Complément à l'article paru dans le Bulletin Vert n° 524

« Neper a-t-il vraiment inventé les logarithmes népériens ? »

auteur : André BONNET.

Annexe 1 : (extrait du bulletin vert de l'apmep n°299, juin 1975)

HISTOIRE ET LEGENDE

Histoire de la découverte des logarithmes

par Gilbert ARSAC, I.R.E.M. de Lyon.

1. Dans notre enseignement, et dans les mathématiques en général, la fonction logarithme apparaît sous deux formes :

— le logarithme décimal, que l'on trouve dans les "tables de logarithmes", est un outil pratique utilisé pour le calcul numérique ;

— le logarithme népérien, introduit en classe de terminale, est plutôt un outil théorique.

La même différence se retrouve dans les méthodes d'introduction de ces deux logarithmes : alors que le logarithme népérien s'introduit par des procédés théoriques, soit comme primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$, soit comme fonction inverse de la fonction exponentielle, le logarithme décimal peut être introduit de manière élémentaire, sinon rigoureuse, en comparant la progression géométrique de raison 10 avec la suite des nombres naturels, c'est-à-dire avec la progression arithmétique de raison 1, et cette méthode débouche naturellement et rapidement sur le calcul effectif d'une table de logarithmes.

Ecrivons en effet ces deux progressions parallèlement :

1	10	10^2	10^3	10^m	10^n	10^{m+n} ....
0	1	2	3	m	n	m+n ......

La formule $10^{m+n} = 10^m \times 10^n$ montre que ces deux suites de nombres possèdent la propriété suivante, appelée dans la suite de cet article propriété P, et vérifiée plus généralement lorsqu'on écrit en parallèle une progression géométrique et une progression arithmétique quelconques :

$$\begin{array}{llll} 1 & k & k^2\ldots\ldots & k^n\ldots\ldots \\ 0 & b & 2b\ldots\ldots & nb\ldots\ldots \end{array}$$

P : *Le produit de deux nombres de la première suite figure dans cette suite et a pour associé, dans la deuxième suite, la somme des associés des deux nombres de départ.*

(Dans cet énoncé, "l'associé" d'un nombre de la première suite désigne le nombre de la deuxième suite écrit en-dessous : l'associé de 10^n est n).

Par conséquent, si l'on appelle logarithme d'un nombre de la première suite son associé dans la deuxième, c'est-à-dire si l'on pose $\log 10^n = n$, on voit que l'on a :
$\log 10^n \times 10^m = \log 10^{n+m} = n+m = \log 10^n + \log 10^m$; cette égalité est l'amorce de la formule générale $\log xy = \log x + \log y$.

Ainsi, nous pouvons considérer le tableau de nombres que nous avons écrit comme une première table de logarithmes. Cette première table est rudimentaire car, d'une part les valeurs données à la variable (1;10;100) sont trop éloignées les unes des autres, et d'autre part les valeurs prises par la fonction (1,.. n) sont évidentes, autrement dit cette "table" peut être avantageusement remplacée par la simple formule : $\log 10^n = n$.

Pour améliorer le résultat, il faut pouvoir donner à la variable des valeurs plus rapprochées. On y parvient, dans une première étape, en insérant, entre deux nombres consécutifs de la première progression, leur moyenne géométrique, et, entre deux nombres consécutifs de la deuxième, leur moyenne arithmétique. On obtient ainsi deux suites :

$$\begin{array}{lllllllll} 1 & \sqrt{10} & 10 & (\sqrt{10})^3 & 10^2\ldots & 10^m & (\sqrt{10})^{2m+1} & 10^{m+1}\ldots. \\ 0 & 1/2 & 1 & 3/2 & 2 & m & m+\frac{1}{2} & m+1 \end{array}$$

Ces deux suites, qui sont simplement la progression géométrique de raison $\sqrt{10}$ et la progression arithmétique de raison $\frac{1}{2}$, possèdent encore la propriété P, ce qui exprime que la règle $10^{m+n} = 10^m \times 10^n$ est encore valable si m et n sont remplacés par des nombres de la forme $^p/2$ où p est naturel. Si nous définissons encore le logarithme d'un nombre de la première suite comme étant son associé dans la deuxième, la formule $\log xy = \log x + \log y$ est toujours vérifiée grâce à la propriété P et nous avons donc obtenu une deuxième table de logarithmes plus précise que la première.

En itérant ce procédé, on obtient évidemment des tables de logarithmes de plus en plus précises ; les valeurs prises par la variable, c'est-à-dire les nombres de la première suite, sont de plus en plus rapprochées et autorisent le calcul par interpolation du logarithme des nombres ne figurant pas dans la première suite.
Par exemple, à l'étape suivante, on obtient les suites :

$$\begin{array}{ccccc} 1 & \sqrt[4]{10} & \sqrt{10} & (\sqrt[4]{10})^3 & 10\dots \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & 1\dots \end{array}$$

d'où $\log \sqrt[4]{10} = \frac{1}{4}$ et $\log \sqrt{10} = \frac{1}{2}$.

Prenons pour valeurs approchées :

$\sqrt[4]{10} \approx 1{,}78$ et $\sqrt{10} \approx 3{,}16$; ainsi on a :

$\log 1{,}78 \approx 0{,}25$ et $\log 3{,}16 \approx 0{,}5$

On en déduit par interpolation une valeur approchée de $\log 2$:

$$\log 2 \approx 0{,}25 + \frac{0{,}5 - 0{,}25}{3{,}16 - 1{,}78} \times (2 - 1{,}78)$$

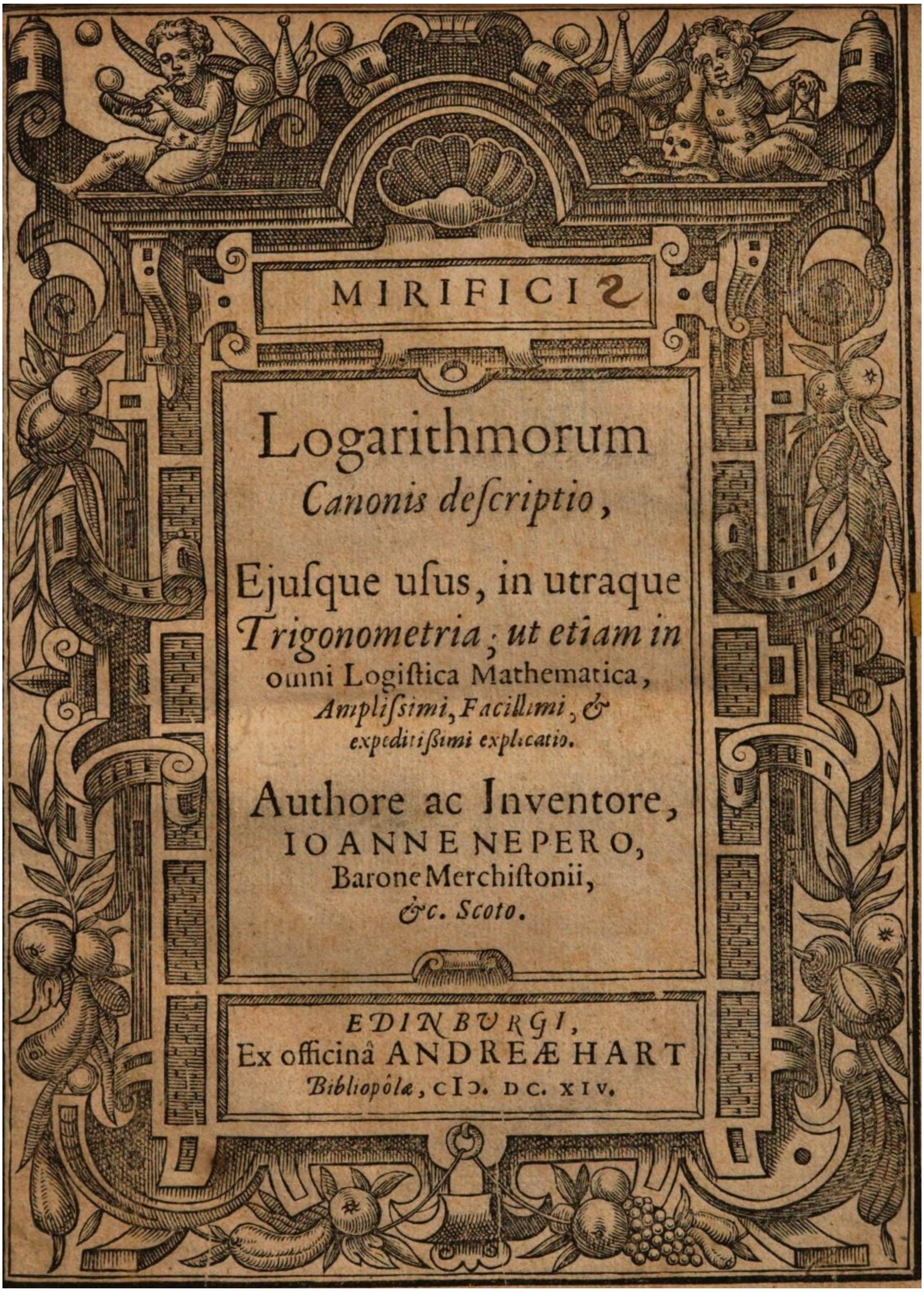
C'est-à-dire : $\log 2 \approx 0{,}29$

(la valeur approchée à $\frac{1}{10}$ près est en réalité 0,30).

2. C'est par cette méthode que le mathématicien anglais BRIGGS put calculer sa table de logarithmes décimaux à 15 décimales publiée en 1624 : il avait répété plus de cinquante fois l'opération précédente, c'est-à-dire que la première de ses deux suites était la progression géométrique de raison $10^{1/2^{54}}$.

Les outils mathématiques nécessaires au travail de BRIGGS, à vrai dire essentiellement des techniques de calcul, étaient disponibles à la fin du XVIème siècle. La propriété P avait été signalée par CHUQUET en 1484 puis, indépendamment, par STIFEL en 1544 ; ce dernier l'avait même étendue aux exposants fractionnaires et aux exposants négatifs. Il ne faut pas croire qu'il s'agissait d'une remarque banale : la simplicité de la formule qui l'exprime actuellement ($10^{m+n} = 10^m \times 10^n$) tient à l'emploi de la notation exponentielle 10^n, et de la notation littérale qui désigne par m et n des nombres quelconques ; ces deux inventions sont postérieures à la découverte de la propriété P. On peut même noter, pour la petite histoire, que le signe = est, lui aussi,

Annexe 2 : (page de garde de l'ouvrage de Néper publié en 1614)



MIRIFICI

Logarithmorum
Canonis deſcriptio,

Ejuſque uſus, in utraque
Trigonometria; ut etiam in
omni Logiſtica Mathematica,
Amplisſimi, Facillimi, &
expeditisſimi explicatio.

Authore ac Inventore,
IOANNE NEPERO,
Barone Merchiſtonii,
&c. Scoto.

EDINBURGI,
Ex officinâ ANDREÆ HART
Bibliopôlæ, CIↃ. DC. XIV.

Annexe 3 : (Extrait de la table concernant les arcs de 44° à 44° 30’)

Gr. 44

+ | —

44 min	Sinus	Logarithmi	Differentiae	Logarithmi	Sinus	
0	6946584	3643349	349136	3294213	7193398	60
1	6948676	3640338	343315	3297023	7191377	59
2	6950767	3637329	337494	3299835	7189355	58
27	7002866	3562656	191997	3370659	7138618	33
28	7004942	3559691	186178	3373513	7136581	32
29	7007018	3556728	180359	3376369	7134543	31
30	7009093	35537[illegible]7	174541	3379226	7132504	30

45

Annexe 4 : (La traduction en anglais de Descriptio, datant de 1619)

A DESCRIPTI-
ON OF THE ADMIRABLE TABLE OF LOGARIHMES, WITH THE MOST PLEN- TIFVL, EASIE, AND READY

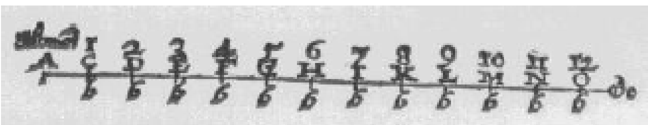
Vse thereof in both kindes of *Trigonometrie, as also in all Mathematicall Account.*

THE FIRST BOOKE.

CHAP. I.
Of the Definitions.

I. Definition.

A line *is said to increase equally, when the poynt describing the same, goeth forward equall spaces, in equall times, or moments.*



Let A be a poynt, from which a line is to be drawne by the motion of another poynt, which let be B.
Now in the first moment, let B moue from

[pag. 2]

A to C. In the second mement form C to D. In the third moment from D to E, & so forth infinitely, describing the line

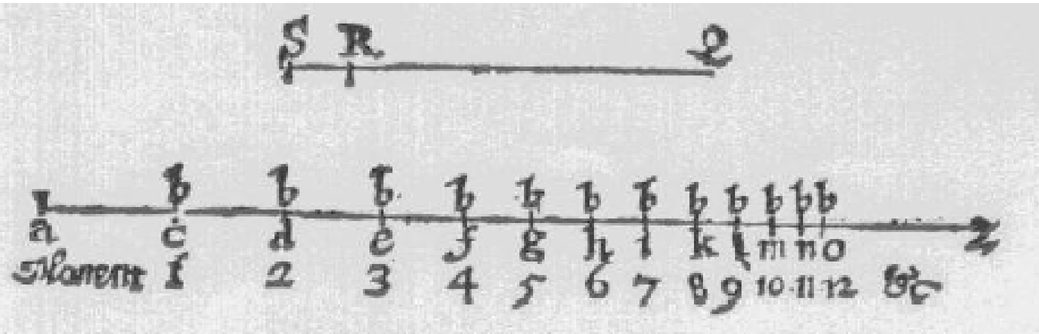
ACDEF, &c. The spaces AC, CD, DE, EF, &c. And all the rest being equall, and described in equall moments (or times.) This line by the former definition shall be said to increase equally.

A Corollary or consequent. *Therefore by this increasing, quantities equally differing, must needes be produced, in times equally differing.*

As in the Figure before, B went forward from A to C in one moment, and from A to E in three moments. So in sixe moments from A to H: and in 8 moments from A to K. And the differences of those moments, one and three, and of these 6 and 8 are equall, that is to say two.

So also of those quantities AC, and AE, and of these, AH, and AK, the differences CE, and HK are equall, and therefore differing equally, as before.

2. Definition. *A line is said to decrease proportionally into a shorter, when the poynt describing the same in æquall times, cutteth off parts continually of the same proportion to the lines from which they are cut off.*



For examples sake. Let the line of the whole sine *a*Z be to bee diminished proportionally: let the poynt diminishing the same by his

[pag. 3]

motion be *b*: and let the proportion of each part to the line from w^ch it is cut off, be as QR to QS. Therefore in what proportion QS is cut in R, in the same proportion (by the 10 of the 6 of *Euclide*) Let *a*Z be cut in *c*. and so let *b* running from *a* to *c* in the first moment, cut off *ac* from *a*Z, the line or sine *c*Z remaining.

And from this *c*Z let *b* proceeding in the second moment, cut off the like segment, or part, as QR to QS: and let that bee *cd*, leauing the sine. *d*Z. From which therefore in the third moment, let *b* in like manner, cut off the segment *de*, the sine *e*Z being left behinde. From which likewise in the fourth moment, by the motion of *b*, let the segment *cf* be cut off, leauing the sine *f*Z. From this *f*Z in the fifth moment, let *b* in the same proportion cut off the segment *fg*, leauing the sine *g*Z, and so forth infinitly. I say therfore out of the former definition, that here the line of the whole sine *a*Z, doth proportially decrease into the signe *g*Z, or into any other last sine, in which *b* stayeth, and so in others.

Hence it followeth that by this decrease in equall moments (or times) there must needes also bee left proportionall lines of the same proportion. A Corolary.

For what continuall proportion there is before of the sines to be diminished, *a*Z, *c*Z, *d*Z, *e*Z, *f*Z, *g*Z, *h*Z, *i*Z, and *k*Z, &c. and of the segments cut off from them *ac, cd, de, ef, fg, gh, hi*, and *ik*, there must needes be also the same proportion of the sines remaining, that is, *cz, dz, ez, fz, gz, hz, iz*, and *kz*, as may manifestly appeare

---

[pag. 4]

by the 19 *Prop*. 5 and 11. *Prop*. 7, *Euclid*.

3. Def. *Surd quantities, or vnexplicable by number, are said to be defined, or*

expressed by numbers very neere, when they are defined or expressed by great numbers which differ not so much as one vnite from the true value of the Surd quantities.

As for example. Let the semidiameter, or whole sine be the rational number 10000000 the sine of 45 degrees shall be the square root of 50,000,000,000,000, which is surd, or irrationall and inexplicable by any number, & is included between the limits of 7071067 the lesse, and 7071068 the greater: therfore, it differeth not an vnite from either of these. Therefore that surd sine of 45 degrees, is said to be defined and expressed very neere, when it is expressed by the whole numbers, 7071067, or 7071068, not regarding the fractions. For in great numbers there ariseth no sensible error, by neglecting the fragments, or parts of an vnite.

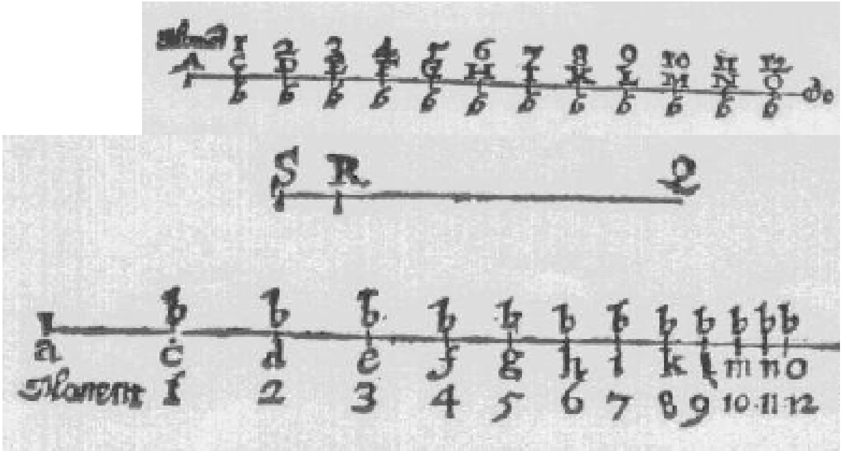
4. Def. *Equall-timed motions are those which are made together, and in the same time.* As in the figures following, admit that B be moued from A to C, in the same time, wherin *b* is moued from *a* to *c* the right lines AC & *ac*, shall be sayd to be described with an equall-timed motion.

5. Def. *Seeing that there may bee a slower and a swifter motion giuen then any motion, it shall necessarily follow, that there may be a motion giuen of equall swiftnesse to any motion (which wee define to be neither swifter nor slower.)*

6. Def. *The* Logarithme *therfore of any sine is a number very neerely expressing the line, which increased*

[pag. 5]

equally in the meane time, whiles the line of the whole sine decreased *proportionally into that sine, both motions being equal-timed, and the beginning equally swift.*



As for example. Let the 2 figures going afore bee here repeated, and let B bee moued alwayes, and euery where with equall, or the same swiftnesse wherewith *b* beganne to bee moued in the beginning, when it was in *a*. Then in the first moment let B proceed from A to C, and in the same time let *b* moue proportionally from *a* to *c*, the number defining or expressing AC shal be the *Logarithme* of the line, or sine *c*Z. Then in the second moment let B bee moued forward from C to D. And in the same moment or time let *b* be moued proportionally from *c* to *d*, the number defining AD, shall be the *Logarithme* of the sine *d*Z. So in the third moment let B go forward equally from D to E, and in the same moment let *b* be moued forward proportionally from *d* to *e*, the number expressing AE the *Logarithme* of the sine *e*Z. Also in the fourth moment, let B proceed

---

[pag. 6]

to F, and *b* to *f*, the number AF shall be the *Logarithme* of the sine *fz*. And keeping the same order continually (according to the former definition) the number of AG shall be the *Logarithme* of the sine *gz*. AH the *Logarithme* of the sine *hz*. AI the *Logarithme* of the sine *iz*. AK the *Logarithme* of the sine *kz*, and so forth infinitely,

A cosequet.

Therefore the Logarithme of the whole sine 1000000 is nothing, or 0; and consequently the Logarithms of numbers greater then the whole sine, ar lesse then nothing.

For seeing it is manifest by the definition, that the sines decreasing from the whole sine, the *Logarithmes* increase from nothing: therfore contrariwise the numbers which yet we call Sines, increasing vnto the whole sine, that is to 10000000, the *Logarithmes* must needs decrease to 0 or nothing: and by consequent the *Logarithmes* of numbers increasing aboue the whole sine 10000000, which we call *Secants*, or *Tangents*, and no more sines, shall be lesse then nothing.

Therefore we call the Logarithmes of the sines Abounding, because they are always greater then nothing, and set this marke + before them, or else none. But the Logarithmes which are lesse then nothing, we cal Defectiue, or wanting, setting this marke - before them.

It was indeed left at libertie in the beginning, to attribute nothing, or 0. to any sine or quantitie for his Logarithme: but it was best to fit it to the whole sine, that the Addition or Substraction of that Logarithme which is most frequent in all Calculations, might neuer after be any troubel to vs.

Annexe 5 : (Une application des logarithmes à la résolution d’un triangle, au début du livre II)

Rectilineum aut rectangulū eſt, aut obliquangulum.

In rectangulis crura vocamus, quæ rectum angulum ambiunt : hypotenuſam, quæ ſubtendit.

Prop. 2. *In rectangulo Logarithmus cruris æquatur aggregato ex Logarithmo anguli ei oppoſiti, & Logarithmo hypotenuſæ.*

Quum ex Trigonometriæ principiis pateat, alterutrumvis crus ſe habere ad ſinū anguli ei oppoſiti, ut hypotenuſa ad ſinum totum : & (per prop. 5. cap. 2. lib. 1.) horū quatuor proportionaliū logarithmi ſecundi & tertii æquētur logarithmis primi & quarti : quarti autē Logarithmus ſit o, ſeu nihil (per collarium 6. def. cap. 1. lib. 1.) Ideo (ut ſupra) Logarithmus cruris æquatur aggregato ex Logarithmo anguli quem ſubtendit, & Logarithmo hypotenuſæ.

Corol. *Unde hypotenuſæ, cruris, & anguli quem ſubtendit, duobus quibuſcunque datis, tertium, atque inde reliquæ omnes rectanguli partes innoteſcent.*

Quia enim hæc tria cum ſinu toto conſtituunt quatuor proportionalia, certum eſt eorum quodvis quarto loco poſſe conſtitui, & per 3. probl. cap. 5. lib. 1. acquiri.

Vt trianguli oblati A.B.C. in A rectanguli, detur hypotenuſa B.C. 9385, cum crure A B 9384. Quæruntur anguli obliqui C. & B. Ex Logarithmo igitur A.B. 635870——000, aufer Logarithmum B C. 634799——000. Superſunt 1071 Logarithmus anguli C, cui in tabula reſpondent 89 g. $9\frac{3}{4}$ pro angulo C. & ex adverſo o g. $56\frac{1}{4}$ pro ejus complemento, angulo ſcilicet B.

Vice

Explications :

Le triangle ABC est rectangle en A ; on connait : l’hypoténuse $BC = 9385$ et le côté $AB = 9384$, on cherche à déterminer les angles $\hat{B}$ et $\hat{C}$ et le côté AC.

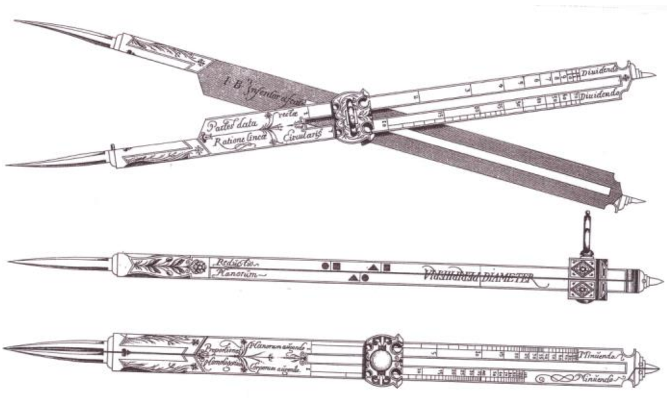
Neper utilise la relation de proportionnalité : $\dfrac{Sin(\hat{C})}{10^7} = \dfrac{AB}{BC}$

qui donne : $$Nlog\left(Sin(\hat{C})\right) - Nlog(10^7) = Nlog(AB) - Nlog(BC)$$

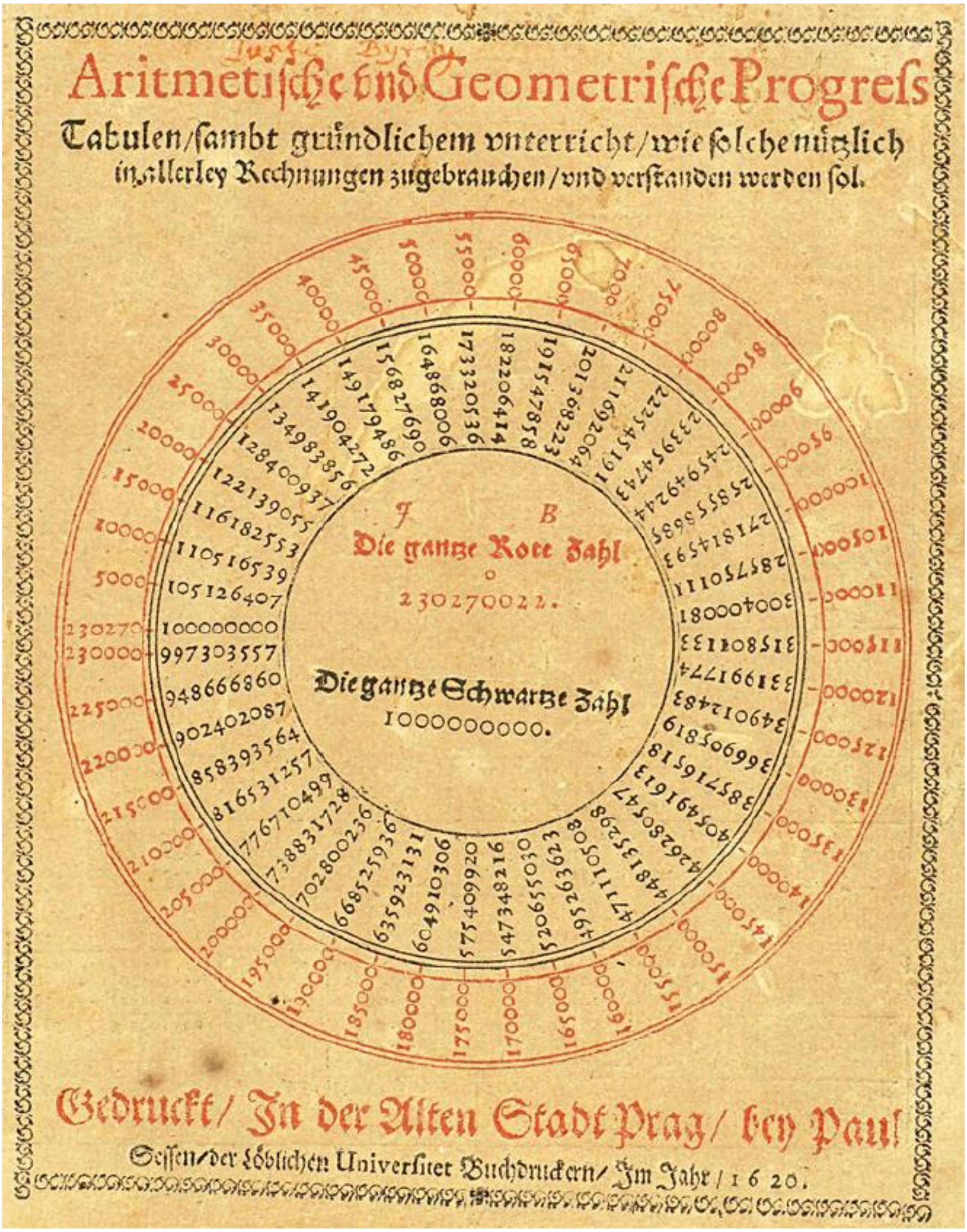
or le logarithme du sinus total est nul ; donc : $Nlog\left(Sin(\hat{C})\right) = Nlog(AB) - Nlog(BC)$.

La détermination de $\hat{C}$ se fait par une lecture de la table et $\widehat{B}$ est le complémentaire de $\hat{C}$ …

Annexe 6 : (Deux très belles réalisations de Bürgi et deux compas de proportions de sa fabrication, le troisième est attribué à Galilée)

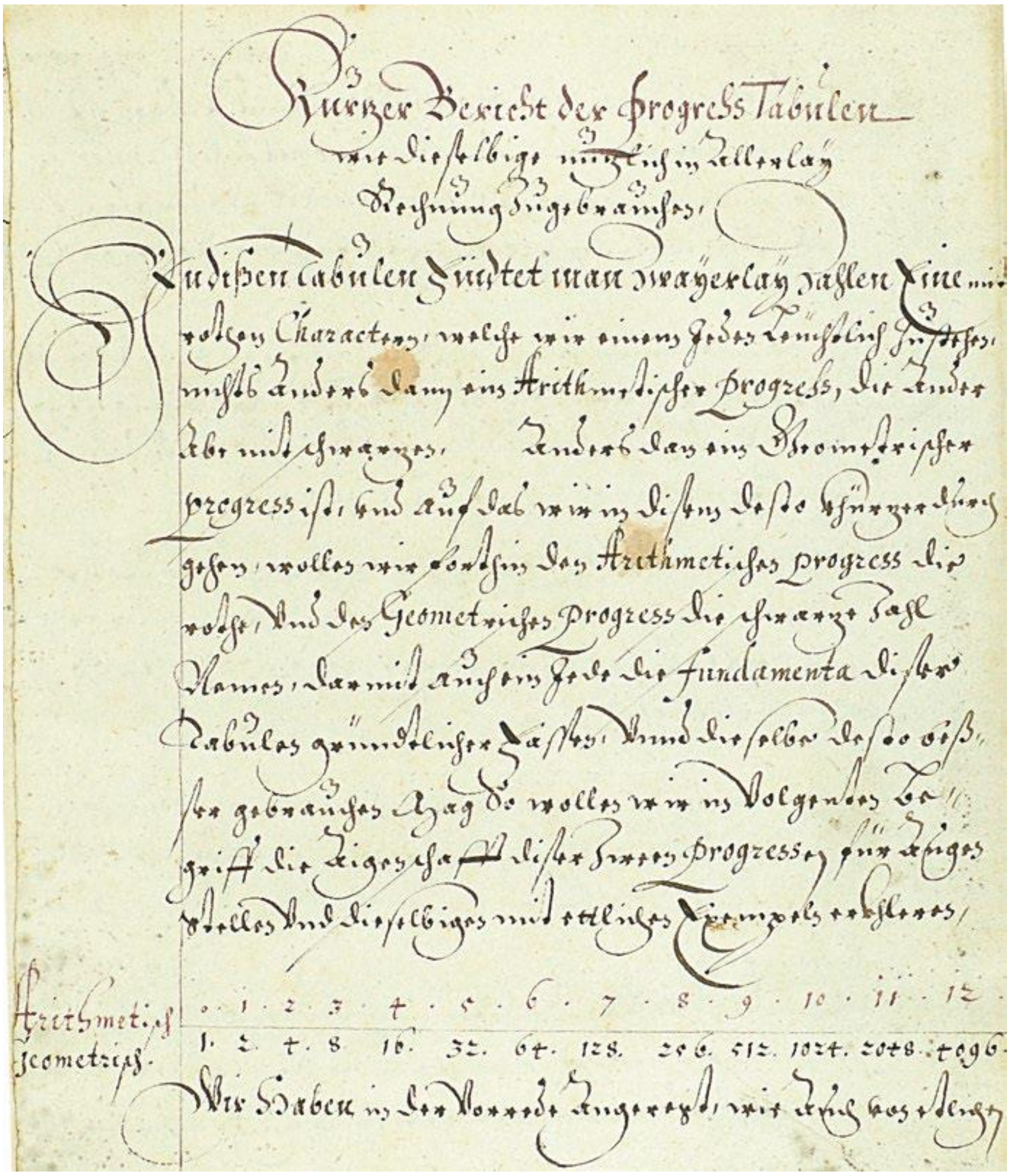


Annexe 7 : (page de garde et première page des tables de Bürgi, édition de 1620)



	0	500	1000	1500	2000	2500	3000	3500
0	100000000	100501227	101004966	101511230	102020032	102531384	103045299	103561790
10	····10000	····11277	····15067	····21381	····30234	····41637	····55603	····72146
20	····20001	····21328	····25168	····31524	····40437	····51891	····65909	····82502
30	····30003	····31380	····35271	····41687	····50641	····62146	····76216	····92861
40	····40006	····41433	····45374	····51841	····60846	····72402	····86523	103603221
50	····50010	····51487	····55479	····61996	····71052	····82660	····96832	····13581
60	····60015	····61543	····65584	····72153	····81259	····92918	103107142	····23942
70	····70021	····71599	····75691	····82309	····91467	102603177	····17452	····34305
80	····80028	····81656	····85799	····92468	102101676	····13438	····27764	····44668
90	····90036	····91714	····95907	101602627	····11887	····23699	····38077	····55033
100	100100045	100601773	101106017	····12787	····22098	····33961	····48391	····65395
110	····10055	····11834	····16127	····22949	····32310	····44225	····58705	····75765
120	····20066	····21895	····26239	····33111	····42523	····54489	····69021	····86132
130	····30078	····31957	····36352	····43274	····52738	····64755	····79338	····96501
140	····40091	····42020	····46465	····53438	····62953	····75021	····89656	103706871
150	····50105	····52084	····56580	····63604	····73169	····85289	····99975	····17241
160	····60120	····62150	····66696	····73770	····83386	····95557	103210295	····27613
170	····70136	····72216	····76812	····83938	····93605	102705827	····20616	····37986
180	····80153	····82283	····86930	····94106	102203824	····16097	····30932	····48360
190	····90171	····92351	····97049	101704275	····14045	····26369	····41261	····58734
200	100200190	100702420	101207168	····14446	····24266	····36642	····51585	····69110
210	····10210	····12491	····17289	····24617	····34488	····46915	····61910	····7[illegible]47
220	····20231	····22562	····27411	····34790	····44712	····57190	····72237	····85865
230	····30253	····32634	····37533	····44963	····54936	····67466	····82564	103800244
240	····40276	····42707	····47657	····55138	····65162	····77742	····92892	····10624
250	····50300	····52782	····57782	····65313	····75388	····88020	103303221	····21005
260	····60325	····62857	····67908	····75490	····85616	····98299	····13552	····31387
270	····70351	····72933	····78035	····85667	····95845	102808579	····23883	····41770
280	····80378	····83011	····88162	····95846	102306074	····18860	····34216	····52155
290	····90406	····93189	····98291	101806025	····16305	····29142	····44549	····62540
300	100300435	100803168	101308421	····16206	····26536	····39425	····54883	····72926
310	····10465	····13248	····18552	····26387	····36769	····49708	····65219	····83313
320	····20496	····23330	····28684	····36570	····47003	····59993	····75555	····93702
330	····30528	····33412	····38817	····46754	····57237	····70279	····85893	103904091
340	····40562	····43496	····48950	····56939	····67473	····80566	····96232	····14481
350	····50596	····53580	····59085	····67124	····77710	····90855	103406571	····24873
360	····60631	····63665	····69221	····77311	····87947	102901144	····16912	····35265
370	····70667	····73752	····79358	····87499	····98186	····11434	····27254	····45659
380	····80704	····83839	····89496	····97687	102408426	····21725	····37596	····56053
390	····90742	····93927	····99635	101907877	····18667	····32017	····47940	····66449
400	100400781	100904017	101409775	····18068	····28909	····42310	····58285	····76846
410	····10821	····14107	····19916	····28262	····39152	····52604	····68631	····87243
420	····20862	····24199	····30058	····38453	····49396	····62900	····78978	····9[illegible]642
430	····30904	····34291	····40201	····48646	····59641	····73196	····89326	104008042
440	····40948	····44384	····50345	····58841	····69887	····83493	····99674	····18443
450	····50991	····54479	····60489	····69037	····80133	····93792	103510024	····28844
460	····61037	····64574	····70636	····79234	····90381	103004091	····20375	····39247
470	····71083	····74671	····80783	····89432	102500630	····14191	····30727	····49651
480	····81130	····84768	····90931	····99631	····10880	····24693	····41080	····60056
490	····91178	····94867	101501080	102009831	····21132	····34995	····51435	····70462
500	100501227	101004966	····11250	····20032	····31384	····45299	····61790	····80816

Annexe 8 : (Les deux premières pages du facsimilé du manuscrit de Bürgi)



Arithmeticis Simon Jacob, Moritius Zons, Unnd Andern ist
erzeigt worden, daß was in den Geometrischen Progressen
oder in der Schwartzen Zahl Multipliciert, daß selbig ist
in den Arithmetischen Progressen oder in der Rothen Zahl
Addiren.

Deßen zum Exempel man soll Multipliciren. 8. mit 64. die
Rothe Zahl von. 64 ist 6. Und von 8. ist 3. der Summa ist 9.
den 6 Unnd 3 ist dessen Schwartze Zahl ist 512. Und soviel
Kombt auch so man 8 mit 64 Multiplicirt,

Item man soll Multipliciren. 32. mit 256. Ihre Rothe
Zahlen seindt. 5 und 8. Thut zusamen. 13 dessen schwartze
Zahl ist. 8192 Und so viel kombt so man. 32. mit 256.
Multiplicirt,

Item man soll Dividiren. 16384. durch. 512 Ihr Rote Zahl
seindt. 14 Und 9 Subtrahir den wenigen 9 von 14 bleibt 5 seine
schwartze Zahl ist 32 Und soviel kombt. 16384 durch. 512
Dividiert.

Weilen den die Regula detri nicht anders als Multipliciren
und dividiren bedarff, so volgt daß die Regula detri auch
fürderlich durch diese Tabulen verrichtet mögen werden Alß
Zum Exempel,