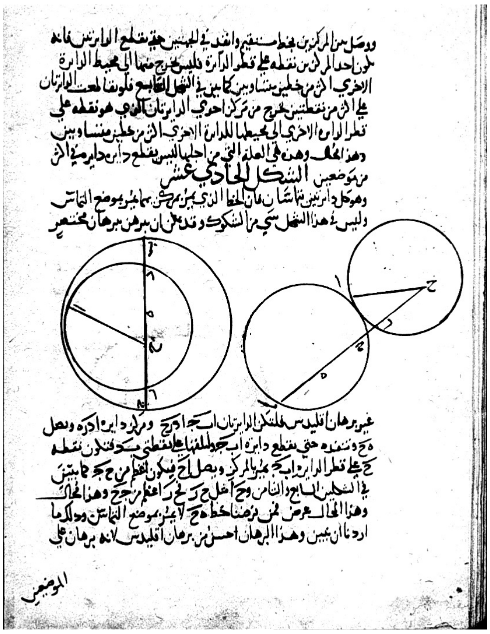
Quelques aspects des mathématiques arabes

Ahmed Djebbar

La géométrie

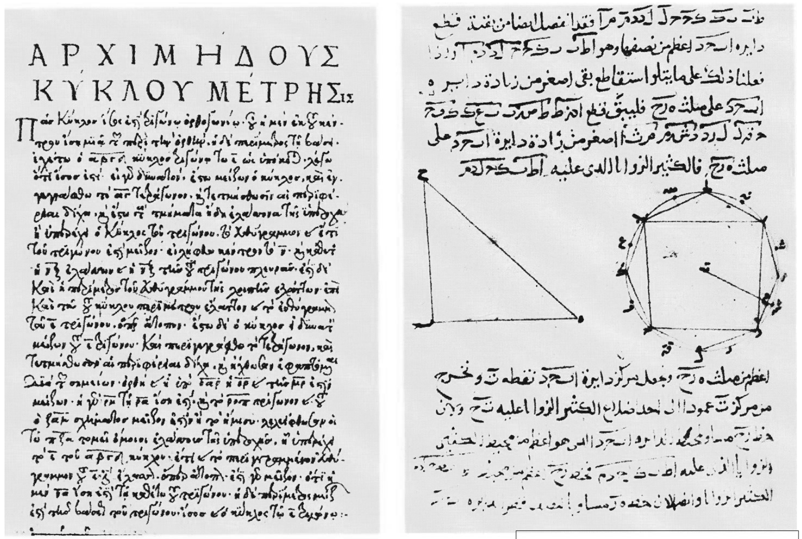
À partir d'un double héritage, local pour les aspects pratiques et essentiellement grec pour les aspects théoriques, la géométrie a connu, à partir de la fin du VIII$^{\text{ème}}$ siècle, un véritable renouveau, d'abord au centre de l'empire musulman puis dans les foyers scientifiques de sa périphérie. Tous les chapitres connus de cette discipline ont été étudiés et de nouvelles pistes ont été explorées.

Il y a eu d'abord une relecture « *innovante* » de certains Livres des *Eléments* d'Euclide. Cela a permis d'aboutir à une arithmétisation de fait des grandeurs incommensurables du Livre X permettant une manipulation, beaucoup plus souple, des grandeurs irrationnelles quadratiques et leur assimilation à des nombres. Dans la lancée, on a reformulé le concept de rapport du Livre V et, sous les effets conjugués de l'astronomie et du calcul, la nécessité s'est imposée d'étendre la notion de nombre à ce que nous appelons aujourd'hui les « *réels positifs* ».



Le second domaine de la géométrie a concerné les figures géométriques, avec l'étude de leurs propriétés, leur construction éventuelle et les problèmes d'existence qui en découlent. En relation avec le développement de l'algèbre, certaines tentatives de résolution de ces problèmes ont favorisé l'apparition de nouvelles orientations. Cela a commencé avec la recherche de solution à des questions partiellement résolues par les Grecs. Ce fut le cas de la proposition IV du Livre II de *la Sphère et du cylindre* d'Archimède qui consiste à couper une sphère en deux parties dont le rapport des volumes est donné. Dans la même catégorie, il y avait la multisection d'un angle, la construction de l'heptagone ou de l'ennéagone et, d'une manière générale, tous les problèmes qui, lorsqu'ils étaient algébrisés —et c'était là une démarche innovante— fournissaient une équation du 3$^{\text{ème}}$ ou du 4$^{\text{ème}}$ degré. Ces différentes investigations ont amené les mathématiciens à élargir de fait la notion d'existence géométrique ou algébrique par l'utilisation d'outils autres que le cercle et la droite des constructions euclidiennes : ce sont les sections coniques dont l'étude avait été faite plus de mille ans auparavant par Apollonius (III$^{\text{ème}}$ s. av. J.C.).

Une autre orientation en géométrie a concerné l'étude des courbes. Elle a été inaugurée par les travaux de Thâbit Ibn Qurra (m. 901) sur les ellipses, d'as-Sijzî (X$^{\text{ème}}$ s.) sur les hyperboles et, surtout, ceux d'Ibn al-Haytham (m. 1041) et d'Ibn Sayyid (XI$^{\text{ème}}$ s.) sur des courbes nouvelles. Ces dernières, appelées aujourd'hui « *courbes de degré supérieur à 2* », devaient servir à résoudre des problèmes qui s'exprimeraient aujourd'hui sous forme d'équations de degré supé-



Des grecs aux arabes…

rieur à 3.

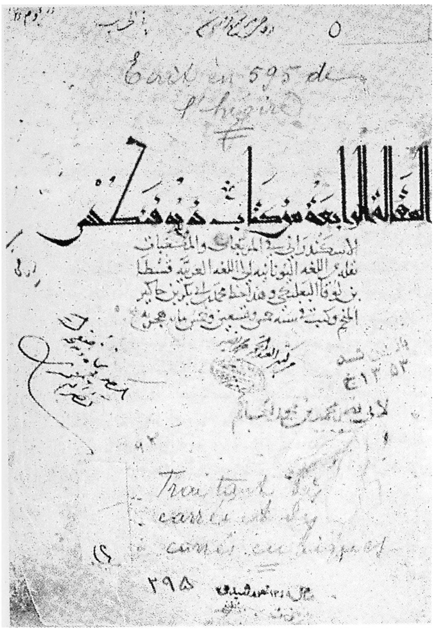
Une troisième orientation a puisé ses racines dans les méthodes d'Archimède (m. 212 av. J.C.) que l'on qualifie aujourd'hui « *d'infinitésimales* ». Il s'agit de déterminer une aire ou un volume par la méthode « *d'exhaustion* », c'est-à-dire par la technique d'encadrement d'une surface ou d'un solide donnés, par des rectangles ou des parallélépipèdes dont on connaît l'aire ou le volume. La première contribution arabe, relativement modeste, se trouve dans l'ouvrage des frères Banû Mûsâ (IXème s.), intitulé « *Livre sur la détermination des surfaces des figures planes et sphériques* ». Mais les résultats les plus novateurs ont été publiés à la fin du IXème siècle par Thâbit Ibn Qurra, au Xème par Ibn Sinân et al-Kûhî, au XIème par Ibn al-Haytham. Ils ont concerné le calcul de l'aire d'une portion de parabole, du moment d'inertie d'une barre homogène et des volumes de portions de paraboloïde sphérique ou de révolution. Les démarches suivies pour résoudre ces problèmes sont des adaptations ou des perfectionnements de celles d'Archimède.

En relation avec la géométrie, il faudrait également évoquer les réflexions nouvelles qui ont concerné les fondements et les outils de cette discipline, au sens où les entendaient les mathématiciens et les philosophes grecs. De nombreux travaux ont été consacrés au fameux postulat des parallèles (5ème postulat du Livre I des *Eléments* d'Euclide). Les mathématiciens les plus éminents y ont apporté leur pierre : an-Nayrîzî et Ibn Qurra au IXème, Ibn al-Haytham et ʿUmar al-Khayyâm au XIème, Nasîr ad-Dîn at-Tûsî au XIIIème pour ne citer que les plus importants. Comme on le sait, les tentatives de ces chercheurs étaient vouées à l'échec. Mais, replacées dans le lent processus d'élaboration des fondements des mathématiques, elles ont constitué une étape nécessaire qui a d'ailleurs préparé la voie à celles de Lambert et de Saccheri.

En relation avec un des aspects délicats du postulat des parallèles, celui de l'infini, des réflexions ont été développées à la fois par les philosophes et par les géomètres. Une des contributions de ces derniers mérite d'être signalée : l'introduction du mouvement dans la définition d'objets géométriques et même dans l'établissement de résultats. Il y eut, sur cette question, deux camps bien distincts : les partisans de la pensée aristotélicienne qui s'interdisaient l'utilisation du mouvement et ceux qui considéraient qu'on pouvait le faire à condition de prendre quelques précautions pour assurer la « *non déformation* » des objets.

La théorie des nombres

Dans ce domaine, les sources sont exclusivement grecques : Les Livres VII, VIII, IX des *Eléments* d'Euclide, l'*Introduction arithmétique* de Nicomaque (IIème s.) et les *Arithmétiques* de Diophante (IIème s.) dont une partie seulement a été traduite en arabe. Il n'est donc pas étonnant qu'à partir de cet héritage de nouvelles orientations se soient dessinées. La première a concerné les nombres premiers. Quelques écrits originaux sur ce thème nous sont parvenus : celui d'Ibn Qurra sur les nombres amiables, celui d'Ibn al-Haytham (m. 1041) sur le problème des restes dont une version sera connue, plus tard, sous le nom de « *théorème de Wilson* », et celui d'al-Fârisî (m. 1319) sur la décomposition d'un entier en produit de facteurs premiers.



La seconde orientation a été suscitée par la lecture des *Arithmétiques* de Diophante, avec des prolongements qui ont concerné l'étude des systèmes d'équations à solutions rationnelles. Les premiers auteurs connus qui s'y sont intéressés sont Abû Kâmil (m. 930) et al-Karajî (m. 1029). D'autres travaux se sont concentrés sur les triangles arithmétiques et sur les nombres congruents. Parmi les extensions enregistrées dans ce domaine, il nous est parvenu une tentative de démonstration de la fameuse « *conjecture de Fermat* » pour $n = 3$ et $n = 4$.

La traduction de l'ouvrage de Nicomaque a nourri de nouvelles recherches qui ont concerné l'étude des propriétés d'une catégorie particulière de suites numériques, celles de la tradition néo pythagoricienne dont les éléments pouvaient être représentés par des figures géométriques rectilignes (où les côtés sont remplacés par des points).

Il faut enfin signaler un chapitre nouveau, celui de l'étude de certaines séries finies (celle des n premiers entiers, et celles de leurs puissances $k^{\text{èmes}}$ ($k > 1$). À l'origine, ces séries intervenaient dans les problèmes de « quadrature » c'est-à-dire du calcul de l'aire d'une figure plane ou du volume d'un solide. Puis, elles ont gagné leur autonomie et ont constitué un chapitre indépendant qui a été ajouté à ceux qui composaient les manuels de calcul.

La science du calcul

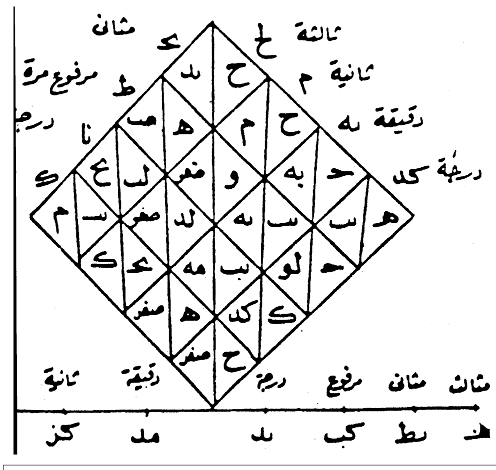
Comme il n'y avait pas de « *Ministère de l'Education Nationale* » pour définir les programmes, les hommes de sciences des pays d'Islam et les professionnels des différentes corporations ont utilisé des numérations et des algorithmes différents les uns des autres. Il y avait d'abord le système mental et digital antérieur à l'avènement de l'Islam et que les marchands ont continué à pratiquer même lorsque de nouveaux outils ont commencé à être enseignés. Chez l'élite syriaque, on avait connu et peut-être même utilisé, dès le VII^ème^ siècle, le système décimal positionnel indien avec le zéro. Cette numération sera popularisée par al-Khwârizmî

Calcul écrit ou calcul avec des jetons ?
Gravure extraite dela Margharita philosofica (1503)

(m. 850) grâce à son manuel intitulé « *Livre sur le calcul indien* » (qui sera traduit en latin au XII$^{\text{ème}}$ siècle).

Puis, avec la traduction d'ouvrages astronomiques grecs, un troisième système s'est imposé chez les astronomes et les astrologues : la numération alphabétique sexagésimale. Chacun de ces systèmes a bénéficié d'ouvrages d'initiation. Mais, avec le développement des activités mathématiques, la numération indienne a fini par s'imposer, même si beaucoup d'astronomes ont continué à utiliser le système à base soixante écrit à l'aide de l'alphabet arabe.

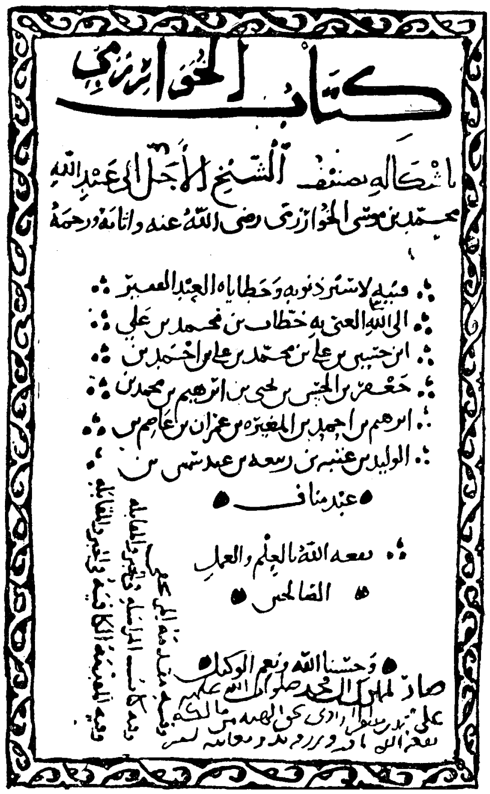
Munis de ces deux outils, les spécialistes ont enrichi la discipline en élaborant de nouveaux instruments pour optimiser les calculs ou pour résoudre des problèmes dont ils n'arrivaient pas à déterminer les solutions d'une manière exacte. On a ainsi conçu des algorithmes arithmétiques pour les opérations classiques (multiplication, extraction de racines n$^{\text{ièmes}}$) et des procédés itératifs pour la résolution approchée des équations de degré quelconque ou pour le calcul, avec une précision de plus en plus fine, des valeurs de lignes et de fonctions trigonométriques qui servaient à la confection des nombreuses tables astronomiques.



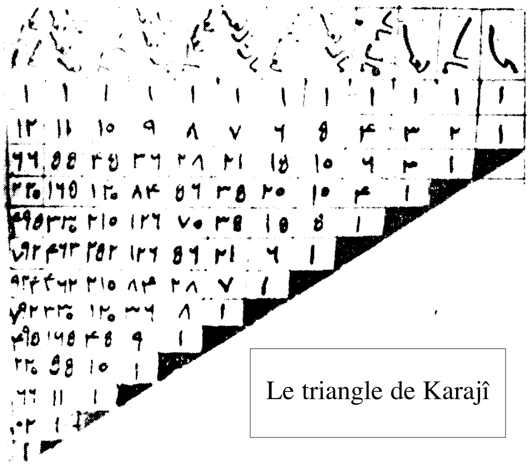
Multiplication en écriture sexagésimale

L'algèbre

La date de naissance de cette nouvelle discipline est la publication de *L'Abrégé du calcul par la restauration et la comparaison* d'al-Khwârizmî (m. 850) qui contient, pour la première fois, la définition de nouveaux objets (coefficients, inconnue, carré de l'inconnue, équations du premier et du second degré) et l'établissement, par la démonstration géométrique, de l'existence des solutions positives de six équations canoniques. Puis il y eut les travaux d'Abû Kâmil (m. 930) qui concernaient toujours les équations de degré inférieur ou égal à 2 mais qui introduisaient quelques nouveautés : manipulation de coefficients et de solutions « *sophistiqués* » (sous forme de nombres irrationnels quadratiques ou biquadratiques), tendance à se libérer de l'homogénéité des grandeurs, extension du domaine d'application des équations, introduction de monômes de degré supérieur à 2. À peu près à la même époque, Sinân Ibn al-Fath (X$^{\text{ème}}$ s.) tente et réussit une généralisation des équations classiques en associant une famille infinie d'équations à l'une des six équations canoniques d'al-Khwârizmî. Comme cette extension nécessitait la manipulation de polynômes de degré quelconque, on a été amené, naturellement, à étudier ces nouveaux objets, indépendamment des équations dans lesquelles ils intervenaient. Les premières études ont été réalisées par al-Karajî (m. 1029) et elles ont


كتاب الخوارزمي

Première page du livre d'al-Khwârizmî

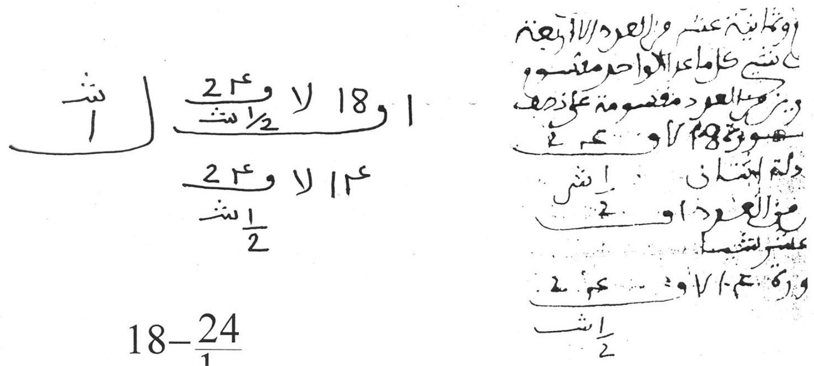


Le triangle de Karajî

été poursuivies par as-Samaw'al (m. 1175) qui a étendu aux monômes et aux polynômes toutes les opérations arithmétiques classiques.

Parallèlement à ces investigations, une autre orientation est apparue dès le IXème siècle puis s'est confirmée après l'échec des différentes tentatives de résolution des équations du 3ème degré à l'aide d'une formule, comme cela avait été fait pour les équations de degré inférieur ou égal à 2. Il s'agit de la recherche d'une solution positive comme « *abscisse* », dirions-nous aujourd'hui, d'un point d'intersection de deux courbes coniques (cercle, parabole, hyperbole). Les différents résultats partiels obtenus au Xème puis au XIème siècle, ont permis à ʻUmar al-Khayyâm (m. 1131) d'élaborer une théorie géométrique complète pour ces équations. Sa contribution sera affinée par Sharaf ad-Dîn at-Tûsî (m. 1213). Il ne nous est rien parvenu d'une éventuelle application de ces démarches aux équations du 4ème degré. Comme on le sait, il faudra attendre l'école algébrique italienne du XVIème siècle, bien au fait de l'échec des mathématiciens arabes, pour disposer de formules permettant de « *calculer* » les solutions positives de ces équations.

Il faut enfin signaler une dernière contribution, totalement anonyme, qui aurait pu jouer un rôle important si elle était apparue entre le IXème et le XIème siècles, c'est-à-dire au moment où la recherche en mathématique connaissait un grand développement quantitatif et qualitatif. Il s'agit du symbolisme algébrique littéral. Les plus anciens écrits dans lesquels il se manifeste d'une manière significative sont tous du XIVème siècle. Et tous révèlent un outil déjà performant avec une utilisation parfois optimale. En effet, certains problèmes sont complètement résolus avec la seule manipulation des symboles.



$$1 + \frac{18 - \dfrac{24}{\frac{1}{2}x}}{14 - \dfrac{24}{\frac{1}{2}x}} = x$$

Début du symbolisme algébrique et sa traduction en langage moderne

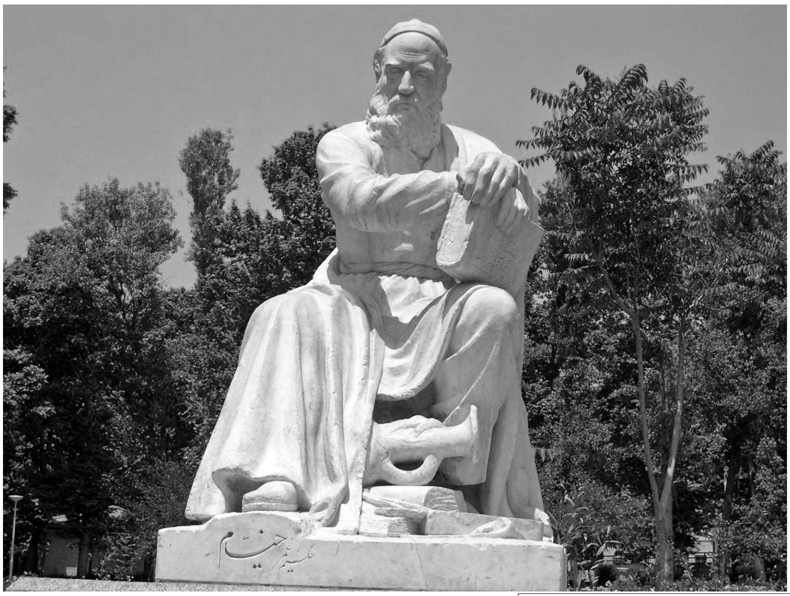
Ces derniers pouvaient représenter l'inconnue, ses différentes puissances, les coefficients (qu'ils soient des entiers, des fractions ou des irrationnels quadratiques ou biquadratiques) et le symbole de l'égalité. On pouvait ainsi écrire les équations et leur appliquer les opérations de l'algèbre classique (restauration et comparaison) jusqu'à obtenir la solution cherchée.

La Trigonométrie

Dans la tradition arabe, la trigonométrie s'est développée d'abord comme un ensemble de concepts et d'outils au service exclusif de l'astronomie. Au départ, elle se réduisait à trois notions — la corde de l'angle double d'origine grecque, le sinus et le sinus verse d'origine indienne— et à un théorème, celui de Ménélaüs (II$^{\text{ème}}$ s.), appelé par les astronomes des pays d'Islam « *théorème de la sécante* ».

Parmi les grands thèmes de l'astronomie qui ont stimulé le développement de ce chapitre (qui deviendra, à la fin du XI$^{\text{ème}}$ siècle, une discipline à part entière), il y avait d'abord ceux hérités de la tradition grecque : la confection de tables astronomiques (appelés « *zîjs* »), la conception d'instruments de mesure et de calcul, l'étude des mouvements des différentes planètes et, en particulier, la prévision de leurs conjonctions apparentes. Il y avait aussi les problèmes posés par la pratique religieuse nouvelle : connaissance précise des moments des cinq prières quotidiennes, détermination de la direction de la Mecque (pour l'orientation des mosquées) et prédiction (approximative) de la visibilité du croissant de lune (pour la confection du calendrier musulman).

Pour résoudre tous ces problèmes, les astronomes ont été amenés à introduire de nouvelles lignes trigonométriques (tangente, cotangente, sécante, cosécante) et des fonctions faisant intervenir certaines d'entre elles. Puis, ils ont établi les relations classiques existant entre ces lignes et ils ont confectionné des centaines de tables donnant les valeurs de chacune de ces lignes en fonction de l'angle et réciproquement. Parmi les artisans de cet apport nouveau, on cite généralement Habash al-Hâsib (IX$^{\text{ème}}$ s.), al-Battânî (X$^{\text{ème}}$ s.), Abû l-Wafâ' (m. 997). Tous ces efforts ont été couronnés, vers la fin du X$^{\text{ème}}$ siècle, par l'établissement du fameux « *théorème du sinus* », appelé par les astronomes musulmans « *théorème qui dispense* » parce qu'il leur permettait, enfin, d'éviter l'utilisation du théorème de Ménélaüs déjà évoqué.



'Umar al-Khayyâm

Théorème de Ménélaüs

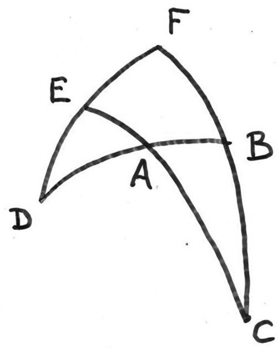
Si CE, CF, DF,DB sont des arcs des grands cercles d'une sphère, on a :

Formulation à l'aide des cordes de l'angle double :

$$\frac{crd(2CB)}{crd(2BF)} = \frac{crd(2CA)}{crd(2AE)} \cdot \frac{crd(2ED)}{crd(2DF)}$$

Formulation à l'aide des sinus :

$$\frac{sin(CB)}{sin(BF)} = \frac{sin(CA)}{sin(AE)} \cdot \frac{sin(ED)}{sin(DF)}$$



L’analyse combinatoire

Dans la tradition scientifique arabe, ce sont des problèmes de linguistique qui ont été à l’origine des premiers développements de ce nouveau chapitre, même si des pratiques combinatoires élémentaires sont apparues dans des ouvrages de mathématiques antérieurs au XII$^{\text{ème}}$ siècle. A titre d’exemple, on peut citer, pour le IX$^{\text{ème}}$ siècle, le traité d’Ibn Qurra sur la composition de rapports qui fournissait, à l’aide de tableaux, les différentes formes du théorème de Ménélaüs.

Pour le X$^{\text{ème}}$, il y avait le livre d’Abû Kâmil qui traitait de systèmes d’équations dont les solutions, parce qu’elles devaient être entières, nécessitaient, pour être déterminées, une opération de dénombrement par énumération. Au XII$^{\text{ème}}$ siècle, c’est encore un algébriste, as-Samaw’al, qui a dénombré une famille d’équations répondant à des conditions données. Mais aucun de ces problèmes n’a abouti à l’établissement d’un théorème de combinatoire, probablement parce qu’ils supposaient des contraintes difficiles à exprimer mathématiquement.

Il a fallu attendre la fin du XII$^{\text{ème}}$ pour qu’un scientifique du Maghreb, Ibn Mun’im (m. 1228), reprenne un vieux problème du VIII$^{\text{e}}$ siècle qui était resté « *ouvert* ». Il s’agissait de dénombrer tous les mots que pouvait exprimer une langue donnée. Pour prendre l’exemple de la langue arabe, il s’agissait de déterminer le nombre de mots qu’il était possible de former avec les 28 lettres de l’alphabet en tenant compte des répétitions, des permutations et même de certaines contraintes de cette langue.

Le premier résultat de ce mathématicien a été la construction, selon une démarche

Triangle d’Ibn Mun’im.
Notez l’évolution de la graphie
depuis al-Karajî

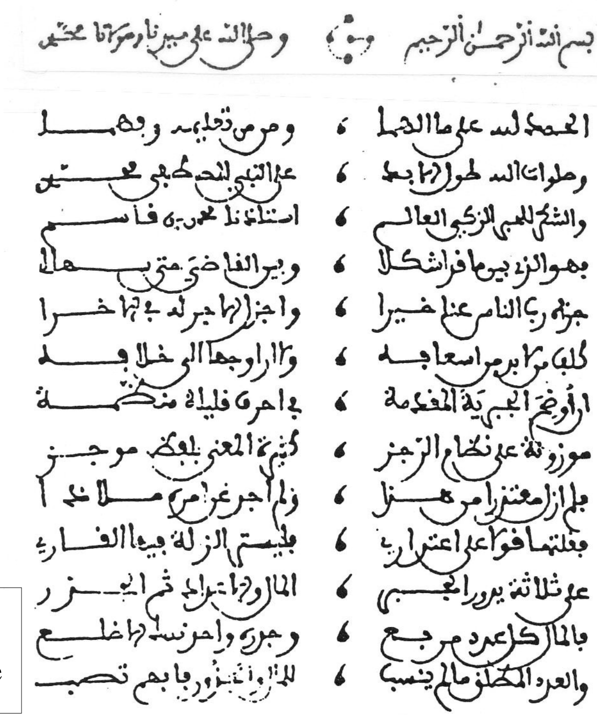
strictement combinatoire, du fameux triangle arithmétique dans lequel il a reconnu les combinaisons de *n* objets *p* à *p*. Puis il a établi les formules donnant les permutations, avec ou sans répétition de *n* lettres, puis il a construit des tableaux qui fournissent les combinaisons avec répétition d’une ou plusieurs lettres. L’importance de cette contribution ne tient pas uniquement aux résultats obtenus mais également au fait qu’elle inaugurait un chapitre nouveau. En effet, d’autres sources montrent que des mathématiciens postérieurs ont poursuivi ce travail : Ibn al-Bannâ (m. 1321) a établi la formule arithmétique permettant d’éviter la construction du tableau d’Ibn Mun’im pour déterminer la valeur de chaque combinaison de *n* objets *p* à *p*. Il a également utilisé la démarche combinatoire pour résoudre un problème ancien, socialement et culturellement important pour l’époque : celui du nombre exact de prières que devait faire un pratiquant pour être sûr de couvrir toutes les prières qu'il avait oublié de faire auparavant. D'autres mathématiciens après lui ont appliqué ces mêmes démarches pour dénombrer des objets mathématiques, comme le nombre de fractions obtenues en combinant les différents types de fractions simples en usage dans le calcul, ou bien le nombre d'équations qu'il est possible d'écrire à partir de *n* monômes donnés, sachant que tous les coefficients de ces équations sont positifs.

En guise de conclusion

Au vu de la richesse et de la diversité des contributions mathématiques arabes, dont je n'ai pu présenter ici qu'un rapide exposé, la question qui vient naturellement à l'esprit est celle de leur circulation hors de l'espace culturel arabo-musulman et en particulier vers l'Europe médiévale. Les recherches de ces trente dernières années ont permis de fournir des réponses partielles à cette question. On sait par exemple qu'une infime partie de la production algébrique arabe a été traduite en latin et en hébreu. Il s'agit du livre d'al-Khwarizmî et du grand traité d'Abû Kâmil. Mais différents types de manuels utilisant les techniques de l'algèbre ont circulé à partir du XII^{ème} siècle dans des versions latines ou hébraïques.

La tradition indienne du calcul a été connue en Europe grâce au second livre d'al-Khwârizmî et à des ouvrages anonymes écrits vraisemblablement dans l'Espagne musulmane. En géométrie, ce sont des copies arabes des *Eléments* d'Euclide qui ont été à la base des versions latines réalisées au XII^{ème} siècle. En plus de cette « *bible* » de la géométrie, les traducteurs se sont intéressés à des ouvrages arabes contenant des commentaires ou des développements de certains aspects de la géométrie euclidienne. Mais, à l'exception de quelques rares écrits, les ouvrages de « *géométrie supérieure* » produits par les mathématiciens des pays d'Islam n'ont pas été traduits. La même remarque est valable pour les recherches en théorie des nombres et en analyse combinatoire, même si certains éléments repérés dans des écrits hébraïques laissent à penser qu'une circulation directe, sans médiation de la traduction, a pu avoir lieu à un moment ou à un autre. Par contre, et malgré la complexité du sujet, des ouvrages de trigonométrie arabe ont été traduits en latin et leur contenu a circulé comme on peut le constater en lisant, en particulier, l'ouvrage de Regiomontanus (m. 1476).

Tous ces éléments, et d'autres qui n'ont pas été évoqués dans le seul souci d'éviter des longueurs, montrent que l'écriture des premiers épisodes de l'histoire des activités mathématiques de l'Europe, c'est-à-dire ceux des XII^{ème}-XV^{ème} siècles, ne peut faire l'impasse de la contribution de la civilisation arabo-musulmane dans ce domaine. Il en est de même pour l'enseignement d'un certain nombre de concepts, de résultats et d'outils mathématiques élaborés dans le cadre de cette civilisation.


بسم الله الرحمن الرحيم وصلى الله على سيدنا ومولانا محمد

I.Yasamin
Poème Algébrique