Modéliser : temps discret ou temps continu ?

G. Fleury[1]

Si l'on modélise un phénomène dépendant du temps comme, par exemple, l'évolution d'une population en l'absence de prédateur et de concurrence,
dans un milieu illimité
où la nourriture est toujours suffisante on a deux voies possibles : le temps peut être modélisé par un entier, ce qui donne une suite récurrente, ou bien par un réel, ce qui donne une équation différentielle. Or c'est généralement celle-ci qui sera utilisée. Pourquoi ?

1 Un exemple : modéliser une évolution de population.

Nous supposerons que les taux de naissance et de mort restent constants. Enfin, la reproduction sous-jacente est non sexuée, ce qui rend le modèle adapté aux bactéries en milieu nutritif infini...

1.1 Temps discret.

Le temps : $\mathbf{N}$. A chaque instant,
$\delta \in]0;1[$ est la proportion de morts,
$\mu > 0$ est la proportion de naissances.

u_n est l'effectif de la population à la date n.

On trouve donc la relation suivante :

$$u_{n+1} = u_n + \mu.u_n - \delta.u_n, \tag{1}$$

ce qui donne une suite géométrique de raison $r = 1 + \mu - \delta$.

1.2 Temps continu.

Dans le modèle à temps discret, en fait

1. la date n représente en fait $n.h$ pour une durée $h > 0$ "petite".
2. μ et δ sont quasi proportionnelles à h. On suppose que ce sont des fonction différentiables de h : $\mu(h) = \mu(0) + h.m + o(h)$ et $\delta(h) = \delta(0) + h.d + o(h.)$
3. u_n est noté $u(n.h)$.

L'équation [1] s'écrit donc : $u(n.h+h) = u(n.h)+[\mu(0)-\delta(0)].u(n.h)+(m-d).h.u(n.h)+o(h)$. Pour conserver une date t indépendante de n et h, supposons que $h = \frac{t}{n}$:
$u(t+h) = u(t) + [\mu(0) - \delta(0)].u(t)$
$+ (m-d).h.u(t) + o(h)$ Et faisons tendre h vers 0 (t restant constant, donc n tend vers l'infini) :

$$\lim_{h \to 0} u(t+h) = u(t) + [\mu(0) - \delta(0)].u(t),$$

[1]Laboratoire de Mathématiques et IREM, Université B. Pascal et CNRS (UMR 6620), Les Cézeaux, 63170, Aubière, France. fleury@math.univ-bpclermont.fr

Si u est continue (à droite) en t (avec $u(t) > 0$), on a donc nécessairement : $\mu(0) = \delta(0)$ d'où :

$$u(t+h) = u(t) + (m-d).h.u(t) + o(h),$$

soit :

$$\frac{u(n.h+h) - u(n.h)}{h} = (m-d).u(n.h) + \frac{o(h)}{h}.$$

Si h tend vers 0 (t restant constant), on trouve ainsi l'équation différentielle :

$$u'(t) = (m-d).u(t). \tag{2}$$

dont la solution vaut : $u(t) = u(0).e^{(m-d).t}$

1.3 Comparaison de ces deux modèles.

Les deux modèles sont aisément utilisables, mais le modèle à temps discret est plus simple, car il ne fait guère appel qu'à des propriétés algébriques... Les comportements de la suite géométrique dans un cas, de l'exponentielle dans l'autre, sont similaires. La population soit s'éteint, soit croît à l'infini (ce qui n'est guère réaliste), avec entre les deux un cas intermédiaire (lui aussi assez irréaliste) : la stabilité totale.

2 Le cas général.

Comparons donc un modèle à temps discret

$$\begin{cases} u_{n+1} = f(u_n), \\ u_0 \text{ donné.} \end{cases} \tag{3}$$

à un modèle à temps continu :

$$\begin{cases} y'(t) = f[y(t)], \\ y(0) \text{ donné.} \end{cases} \tag{4}$$

Dans le cas (3) la suite $(u_n)_n$ peut aisément être construite, pour peu que l'ensemble de définition de la fonction f ne pose pas de problème.

Dans le cas (4) la première question qui se pose est celle de l'existence d'une solution et aussi celle de son unicité.

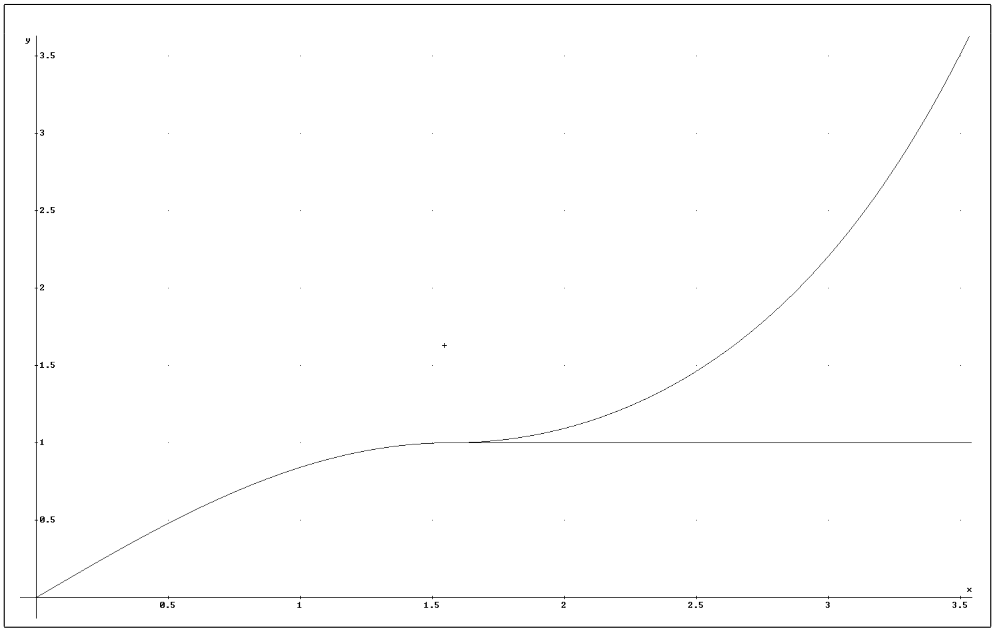
2.1 Un cas pathologique.

Il est clair que l'équation différentielle

$$y'(t) = 2.\sqrt{y(t)} \text{ avec } y(0) = 0,$$

admet (au moins) deux solutions sur $\mathbb{R}^+$: la fonction nulle et $t \to t^2$.

À partir de cette idée, on peut aisément construire d'autre équations différentielles ayant des solutions non uniques de manière un peu moins évidente, comme : $y' = \sqrt{|1-y^2|}$ avec $y(0) = 0$ qui a, sur tout segment $[0; a]$ avec $a < \frac{\pi}{2}$, une solution unique, mais qui, à partir de $\frac{\pi}{2}$ a au moins deux solutions : la constante 1 ou bien $x \mapsto \cosh\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ (on rappelle que $\cosh(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$)...



2.2 Existence et unicité de la solution d'une équation différentielle.

Considérons l'équation différentielle :

$$y' = f(y) \text{ avec } y(0) = y_0. \tag{5}$$

Si f est localement de Lipschitz :
(pour tout intervalle fermé borné $[a; b]$, il existe K tel que, pour tout x et tout y de $[a; b]$: $|f(x) - f(y)| \leq K.|x - y|$),
alors on montre (et nous admettrons) que cette équation a une solution unique.

Il suffit, en application du théorème des accroissements finis, que f soit dérivable à dérivée bornée sur tout $[a, b]$,
ou plus simplement que f soit dérivable à dérivée continue...

On pourra, par exemple admettre le théorème suivant :

Il existe un intervalle maximal J contenant 0 tel que l'équation différentielle (5) admet une solution unique sur J (et qui est dérivable à dérivée continue), dès que f est dérivable à dérivée continue (sur un intervalle).

On appelle courbe intégrale de l'équation différentielle (5) toute fonction z vérifiant la relation $z' = f(z)$.

Une conséquence importante de ce résultat est que, si l'on a deux courbes intégrales y et z telles qu'il existe un réel τ où $y(\tau) \neq z(\tau)$, alors pour tout réel t, on a : $y(t) \neq z(t)$.

En particulier, si a est un zéro de la fonction f, la fonction constante égale à a est une courbe intégrale de (5). Ainsi, lorsque $y_0 \neq a$, la courbe représentative de la solution y de (5) n'a aucun point commun avec la droite d'équation $y = a$: cette droite partitionne ainsi le plan et les courbes intégrales (autres que la fonction constante a) sont entièrement situées dans l'un des deux demi-plans limités par cette droite.

On peut ainsi faire une **étude qualitative** des équations différentielles de type $y' = f(y)$ à partir du tableau de variations de f. Par exemple, si f s'annule en a et b (avec $a < b$) et reste positive sur $]a; b[$ et négative ailleurs, alors :

1. Il y a exactement deux fonctions constantes qui sont des courbes intégrales de (5) : $y = a$ et $y = b$.

2. Si $a < y_0 < b$, alors la solution y de (5) vérifie : pour tout réel t, on a : $a < y(t) < b$. Par conséquent sa dérivée y' est positive et elle est croissante. En supposant qu'il existe une solution y continue sur $\mathbb{R}$, alors $\beta = \lim_{t\to+\infty} y(t)$ existe dans $\mathbb{R}$ (puisque y est croissante et majorée par b. De plus $a < y_0 \leq \beta \leq b$. Enfin, comme $y'(t) = f[y(t)]$, on a : $\lim_{t\to+\infty} y'(t) = f(\beta) \geq 0$. Si $f(\beta) > 0$, on pourrait trouver τ tel que, pour $t \geq \tau$ on aurait $y'(t) \geq \frac{\beta}{2}$. Or $y(t) = y(\tau) + \displaystyle\int_\tau^t y'(u)\ du \geq (t-\tau).\frac{\beta}{2}$, ce qui fait que, nécessairement on aurait : $\lim_{t\to+\infty}(t) = +\infty$, ce qui est impossible. C'est donc que $\beta = 0$, or $a < y_0 \leq \beta \leq b$, donc $\beta = b$. Ainsi la droite $y = b$ est asymptote en $+\infty$ de la courbe représentant la solution de (5). On montrerait de même que la droite $y = a$ lui est asymptote en $-\infty$.

3. Si $y(0) > b$, alors la solution y de (5) vérifie : pour tout réel t, on a : $y(t) > b$. Comme elle est décroissante, si cette solution existe sur $\mathbb{R}^+$, on montrerait de même que la droite $y = b$ lui est asymptote en $+\infty$. Par contre on ne peut rien dire en $-\infty$, si ce n'est qu'il ne peut pas y avoir d'asymptote horizontale. Il se peut, par contre, qu'il y ait une asymptote verticale : on dit que la solution "explose" (et il n'existe pas de solution continue sur $\mathbb{R}^-$).

4. SI $y(0 < a$, alors la solution y de (5) vérifie : pour tout réel t, on a : $y(t) < a$. Comme elle est décroissante, si cette solution existe sur $\mathbb{R}^+$, on montrerait de même que la droite $y = b$ lui est asymptote en $-\infty$. En $+\infty$, il ne peut pas y avoir d'asymptote horizontale. Mais il se peut qu'il y ait une asymptote verticale : on dit que la solution "explose" (et il n'existe pas de solution continue sur $\mathbb{R}^+$).

Voyons par exemple ce qui se passe pour l'équation : $y' = y(1-y)$. Elle a deux solutions constantes : $y = 0$ et $y = 1$. Si $y(0) \neq 0$ et $y(0) \neq 1$, on peut donc l'écrire : $\frac{y'}{y(1-y)} = 1$, soit $\frac{y'}{y} - \frac{y'}{y-1} = 1$, d'où : $-\ln|y| + \ln|y-1| = t - ln|y(0)| + ln|y(0)-1|$, soit : $\ln\left|1 - \frac{1}{y}\right| + \ln\left|1 - \frac{1}{y(0)}\right| = t$, soit enfin : $\dfrac{y-1}{y}.\dfrac{y(0)-1}{y(0)} = e^t$, ce qui donne:

$$y(t) = \frac{y(0)}{y(0) + [1-y(0)].e^{-t}}.$$

Par exemple, pour $y(0) = -1$, on trouve :

$$y(t) = \frac{1}{1 - 2e^{-t}}$$

qui explose en $t = \ln(2)$. Donc la solution existe et elle est unique et croissante sur $]-\ln(2)\ ;\ +\infty[$.

Inversement, si $y(0) = 2$, on trouve :

$$y(t) = \frac{2}{2 - e^{-t}}$$

qui n'existe que sur $]-\infty\ ;\ \ln(2)[$, y est croissante et unique.

Par contre, si $0 < y(0) < 1$, le dénominateur $y(0) - [y(0) - 1].e^t$ ne peut pas s'annuler et la solution existe sur $\mathbb{R}$. Elle est donc décroissante et a pour asymptotes $y = 0$ en $+\infty$ et $y = 1$ en $-\infty$.

3 Passer du temps continu au discret et réciproquement.

4 Passer du temps continu au discret.

Partant de l'équation (5), le schéma d'Euler donne immédiatement une réponse.

Fixons $h > 0$, on trouve :
$y_{n+1} = y_n + h.f(y_n)$, c'est à dire $y_{n+1} = g(y_n)$ avec $g(x) = x + h.f(x)$.

5 Passer du temps discret au continu.

Partant de (3) : $\begin{cases} u_{n+1} = f(u_n), \\ u_0 \text{ donné.} \end{cases}$ écrit sous la forme : $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n$ soit, avec $h = 1$: $u(n.h + h) - u(n.h) = h.f[u(n.h)] - h.u(n.h)$.

On pose ensuite, pour un $h > 0$ et un n tel que $n.h = t$: $\frac{u(t+h)-u(t)}{h} = f[u(t)] - u(t)$, puis on fait tendre h vers 0 : $u'(t) = f[u(t)] - u(t)$, ce qui donne l'équation différentielle :

$$\begin{cases} u'(t) = f[u(t)] - u(t), \\ u(0) \text{ donné.} \end{cases}$$

5.1 Équivalence des deux modèles ?

Se poser la question :

"modèles à temps discret et à temps continu sont-ils équivalents ?",

c'est se poser la question :

"la méthode d'Euler permet-elle d'approcher la solution d'une équation différentielle ?"

Réponse : **oui, mais**
seulement sur un intervalle de temps fermé borné
et seulement pour un h "assez petit".

Par exemple, considérons l'équation différentielle (où ε désigne un réel positif "petit") : $y'(t) = -300.y(t) + 60$ avec $y(0) = \dfrac{1}{5} + \varepsilon$, Si $\varepsilon \neq 0$, la solution vaut : $y(t) = \dfrac{1}{5} + \varepsilon.e^{-300.t}$ et tend (très vite) vers $\dfrac{1}{5}$, la solution du problème lorsque $\varepsilon = 0$: on dit que le problème est stable.

Appliquons le schéma d'Euler : $y_{n+1} = (1 - 300h).y_n + 6h.$ on trouve :

$$y_n = \left(y_0 - \frac{1}{5}\right).(-300h)^n + \frac{1}{5}.$$

Par exemple, si $h = 0,01$, avec $y_0 = \varepsilon + \dfrac{1}{5}$ on obtient :

$$y_n = \varepsilon.(-3)^n + \frac{1}{5},$$

suite qui diverge en oscillant ! Ce phénomène oscillatoire subsiste dès que $h > \dfrac{1}{300}$.

Voici un premier enseignement : le comportement en temps discret peut être très différent du comportement à temps continu, et aussi plus complexe.

6 Un modèle un peut plus raffiné d'évolution de populations.

Il s'agit de prendre en compte les limitations dues à l'environnement : le taux d'accroissement de la population diminue lorsque celle-ci augmente.

6.1 Modèle logistique (temps discret).

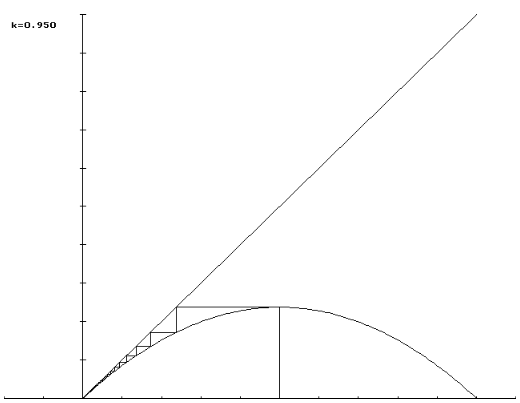
Ici, le plus simple consiste à prendre, comme taux d'accroissement: $a - b.y_n$, ce qui donne :

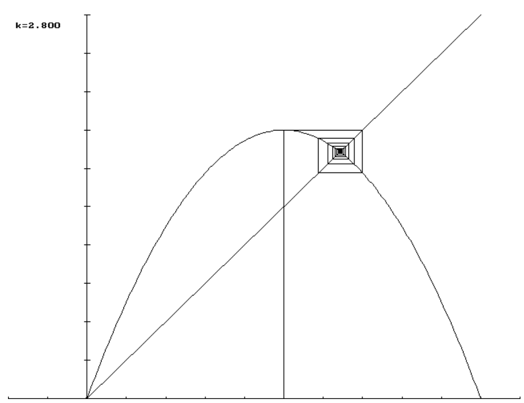
$$u_{n+1} = a.u_n - b.(u_n)^2 \tag{6}$$

Pour étudier ce modèle simplifions-le. Comme a ne dépend pas de l'unité choisie pour mesurer l'effectif de la population et que b en dépend, on peut choisir une unité telle que $b = a$ que nous notons k :

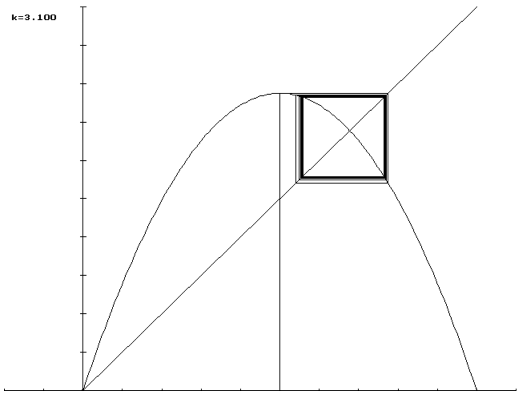
$$u_{n+1} = k.u_n.(1 - u_n)$$

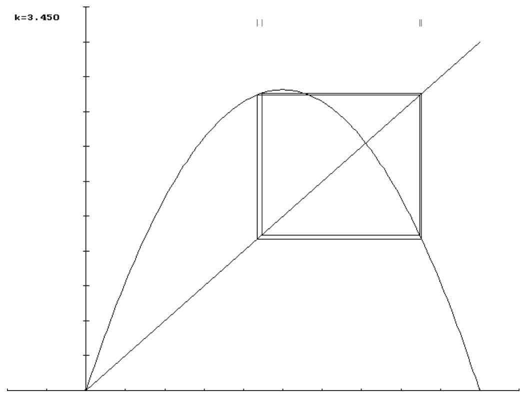
Étude du comportement asymptotique.
Nous nous limiterons à $0 < k \leq 4$.
C'est une suite de "point fixe" $u_{n+1} = f(u_n)$
Limites éventuelles 0 ou $\frac{k-1}{k}$
Si $0 < k \leq 1$, (u_n) converge vers 0.
Si $1 < k \leq 3$, (u_n) converge vers $\frac{k-1}{k}$.





Pour $3 < k \leq 4$ les choses sont beaucoup plus compliquées.

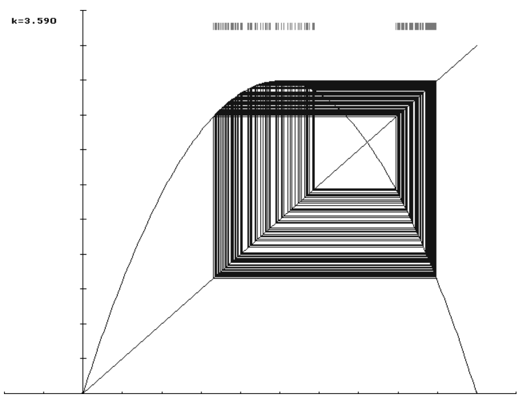


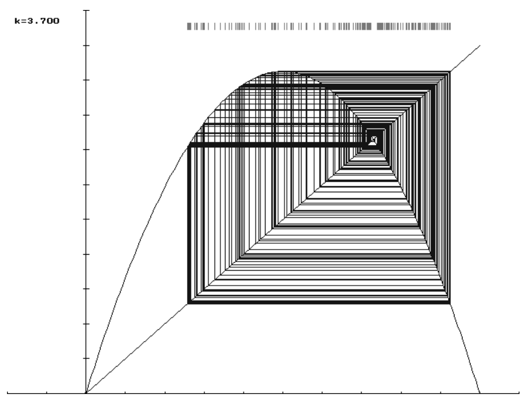


On peut trouver des valeurs pour lesquelles la suite tend à devenir 3-périodique ($k = 3,829$), 5-périodique ($k = 3,74$), 6-périodique ($k = 3.847$), 7-périodique ($k = 3.702$)...

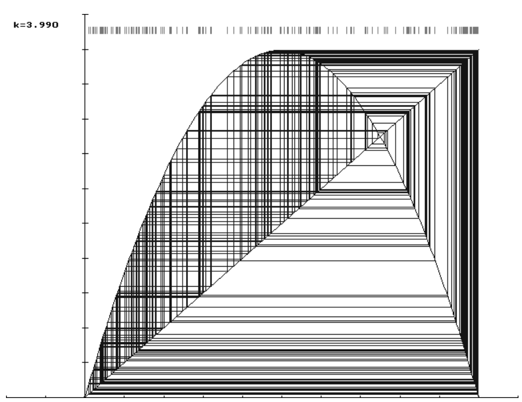
Et les doublements de période se rapprochent de plus en plus.

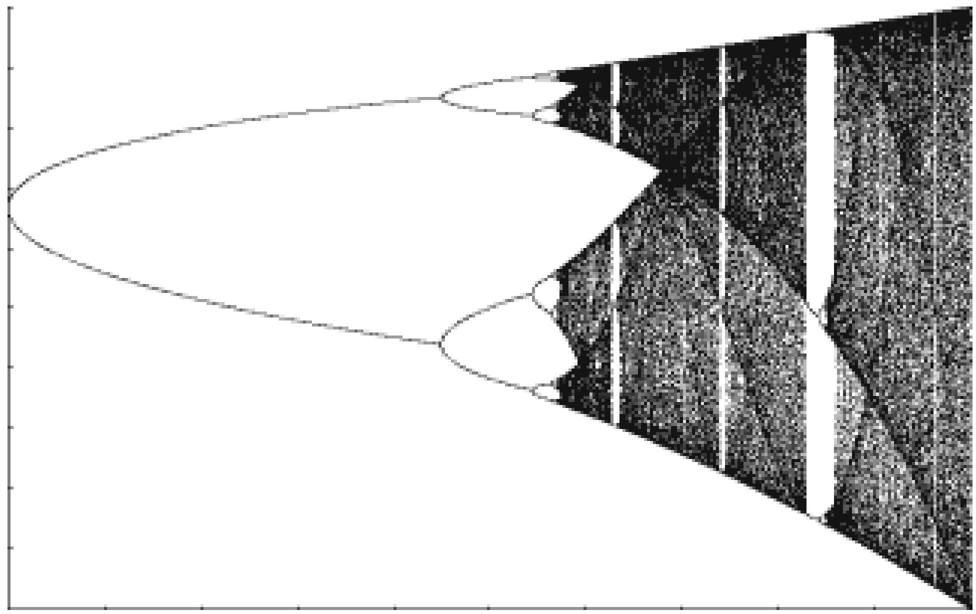
Pour $k = 3,59$ ou $k = 3.7$, les choses sont fort confuses...





Pour $k = 3,99$ le chaos est installé :





Valeurs d'adhérence de la suite logistique en fonction de k (pour $3 \leq k \leq 4$).

Le modèle à temps continu : équation de Verhulst. L'équivalent à temps continu du modèle logistique est l'équation différentielle de Verhulst : $y'(t) = a.y(t) - b.y(t)^2$, qui n'a d'intérêt en tant que modèle d'évolution de population que lorsque $a > 0$ et $b > 0$ et pour $t \geq 0$ et $y \geq 0$.

Si l'on écarte les deux solutions constantes : $y = 0$ et $y = r$ avec $r = \frac{a}{b} > 0$, on peut l'écrire :

$$\frac{y'(t)}{[r - y(t)]\,.y(t)} = a.$$

ou :

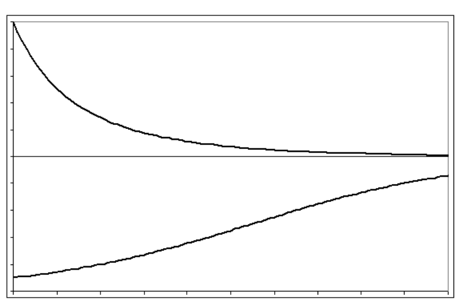
$$\frac{y'(t)}{y(t)} - \frac{y'(t)}{y(t) - r} = a \text{ d'où } \ln\left|\frac{y(t)}{y(t) - r}\right| = a.t + \gamma,$$

donc :

$$y(t) = \frac{r}{1 - \frac{1}{C}.e^{-a.t}}$$

où C est déterminé à partir de la condition initiale $y(0)$.

Le zéro $r = \dfrac{a}{b}$ est stable alors que 0 est instable :



ainsi,pour toute population de départ $y(0) > 0$, l'effectif $y(t)$ tend vers $r = \frac{a}{b}$ lorsque t tend vers l'infini.

7) En conclusion.

Les solutions du modèle à temps continu de Verhulst ont un comportement très simple et sont aisée à étudier, contrairement au modèle logistique à temps discret.

Notons cependant que certaines évolutions de population se prêtent à un modèle à temps discret (par exemple des insectes dont les oeufs éclosent au même moment, dont les larves muent au même moment...). Dans ce cas, on peut observer des évolutions effectivement décrites par le modèle à temps discret, y compris parfois un comportement chaotique...

De façon générale, on sait résoudre quelques équations différentielles, mais bien peu d'équations de récurrence. Cependant, pour résoudre numériquement une équation différentielle, on se ramène à des récurrences !

7 Un exemple en Chimie.

Considérons la réaction chimique : $A_2 + B_2 \rightarrow 2.AB$. Notons $a(t)$ la concentration de A_2, $b(t)$ la concentration de B_2 et $x(t)$ la concentration de AB. On a, bien sur : $a(t) + b(t) + x(t) = 1$.

Le taux de réaction étant $k \in]0;1[$, cela signifie que, dans le court intervalle de temps entre t et $t+h$, on a : $x(t+h) = x(t) + k.h.a(t).b(t) + o(h)$, soit :

$$x'(t) = k.a(t).b(t).$$

Or $a(t) = a(0) - \dfrac{x(t)}{2}$ et $b(t) = b(0) - \dfrac{x(t)}{2}$, soit en reportant, si $x(0) = 0$ et $0 < a(0) \leq b(0)$:

$$\left\{ x'(t) = k.\left[a(0) - \tfrac{x(t)}{2}\right].\left[b(0) - \tfrac{x(t)}{2}\right], x(0) = 0. \right. \tag{7}$$

En fait, cette équation revêt deux formes différentes selon que $a(0) = b(0)$ ou pas.

1. Si $0 < a(0) < b(0)$, il s'agit d'une équation de Verhulst de solution :

$$x(t) = 2a(0).b(0).\frac{e^{8[a(0)-b(0)].k.t} - 1}{a(0).e^{8[a(0)-b(0)].k.t} - b(0)}$$

   et $x(t)$ tend exponentiellement vers $2a(0)$.

2. Par contre, si $0 < a(0) = b(0)$, ce n'est plus une équation de Verhulst et sa solution change radicalement de forme :

$$\frac{x'(t)}{[2a(0) - x(t)]^2} = 4k.$$

   La solution vaut : $x(t) = 2a(0) - \dfrac{2a(0)}{8k.a(0).t + 1}$: elle tend vers $2a(0)$, mais beaucoup plus lentement !

Interpréter concrètement un tel phénomène est très difficile. Mais, en fait la réaction inverse : $2AB \to A_2 + B_2$ se produit également, bien qu'à un taux r très petit devant k, ce qui donne l'équation :

$$x'(t) = k.\left[a(0) - \frac{x(t)}{2}\right].\left[b(0) - \frac{x(t)}{2}\right] - r.x(t)^2$$

qui, elle reste toujours de Verhulst.

Nous avons donc dû revenir sur le modèle considéré, en le complexifiant, pour mieux tenir compte de la réalité.

Le modèle mathématique peut faire apparaître des artefacts, et il convient de tenir compte, à tout moment, de l'objet modéliser pour s'assurer qu'une particularité mathématique correspond bien à une réalité... Rien ne sert de scruter finement un phénomène sans lien avec une réalité tangible...

Les mathématiques pour la modélisation sont une science expérimentale à ne mettre en oeuvre qu'accompagné de spécialistes du domaine...

8 Pourquoi utilise-t-on de préférence des équations différentielles ?

Bien que la théorie des équations différentielles soit plus compliquée que celle des équations aux différences, bien que les hypothèses de modélisation que l'on doit faire soient souvent invérifiables, voire parfaitement fausses, on les utilise parce que le comportement de leurs solution est beaucoup plus simple et parce qu'elles rendent ainsi mieux compte de la réalité.

Notons cependant qu'en général on ne sait pas résoudre exactement une équation différentielle, ce qui fait que l'on va le faire numériquement, c'est à dire discrétiser le temps à nouveau...

Quelles sont les hypothèses de modélisation faites pour modéliser un phénomène par une équation différentielle ?

1. Le temps est modélisé comme continu.
2. La variation du phénomène dans le temps est dérivable.
3. La solution est une fonction indéfiniment dérivable du temps.

Voyons ce que cela donne pour une évolution de population :

1. L'objet modélisé (l'effectif de la population) peut être vu comme une fonction entière du temps, c'est à dire : de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{N}$.
2. Pour le modèle mathématique à temps continu, nous aurons besoin de le considérer comme une fonction dérivable de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$...
3. Pour résoudre effectivement, nous ferons ensuite un modèle numérique, en discrétisant le temps, c'est à dire que nous utiliserons une fonction de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{R}$.
4. Enfin, nous passerons sur un ordinateur, qui est une machine ayant un nombre FINI d'états et que nous utiliserons pendant un temps fini, c'est à dire que nous manipulerons finalement une fonction d'un sous-ensemble fini de $\mathbb{N}$ vers un sous-ensemble fini de $\mathbb{N}$!

Plus que jamais, il faut donc insister sur la nécessité absolue de confronter les résultats obtenus à la réalité...