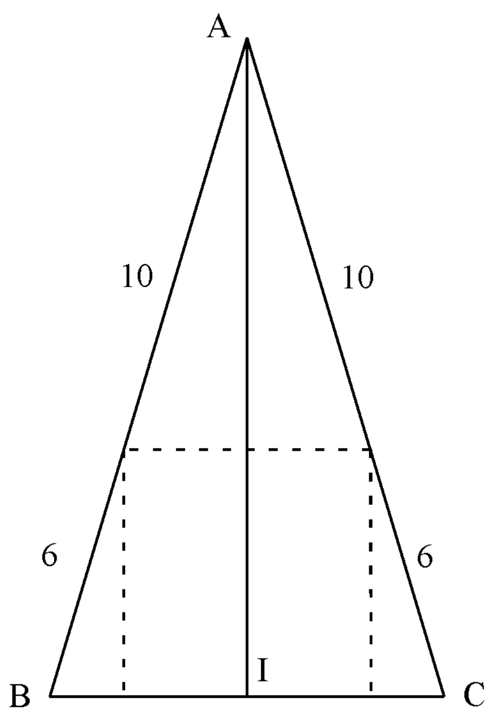
Un problème d'al-Khwârizmi

André Gramain

L'équipe PLOT a reçu un courrier d'André Gramain qui débute ainsi : « l'article *Un problème d'al-Khwâriz-mi en classe de 3ème* (PLOT n° 53) m'a tellement intéressé que j'ai cherché à approfondir ». *Voici un extrait de ses réflexions autour de ce problème du carré inscrit dans un triangle isocèle.*

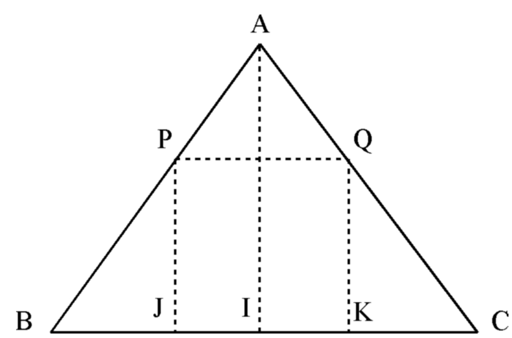
Voici le dessin qui apparaît dans le manuscrit arabe. J'ai ajouté les lettres A, B, C, I pour pouvoir m'exprimer à partir de cette figure.



L'énoncé commence ainsi : *Dans un triangle isocèle de base 12 coudées, on trace un terrain carré.*

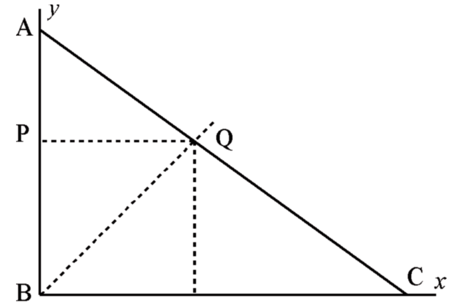
Premère remarque, si la base BC mesure 12 coudées, les nombres 6 du dessin désignent les longueurs des moitiés BI et IC de la base BC. On nous dira un peu plus loin que la hauteur du triangle mesure 8 coudées. Cela confirme que les côtés AB et AC mesurent 10 coudées comme indiqué sur la figure. En effet, les deux triangles rectangles ABI et ACI sont des doubles du triangle rectangle 3—4—5.

Comme tout mathématicien, je ne lis pas immédiatement la suite de l'article, mais je cherche à résoudre par moi-même le problème posé. Avant d'avoir toutes les données numériques, je note a la longueur inconnue du côté du carré cherché, b la longueur BC de la base du triangle et h la longueur de sa hauteur AI.



Puis je remarque qu'on ne change rien au problème en faisant une transvection[1] parallèle à la base BC. C'est-à-dire que le triangle ABC n'a pas besoin d'être isocèle. Pour les triangles ayant la même base et la même hauteur, le résultat sera le même.

Voici le dessin de mon nouveau problème :



[1] La transvection est un procédé utilisé à la Renaissance par Léonard de Vinci, par exemple pour déterminer le centre de gravité d'un tétraèdre irrégulier, ou plus généralement par Cavalieri et d'autres.

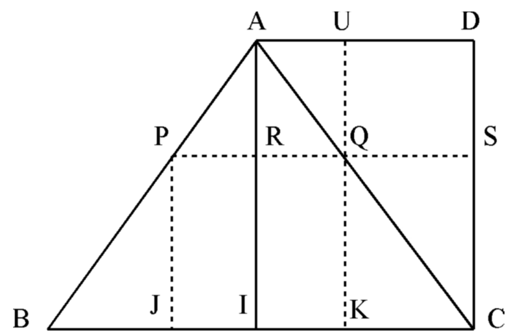
Le triangle ABC a conservé sa base et sa hauteur, mais il est devenu rectangle en B. Je prends des coordonnées x et y. Le sommet Q du carré cherché est sur la droite AC dont l'équation est $x/b + y/h = 1$, et sur la première bissectrice qui porte la diagonale du carré et dont l'équation est $x = y$. D'où la condition nécessaire et suffisante $a/b + a/h = 1$, ou encore $a = bh/(b + h)$.
Avec les données numériques en coudées, $b = 12$, $h = 8$, d'où
$a = 12 \times 8/(12 + 8) = 24/5 = 4{,}8$.

Au IX^{e} siècle, on n'utilisait pas les écritures à virgule. Al-Khwârizmi devait écrire le résultat 4 et 4/5. […]

Une alternative à creuser

Nos collègues ont trouvé dans le livre de Roshdi Rashed *al-Khwârizmî, le commencement de l'algèbre* (Albert Blanchard, Paris, 2007) une mention du même problème dans l'ouvrage *Geometrica* attribué à Héron d'Alexandrie. On ne donne pas la solution, mais le moyen de la calculer : le produit de la base par la hauteur divisé par leur somme. C'est bien ce que nous avons trouvé.

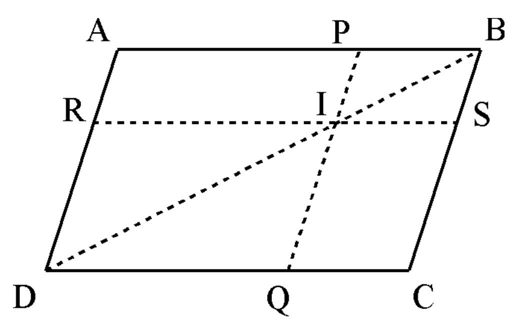
Pourquoi cela paraissait-il aussi évident à Héron et à son entourage ? Voici ce que j'en pense et comment j'imagine sa démonstration. Pour ce grand mathématicien, le livre des *Éléments* d'Euclide n'avait aucun secret. La proposition 43 du Livre premier est la suivante : *Dans tout parallélogramme, les compléments des parallélogrammes autour de la diagonale sont égaux entre eux*. […]
La démarche que je suppose être celle de Héron, c'est qu'au vu de cette figure, il reconnaît la figure familière de la proposition 43.



Les rectangles UQSD et RIKQ ont la même aire, et on peut donc remplacer le rectangle ARSD par le rectangle AIKU qui a la même aire, qui vaut $ha/2$. On en déduit finalement $bh = ab + ah$.

La proposition d'Euclide

C'est un exercice que l'on peut traiter au collège. La proposition affirme, avec les notations de la figure qui suit, que les parallélogrammes IRAP et ISCQ ont la même aire.



La diagonale DB partage le parallélogramme ABCD en deux triangles ayant la même aire (regarder base et hauteur). Chacun de ces deux triangles contient l'un de nos deux petits parallélogrammes. Et dans chacun de ces triangles, le complémentaire du petit parallélogramme est la réunion de deux triangles, IPB et IRD pour l'un, IBS et IDQ pour l'autre. Ces triangles ont deux à deux la même aire car ce sont des moitiés des parallélogrammes RIQD et SIPB.
[…]