des deux symétries centrales $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$?

Ici aussi il me semble préférable de proposer les deux symétries et d'attendre l'émergence de questions. La plus immédiate ignore, en apparence, la composition des symétries : il s'agit de chercher une relation entre deux figures F' et F'' symétriques d'une même figure F par rapport à O et I respectivement. Mais comme on peut y passer par S_O suivie de S_I..., et pour peu que papiers peints, frises ou pavages aient antérieurement familiarisé les élèves avec la *pratique* des transformations géométriques, la plupart des élèves vont d'eux-mêmes conjecturer que

$$S_I \circ S_O = \mathcal{T}_{2\overrightarrow{OI}} \quad .$$

Peut-être parce que, dès les débuts de la Quatrième, j'utilise beaucoup "la conservation du milieu" par projection et les propriétés dérivées, je n'ai, pour la démonstration de la composée de deux symétries centrales, jamais rencontré d'élève qui songe à la méthode indiquée par l'énoncé retranscrit. Mais il faut éventuellement un niveau d'aide pour inciter à traduire chaque symétrie en terme de milieu.

Cela étant, les élèves les plus rapides, en attendant les autres, s'ingénient soit à étudier d'autres compositions d'applications géométriques, soit à en décomposer, papiers peints ou pavages toujours à l'appui...

Une bonne partie de la préparation des classes de mathématiques peut ainsi se passer à pulvériser des escaliers et à exhumer les problèmes qu'ils cachent.

Mais il semble également opportun de renouveler bien des problématiques traditionnelles :

Exemple 1 : Ensemble des points M du plan tels que MA = MB, A et B points fixes distincts donnés.

Pourquoi ne pas tenter plusieurs approches, au lieu de mettre immédiatement le projecteur sur la médiatrice ? En voici quelques-unes :
— chercher l'ensemble des points M tels que MA > MB
— chercher l'ensemble des points M tels que MA − MB = ℓ
— chercher l'ensemble des points M tels que MA = n MB
— chercher l'ensemble des points M en taxi-distance (voir tome 1, p. 127).

Les élèves choisissent une approche et découvrent eux-mêmes les cas particuliers, cas-frontières dont certains donneront la médiatrice. La "pédagogie différenciée" porte non sur le type de recherche mais sur le fait que tels élèves se contenteront d'une approche alors que d'autres en feront plusieurs.

Exemple 2 : Le cercle (O,R).

Ici aussi, diverses approches sont intéressantes :

Première approche : OM = a, et frontière de OM > a ou OM < a.

Deuxième approche, à partir de polygones réguliers : soit un point A fixe. Je fais avancer un point M, en ligne droite, d'une longueur ℓ, puis je tourne d'un certain angle. [Problème familier aux utilisateurs de "LOGO"]... Que se passe-t-il en réitérant cela de nombreuses fois ? On circonscrit la recherche en posant des conditions à ℓ et à l'angle, par exemple de rester constants... Essayez la suite.

Troisième approche : à partir de MA + MB = Cte, quand A et B viennent se confondre.

Quatrième approche, comme enveloppe de droites ou de cercles...

Exemple 3 : Problème (?) traditionnel : Démontrer que les médiatrices d'un triangle (propre) sont concourantes.

Les élèves font le dessin... et "ça marche". De plus certains élèves se souviennent d'avoir vu ce "résultat" en 6^e ou 5^e. Après quoi le "prof" de Quatrième veut le démontrer ! Il est bien le seul ! De plus voilà que, pour cela, il refuse de s'intéresser aux trois médiatrices. Il se fâche même si on en prend plus de deux (et il s'amuse à démontrer qu'elles se coupent !) : pourtant il semblait bien que c'étaient les trois qui, disait le "prof", faisaient problème... Aux yeux d'un élève sensé, quelle peut bien être l'image qu'il a ainsi de son professeur et des mathématiques ?... Bien plus, ce travail d'orfèvre, qui passe pour une démonstration facile et limpide, ne peut donner lieu qu'à un exposé dogmatique, fût-il émaillé de mini-questions à réponse incluse. Essayez, après un tel exposé, le problème, voisin, des médiatrices du trapèze isocèle, et vous jugerez de son impact réel sur les élèves...

Je crois préférable de formuler autrement ce problème et de le faire par exemple ainsi (cf. tome 1, page 41) : soit n points pris au hasard dans le plan. Pour $n=4$, $n=3$, $n=2$, $n=1$, dessiner un cercle (plusieurs, si possible) qui passe(nt) par ces points. S'il en existe plusieurs, que dire de leurs centres ?

Voilà un "vrai problème", proposé à tous les élèves de 4^e et pour lequel tous seront actifs. La différenciation viendra pour des compléments qui surgiront de dispositions particulières des points (cf. tome 1, page 42).

Dans le cas de 3 points non alignés, il faut quand même souvent un niveau d'aide pour qu'on s'interroge sur les trois médiatrices. Je le donne habituellement sous la forme suivante : "Tu as pris les médiatrices de [AB] et de [BC] et tu as un cercle. Tu en as donc sans doute un autre avec les médiatrices de [AB] et de [AC] et..., sans doute, un troisième ?...", ce qui amène beaucoup à s'interroger... et à démontrer !

Mais après cela le résultat est généralement opérationnel...

Exemple 4 : Soit, dans un plan, deux points A et B d'un même côté d'une droite D et un point M sur D.

Habituellement on pose d'emblée la question : comment choisir M (sur D) pour que la somme des distances MA et MB soit minimale ?

Je préfère dire plus simplement : choisis M (et justifie ton choix) en t'intéressant à MA, MB, ou MA + MB,... Ce choix ne peut être guidé que par des hypothèses supplémentaires. La recherche de celles-ci est un premier problème qui, d'une part, montre la relativité des modèles mathématiques, d'autre part ouvre largement sur l'imagination de situations. En voici quelques-unes avec leurs conséquences :
— Balance égale entre A et B ($M \in$ médiatrice de [AB]).
— Balance éventuellement inégale entre A et B :

- M étant choisi au hasard, existe-t-il d'autres points de D tels que MA + MB soit le même ? (On voit où cela peut entraîner, mais le tracé d'une ellipse par la "méthode du jardinier" est d'un grand secours). Quand n'y a-t-il pas d'autre point M que celui déjà choisi ? Qu'est alors MA + MB ?

Un niveau d'aide, quasi-général sauf si l'on a déjà rencontré des situations analogues, incite à former MA + MB. Le cas du minimum suggère alors, de lui-même, l'intervention du symétrique de A (ou de B) par rapport à $\triangle$. Il est rarement besoin de donner cette "astuce" tandis que la formulation traditionnelle du problème l'exige toujours, sauf si les élèves savent affronter ce problème ou bien s'ils y sont initialement conviés.

- Les trajets MA et MB étant effectués dans des conditions différentes (par exemple si on parcourt MA chargé et MB non chargé) on peut avoir intérêt à rendre minimal l'un d'eux (MA sur notre exemple !). On peut aussi imaginer que MA est alors parcouru à une certaine vitesse, MB à une autre, et chercher le trajet de durée minimum (expérimentalement, en 4[e] par des mesures, en 3[e] à l'aide de calculs utilisant Pythagore). (On sait que ce problème, lorsque A et B sont de part et d'autre de D, n'est autre que celui de la réfraction de la lumière).

La pédagogie différenciée, sur cet exemple 4 aussi, porte donc moins sur les niveaux d'aide que sur l'ampleur du champ des questions formulées et abordées.

Exemple 5 : Thème de travail : dessins de quadrilatères à partir des diagonales (thème de début de Quatrième)

L'objectif est ici de développer une recherche libre conduisant, entre autres, à des quadrilatères remarquables.

En général, pour des quadrilatères ABCD, cinq propriétés possibles sont finalement retenues :

$$\text{milieu de } [AC] \in (BD)$$
$$\text{milieu de } [BD] \in (AC)$$
$$(AC) \parallel (BD)$$
$$(AC) \perp (BD)$$
$$AC = BD$$

Il s'agit de les prendre isolément ou de façon combinée (Combien cela fait-il de façons possibles ? S'agit-il du nombre de parties d'un ensemble de cinq éléments ? — Seul le "vide" l'empêche —).

D'autres propriétés sont parfois retenues, ainsi "diagonales axes de symétrie".

Les recherches sont donc très personnalisées. Elles donnent à tous l'occasion de chercher, de trouver, de percevoir la nécessité de démontrer tant le surgissement de cas particuliers peut induire en erreur.

Mais il n'est pas nécessaire, ni utile, de tout faire, ce qui permet à chacun de travailler et de chercher à son rythme, les niveaux d'aide consistant essentiellement ici en des sollicitations de l'esprit critique.

Exemple 6 : (Thème de début de Quatrième). Les applications "conservent-elles le fait d'être le milieu" ?

J'utilise ici largement le travail déjà transmis pour le tome 1 (pages 129-131) en imposant de façon minimale quelques-unes des activités qui y sont proposées, les autres étant facultatives, ce en quoi joue la "différenciation" sans nuire abusivement à la prise de conscience voulue par ce thème de travail.

Exemple 7 : "Variations sur les distances" (cf. tome 1, pages 216 à 224).

La différenciation joue ici sur l'ampleur plus ou moins grande de ces "variations" laissées à l'initiative de chaque élève ou groupe d'élèves. L'essentiel est commun à tous : savoir faire varier une "situation-source", conjecturer, éventuellement démontrer...

* * *

Nos collègues du mouvement Freinet et ceux de mouvements analogues auraient sans doute beaucoup à nous apporter en fait de "pédagogie différenciée". Celle-ci, en la prenant dans son meilleur sens, n'est-elle pas une de leurs méthodes fondamentales ? Je souhaite que leurs contributions viennent enrichir le débat lancé ici...

En ce qui me concerne, j'ai essayé de situer, en fait de pédagogie différenciée, les voies à exploiter prioritairement.

Elles n'ont rien de très original, se contentant d'insister sur des aspects connus de toute "pédagogie" digne de ce nom. Aucun "pédagogue" n'a jamais fait classe pour un "type" d'élèves, en sacrifiant les autres (le type "doué" serait alors l'étalon dans certains cas, un hypothétique "élève moyen" le serait dans d'autres, plus rarement — mais ce serait aussi dangereux — "l'élève faible" — !).

Ces voies explorées pour la pédagogie différenciée ne garantissent d'ailleurs pas le succès :

Elles permettent, je crois, de mieux ancrer le sens et le goût de la recherche et celui de l'effort, au besoin de les retrouver. Pourtant, cela ne va pas toujours assez loin :

Recherche, effort, la plupart des jeunes enfants en sont passionnés. Mais les contraintes sociales d'une part, l'abus des exposés et des consignes magistrales en classe d'autre part, ont beaucoup sapé de telles passions quand les élèves arrivent en Quatrième-Troisième. Or l'habitude du travail (surtout "à la maison", et du travail bien conduit, efficace) et celle de la recherche ne s'improvisent pas. Des semaines et des mois de cure homéopathique (quelques heures hebdomadaires en présence du professeur de mathématiques par exemple) ne suffisent guère à redonner de telles habitudes quand on les a depuis longtemps perdues. Pourtant rien n'est possible sans elles.

C'est pourquoi la pédagogie différenciée ne saurait être efficace si elle n'affecte pas l'œuvre éducative dans son ensemble. Elle ne saurait aller sans une claire redéfinition, pour toutes les disciplines et la vie scolaire, des objectifs de l'enseignement, et sans la mise en place, partout et de façon conjuguée, de méthodes et de structures qui aident à les atteindre. Encore faudrait-il, d'ailleurs, que ces objectifs s'intéressent prioritairement au développement des capacités et des aptitudes les plus essentielles, sans négliger, pour les mathématiques, aucun des trois pôles que sont la formation scientifique, la formation sociale, économique et culturelle et la formation personnelle...

*

*   *

Bibliographie :

— Textes officiels
— Textes issus de la Commission 1er cycle de l'A.P.M.E.P. (cf. Bulletins)
— Texte de la Régionale de Dijon (novembre 1980).

2^{e} Partie

NOUVELLES POSSIBILITÉS

II.1

Charles PEROL
Animateur à l'IREM de Clermont-Ferrand

L'ESPACE EN TROISIÈME

Le programme qui sera applicable à la rentrée de 1980 en troisième a pour dernier alinéa:

"Exercices de géométrie dans l'espace, par exemple: sphère (intersection avec un plan); cube (calcul de la diagonale); pyramide régulière (calcul d'éléments métriques)".

Qu'adviendra-t-il de ce paragraphe? Deux dangers le guettent, en apparence opposés.

Le premier, c'est qu'il reste lettre morte, que les professeurs fassent comme s'il n'existait pas et n'en tiennent aucun compte.

Le deuxième, c'est que les livres recopient simplement les anciens manuels de la classe de première (cela paraît impensable, mais nous savons que certains l'ont fait en cinquième) et que les professeurs les suivent paresseusement. Cet excès d'ambition nous mènerait après un ou deux ans à l'abandon de ce paragraphe dans l'enseignement effectif.

Ce serait dommage pour plusieurs raisons:

a) Surtout parce que ces notions sont peut-être plus que d'autres de nature à faire sentir à nos élèves que les mathématiques sont liées aux réalités de la vie.

b) Aussi parce que la présence de ces notions dans les programmes nous permettra de rappeler à qui l'aurait oublié qu'"il n'est pas question de donner à l'élève une présentation axiomatique de la géométrie".

(Instructions du 17/7/78 BO n° Special 1 du 14/12/78 page 81)

C'est décidé, cela dépend de nous, nous ferons toute sa place à ce paragraphe. Mais comment allons-nous nous y prendre pour cela?

Traiter ces questions après tout le reste, puisque dans la rédaction du programme c'est écrit après tout le reste. Ce serait le meilleur moyen de le laisser de côté; on ne manquerait pas de bonnes raisons d'être en retard et par conséquent de le passer à la trappe. Et même s'il n'en était pas ainsi, je crois que ce serait une très mauvaise façon de faire. Ces situations doivent être intégrées aussi étroitement que possible au reste du programme.

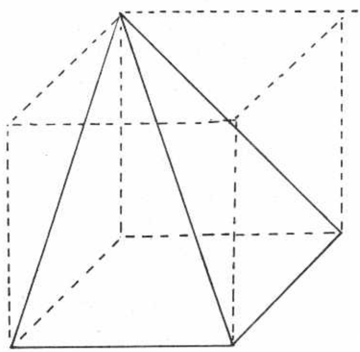
Chaque fois qu'une occasion se présentera, on introduira une illustration ou une application spatiale.

La relation de Pythagore offre des occasions multiples, celles qui sont suggérées dans le programme: diagonale du parallélépipède rectangle et en particulier du cube, calcul des longueurs des arêtes et de l'apothème d'une pyramide régulière en fonction de sa hauteur et des dimensions de sa base. Mais aussi toutes celles que nous pouvons imaginer. Je voudrais donner quelques idées de situations exploitables.

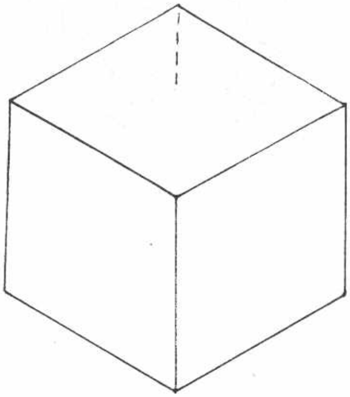
Dans les Math-annales du BEPC parues en 1979, j'ai donné un exemple de problème assez complexe, en fait sur l'octaèdre régulier constitué en accolant par leurs bases deux pyramides régulières à bases carrées et à faces latérales équilatérales. Cet exercice pourra peut-être paraître trop difficile; voici d'autres idées peut-être plus accessibles en partant du cube, si familier à chacun.

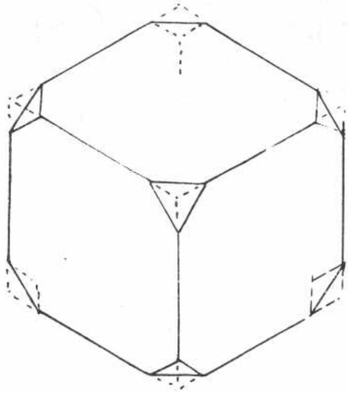
Un cube peut être partagé en trois pyramides non régulières ayant pour sommet commun un des sommets du cube et pour bases les faces du cube auxquelles le sommet n'appartient pas. En observant un cube réel, ou un dessin en perspective si on possède l'entraînement nécessaire, la chose apparaît avec évidence. Je propose de faire réaliser par les élèves de telles pyramides en bristol suivant la technique bien connue. Pour cela, il faut déterminer la forme des faces pour les construire. On a le choix entre le calcul par Pythagore de la longueur des arêtes ou des constructions plus directes en se plaçant dans les plans intéressants. Il me semble qu'un projet de cette nature fera comprendre aux élèves les raisons de leur travail en mathématique. Ce ne sera pas seulement utile pour ceux qui en fin d'année seront orientés vers certaines sections du Lycée Professionnel.

En assemblant avec réflexion trois de leurs productions, nos élèves auront le plaisir de voir naître le cube que nous avions envisagé au départ. Il sera facile d'évaluer le volume de chaque pyramide et de contrôler la pertinence du mystérieux facteur 1/3 qui intervient dans la "formule" du volume.



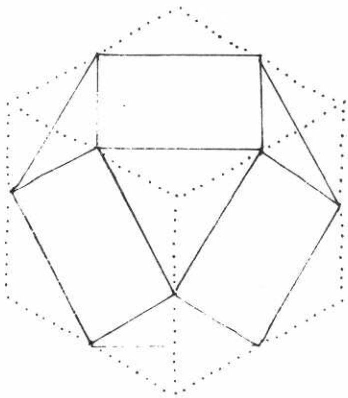
Le cube peut être le prétexte (thème) de bien d'autres activités. On peut décider de tronquer ses sommets, c'est-à-dire d'enlever près de chacun d'eux (ou seulement vers quelques-uns si vous préférez) une petite pyramide régulière.

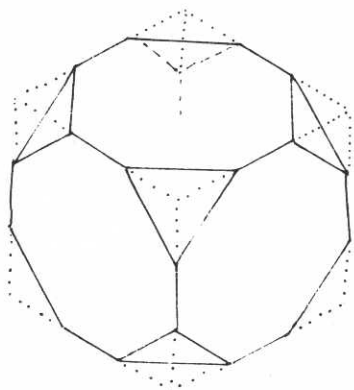


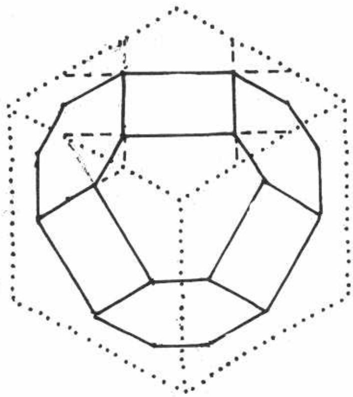


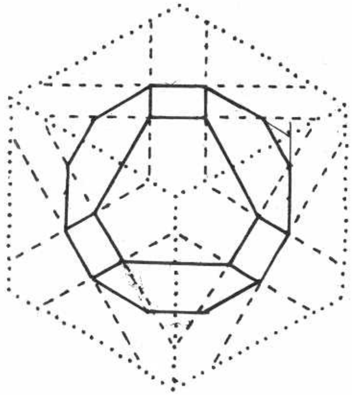
On peut alors: évaluer le volume restant, développer et réaliser en bristol le solide restant, déterminer les coupes pour que le solide satisfasse à des conditions imposées à l'avance, par exemple avoir pour certaines de ses faces des octogones réguliers.

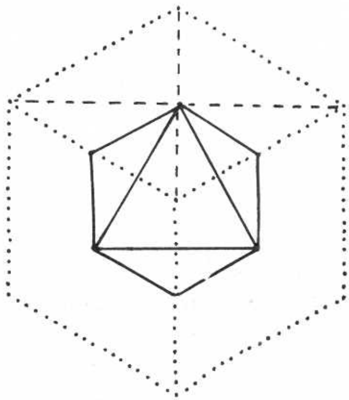
On peut aussi distribuer dans la classe des travaux différents aux diverses équipes de manière à disposer à la fin de toute une série évolutive allant du cube entier à l'octaèdre inscrit.



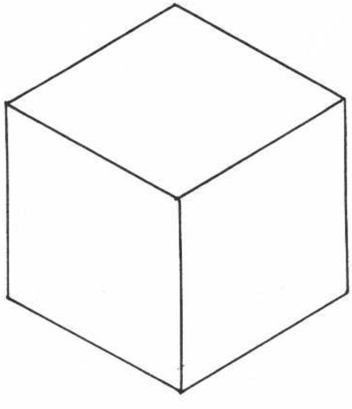


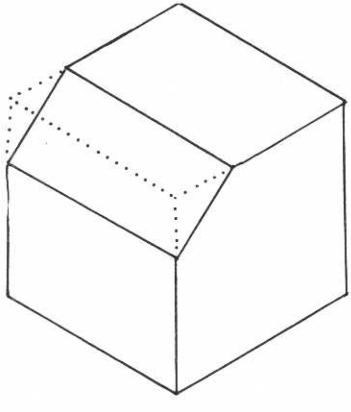




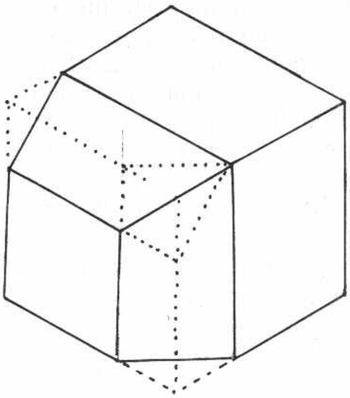


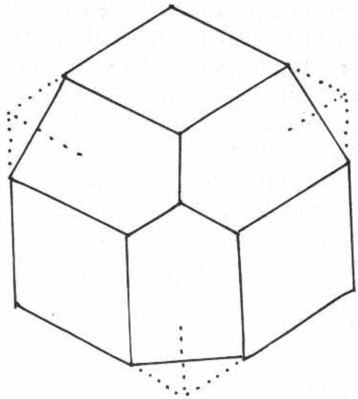
En chanfreinant le cube sur une, plusieurs ou toutes les arêtes, on obtient aussi des situations intéressantes.





Déjà en chanfreinant deux arêtes adjacentes, quelques problèmes non évidents apparaissent. Quelles sont les formes des faces ? Construire en bristol ce qui reste et les chutes. Je fais le pari que si nous pouvons consacrer à de telles études suffisamment de temps, nos élèves s'y passionneront et continueront à la maison ce qu'ils n'auront pas eu le temps d'achever en classe.





Le tétraèdre régulier permettra de varier le paysage. Nous pouvons comme pour le cube tronquer les sommets, éventuellement jusqu'à obtenir un octaèdre. Nous pouvons aussi chanfreiner ses arêtes.

Les corps ronds : cône de révolution, cylindre et sphère constitueront une autre mine d'idées. Et les prismes divers...

Dans ces directions, les situations de départ ne manquent pas. L'activité dans un domaine amènera des gerbes d'idées nouvelles et de situations que nous ne pouvons pas imaginer aujourd'hui.

Oui, nous avons des possibilités de travail ; mais à quoi devons-nous limiter nos ambitions ? Quelles démonstrations exigerons-nous des élèves ? Doit-on tout admettre ? Et, sinon, que faut-il admettre ? Le problème ne se pose pas dans ces termes. Démontrer n'est pas le seul but des mathématiques. Rarement une théorie a historiquement commencé par des démonstrations, jamais peut-être. Il a fallu attendre très tard pour que des théories soient exprimées dans un cadre formel satisfaisant. Alors il ne s'agit pas d'aller par des exigences exorbitantes à l'encontre de notre véritable but. Il ne faut pas gâcher le plaisir qu'éprouvent nos élèves à explorer et à faire fonctionner. L'explorateur doit pouvoir choisir sa voie, il faut le laisser s'engager dans des impasses. Il est important qu'il apprenne à reconnaître qu'il est dans une impasse et à en sortir tout seul. Comment le ferait-il s'il ne s'y engageait jamais ?

Chaque élève admet implicitement des choses diverses. Il en admet d'autres consciemment sans éprouver le besoin ni de les démontrer ni de les poser comme axiomes. Je crois que l'objectif de la classe de troisième n'est pas de précipiter les choses dans ce domaine. Dans le meilleur des cas, le professeur pourra après coup et sans solennité faire remarquer que tel énoncé a été considéré comme évident.

C'est l'expérience des classes qui nous montrera les résultats qui seront utilisés par les élèves. Je pense que les élèves utiliseront implicitement l'existence et l'unicité de la droite perpendiculaire à un plan donné et passant par un point donné, l'existence et l'unicité du plan parallèle à un plan donné passant par un point donné. L'emploi de l'article défini (*la* perpendiculaire...) révèlera leur idée. Je crois qu'ils utiliseront consciemment le fait que la hauteur SI d'une pyramide est perpendiculaire à toutes les droites du plan de la base qui passent par I. Je crois que de même ils auront concience que l'égalité des longueurs IA, IB, ... les autorise à dire que SA, SB, ... sont aussi la même longueur.

La situation sera, si j'ose dire, plus intéressante lorsque l'élève affirmera des choses fausses. Il faudra alors chercher l'origine de l'erreur. Pour eux, la conviction ne résultera pas d'une démonstration, mais elle sera obtenue par un contre-exemple suffisamment simple pour qu'aucun doute ne subsiste.

Je crois que, si nous abordons ces quelques lignes du programme avec suffisamment de conviction et de volonté, les soucis qu'elles nous donneront seront payés d'une importante satisfaction : l'intérêt nouveau que nos élèves prendront aux mathématiques et pas seulement à ces questions de géométrie en dimension trois.

II.2

C. et D. MISSENARD

PETITE HISTOIRE DE TRONC DE PYRAMIDE

Voici une édifiante petite histoire de tronc de pyramide qui me paraît pouvoir déboucher sur quelques réflexions non dénuées d'intérêt.

I. Je vais vous le démontrer par $a + b$

Il s'agit d'un problème élémentaire : calculer le volume d'un tronc de pyramide régulière à bases carrées, en fonction de sa hauteur et des côtés de ses bases.

C'est un problème à la portée d'un élève de troisième et qui semble de nature à satisfaire les instances rédactrices de l'alinéa ci-dessous, extrait du programme de troisième :

"... exercices de géométrie dans l'espace, par exemple ... pyramide régulière (calcul d'éléments métriques)".

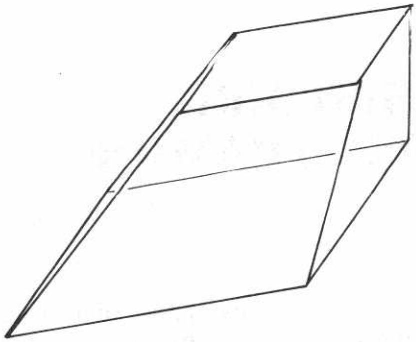
C'est, me semble-t-il, une bonne question, mettant en œuvre plusieurs activités et permettant d'utiliser quelques connaissances éparses :

- il faut déjà arriver à représenter l'objet sur une feuille de papier (posez la question à brûle-pourpoint à vos élèves, vous ne serez pas déçus) ;
- il faut ensuite retrouver dans de lointains souvenirs du programme de cinquième le moyen de calculer le volume d'une pyramide, et, pourquoi pas, en profiter pour une révision des formules nouvelles ;
- il faut encore ajouter à cela un zeste de Thalès, connaissance fraîchement acquise de la classe de troisième, ainsi qu'un rien de Pythagore ;
- il faut enfin se livrer à des manipulations de calcul littéral requérant une certaine pratique.

Cela peut donner à peu près ceci, dans une rédaction à l'intention de l'élève, du type guidage pas à pas :

1) Dessine une pyramide à base carrée. Quelle est la formule qui permet de calculer son volume, connaissant sa hauteur et le côté de sa base ?

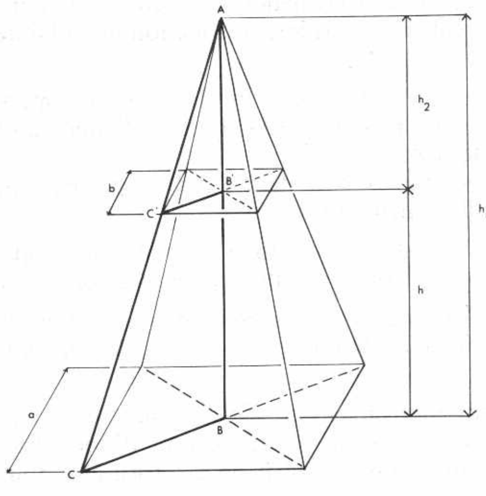
2) Voici ci-dessous le dessin d'un tronc de pyramide. Comprends-tu comment est fait un tel solide? Décris-le.



(les deux bases sont parallèles)

Dessine maintenant un tronc de pyramide régulière à base carrée.

3) Tu vas calculer le volume de ce tronc de pyramide régulière à bases carrées, en fonction des données résumées sur le dessin.



a) Exprime en fonction de h_1 et a le volume de la grande pyramide. Exprime en fonction de h_2 et b le volume de la petite pyramide.

Quel est alors, en fonction de h_1, h_2, a et b , le volume du tronc de pyramide?

b) Utilise l'énoncé de Thalès dans les triangles ABC et A'B'C' (au fait, pourquoi peux-tu l'utiliser ici?). Démontre alors que $\frac{h_1}{a} = \frac{h_2}{b}$.

Exprime alors h_1 et h_2 en fonction de h, a et b.

c) En utilisant les résultats des questions qui précèdent, écris la formule permettant de calculer le volume d'un tronc de pyramide en fonction de sa hauteur h et des côtés a et b de ses bases carrées.

Remarques :

• ce texte n'est donné qu'à titre indicatif. Le problème peut donner lieu à une recherche plus libre, guidée au besoin par le professeur

• au 3.a, le calcul de BC et B'C' permet de réviser le calcul de la diagonale du carré

• au 3.b, la manipulation $\frac{h_1}{a} = \frac{h_2}{b} = \frac{h_1 - h_2}{a - b}$ permet de revoir une propriété des "proportions" ou, si l'on préfère, des applications linéaires

• le 3.c nécessitera un peu d'aide de la part du professeur pour la factorisation de $a^3 - b^3$.

II. Nihil novi sub sole

Ce qui est rigolo, c'est que les Egyptiens de l'Antiquité, eux, n'avaient pas attendu la venue de Monsieur Thalès (axiome ou théorème de son prénom, déjà ?) pour savoir calculer un tel volume.

Il faut dire que les Egyptiens, les pyramides, ils connaissaient ! On trouve en effet dans le Papyrus de Moscou (datant des environs de l'an 2000 avant notre ère) un calcul où la méthode employée revient à l'utilisation de la formule

$$V = \frac{1}{3} h (a^2 + ab + b^2)$$

péniblement "découverte" par nos élèves dans l'exercice précédent.

III. Je vais vous le démontrer par

En se penchant sur la manière dont les Egyptiens avaient pu parvenir à cette formule, les historiens des mathématiques ont échafaudé d'audacieuses hypothèses. Il s'agit là bien sûr d'hypothèses qui ne sont nullement attestées sur le plan historique, mais qui peuvent pour nous être une bonne illustration du fait suivant :

Il y a diverses manières de faire des mathématiques.

Le bricolage intuitif qui va suivre est certes bien éloigné des majestueuses théories que nous avons mission de dérouler à longueur de journées devant les têtes blondes émerveillées. Il a pourtant son intérêt, son charme, et il serait bien dommage de le rejeter à priori.

Voici deux démonstrations plus intuitives de la formule qui nous occupe et qui exigent peu de présupposés.

1) La première est empruntée à l'ouvrage de Dedron et Itard "*Mathématiques et mathématiciens*" p. 47 :

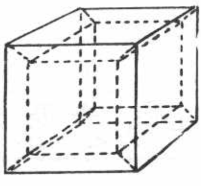
$$V = \frac{h}{3}(a^2 + ab + b^2)$$

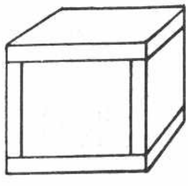
Cette expression peut s'établir aisément à partir du volume du parallélépipède rectangle, dans un cas cependant très particulier.

Une caisse cubique creuse a pour arête extérieure a, pour arête intérieure b. Les panneaux ont pour épaisseur h. Chacun des six panneaux peut être considéré comme un tronc de pyramide d'épaisseur h, de bases a^2 et b^2, de volume V. Le volume total des panneaux est alors 6 V. La même caisse, dans une construction moins soignée, pourra être formée de six panneaux parallélépipèdes, de même épaisseur h, deux, carrés, de côté a, deux, rectangles, de côtés a et b, deux autres, carrés, de côté b. Le volume total 6 V est donc :

$$2\,a^2h + 2\,abh + 2\,b^2h\ ,$$

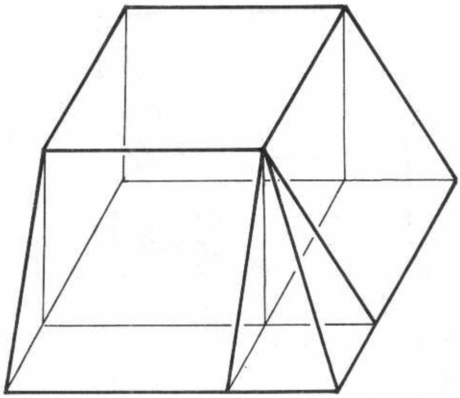
et nous retrouvons la formule Egyptienne.



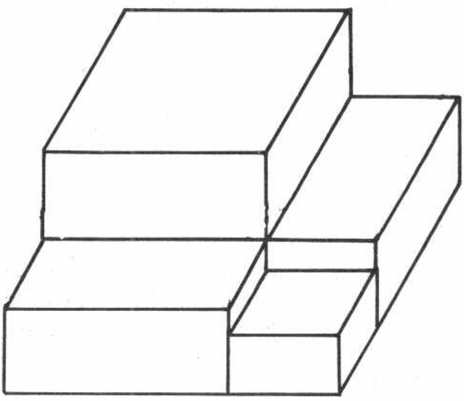


2) La deuxième, d'après Van der Waerden, dans *Science Awakening*, tome 1, concerne une pyramide non régulière mais ayant 3 arêtes perpendiculaires. Le calcul se résume par les dessins suivants :

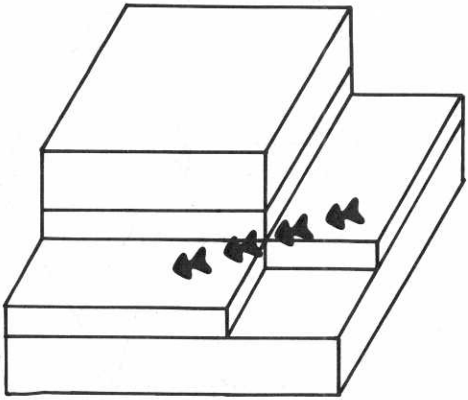
On découpe le tronc de pyramide en 4 morceaux:
— 1 parallélépipède rectangle
— 2 prismes à base triangulaire
— 1 pyramide.



Connaissant le volume d'un prisme et celui d'une pyramide, on peut remplacer notre solide par un solide de même volume, composé uniquement de parallélépipèdes rectangles.



Pour calculer le volume de ce nouveau solide et retrouver la formule égyptienne, il suffit de le découper en tranches horizontales d'épaisseur $\frac{1}{3} h$.



— la 1ère tranche a un volume de $\frac{1}{3} h\, a^2$

— la 2ème tranche a un volume de $\frac{1}{3} h\, ab$, ce qui se voit bien si l'on se livre au petit découpage-recollage de bloc qu'indique la flèche

— la 3ème tranche a un volume de $\frac{1}{3} h\, b^2$,
d'où le volume total : $\frac{1}{3} h\, (a^2 + ab + b^2)$.

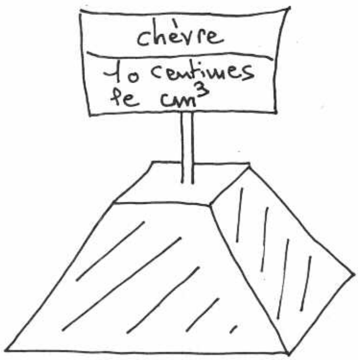
Je trouve cette dernière démonstration profondément convaincante. Elle permet de comprendre, de retenir, mieux, de donner du sens à une formule qui ainsi — pour une fois — ne reste pas ... formelle.

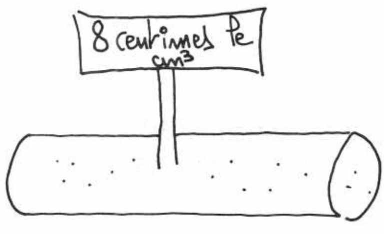
Peut-être serait-il temps de donner dans notre enseignement une petite place à ces autres mathématiques, brièvement illustrées ici. N'oublions pas de montrer à nos élèves qu'il y a aussi en mathématiques des choses jolies qui leur sont accessibles, avant qu'ils ne soient tout à fait dégoûtés par le formalisme aride dont ils sont, hélas, souvent abreuvés depuis leur plus jeune âge.

IV. En guise de post-scriptum ... à l'intention des amateurs de concret

Le problème envisagé ici n'est pas dépourvu d'application pratique.

Chacun sait en effet que le tronc de pyramide est une forme largement utilisée par les fabricants de fromages de chèvre et qu'un consommateur averti se doit de comparer les volumes avant d'acheter ...

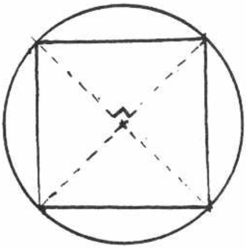




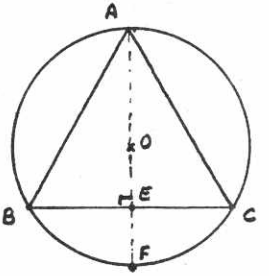
II.3 *Henri BAREIL*

PERSPECTIVE ET MATHEMATIQUES

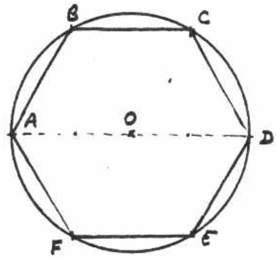
Soit les figures suivantes :



Carré



Triangle équilatéral



Hexagone régulier

Problème : dessiner ces figures en perspective

Il s'agira de "PERSPECTIVE CAVALIERE". Elle conserve les alignements de points. Elle "conserve les milieux" et le parallélisme.

Chacune de ces deux propriétés entraîne l'autre.

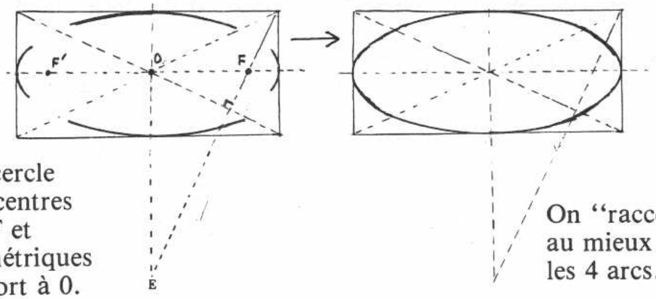
① CERCLE → ELLIPSE

Des dessins tels que ceux de boîtes de conserve cylindriques apprennent à dessiner grosso modo un cercle en perspective.

Ce dessin est celui d'une ELLIPSE. Cf. aussi ⑤ ci-dessous et pages 200, 201, 206, 207 du tome 1.

② TRACE DE L'ELLIPSE

Un tracé généralement satisfaisant est un *tracé "faux"* qui utilise les "cercles surosculateurs" (sensiblement confondus avec l'ellipse au voisinage du point de contact) obtenus ainsi, à partir d'un rectangle dans lequel on inscrit l'ellipse :

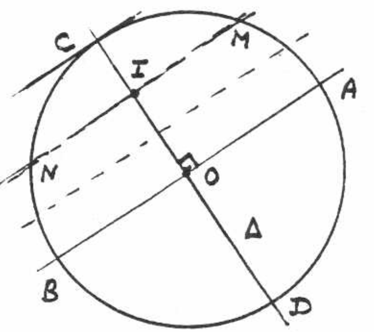


Arcs de cercle dont les centres sont E, F et leurs symétriques par rapport à 0.

On "raccorde" au mieux les 4 arcs.

Ce tracé manifeste l'intérêt pour des tracés "valables", du moins tant que l'ellipse n'est pas trop aplatie, encore qu'approximatifs (mais tracer l'ellipse "au cordeau" ou par "la bande de papier" ne fait pas mieux !) obtenus grâce à des courbes tangentes.

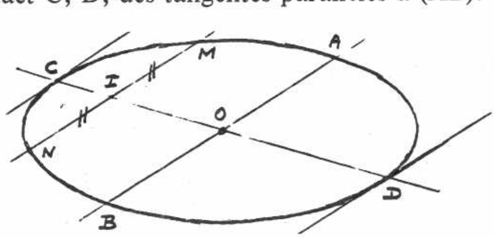
③ CARRE ET "DIAMETRES CONJUGUES"



Pour le cercle, soit le diamètre [AB] et le diamètre perpendiculaire △.

△ est axe de symétrie (orthogonale) et porte les milieux I des cordes [MN] parallèles à (AB) ainsi que les points de contact (C,D) des tangentes parallèles à (AB).

A étant choisi, d'où B, la conservation du parallélisme fait tracer (MN) parallèle à (AB), celle du milieu permet d'avoir I. D'où △ et les points de contact C, D, des tangentes parallèles à (AB).

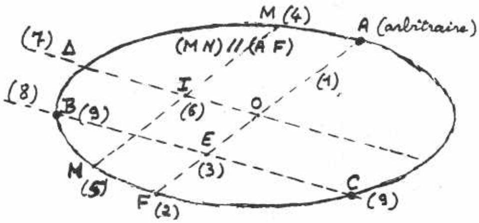


N.B. : La symétrie orthogonale par rapport à $\triangle$ donne, sur le dessin en perspective, une *symétrie-oblique* (d'axe $\triangle$, parallèlement à (AB)).

[AB] et [CD] sont dits diamètres conjugués l'un de l'autre. Nous utiliserons ce vocabulaire pour la suite de cette étude.

④ Ce qui précède traite le cas du carré. Pour les deux autres figures :

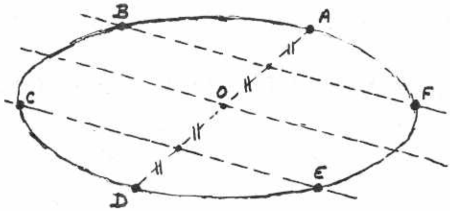
TRIANGLE EQUILATERAL



[(MN) n'est définie qu'à un parallélisme près]. [MN] permet, par son milieu I, d'obtenir $\triangle$, diamètre conjugué de [AF].

Tracer ensuite par E la parallèle à $\triangle$.

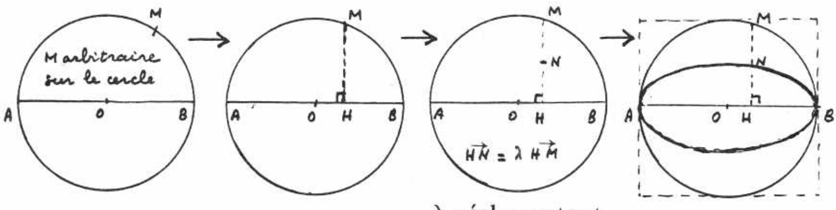
HEXAGONE REGULIER



Etude analogue, ci-dessus, pour tracer, en perspective, les médiatrices de [OA] et [OD].

⑤ AUTRES METHODES : CERCLE → ELLIPSE ET CONSTRUCTIONS

Regarder sur dictionnaire(s), encyclopédie(s), diverses définitions, caractérisations, constructions de l'ellipse. On y trouvera parfois celle-ci à partir d'un cercle.

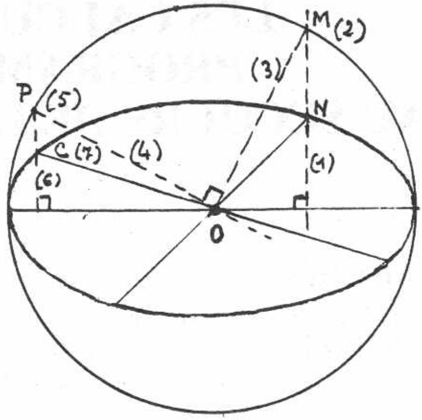


λ réel constant.

(Ici $\lambda = \dfrac{1}{2}$)

• Le carré, circonscrit au cercle, tracé en pointillés, a pour transformé un rectangle circonscrit à l'ellipse. Par rapport au carré, le rectangle est "aplati" pour $|\lambda| < 1$, "allongé" pour $|\lambda| > 1$ [Comparer avec les déformations éventuelles, par "tassement" ou "allongement", des images sur un écran de télévision].

• *De là un nouveau moyen, à partir d'un diamètre* arbitraire (ON) de l'ellipse, *de tracer son diamètre conjugué* : cf. figure ci-contre.

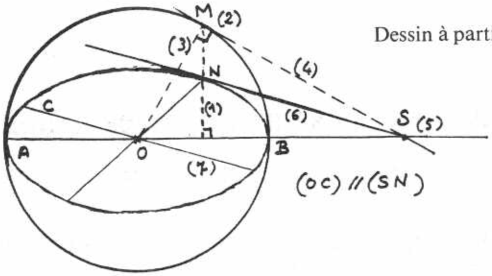


On en déduit les constructions relatives au triangle équilatéral ou à l'hexagone régulier].

• *Autre méthode* :
La transformation utilisée en ce §5 est une *"affinité orthogonale"* d'axe (AB) et de rapport λ.

L'énoncé de Thalès permet d'établir que des points alignés ont des images alignées. Par "passage à la limite", la tangente en M au cercle coupant (AB) en S, S appartient aussi à la tangente en N à l'ellipse. D'où cette tangente. Etc.

• **N.B.** Soient [AB] et [A′B′] les diamètres découpés par une ellipse sur ses axes de symétrie. Chacun des cercles de diamètres [AB] ou [A′B′] permet les études et tracés précédents.



Dessin à partir de A.

II.4 Henri BAREIL, *d'après Yolande NOËL* *

LES CALCULATRICES PROGRAMMABLES AU SECOURS DE L'ARITHMETIQUE

OBJECTIFS :

1. Utiliser une période, un produit remarquable, une solution particulière. Réfléchir à la divisibilité.
2. S'adonner à "la démarche scientifique qui consiste à
   - — expérimenter
   - — conjecturer
   - — démontrer"
3. Montrer comment l'usage d'un calculateur programmable simplifie une recherche.

***PROBLEME :** Rechercher l'ensemble des entiers **n** tels que $4n^2 + 1$ soit divisible par 65.*

REMARQUE INITIALE

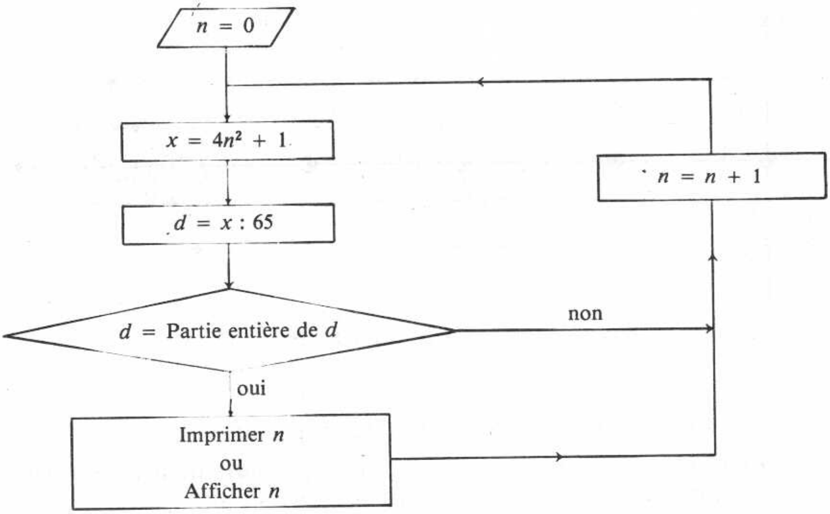
Il suffit de rechercher les entiers positifs, puis de compléter avec les opposés.

A Etude avec des calculatrices programmables

a) On écrit, et on fait passer, un programme de recherche des solutions (positives)

Il correspondra, par exemple, à l'organigramme ci-contre (qui n'a pas de test d'arrêt. On peut en ajouter un !).

* *Mathématique et Pédagogie* n° 22, bulletin de la Société Belge des Professeurs de Mathématiques. Abonnement : cf. Bulletins de l'A.P.M.E.P., page "Le coin du trésorier".



b) *Observation des résultats :*

Le programme précédent donne les solutions successives :

4 ; 9 ; 56 ; 61 ; 69 ; 74 ; 121 ; 126 ; 134 ; 139 ; ...

On peut donc remarquer, compte tenu des opposés, leur disposition autour des multiples successifs de 65 :

$0-9$	$65-9$	$130-9$	
$0-4$	$65-4$	$130-4$	etc.
$0+4$	$65+4$	$130+4$	
$0+9$	$65+9$	$130+9$	

c) *Conjecture*

Ce qui précède semble mettre en évidence une période de 65 (et des symétries, autour du "milieu" de 65, du milieu de 130, ...).

Les solutions seraient donc fournies par $65k \pm 4$ et $65k \pm 9$, k décrivant $\mathbf{Z}$.

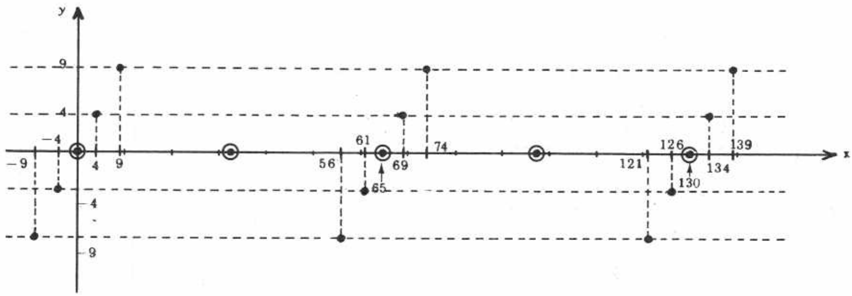
N.B. :

① La période se retrouve évidemment en groupant autrement les valeurs de n solutions, mais toujours par paquets de quatre, par exemple avec :

$$\{4 \; ; 9 \; ; 56 \; ; 61\} \longrightarrow \{69 \; ; 74 \; ; 121 \; ; 126\} \longrightarrow \ldots$$

② Elle se traduit graphiquement de plusieurs façons :

— par exemple, avec $y = n -$ multiple de 65 le plus proche.



(Les centres de symétrie sont indiqués par : ⊙).

— ou avec $y =$ reste de la division de n par 65.

Ces graphiques permettent d'associer à ces études numériques celles d'applications dans le plan : translation, symétries centrales...

On peut aussi s'intéresser à cette occasion à la composition de deux symétries centrales, aux figures qui possèdent au moins deux centres de symétrie..., à la composition d'une symétrie centrale et d'une translation, aux figures invariantes par translation, ...

d) *Démonstration*

Tout entier n peut s'écrire sous la forme $65k \pm \alpha$ (où $k \in \mathbf{Z}$, et α est un entier positif inférieur à $\frac{65}{2}$).

Dès lors $4n^2 + 1$ s'écrit 4 (multiple de $65 + \alpha^2) + 1$ et sera multiple de 65 si et seulement si $4\alpha^2 + 1$ l'est. Or l'exploration faite au a) montre qu'il y a deux valeurs de α et deux seulement qui conviennent : 4 et 9 .

$\boxed{\text{B}}$ Variante en s'arrêtant à la première solution trouvée

Ici cette solution est 4 .

Dès lors, pour toute solution n ,

$$4n^2 + 1 = \text{mult. de } 65 \qquad (1)$$

mais, comme $4 \times 4^2 + 1 = 65$, par soustraction membre à membre, (1) équivaut à :

$$4(n^2 - 16) = \text{mult. de } 65$$
$$4(n-4)(n+4) = \text{mult. de } 65$$

La propriété d'unicité de la décomposition d'un naturel en facteurs premiers permet d'induire que 5, divisant 65, doit diviser $n-4$ ou $n+4$; et de même pour 13. Réciproquement...

On établit, comme précédemment, qu'il suffit de rechercher les solutions dans un intervalle d'amplitude 65...

$\boxed{\text{C}}$ Sans calculateur programmable

... On peut évidemment calculer "à la main"! Mais c'est fort lassant, sauf si l'on suit la démarche $\boxed{\text{B}}$, laquelle exige un investissement théorique plus considérable.

$\boxed{\text{D}}$ Généralisation

... Soit à chercher les entiers n tels que $\alpha n^2+\beta$ soit divisible par γ (α, β, γ entiers).

... Si l'on balaie un intervalle de valeurs de n avec un calculateur programmable, quelle est l'amplitude de l'intervalle qui permet d'obtenir ensuite toutes les solutions (éventuellement de conclure qu'il n'y en a pas)? Et comment obtenir toutes ces solutions?

... Traiter divers exemples.

$\boxed{\text{E}}$ Concluons avec Yolande Noël

Le problème initial est en lui-même "dénué de tout intérêt".

Mais son étude met en jeu des démarches fort intéressantes!

RAPPEL :

TROIS BROCHURES A.P.M.E.P.
plus que jamais d'actualité :

Brochure n° 20 :

QUELQUES APPORTS DE L'INFORMATIQUE À L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES

- 280 pages.
- *37 articles groupés en 5 chapitres :*
  Ch. 1 : Renouveau de l'art du calcul.
  Ch. 2 : Quelques développements en situation pédagogique.
  Ch. 3 : Langages et méthodes.
  Ch. 4 : Aide de l'informatique à l'enseignement.
  Ch. 5 : Informations diverses.
- *Liste des thèmes et/ou situations mathématiques abordés :*
  Multiplication de nombres de plus de dix chiffres. Division "loin après la virgule". Racine carrée, par tâtonnement, par la méthode de Newton, par ajustement. Division euclidienne. Algorithme d'Euclide, PGCD, PPCM, naturels premiers, factorisation, théorème de Fermat, de Bezout, nombres parfaits, amiables, ploutons. Somme itérée des carrés des chiffres d'un nombre. Calcul rapide des fonctions trigonométriques et hyperboliques. Autre calcul rapide de tg x (pseudo-division). Triangle de Pascal. Calcul de π. Erreurs dues à la machine. Médiatrices et distances. Droites d'un plan fini. Planche de Galton. Chasse aux canards (simulation binomiale). Equilibre entre espèces. Trajets de rayons lumineux. Lignes de champ électrique. Distribution binomiale. Test du χ^2. Point fixe d'une transformation. Suites récurrentes. Applications affines. Vecteurs propres. Séries et convergence. Résolution d'équation. Puissance d'un nombre. Dessins de fleurs. Classement d'une suite de nombres. Equation du second degré. Surjections. Rosagones, courbes récursives. Accord de "tel". Quadrilatères convexes. Algèbre linéaire. Système d'équations linéaires.

Brochure n° 24 :

CALCULATEURS PROGRAMMABLES ET ALGEBRE DE QUATRIEME

(Une recherche inter-Irem 1974-1977)

Plan d'expérience - Progressions - Fiches d'activités sur calculateur - Evaluation - L'expérience et les classes.

Brochure n° 31 :

CALCULATRICES "4 OPÉRATIONS"

En quelques années, la minicalculatrice s'est imposée à nous. Elle est peu sophistiquée, scientifique, programmable, chère, belle, bon marché, laide, très précise, petite, grosse, peu précise... Elle fonctionne sur piles, sur secteur ou sur batteries rechargeables. Elle sert au plombier, au percepteur des contributions, aux organisateurs du Tour de France, au gendarme verbalisateur. On la trouve à côté des ordinateurs, sous une vitre (à briser en cas d'urgence). Elle a réussi le tour de force de supplanter la règle à calcul de l'ingénieur.

J'ai même rencontré des professeurs de mathématiques qui en possèdent une et s'en servent.

"Mathématique et Pédagogie", numéro 11/12

• Sommaire de la brochure :

Les plumes métalliques procurent une grande économie de temps, aussi ont-elles fait invasion dans presque toutes les écoles. C'est là un mal dû à la paresse des instituteurs. La plume d'oie, par son élasticité, par la facilité avec laquelle on la taille pour tous les genres d'écriture, et par son prix modéré, a une supériorité incontestable. Néanmoins, on peut autoriser les plumes métalliques pour les dictées et les devoirs qui se font à la maison.

Extrait d'un cours de pédagogie professé sous Louis-Philippe à l'Ecole Normale de Rennes, (Promotion 1846-1848).

Les calculatrices considérées dans cette brochure sont des calculatrices 4 opérations (ce qu'elles sont toutes), munies d'une mémoire (elle augmente notablement les possibilités) et complétées éventuellement par quelques fonctions simples (+ / − ; $1/x$,...) ce qui est de plus en plus fréquent sur les machines de bas de gamme de tous les constructeurs. On les appelle souvent minicalculatrices - ou "calculettes". Indépendamment de leur faible côut, le fait qu'elles ne soient ni scientifiques ni programmables réduit le nombre de touches, donc les erreurs de frappe, et disperse moins l'attention de jeunes élèves.

Nous avons limité leur champ d'utilisation à l'enseignement obligatoire (primaire, 1er cycle, L.E.P.). Nous devrions admettre une fois pour toutes qu'à ce niveau la mathématique est aussi une science expérimentale et non une discipline purement intellectuelle qu'il suffit d'enseigner avec de bons axiomes, de bonnes paroles et un morceau de craie... Manipulons et faisons fonctionner les notions numériques fondamentales avant de les définir, et intégrons la calculette à l'apprentissage du calcul : là aussi, il faut commencer tôt... et progressivement.

3e Partie

NOUVEAUX ÉCLAIRAGES

III.1

Une équipe de l'Yonne (*)

JEU SUR QUADRILLAGE

I. Intentions pédagogiques

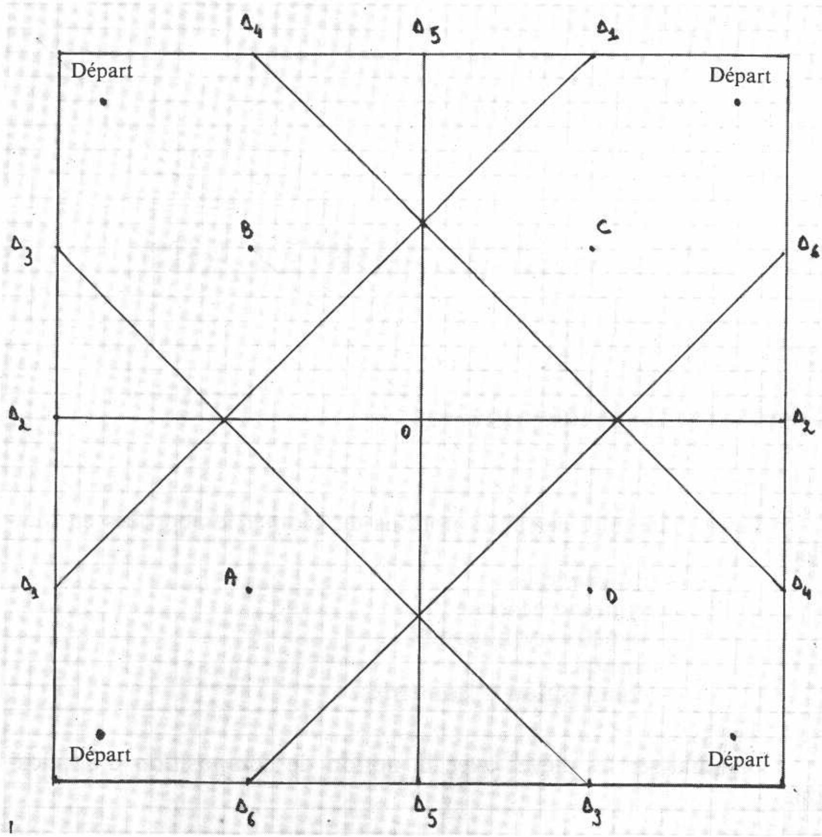
• Faire manipuler certaines notions de géométrie abordées en quatrième :

— translations
— symétrie centrale
— symétrie orthogonale
— distance
— composition d'isométries.

• Familiariser les élèves avec la notion de composition d'applications.

(*) équipe composée de Gérard BONNEVAL, Annie et Jean CHOLLET, Dominique DONNET-DESCARTES, Danièle EUGÈNE, Michel WOROBEL.

II. Description du jeu



Matériel:

• Une surface de jeu en carton (60 cm × 60 cm) quadrillée tous les 2 cm (voir dessin ci-dessus).

• Des pions de couleurs différentes.

• 64 cartes

(i) 24 cartes translation
(0,1), (0, − 1), (1,0), (− 1,0), (1,1), (1, − 1), (− 1,1), (− 1, − 1), (2,0), (0,2), (− 2,0), (0, − 2), (2,1), (1,2), (2, − 1), (− 1,2), (− 2,1), (− 2, − 1), (1, − 2), (− 1, − 2), (2,2), (2, − 2), (− 2,2), (− 2, − 2)

(ii) 10 cartes: symétrie centrale
(2 pour chaque point O,A,B,C,D)

(iii) 12 cartes : symétrie orthogonale
(2 pour chaque droite $\triangle_1$, $\triangle_2$, $\triangle_3$, $\triangle_4$, $\triangle_5$, $\triangle_6$)

(iv) 8 cartes : symétrie centrale par rapport à un pion (d'un joueur) au choix

(v) 10 cartes : Joker

P.S. Après expérimentation en classe il semble qu'il vaut mieux utiliser des cartes *générales* de symétries orthogonales ou centrales et non des symétries par rapport à des droites ou à des points précisés. Cela entraîne une plus grande recherche de la part de l'élève... Bien sûr, chaque meneur de jeu est libre de modifier les règles ... et l'expérimentation se poursuit.

III. Principes généraux

Ce jeu se joue à 2, 3 ou 4 joueurs.

On distribue un pion et 10 cartes à chaque joueur. Le reste des cartes formant le talon.

Chaque joueur place son pion sur un des quatre points de départ représentés sur le quadrillage.

Le but du jeu est d'utiliser les cartes le plus astucieusement possible pour amener son pion au centre du quadrillage.

Le gagnant est celui qui atteint le centre, ou, si l'on joue en temps limité, celui qui, à la fin du temps donné, est le plus près du centre (selon une distance à préciser).

IV. Déroulement du jeu

Chaque joueur pose son pion sur un des points de départ. Le premier joueur joue.

a) Il peut poser :
— une carte
— ou plusieurs cartes s'il possède une ou plusieurs cartes Joker

Exemples :
— si un joueur possède une carte Joker, il peut jouer :
s_A, J et s_C (c'est-à-dire la transformation $s_C \circ s_A$).
— si un joueur possède deux cartes Joker, il peut jouer :
s_A, J, s_C, J, $t_{(2,1)}$ (c'est-à-dire la transformation $t_{(2,1)} \circ s_C \circ s_A$).
Puis il fait subir à son pion la transformation indiquée par la (ou les) carte(s) posée(s).

b) Il peut passer son tour s'il ne peut ou ne veut pas jouer. Dans ce cas il peut se débarrasser d'une ou plusieurs cartes qu'il remettra au talon.

Dans tous les cas, les cartes jouées sont remises sous le talon, face contre table, et le joueur reprend sur le dessus du paquet un nombre de cartes égal au nombre de cartes posées.

Puis le joueur placé à sa gauche joue à son tour, ...

Compléments

- Un joueur ne peut pas placer son pion sur un nœud occupé.
- Dans le cas où un joueur fait :
  — une erreur d'interprétation de la carte ou d'une des cartes jouées,
  — une erreur de placement de son pion,
  — ou encore si le pion sort de la surface de jeu,

le coup est annulé et le joueur passe son tour.

V. Remarque

Distance

On peut choisir une des distances suivantes :

$$d(x,y) = |x| + |y|$$

$$d(x,y) = \sup(|x|, |y|)$$

$$d(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Il est évident qu'une fois choisie, la distance reste la même pour toute la durée du jeu.

Bernard CHAUVET

III.2

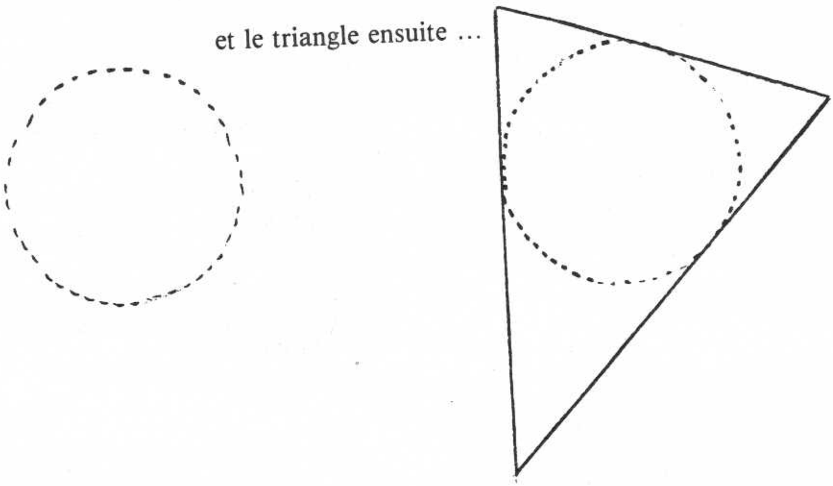
AVEC DES PARALLELOGRAMMES ET DES CERCLES

Le point de départ :

Certains triangles admettent un cercle inscrit.

Comment puis-je m'en assurer ? Tout simplement en dessinant d'abord le cercle

et le triangle ensuite …



Mais ceci est-il vrai pour tout triangle ?

Nous, nous savons que oui, mais nos élèves ? et comment les y conduire ?

A partir du parallélogramme !

Comment ? Certains parallélogrammes ont un cercle inscrit, on peut s'en assurer en traçant d'abord le cercle et le parallélogramme ensuite !

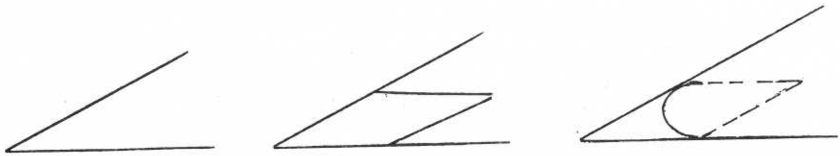
A condition de voir le cercle inscrit comme intersection de l'ensemble des cercles tangents à AB et DC d'une part, et des cercles tangents à AD et BC d'autre part, et comme les uns et les autres ont tous le même diamètre, qui est la largeur de la bande, ces largeurs sont égales.

Mais il faudrait savoir que l'intersection de deux bandes de même largeur est un losange.

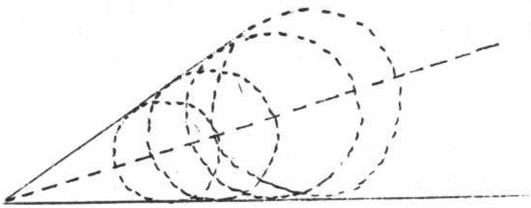
Mais tout ceci nous donne le moyen de dessiner

un *cercle tangent à deux droites données.*

Comment ? Simplement en fabriquant un losange à partir de ces deux droites, et en inscrivant le cercle dans ce losange.



Mais à partir de ces droites, des losanges (et des cercles), il y en a une infinité, et tous leurs centres appartiennent tous à l'axe de symétrie de ces droites, simplement parce qu'un losange est invariant dans une symétrie orthogonale par rapport à ses diagonales.

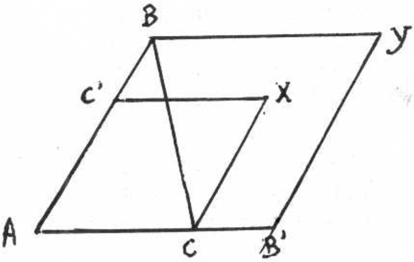


Et si nous revenions au triangle initial...

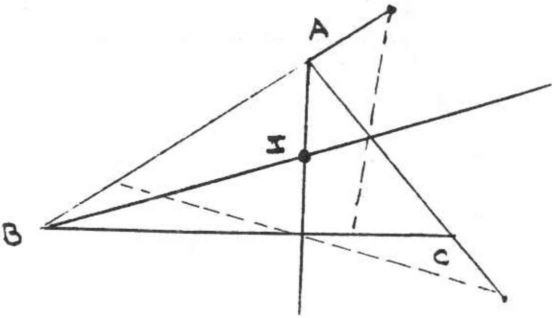
Il faudrait tracer un cercle qui soit d'abord tangent aux côtés AB et AC et pour cela tracer un losange sur AB et AC. Mais lequel ? Celui de côté AB, ou celui de côté AC ?

CAC'x ou BAB'y?

Mais si on joignait tout simplement BC et B'C'?



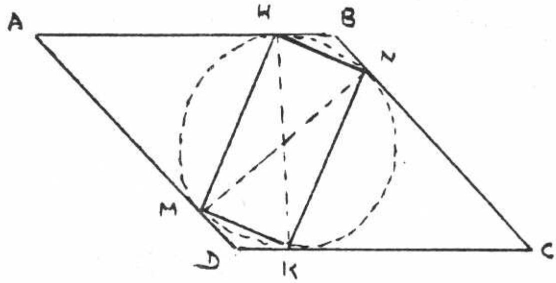
Si on réfléchit un instant, dans une symétrie orthogonale (d'axe celui de AC et AB), une droite et son image se coupent sur l'axe de symétrie : alors BC, qui a pour image B′C′... et voici en passant une certaine façon de déterminer l'axe de symétrie de deux droites, qui n'utilise pas le compas.



On sait donc trouver l'axe de symétrie de AB et AC, celui de BA et BC. Ces droites se coupent en I et I ...

Voilà donc notre problème résolu.

Mais revenons à la figure ci-dessous.



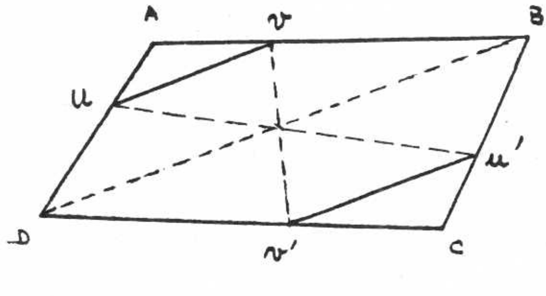
Quelle est donc la nature de MHNK?

Hum, un quadrilatère dont les diagonales sont égales et se coupent en leur milieu, cela ne vous dit rien?

Tiens, tiens, il existe donc des parallélogrammes dans lesquels on peut inscrire un rectangle ; certes, ce sont des losanges (encore !) et même, on peut en inscrire beaucoup dans un losange !

La preuve : observons seulement que les côtés du rectangle sont parallèles aux diagonales et si on trace un segment parallèle à une diagonale et son symétrique par rapport au centre du losange, on obtiendra les quatre sommets d'un rectangle. Comme il y a beaucoup de segments parallèles à une diagonale, il y aura donc beaucoup de rectangles.

Pour les losanges d'accord, il y en a toujours, mais les autres parallélogrammes ?



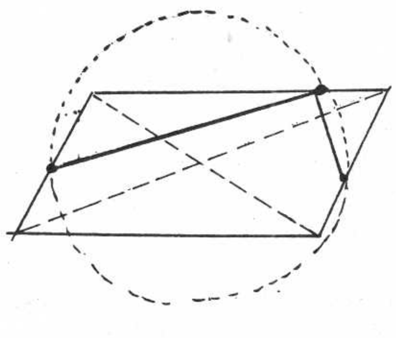
Essayons donc : traçons un segment parallèle à une diagonale ; visiblement, si on obtient un parallélogramme, ce n'est pas un rectangle. Alors !

La "méthode du losange" ne convient pas, mais une autre, pourquoi pas ?

Réfléchissons un instant.

Un rectangle, diagonales égales, diagonales qui se coupent en leurs milieux, voilà qui fait penser à 4 points d'un cercle deux à deux diamétralement opposés.

On peut donc penser à tracer un cercle dont les quatre côtés du parallélogramme... Mais où centrer ce cercle ?



Mais si un parallélogramme est inscrit dans un autre, son centre est le même que l'autre : c'est le milieu commun à deux segments dont les extrémités appartiennent à deux droites parallèles ; on a déjà vu cela.

Et comme un rectangle, c'est un parallélogramme et que le centre du cercle, c'est celui du rectangle, il suffira de pouvoir tracer un cercle centré au centre du parallélogramme qui coupe les quatre côtés (deux consécutifs suffiront...).

Seulement voilà, cela est-il toujours possible? Et si on n'y parvient pas, etc... et pourquoi cela l'est-il dans un losange...

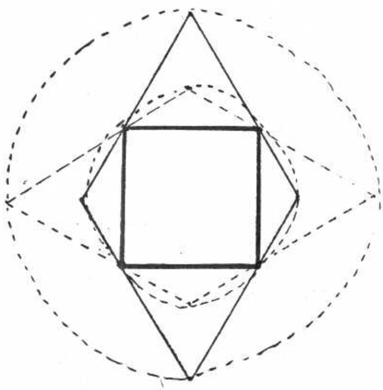
Allons, on ne va pas tout vous dire. Réfléchissez aussi.

Et si nous revenions au losange?

Il y a dans un losange une infinité de façons d'inscrire un rectangle.

Mais parmi tous ces rectangles, trouve-t-on un carré?

Observez la figure suivante,



et concluez!

Et pour des plus grands :

cercle – carré
rectangle – ellipse

Qu'est-ce que tout cela peut bien donner ?

Qui cherche, trouve!

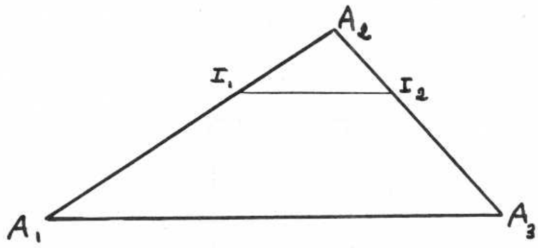
III.3

Marc BLANCHARD

DES LUMIÈRES SUR LES PROJECTEURS

1) *Une première projection...*

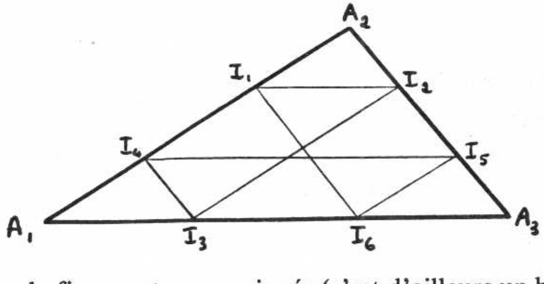
Dans un triangle $A_1 A_2 A_3$, projeter un point $I_1 \in (A_1 A_2)$ en $I_2 \in (A_2 A_3)$ parallèlement à $(A_3 A_1)$.



2) *suivie de quelques autres*

Projeter I_2 en $I_3 \in (A_1 A_3)$ parallèlement à $(A_1 A_2)$, puis I_3 en $I_4 \in (A_1 A_2)$ parallèlement à $(A_2 A_3)$, puis I_4 en $I_5 \in (A_2 A_3)$ parallèlement à $(A_1 A_3)$, puis I_5 en $I_6 \in (A_1 A_3)$ parallèlement à $(A_1 A_2)$.

Si l'on projette I_6 sur $(A_1 A_2)$ parallèlement à $(A_2 A_3)$, que remarque-t-on ?



Lorsque la figure est assez soignée (c'est d'ailleurs un bon exercice de manipulation de la règle et de l'équerre), il semble que le projeté de I_6 soit I_1.

Comment le prouver ?

3) *Une preuve du constat*

Soit x l'abscisse de $I_1 \in (A_1 A_2)$ dans le repère (A_1, A_2). D'après le théorème de Thalès, x est encore l'abscisse de $I_2 \in (A_2 A_3)$ dans le repère (A_3, A_2), car A_1 se projette en A_3 et A_2 est invariant dans la première projection.

Notons ainsi ce résultat :

0	A_1	A_3
1	A_2	A_2
x	I_1	I_2

Comment poursuivre le tableau ?

0	A_1	A_3	A_3	A_2	A_2	A_1
1	A_2	A_2	A_1	A_1	A_3	A_3
x	I_1	I_2	I_3	I_4	I_5	I_6

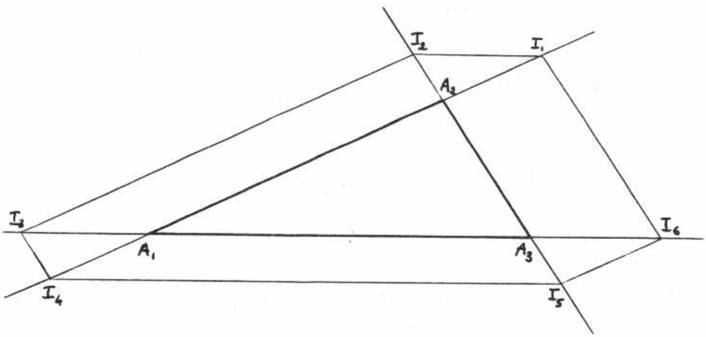
I_6 a donc pour abscisse x, dans le repère (A_1, A_3) de $(A_1 A_3)$.

Ensuite, A_1 est invariant et A_3 se projette en A_2, dans la projection sur $(A_1 A_2)$ parallèlement à $(A_2 A_3)$. I_6 se projette en un point de $(A_1 A_2)$ qui a pour abscisse x dans le repère (A_1, A_2). C'est donc I_1.

4) *Mise en évidence de l'hexagone*

Le polygone $I_1 I_2 I_3 I_4 I_5 I_6$ est bien sûr un hexagone (sauf cas exceptionnels, vus ci-après).

Ce résultat reste valable lorsque $I_1 \notin [A_1, A_2]$.



L'hexagone n'est plus croisé.

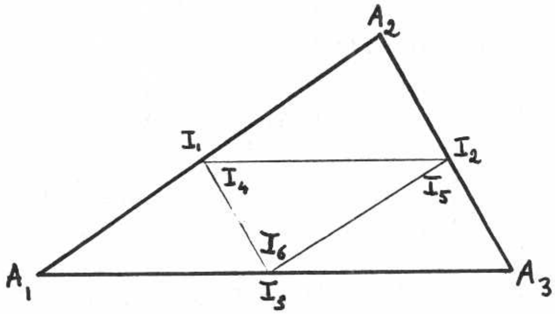
5) *Cas particuliers*

a) Lorsque $I_1 = A_1$ $(x = 0)$, alors l'hexagone se réduit au triangle $A_1 A_2 A_3$.

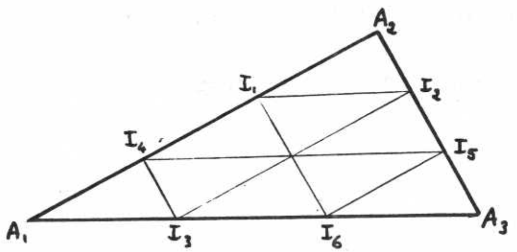
b) Lorsque $I_1 = A_2$ $(x = 1)$, même résultat.

c) Lorsque $x = \frac{1}{2}$, alors $I_1 = I_4$ (milieu de (A_1, A_2)),
$I_2 = I_5$ (milieu de (A_2, A_3)),
$I_3 = I_6$ (milieu de (A_3, A_1)).

La figure est classique.



d) Lorsque $x = \frac{1}{3}$, l'hexagone se croise en son centre de symétrie (centre de gravité du triangle).



Lorsque $x = \frac{2}{3}$, le résultat est analogue.

6) *Quelques questions*

a) Si x est l'abscisse de $I_1 \in (A_1 A_2)$ dans le repère (A_1, A_2), quelle est l'abscisse de I_4 dans le même repère ?

b) Préciser la nature de l'application : $\left| \begin{array}{l} (A_1 A_2) \longrightarrow (A_1 A_2) \\ \quad\quad I_1 \longmapsto I_4 \end{array} \right.$

c) Montrer que, pour tout x réel, prendre $I_1 \in (A_1 A_2)$, point d'abscisse x ou d'abscisse $1 - x$, dans le repère (A_1, A_2), conduit au même hexagone.

d) Vérifier que : $\overrightarrow{I_3I_2} = x\,\overrightarrow{A_1A_2}$ et $\overrightarrow{I_6I_5} = (1-x)\,\overrightarrow{A_1A_2}$

En déduire que, si on a défini une distance dans le plan du triangle $A_1A_2A_3$ et si $I_1 \in [A_1 A_2]$, alors le triangle et l'hexagone ont même périmètre.

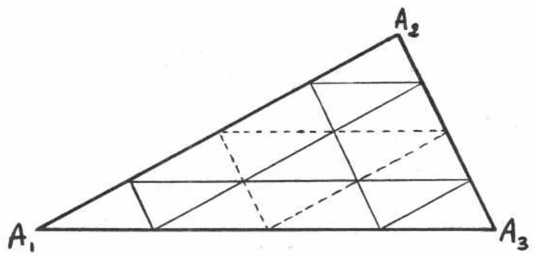
Comment traiter le cas particulier $x = \frac{1}{2}$?

e) L'hexagone peut-il être régulier ?

7) *Vers les trillages* (*)

Avec $x = \frac{1}{2}$, un trillage s'élabore.

Prenons $x = \frac{1}{4}$ (ou $\frac{3}{4}$) ; en superposant avec $x = \frac{1}{2}$, on obtient :



(le triangle des milieux est tracé en pointillés)

Comment continuer le trillage ?

Si l'on rajoute sur la figure le cas $x = \frac{1}{8}$ (ou $\frac{7}{8}$), est-ce suffisant pour obtenir un trillage du triangle ?

Sinon, que faut-il rajouter en outre ?

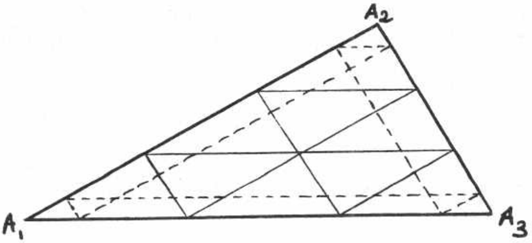
Comment poursuivre ?

Quel rôle peut-on faire jouer à l'indicateur d'Euler ?

Revenons au triangle initial. Avec $x = \frac{1}{3}$ (ou $\frac{2}{3}$), un trillage différent est commencé.

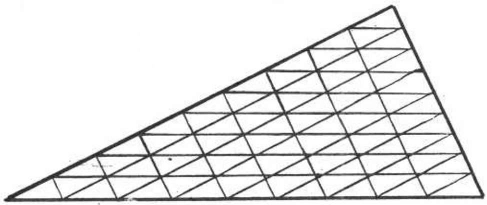
(*) Voir l'article de Henri Pontier, p. 172, tome 1.

Si l'on rajoute $x = \frac{1}{9}$ (ou $\frac{8}{9}$), est-ce suffisant pour obtenir un nouveau trillage complet ?



($x \in \{\frac{1}{3}\,;\,\frac{2}{3}\}$ est en trait plein, et $x \in \{\frac{1}{9}\,;\,\frac{8}{0}\}$ en pointillés).

En complétant la figure correspondante avec $x = \frac{2}{9}$ (ou $\frac{7}{9}$) et $x = \frac{4}{9}$ (ou $\frac{5}{9}$), le trillage se complète.



Comment, sur cette figure, obtenir des trillages plus fins ?

Comment obtenir d'autres trillages en commençant par $x = \frac{1}{4}$ (ou $\frac{3}{4}$), par $x = \frac{1}{5}$ (ou $\frac{4}{5}$), par $x = \frac{1}{n}$ (ou $\frac{n-1}{n}$) ?

Pour chaque trillage achevé, le triangle initial est partagé en triangles isométriques, homothétiques du triangle initial.

En combien de triangles le triangle initial est-il partagé, pour un trillage donné ?

Si on appelle "trillage d'ordre n" le trillage complet obtenu en commençant par $x = \frac{1}{n}$ (ou $\frac{n-1}{n}$), le nombre de petits triangles obtenus est n^2. C'est la somme des n premiers naturels impairs.

La superposition des figures pour obtenir des trillages de plus en plus fins peut se faire de façon agréable à l'aide de transparents et d'un rétroprojecteur.

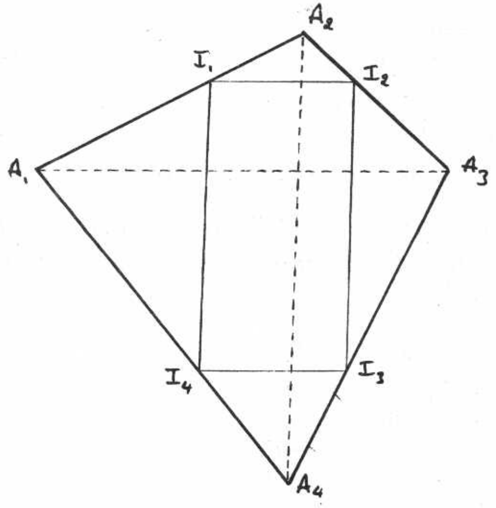
8) *Avec un quadrilatère*

Le polygone initial n'est plus ici un triangle, mais un quadrilatère $A_1A_2A_3A_4$.

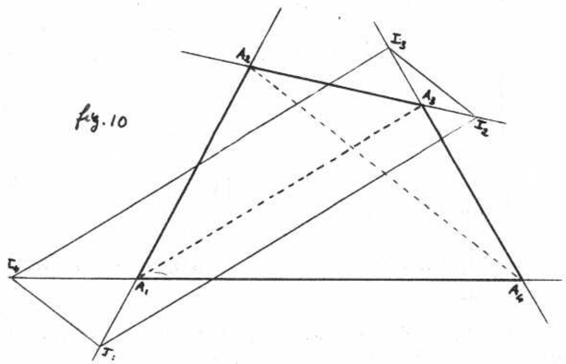
Projetons $I_1 \in (A_1A_2)$ en $I_2 \in (A_2A_3)$ parallèlement à (A_1A_3), puis I_2 en $I_3 \in (A_3A_4)$ parallèlement à (A_2A_4), puis I_3 en $I_4 \in (A_4A_1)$ parallèlement à (A_3A_1).

Quel est le projeté de I_4 sur (A_1A_2) parallèlement à (A_4A_2) ?

Cas : $I_1 \in [A_1 A_2]$



Cas : $I_1 \notin [A_1 A_2]$



Il semble que I_4 se projette en I_1.
Comment le prouver?

Si x est l'abscisse de $I_1 \in (A_1A_2)$ dans le repère (A_1, A_2), on peut dresser le tableau:

0	A_1	A_3	A_3	A_1
1	A_2	A_2	A_4	A_4
x	I_1	I_2	I_3	I_4

Ensuite A_1 est invariant, A_4 se projette en A_2 et I_4 en un point de (A_1A_2) d'abscisse x dans le repère (A_1, A_2); c'est donc I_1.

Le quadrilatère $I_1I_2I_3I_4$ est, bien sûr, un parallélogramme (même lorsque les points A_1, A_2, A_3, A_4 ne sont pas coplanaires).

Dans quels cas le parallélogramme $I_1I_2I_3I_4$ est-il aplati?
N'y a-t-il que les cas où $x=0$, ou $x=1$?
Envisager la possibilité où $A_1A_2A_3A_4$ est un quadrilatère croisé.

Si on a défini une distance, le parallélogramme $I_1I_2I_3I_4$ peut-il être un losange?

9) *Avec d'autres polygones*

$A_1 A_2 \ldots A_n$ est un polygone à n sommets (dont trois consécutifs ne sont pas alignés).
$I_1 \in (A_1A_2)$ se projette en $I_2 \in (A_2A_3)$ parallèlement à (A_1A_3), etc.
De façon analogue aux cas précédents, on peut construire un tableau.
Il faut alors envisager deux cas.

a) *n impair:*

0	A_1	A_3	A_3		A_n	A_n	A_2
1	A_2	A_2	A_4		A_{n-1}	A_1	A_1
x	I_1	I_2	I_3		I_{n-1}	I_n	I_{n+1}

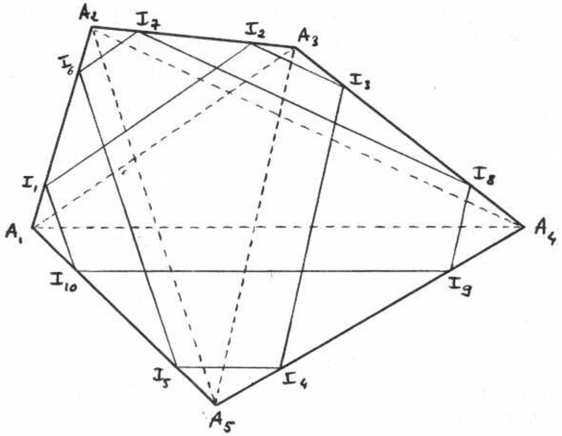
Quelle est l'application: $\left| \begin{array}{l} (A_1A_2) \longrightarrow (A_1A_2) \\ \quad I_1 \longmapsto I_{n+1} \end{array} \right.$?

Il s'agit d'une symétrie de centre le milieu de (A_1, A_2). C'est donc une involution.

Il s'en déduit qu'en poursuivant les projections, I_{2n}, (A_nA_1) se projette en $I_1 \in (A_1A_2)$ parallèlement à (A_nA_2).

Lorsque $x \notin \{0 ; 1 ; \frac{1}{2}\}$, on obtient donc un polygone à $2n$ sommets (pour $x = \frac{1}{2}$, il se réduit au polygone des milieux des côtés, à n sommets et pour $x \in \{0 ; 1\}$, on obtient le polygone initial).

Exemple : cas du pentagone.



On obtient donc un décagone.

Le lecteur est invité à faire la figure lorsque $I_1 \notin [A_1 A_2]$, lorsque le pentagone $A_1A_2A_3A_4A_5$ est étoilé, dans les cas particuliers où $x \in \{0 ; 1 ; \frac{1}{2}\}$.

b) *n pair :*

0	A_1	A_3	A_3		A_{n-1}	A_{n-1}	A_1
1	A_2	A_2	A_4		A_{n-2}	A_n	A_n
x	I_1	I_2	I_3		I_{n-2}	I_{n-1}	I_n

Ensuite A_1 est invariant, A_n se projette en A_2, donc I_n en I_1.

On obtient donc un polygone $I_1I_2...I_n$ à n sommets comme le polygone initial.

Le lecteur est invité à faire les figures lorsque le polygone initial est un hexagone, croisé ou non, lorsque $I \in [A_1A_2]$ ou non, et dans les cas particuliers $x \in \{0 ; 1 ; \frac{1}{2}\}$.

Tous ces résultats restent valables lorsque les sommets $A_1, A_2, ..., A_n$ ne sont pas coplanaires.

10) *En guise d'ouverture...*

Peut-on généraliser ce qui précède aux polyèdres ?

Une figure serait difficilement lisible ; on peut, à l'aide de baguettes de balsa employées pour la construction de maquettes et d'un peu de colle, construire un tétraèdre et le polyèdre obtenu après toutes les projections d'un point d'une arête sur une autre arête, parallèlement aux faces qui ne les contiennent pas, et des images de ce point. Ou encore partir d'un point d'une face, le projeter sur une autre face, parallèlement à l'arête non incluse dans ces faces et recommencer avec l'image obtenue.

Les cas particuliers sont également intéressants à étudier.

11) *Il faut bien conclure*

Avec pour tout outil mathématique : le résultat de Thalès, pour tout matériel : une règle et une équerre, outre un stylo et du papier dans le cas des polygones, des baguettes de balsa, une lame de rasoir et de la colle pour les polyèdres, on peut avoir véritablement une attitude de chercheur.

Les conjectures inévitables incitent à l'application lors des manipulations matérielles. Les figures planes ou matérielles dans l'espace restent comme autant de témoignages de la recherche.

Les polygones initiaux ou obtenus sont parfois croisés, parfois non : avant de tracer les figures, il est amusant de conjecturer le résultat.

Le thème est riche et il reste de nombreuses questions (nous en tenons quelques-unes en réserve) à se poser. "Il suffit pour ça d'un peu d'imagination", a-t-on chanté.

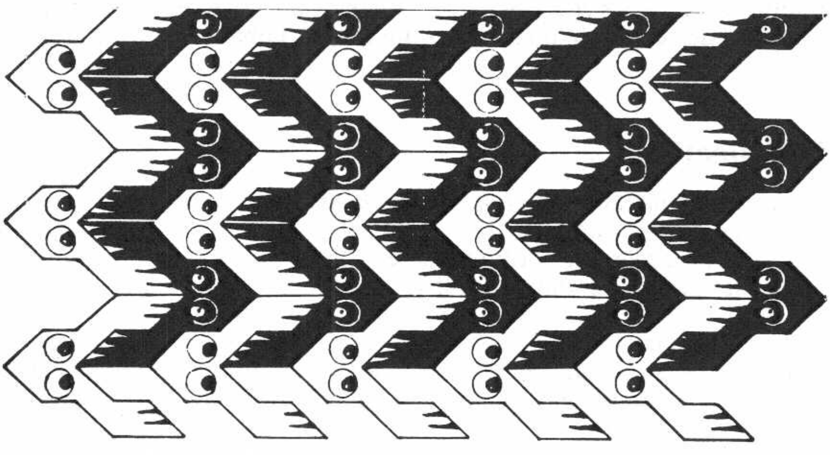
Le thème est neuf, et l'enseignant, comme et avec les élèves, est obligé de chercher.

III.4

Jeannine CARTRON
Dessins de Claude FEYSSAGUET

ACTIVITÉS GÉOMÉTRIQUES EN CLASSE DE QUATRIÈME A PARTIR D'UN PAVAGE D'ESCHER :

LES CHINOIS



Travail réalisé par une classe du Collège Beaulieu de Poitiers

Témoignage du vécu d'un thème

Introduction

C'est en participant au Colloque ''Interdisciplinarité'' à Alençon, en mai 1979, que j'ai découvert le travail des collègues de l'IREM de Basse Normandie sur les pavages d'Escher * (eux-mêmes travaillant à partir d'une étude de Pierre Jullien, de l'IREM de Grenoble).

J'ai essayé d'adapter à la classe de quatrième ce qu'ils faisaient à d'autres niveaux.

La partie coloriages, puis dessins, a été réalisée pendant les heures de mathématique, mais il est évident qu'il serait préférable de travailler en interdisciplinarité avec le professeur de dessin.

Peut-on atteindre tout ou partie du programme de quatrième à partir de cette activité? Après expérience, la réponse me paraît être ''oui, le programme est largement couvert, les élèves sont motivés et actifs''. Les manipulations nombreuses leur font ''vivre en acte'' les théorèmes mathématiques sous-jacents.

Ils abordent la géométrie sans craintes excessives et savent reconnaître, dans des ''problèmes classiques'', les situations rencontrées dans l'étude du pavage d'Escher choisi: ''Les Chinois''. On peut bien sûr faire d'autres choix, mais ce pavage particulièrement simple semble plus abordable par des élèves de quatrième d'un niveau faible.

I. Objectifs

a) *Détermination des contenus mathématiques visés*

— les transformations,

— le parallélisme, l'orthogonalité,

— les parallélogrammes (sauf le carré),

— le triangle équilatéral, l'hexagone,

— la médiatrice, son utilisation:

on peut par exemple chercher le centre de la rotation permettant de passer d'un Chinois donné à un Chinois quelconque,

— les isométries,

— les vecteurs,

— quelques exercices de dénombrement.

---

* Roger Léger en ce qui concerne le premier cycle, Brigitte Rozoy-Sénéchal en DEUG; le premier s'intéressant plus à la partie esthétique et la seconde à la partie mathématique (voir brochure IREM de Basse Normandie: *De M.C. Escher aux ... dessins à motifs répétitifs.*

La partie théorique, faite à partir d'une étude de pavage, a été traitée dans la brochure *Translation, Vecteurs* module E de l'IREM de Clermont.

b) *Détermination des capacités cognitives*:

— utiliser correctement le vocabulaire mathématique (bipoint, vecteur, direction, parallèle, orthogonal, etc.)

— découvrir des algorithmes de coloriage et certaines lois mathématiques à partir du dessin d'Escher

— savoir dénombrer

— réaliser des constructions géométriques

— savoir passer d'une situation concrète à une situation de problème

— savoir induire (que se passe-t-il au-delà des bords du dessin ?)

— savoir utiliser dans des problèmes les connaissances acquises à d'autres moments du processus d'apprentissage (exemple: les résolutions d'équations), donc faire fonctionner l'outil mathématique

— prendre conscience que "voir" sur un dessin ne suffit pas pour affirmer, qu'il faut prouver, donc apprentissage de ce qu'est une démonstration

— savoir rédiger et convaincre.

c) *Détermination des objectifs d'attitudes et de comportement*

— mettre la classe en activité de recherche

— amener les élèves à travailler avec soin et un certain sens esthétique

— leur donner une attitude critique vis-à-vis de leur propre travail et de celui des autres

— savoir "mettre en commun", discuter et être tolérant.

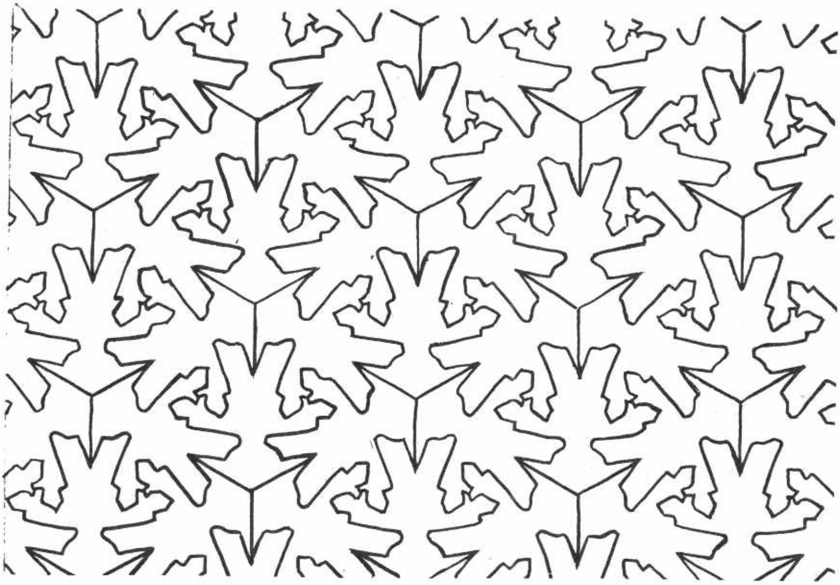
II. Opérationalisation

Le pavage d'Escher a fourni la motivation du travail géométrique, le passage constant du dessin au calque, au découpage, au dessin géométrique, à la situation mathématique a aidé à la compréhension des différentes notions (le calque a eu beaucoup d'importance).

Ce travail a commencé dès le mois d'octobre et ne s'est terminé qu'à la fin du mois de novembre. Les élèves ont travaillé par groupes de 3 ou 4 pour toutes les phases manipulatoires et de découvertes. Ils ont travaillé individuellement dès qu'il s'est agi de faire des constructions ou des raisonnements, collectivement pour certaines recherches de problèmes et les synthèses faites à chaque étape.

Dans ce qui suit, les exercices théoriques qui découlent de l'activité ne seront pas rédigés. Ce document veut être simplement un canevas dans lequel chacun peut mettre ce que bon lui semble, suivant les priorités qui sont les siennes. Il veut être aussi le témoignage du vécu d'un thème et laisser toute liberté au lecteur de s'investir dans cette activité.

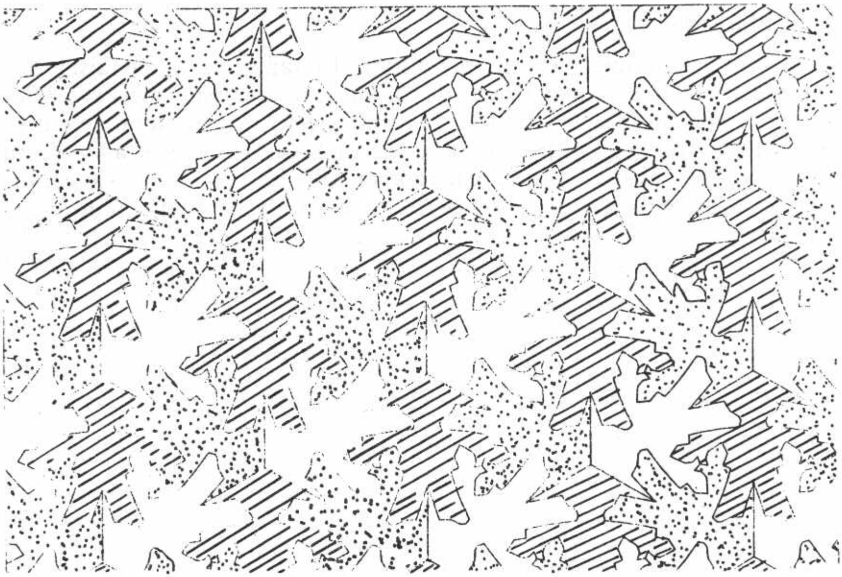
A — ***Point de départ***: Les petits Chinois de Escher



Chaque élève possède plusieurs feuilles de ce pavage. Il leur est demandé de chercher à la maison un ou plusieurs algorithmes de coloriage en choisissant un motif minimum se répétant avec certaines lois (je reste dans le vague et ne fournis aucune indication).

Surprise ! Tous les élèves ont réalisé un coloriage du type suivant, et n'ont pas envisagé d'autre possibilité.

(S'il en avait été autrement, nous aurions mis en commun les coloriages trouvés, et choisi parmi eux celui qui nous permettait de démarrer l'activité géométrique.)



1er temps

Des questions se posent immédiatement aux élèves : Quel(s) motif(s) minimum avaient-ils choisi(s) ? Par quel(s) déplacement(s) avaient-ils, à partir de ce motif minimum, pavé la portion de plan proposée ? La méthode était-elle toujours valable si on agrandissait la feuille ?

Tous avaient pris comme motif de base un Chinois vertical (en général celui du centre) et lui avaient d'abord fait subir des translations "verticales" et "horizontales".

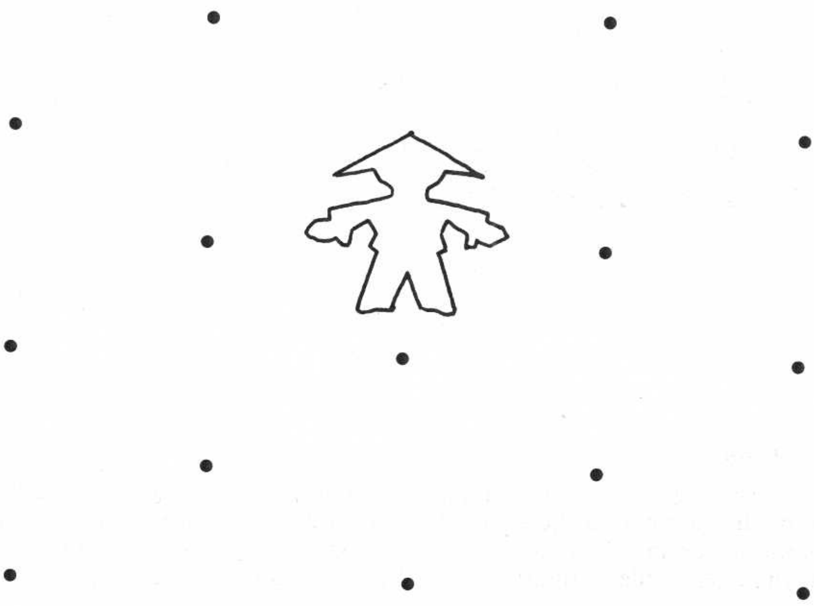
Oui, mais "ça laissait des trous", alors ils avaient donné une autre orientation au Chinois de départ, d'où une rotation suivie de translations dans deux directions.

Il y avait encore des trous, donc nouvelle rotation à partir du Chinois de départ suivie de translations.

De cette première partie du travail sont sorties, de façon intuitive et perceptive, les notions de rotation, translation.

B — *2ème temps*

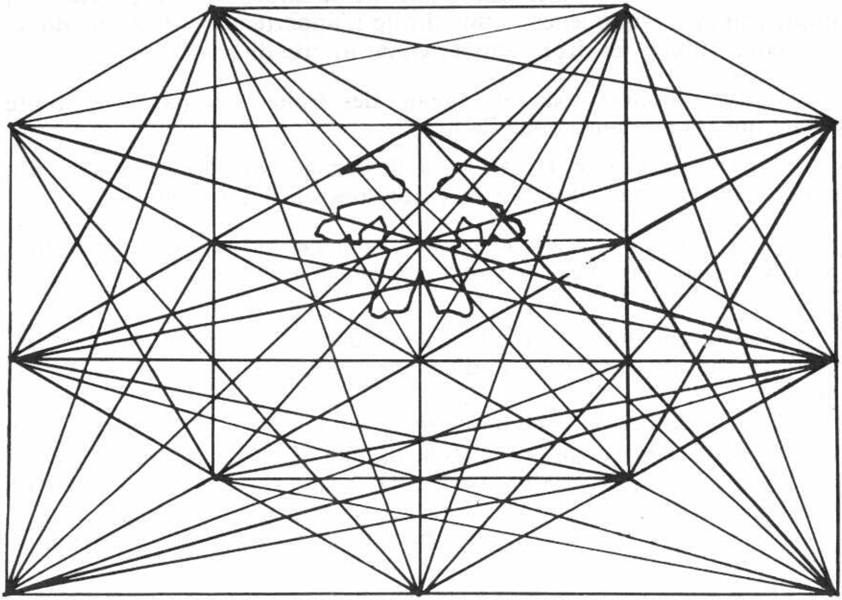
Nous n'en avions pas fini pour autant. En fait le travail ne faisait que commencer. Un élève ayant parlé de calque, une discussion s'est engagée : "Si on reproduit tous les Chinois, le calque ne sert à rien ; si on ne reproduit qu'un Chinois, il ne peut servir que si on le fait glisser sur la feuille où le pavage est dessiné". Comment repérer tous les Chinois sur le calque sans les dessiner ? "On pourrait mettre un point au sommet commun aux trois chapeaux, ce point appartenant aux trois "directions" de Chinois". Il était évident que le choix serait commode ; nous avons donc réalisé le calque suivant.

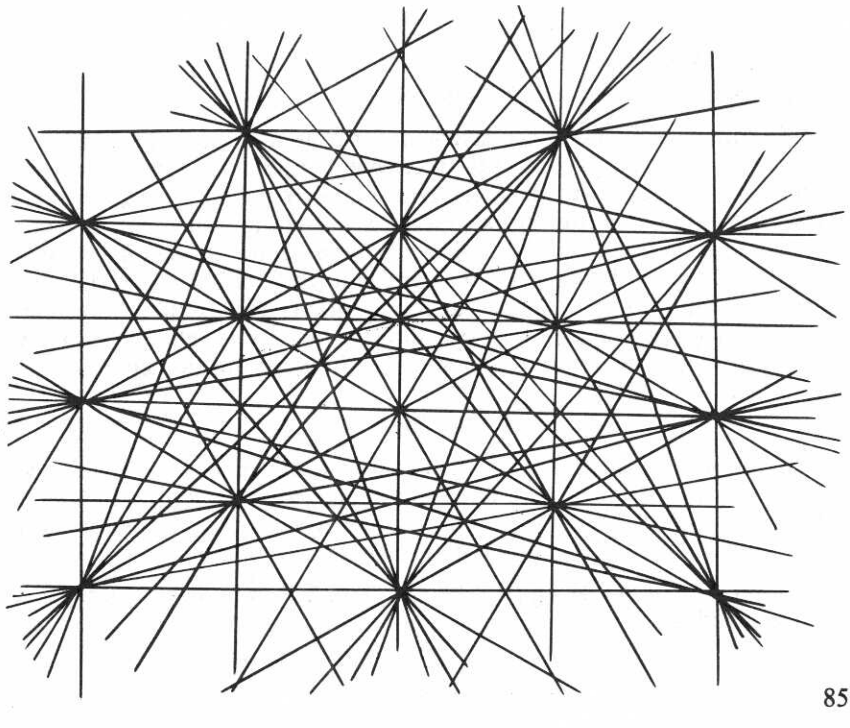


Un problème s'est alors posé :

"Combien de segments faut-il pour joindre 2, 3, 4 ... n points distincts deux à deux ?". Mener à bien le dénombrement n'a pas demandé moins de deux heures, mais la simplicité de la formule trouvée a enchanté tous les élèves.

Cet intermède passé, les élèves ont joint les points du calque et ont obtenu l'un ou l'autre des dessins suivants :





Les deux sortes de calques ont été affichées au tableau, et sont apparues alors de façon intuitive les notions de direction, de parallélisme: "toutes les droites appartenant à une même direction sont parallèles", d'où, comme conséquence: "une droite n'appartenant pas à une direction coupe toutes les droites appartenant à cette direction".

Ce fut le premier axiome: "quand des droites sont parallèles, toute droite qui coupe l'une coupe l'autre".

A partir du calque, il était facile de dégager les axiomes d'incidence et de faire des démonstrations de théorèmes sur le parallélisme.

(Il est à noter que les élèves ne se sont pas étonnés que des droites parallèles puissent être confondues, puisqu'une droite a la même direction qu'elle-même.)

Le deuxième modèle de calque est évidemment le plus riche, car c'est celui qui permet de s'échapper du pavage pour passer au modèle mathématique.

En plus du parallélisme, nous avons eu dès ce premier temps à notre disposition l'orthogonalité, le parallélogramme, le rectangle, le losange, le triangle équilatéral, l'hexagone, la médiatrice, les rotations, les angles ...

Autant dire, une bonne partie du programme et beaucoup de problèmes à résoudre.

C — *3ème temps*

Nous avons choisi un Chinois "objet".

Comment l'amener successivement sur chaque Chinois de même couleur que lui ? Ici nous avons plus précisément étudié la translation: direction, sens, longueur du déplacement. Le vecteur, en tant qu'élément caractéristique d'une translation, est apparu tout naturellement. La comparaison et la superposition du calque "pointé" et du calque où les points sont joints deux à deux par un segment nous ont permis d'introduire les notions de bipoints équipollents, de représentants de vecteurs, de vecteurs égaux, de vecteurs opposés, de vecteur double, triple, etc. Nous avons rencontré le parallélogramme comme quadrilatère qui lie deux bipoints équipollents.

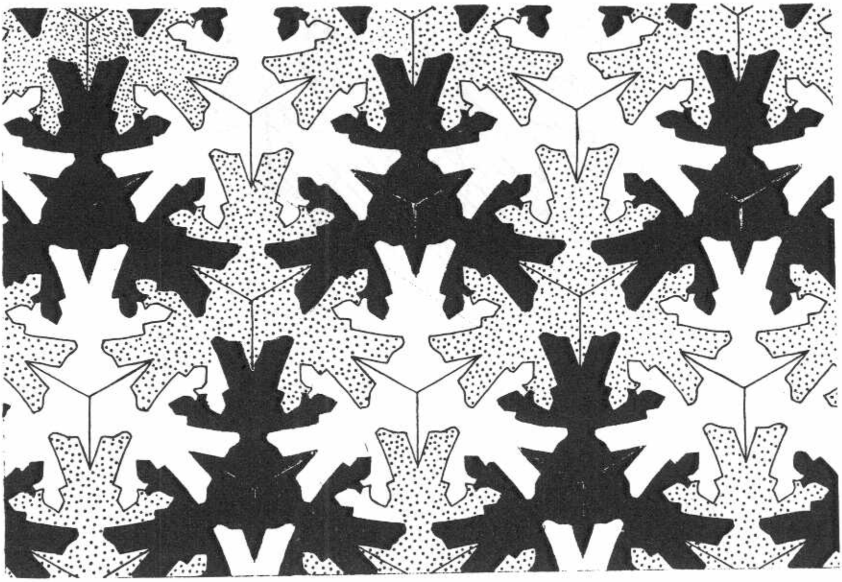
Nous avons fait de nombreux tracés avec règle, équerre, compas.

La somme de deux vecteurs et la composition des translations ont été dégagées à partir du calque ; nous avons beaucoup utilisé la relation de Chasles et comme nous avions fait au préalable les résolutions d'équations dans **Z**, nous avons traité les problèmes du type :

Trouver le point M du plan tel que $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{CB}$ sur le même modèle.

D — *4ème temps*

Nous avons cherché un autre algorithme de coloriage et les élèves ont proposé des coloriages du type suivant :



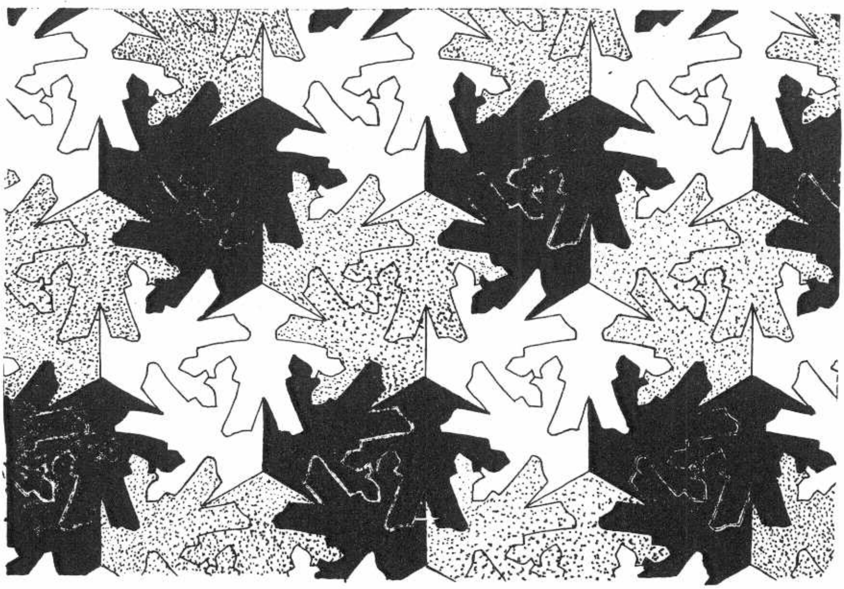
Si le Chinois est encore choisi comme motif minimum, il faut encore composer deux déplacements : rotation puis translation.

La question qui s'est alors posée fut : y a-t-il possibilité d'avoir d'autres sortes de déplacements ? et dans ce cas quel peut être le motif minimum ?

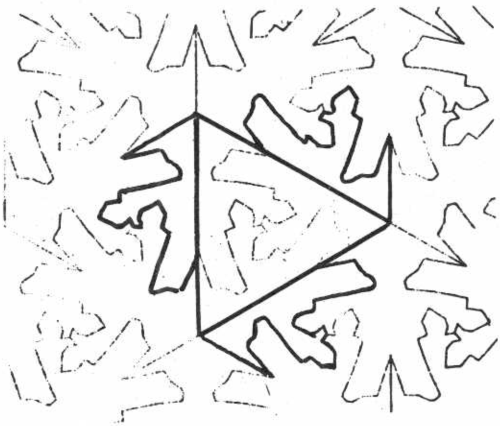
La recherche a été longue pour aboutir à la découverte d'une nouvelle façon de paver le plan à partir d'un "demi-Chinois" en utilisant la symétrie orthogonale et en la composant avec rotation et translation.

Décidément, la rotation était partout. De manipulation en manipulation, de discussion en discussion, nous avons fini par découvrir le dessin minimum suivant :

A partir de là nous n'utilisions plus que des rotations.

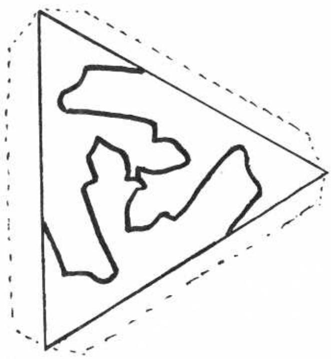


Grâce au calque du début, les élèves avaient depuis longtemps remarqué que le triangle équilatéral apparaissait beaucoup. Il a donc été facile de le mettre en évidence sur le dessin précédent,

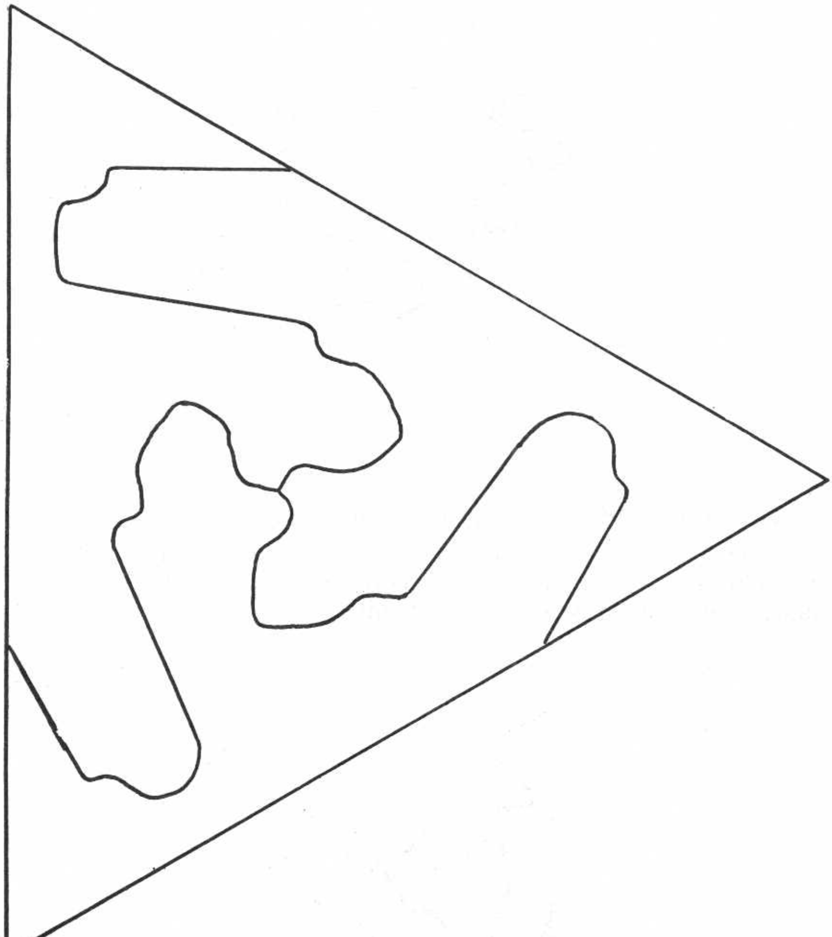


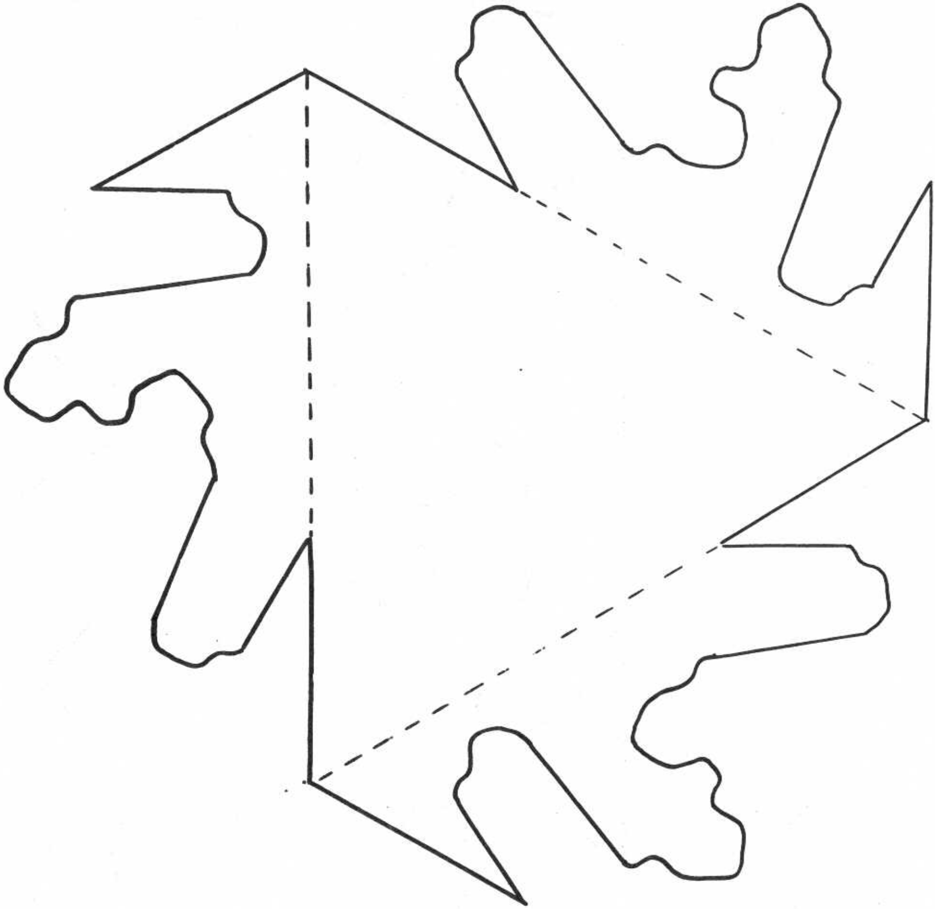
puis d'amener les élèves à accepter la technique de l'enveloppe.

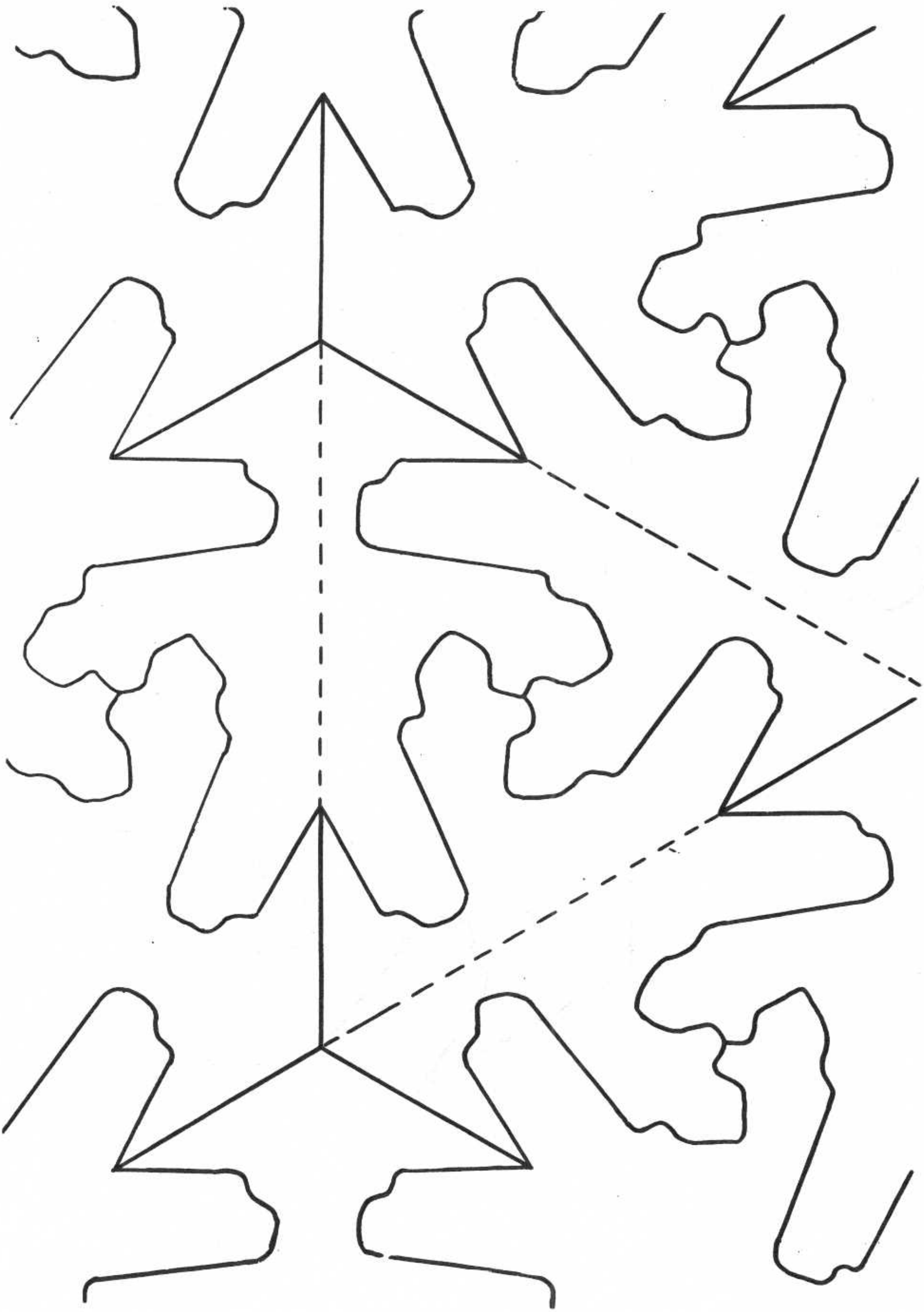
Celle-ci est la suivante : on utilise 2 triangles équilatéraux isométriques collés l'un sur l'autre par leurs bords à l'aide de languettes. Sur le triangle supérieur on dessine le motif suivant :



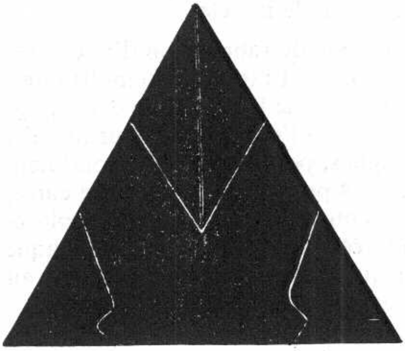
puis on découpe en suivant les traits ce *triangle équilatéral supérieur,* on déplie et on obtient le gabarit. Il reste à paver (voir motif agrandi, pages suivantes).



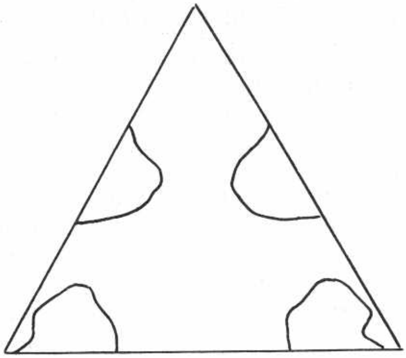




En fait, il y a un inconvénient : quand on passe le crayon autour du gabarit (feuille 2), on n'a pas le dessin dans le triangle intérieur ; il faut le reproduire par symétrie. Avec les élèves, je ne suis pas allée plus loin dans la recherche, la suite était trop difficile ; mais le motif minimum qui permet le pavage du plan, en utilisant des rotations, est en réalité le Chinois, et l'enveloppe est alors la suivante :

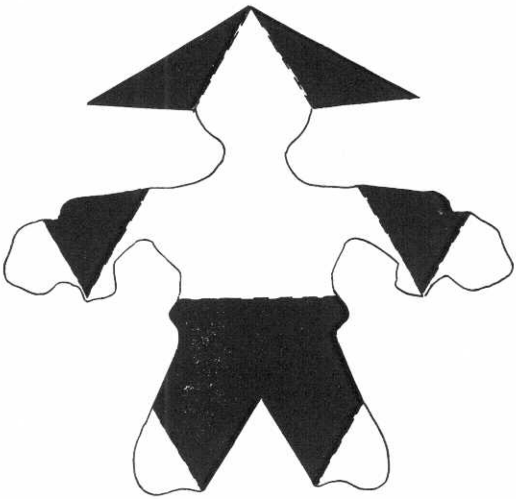


Dessus de l'enveloppe



Dessous de l'enveloppe

Après découpage et dépliage, on obtient le résultat suivant :



Il n'y a plus qu'à faire tourner autour d'un des sommets du triangle.

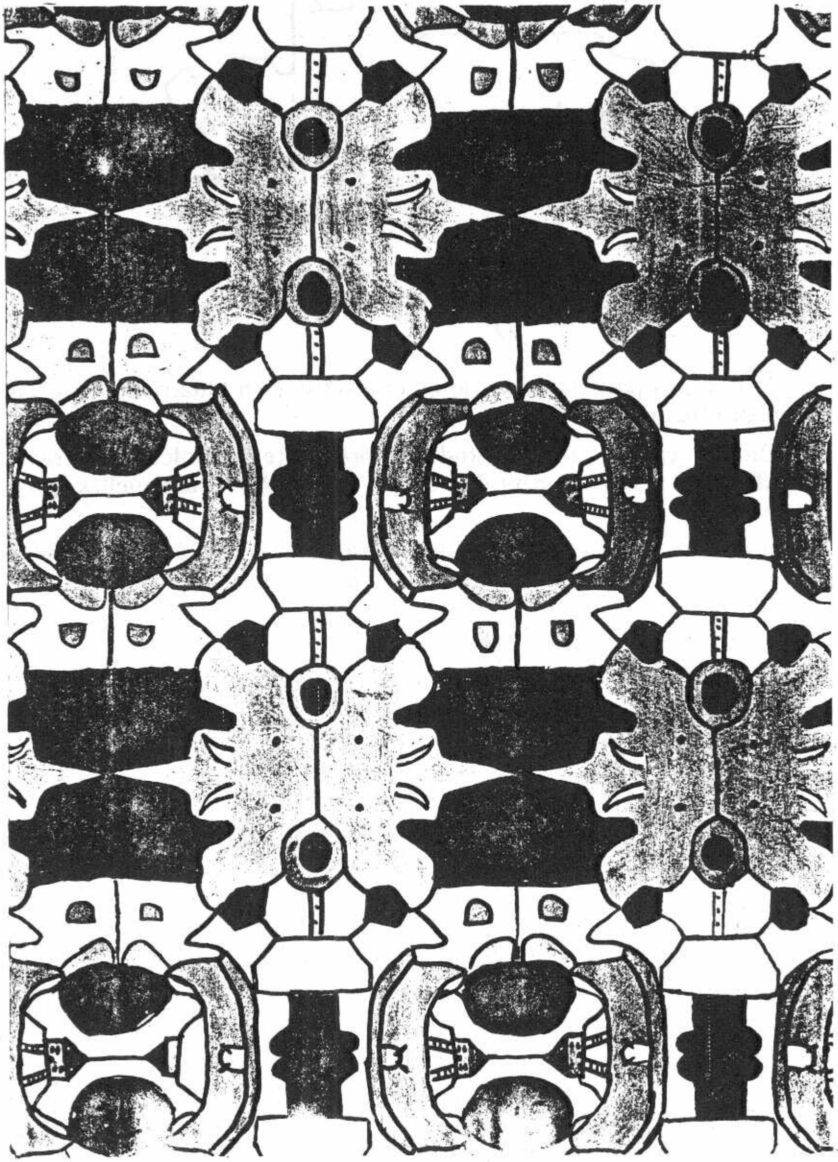
Ici, la manipulation prend le pas sur le contenu mathématique, mais elle donne aux élèves l'idée du plan infini dans toutes les directions, car il n'y a aucune raison de s'arrêter aux bords de la feuille. C'est en cela que la manipulation est intéressante.

Je n'ai pas justifié aux élèves l'existence de cinq formes d'enveloppes permettant de paver le plan : le rectangle, le carré, le triangle équilatéral, le demi-triangle équilatéral, le triangle rectangle isocèle.

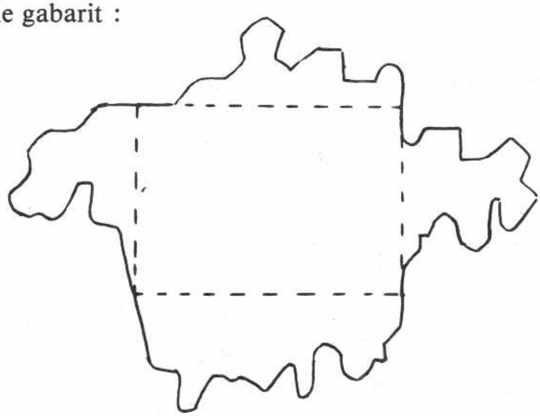
Par contre, je leur ai donné la technique de fabrication d'une enveloppe. Chacun a choisi une forme de base et s'est fabriqué un motif minimum. Nous avons cherché pourquoi il fallait que les lignes de découpage passent à un moment donné par un sommet de l'enveloppe, pourquoi il y avait un point de départ commun aux lignes, pourquoi 3 lignes partaient de ce point commun pour les triangles et 4 pour le rectangle et le carré, pourquoi, grâce à ce gabarit, on pouvait couvrir tout le plan par déplacement, sans avoir de "trous". Ils ont très bien compris qu'à chaque "bosse" correspondait un "creux" et que, par conséquent, on pouvait "emboîter" l'un dans l'autre, par rotation autour d'un des sommets.

E — *5e temps*

Chacun a réalisé son "œuvre d'art" ; les premiers essais ne furent pas tous très esthétiques mais il y eut de vraies réussites, par exemple ce qui suit : ceci aurait bien sûr pu être l'objet d'un travail avec le professeur de dessin, car il est bien évident que nous avons quitté le domaine des mathématiques ; mais il était intéressant de le faire.



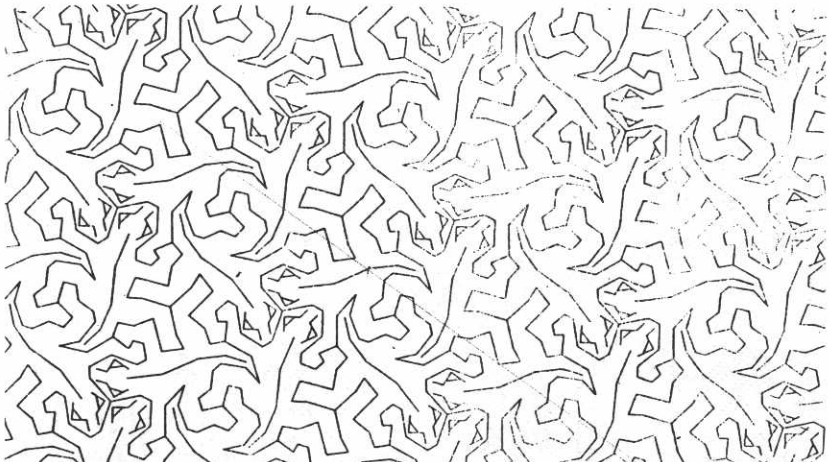
Dont voici le gabarit :



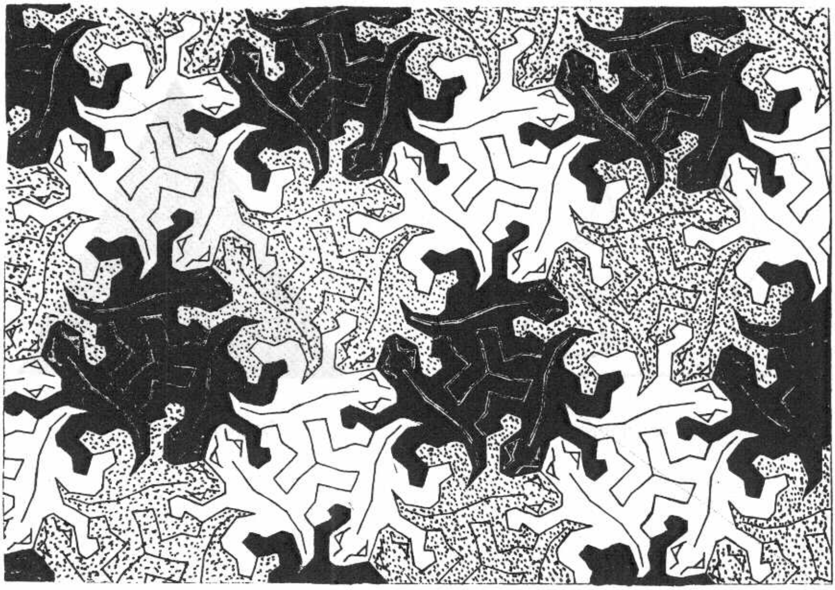
Je n'ai pas poursuivi plus loin cette activité en Quatrième mais elle est encore très riche.

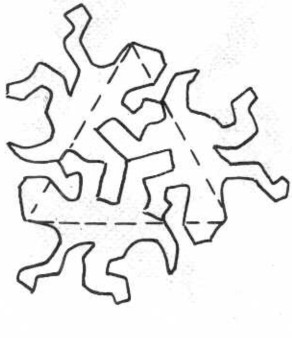
On peut encore faire des études de proximité de couleurs, du travail de codage sur réseau, et peut-être bien d'autres choses auxquelles je n'ai pas pensé.

Il est bien évident que ce travail aurait pu se faire à partir d'autres pavages, par exemple les salamandres d'Escher.



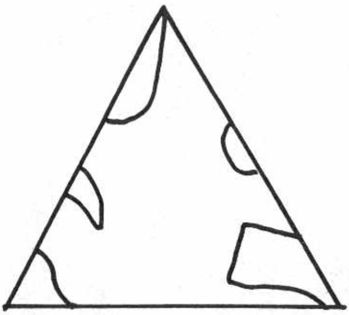
Mais ... c'était plus difficile, le dessin étant au départ plus complexe.



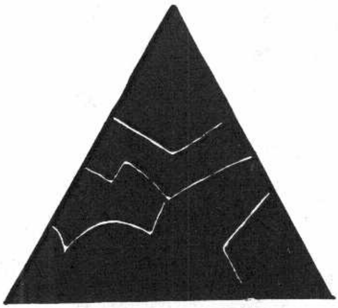


Enveloppe utilisant 3 salamandres.

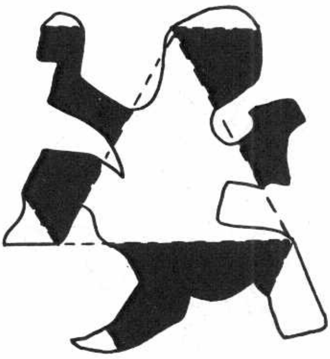
Enveloppe n'utilisant qu'une salamandre (la minutie du découpage nous a obligés à agrandir le motif).



Dessus d'enveloppe

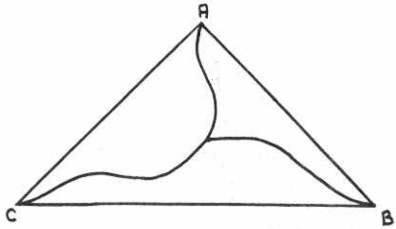


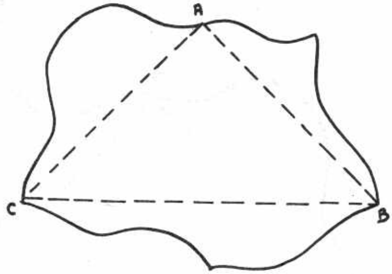
Dessous d'enveloppe

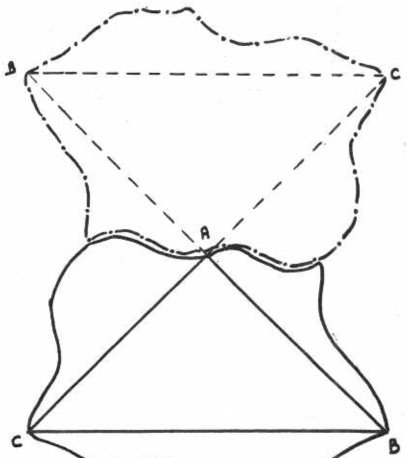


En annexe, vous trouverez quelques essais de pavages à partir du triangle isocèle et du demi-triangle équilatéral.

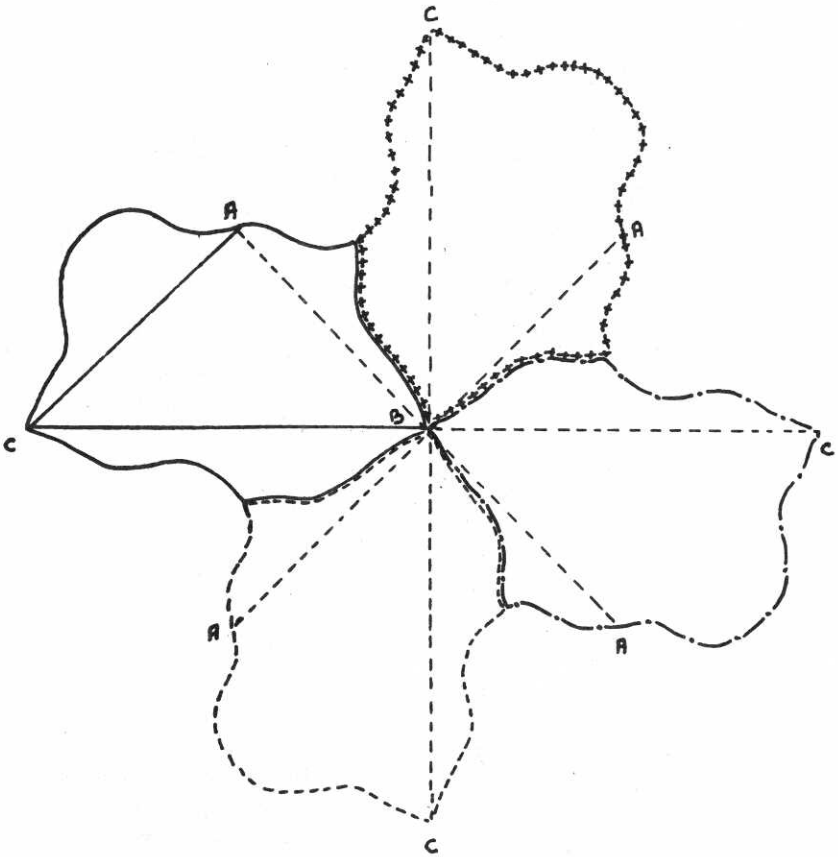
L'enveloppe est un triangle rectangle isocèle.







Rotation de 180° autour de A
position 1
position 2



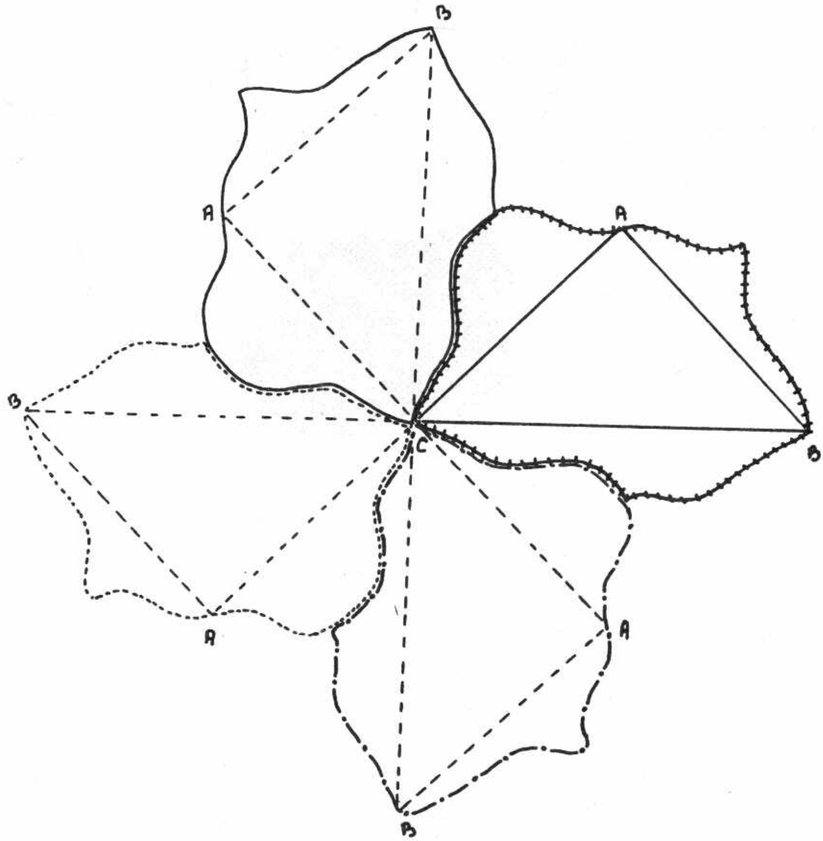
Rotation autour de B

position 1

position 2

position 3

position 4



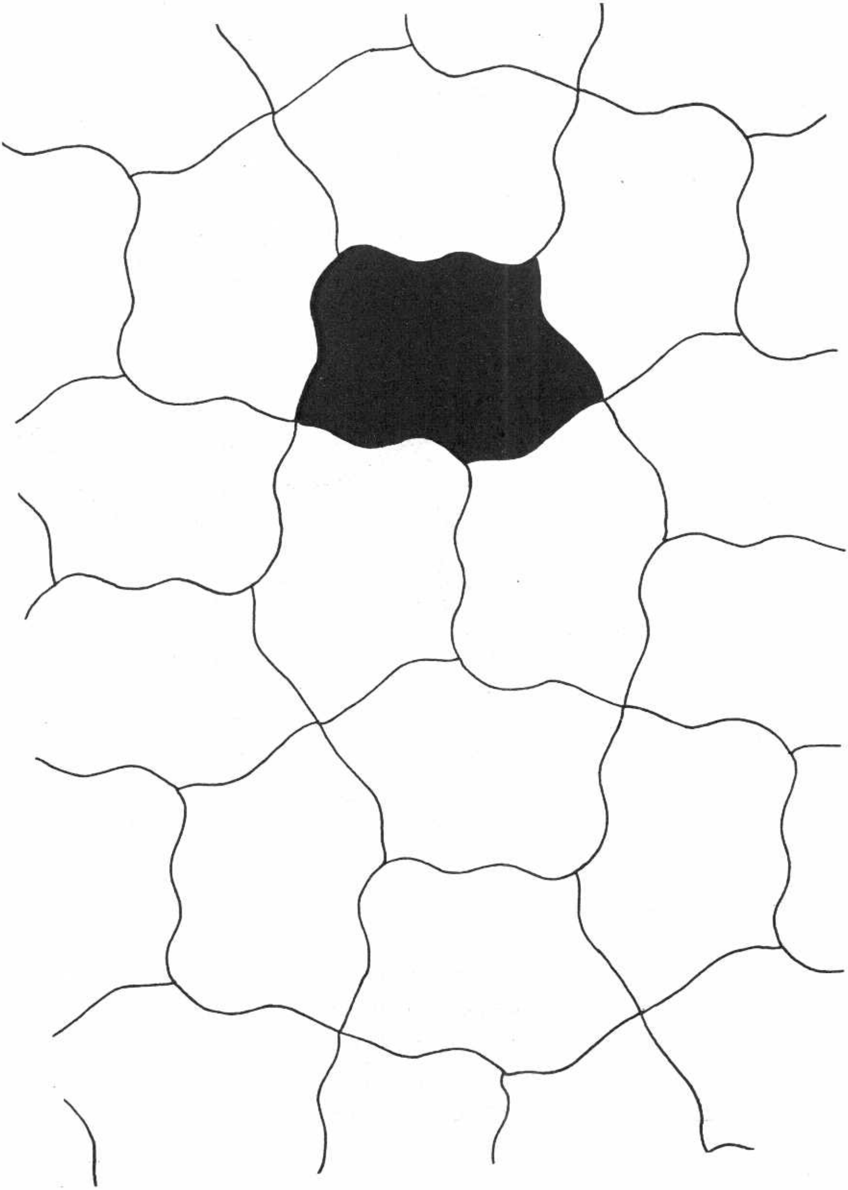
Rotation autour de C

position 1

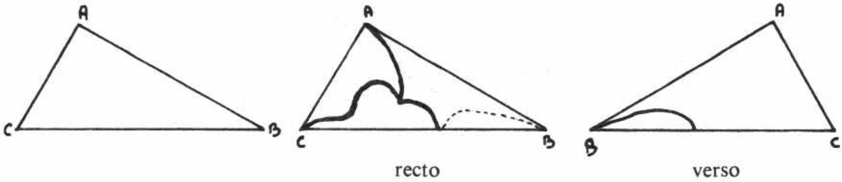
position 2

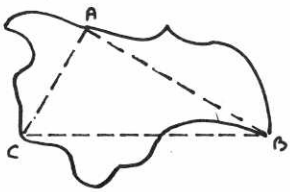
position 3

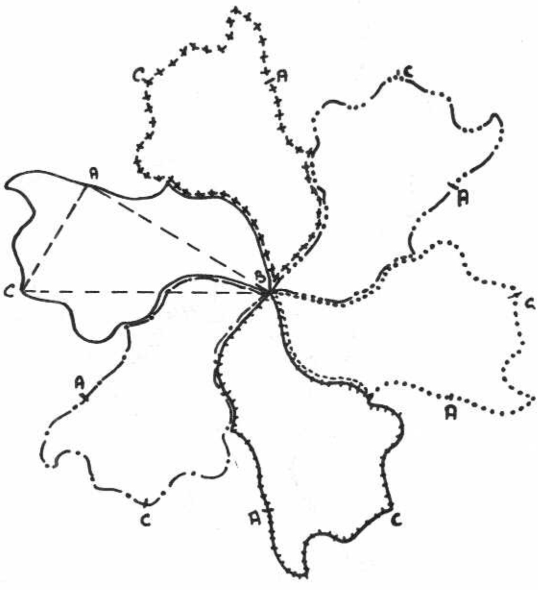
position 4



L'enveloppe est un demi-triangle équilatéral.

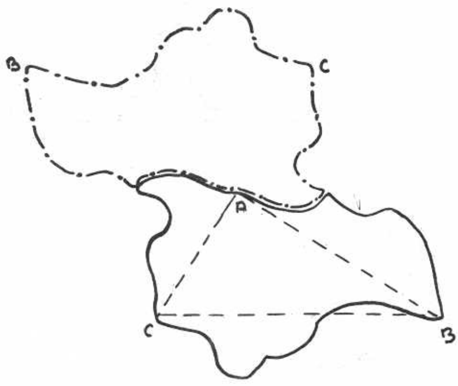




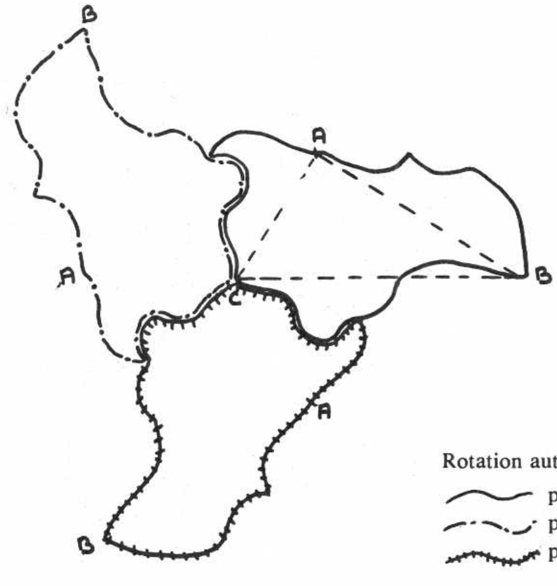


Rotation autour de B

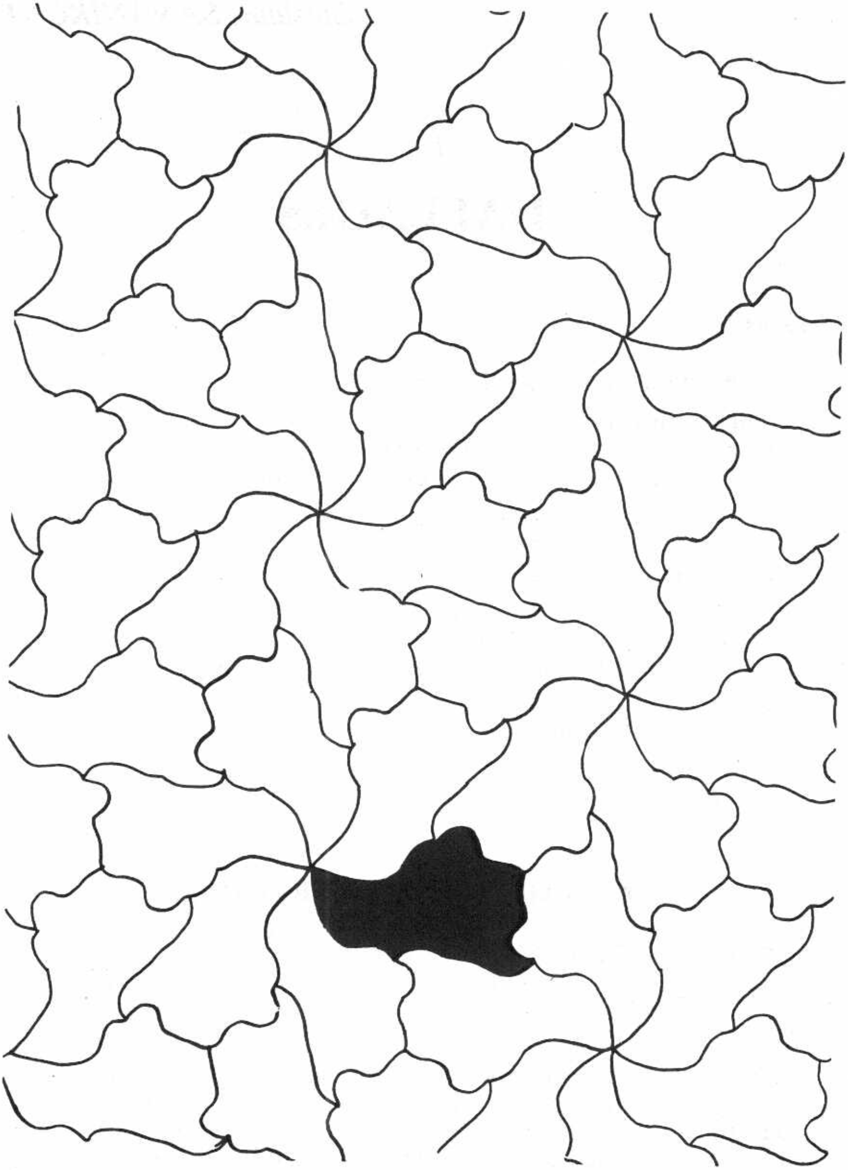
position 1
position 2
position 3
position 4
position 5
position 6



Rotation autour de A



Rotation autour de C
position 1
position 2
position 3



III.5

Claude COLAS, Guy CAURET,
Pierrette GUERRE, Pierre LAUDIJOIS,
Ghislaine SANANIKONE

DALLAGES

Sommaire

I. Présentation : Pourquoi les dallages ?

En classe de quatrième, on a peut-être construit les sept types de frises. Ce qui a permis, dans ce cas, d'utiliser les notions de symétrie centrale, symétrie axiale, translation et la composition de ces transformations.

Dans le monde qui nous entoure, des papiers peints, des mosaïques, des tissus... sont des dallages. Les artistes musulmans ont utilisé très tôt les dallages. Ainsi l'Alhambra à Grenade, construit au XIV^e siècle, contient les dix-sept types de dallages. Or le Russe Fédorov fut le premier, à la fin du XIX^e siècle, à démontrer qu'il n'existe que ces dix-sept groupes. On retrouve dans les œuvres de Cornélius Escher (1898-1972) ces notions de dallage.

II. Dallages du plan

Nous ne travaillerons qu'avec un seul type de figure qui se répétera. Une partie de notre travail consistera à prendre un réseau (quadrillage carré, parallélogrammique...) puis à déformer successivement ses bords afin d'obtenir un dallage.

On dit que l'on a réalisé un dallage du plan si l'on a recouvert un plan avec des figures de façon que : aucun espace libre ne subsiste, aucune figure n'empiète sur une autre.

On appelle "sommet" d'un dallage un point où se touchent les sommets de deux ou plusieurs des polygones de ce dallage.

ACTIVITE A : Dallage du plan à l'aide de polygones réguliers.

Réaliser un dallage avec :

a) des triangles équilatéraux (six d'entre eux se rencontrent à chaque sommet du dallage) ;

b) des carrés (quatre d'entre eux se rencontrent à chaque sommet du dallage) ;

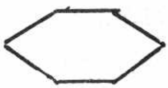
c) des hexagones (trois d'entre eux se rencontrent à chaque sommet du dallage).

ACTIVITE B : Dallage du plan à l'aide de polygones convexes quelconques.

Un polygone P est convexe si chaque segment de droite dont les extrémités sont dans le polygone est tout entier dans P.

Exemple :

non convexe

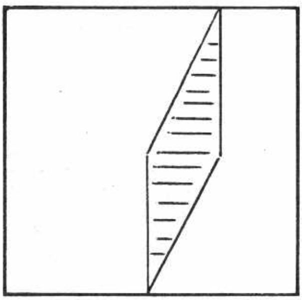


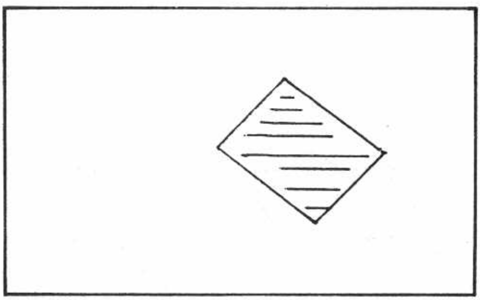
convexe

Réaliser deux dallages différents avec des losanges ; des triangles ; des parallélogrammes.

Dans cette activité, aucune règle des sommets n'est imposée.

Exemple :

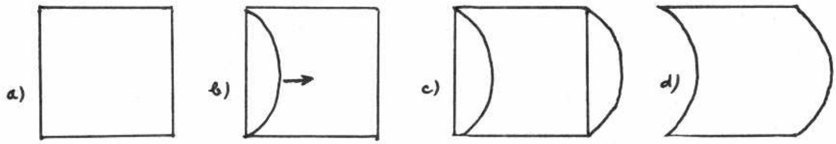




III. Transformons des polygones en figures qui ont la "même aire"

A - *A l'aide de la translation.*

Exemple :



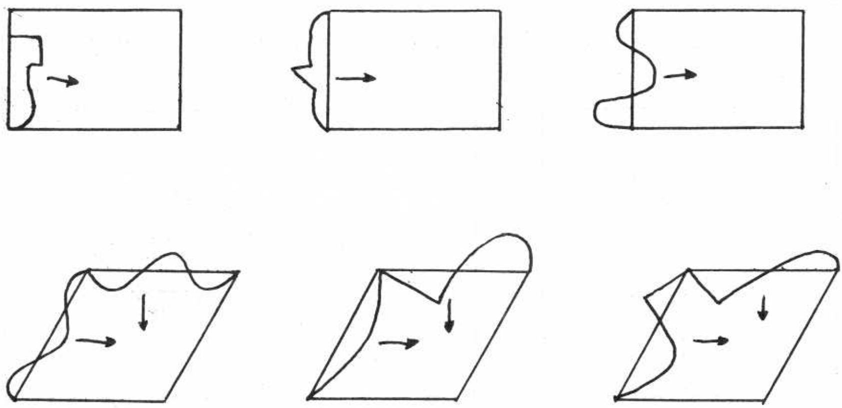
a) on prend un quadrilatère, ici un carré ;
b) on remplace un côté par une ligne quelconque passant par par les deux sommets ;
c) on translate au côté opposé ;
d) on obtient une figure qui a la "même aire" que le carré de départ.

On peut procéder simultanément sur deux côtés adjacents.

ACTIVITE C

A - *A l'aide de la translation.*

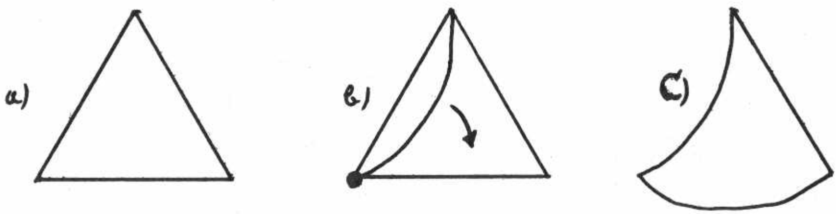
Réaliser la translation demandée et colorier le contour de la figure obtenue.



B - *A l'aide de la rotation.*

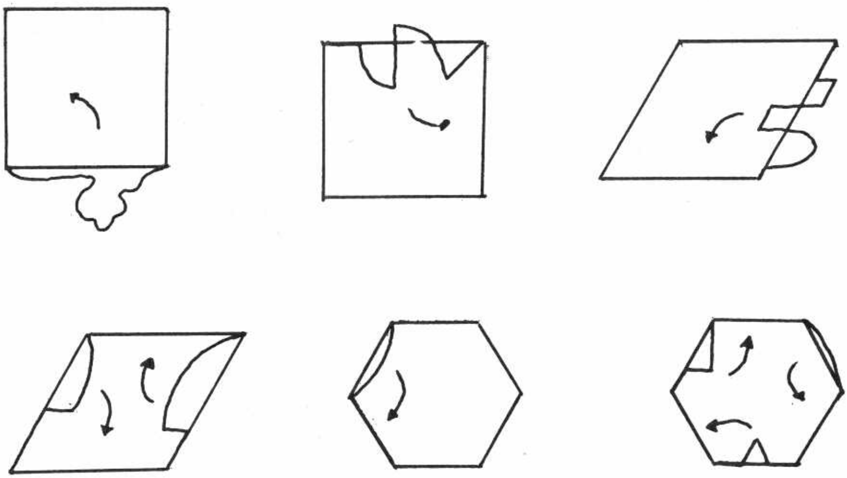
Le mode opératoire est le même, mais dans ce cas on effectue une rotation autour du sommet commun aux deux côtés adjacents.

Exemple :



ACTIVITE D

Réaliser la rotation demandée et colorier le contour de la figure obtenue.

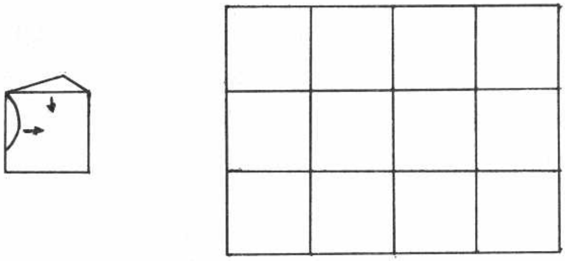


IV. Réalisons un dallage (le réseau est fourni)

A - *A l'aide de la translation.*

ACTIVITE E

Le motif s'obtient par translation des côtés.
Le dallage est obtenu par translation du motif.
Réaliser le dallage.
Combien de translations sont nécessaires pour obtenir ce dallage ?

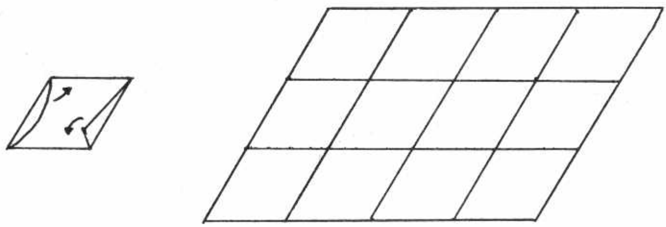


B - *A l'aide de la rotation.*

ACTIVITE F

Le motif s'obtient par rotation des côtés autour de deux sommets opposés.

Réaliser le dallage.



V. Approfondissement et création

A. Approfondissons cette technique

a - par translation de côté(s)

On remplace un côté par une ligne quelconque passant par les deux sommets, puis on translate au côté opposé.

d'un carré : a) et b) page 113

d'un parallélogramme : c) page 113

On peut procéder simultanément sur deux côtés adjacents

d'un carré : d) page 113

d'un hexagone régulier : f) page 113

d'un hexagone non régulier : g) page 113

Remarque : les côtés opposés doivent être parallèles et isométriques.

b - par rotation de côté(s)

• d'un triangle équilatéral. On fait subir au côté que l'on a remplacé par une ligne quelconque passant par les deux sommets une rotation de 60° autour du sommet commun aux côtés adjacents. Voir réalisation a) page 114.

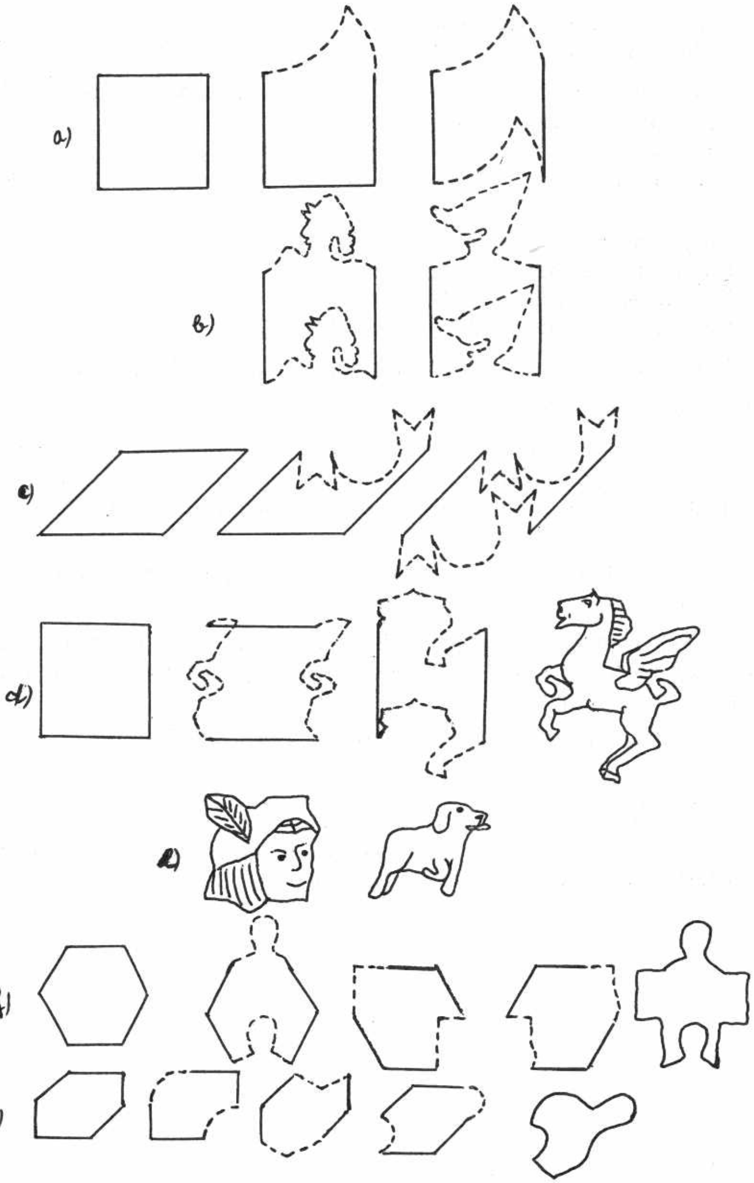
• d'un carré. Même technique mais la rotation est de 90°. Voir réalisation b) page 114.

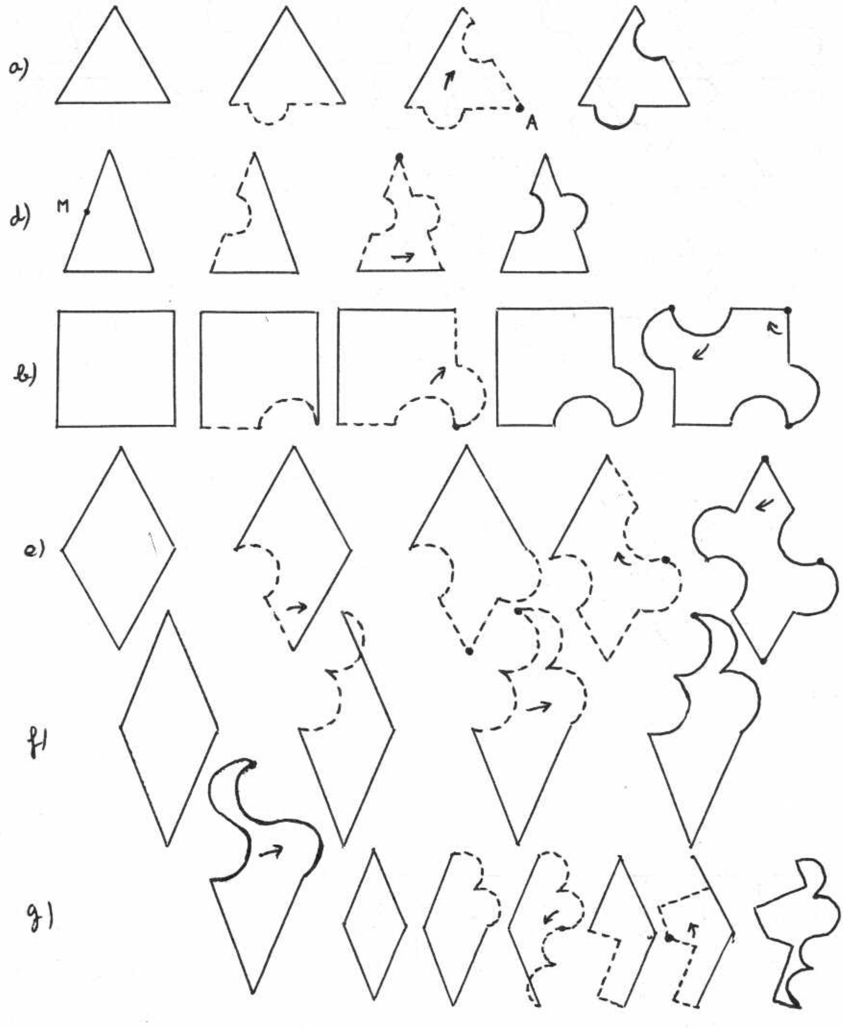
Pour le triangle isocèle (réalisation d) page 114 et le losange (réalisation e)f)g) page 114, la déformation doit être symétrique par rapport au milieu du côté déformé.

Page 115, on peut voir des dallages réalisés par l'une de ces techniques.

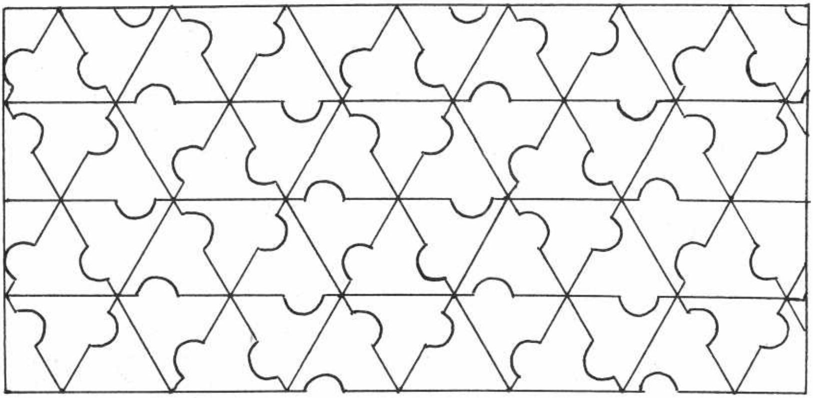
ACTIVITE G.

Réaliser un dallage à partir de triangles isocèles, après avoir fait subir une rotation au côté transformé.

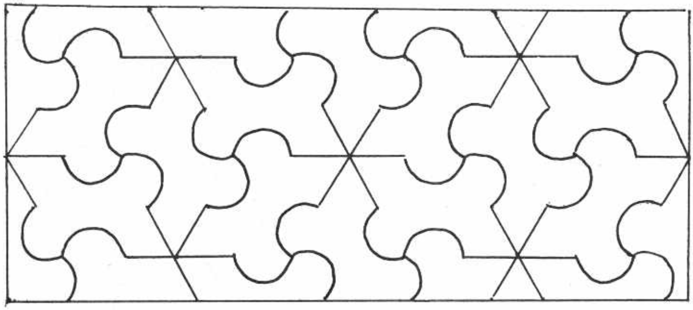

a)
b)
c)
d)
e)
f)
g)


a)
A
d)
M
b)
e)
f)
g)

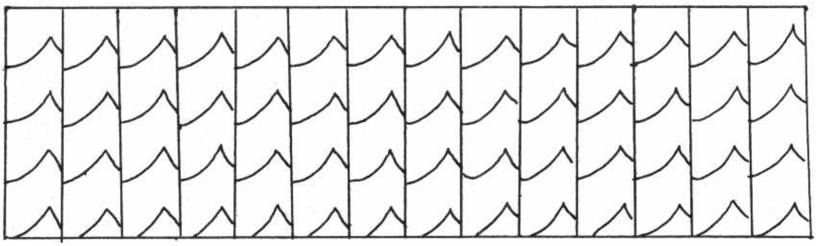
a)



b)

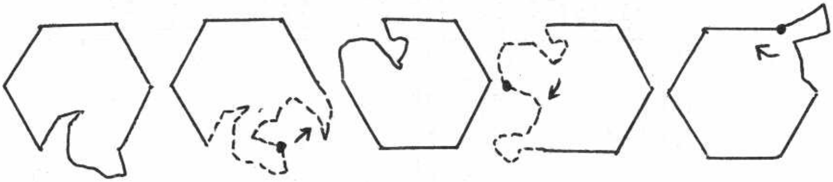


c)

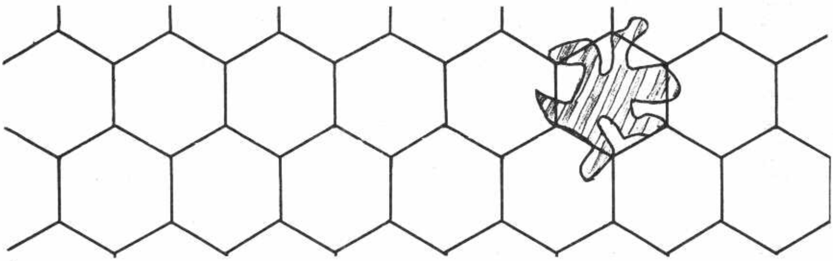


B - Créons

ACTIVITE H



Effectuer la rotation du dernier côté du motif. On obtient un reptile. En décalquant d'autres reptiles isométriques, daller le réseau fourni.



Conclusion : Nous avons vu ensemble une technique qui permet de daller le plan ; mais il en existe d'autres.

BIBLIOGRAPHIE

1. *Rosaces, frises et pavages,* volume 1. Yvon Bossard. Cedic.
2. *Creating Escher-type drawings.* E.R. Ranucci et J.L. Teeters. Creative publications. Palo Alto, CA 94303. SETSCO Educational LTD 567 Clarke Road. Coquitlam ; BC V 3J3X4.
3. *Les pavages.* J. Cartron, C. Feyssaguet (IREM Poitiers, mai 70)
4. *Dessins et motifs répétitifs.* B. Sénéchal (IREM Basse-Normandie)
5. *Maths-Arts plastiques.* Léger (IREM Caen)
6. *Géométrie et réalité.* 1 PMM 3033 ; 2 PMM 3034 (université du Québec)
7. *Pavages.* R. de Biasi. IREM de Toulouse (1980).

INTERDISCIPLINARITE

Disciplines	Concepts en jeu	Activités de motivation	Activités d'approche	Activités de conceptualisation	Activités d'application directe	Activités de recherche, créativité	Problèmes
ASTRONOMIE	Puissances de 10 Rapports	Ecrire de grands nombres commodément.	Arrondir. Questions de zéros.	Ecritures $a.10^p$ à partir de celles de l'Astronomie.	Lectures de données astronomiques. Exercices de passage des km aux AL et réciproques. Exercices avec UA. Rapports d'aires, de volumes d'astres.	En travail libre, sur documents astronomiques.	Problèmes avec données astronomiques (voir par exemple IREM de Strasbourg Quatrième) et exercices d'Astronomie (Strasbourg).
BIOLOGIE HUMAINE Chapitre : VISION	Sens géométrique	Illusions d'optique, comprendre la myopie l'hypermétropie, la presbytie.	Perspective. Dessins du cours de biologie.	Partir du vécu, arriver à une idée géométrique Explications géométriques.	Acuité visuelle.	En travail libre ou semi-libre, sur documents biologiques.	Problèmes simples sur aires et zones du cerveau (Vision).
BIOLOGIE HUMAINE Chapitre : CROÎTRE	Graphiques	Comment décrire la croissance.	Dessins du cours de biologie.	Partir de la réalité biologique, arriver au concept de représentation graphique.	Savoir lire un graphique de croissance.	Se poser des questions devant un tel graphique.	Le professeur de mathématique aidera celui de biologie et les élèves.
DESSIN	Fraction. Proportions.	Dessins où l'on utilise une ou des fractions simples.	Réfléchir avec les 2 professeurs pour approcher l'idée de fraction.	Fraction de grandeur.	Nombreux dessins où l'on applique les fractions.	Dessins à créer avec fractions.	Problèmes liés au dessin.
	Symétrie axiale	Observation de dessins avec axe ou axes de symétrie.	Calques. Vérifications Mesures sur dessins.	Dépouiller le dessin et arriver au concept géométrique.	Utiliser la symétrie pour réaliser un dessin	Inventer des dessins symétriques.	Problèmes plus élaborés.
EDUCATION MANUELLE et TECHNIQUE (ACTIVITE MANUELLE EDUCATIVE)	Fraction Proportions	Echelles.	Maquettes.	L'EMT en liaison avec les maths doit concourir à la maîtrise du concept de fraction.	Divers exercices d'échelles de fractions en EMT.	S'inventer des problèmes de construction en EMT.	Les 3 problèmes de l'échelle.
	Droites	L'EMT doit motiver la nécessité de tracés corrects.	Précision en EMT → Précision géométrique	Prolongements, intersections, demi-droites, segments.	En particulier, harmonisation du langage EMT et du langage géométrique.	Figures libres.	Problèmes de tracés géométriques liés à l'EMT.
	Figures usuelles	L'EMT doit les motiver.	Les activités en EMT constituent une approche riche des figures.	Le professeur de math partira de l'acquis en EMT, le dépouillera et arrivera aux notions mathématiques.	L'EMT apporte une mine insoupçonnée d'activités géométriques.	Les deux professeurs favoriseront la créativité.	L'EMT crée une foule de problèmes.
	Symétrie axiale Translations	Observations d'objets présentant une symétrie axiale. Réalisations techniques.	Manipulations liées à la symétrie. Appareils, outils en EMT.	Partir de la réalité en EMT et arriver au concept de symétrie axiale et à celui de translation.	Bien distinguer translation technique, mouvement de translation et translation mathématique.	Réaliser des mouvements. Réaliser des translations.	Problèmes techniques de translation.

Disciplines	Concepts en jeu	Activités de motivation	Activités d'approche	Activités de conceptualisation	Activités d'application directe	Activités de recherche, créativité	Problèmes
EDUCATION PHYSIQUE ET SPORTIVE	$\mathbf{D}^+$ **Z** Sens géométrique	Motivations des nombres : • Décimaux • Entiers Motivations en géométrie. • Plan - Espace	Temps pour les courses. Goal-average. Exercices physiques de spatialisation.	Tableaux de temps. Tableaux sur journaux sportifs. Etude d'élèves en difficulté.	$\frac{1}{10}$; $\frac{1}{100}$ Vers l'addition, la soustraction. Vers la multiplication. Translation, symétrie, rotation.	Chronométrer. Correction d'erreurs. Correction de défauts de spatialisation.	Petits problèmes de temps, de scores, en commun avec le professeur d'EPS.
FRANÇAIS Voir travaux des IREM de Bordeaux, de Paris-Nord,..		1 Exercices de traduction en français d'une formule mathématique. Ex.: $(a+b)^2 = (a^2+2ab+b^2)$ 2 Exercices de traduction en mathématiques d'un énoncé en français. Mise d'un problème en équations et français. 3 Sens de mots importants : *et, ou, si, quel que soit, quelconque, particulier, construire, démontrer, axiome, hypothèse, conclusion, théorème* ; *tous* et *tout* ; *le* et *un* ; *les* et *des* ; *si ... alors* ; *constater, vérifier*.					
GEOGRAPHIE	Droite % proportions	Motivation de la droite à partir de l'axe de rotation de la Terre sur elle-même. Motivations économiques, démographiques, autres. Divers taux géographiques.	Approche de droites, demi-droites, segments par l'étude de la sphère terrestre. Etude de textes avec pourcentages.	Se dégager du physique et arriver aux concepts géométriques. Maîtrise de %, ‰	Activités à partir de la sphère terrestre à dominante géométrique. Horizontales. Verticales Zénith. Antipode. Taux de natalité, de mortalité. Calculs effectifs de pourcentages. • Rôle des calculs et graphiques dans un dessin d'étude (travaux de groupe).	Chercher à mieux comprendre la Terre grâce à des représentations géométriques. A partir d'un texte librement choisi, interpréter des pourcentages et les expliquer.	Cadran solaire. Tous les types de problèmes de pourcentages.
	Division Proportionnalité	Densité de population	Données pour divers pays. Données mondiales ou par régions.	Comprendre réellement le sens de la division approchée et l'intérêt du quotient.	Interpréter mathématiquement et géographiquement une donnée ou le résultat d'une division.	Recherches libres sur d'autres exemples.	On donne deux des trois S, P ou d . Trouver l'autre.
	Repérage sur une droite Coordonnées dans le plan	Motivation du repérage à partir de la géographie Comparaison avec repérage sur la sphère terrestre. Comparaison avec latitude et longitude.	Approches diverses (cartes, plans). Activités géographiques sur le globe terrestre.	Insuffisance du naturel du décimal, du rationnel. Comparaison au plan mathématique.	Exercices avec échelles (les 3 problèmes). Latitude. Longitude. Fuseaux horaires.	Exercices libres ou semi-libres de repérages, d'orientation. Donner libre cours aux recherches.	Problèmes liés au cours de Quatrième. Problèmes de latitudes, longitudes, fuseaux horaires.
GREC (1)		Point n'est besoin d'être hélleniste. Avec l'aide du professeur de grec, examiner préfixes, radicaux, suffixes de mots mathématiques éclairant leur sens, évitant des confusions. Ex.: *hypoténuse, kilo, isocèle, géométrie, mètre, mesure, métrique, symétrie, isométrie.*					
GEOLOGIE	Proportionalité Echelles	Nécessité de l'échelle en géologie.	Etudes géologiques sur documents à l'échelle. Echelles usuelles.	Grâce à l'interdisciplinarité, à la transdisciplinarité, arriver à la conception générale de l'échelle. Singulariser plans, géographie, EMT, géologie. Qu'y a-t-il de commun ?	Les 3 problèmes fondamentaux sur documents géologiques.	D'un document géologique tirer librement nombres, échelles, distances réelles, avec calculs effectifs.	Problèmes spécifiques à la géologie, résolus en liaison avec le professeur.

Disciplines	Concepts en jeu	Activités de motivation	Activités d'approche	Activités de conceptualisation	Activités d'application directe	Activités de recherche, créativité	Problèmes
GEOLOGIE	Grands nombres Ordres de grandeur Repérage Droite graduée	Eres géologiques. Se repérer dans les temps à la dimension géologique.	Divers textes, diverses données en millions d'années.	A partir des échelles géologiques, trouver un modèle mathématique.	Utilisation du modèle Petits calculs.	A partir de documents se poser des questions. Par exemple, d'ordre régional.	Petits problèmes de distances géologiques.
GEOLOGIE	Valeurs approchées d'un réel	Mesure de l'inclinaison des pentes.	Avec le matériel du géologue, avec un clinomètre de fortune.	Arriver ainsi à l'idée physique de mesure et au réel.	Consulter le professeur de géologie ou un géologue amateur.	Sorties géologiques avec exercices en travaux de groupes.	Utilisation réelle du rapporteur, du compas et du niveau à bulle. Rôle de la boussole.
GEOLOGIE	Sens géométrique	Nécessité des coupes géologiques.	Etudes topographiques. Puis coupes.	Echelle des longueurs. Echelle des hauteurs. → Coordonnées.	Construire une coupe connaissant les données nécessaires.	Lecture de coupes à partir de données mathématiques.	Problèmes d'ordre numérique ou géométrique utiles en géologie.
HISTOIRE ELEMENTAIRE DES SCIENCES	(et notamment des mathématiques)	Donner les notions les plus simples, montrant que la vérité scientifique s'acquiert par la recherche (exemples de courage), intéressant l'enfant, le motivant, lui faisant comprendre le rôle des mathématiques dans l'ensemble des Sciences et de la vie humaines, lui donner un peu d'amour, d'enthousiasme. Ne pas le décevoir, ne pas lui présenter sous un jour austère, d'une manière hermétique, l'activité mathématique et scientifique.					
PHYSIQUE (électricité)	• Déceler le numérique. • Unité. Ex.: 1 MW = 10^6W. • Travaux de lectures de mesures et observations mathématiques. • Calcul numérique et exercices de Physique.			Il est manifestement évident que le rejet absolu de l'intervention des mathématiques même à ce stade expérimental n'est pas sérieux et risque de créer des allergies et des blocages dans la perspective des LEP et du Second Cycle. La recherche de ce chapitre important de l'interdisciplinarité est requise.			
PHYSIQUE (lumière)	• Données numériques d'ordre astronomique (Soleil - Planètes). Exercices numériques sur maquettes de représentation. • Raisonnement d'ordre physique et d'ordre mathématique pour les PHASES de la LUNE. Figures géométriques pour éclipses de Lune, pour éclipses de Soleil. • Distance Terre - Lune (REFLECTEUR LUNAIRE, 20 juillet 1969). • Données numériques sur : énergie solaire, radiotélescope de NANCAY. • Propagation de la lumière (en rapport avec droite en géométrie). Idées de l'optique géométrique. Exercices numériques sur vitesse de la lumière. • Chambre noire et Géométrie. Ombres et Géométrie. • Lentilles convergentes et constructions géométriques *très simples*. Distance focale. Convergence. Intérêt de $1/f$ en Physique.						
PHYSIQUE (métaux)	• Calculs sur masses volumiques (suite du cours de Cinquième). Rédiger de petits problèmes Math-Physique. • Dégager dans ces problèmes l'intérêt des mathématiques. • Arriver à $\mu = \frac{M}{V}$; $M = \mu V$; $V = \frac{M}{\mu}$. Revenir au concret après les calculs.						

(1) Une étude faite avec 3 professeurs de Latin-Grec prouve que l'étymologie *simple* peut servir à éclairer le sens de beaucoup de mots de mathématiques. Pour les mots d'origine latine, citons: *commutativité, inclusion, perpendiculaire, équation.*

P.S. : Bien entendu, ce tableau n'a rien de complet. On peut ajouter : Actualité et mathématiques (Exemple : savoir lire un article de journal d'ordre économique, assez élémentaire pour ce niveau) — BOTANIQUE, ECOLOGIE et mathématiques - Alimentation, diététique et mathématiques — CHIMIE et mathématiques (emploi des puissances de 10 - Données élémentaires sur l'atome) - L'emploi des machines à calculer, conçu en complémentarité avec le calcul à la main et le calcul mental, l'emploi du magnétoscope, l'emploi du rétro-projecteur et surtout, *LE TRAVAIL EN DEMI-CLASSES,* tendraient à développer un commencement d'interdisciplinarité véritable.

4e Partie

VARIÉTÉS

Marcel DUMONT

IV.1

TRAVAIL D'ELEVES

L.T Blaise Pascal:
TROLETTI FRANÇOIS
RIOT FRANÇOIS
EDOUARD PATRICE

Mardi 17 Octobre 1978

7.1

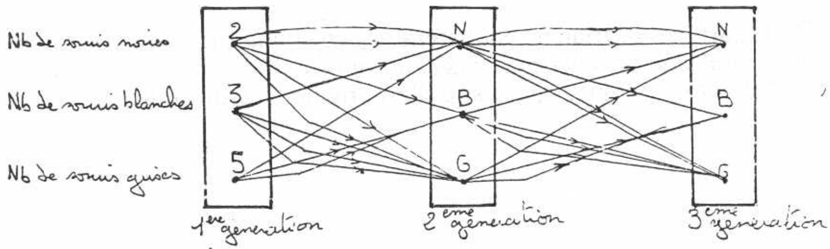
CALCULS MATRICIELS
rectificatif de la fiche 7.0

Probleme:

chaque souris noires donnent naissance a $\left\{\begin{array}{l}\text{2 noires}\\\text{1 blanche}\\\text{2 grises}\end{array}\right.$

chaque souris blanches donnent naissance à $\left\{\begin{array}{l}\text{1 noire}\\\text{0 blanche}\\\text{3 grises}\end{array}\right.$

chaque souris grises donnent naissance à $\left\{\begin{array}{l}\text{1 noire}\\\text{2 blanches}\\\text{0 grise}\end{array}\right.$



① Comparez avec le schema ci-dessous

$$\begin{pmatrix}2\\3\\5\end{pmatrix}\xrightarrow{\begin{smallmatrix}2&1&1\\1&0&2\\2&3&0\end{smallmatrix}}\begin{pmatrix}12\\12\\13\end{pmatrix}\xrightarrow{\begin{smallmatrix}2&1&1\\1&0&2\\2&3&0\end{smallmatrix}}\begin{pmatrix}49\\38\\50\end{pmatrix}$$

② Trouvez un codage pour passer de la premiere a la troisieme generation en utilisant des matrices

③ Continuez jusqu'à la cinquieme generation

-comment passer de la premiere à la cinquiemé generation en une seule fois

$$\begin{pmatrix}b\\a\\d\\e\\c\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}d\\e\\c\\b\\a\end{pmatrix}$$

④ Nous sommes passes du premier systeme au second en utilisant un codage très simple

-Trouvez ce codage

IV.2

Henri BAREIL

COURBES "FLOCONS DE NEIGE" DE VON KOCH

A. Travail proposé aux élèves

① A partir d'un triangle équilatéral C_0 voici une succession de figures qui ne sont que commencées. Sachant qu'on a fait subir le même sort à tous les côtés, comment passes-tu d'une figure à la suivante ?

C_0 C_1 C_2

... → ... etc ...

Prends deux grandes feuilles et dessine C_3 et C_4

② Soit à étudier la suite des figures C_i ainsi obtenues.

(Dans le tableau ci-dessous, n est un naturel aussi grand qu'on le veut).

(Etudier aussi les symétries)	C_0	→	C_1	→	C_2	→	C_3	...	C_n
Nombre de côtés	3	× ...							
Mesure du côté	1	× ...							
Longueur totale de la ligne	3								
Nombre de nouveaux triangles fabriqués chaque fois		3							
Aire de chacun de ces triangles par rapport à l'aire initiale S		$\frac{S}{9}$							
Aire ajoutée chaque fois (en fonction de S)									
Aire totale, en fonction de S, pour C_n :									

Commentaires sur la longueur de la ligne, et sur la surface enclose, lorsque n augmente indéfiniment ?

③ Et si les "nouveaux triangles rajoutés" étaient chaque fois dessinés *à "l'intérieur"* de la ligne ? (réponses immédiates ... !).

B. Explicitons un peu

1° Soit C_0 un triangle équilatéral. La mesure de chacun de ses côtés sera l'unité de longueur.

Consignes

1.1. Chaque côté est partagé, régulièrement, en 3.

1.2. Sur le tiers central est bâti, à l'extérieur de la figure, un triangle équilatéral.

1.3. Le tiers central est alors REMPLACÉ par les deux autres côtés de ce triangle équilatéral.

1.4. On obtient ainsi la figure C_1 esquissée plus haut. Termine-la.

2° Chaque côté de C_1 est à son tour partagé, régulièrement, en 3. On remplace le tiers central comme ci-dessus.

On obtient ainsi la figure C_2. Dessine-la en entier.

3°	C_0	$\rightarrow$	C_1	$\rightarrow$	C_n
Nombre de côtés	3	$\times 4$	3×4	$\times 4$	3×4^n
Mesure du côté	1	$\times \frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\times \frac{1}{3}$	$\frac{1}{3^n}$
Longueur totale					$\frac{4^n}{3^{n-1}}$
Nombre de nouveaux triangles		3		3×4	De C_{n-1} à C_n : $3 \times 4^{n-1}$
Aire de chacun	S	$\frac{S}{9}$		$\frac{S}{3^4}$	$\frac{S}{3^{2n}}$
Aire rajoutée		$S \times \frac{1}{3}$		$S \times \frac{4}{3^3}$	$S \times \frac{4^{n-1}}{3^{2n-1}}$

Aire totale $x_n = S\left[1 + \frac{1}{3} + \frac{4}{3^3} + \dots + \frac{4^{n-1}}{3^{2n-1}}\right]$

D'où, pour n infini, $x = S\left[1 + \frac{1}{3} + \frac{4}{3^2}\left(\frac{1}{3} + \frac{4}{3^3} + \dots\right)\right]$

Soit $y = [\dots]$. $\quad y = 1 + \frac{1}{3} + \frac{4}{9}(y-1)$

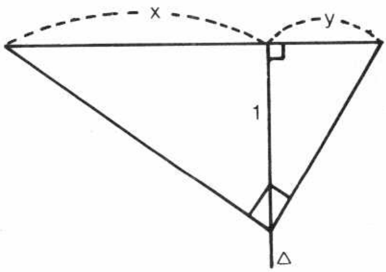
$$9y = 12 + 4y - 4 \quad ; \quad y = \frac{8}{5}, \; x = \frac{8}{5} S$$

Henri BAREIL

IV.3

FRACTIONS CONTINUES NOMBRE D'OR ET TRAPEZE ISOCELE

①

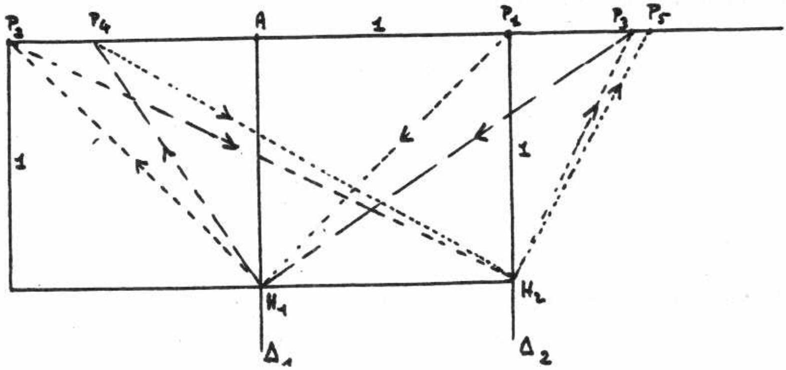


$xy = 1$

D'où $y = \frac{1}{x}$.

De là une construction d'un inverse.

②



Soit f_1 la "prise d'inverse" autour de Δ_1
Soit f_2 la "prise d'inverse" autour de Δ_2.

Alors $A\,P_1 = 1 \qquad P_1 \underset{f_1}{\mapsto} P_2$ tel que $A\,P_2 = \frac{1}{1}$ et $P_1P_2 = 1 + \frac{1}{1}$

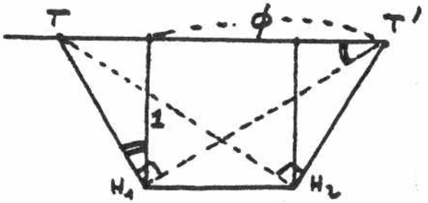
$P_2 \underset{f_2}{\mapsto} P_3$ tel que $P_1P_3 = \dfrac{1}{P_1P_2} = \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1}}$ et $A\,P_3 = 1 + \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1}}$

$P_3 \underset{f_1}{\mapsto} P_4$ tel que $A\,P_4 = \dfrac{1}{A\,P_3} = \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1}}}$ et $P_1P_4 = 1 + \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1}}}$

etc.

D'où les deux suites P_1P_2 , P_1P_4 , ... et $A\,P_1$, $A\,P_3$, $A\,P_5$, ... qui convergent vers :

(trapèze isocèle)

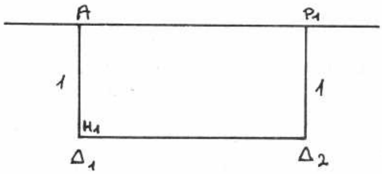


$\dfrac{1}{\phi} = \dfrac{\phi - 1}{1}$.

D'où ϕ ...

Le cercle circonscrit est de diamètre [TT'].

③ • Le même état d'équilibre "trapèze isocèle" va se retrouver avec une valeur de AP_1 autre que 1.



ou avec $AH_1 \neq 1$.

Cela correspond aux fractions continues $\alpha + \cfrac{1}{\alpha + \cfrac{1}{\alpha + \cfrac{1}{\alpha + \ldots}}}$

ou $\alpha + \cfrac{\beta}{\alpha + \cfrac{\beta}{\alpha + \cfrac{\beta}{\alpha + \ldots}}}$

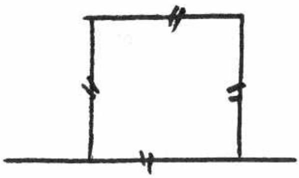
avec $\beta > 0$, puisqu'exprimant un carré (celui de AH_1).

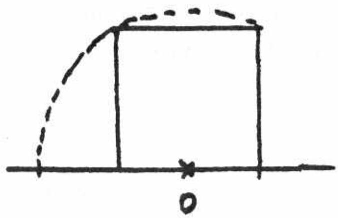
D'où $\quad \alpha + \dfrac{\beta}{\varphi} = \varphi$

$$\alpha\varphi + \beta = \varphi^2 \qquad \varphi^2 - \alpha\varphi - \beta = 0$$

D'où une condition nécessaire d'existence de φ : $\quad \alpha^2 + 4\beta > 0$.

• La construction du trapèze isocèle et de son cercle circonscrit correspond au tracé classique du rectangle et du nombre d'or (justification avec Pythagore) :





④ • On peut aussi étudier les fractions continues en liaison avec les représentations graphiques de $\quad x \mapsto \dfrac{\beta}{x}$.

Henri BAREIL

TRIANGLE DE PASCAL

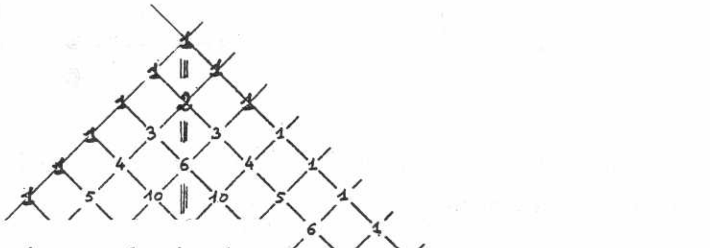
(Cf. tome 1, pages 183-189)

A. Extensions

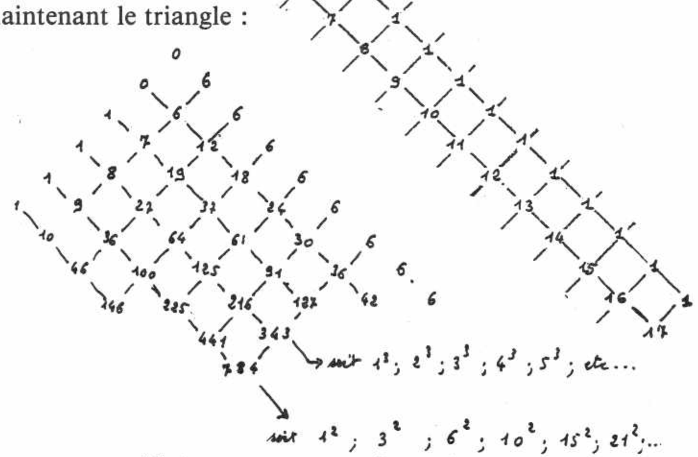
① On peut fabriquer d'autres triangles en "multipliant" chaque nombre par un réel λ (non nul).

② Qu'obtient-on en changeant les 1 de la ligne a par des 2 ?

ligne a



③ Voici maintenant le triangle :



Noter : 1 $\xrightarrow{+2}$ 3 $\xrightarrow{+3}$ 6 $\xrightarrow{+4}$ 10 $\xrightarrow{+5}$ 15 $\xrightarrow{+6}$ 21

— Un tel triangle a été fabriqué "à l'envers" à partir des n^3 .

— La suite des carrés signalée s'écrit

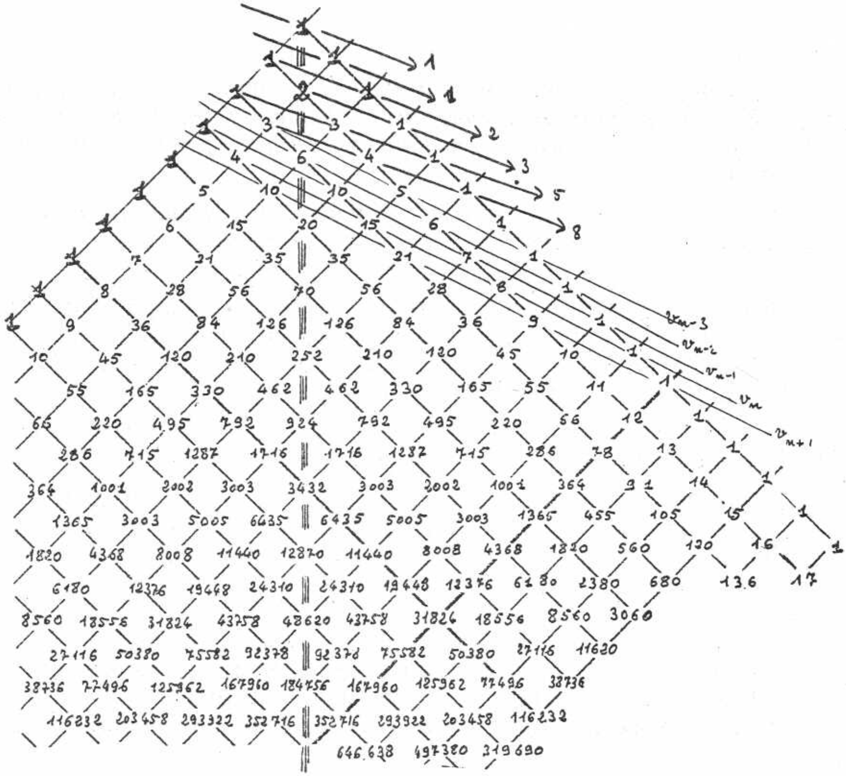
1^2 ; $(1+2)^2$; $(1+2+3)^2$; $(1+2+3+4)^2$; ... ; $(1+2+...+n)^2$; ...

soit 1^2 ; .... $\left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2$

soit 1^2 ; $\dfrac{1}{4}(2\times 3)^2$; $\dfrac{1}{4}(3\times 4)^2$; .... $\dfrac{1}{4}[n(n+1)]^2$.

— Exercice : Justifier : $\dfrac{1}{4}n^2(n+1)^2 - \dfrac{1}{4}(n-1)^2n^2 = n^3$. On peut faire d'abord "découvrir" sur des exemples.

B. Triangle de Pascal et suite de Fibonacci



• En effet : Soit

$\longrightarrow u_{n-1}$, on a bien

$\longrightarrow u_n$ $\qquad u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$

$\longrightarrow u_{n+1}$

• On peut imaginer des suites récurrentes analogues en modifiant la direction de sommation.

Ainsi : $\qquad v_{n+1} = v_{n-3} + v_{n-2} + v_{n-1}$.

IV.5

Henry PLANE

ETUDE D'UN ACHAT A CREDIT

On constate souvent combien nos élèves ont du mal à concevoir que le modèle plus ou moins mathématique par lequel le scientifique essaie de comprendre et de maîtriser les phénomènes réels n'est pas la réalité mais, justement, un modèle.

Certes, tout se passe comme si la lumière, sous certaines conditions, se déplaçait en ligne droite et subissait certaines règles (réflexion, réfraction, etc.), mais la "lumière"? son déplacement? Qu'est-ce?

Sans avoir à faire appel aux sciences, il apparaît qu'un problème de "la vie de tous les jours" peut facilement se prêter à illustrer ce passage d'un "fait" à l'"outil mathématique" utilisé pour le cerner. Or, qui veut le cerner? Comment le cerner? Pourquoi le cerner?

Le "matheux", en tant que tel, ne choisit pas; il fournit des modèles et précise seulement les exigences de leur utilisation éventuelle.

Voici, en exemple, l'étude d'un "achat à crédit". Il permet de voir qu'une même situation peut conduire à plusieurs mathématisations. Soulignons cependant que les diverses parties de cette étude ne sont peut-être pas également accessibles à tous les élèves.

"Ce magnifique objet d'une valeur de 1200F est à vous de suite!".
Rien à payer à la livraison! 12 mensualités de 105F.
Que se passe-t-il donc? Essayons des modèles mathématiques pour cette étude.

Premier modèle

En un an, je verserai $105\text{F} \times 12 = 1260\text{F}$. J'ai donc à payer un intérêt supplémentaire de 60F, ce qui correspond à un taux d'intérêt de

$$\frac{60}{1200} = 0{,}05 \quad \text{soit } 5\,\% .$$

Deuxième modèle

Au bout du premier mois, je paie 105F, ce qui représente 100F de remboursement et 5F d'intérêt pour ce mois. Ces 5F correspondraient à 60F pour un an. Comme on m'a avancé 1200F, je retrouve bien le taux de $\frac{60}{1200}$, soit de 5 %.

Désormais, je ne suis plus emprunteur que de $1200F - 100F = 1100F$, et, dans les 105F du second versement, les 5F d'intérêt pour un mois, qui correspondent à 60F par an, révèlent un taux d'intérêt de $\frac{60}{1100} = 0{,}0545$ soit 5,45 % . Ensuite, je ne suis plus emprunteur que de

$$1100F - 100F = 1000F$$

Ainsi, chaque mois, je paie 5F d'intérêt pour un emprunt qui va en décroissant. Résumons-nous dans un tableau :

a : la somme effectivement empruntée ;
b : le taux d'intérêt annuel (60 divisé par le montant de l'emprunt).

Mois	1	2	3	4	5
a (emprunt)	1200	1100	1000	900	800
b (taux)	5	5,45	6	6,67	7,5

6	7	8	9	10	11	12
700	600	500	400	300	200	100
8,57	10	12	15	20	30	60

Le taux d'intérêt varie au cours de l'année de 5 % à 60 % (une moyenne arithmétique donne 15,5 % !).

Troisième modèle

Prenons, comme base de calcul, un taux d'intérêt annuel de 5 %. Si je plaçais chaque mois 105F, combien aurais-je au bout d'un an ? (Et cela, mon vendeur peut le faire avec l'argent qu'il reçoit)

Etablissons d'abord une formule :

Une somme S , placée au taux t , rapporte, au bout de la période unitaire, tS . Donc le capital, constitué en fin de période, est

$$S_1 = S + tS = S(1+t)$$

Si ce dernier n'est pas retiré, il devient, selon le même principe, au bout d'une deuxième période :

$$S_2 = S_1(1+t) = S(1+t)^2$$

et ainsi de suite. A la fin de la $n^{\text{ième}}$ période, le capital est $S_n = S(1+t)^n$.

Par ailleurs, un calcul plus compliqué, auquel se livrent les banques, estime qu'un taux d'intérêt annuel de 5 % correspond à un taux mensuel de 0,407 % (on remarque que ce nombre est inférieur à $\frac{5}{12}$).

Dans notre modèle, on sera en présence de :

105 F placés 11 mois, qui deviennent $105(1+t)^{11}$ F
105 F placés 10 mois, qui deviennent $105(1+t)^{10}$ F
....
105 F placés 1 mois, qui deviennent $105(1+t)$ F
105 F placés en fin d'année.

Je dispose alors d'un capital de C francs :

$$C = 105\ [(1+t)^{11} + (1+t)^{10} + \dots + (1+t)^2 + (1+t) + 1]$$

Il existe une formule pour ce calcul :

$$C = 105 \cdot \frac{(1+t)^{12}-1}{t}$$

ce qui donne, avec la valeur citée, $C = 1288{,}6$.

Le vendeur n'a donc pas à me demander 105 F pour retrouver ses 1200 F !

Quatrième modèle

Alors, combien devrait-il me demander par mois pour une transaction sur la base de 5 % par an ?

Le vendeur me prête 1200 F. Il en attend 1260 F au bout d'un an. Je verse x francs par mois pendant 12 mois, ce qui, selon le modèle précédent, donne $x\frac{(1+t)^{12}-1}{t}$. Si nous sommes d'accord, on peut écrire l'égalité :

$$1260 = x\frac{(1+t)^{12}-1}{t}$$

d'où :

$$x = \frac{1260\,t}{(1+t)^{12}-1} = \frac{1260 \times 0{,}00407}{0{,}05} = 102{,}56$$

Selon que vous êtes démarcheur, banquier ou moraliste, faites votre choix dans ces modèles. Le mathématicien, lui, fait ses comptes — théoriques — ; il peut même vous proposer d'autres modèles, par exemple :

Cinquième modèle

Donc la transaction se fait, supposons-le pour nos calculs, sur la base d'un taux d'intérêt annuel de 5 %. Nous avons vu qu'il lui correspond un taux mensuel de 0,407 %, mais permettons-nous de le fixer à $\frac{5}{12} = 0{,}417$. Pour 100 F prêtés un mois, je dois rembourser

$$100 \text{ F} + 0{,}417 \text{ F} = 100{,}417 \text{ F}$$

Dressons alors une table des intérêts dus mensuellement en fonction du prêt, comme nous l'avons fait au deuxième modèle.

On note $i = 0{,}417$ F

Mois	1	2	3	4	5
emprunt en francs	1200	1100	1000	900	800
intérêt	$12i$	$11i$	$10i$	$9i$	$8i$

6	7	8	9	10	11	12
700	600	500	400	300	200	100
$7i$	$6i$	$5i$	$4i$	$3i$	$2i$	i

D'après cette table, les remboursements seraient inégaux. Ils iraient de $100 \text{ F} + 12\,(0{,}417) \text{ F} = 105 \text{ F}$ à $100 \text{ F} + 1(0{,}417) \text{ F} = 100{,}417 \text{ F}$.

On peut encore établir des remboursements égaux en calculant la somme des intérêts théoriques, et en répartissant celle-ci également sur douze mois.

Somme des intérêts : $12i + 11i + \ldots\ldots + 2i + i = 78i = 32{,}5$ F

Répartition mensuelle, en francs

$$\frac{32{,}5}{12} = 2{,}708$$

On obtient des mensualités de remboursement de 102,708 F....

Time is money.....

IV.6

D'après "Mathematics and the imagination"
de KASNER - NEWMAN

NE PAS TREBUCHER SUR LES RACINES !

$$(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$$

$$(n+1)^2 - (2n+1) = n^2$$

Retranchons $n(2n+1)$ aux deux membres :

$$(n+1)^2 - (n+1)(2n+1) = n^2 - n(2n+1)$$

Ajoutons : $\frac{1}{4} \times (2n+1)^2$

$$(n+1)^2 - (n+1)(2n+1) + \frac{1}{4} \times (2n+1)^2 = n^2 - n(2n+1) + \frac{1}{4} \times (2n+1)^2$$

$$[(n+1) - \frac{1}{2} \times (2n+1)]^2 = [n - \frac{1}{2} \times (2n+1)]^2$$

En extrayant les racines, on obtient :

$$n + 1 - \frac{1}{2} \times (2n+1) = n - \frac{1}{2} \times (2n+1)$$

$$n + 1 = n$$

Conclusion :

Tous les éléments de **N** sont égaux.

Question 1 :

Expliquer un peu le passage de $n+1=n$ à la conclusion.

Question 2 :

Cette conclusion est.. surprenante !
Mais où serait l'erreur ?

IV.7

Henry PLANE, IREM de Dijon

A PROPOS DE CHASLES ET DE RELATIONS

Dans "Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie" de Michel Chasles [1], on peut lire les lignes suivantes montrant l'importance que l'auteur attachait aux relations entre les mesures des segments déterminés par divers points sur une droite, relations qu'il fait dériver d'une "relation générale entre cinq points situés en ligne droite".

Disons tout de suite que nous n'y trouvons pas ce que d'aucuns attendraient... Chasles, en effet, écrit :

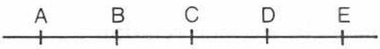
"Soient A, B, C, D, E, ces cinq points, on aura :

$\overline{EA}^2.BC.CD.DB + \overline{EB}^2.CD.DA.AC - \overline{EC}^2.DA.AB.BD - \overline{ED}^2.AB.BC.CA = 0$" [2]

Que dire de cette formule ?

Elle est erronée !...

Vérifions pour cinq points équidistants, par exemple :



$$EA^2.BC.CD.DB = 16.1.1.2 = 32$$
$$EB^2.CD.DA.AC = 9.1.3.2 = 54$$
$$EC^2.DA.AB.BD = 4.3.1.2 = 24$$
$$ED^2.AB.BC.CA = 1.1.1.2 = 2$$

$$32 + 54 - 24 - 2 \neq 0$$

Essayons de rendre "algébrique" en orientant la droite de A vers E. Chaque terme contient un seul facteur négatif

$$-32 - 54 + 24 + 2 \neq 0$$

Alors ? Peut-être, en passant au cas général comprendrons-nous mieux. Prenons E comme origine ; soient a, b, c, d, les abscisses respectives des autres points ; il vient, en ordonnant :

$$EA^2.BC.CD.DB = a^2b^2c - a^2b^2d - a^2bc^2 + a^2bd^2 + a^2c^2d - a^2cd^2$$
$$EB^2.CD.DA.AC = a^2b^2c - a^2b^2d - ab^2c^2 + ab^2d^2 + b^2c^2d - b^2cd^2$$
$$EC^2.DA.AB.BD = a^2bc^2 - a^2c^2d - ab^2c^2 + ac^2d^2 + b^2c^2d - bc^2d^2$$
$$ED^2.AB.BC.CD = a^2bd^2 - a^2cd^2 - ab^2d^2 + ac^2d^2 + b^2cd^2 - bc^2d^2$$

(1) Page 176, 3ème édition, Gauthier-Villars (1889). L'ouvrage est de 1837. Michel Chasles (1793-1880).

(2) $\overline{EA}^2$ signifie le carré de la longueur EA. Il s'agissait de ne pas confondre avec le monôme EA^2. L'algèbre s'écrivait souvent avec des majuscules. Nombre de livres du début du 20e siècle utilisent encore cette notation dans ce sens.

Il ressort donc que la relation correcte est :

$$\overline{EA}^2.BC.CD.DB - \overline{EB}^2.CD.DA.AC + \overline{EC}^2.DA.AB.BD - \overline{ED}^2.AB.BC.CA = 0$$

Pour notre exemple

$$32 - 54 + 24 - 2 = 0$$

Il y a ici source de nombreux exercices de calcul numérique ou algébrique, à condition de connaître la formule de... Mais de qui, alors ?

Nous renvoyons à notre brochure "Vecteurs" (3) pour constater que Argand en 1799 écrivait : "*Les points* K, P, R, *étant quelconques, on a toujours* $\overline{KP} + \overline{PR} = \overline{KR}$ " (4).

Mais continuons la lecture de Chasles (nous avons respecté les signes imprimés dans l'ouvrage).

"*La manière de former les termes de cette équation (5) est manifeste. Pour déterminer les signes, on divisera tous les termes par le produit AB.BC.CA. L'équation prend la forme :*

$$\overline{EA}^2 . \frac{DB.DC}{AB.AC} + \overline{EB}^2 . \frac{DA.DC}{BA.BC} - \overline{EC}^2 . \frac{DA.DB}{CA.CB} = \overline{ED}^2$$

Dans cette équation, on donnera le signe + au produit de deux segments comptés dans le même sens à partir du point qui leur est commun, et le signe − au produit de deux segments dans des sens différents."

Voici donc comment apparaît l'idée-clef retenue par la suite mais qui n'était utilisable que pour deux segments associés ayant un point commun...

Si nous vérifions avec notre exemple cette seconde relation :

$$16\,\frac{2.1}{1.2} + 9\,\frac{3.1}{-(1.1)} - 4\,\frac{3.2}{-(2.1)}$$

$$16 - 27 + 12 = 1$$

La relation est correcte. En effet, comme il s'agit de longueurs, AB = BA, AC = CA, etc. Alors le second rapport $\frac{CD.DA.AC}{AB.BC.CA}$, qui est égal à $\frac{DA.DC}{BA.BC}$, intervient, du fait de la convention faite par Chasles, précédé du signe − car BA et BC ne sont pas de même sens à partir du point commun B. Nous sommes retombés sur nos pieds (ou sur nos signes).

---

(3) Publiée par le groupe "Histoire des mathématiques pour nos élèves", de l'IREM de Dijon.

(4) "Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires par des constructions géométriques". Réédition A. Blanchard. Paris 1971. Mais la relation était déjà vectorielle, c'est-à-dire beaucoup plus riche.

(5) *Equation, relation,* depuis le 17e siècle les deux mots sont utilisés sans que la distinction soit encore nette entre eux.

Chacun commencera selon ses goûts...
Mais poursuivons la page de lecture.

"Voici quelles sont les relations entre quatre points, qu'on déduit de la relation générale ci-dessus :

1) *"Si on suppose le point E à l'infini, on aura en divisant par* $\overline{ED}^2$

$$BC.CD.DB + CD.DA.AC - DA.AB.BD - AB.BC.CA = 0$$

Chaque terme de cette équation est le produit des trois segments formés par les points pris deux à deux."

E étant à l'infini : $\dfrac{EA}{ED} = \dfrac{EB}{ED} = \dfrac{EC}{ED} = 1\ldots$; pour le signe on s'arrangera...

De fait, nous avons :

$$\overline{BC}.\overline{CD}.\overline{DB} - \overline{CD}.\overline{DA}.\overline{AC} + \overline{DA}.\overline{AB}.\overline{BD} - \overline{AB}.\overline{BC}.\overline{CA} = 0$$

Et encore :

2) *"Si les deux points E et D se confondent, il vient :*

$$DA.BC + DB.AC - DC.AB = 0\text{''}$$

Dans la relation initiale on a DE = 0, on divise par DA.DB.DC et on arrange les signes. Effectivement, il est exact que :

$$\overline{DA}.\overline{BC} + \overline{DB}.\overline{CA} + \overline{DC}.\overline{AB} = 0$$

Et pour finir :

3) *"Enfin, quand le point D est à l'infini, l'équation générale devient :*

$$\overline{EA}^2.BC + \overline{EB}^2.AC - \overline{EC}^2.AB = AB.BC.CA$$

C'est l'équation de Stewart." (6).

Sans doute divise-t-on la relation initiale par ED² et

$$\frac{CD.DB}{ED^2} = \frac{CD}{ED} \cdot \frac{DB}{DE} = 1.1 = 1 \qquad \text{etc.}$$

Ici encore : $EA^2.\overline{BC} + EB^2.\overline{CA} + EC^2.\overline{AB} + \overline{AB}.\overline{BC}.\overline{CA} = 0$

Une telle rédaction, par un élève, sans autres précautions que celles de cette page de Chasles, serait certainement assez mal appréciée de nos jours. Mais n'est-ce pas par de telles pages que, parfois, le patrimoine mathématique des hommes a progressé petit à petit ?

(6) Mathew Stewart (1717-1785), mathématicien écossais.

ASSOCIATION DES PROFESSEURS DE MATHEMATIQUES DE L'ENSEIGNEMENT PUBLIC

Secrétariat : 13, rue du Jura 75013 Paris

Qu'est-ce que l'A.P.M.E.P. ?

L'A.P.M.E.P. est une association qui regroupe tous les enseignants concernés par l'enseignement des mathématiques "de la Maternelle jusqu'à l'Université". Fondée en 1909, elle regroupe aujourd'hui près de 13 000 enseignants. L'A.P.M.E.P. est un lieu d'échanges, pédagogiques et scientifiques, pour tous les enseignants de mathématiques.

Les Régionales

Dans chaque académie, il existe une section régionale de l'A.P.M.E.P. avec, très souvent, des sections départementales, voire locales. En effet, à la dispersion géographique de ses adhérents, l'A.P.M.E.P. propose un remède : la constitution d'équipes de maîtres, qui enseignent des mathématiques "de la Maternelle jusqu'à l'Université", en dehors de toute hiérarchie administrative, par-dessus les barrières officielles des divers degrés d'enseignement.

Les Journées Nationales

L'A.P.M.E.P. organise chaque année des Journées Nationales qui sont, pour les membres de l'Association, l'occasion de se retrouver. Elles ont, ces dernières années, regroupé de 500 à 800 participants autour de : Pluridisciplinarité [Orléans, 1975]. Problèmes de comportement [Rennes, 1976]. Formation Permanente [Limoges, 1977]. Problèmes, évaluation, erreur [Reims, 1978]. Enseignement, innovation, recherche [Grenoble, 1979]. En septembre 1980 (4 au 7 septembre), le thème sera : Quelle formation pour les enseignants de mathématiques ? [Bordeaux].

Les Publications

L'A.P.M.E.P. édite un bulletin (5 numéros par an) qui réunit des articles de documentation mathématique et pédagogique, et qui rapporte la vie de l'association, tant régionale que nationale. On y trouve notamment les rubriques suivantes : études, études didactiques, dans nos classes, mathématiques et société, examens et concours, manuels scolaires, évaluation, interdisciplinarité, formation des maîtres, informatique, audio-visuel, problèmes, jeux et maths, matériaux pour une documentation, un coin du ciel ...

De plus, l'A.P.M.E.P. publie toute une série de brochures. Ces brochures permettent de répondre à des demandes plus spécifiques de telle ou telle catégorie d'adhérents.
Parmi les dernières brochures parues :
Elem-Math 5 (1979) : Aides pédagogiques pour le Cours Elémentaire.
Activités mathématiques en 4^e-3^e, tome 1 (1979) : Ouvrage de base, avec ses textes de réflexions générales (assorties d'exemples), et la présentation de 29 activités, référencées à 2 index.
Les manuels scolaires de mathématiques (1979) : Pièce maîtresse d'une réflexion indispensable. Exemples pris dans le premier cycle... mais aisément transposables.
Pour une mathématique vivante en Seconde (1979) : 21 exemples, très variés,... et à suivre !
Pavés et bulles (1978) : Met en évidence l'efficacité d'outils mathématiques. Etablit de beaux résultats (post-bac surtout).
Calculatrices quatre opérations (1979) : Elémentaire et premier cycle.
Du quotidien à la mathématique (1979) : Une expérience en formation d'adultes (fiches de travail commentées, également utilisables dans le premier cycle).

Le Présent

L'A.P.M.E.P., association représentative des enseignants de mathématiques, agit comme telle vis-à-vis des syndicats, des associations d'enseignants, d'autres disciplines, des associations de parents d'élèves, ainsi que des Ministères de l'Education et de l'Université. Par exemple, actions à propos des programmes, ... ; intervention de novembre 1979 auprès du Ministère de l'Education (ce qui a permis d'obtenir une heure de travaux dirigés pour toutes les Secondes "Indifférenciées" de la rentrée 1981, alors qu'aucune n'était prévue).

L'Avenir

Après avoir obtenu la création des IREM (puis lutté pour leur maintien), l'A.P.M.E.P. est à la pointe du combat pour une véritable formation permanente, dont elle a défini les principes dans son Texte d'Orientation 1978 (caractère non obligatoire ; formation intégrée dans le service des enseignants ; large indépendance vis-à-vis de la hiérarchie ; ...).

Texte d'Orientation

Après les Chartes de Chambéry (avril 1968) et de Caen (mai 1972), l'A.P.M.E.P. a actualisé ses positions fondamentales par son Texte d'Orientation (1978). Les principales préoccupations des enseignants de Mathématiques y sont abordées et de nombreuses propositions, à court et à long terme, sont faites, permettant une réforme en profondeur de l'enseignement des mathématiques. [On peut se le procurer gratuitement, en écrivant au Secrétariat de l'A.P.M.E.P. (adresse ci-dessus)]

L'A.P.M.E.P. s'intéresse donc à toutes les questions qui concernent l'enseignement des mathématiques, depuis les premières initiations jusqu'aux études supérieures, sans oublier la formation permanente des non-enseignants et des enseignants. Aussi ne pouvez-vous vous désintéresser de l'A.P.M.E.P. et des possibilités d'action qu'elle vous offre.

L'A.P.M.E.P. a besoin des forces, de l'expérience et de l'action du plus grand nombre d'enseignants de mathématiques. Son efficacité, les services qu'elle vous rend ou pourrait vous rendre, tiennent au nombre et au dynamisme de ses membres. Si vous ne les avez pas encore rejoints, faites-le donc sans tarder.

Juin 1981