André REVUZ
Professeur à la Faculté des Sciences de Poitiers

Germaine REVUZ
Maître-Assistant à la Faculté des Sciences de Poitiers

LE COURS DE L'A.P.M.

III

Eléments de topologie

Association des Professeurs de Mathématiques
de l'Enseignement Public
PARIS-1966

« C'est assez désagréable... de ne pouvoir plus rien apprendre pour toute la vie ! Nos aïeux s'en tenaient aux enseignements qu'ils avaient reçus dans leur jeunesse : mais, nous, il nous faut recommencer tous les cinq ans, si nous ne voulons pas être complètement démodés. »

GŒTHE (Les affinités électives).

« Remets-toi à ignorer ce que tu sais, pour savoir comment tu le savais et savoir ton savoir. »

Paul VALERY (Histoires brisées).

Les brochures de l'A.P.M. mettent à la disposition des professeurs des textes utiles à l'enseignement.

Ou bien ces textes sont inédits, ou bien ils ont déjà paru, soit dans le Bulletin de l'A.P.M., soit ailleurs. Dans tous les cas, il a paru intéressant de regrouper des écrits sous une forme commode pour les maîtres qui auront à s'en servir.

Brochures parues :

1. Le langage simple et précis des mathématiques modernes, par A. REVUZ et L. LESIEUR, Professeurs à la Faculté des Sciences de Poitiers (avril 1960) **(épuisée)**.
2. Congruences Paratactiques de cycles, par Paul ROBERT, Inspecteur général honoraire de l'Instruction Publique (avril 1960).
3. Recherche d'une axiomatique commode pour le premier enseignement de la géométrie élémentaire, par Gustave CHOQUET, Professeur à la Sorbonne (février 1961).
4. Le calcul des probabilités et l'enseignement, par A. HUISMAN, R. FORTET, E. MOURIER, A. FUCHS, D. DUGUE, G.-T. GUILBAUD, J. BOUZITAT, J. VILLE et F. GENUYS (novembre 1961).
5. L'enseignement de la mécanique, par P. GERMAIN, J. KAMPE DE FERIET et R. MAZET (novembre 1961).
6. Le Cours de l'A.P.M. — I. Groupes, anneaux, corps, par André et Germaine REVUZ (novembre 1962).
7. Lecture commentée d'une méta-démonstration de Gödel, par J. BALIBAR (mai 1962).
8. Le Cours de l'A.P.M. — II. Espaces vectoriels, par André et Germaine REVUZ (1963).
9. Projet de programmes pour les classes du deuxième cycle du Second Degré (décembre 1965).
10. Le Cours de l'A.P.M. — III. Eléments de topologie, par André et Germaine REVUZ (1966).

En préparation :

Brochures pour la réalisation pratique de méthodes nouvelles dans l'enseignement des mathématiques.

AVANT-PROPOS

Ce troisième et dernier tome du « Cours de l'A.P.M. » a été élaboré dans les mêmes conditions que les précédents. Il correspond aux Conférences de l'année scolaire 1962-1963 ; sa publication a, par rapport à celle des premiers tomes, un retard d'un an, dû, en partie et en ce qui concerne les auteurs, au démarrage de l'émission télévisée des « Chantiers Mathématiques » où l'A.P.M.E.P. poursuit, sous une autre forme et dans le cadre de la Radiotélévision Scolaire, le travail du « Cours de l'A.P.M. ».

Les deux premiers tomes étaient consacrés à l'Algèbre. Celui-ci traite d'un autre sujet, mais est conçu dans le même esprit : son but est de présenter aux professeurs certaines idées fondamentales que l'enseignement, même élémentaire, ne peut ignorer, soit qu'il en subisse directement l'influence, soit qu'il prépare leur introduction.

De très nombreuses questions pouvaient être présentées sous le titre : « Eléments de Topologie ». Le choix qui a été fait a été inspiré par les considérations suivantes :

1° Les notions de continuité et de limite sont à la base de l'Analyse, *discipline à laquelle l'enseignement du Second Degré a fait jusqu'à présent une place relativement modeste qu'il sera certainement amené à élargir au cours des prochaines années. C'est pourquoi il a paru utile de procéder à une discussion de ces notions et de les placer dans la structure la plus dépouillée où elles aient un sens, celle d'espace topologique, où, débarrassées de tout accessoire superflu, elles apparaissent dans leur pureté.*

On pourrait m'objecter que c'est là un degré de généralité excessif pour l'enseignement du Second Degré, étant donné que jusqu'au niveau de la licence inclus, on ne rencontre pratiquement que des espaces métriques et qu'il eût été par suite raisonnable de s'en tenir à ces derniers. Mais, comme il est indispensable, si on veut y voir clair, de distinguer dans un espace métrique les propriétés de la structure topologique (qui peut être dérivée d'autres distances que celle qui est donnée) des propriétés strictement rattachées à la distance donnée, il y a un incontestable gain de clarté à étudier en soi les structures topologiques générales et à dégager les propriétés particulières des topologies métrisables et des espaces métriques.

Il n'est pas douteux que l'enseignement doive commencer par l'étude des espaces métriques, et sans doute s'y tenir assez longtemps, mais il ne l'est pas plus qu'un professeur doive savoir aller nettement au-delà. A ce propos, il est clair que, tandis que les idées algébriques pénètrent l'enseignement du Second Degré, les idées topologiques ne l'ont pratiquement pas encore atteint. Le « Cours de l'A.P.M. » ne visant pas à apporter des améliorations de détail, mais à contribuer à la diffusion de la culture mathématique, était donc amené, dans les limites étroites de ce volume, à faire à la topologie générale une place assez grande pour que le lecteur attentif puisse se pénétrer de l'esprit de la topologie et en percevoir la merveilleuse et redoutable souplesse. En contrepartie, une structure cependant très importante en Analyse, celle des espaces à écarts, n'a été abordée, à l'exception du chapitre X, que dans des exercices.

2° Pour mettre de l'ordre dans les questions qu'il étudie, le mathématicien distingue les différentes structures simples dont, dans une situation donnée, est muni un même ensemble. Mais l'étude de chaque structure prise en soi n'est qu'un instrument pour attaquer la situation plus complexe où elles interviennent simultanément. Dans presque toutes les branches des Mathématiques, ce que l'on rencontre, ce sont des ensembles munis de structures algébriques et de structures topologiques « compatibles ». *La définition de cette compatibilité ayant été donnée, le cas le plus simple, et cependant fondamental en Analyse, celui des espaces vectoriels normés, a été étudié un peu plus en détail.*

La notion de famille sommable, *dont le cadre naturel est celui des groupes topologiques, a été étudiée dans celui des espaces vectoriels normés, largement suffisant pour beaucoup d'applications. Cette notion met bien en évidence et généralise ce qu'il y a de « sain » dans le comportement des séries numériques absolument convergentes, en s'affranchissant de l'ordre des indices qui n'a rien à faire dans la question.*

Un chapitre a été consacré aux espaces de Hilbert, *si remarquables par leur beauté mathématique et si riches d'applications en Physique moderne.*

Familles sommables et espaces de Hilbert sont des questions appelées dans le proche avenir à être enseignées à des niveaux de moins en moins élevés.

3° *Un trop court chapitre a été consacré aux* espaces fonctionnels *(mais, encore une fois, l'exhaustivité n'a jamais été notre propos). On s'y est attaché à étudier les divers modes de convergence dans ces espaces, avec l'espoir, peut-être présomptueux, de démystifier le lecteur sur la prétendue difficulté de la vieille opposition convergence simple — convergence uniforme.*

Et il reste, bien sûr, bien d'autres choses à dire sur lesquelles ce volume est muet : différentiation, intégration, éléments de topologie algébrique... Mais il est clair que l'achèvement de ce Cours ne veut pas dire que l'A.P.M. considère que son travail de perfectionnement soit terminé. Il commence seulement. Nous vivons une époque passionnante pour ceux qui s'intéressent aux Mathématiques et à leur enseignement. D'immenses progrès sont à portée de la main, et il suffit de le vouloir pour les réaliser, et ne pas oublier que s'instruire et instruire sont deux activités complémentaires qui se fécondent mutuellement. Au-delà de toutes les réformes, au-delà de tous les programmes, la qualité de l'enseignement mathématique sera toujours, d'abord, celle de la culture de ses professeurs.

J'ai signé seul les avant-propos de cet ouvrage collectif ; cela me permet de rendre hommage au travail de celle qui a assumé la rédaction du cours et des corrigés d'exercices et dont la collaboration, active et critique, fut très efficace.

Il faut aussi remercier Walusinski, Gilbert, Vissio qui se sont chargés des problèmes administratifs et techniques de l'édition, Mlle Deroo, Mugnier et Mlle Clavier qui ont accompli sans défaillance la très ingrate besogne de la correction des stencils du cours ronéotypé, et enfin les courageux auditeurs des conférences parisiennes, sans qui le « Cours de l'A.P.M. » n'aurait jamais existé.

André REVUZ.

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE I. — CONTINUITE. STRUCTURES TOPOLOGIQUES.

§ **1. Discussion de la notion de continuité** 11

§ **2. Continuité dans les espaces métriques.**

1. Distance et écart 14
2. Diverses formes de la définition de la continuité en un point dans les espaces métriques. Boules. Voisinages .. 14
3. Applications continues. Ouverts 16
4. Propriétés des ouverts d'un espace métrique 17

§ **3. Structures topologiques.**

1. Définition 18
2. Applications continues d'un espace topologique dans un autre 19

CHAPITRE II. — NOTIONS TOPOLOGIQUES FONDAMENTALES. DIVERSES MANIERES DE DEFINIR UNE TOPOLOGIE.

§ **1. Voisinages. Filtres.**

1. Voisinages 21
2. Filtres 22
3. Définition d'une topologie par les voisinages 22
4. Bases de filtres et bases de voisinages 23

§ **2. Ensembles fermés** 24

§ **3. Intérieur. Fermeture. Adhérence.**

1. Fermeture et intérieur 25
2. Point adhérent à un ensemble 26

3. Adhérence 27
4. Définition d'une topologie par les fermetures 28

§ 4. **Topologie induite sur une partie d'un espace topologique** 29

CHAPITRE III. — PRINCIPES GENERAUX DE CHOIX D'UNE TOPOLOGIE.

§ 1. **Ordre sur la famille des topologies d'un ensemble.**

1. Finesse des topologies 31
2. Comparaison des voisinages 31
3. Comparaison des intérieurs et des adhérences 33
4. Treillis des topologies 33
5. Générateurs d'une topologie ; base des ouverts 34

§ 2. **Principe de choix d'une topologie.**

1. Finesse des topologies et continuité 35
2. Espaces topologiques homéomorphes 35
3. Choix de topologies sur un ensemble 36

§ 3. **Topologie produit.**

1. Produit d'un nombre fini d'espaces 37
2. Produit d'une infinité d'espaces 38
3. Quelques résultats relatifs aux topologies produits 39

§ 4. **Topologies compatibles avec une structure topologique.**

1. Groupe topologique 40
2. Corps topologique 42
3. Espace vectoriel topologique 42

§ 5. **Topologie quotient.**

1. Définition 44
2. Exemples sur **R** 45
3. Topologie du plan projectif $P_2(\mathbf{R})$ 46
4. Autres exemples d'espaces quotients 46

CHAPITRE IV. — NOTION DE LIMITE.

§ 1. **Limite d'une application suivant un filtre.**

1. Exemples classiques de limites 49
2. Notion générale de limite 51

3. Continuité d'une application en un point 52
4. Quelques remarques sur le langage 52

§ 2. **Généralisation de la notion de convergence.**

1. Point adhérent à un filtre. Valeur d'adhérence d'une fonction 55
2. Point adhérent à l'ensemble des valeurs d'une suite 56

§ 3. **Structure d'ordre sur l'ensemble des filtres.**

1. Demi-treillis des filtres d'un ensemble 57
2. Majorants communs éventuels à deux filtres 57
3. Ultrafiltres 58

CHAPITRE V. — AXIOMES DE SEPARATION.

§ 1. **Espaces séparés.**

1. Condition d'unicité des limites 61
2. Produit d'espaces séparés 62

§ 2. **Propriétés plus fortes que la séparation.**

1. Espaces réguliers 64
2. Espaces complètement réguliers 64
3. Espaces normaux 65

CHAPITRE VI. — GRANDES CLASSES D'ESPACES TOPOLOGIQUES.

§ 1. **Espaces compacts.**

1. Définition 69
2. Théorème de Bolzano-Weierstrass 71
3. Tout espace compact est normal 71
4. Parties compactes d'un espace topologique 72
5. Compacts de $\mathbf{R}^n$ 73
6. Image continue d'un compact dans un espace topologique séparé 75
7. Place des topologies compactes dans l'ensemble ordonné des topologies séparées 76
8. Produit d'espaces compacts 77

§ 2. **Espaces localement compacts. Compactification.**

1. Espaces localement compacts 78
2. Compactification d'un espace topologique 79

3. Compactifications de la droite et du plan 79
4. Démonstration du théorème d'Alexandrov 82

§ 3. Espaces connexes.

1. Définition 85
2. Image continue d'un connexe 86
3. Composantes connexes 86
4. Espaces connexes par arc 87

CHAPITRE VII. — ESPACES METRIQUES.

§ 1. Propriétés des topologies d'espaces métriques.

1. Séparation 89
2. Premier axiome de dénombrabilité 90

§ 2. Propriétés de la structure d'espace métrique.

1. Diamètre d'une partie A d'un espace métrique 91
2. Suites de Cauchy 91
3. Espaces métriques complets 92
4. Propriétés des espaces complets 93

§ 3. Continuité uniforme.

1. Définition 94
2. Propriétés des applications uniformément continues .. 95

§ 4. Espaces métriques compacts.

1. Un espace métrique compact est complet 97
2. Equivalence des propriétés de Borel-Lebesgue et de Bolzano-Weierstrass dans les espaces métriques 97
3. Applications continues d'un métrique compact dans un métrique 99

CHAPITRE VIII. — ESPACES VECTORIELS NORMES.

§ 1. Propriétés générales.

1. Corps valués. Normes. 101
2. Espaces de Banach. Complétion d'un espace vectoriel normé 102
3. Exemples d'espaces vectoriels normés 103
4. Parties topologiquement libres 105

5. Applications linéaires et continues d'un espace vectoriel normé dans un autre 107
6. Normes équivalentes 109
7. Espaces vectoriels normés de dimension finie 110

§ 2. Espaces $\mathcal{L}_c(E, F)$. Espaces duals.

1. Théorème de Hahn-Banach. Démonstration dans le cas réel 112
2. Démonstration dans le cas complexe 113
3. Condition pour que $\mathcal{L}_c(E, F)$ soit un espace de Banach 114
4. Espaces duals 116

§ 3. Familles sommables.

1. Définition. Propriétés générales 118
2. Associativité des familles sommables 120
3. Critère de Cauchy. Familles sommables dans un espace de Banach 121
4. Familles absolument sommables 123

CHAPITRE IX. — ESPACES DE HILBERT.

§ 1. Rappel des notions fondamentales.

1. Définitions 125
2. Complétion d'un espace préhilbertien 126

§ 2. Projection sur un convexe fermé.

1. Théorème de F. Riesz 126
2. Projection orthogonale sur une variété affine fermée .. 128
3. Sous-espaces supplémentaires orthogonaux 128

§ 3. Dual topologique d'un espace de Hilbert. 129

§ 4. Familles orthonormées dans un espace de Hilbert.

1. Définition. Familles maximales 131
2. Propriétés des familles maximales 132
3. Cardinaux des familles orthonormées maximales 134

§ 5. Espaces de Hilbert satisfaisant au deuxième axiome de dénombrabilité.

1. Définition 135
2. Procédé d'orthogonalisation de Schmidt 136
3. Exemple 137

CHAPITRE X. — ESPACES FONCTIONNELS.

§ 1. **Topologies sur l'ensemble $\mathcal{F}$(E, F) des applications d'un ensemble E dans un espace métrique F.**

1. Deux modes classiques de convergence d'une suite de fonctions réelles de variable réelle 143
2. Structure métrique de la convergence uniforme 144
3. Structure de la convergence uniforme sur un ensemble de parties 145
4. Topologie de la convergence simple et topologie produit 148

§ 2. **Cas où E est un espace topologique.**

1. $\mathcal{C}$(E, F), est-il fermé dans $\mathcal{F}$(E, F) ? 149
2. Compacité des sous-espaces de $\mathcal{C}$(E, F) ? 151
3. Exemple d'application du théorème d'Ascoli 154
4. Autres topologies d'espaces fonctionnels 157

SOLUTION DES EXERCICES.

Chapitre premier. — Exercices 1 à 3 159
Chap. 2. — Exercices 4 à 11 160
Chap. 3. — Exercices 12 à 21 165
Chap. 4. — Exercices 22 à 30 175
Chap. 5. — Exercices 31 à 34 187
Chap. 6. — Exercices 35 à 41 189
Chap. 7. — Exercices 42 à 47 197
Chap. 9. — Exercices 48 à 56 207

INDEX TERMINOLOGIQUE 247

CHAPITRE I

CONTINUITÉ
STRUCTURES TOPOLOGIQUES

§ 1. DISCUSSION DE LA NOTION DE CONTINUITE

Si l'on voulait définir d'un mot la topologie, on pourrait dire que c'est la branche des Mathématiques qui traite de la *continuité*.

Les mots « *continu* » et « *continuité* » sont utilisés dans le langage courant et dans le langage mathématique : c'est le sort de la presque totalité des mots du vocabulaire mathématique ; mais alors que, très souvent, le terme mathématique n'a été emprunté au langage courant que pour sa valeur d'image, qu'il n'a d'ailleurs pas toujours gardée, et pour qualifier *a posteriori* un concept, dans le cas de la continuité la notion mathématique est manifestement dérivée de la notion vulgaire.

La définition mathématique peut certes être donnée de manière autonome, mais comme il est clair que l'idée mathématique n'est pas étrangère à l'idée vulgaire, il y a lieu d'essayer de dégager analogies et différences : cela permettra peut-être d'épargner aux débutants les erreurs qui proviennent de ce qu'ils ont inconsciemment laissé adhérer au mot continuité des lambeaux d'une confuse intuition originelle, dont l'explicitation complète n'est certainement pas facile. La mathématique en a écarté les pièges et en a extrait une notion plus pauvre, mais plus sûre, dont il faut savoir dans quelle mesure elle rend compte de la continuité « concrète ».

Dans le langage courant, on peut distinguer un usage statique du mot : « une haie continue », une « file continue de voitures », où il évoque, à l'échelle du phénomène décrit, l'absence de lacunes, le fait d'être d'un seul tenant, et un usage dynamique : « une évolution continue », où il évoque l'absence de sauts, de modifications instantanées.

Nous retrouverons la première idée dans ce cours dans la notion *d'espace topologique connexe* et nous pouvons noter, à ce propos, l'usage mathématique du substantif « *un continu* » pour désigner un espace topologique connexe et compact, dont le segment $[0, 1]$ de la droite réelle est un des exemples les plus simples.

Quant à la seconde idée, qui n'est évidemment pas sans lien avec la première, sa traduction mathématique est la notion de *fonction continue* que nous allons étudier maintenant.

Si l'on procédait à un sondage d'opinion sur ce qu'est une fonction continue, je présume que parmi les réponses exprimées, la majorité se répartirait, au mieux, suivant les deux types :

a) y est fonction continue de x, si y ne passe jamais d'une valeur à une autre sans passer par toutes les valeurs intermédiaires ;

b) si x est proche de x_0, y est proche de y_0

avec l'arrière-pensée, exprimée ou non, que toutes les fonctions continues possèdent ces deux propriétés, et qu'une seule des deux suffit à les caractériser.

On ne peut discuter sous cette forme ces énoncés trop vagues. Il est indispensable de les préciser et l'analyse montre alors que l'opinion qu'ils expriment n'a d'autre fondement que la confusion de concepts qu'il y a intérêt à distinguer.

Il faut d'abord savoir de quels ensembles x et y sont éléments. Or, le premier énoncé suggère que ces ensembles ont été totalement ordonnés, et le deuxième qu'ils sont munis d'une distance, ce qui montre immédiatement qu'ils se réfèrent à des structures qui peuvent être définies indépendamment l'une de l'autre, et même l'une sans l'autre. Bien sûr, dans l'esprit de ceux qui auraient répondu à l'enquête, il s'agirait d'ensembles de nombres réels et, plus précisément, d'intervalles ou de segments de **R**, sur lesquels existent précisément un ordre et une distance qui sont liés (les points qui sont à une distance inférieure à r de x_0 sont ceux qui sont compris entre $x_0 - r$ et $x_0 + r$). Mais, même dans ce cas, il est inexact que l'énoncé *a*) entraîne l'énoncé *b*) comme le prouvent les deux exercices suivants.

Exercice 1. — On considère la fonction φ définie sur $[0, 10[$ de la façon suivante : x étant donné par son développement décimal illimité $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n}{10^n}$ si l'ensemble des décimales de rang impair de x n'est pas périodique on pose $\varphi(x) = 0$: si cet ensemble est périodique à partir du rang $2n - 1$, on pose $\varphi(x) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{A_{2(n+p)}}{10^p}$. Montrer que, quels que soient x_1 et x_2, cette fonction prend, dans l'intervalle $]x_1, x_2[$, toutes les valeurs comprises entre $\varphi(x_1)$ et $\varphi(x_2)$ et que, pourtant, cette fonction n'est continue en aucun point de $[0, 10[$.

Exercice 2. — Montrer que si f est une application dérivable du segment $[a, b]$ dans **R**, sa dérivée ne passe pas d'une valeur à une autre sans passer par toutes les valeurs intermédiaires. Donner un exemple de fonction dérivée non-continue.

Des fonctions peuvent donc satisfaire à *a*) sans pouvoir prétendre en aucune façon au titre de continues.

L'énoncé *a*) fournirait des fonctions vérifiant *b*) si l'on se restreignait aux fonctions monotones par tranches. On pourrait adopter *a*), assorti de ces restrictions (fonctions définies sur un segment de **R**, à valeurs dans **R**, monotones par tranches) : on aboutirait à une théorie satisfaisante du point de vue logique et rendant compte de la notion intuitive de continuité, mais on se confinerait dans une situation particulière, et même très particulière, dans la mathématique du XX^e siècle. La voie féconde est au contraire celle qui part d'une formulation correcte de l'énoncé *b*).

Dans cet énoncé, le mot « proche » est utilisé dans un sens absolu, ce qui est admissible dans la vie courante, par référence à une activité concrète, mais ne l'est pas en mathématiques, où seules des expressions telles que « *être plus proche de* a *que de* b », « *être assez proche de ... pour que ...* » peuvent être valablement utilisées. Et c'est ainsi que « y est fonction continue de x » s'exprimera par : « *y peut être aussi proche que l'on veut de y_0, à condition que x soit assez proche de x_0* », ce qui, sous une forme plus précise, se traduit par la définition classique, qui remonte à Cauchy :

Une application f de $]a, b[$ dans R est continue au point $x_0 \in]a, b[$, si, à tout réel strictement positif ε, il est possible d'associer un réel strictement positif η tel que pour $|x - x_0| < \eta$ on ait $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

ou, en écriture purement symbolique :

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}^+ - \{0\} \quad \exists \eta \in \mathbf{R}^+ - \{0\} \quad \forall x \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[\quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

ou

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}^+ - \{0\} \quad \exists \eta \in \mathbf{R}^+ - \{0\} \quad |x - x_0| < \eta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Cet énoncé a l'avantage de s'étendre immédiatement au cas d'applications d'un espace métrique dans un autre (remplacer la valeur absolue de la différence par la distance de deux éléments), et de permettre d'importantes généralisations ultérieures que nous allons voir à la fin de ce chapitre.

Il importe de remarquer que l'énoncé naïf « si x est proche de x_0, y est proche de y_0 » fait intervenir les variables dans l'ordre : élément de l'espace de départ, élément de l'espace d'arrivée, tandis que l'énoncé mathématique les fait intervenir dans l'ordre inverse. Beaucoup d'erreurs de débutants viennent de ce qu'ils n'ont pas pris conscience de cette indispensable interversion, que nous retrouverons dans la suite, où nous verrons que la continuité d'une application de l'espace topologique E dans l'espace topologique F s'exprime commodément en faisant intervenir l'application réciproque $\overset{-1}{f}$ de $\mathcal{P}$ (F) dans $\mathcal{P}$ (E) (cf. *A.P.M.* I, I.1.9, p. 19).

Entre les énoncés naïfs *a*) et *b*), c'est donc *b*) que le mathématicien a pris comme point de départ. L'énoncé *a*) est-il complètement sacrifié ? On sait qu'une fonction continue — au sens de Cauchy, le seul que nous utiliserons maintenant —, définie sur un intervalle de **R** et à valeurs dans **R**, possède la propriété *a*). Mais il faut noter que ceci serait faux si on remplaçait **R** par **Q**.

Exemple : l'application f de **Q** dans **Q** définie par :

$$f(x) = 0 \quad \text{si} \quad x^2 < 2$$
$$f(x) = 1 \quad \text{si} \quad x^2 > 2$$

est continue en tout point de **Q** et ne vérifie évidemment pas *a*).

La propriété *b*) apparaît alors non seulement comme une propriété de l'application, mais aussi comme une propriété de l'espace de départ. Nous retrouverons l'énoncé *b*) dans le théorème général : *l'image par une application continue d'un espace topologique connexe est connexe.* Autrement dit, dans *b*), deux continuités intervenaient simultanément : la continuité « statique » de l'espace de départ qui devait être d'un seul tenant, et la continuité dynamique de l'application qui devait ignorer les variations brutales. Il est à noter que l'intuition courante refuserait de parler de continuité pour des fonctions définies sur **Z**, mais n'hésiterait peut-être pas à le faire pour **Q**, bien que **Q** ne soit pas connexe.

Le mathématicien a choisi sa définition en raison de sa souplesse et de sa fécondité. Le choix fait, il en déduit implacablement les conséquences, même si l'intuition originelle doit en souffrir : une fonction continue sur **Q** peut ne pas satisfaire *a*) ; toute fonction de **Z** (dans **R**, par exemple) est continue si **Z** est munie de la distance $d(x, y) = |x - y|$.

§ 2. CONTINUITE DANS LES ESPACES METRIQUES

1. Distance et écart.

On rappelle qu'un espace *métrique* est un ensemble E, pour lequel on a défini une application *d*, de E^2 dans $\mathbf{R}+$, appelée *distance*, qui satisfait aux trois axiomes :

$$\forall (x, y) \in E^2 \qquad d(x, y) = 0 \iff x = y$$
$$\forall (x, y) \in E^2 \qquad d(x, y) = d(y, x)$$
$$\forall (x, y, z) \in E^3 \qquad d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z).$$

On peut de façon analogue définir un *écart* qui est aussi une application, *e*, de E^2 dans $\mathbf{R}+$ qui satisfait au deuxième et au troisième des axiomes précédents, mais où le premier est remplacé par :

$$x = y \implies e(x, y) = 0.$$

Exemple d'écart : E est le plan $\mathbf{R}^2$ rapporté à deux axes O*x* et O*y*. On pose :

$$e(M_1, M_2) = |x_1 - x_2|.$$

Deux points d'une même parallèle à O*y* ont un écart nul sans être confondus.

Exercice 3. — Soit E un ensemble sur lequel on a défini un écart e.
1° Montrer que la relation $\mathcal{R}$ définie par :

$$x \mathcal{R} y \iff e(x, y) = 0$$

est une relation d'équivalence.

2° Sur l'espace quotient $E/\mathcal{R}$ on peut définir une distance en prenant comme distance de deux classes l'écart d'un élément de l'une et d'un élément de l'autre.

Exercice 4. — Montrer que, si une application *d* de E^2 dans $\mathbf{R}+$ satisfait au premier et au troisième axiome, on peut définir sur E une distance δ en posant :

$$\delta(x, y) = \sup\,[d(x, y), d(y, x)].$$

Soient donc deux espaces E et F sur lesquels sont définies deux distances *d* et δ respectivement (ou deux écarts). Nous dirons qu'une application *f* de E dans F est continue en x_0, si :

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}+ - \{0\} \ \exists \eta \in \mathbf{R}+ - \{0\} \qquad d(x, x_0) < \eta \implies \delta[f(x), f(x_0)] < \varepsilon.$$

Remarquons que si on a un troisième espace métrique G, de distance δ' (ou un espace avec écart δ'), et une application *g* de F dans G, continue en $f(x_0)$, il est aisé de montrer à partir des définitions que $g \circ f$ est une application de E dans G continue en x_0.

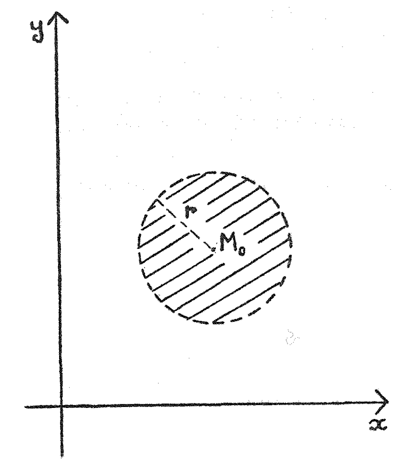
2. Forme diverses de la définition de la continuité en un point dans les espaces métriques. Boules. Voisinages.

Nous introduisons la terminologie géométrique suivante :

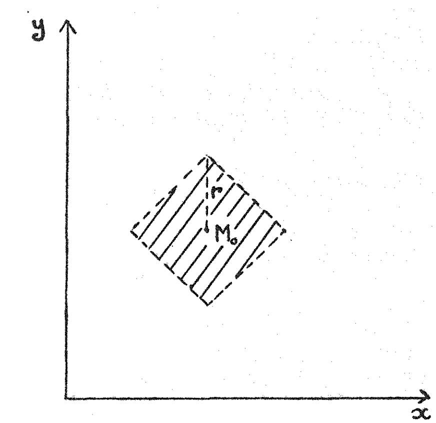
On appelle *boule ouverte* de centre x_0 et de rayon *r* (réel strictement positif), et nous notons $B(x_0, r)$, *l'ensemble des éléments de l'espace métrique dont la distance à x_0 est strictement inférieure à r.*

Exemples : Dans le plan $\mathbf{R}^2$, la boule $B(x_0, r)$ est la portion de plan limitée par les contours représentés ci-dessous, contours qui dépendent du choix de la distance, et, dans tous les cas, à l'exclusion de ces contours (le dernier est relatif à un écart et non à une distance).

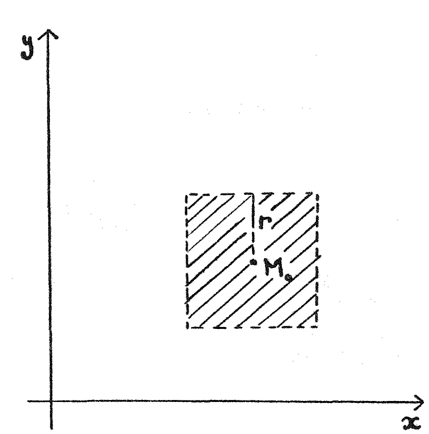
$d(M_1, M_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$



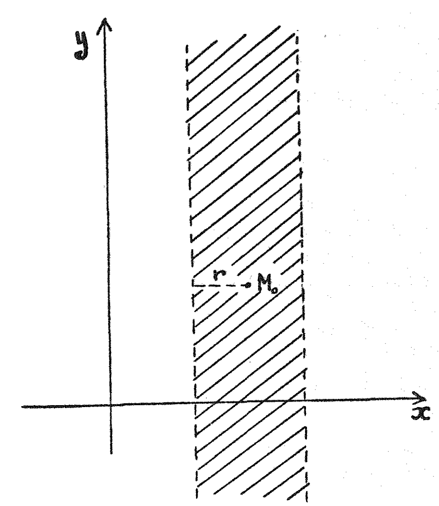
$d(M_1, M_2) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$



$d(M_1, M_2) = \sup\,(|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|)$



$e(M_1, M_2) = |x_1 - x_2|$



De même, on appelle :

boule fermée, de centre x_0 et de rayon *r*, l'ensemble des éléments de l'espace métrique dont la distance à x_0 est inférieure ou égale à *r*,

sphère, de centre x_0 et de rayon *r*, l'ensemble des éléments dont la distance à x_0 est égale à *r*.

Dorénavant nous emploierons le mot boule, sans épithète, pour désigner la boule ouverte.

En utilisant ce nouveau vocable, la définition des applications continues en x_0 devient :

Pour toute boule B′ *de centre* $f(x_0)$, *il existe une boule* B *de centre* x_0 *tel que* $f(\mathrm{B}) \subset \mathrm{B}'$.

Mais cette inclusion implique $\overset{-1}{f}(\mathrm{B}') \supset \overset{-1}{f} \circ f(\mathrm{B}) \supset \mathrm{B}$.

Réciproquement, $\mathrm{B} \subset \overset{-1}{f}(\mathrm{B}')$ implique $f(\mathrm{B}) \subset f \circ \overset{-1}{f}(\mathrm{B}') \subset \mathrm{B}'$,
ce qui permet d'énoncer une nouvelle propriété caractéristique des applications continues dans les espaces métriques :

Une application est continue en x_0 *si, et seulement si, l'image réciproque de toute boule de centre* $f(x_0)$ *contient une boule de centre* x_0.

Voisinage. Dans un espace métrique (ou muni d'un écart), on appelle *voisinage de* x_0 *tout ensemble qui contient une boule de centre* x_0. La propriété caractéristique précédente peut alors s'énoncer : *une application est continue si, et seulement si l'image réciproque de toute boule de centre* $f(x_0)$ *est un voisinage de* x_0.

Soit alors, dans F, un voisinage V′ de $f(x_0)$. Il contient une boule B′ ; son image réciproque contient l'image réciproque $\overset{-1}{f}(\mathrm{B}')$ qui elle-même contient une boule. Donc, si une application de E dans F est continue au point x_0, l'image réciproque de tout voisinage de $f(x_0)$ est un voisinage de x_0. Et réciproquement, si cette propriété est vérifiée par une application, cette application est continue, une boule étant un voisinage particulier.

Une application f *est continue au point* x_0 *si, et seulement si l'image réciproque de tout voisinage de* $f(x_0)$ *est un voisinage de* x_0.

En utilisant cette propriété caractéristique des applications continues, on retrouve le fait que la composée de deux applications continues est une application continue, puisque c'est une application où l'image réciproque d'un voisinage de $g \circ f(x_0)$ est un voisinage de x_0.

3. Applications continues. Ouverts.

Occupons-nous maintenant d'une application continue en tous les points d'un ensemble. Une telle application sera dite « *continue* » (sans compléments). Ce sont, en fait, les applications continues qui intéressent la topologie. Soit donc une application continue d'un ensemble E dans un ensemble F. La dernière énoncée des propriétés caractéristiques des applications continues en un point, appliquée à tous les points de l'ensemble F, amène à considérer des sous-ensembles de F qui seraient voisinage de tous leurs points.

Ensembles ouverts : on appelle *ensemble ouvert un ensemble qui est voisinage de tous ses points*, ou encore un ensemble dont tous les points sont centre d'une boule qui y est incluse.

Remarquons d'abord qu'il existe bien de tels ensembles, car *une boule ouverte est un ensemble ouvert*. En effet, soit :

$$y \in \mathrm{B}(x_0, r).$$

Par définition de la boule ouverte :

$$d(x_0, y) = r - \rho \qquad \text{avec } \rho > 0.$$

La boule $\mathrm{B}(y, \rho)$ est incluse dans la boule $\mathrm{B}(x_0, r)$, comme le montre l'inégalité triangulaire :

$$z \in \mathrm{B}(y, \rho) \implies d(y, z) < \rho \implies d(x_0, z) < r - \rho + \rho \implies z \in \mathrm{B}(x_0, r).$$

Soit alors f, application de E dans F continue sur tout E. Soit O un ouvert de F et soit $\overset{-1}{f}(\mathrm{O})$ son image réciproque. Tout point $x_0 \in \overset{-1}{f}(\mathrm{O})$ a son image dans O et O est un voisinage de cette image. $\overset{-1}{f}(\mathrm{O})$ est donc voisinage de x_0 et par conséquent $\overset{-1}{f}(\mathrm{O})$ est ouvert. L'image réciproque d'un ouvert par une application continue est un ouvert.

Soit, réciproquement, une application de E dans F telle que l'image réciproque de tout ouvert de F soit un ouvert.

Soit $x_0 \in \mathrm{E}$, $f(x_0) \in \mathrm{F}$ son image et B′ une boule de centre $f(x_0)$. Cette boule est un ouvert ; par hypothèse, son image réciproque est un ouvert qui contient x_0, donc un voisinage de x_0. L'application f est donc continue en x_0, point quelconque de E.

Une application de E *dans* F *est continue sur tout* E *si, et seulement si, l'image réciproque de tout ouvert de* F *est un ouvert.*

Exercice 5. — Montrer l'équivalence de la définition donnée des ouverts avec la définition suivante : « Un ouvert est une réunion de boules. »

A titre d'exemple, les ouverts de la droite réelle seront étudiés dans l'exercice suivant.

Exercice 6. — Montrer que l'ouvert le plus général de la droite réelle est une réunion dénombrable (ou finie) d'intervalles deux à deux disjoints.

(Etant donné un ouvert O de la droite réelle et un point $x_0 \in \mathrm{O}$ on étudiera les intersections du complémentaire de O avec la demi-droite $[x_0 + \infty[$ et avec la demi-droite $]- \infty, x_0])$.

Dans le plan, les régions limitées par un contour fermé (ce contour étant exclu) sont des ouverts pour l'une quelconque des trois distances envisagées plus haut. Remarquons d'ailleurs que tout ouvert pour une des trois distances est un ouvert pour les deux autres : une boule d'une quelconque des trois espèces incluant une boule de même centre de chacune des deux autres.

4. Propriétés des ouverts d'un espace métrique.

Théorème I. — *Toute réunion d'ouverts est un ouvert.*

En effet, si un point appartient à la réunion, c'est qu'il appartient à un des ouverts ; cet ouvert en est un voisinage et la réunion qui inclut ce voisinage est aussi un voisinage. La réunion est donc voisinage de tous ses points.

Théorème II. — *Toute intersection finie d'ouverts est un ouvert.*

Soient $\mathrm{O}_1, \mathrm{O}_2, ..., \mathrm{O}_n$ des ouverts et $\mathbf{O} = \bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{O}_i$ leur intersection.

Si cette intersection n'est pas vide, on peut dire :

$$x \in \mathbf{O} \implies \forall i \quad x \in \mathrm{O}_i.$$

Chacun des O_i contient une boule de centre x, soit $\mathrm{B}_i(x, \rho_i)$. Posons alors :

$$\rho = \inf \{ \rho_i \}.$$

La boule $\mathrm{B}(x, \rho)$ est incluse dans tous les O_i, donc dans leur intersection et $\mathbf{O}$ est un voisinage de x ; donc, puisque x était quelconque, $\mathbf{O}$ est un ouvert.

Remarque. — Insistons sur l'hypothèse « *finie* » qui est intervenue dans la démonstration ci-dessus quand nous avons considéré ρ : en effet, l'inf d'un ensemble infini de nombres positifs peut être nul. Il est d'ailleurs facile de voir que cette hypothèse est effectivement indispensable, comme le montre le contre-exemple suivant : les intervalles

$$\left]x_0 - \frac{1}{n},\ x_0 + \frac{1}{n}\right[$$

sont des ouverts de la droite réelle, en nombre infini quand n décrit N. Leur intersection est réduite à x_0 qui ne peut contenir aucune boule de centre x_0 et n'est donc pas un ouvert.

La démonstration précédente a laissé de côté le cas où l'intersection de la famille finie d'ouverts considérée était vide. Ce cas ne constitue pas une exception en vertu de la propriété suivante :

Le vide est un ouvert. Ceci est la conséquence d'un principe général de logique qui veut que, si on considère une famille $\mathcal{O}$ d'ensembles O, définis par une condition du type : « Si x appartient à O, x jouit de la propriété P », une telle famille comprenne le vide. En effet, le vide, ne comportant pas d'éléments x, satisfait automatiquement à la condition (*).

Enfin, signalons que *l'ensemble* E *est un ouvert pour toute distance définie sur lui,* car toute boule de centre $x \in$ E est incluse dans E.

Nous avons vu plus haut que, sur un ensemble, il était possible de définir des distances différentes pour lesquelles les ouverts étaient les mêmes. On voit donc que, pour les espaces métriques, la notion de continuité ne fait pas appel à la totalité de la structure d'espace métrique. Même en se limitant à ces espaces, si c'est à la seule continuité des applications que l'on s'intéresse, il y a donc avantage à n'utiliser que ce qui s'y rapporte, *c'est-à-dire la famille des ouverts de chaque espace.*

Mais, d'autre part, on a là une possibilité de définir la continuité pour des classes d'espaces plus généraux que les espaces métriques. Parmi les divers essais tentés, c'est celui de Hausdorff qui a été reconnu le plus heureux.

§ 3. STRUCTURES TOPOLOGIQUES

1. Définition.

Un des points de départ possible est le suivant : on définit sur un ensemble E une famille $\mathcal{O}$ de parties qui satisfait aux axiomes suivants (qui ne sont autres que l'énoncé de propriétés de la famille des ouverts d'un espace métrique) :

(O_1) : Toute réunion d'ensembles appartenant à $\mathcal{O}$ appartient à $\mathcal{O}$.

(O_2) : Toute intersection finie d'ensembles appartenant à $\mathcal{O}$ appartient à $\mathcal{O}$.

Nous ajoutons (bien qu'il soit possible de déduire cet axiome des précédents) :

(O_3) : $\emptyset$ et E appartiennent à $\mathcal{O}$.

(*) Ceci peut être explicité de la manière suivante : les ensembles O $\in \mathcal{O}$ étant définis par :

$\forall x \in$ O $\quad x$ possède la propriété P,

ce qui caractérise un ensemble O' qui n'est pas un ensemble O, donc qui appartient au complémentaire de $\mathcal{O}$ dans $\mathcal{P}$(E), c'est :

$\exists x \in$ O' $\quad x$ possède la propriété *non* P.

Le vide ne peut donc pas être un ensemble O' ; c'est donc un ensemble O.

Une telle famille étant définie sur un ensemble E, on dira qu'on a défini une structure topologique, ou plus brièvement une topologie sur E, ou que E est un *espace topologique*, et les éléments de $\mathcal{O}$ sont dits les *ouverts de la topologie.*

On peut se demander *a priori* si on obtient effectivement ainsi des structures topologiques plus générales que celles dérivant des distances, c'est-à-dire si, une telle famille d'ouverts étant choisie, il n'est pas toujours possible de trouver une distance telle que ces ouverts soient ceux que donne cette distance. Quand il en est ainsi, l'espace topologique est dit *métrisable.* Mais il n'en est pas toujours ainsi, comme nous allons le voir tout de suite sur un exemple (topologie grossière).

Une topologie étant définie par la donnée de l'ensemble $\mathcal{O}$ des ouverts :

$$\mathcal{O} \in \mathcal{P}\mathcal{P}(E)$$

pour tout ensemble E, deux choix de $\mathcal{O}$ sont toujours possibles :

1° $\mathcal{O}$ se réduit à $\emptyset$ et à E. La topologie ainsi définie est dite *topologie grossière.* Aucune distance ne correspond à cette topologie. En effet, s'il existait une distance, chaque point de l'ensemble serait centre d'une boule et, dès qu'il existerait dans E deux points au moins, il y aurait au moins deux ouverts, distincts de $\emptyset$ et E (les boules de centre, les deux points et de rayon la demi-distance des deux points). Signalons tout de suite qu'il existe des exemples plus intéressants d'espaces non métrisables.

2° $\mathcal{O} = \mathcal{P}$(E), c'est-à-dire que tout sous-ensemble de E est un ouvert. Cette topologie est dite *topologie discrète.* On peut lui associer une distance d définie par :

$$\forall\ (x, y) \in E^2, \quad x \neq y \quad \Longrightarrow \quad d(x, y) = 1.$$

En effet, pour un ensemble muni d'une telle distance, la boule de centre, un point quelconque et de rayon 1/2, est réduite à son centre. Chaque point de l'ensemble est donc, à lui seul, un ouvert et toute réunion d'ouverts étant un ouvert, tout sous-ensemble est un ouvert.

2. Applications continues d'un espace topologique dans un autre.

Par définition, E et F étant deux espaces topologiques, une application f de E dans F est *continue* si l'image réciproque par f de tout ouvert de F est un ouvert de E.

CHAPITRE II

NOTIONS TOPOLOGIQUES FONDAMENTALES

DIVERSES MANIÈRES DE DÉFINIR UNE TOPOLOGIE

§ 1. VOISINAGES. FILTRES

1. Voisinages.

Une partie V *d'un espace topologique est dite voisinage de x si* V *contient un ouvert auquel x appartient.*

Observons d'abord que si la topologie de E est déduite d'une distance, les voisinages que nous venons de définir sont les mêmes que ceux définis au chapitre précédent. En effet, un voisinage de x au sens topologique du mot contient un ouvert qui contient x, mais, la topologie dérivant de la distance, cet ouvert contient une boule de centre x et le voisinage V contenant aussi cette boule est un voisinage au sens métrique ; réciproquement, un voisinage au sens métrique contenant une boule de centre x, qui est un ouvert particulier, est bien un voisinage au sens topologique.

D'autre part, les voisinages étant définis comme ci-dessus, les ouverts jouissent de la propriété fondamentale qui leur a servi de définition dans les espaces métriques : ils sont voisinages de tous leurs points ; en effet, pour tout x appartenant à un ouvert, on peut dire que cet ouvert contient un ouvert (lui-même) qui contient le point. Réciproquement, si un ensemble A est voisinage de tous ses points, pour tout x lui appartenant, il contient un ouvert O_x qui contient x. Mais alors il contient la réunion de tous ces ouverts qui est un ouvert ; comme cette réunion, qui contient tout $x \in$ A, contient A, il en résulte qu'elle est identique à A, et A est ouvert.

Le fait pour un sous-ensemble d'un espace topologique E *d'être voisinage de tous ses points caractérise donc les ouverts,* que la topologie dérive ou non d'une distance.

Ce qui est intéressant à considérer, c'est, non pas un voisinage, mais l'ensemble :

$$\mathcal{V}(x) \subset \mathcal{P}(\mathrm{E})$$

des voisinages d'un point x. Cet ensemble possède les propriétés suivantes, à peu près évidentes ou qui résultent de ce qui précède :

(V_1) $\quad V \in \mathcal{V}(x), \quad W \supset V \implies W \in \mathcal{V}(x)$

(V_2) $\quad V \in \mathcal{V}(x), \quad V' \in \mathcal{V}(x) \implies V \cap V' \in \mathcal{V}(x)$

(V_3) $\quad \forall\, V \in \mathcal{V}(x), \quad x \in V$

(V_4) $\quad \forall\, V \in \mathcal{V}(x), \quad \exists\, W \in \mathcal{V}(x) \quad W \subset V$ et $\forall y \in W \quad W \in \mathcal{V}(y)$,

(V_4) signifiant que tout voisinage de x contient un voisinage de x qui est voisinage de tous ses points, c'est-à-dire un ouvert auquel x appartient.

Les trois premières propriétés permettent de ranger $\mathcal{V}(x)$ dans l'ensemble des filtres sur E.

2. Filtres.

Soit E un ensemble ; un filtre sur E est une partie $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(E)$ qui satisfait aux axiomes suivants :

(F_1) $\quad F \in \mathcal{F}, \quad G \supset F \implies G \in \mathcal{F}$

(F_2) $\quad F \in \mathcal{F}, \quad F' \in \mathcal{F} \implies F \cap F' \in \mathcal{F}$

(F_3) $\quad \emptyset \notin \mathcal{F} \quad \mathcal{F} \neq \emptyset.$

Exemples de filtres : *a*) A étant une partie non vide de E, l'ensemble des parties de E qui contiennent A est un filtre (filtre des sur-ensembles de A). *b*) Sur un ensemble infini, l'ensemble des complémentaires des parties finies est un filtre.

Montrons que l'ensemble des voisinages d'un point x, c'est-à-dire $\mathcal{V}(x)$, *est un filtre.*

(V_3) établit : $\emptyset \notin \mathcal{V}(x)$; d'autre part, E étant toujours élément de $\mathcal{V}(x)$, on peut affirmer : $\mathcal{V}(x) \neq \emptyset$. (V_1) et (V_2) sont identiques à (F_1) et (F_2), $\mathcal{V}(x)$ est donc un filtre ; nous le nommerons dorénavant *filtre des voisinages de x.*

3. Définition d'une topologie par les voisinages.

Supposons qu'à chaque élément x d'un ensemble soit associé un filtre $\mathcal{V}(x)$ qui possède les propriétés (V_1) (V_2) (V_3) (V_4). Nous allons montrer qu'il existe une topologie (définie par ses ouverts) pour laquelle chaque ensemble $\mathcal{V}(x)$ est le filtre des voisinages de x.

Nous prendrons pour ouverts les parties O telles que, si $x \in O$, alors $O \in \mathcal{V}(x)$; nous devons d'abord vérifier les axiomes des ouverts.

(O_1) : en vertu de (V_1), une réunion d'ensembles, dont l'un appartient à $\mathcal{V}(x)$, appartient à $\mathcal{V}(x)$. Donc, une réunion d'ensembles O est un ensemble O.

(O_2) : en vertu de (V_2), une intersection finie d'ensembles appartenant à $\mathcal{V}(x)$ appartient à $\mathcal{V}(x)$. Une intersection finie d'ensembles O est un ensemble O.

(O_3) : E appartient à $\mathcal{V}(x)$ pour tout x, donc est un ensemble O. Enfin, $\emptyset$ est un ensemble O (*).

(*) Nous admettrons mieux cette propriété en pensant encore à sa négation :

A non ouvert $\iff \exists\, x \in A, \quad A \notin \mathcal{V}(x)$.

Le vide ne peut remplir cette condition.

Reste à vérifier que pour cette topologie chaque élément x a pour filtre de voisinage $\mathcal{V}(x)$. Soit $V \in \mathcal{V}(x)$; en vertu de (V_4), V inclut un ensemble W qui est un ensemble O et, en vertu de (V_3), $x \in W$; donc V contient un ouvert contenant x ; c'est un voisinage de x et $\mathcal{V}(x)$ est bien le filtre des voisinages de x (*).

On peut donc définir une topologie en se donnant convenablement les voisinages de chaque point ; les énoncés $(V_1), (V_2), (V_3), (V_4)$ sont alors appelés les axiomes des voisinages.

4. Bases de filtres et bases de voisinages.

L'ensemble des voisinages d'un point, ou, plus généralement, l'ensemble des éléments d'un filtre, est un ensemble inutilement lourd à manipuler, puisque la connaissance d'un élément suffit à entraîner la connaissance de tous ceux qui le contiennent. Ceci amène à poser la définition suivante : *étant donné un filtre $\mathcal{F}$ sur un ensemble* E, on appelle *base de ce filtre un sous-ensemble $\mathcal{B}$ de $\mathcal{F}$ tel que :*

$$F \in \mathcal{F} \iff \exists\, B \in \mathcal{B} \qquad B \subset F.$$

Axiomes des bases de filtre.

Remarquons que si B_1 et B_2 sont deux éléments d'une base, leur intersection est un élément du filtre (en vertu de V_2), donc inclut un élément de la base. D'où :

(B_1) $\quad B_1 \in \mathcal{B} \quad B_2 \in \mathcal{B} \implies \exists\, B' \in \mathcal{B} \quad B' \subset B_1 \cap B_2.$

Il est clair aussi que :

(B_2) $\quad \emptyset \notin \mathcal{B} \quad \mathcal{B} \neq \emptyset.$

Réciproquement, on vérifiera sans peine que si un ensemble $\mathcal{B}$ de parties B satisfait à (B_1) et (B_2), l'ensemble $\mathcal{F}$ de parties F défini par :

$$F \in \mathcal{F} \iff (\exists\, B \in \mathcal{B} \quad B \subset F)$$

satisfait bien aux axiomes (F_1) (F_2) (F_3). $\mathcal{B}$ est alors base de $\mathcal{F}$. (B_1) et (B_2) sont appelés *axiomes des bases de filtre.*

Bases équivalentes.

Un filtre possède différentes bases. Par exemple, dans un espace métrique, l'ensemble des boules de centre x constitue une base du filtre des voisinages de x ; mais l'ensemble des boules de centre x et de rayon ε_n (ε_n désignant le terme général d'une suite convergeant vers zéro) constitue aussi une base de $\mathcal{V}(x)$. Ces bases peuvent même être deux à deux disjointes. C'est le cas des précédentes si elles correspondent à deux suites ε_n disjointes. C'est aussi le cas de celles qu'on obtient en prenant les boules relatives à deux distances différentes définissant les mêmes

(*) On peut remplacer l'axiome (V_4) par le suivant :

(V'_4) $\quad \forall\, V \in \mathcal{V}(x) \quad \exists\, W \in \mathcal{V}(x) \quad W \subset V \quad \forall y \in W \quad V \in \mathcal{V}(y)$,

qui signifie que tout voisinage V de x contient un voisinage W de x de tous les points duquel V est voisinage, axiome qui est un peu moins fort que (V_4) puisque $W \in \mathcal{V}(y) \Rightarrow V \in \mathcal{V}(y)$. Avec ce nouvel axiome, la fin de la démonstration précédente est changée. Soit encore $x \in E$ et $V \in \mathcal{V}(x)$. On pose $A = \{ y \,;\, V \in \mathcal{V}(y) \}$. On a $x \in W \subset A \subset V$ en vertu d'une part de (V'_4), d'autre part de ce que $y \in A$ implique $y \in V$. L'ensemble A est ouvert car si $y \in A$, V'_4 implique qu'il existe $W' \in \mathcal{V}(y)$ avec $W' \subset V$ et $z \in W' \Rightarrow V \in \mathcal{V}(z)$, c'est-à-dire $z \in A$. On a donc $W' \subset A$ qui, joint à $W' \in \mathcal{V}(y)$, implique $A \in \mathcal{V}(y)$; c'est-à-dire que A est bien voisinage de tous ses points et V qui inclut A qui contient x est bien un voisinage de x.

ouverts, donc la même topologie (comme les diverses boules du plan considérées page 15).

Deux bases sont dites équivalentes si elles engendrent le même filtre.

Exercice 7. — Montrer que deux bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ sont équivalentes si, et seulement si, la double condition suivante est satisfaite :

$$\forall B_1 \in \mathcal{B}_1 \quad \exists B_2 \in \mathcal{B}_2 \qquad B_1 \supset B_2$$
$$\forall B_2 \in \mathcal{B}_2 \quad \exists B_1 \in \mathcal{B}_1 \qquad B_2 \supset B_1.$$

Autres exemples de bases de filtre.

Sur **N**, les sections finissantes :

$$s(n) = \{ m \; ; \; m \in \mathbf{N}, m > n \}$$

satisfont à (B_1) et (B_2) ; elles forment une base d'un filtre appelé *filtre de Fréchet* et qui est le filtre des complémentaires des parties finies de N.

Plus généralement, si E est un ensemble ordonné, tel que tout couple d'éléments possède un sup (E est un demi-treillis), la famille des sections finissantes (cf. *A.P.M.* I ; IV, 2, 1) est une base de filtre.

Exercice 8. — A quelle condition doit satisfaire un ordre sur un ensemble pour que la famille des sections finissantes non vides soit une base de filtre ?

Remarques sur la notion de filtre.

Sauf dans le cas du filtre des sur-ensembles d'une partie A de E, un filtre sur E n'a pas de plus petit élément, ou, ce qui est équivalent, n'a pas de base réduite à un seul élément, et, par suite, pas de base finie. Ce cas particulier écarté, il faut donc toujours se donner une infinité d'éléments pour définir une base de filtre (ou un filtre). Et, bien qu'en vertu des axiomes (F_1) ou (B_1) il soit inutile de se donner un élément d'un filtre (ou d'une base), si l'on s'est donné un élément plus petit que celui-là, il est impossible de choisir une base qui ne contienne pas d'éléments inutiles ; en d'autres termes, il n'existe pas (le cas du filtre des sur-ensembles écartés) de base minimale pour un filtre.

Une des intuitions qu'éveille le terme de filtre consiste à se représenter chaque élément du filtre comme un trou à travers lequel on fait passer ce que l'on veut analyser : on garde ce qui passe à travers le trou et on rejette le reste.

Par exemple, dire qu'une suite z_n de nombres complexes converge vers le nombre complexe a, c'est dire que tout élément du filtre des voisinages de a [ou, tout élément d'une base de voisinages, par exemple les boules — ou disques — de centre a et de rayon $\frac{1}{p}$ $(p \in \mathbf{N})$] contient tous les z_n, à l'exception d'au plus un nombre fini d'entre eux. Autrement dit, la suite z_n converge vers a si, et seulement si, ce que rejette chaque trou du filtre est un ensemble de z_n indexés par une partie finie de **N**.

§ 2. ENSEMBLES FERMES

On appelle *ensemble fermé* sur un espace topologique E un ensemble qui est le complémentaire d'un ouvert.

$$F \text{ fermé} \iff \complement_E F \text{ ouvert.}$$

Il importe de ne pas confondre cette notion avec celle d'ensemble non ouvert.

Une partie d'un espace topologique peut n'être ni ouverte, ni fermée.

Exemple : L'ensemble A des points $\frac{1}{n}$ de **R**. Il n'est pas ouvert : aucun de ses points n'étant centre d'une boule incluse dans A. Son complémentaire A' n'est pas ouvert non plus, le point O n'étant pas centre d'une boule incluse dans A'.

Une partie d'un espace topologique peut être ouverte et fermée. C'est le cas de $\emptyset$ et de E, mais il y en a d'autres.

Exemple : L'ensemble E est la réunion de deux boules, du plan, de rayon 1 dont les centres sont à la distance 3 ; si on prend comme distance de deux points de E leur distance dans le plan, chaque boule est ouverte dans E et donc aussi complémentaire d'un ouvert.

Les axiomes des fermés résultent immédiatement de ceux des ouverts (si on se rappelle que le complémentaire d'une réunion est l'intersection des complémentaires et le complémentaire d'une intersection la réunion des complémentaires) :

F_1) *Toute intersection de fermés est un fermé.*
F_2) *Toute réunion finie de fermés est un fermé.*
F_3) E *et* $\emptyset$ *sont des fermés.*

La donnée d'un système de fermés étant évidemment équivalente à la donnée du système d'ouverts correspondant, la donnée des fermés d'un espace E constitue une *troisième façon de définir une topologie sur* E.

§ 3. INTERIEUR. FERMETURE. ADHERENCE

1. Fermeture et intérieur.

Une partie A d'un espace topologique n'est, en général, ni ouverte ni fermée. Mais il est possible de lui associer canoniquement un fermé la contenant et un ouvert qu'elle contient.

En effet, toute famille de fermés ayant pour intersection un fermé, la famille des fermés contenant A a pour intersection un fermé contenant A, qui est le plus petit fermé contenant A : on l'appelle *fermeture* de A, et on le note $\overline{A}$.

De même la réunion de la famille des ouverts contenus dans A est un ouvert contenu dans A, et c'est le plus grand. On l'appelle *intérieur* de A, et on le note $\mathring{A}$.

Remarquons que les règles suivantes résultent des définitions :

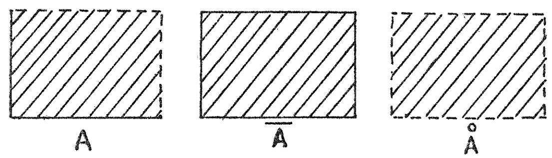
$$\complement \mathring{A} = \overline{\complement A} \qquad \complement \overline{A} = \mathring{\overline{\complement A}}.$$

Remarquons aussi que l'on peut donner de l'intérieur une définition équivalente : $\mathring{A}$ *est l'ensemble des éléments de l'espace dont* A *est voisinage,*

$$\mathring{A} = \{ x \; ; \quad A \in \mathcal{V}(x) \} .$$

En effet, si x appartient à $\mathring{A}$, ouvert contenu dans A, x admet A pour voisinage ; réciproquement, si A est voisinage de x, c'est que x appartient à un ouvert contenu dans A ; mais alors il est contenu dans la réunion de ces ouverts qui est $\mathring{A}$.

Exemples : 1° Dans le plan (muni de la topologie déduite de la distance ordinaire), l'ensemble défini par un contour fermé et comprenant les points intérieurs au contour et une partie du contour admet pour fermeture le même ensemble avec ses frontières complétées et pour intérieur, l'intérieur, (au sens vulgaire du mot), du contour.



2° $\mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$ n'est pas ouvert et son complémentaire $\mathbf{I}$ ne l'est pas non plus puisque dans toute boule de centre un réel, il y a des irrationnels et des rationnels. Tous les ouverts de $\mathbf{R}$ étant des réunions d'intervalles aucun, sauf le vide, ne peut-être inclus ni dans $\mathbf{Q}$, ni dans $\mathbf{I}$. Donc :

$$\mathring{\mathbf{Q}} = \emptyset \qquad \mathring{\mathbf{I}} = \emptyset.$$

L'application des règles $\complement \mathring{A} = \overline{\complement A}$, $\complement \overline{A} = \mathring{\overline{\complement A}}$ donne alors :

$$\overline{\mathbf{Q}} = \mathbf{R} \qquad \overline{\mathbf{I}} = \mathbf{R}$$

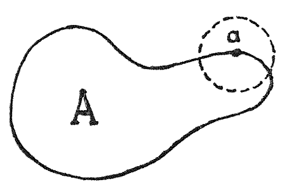
2. Point adhérent à un ensemble.

Soit E un espace topologique et $A \subset E$. Un point a sera dit *adhérent à* A si :

$$\forall\, V \in \mathcal{V}(a) \qquad V \cap A \neq \emptyset.$$

Il suffit d'ailleurs que cette propriété soit vérifiée pour une base des voisinages.

Exemples : 1° Dans le plan a est adhérent à A si pour tout ε il y a des points de A dans la boule de centre a, de rayon ε.



2° Sur $\mathbf{R}$, zéro est adhérent à l'ensemble

$$\left\{ \frac{1}{n} ;\ n \in \mathbf{N} \right\}.$$

Nous pouvons reprendre à ce propos l'image intuitive du filtre : dire que a est adhérent à A, c'est dire qu'une partie non vide de A passe à travers chaque « trou du filtre » des voisinages de A. Il faut d'ailleurs bien comprendre, dans ce cas comme chaque fois qu'on utilise un filtre, qu'il s'agit, en quelque sorte, d'essayer « un par un » les trous du filtre, et non d'exiger que ce que l'on filtre passe à travers tous les trous à la fois. C'est ainsi que dans le plan, on a pour tout point x :

$$\bigcap \{ V ;\ V \in \mathcal{V}(x) \} = \{ x \}$$

et, par suite, si x est adhérent à A sans appartenir à A on aura :

$$\bigcap \{ V ;\ V \in \mathcal{V}(x) \} \cap A = \emptyset$$

et cependant :

$$\forall\, V \in \mathcal{V}(x) \qquad V \cap A \neq \emptyset.$$

Les *points d'accumulation* satisfont à la définition des points adhérents mais, en outre, dans tout voisinage de $\mathcal{V}(a)$, on doit trouver des points de A distincts de a :

$$\forall\, V \in \mathcal{V}(a) \qquad (V - \{a\}) \cap A \neq \emptyset.$$

Un point adhérent à un ensemble et qui n'appartient pas à cet ensemble en est point d'accumulation (mais un point d'accumulation peut appartenir à l'ensemble).

3. Adhérence.

On appelle *adhérence* d'un ensemble, l'ensemble de ses points adhérents. Nous allons établir diverses propriétés des adhérences.

1° *L'adhérence d'un fermé est lui-même.* En effet, si $x \notin F$, x est un point de l'ouvert $\complement F$, qui est voisinage de x et dont l'intersection avec F est vide ; donc :

$$x \notin F \implies x \text{ non adhérent à } F.$$

D'autre part, tout point d'un ensemble en est évidemment point adhérent, donc :

$$\textit{adh}\ F = F.$$

2° Réciproque : *Un ensemble qui coïncide avec son adhérence est fermé.* Supposons que *adh* $F = F$ et soit $x \in \complement F$; x n'est pas adhérent à F. Donc :

$$\exists\, V \in \mathcal{V}(x) \qquad V \cap F = \emptyset,$$

ce qui entraîne $V \subset \complement F$. Par suite, $\complement F$ contient un voisinage de tous ses points : c'est un ouvert et F est fermé.

$$F \text{ fermé} \iff \textit{adh}\ F = F.$$

3° $A \subset B \implies \textit{adh}\ A \subset \textit{adh}\ B$ (démonstration immédiate).

4° *L'adhérence d'un ensemble coïncide avec sa fermeture.*

En effet :

$$A \subset \overline{A} \implies \textit{adh}\ A \subset \textit{adh}\ \overline{A} = \overline{A} \qquad (1).$$

D'autre part, on peut montrer que :

$$\textit{adh}\ (\textit{adh}\ A) = \textit{adh}\ A. \qquad (2).$$

Si, en effet, $x \in \textit{adh}\ (\textit{adh}\ A)$, c'est que tout voisinage de x rencontre *adh* A ; ce voisinage contient un voisinage ouvert O de x (axiome (V_4)) ; on peut affirmer $O \cap \textit{adh}\ A \neq \emptyset$; donc :

$$\exists\, a \in O \qquad a \in \textit{adh}\ A.$$

O est un voisinage de a et ce voisinage rencontre A. Tout voisinage de x rencontre donc A et $x \in \textit{adh}\ A$; d'où $\textit{adh}\ (\textit{adh}\ A) \subset \textit{adh}\ A$ et, l'inclusion opposée étant évidente, (2) est établi.

Mais alors *adh* A coïncidant avec son adhérence est un fermé. Elle contient donc A, ce qui, rapproché de (1), démontre :

$$\textit{adh}\ A = \overline{A}.$$

Dorénavant, nous remplacerons le symbole *adh* A par $\overline{A}$.

Exercice 9. — Retrouver ce résultat en cherchant les complémentaires des deux membres de la formule $\mathring{A} = \{ x ; A \in \mathcal{V}(x) \}$.

5° $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

En effet, $\bar{A} \cup \bar{B}$ est un fermé qui contient A et B, par suite $A \cup B$, donc qui contient $\overline{A \cup B}$. Mais, d'autre part, $\overline{A \cup B}$ est un fermé qui contient A, d'où $\bar{A}$ et B, donc $\bar{B}$, et enfin $\bar{A} \cup \bar{B}$. D'où l'égalité.

6° $\overline{A \cap B} \subset \bar{A} \cap \bar{B}$.

En effet, $A \cap B$ est inclus dans A, donc dans $\bar{A}$, dans B, donc dans $\bar{B}$, par suite dans $\bar{A} \cap \bar{B}$. Alors $\bar{A} \cap \bar{B}$, fermé incluant $A \cap B$, inclut sa fermeture.

Mais l'inclusion opposée n'est, cette fois, pas vraie, comme le montrent les contre-exemples suivants :

1° $\bar{\mathbf{Q}} = \mathbf{R}$; $\bar{\mathbf{I}} = \mathbf{R}$; $\bar{\mathbf{I}} \cap \bar{\mathbf{Q}} = \mathbf{R}$. Or, $\mathbf{Q} \cap \mathbf{I} = \emptyset$ et $\overline{\mathbf{Q} \cap \mathbf{I}} = \emptyset$.

2° Les intervalles $]a, b[$ et $]b, c[$ de la droite réelle ont pour fermeture $[a, b]$ et $[b, c]$ dont l'intersection est $\{ b \}$. Or, l'intersection des intervalles étant vide, l'adhérence de cette intersection l'est aussi.

On trouve par dualité (c'est-à-dire par considération des complémentaires des deux membres) les formules respectivement duales des formules 3, 5, 6, soient :

$$A \supset B \implies \mathring{A} \supset \mathring{B}$$
$$\widehat{A \cap B}^{\circ} = \mathring{A} \cap \mathring{B}$$
$$\widehat{A \cup B}^{\circ} \supset \mathring{A} \cup \mathring{B}.$$

Exercice 10. — Etablir ces formules : *a)* par dualité : *b)* directement.

Exercice 11. — Trouver dans le plan muni de sa topologie usuelle un ensemble tel que les 7 ensembles suivants soient distincts :

$$A,\ \bar{A},\ \mathring{A},\ \bar{\mathring{A}},\ \mathring{\bar{A}},\ \mathring{\bar{\mathring{A}}},\ \bar{\mathring{\bar{A}}}.$$

Frontière d'un ensemble. Si A est une partie d'un espace topologique E, on appelle *frontière de* A l'ensemble :

$$\bar{A} \cap \overline{\complement A}.$$

Il est clair que cet ensemble est fermé.

La frontière des ensembles de la figure 1 est constituée des contours des rectangles. Un ensemble peut être contenu dans sa frontière : sur **R**, la frontière de **Q** est **R**.

Exercice 12. — Etablir les équivalences :

A fermé $\iff$ frontière de A incluse dans A.
A ouvert $\iff$ frontière de A disjointe de A.

4. Définition d'une topologie par les fermetures.

Dans un ensemble E une topologie étant donnée, une application de $\mathcal{P}$ (E) dans $\mathcal{P}$ (E) se trouve définie : celle qui *à toute partie* A *de* E *fait correspondre son adhérence.* Cette application satisfait aux propriétés suivantes :

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$
$$\bar{\emptyset} = \emptyset$$
$$\bar{A} \supset A$$
$$\bar{\bar{A}} = \bar{A}.$$

Inversement, supposons que soit donnée *a priori* une application de $\mathcal{P}$ (E) dans $\mathcal{P}$ (E) qui, à toute partie A de E, fasse correspondre une partie $\tilde{A}$ telle que les relations suivantes soient vérifiées :

$$\forall A, B \in \mathcal{P}(E) \qquad \widetilde{A \cup B} = \tilde{A} \cup \tilde{B}$$
$$\tilde{\emptyset} = \emptyset$$
$$\forall A \in \mathcal{P}(E) \qquad \tilde{A} \supset A$$
$$\forall A \in \mathcal{P}(E) \qquad \tilde{\tilde{A}} = \tilde{A}.$$

Montrons qu'il existe une topologie telle que l'application précédente fasse correspondre à tout ensemble son adhérence. Nous avons vu qu'une topologie pouvait être définie par ses fermés : prenons pour fermés les ensembles tels que $\tilde{A} = A$. Nous devons montrer que : 1° ces ensembles satisfont aux axiomes des fermés ; 2° l'adhérence (pour cette topologie) de tout A est $\tilde{A}$.

1° *Les axiomes* (F_2) *et* (F_3) *sont immédiatement vérifiés. Pour vérifier* (F_1), c'est-à-dire pour étudier l'intersection d'une famille $\{ A_i \}$ d'ensembles A_i, telle que pour tout i, $\tilde{A}_i = A_i$, remarquons d'abord qu'il résulte de la première des hypothèses sur l'application $A \longrightarrow \tilde{A}$ que

$$A \subset B \implies \tilde{A} \subset \tilde{B}$$

(on peut en effet considérer B comme $A \cup (B - A)$). Ceci dit :

$$\forall i \qquad \cap A_i \subset A_i$$

entraîne :

$$\forall i \qquad \widetilde{\cap A_i} \subset \tilde{A}_i = A_i.$$

D'où :

$$\widetilde{\cap A_i} \subset \cap A_i.$$

Comme d'autre part :

$$\widetilde{\cap A_i} \supset \cap A_i,$$

l'axiome F_1 est vérifié.

2° D'autre part, *la fermeture d'un ensemble* A *est* $\tilde{A}$. En effet, la 4e hypothèse montre que A est fermé et c'est le plus petit fermé qui puisse contenir A (car si B fermé contient A, $\tilde{B} = B$ contient $\tilde{A}$).

§ 4. TOPOLOGIE INDUITE SUR UNE PARTIE D'UN ESPACE TOPOLOGIQUE

Soit E un espace topologique et $A \subset E$. On appelle *topologie induite sur* A *par la topologie de* E, la topologie qui admet pour ouverts les intersections de A avec les ouverts de E.

Il faut d'abord s'assurer que cette définition a un sens en vérifiant que les ouverts ainsi définis satisfont bien aux axiomes des ouverts. Or :

- $$\bigcup_{i \in I} (O_i \cap A) = \left(\bigcup_{i \in I} O_i \right) \cap A,$$

donc une réunion d'ouverts est un ouvert.

- $$(O_i \cap A) \cap (O_j \cap A) = (O_i \cap O_j) \cap A,$$

donc toute intersection finie d'ouverts est un ouvert.

- $E \cap A = A$, donc A est un ouvert.
- $\emptyset \cap A = \emptyset$, donc $\emptyset$ est un ouvert.

Il est clair que la topologie induite sur A peut également être définie en y prenant pour fermés les intersections avec A des fermés de E.

L'ensemble A muni de la topologie induite par celle de E est appelé *sous-espace topologique* de E.

Remarque 1. — Il faut se garder de croire que la topologie induite jouisse des mêmes propriétés que la topologie dont elle dérive.

Exemple : Dans le plan, avec sa métrique ordinaire, il n'y a pas d'ouverts autres que $\emptyset$ et E qui soient en même temps des fermés. [Si un tel ensemble existait, son intersection avec une droite réelle devrait être un ouvert et un fermé pour la topologie induite sur la droite qui est sa topologie naturelle. Or, un ouvert de la droite est une réunion d'intervalles ouverts tels que $]a, b[$; une borne a doit appartenir au complémentaire, mais alors ce complémentaire ne peut pas être ouvert, donc l'ouvert dont on est parti ne peut pas être fermé].

Par contre, nous avons vu que dans l'espace constitué de deux boules de rayon 1 et dont la distance des centres est 3, espace muni de la topologie induite par celle du plan, chacune de ces boules était ouvrte et fermée. Plus généralement, si A est une partie du plan, réunion de deux parties A_1 et A_2, d'adhérences disjointes, A_1 et A_2 sont ouvertes et fermées pour la topologie induite sur A.

Remarque 2. — La propriété pour un ensemble d'être ouvert ou fermé n'est pas intrinsèque : elle est relative à l'espace topologique dans lequel il est plongé (cf. exercice 13).

Exercice 13. — E étant un espace topologique et A une partie de E, quelle est la condition pour que les parties de A ouvertes (resp. fermées) pour la topologie induite sur A soient ouvertes (resp. fermées) dans E ?

Exercice 14. — Soit A une partie d'un espace E muni d'une topologie $\mathcal{T}$. Soit $\mathcal{T}_A$ la topologie induite sur A. Soit $B \subset A$; on peut définir l'intérieur et l'adhérence de B pour $\mathcal{T}$ ou pour $\mathcal{T}_A$. Démontrer que :

$$int_E B \subset int_A B$$

(int_E B signifiant intérieur pour la topologie sur E).

Comparer de même adh_E B et adh_A B.

Chapitre III

PRINCIPES GÉNÉRAUX DE CHOIX D'UNE TOPOLOGIE

§ 1. ORDRE SUR LA FAMILLE DES TOPOLOGIES D'UN ENSEMBLE

1. Finesse des topologies.

Une topologie sur un ensemble E est caractérisée par la famille de ses ouverts, qui est une partie de $\mathcal{P}(E)$ satisfaisant les axiomes (O_1), (O_2), (O_3). L'inclusion dans $\mathcal{P}(E)$ nous permet de définir un ordre sur la famille des topologies que peut recevoir un ensemble E.

Soient deux topologies définies par les familles de leurs ouverts $\mathcal{O}_1$ et $\mathcal{O}_2$ respectivement. Nous les appellerons, pour abréger le langage, topologies $(\mathcal{O}_1)$ et $(\mathcal{O}_2)$.

Si $\mathcal{O}_1$ est inclus dans $\mathcal{O}_2$, nous dirons que la topologie $(\mathcal{O}_1)$ est moins fine que la topologie $(\mathcal{O}_2)$.

Remarquons d'abord que l'ensemble des topologies possède, pour l'ordre ainsi défini, un plus petit élément, c'est-à-dire une topologie moins fine que toutes les autres ; c'est la topologie grossière, car la famille d'ouverts réduite à E et $\emptyset$ est incluse dans toute famille d'ouverts ; et cet ensemble possède aussi un plus grand élément, c'est-à-dire une topologie plus fine que toutes les autres : c'est la topologie discrète dont la famille d'ouverts, $\mathcal{P}(E)$, inclut toute autre famille d'ouverts.

2. Comparaison des voisinages.

Soit, un ensemble E, deux topologies $(\mathcal{O}_1)$ et $(\mathcal{O}_2)$ telles que $(\mathcal{O}_1)$ soit moins fine que $(\mathcal{O}_2)$. Si pour un même point x nous considérons les filtres des voisinages $\mathcal{V}_1(x)$ et $\mathcal{V}_2(x)$ relatifs à ces deux topologies, il est clair que tout élément de $\mathcal{V}_1(x)$ contenant un ouvert O qui appartient à $\mathcal{O}_1$, donc à $\mathcal{O}_2$, est aussi un élément de $\mathcal{V}_2(x)$, donc que :

$$\forall x \in E \qquad \mathcal{V}_1(x) \subset \mathcal{V}_2(x).$$

On dit, d'une manière générale, qu'un filtre $\mathcal{F}_2$ sur E est plus fin qu'un filtre $\mathcal{F}_1$, si $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2$ (inclusion dans $\mathcal{P}(E)$). Nous pouvons donc énoncer : la topologie $(\mathcal{O}_1)$ moins fine que la topologie $(\mathcal{O}_2)$ entraîne que, pour tout x, $\mathcal{V}_1(x)$ est moins fin que $\mathcal{V}_2(x)$.

Exercice 15. — $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ étant deux filtres sur un ensemble E, admettant respectivement pour bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$, montrer que $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2$ est équivalent à :

$$\forall B_1 \in \mathcal{B}_1 \quad \exists B_2 \in \mathcal{B}_2 \quad B_2 \subset B_1,$$

et que l'inclusion stricte est équivalente à l'ensemble de la condition précédente et de la suivante :

$$\exists B_2 \in \mathcal{B}_2 \quad \forall B_1 \in \mathcal{B}_1 \quad B_1 \not\subset B_2.$$

Réciproquement, si deux topologies $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$ sont telles que :

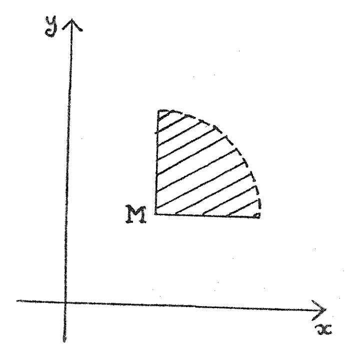
$$\forall x \in E \qquad \mathcal{V}_1(x) \subset \mathcal{V}_2(x),$$

un ouvert pour la topologie $\mathcal{T}_1$ devant appartenir à $\mathcal{V}_1(x)$ pour tous ses points x, appartient aussi à $\mathcal{V}_2(x)$ et est donc un ouvert pour $\mathcal{T}_2$. Donc, l'ensemble $\mathcal{O}_1$ des ouverts de $\mathcal{T}_1$ est inclus dans l'ensemble $\mathcal{O}_2$ des ouverts de $\mathcal{T}_2$ et $\mathcal{T}_1$ est moins fine que $\mathcal{O}_2$. *Pour comparer deux topologies sur un ensemble* E, *on pourra donc comparer leurs familles d'ouverts ou la famille des voisinages de tous les points de* E.

Exemple : Soit un plan muni de sa topologie habituelle et de l'ordre défini par rapport à deux axes Ox et Oy par :

$$M_1 \prec M_2 \iff \begin{cases} x_1 \leqslant x_2. \\ y_1 \leqslant y_2. \end{cases}$$

Considérons en tout point M du plan, une famille de boules qui forme une base du filtre des voisinages de ce point, et prenons l'intersection de ces boules avec le quadrant des majorants de M. Ces quarts de boules satisfont aux axiomes des bases de filtre et définissent un nouveau filtre. Le filtre ainsi défini satisfait à l'axiome (V_4). [Car tout point du quart de boule est



sommet d'un quart de boule inclus dans le premier quart de boule, donc tout élément du filtre contient un ensemble qui est voisinage de tous ses points]. Le filtre ainsi défini est donc un filtre de voisinages et définit une nouvelle topologie qui est plus fine que la topologie usuelle, car tout ensemble incluant une boule de sommet M inclut le quart de boule, de même rayon, de centre M, donc tout élément du filtre $\mathcal{V}_1$ (M) (topologie usuelle) est un élément de $\mathcal{V}_2$(M) (topologie nouvelle), c'est-à-dire $\mathcal{V}_1(M) \subset \mathcal{V}_2(M)$.

Plus généralement, sur un ensemble muni d'une topologie et d'un ordre, on appelle *filtre des voisinages à droite* (resp. à gauche) de x, et on note $\mathcal{V}^+(x)$ (resp. $\mathcal{V}^-(x)$), le filtre qui admet pour base l'ensemble obtenu en prenant l'intersection de tout élément de $\mathcal{V}(x)$ avec l'ensemble des majorants (resp. minorants) de x, et on aura toujours :

$$\mathcal{V}(x) \subset \mathcal{V}^+(x) \qquad \mathcal{V}(x) \subset \mathcal{V}^-(x).$$

3. Comparaison des intérieurs et des adhérences.

Soient toujours les topologies ($\mathcal{O}_1$) et ($\mathcal{O}_2$) définies par leurs ensembles d'ouverts, avec $\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_2$, et soit $A \subset E$. Le plus grand ouvert appartenant à $\mathcal{O}_1$ et inclus dans A appartient à $\mathcal{O}_2$. Il en résulte qu'il est inclus dans le plus grand ouvert inclus dans A et appartenant à $\mathcal{O}_2$. Par suite :

$$(\mathcal{O}_1) \text{ moins fine que } (\mathcal{O}_2) \implies \operatorname{int}_{(\mathcal{O}_1)} A \subset \operatorname{int}_{(\mathcal{O}_2)} A.$$

Soient $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ les ensembles des fermés relatifs à chaque topologie [$\mathcal{F}_1$ (resp. $\mathcal{F}_2$) est l'ensemble des complémentaires des éléments de $\mathcal{O}_1$ (resp. $\mathcal{O}_2$)], alors :

$$\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_2 \implies \mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2$$

et un raisonnement analogue au précédent montre que le plus petit des éléments de $\mathcal{F}_1$ incluant A, inclut le plus petit des éléments de $\mathcal{F}_2$ incluant A, par suite :

$$(\mathcal{O}_1) \text{ moins fine que } (\mathcal{O}_2) \implies \operatorname{adh}_{(\mathcal{O}_1)} A \supset \operatorname{adh}_{(\mathcal{O}_2)} A.$$

Notons ce que donnent les deux cas extrêmes : pour la topologie grossière :

$$\operatorname{int} A = \emptyset$$
$$\operatorname{adh} A = E$$

pour la topologie discrète : $\operatorname{int} A = A$

$$\operatorname{adh} A = A.$$

4. Treillis des topologies.

Nous allons maintenant montrer que, pour l'ordre que nous venons de définir, *l'ensemble des topologies de* E *forme un treillis complet.* Nous avons déjà vu que cet ensemble possédait un plus petit et un plus grand élément. D'autre part si on considère un ensemble de topologies définies par l'ensemble $\{\mathcal{O}_i \,;\, i \in I\}$ (I ensemble fini ou infini d'indices) de leurs familles d'ouverts, cet ensemble possède une borne inférieure. L'ensemble des topologies admet en effet pour minorant toute topologie dont la famille d'ouverts est incluse, pour tout $i \in I$, dans la famille $\mathcal{O}_i$, donc est incluse dans leur intersection $\mathcal{O} = \bigcap_{i \in I} \mathcal{O}_i$. Or, il se trouve que $\mathcal{O}$ satisfait aux trois axiomes (O_1), (O_2), (O_3) comme il est immédiat de le vérifier. $\mathcal{O}$ elle-même peut donc être une famille d'ouverts et définit une topologie qui sera le plus grand des minorants des topologies ($\mathcal{O}_i$), c'est-à-dire la plus fine des topologies moins fines que les topologies ($\mathcal{O}_i$).

Nous appliquerons alors le théorème démontré dans le *Cours A.P.M. I* (IV, 2, 2) : « *Quand un ensemble ordonné possède un plus grand élément et que chacune de ses parties possède une borne inférieure, chaque partie possède aussi une borne supérieure* » ; en d'autres termes, un tel ensemble est *un treillis complet.*

Puisque nous avons montré que l'ensemble des topologies satisfaisait aux hypothèses de ce théorème, il est établi que cet ensemble est un treillis complet.

Il nous reste à construire effectivement la topologie dont nous venons d'établir l'existence, à savoir : la moins fine des topologies plus fines que celles de l'ensemble $\{(\mathcal{O}_i) \,;\, i \in I\}$, c'est-à-dire la moins fine de celles dont la famille d'ouverts contient toutes les familles $\mathcal{O}_i$.

5. Générateurs d'une topologie ; base des ouverts.

Nous traiterons, plus généralement, le problème suivant :

$\mathcal{G} \subset \mathcal{P}(E)$ *étant une famille de parties de* E, *trouver toutes les topologies dont la famille des ouverts contient* ($\mathcal{G}$) *et en particulier la moins fine d'entre elles* (dont la connaissance suffira à déterminer les autres).

Si $\mathcal{G}$ vérifie les axiomes (O_1), (O_2), (O_3), la topologie admettant $\mathcal{G}$ comme famille d'ouverts est la topologie cherchée.

S'il n'en est pas ainsi, nous devons adjoindre à $\mathcal{G}$ les éléments nécessaires pour que l'ensemble obtenu vérifie les axiomes. Nous commençons, si c'est nécessaire, par lui adjoindre E et $\emptyset$ pour que cet ensemble vérifie (O_3) et nous considérons ensuite l'ensemble $\mathcal{G}_1$ des intersections finies d'éléments de $\mathcal{G}$. L'ensemble $\mathcal{G}_1$ vérifie alors (O_2) et (O_3) [car une intersection finie d'éléments de $\mathcal{G}_1$ est encore une intersection finie d'éléments de $\mathcal{G}$, donc appartient à $\mathcal{G}_1$]. Nous considérons ensuite l'ensemble $\mathcal{G}_2$ des réunions d'éléments de $\mathcal{G}_1$. L'ensemble $\mathcal{G}_2$ satisfait à (O_3) ; il satisfait à (O_1) [car une réunion d'éléments de $\mathcal{G}_2$ est encore une réunion d'éléments de $\mathcal{G}_1$, donc appartient à $\mathcal{G}_2$].

Enfin, on peut montrer que $\mathcal{G}_2$ satisfait encore à (O_2). Soient, en effet :

$$U_1 = \bigcup \{ B_i \,;\, i \in I, \quad B_i \in \mathcal{G}_1 \}$$

$$U_2 = \bigcup \{ B_j \,;\, j \in J, \quad B_j \in \mathcal{G}_1 \}$$

deux éléments de $\mathcal{G}_2$. Leur intersection $U_1 \cap U_2$ vaut (cf. *A.P.M. I* ; exercice 12) :

$$U_1 \cap U_2 = \bigcup \{ B_i \cap B_j \,;\, (i, j) \in I \times J \}$$

$U_1 \cap U_2$ appartient donc encore à $\mathcal{G}_2$.

La famille $\mathcal{G}_2$ ainsi construite est donc la famille des ouverts de la topologie cherchée. Cette famille étant la plus petite qui contienne $\mathcal{G}$, l'ensemble $\mathcal{G}$ sera appelé *un système de générateurs de la topologie* ($\mathcal{G}_2$). L'ensemble $\mathcal{G}_1$ est tel que tout ouvert de la topologie est une réunion d'éléments de $\mathcal{G}_1$. Une telle famille d'ouverts sera appelée une *base des ouverts de la topologie.*

Exemple : Dans le cas des espaces métriques, l'ensemble des boules forme une base de la topologie puisque les ouverts sont des réunions de boules.

Exercice 16. — Trouver les topologies, sur **R**, engendrées par les familles $\mathcal{G}$ suivantes. Déterminer une (ou plusieurs) bases pour chacune de ces topologies :

1) Ensemble des demi-droites $]a, +\infty[$; $a \in \mathbf{R}$.
2) Ensemble des demi-droites $]-\infty, a[$; $a \in \mathbf{R}$.
3) Réunion des deux ensembles précédents.
4) Ensemble des demi-droites $]a, +\infty[$; $a \in \mathbf{Q}$.
5) Ensemble des demi-droites $]-\infty, a[$; $a \in \mathbf{Q}$.
6) Réunion des deux ensembles précédents.

Déterminer ce que sont les applications continues de **R** (muni de l'une de ces topologies), dans **R** (muni de l'une de ces topologies).

Il y aura lieu de faire intervenir les notions de fonctions semi-continues inférieurement (resp. supérieurement) qui sont définies par

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad |x - x_0| < \eta \quad \Rightarrow \quad f(x) > f(x_0) - \varepsilon$$
$$(\text{resp. } f(x) < f(x_0) + \varepsilon).$$

Exercice 17. — Une famille d'écarts $\{ e_i \,;\, i \in I \}$ étant donnée sur un ensemble E, on appelle topologie définie par la famille e_i la topologie $\mathcal{T}$ ayant pour générateurs les boules $B(e_i, x, r)$ où i décrit I, x décrit E et r décrit $\mathbf{R}^+ - \{0\}$. On cherchera une base simple des ouverts de $\mathcal{T}$ et on montrera que si I est fini, $\mathcal{T}$ peut être définie par un seul écart e. (Mais il y a une infinité d'écarts e possédant cette propriété).

§ 2. PRINCIPES DE CHOIX D'UNE TOPOLOGIE

1. Finesse des topologies et continuité.

Etant donnés deux espaces topologiques E_1 et E_2, nous savons qu'une application f de E_1 dans E_2 est continue si, et seulement si, l'image réciproque $\overset{-1}{f}(O_2)$ de tout ouvert O_2 de E_2 est un ouvert O_1 de E_1.

Une application continue d'un espace E_1 *dans un espace* E_2 *reste continue si on remplace :*

la topologie sur E_2 *par une topologie moins fine,*
la topologie sur E_1 *par une topologie plus fine.*

En effet, dans le premier cas, l'ensemble des nouveaux ouverts de E_2 étant inclus dans l'ensemble des anciens, leurs images réciproques n'auront pas cessé d'être des ouverts de E_1. Dans le deuxième cas, l'ensemble des nouveaux ouverts de E_1 incluant l'ensemble des anciens, les images réciproques des ouverts de E_2, qui étaient des ouverts de E_1, n'auront pas cessé d'en être.

Il est clair que, lors de tels changements de topologie, toutes les applications continues restent continues, *mais des applications qui n'étaient pas continues peuvent le devenir.* En particulier si, sur E_2, on met la topologie grossière, les seules images réciproques à considérer sont celle du vide (qui est toujours le vide) et celle de E_2 (qui est toujours E_1). Toute application de E_1 sur E_2 muni de la topologie grossière est donc continue. De même, si E_1 est muni de la topologie discrète, toute image réciproque est un ouvert, puisque toute partie de E_2 est un ouvert. Toute application de E_1 muni de la topologie discrète, dans E_2, est donc continue.

2. Espaces topologiques homéomorphes.

Deux espaces topologiques seront dits *homéomorphes* s'il existe une bijection de E_1 sur E_2 telle qu'elle-même et sa bijection réciproque soient toutes deux continues, ce qu'on exprime plus brièvement en disant qu'*il existe une application* f *de* E_1 *sur* E_2 *bijective et bicontinue.*

L'image de tout ouvert de E_1 par f est alors un ouvert de E_2 et l'image de tout ouvert de E_2 par $\overset{-1}{f}$ est un ouvert de E_1. Si f est une bijection bicontinue de E_1 sur E_2, elle demeure continue si on remplace la topologie de E_1 par une topologie strictement plus fine ; mais alors f n'est plus bicontinue.

REMARQUE : Si on considère qu'une application continue est analogue pour une structure topologique à ce qu'un homomorphisme est pour une structure algébrique, un homéomorphisme apparaîtra comme l'analogue d'un isomorphisme. Mais il se présente une différence essentielle avec les isomorphismes de structures algébriques : un homomorphisme bijectif de structures algébriques est un isomorphisme, c'est-à-dire que l'application réciproque est aussi un homomorphisme. Au contraire, *une application bijective et continue n'a pas nécessairement pour réciproque une application continue.*

Si, sur un même ensemble E, on définit deux topologies $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$, telles que $\mathcal{T}_1$ soit strictement plus fine que $\mathcal{T}_2$, l'application identique de E (muni de $\mathcal{T}_1$), sur E (muni de $\mathcal{T}_2$), est bijective et continue, mais sa réciproque n'est pas continue. Et $\mathcal{T}_1$ est égale à $\mathcal{T}_2$ si, et seulement si, cette application identique est bicontinue.

Exercice 18. — Déterminer tous les homéomorphismes de $[0, 1]$ sur lui-même.

Si f est une application continue et dérivable d'un segment $[a, b]$ de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, et si, en x_0, la dérivée $f'(x_0)$ est différente de zéro, il existe un intervalle $]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$ sur lequel la restriction de f a une réciproque, et est bicontinue : cette restriction est alors un homéomorphisme d'un voisinage de x_0 sur un voisinage de $f(x_0)$, on dit que c'est *un homéomorphisme local.*

Une circonstance analogue se produit lorsque l'on considère une application holomorphe d'un ouvert de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{C}$: si, en un point z_0, $f'(z_0) \neq 0$, il existe un voisinage de z_0 sur lequel la restriction de f en est un homéomorphisme sur un voisinage de $f(z_0)$.

Remarquons encore qu'une application peut fournir un homéomorphisme local en chaque point et ne pas être un homéomorphisme : c'est le cas de l'application de $\mathbf{R}$ sur un cercle, qui au point $x \in \mathbf{R}$ fait correspondre le point d'abscisse curviligne x sur le cercle.

3. Choix de topologies sur un ensemble.

Nous pouvons poser le problème suivant : *étant donnés deux ensembles* E_1 *et* E_2 *dont l'un est muni d'une topologie et une famille* $\mathcal{F}$ *d'applications de* E_1 *dans* E_2, *comment choisir la topologie sur l'espace qui en est encore démuni pour que les applications de la famille* $\mathcal{F}$ *soient continues ?*

Si c'est la topologie sur E_2 qui est connue, il suffira de trouver la moins fine des topologies sur E_1 répondant à la question, en vertu des remarques précédentes. Si, au contraire, c'est la topologie sur E_1 qui est connue, il suffira de trouver la plus fine des topologies sur E_2 répondant à la question.

Laissant de côté pour l'instant le cas où la topologie sur E_1 est donnée, qui sera abordé au § 5, *commençons par le cas où c'est la topologie sur* E_2 *qui est donnée.* Si l'on veut rendre continue une application f de E_1 dans E_2, il faut, et il suffit, que l'ensemble des ouverts de E_1 contienne l'ensemble des parties $\overset{-1}{f}(O_2)$ où O_2 décrit $\mathcal{O}_2$. L'ensemble des ouverts $\{\overset{-1}{f}(O_2)\ ;\ O_2 \in \mathcal{O}_2\}$ est le système de générateurs des ouverts ; mais il résulte immédiatement des propriétés des ouverts de E_2 d'une part, des propriétés des applications réciproques d'autre part, que cet ensemble satisfait aux trois axiomes des ouverts et constitue donc la famille des ouverts de la topologie cherchée.

Un cas particulier déjà vu en est la topologie induite par un espace topologique E sur une de ses parties A : c'est la moins fine des topologies rendant continue l'injection canonique de A dans E.

Si on veut rendre continue une famille $\mathcal{F}$ d'applications, la recherche de la famille des ouverts est un peu moins immédiate. On peut d'ailleurs se trouver dans la situation, encore plus générale, suivante : soit

un ensemble E et une famille E_i $(i \in I$, ensemble d'indices) d'espaces topologiques ; et soient $\{f_{ij}\}$, $j \in J_i$, une famille d'applications de E dans chaque E_i ; on cherche les topologies sur E (et par conséquent la moins fine de ces topologies) pour que toutes les applications f_{ij} soient continues. Cette topologie, dont on rappelle parfois l'origine en la qualifiant de *topologie initiale,* doit admettre, en vertu du même raisonnement que ci-dessus, la famille :

$$\{\overset{-1}{f_{ij}}(O_i)\ ;\ O_i \in \mathcal{O}_i\ ;\ i \in I\ ;\ j \in J_i\}$$

comme système de générateurs. Cette fois, l'intersection de deux éléments $\overset{-1}{f_{ij}}(O_i)$ avec des indices i différents n'a aucune raison d'appartenir à la famille. Pour obtenir une base de l'ensemble des ouverts de la topologie cherchée, il faudra prendre l'ensemble $\mathcal{G}_1$ des intersections finies de générateurs.

Nous allons dans le paragraphe suivant étudier de plus près un cas très important du problème précédent.

§ 3. TOPOLOGIE PRODUIT

1. Produit d'un nombre fini d'espaces.

Examinons le cas où E est le produit cartésien de deux espaces topologiques E_1 et E_2. Il s'agit de munir E d'une topologie qui rende continues les deux *projections* p_1 et p_2 de E dans E_1 et dans E_2 :

$$p_1 : x = (x_1, x_2) \in E \longrightarrow p_1(x) = x_1 \in E_1$$
$$p_2 : x = (x_1, x_2) \in E \longrightarrow p_2(x) = x_2 \in E_2.$$

La moins fine des topologies répondant à la question est dite *topologie produit sur* $E_1 \times E_2$.

Un système de générateurs de cette topologie est l'ensemble :

$$\{\overset{-1}{p_1}(O_1)\ ;\ O_1 \in \mathcal{O}_1\} \cup \{\overset{-1}{p_2}(O_2)\ ;\ O_2 \in \mathcal{O}_2\}$$

$\mathcal{O}_1$ et $\mathcal{O}_2$ désignant les ensembles d'ouverts de E_1 et E_2 respectivement. Nous devons construire $\mathcal{G}_1$ en prenant les intersections finies d'éléments de l'ensemble précédent.

Toute intersection de deux éléments $\overset{-1}{p_1}(O_1)$ (ou $\overset{-1}{p_2}(O_2)$) étant un élément de même forme, tout revient à trouver ce que sont les intersections de la forme :

$$\overset{-1}{p_1}(O_1) \cap \overset{-1}{p_2}(O_2).$$

Or, $\overset{-1}{p_1}(O_1)$ est l'ensemble des couples (x_1, x_2) dont la première composante appartient à O_1 et $\overset{-1}{p_2}(O_2)$ est l'ensemble des couples dont la deuxième composante appartient à O_2. Donc :

$$\overset{-1}{p_1}(O_1) \cap \overset{-1}{p_2}(O_2) = O_1 \times O_2.$$

Une base des ouverts de la topologie produit sur E est l'ensemble :

$$\mathcal{G}_1 = \{O_1 \times O_2\ ;\ O_1 \in \mathcal{O}_1\ ;\ O_2 \in \mathcal{O}_2\}.$$

Observons qu'il suffira, en fait, de faire décrire à O_1 et à O_2 respectivement des bases des ouverts $\mathcal{U}_1 \subset \mathcal{O}_1$ et $\mathcal{U}_2 \subset \mathcal{O}_2$ pour obtenir une base des ouverts de la topologie produit. En effet, si O_1 est une réunion d'éléments de $\mathcal{U}_1$ et O_2 une réunion d'éléments de $\mathcal{U}_2$, l'ensemble $O_1 \times O_2$ est une réunion d'éléments de la forme $U_1 \times U_2$ où U_1 appartient à $\mathcal{U}_1$ et U_2 à $\mathcal{U}_2$; un ouvert de E, réunion d'éléments $O_1 \times O_2$, sera aussi une réunion d'éléments de la forme $U_1 \times U_2$ et

$$\mathcal{S}'_1 = \{ U_1 \times U_2 \; ; \; U_1 \in \mathcal{U}_1 \; ; \; U_2 \in \mathcal{U}_2 \}$$

est bien une base des ouverts de E.

Exemple de topologie produit : Le plan $\mathbf{R}^2$ est considéré comme espace produit $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$, l'ensemble $\mathbf{R}$ étant muni de sa topologie habituelle. Conformément à la remarque précédente, il suffira de faire décrire à O_1 une base des ouverts de $\mathbf{R}$ qui pourra être l'ensemble des intervalles ouverts de $\mathbf{R}$; on fera de même pour O_2 et on obtiendra pour base des ouverts sur $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ l'ensemble des rectangles ouverts du plan, de côtés parallèles aux axes (supposés orthogonaux).

Exercice 19. — Montrer que si E_1 et E_2 sont deux espaces métriques munis de distances d_1 et d_2 respectivement, la topologie produit sur E est aussi une topologie d'espace métrique et que, comme distance sur E, on peut prendre une des distances suivantes :

a) $d(x, y) = d_1(x_1, y_1) + d_2(x_2, y_2)$,
b) $d(x, y) = \sup\left(d_1(x_1, y_1), d_2(x_2, y_2)\right)$,
c) $d(x, y) = \sqrt{d_1^2(x_1, y_1) + d_2^2(x_2, y_2)}$.

2. Produit d'une infinité d'espaces.

Soit E_i ($i \in I$, ensemble infini d'indices) une famille d'espaces topologiques. La topologie produit sur l'espace $\prod E_i$ est la moins fine des topologies qui rendent continues toutes les projections :

$$\mathrm{pr}_i : x \in E \longrightarrow x_i \in E_i.$$

Un système de générateurs des ouverts de la topologie cherchée est constitué par :

$$\{ \overset{-1}{\mathrm{pr}_i}(O_i) \; ; \; i \in I \; ; \quad O_i \in \mathcal{O}_i \}$$

et une base de ces ouverts est formée par l'ensemble des intersections finies de ces générateurs, soit par l'ensemble des éléments de la forme :

$$\overset{-1}{\mathrm{pr}_{i_1}}(O_{i_1}) \cap \overset{-1}{\mathrm{pr}_{i_2}}(O_{i_2}) \ldots \cap \overset{-1}{\mathrm{pr}_{i_n}}(O_{i_n}) \qquad (1)$$

Or, les $x \in E$ qui appartiennent à cet élément sont ceux dont les n coordonnées d'indices $i_1, \ldots, i_n$ appartiennent respectivement à $O_{i_1}, \ldots, O_{i_n}$ et dont les autres sont arbitraires. On peut dont écrire l'ensemble (1) sous la forme :

$$\prod_{i \in J} O_i \times \prod_{i \in I - J} E_i$$

J étant une partie finie de I.

On obtient une base de l'ensemble des ouverts en faisant décrire à J l'ensemble des parties finies de I et à O_i l'ensemble $\mathcal{O}_i$ pour tout $i \in J$. On obtiendra une base plus restreinte (incluse dans la précédente) en remplaçant chaque $\mathcal{O}_i$ par une base $\mathcal{U}_i \subset \mathcal{O}_i$.

Exercice 20. — *Produit dénombrable d'espaces métriques.*

1° Si d est une distance définie sur un ensemble E, il en est de même de δ définie par :

$$\delta(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$$

et δ définit la même topologie que d.

2° Soit E_n avec $n \in \mathbf{N}$, une famille dénombrable d'espaces métriques et $E = \prod \{ E_n \; ; \; n \in \mathbf{N} \}$ leur produit cartésien. A la distance d_n de E_n, on associe la distance δ_n définie en 1°, en on définit sur $E \times E$ (avec $x = (x_n)$ et $y = (y_n)$) l'application δ dans $\mathbf{R}+$ donnée par :

$$\delta(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \delta_n(x_n, y_n).$$

Montrer que δ est une distance sur E, et que la topologie qu'elle définit est la topologie produit.

3. Quelques résultats relatifs aux topologies produits (résultats que nous laissons au lecteur le soin d'établir).

a) On appelle *coupe* d'un produit $E_1 \times E_2$, relative à l'élément $x_1 \in E_1$, l'ensemble des éléments du produit cartésien dont la première coordonnée est x_1, ou, si l'on préfère, $\overset{-1}{p_1}(x_1)$. Il existe une bijection canonique entre E_2 et la coupe $x = x_1$:

$$(x_1, x_2) \longrightarrow x_2.$$

Si on considère la topologie induite sur la coupe par la topologie produit, cette bijection est un homéomorphisme.

b) La projection $p_1(O)$ sur E_1 d'un ouvert O de $E_1 \times E_2$ est un ouvert.

Notons que le théorème analogue pour les fermés est faux.

Contre-exemple : Une branche d'hyperbole équilatère $y = \frac{1}{x}$ est un fermé du plan pour la topologie usuelle car son complémentaire est ouvert ; sa projection sur Ox est ouverte, ce qui, sur $\mathbf{R}$, implique qu'elle n'est pas fermée.

c) Soit F un espace topologique et une application f de F dans $E_1 \times E_2$ muni de la topologie produit,

$$F \xrightarrow{f} E = E_1 \times E_2,$$

et les projections p_1 et p_2 de E sur ses composantes.

f est continue si, et seulement si, $p_1 \circ f$ et $p_2 \circ f$ *sont continues.*

Exercice 21. — Démontrer cette propriété.

En déduire que si E_1 est homéomorphe à E'_1 et E_2 homéomorphe à E'_2, alors $E_1 \times E_2$ est homéomorphe à $E'_1 \times E'_2$.

d) Etant donnée une application f d'un espace produit dans un espace F :

$$E_1 \times E_2 \xrightarrow{f} F$$

si f est continue, ses restrictions aux coupes sont continues. La réciproque est fausse.

Ce sont les théorèmes classiquement énoncés : une fonction continue de plusieurs variables est continue par rapport à chacune de ces variables. Il ne suffit pas qu'elle soit continue par rapport à chaque variable pour être continue, avec le contre-exemple classique de la fonction :

$$z = \frac{xy}{x^2 + y^2} \qquad \text{avec } z\,(0, 0) = 0 \text{ au voisinage de l'origine.}$$

§ 4. TOPOLOGIES COMPATIBLES AVEC UNE STRUCTURE ALGEBRIQUE

1. Groupe topologique.

1° On appelle *groupe topologique un groupe* G *muni d'une topologie compatible avec sa structure de groupe, c'est-à-dire tel que les applications :*

$$f : G^2 \longrightarrow G \quad \text{avec } f(x, y) = xy \qquad \text{et} \qquad g : G \longrightarrow G \quad \text{avec } g(x) = x^{-1}$$

soient continues.

Remarquons que l'application g est un homéomorphisme puisqu'elle est sa propre application réciproque.

On peut remplacer la double condition précédente par la suivante : *l'application*

$$h : G^2 \longrightarrow G \quad \text{avec } h(x, y) = xy^{-1}$$

doit être continue.

En effet, $y \xrightarrow{g} y^{-1}$ étant un homéomorphisme de G sur lui-même, $(x, y) \xrightarrow{g'} (x, y^{-1})$ est un homéomorphisme de G^2 sur lui-même (voir exercice 21), et $h = f \circ g'$ est continue. *Réciproquement*, si h est continue, sa restriction à la coupe $x = e$, élément neutre de G, soit $(e, y) \xrightarrow{h'} y^{-1}$, est continue ; et si φ désigne l'homéomorphisme $y \xrightarrow{\varphi} (e, y)$, on voit que $g = h' \circ \varphi$, donc est continue, et $f = h \circ g'$ l'est aussi.

Remarque. — L'application $(x, a) \longrightarrow xa$ (translation à droite) est la restriction de l'application f à la coupe $y = a$ de G^2. Elle est continue. Le composé de l'homéomorphisme $x \longrightarrow (x, a)$ et de cette restriction est donc une application :

$$x \longrightarrow xa$$

continue. Or, une telle application est bijective et admet la bijection réciproque $x \longrightarrow xa^{-1}$; cette application est, elle aussi, continue. L'application $x \longrightarrow xa$ est donc un homéomorphisme de G sur lui-même. Le point a est l'image du point e. Il en résulte que les voisinages de a sont déduits des voisinages de e par $x \longrightarrow xa$ et que la connaissance des voisinages d'un seul point entraîne la connaissance des voisinages de tous les points.

Exemples de groupes topologiques :

R pour l'addition et sa topologie usuelle.

R — $\{0\}$ pour la multiplication et sa topologie usuelle.

R/**Z** = T_1 (voir *A.P.M. I*, page 41) pour l'addition et la topologie induite sur le cercle par la topologie usuelle du plan (les voisinages de tout point sont déduits par rotation des voisinages d'un point).

2° *Tout sous-groupe d'un groupe topologique est un sous-groupe topologique, pour la topologie induite.*

En effet, soient $E' \subset E$, $F' \subset F$, les topologies induites sur les sous-espaces E' et F' par celles de E et F et la topologie produit sur $E' \times F'$;

celle-ci est la même que la topologie induite sur $E' \times F' \subset E \times F$ par la topologie produit sur $E \times F$, comme on le vérifie en constatant l'identité des familles d'ouverts. D'autre part, si une application f de E dans F est continue, sa restriction g à $A \subset E$ est aussi continue, la topologie de A étant la topologie induite, car, l'image réciproque par f de tout ouvert de F étant un ouvert de E, son image réciproque par g est l'intersection de A et d'un ouvert de E, c'est-à-dire un ouvert de A.

Appliqués à G^2 et à $G'^2 \subset G^2$, G' étant un sous-groupe de G, ces résultats montrent que l'application :

$$G'^2 \longrightarrow G' \subset G$$
$$(x, y) \qquad\quad xy^{-1}$$

restriction de l'application h précédemment considérée, est continue pour la topologie induite sur G' par la topologie de G, donc que G' est, pour cette topologie, un groupe topologique.

Exemple : **Q** est pour l'addition un groupe topologique pour la topologie induite par celle de **R**. Il en est de même pour **Z**, mais tout point de **Z** étant intersection de **Z** et d'un ouvert de **R**, la topologie induite sur **Z** est la topologie discrète, ce qui lui ôte tout intérêt : tout groupe est topologique pour la topologie discrète.

Exercice 22. — I. Sur le groupe G des isométries du plan, où chaque isométrie f est définie par la donnée des images $f(a)$, $f(b)$, $f(c)$ de trois points fixes a, b, c, non alignés, on définit une distance par :

$$\delta(f, g) = sup \, \{ \, d(f(a), g(a)), \, d(f(b), g(b)), \, d(f(c), g(c)) \, \}$$

d désignant la distance usuelle du plan.

1) Montrer que δ est bien une distance.

2) e désignant la transformation identique, montrer que la distance d'un point à son image dans une isométrie positive f est majorée par $\lambda\delta(e, f)$, où λ désigne un coefficient réel qui dépend du point considéré et non de l'application f ; et que, plus généralement, la distance des images d'un point par deux isométries de même nature (toutes deux positives ou toutes deux négatives) est majorée par $\lambda\delta(f, g)$.

3) Montrer que, pour ε suffisamment petit il n'existe pas d'isométrie négative dans la boule de centre e, de rayon ε. En déduire que l'ensemble des isométries positives est ouvert et fermé, de même que celui des isométries négatives.

4) Montrer que pour la topologie définie par δ, G forme un groupe topologique.

5) Montrer que cette topologie est indépendante du choix des trois points a, b, c ; montrer aussi que l'on obtient encore la même topologie si on remplace, dans la définition de δ, d par une autre des distances dans le plan définies en I. 2. 2.

6) Que peut-on dire du point de vue topologique du sous-groupe des translations, de celui des rotations de centre donné ?

II. On sait que les isométries du plan en sont des transformations affines particulières. Soit ω un point du plan, T_ω l'espace vectoriel associé à ω ; on désignera par la même lettre t, s... un élément de T_ω et la translation qui lui correspond. La composée de deux translations t et s sera écrite indifféremment $t \circ s$ ou $t + s$. Toute isométrie admet une décomposition canonique du type $t \circ \varphi$ où $t \in T_\omega$ et où φ est une transformation orthogonale de T_ω.

Si T_ω est rapporté à une base orthonormée (choisie une fois pour toutes) la matrice de φ est d'un des deux types (cf. *A.P.M. II*, page 127) :

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

1° Montrer que toute isométrie $\varphi o s$ peut s'écrire $s' o \varphi$ et que $s' = \varphi(s)$ (ce qui est équivalent à $s = \overset{-1}{\varphi}(s')$).

2° Montrer que l'on définit une distance sur le groupe G des isométries en posant pour tout couple $f = t o \varphi$, $g = s o \psi$.

$$d(f, g) = |t - s| + \sum_{i,j} |\alpha_i^j - \beta_i^j|$$

où les α et les β désignent respectivement les coefficients des matrices φ et ψ.

3° Montrer que la distance de deux isométries de natures différentes a une borne inférieure strictement positive et en déduire que l'ensemble P des isométries positives est ouvert et fermé, de même que celui, N, des isométries négatives.

4° Montrer que l'on définit une distance sur P et une distance sur N, en posant pour deux isométries de même nature :

$$\delta(f, g) = \|t - s\| + |\theta - \tau|$$

si θ et τ représentent les angles associés à φ et ψ, et qu'on obtient, ainsi la même topologie sur G.

5° Montrer que pour cette topologie G est un groupe topologique.

6° Montrer que cette topologie est la même que celle qui a été étudiée en I.

2. Corps topologique.

Un corps topologique K *est*, de même, *un ensemble muni d'une structure de corps et d'une topologie compatibles*, c'est-à-dire que K est, pour l'addition, un groupe topologique et que $K - \{0\}$ est, pour la multiplication, un groupe topologique.

Exemples : **R** et **C** sont des corps topologiques pour la distance définie par :

$$d(x, y) = |x - y|$$

c'est-à-dire pour leurs topologies usuelles.

On trouvera un exemple très différent de corps topologique dans l'exercice 54.

On définit de même un *anneau topologique*, comme un ensemble muni d'une structure d'anneau et d'une topologie compatibles, ce qui peut s'exprimer en disant que les opérations :

$$(x, y) \longrightarrow x - y \qquad \text{et} \qquad (x, y) \longrightarrow xy$$

sont continues.

Exercice 23. — Montrer que sur l'anneau des matrices (n, n) à coefficients complexes

$$d(A, B) = \sum_{i,j} \left| \alpha_i^j - \beta_i^j \right|$$

définit une distance qui confère à l'anneau une structure d'anneau topologique.

3. Espace vectoriel topologique.

On nomme ainsi *un ensemble muni d'une structure d'espace vectoriel et d'une topologie compatibles*, c'est-à-dire telles que :
le groupe de la structure d'espace vectoriel est un groupe topologique.

D'autre part, le corps K des opérateurs est un corps topologique.

Enfin, la multiplication externe :

$$K \times E \longrightarrow E$$

est continue, $K \times E$ étant muni de la topologie produit.

Exercice 24. — Montrer que dans un espace vectoriel topologique l'adhérence d'une partie convexe est convexe.

Cas particulier : Espaces vectoriels normés.

On supposera le plus souvent que le corps K est **R** ou **C**. Plaçons-nous maintenant dans l'un de ces cas. Sur les espaces vectoriels sur **R** ou sur **C** (munis de leur topologies usuelles), on peut définir une *norme*, c'est-à-dire une application de l'espace dans $\mathbf{R}^+$:

$$\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbf{R}^+ \\ x & & \|x\| \end{array}$$

qui satisfait aux trois propriétés suivantes :

$$\|x\| = 0 \iff x = 0$$
$$\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$$
$$\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|.$$

Ayant défini une norme sur E, on définira une distance,

$$d(x, y) = \|x - y\|.$$

(La vérification des premier et troisième axiomes de la distance est immédiate ; celle du second vient de ce que :

$$\|x - y\| = \|-(y - x)\| = |-1| \, \|y - x\| = \|y - x\|).$$

La topologie qui dérive de cette distance confère à E une structure d'espace vectoriel topologique.

Exercice 25. — 1) Démontrer le résultat énoncé ci-dessus. 2) E étant un espace vectoriel, sur **C**, muni d'une norme et de la distance associée à cette norme, montrer que pour qu'il soit espace vectoriel topologique pour la topologie qui dérive de cette distance, il est nécessaire que la topologie sur **C** soit la topologie usuelle ou une topologie plus fine.

Exemples de normes :

Sur $\mathbf{R}^3$ avec $x = (x_1, x_2, x_3)$, on peut prendre :

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$
$$\text{ou} \quad \|x\| = \sup(|x_1|, |x_2|, |x_3|)$$
$$\text{ou} \quad \|x\| = |x_1| + |x_2| + |x_3|.$$

Sur l'espace des fonctions continues sur $[a, b]$, on peut prendre :

$$\|f\| = \sup \{ |f(x)| \; ; \; x \in [a, b] \} .$$

Semi-normes. On appelle ainsi une application de E dans $\mathbf{R}^+$ qui satisfait aux deuxième et troisième axiomes des normes, mais où le premier est remplacé par :

$$x = 0 \implies \|x\| = 0.$$

On vérifie immédiatement que l'application de E^2 dans $\mathbf{R}^+$ définie par :

$$e(x, y) = \|x - y\|$$

$\|x\|$ désignant une semi-norme, est un écart sur E. Nous avons vu (voir exercice 17) qu'à une famille d'écarts, on peut associer une topologie. A une famille de semi-normes sur un espace vectoriel correspond une topologie qui confère à cet espace une structure d'espace vectoriel topologique (même vérification que dans l'exercice 25).

Toutes les topologies actuellement utilisées sur des espaces vectoriels sont obtenues soit à partir d'une norme, soit à partir d'une famille de semi-normes.

§ 5. TOPOLOGIE QUOTIENT

1. Définition.

Nous revenons maintenant sur le problème : *étant donné un espace topologique* E *et un espace* F, *chercher la plus fine des topologies dont on puisse munir* F *pour qu'une application* f *de* E *dans* F *soit continue.*

Nous pourrons toujours supposer f surjective car si f ne l'est pas, seule la topologie induite sur $f(E)$ par la topologie de F doit satisfaire à certaines conditions ; autrement dit, seules nous intéressent les intersections avec $f(E)$ des ouverts de F. Pour que f soit continue, il est nécessaire et suffisant que l'image réciproque des ouverts de F soient des ouverts de E. Toute topologie rendant f continue est donc obtenue en prenant pour ensemble d'ouverts un ensemble de parties de F dont l'image réciproque est un ouvert de E. Et la plus fine de toutes ces topologies est celle qui admet, pour système de générateurs de ses ouverts, l'ensemble de toutes les parties dont l'image réciproque est un ouvert de E :

$$\{ A \,;\, A \in \mathcal{P}(F) \,;\, \overset{-1}{f}(A) \in \mathcal{O}(E) \} .$$

Or, les propriétés des ouverts et des applications réciproques permettent de voir que cet ensemble est fermé pour l'intersection finie comme pour la réunion ; qu'il contient $\emptyset$ et F ; qu'en conséquence, il constitue l'ensemble des ouverts de F pour la topologie cherchée.

Nous nous intéresserons maintenant au cas particulier où F est un ensemble quotient de E par une relation d'équivalence $\mathcal{R}$ et où l'application considérée est l'application canonique :

$$\varphi : E \longrightarrow E/\mathcal{R}.$$

La topologie cherchée, c'est-à-dire la plus fine des topologies de $E/\mathcal{R}$, telle que l'application canonique soit continue, est appelée topologie quotient. En vertu de ce qui précède, son système d'ouverts est constitué par l'ensemble des parties A telles que $\overset{-1}{\varphi}(A)$ soit un ouvert de E. Mais $\overset{-1}{\varphi}(A)$ est une réunion de classes (mod. $\mathcal{R}$) de E. Les ensembles qui sont susceptibles d'être les images réciproques d'ouverts de $E/\mathcal{R}$ sont donc des ensembles qui sont à la fois des ouverts et des réunions de classes mod. $\mathcal{R}$. Soit B une partie quelconque de E ; la réunion des classes des éléments de B est appelée *saturé* de B :

$$\text{sat } B = \bigcup \{ \dot{x} \,;\, x \in B \}$$

($\dot{x}$ désignant la classe de x mod $\mathcal{R}$, considérée ici comme partie de E).

La topologie quotient admet donc pour ensemble d'ouverts, l'ensemble des parties dont les images réciproques dans E sont à la fois ouvertes et saturées. Mais :

$$\varphi\,(\text{sat } B) = \{ \dot{x} \,;\, x \in B \},$$

x étant cette fois considéré comme élément de $E/\mathcal{R}$; donc :

$$\overset{-1}{\varphi}\circ\varphi\,(\text{sat } B) = \text{sat } B.$$

Il revient donc au même de dire que l'ensemble des ouverts de $E/\mathcal{R}$ est l'ensemble des images par l'application canonique des ouverts saturés de E. Tout revient donc à chercher ces ouverts saturés. Tout ouvert saturé contenant au moins un ouvert (lui-même), nous chercherons systématiquement les ouverts saturés en saturant les ouverts. Mais la partie ainsi obtenue ne répondra à la question que si, une fois saturée, elle est encore un ouvert.

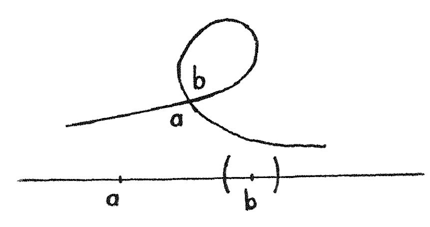
2. Exemples sur R.

a) Ensemble quotient de la droite réelle **R** par la relation d'équivalence :

$$x - y \in \mathbf{Z}.$$

La droite étant un groupe topologique, l'ensemble déduit d'un ouvert par les translations $p\mathbf{Z}$ sont encore des ouverts et leur réunion est un ouvert. Le saturé d'un ouvert est donc un ouvert. L'espace quotient est algébriquement isomorphe au cercle de longueur 1. Les ouverts de la topologie quotient sur ce cercle sont les images des ouverts saturés de **R** et on obtient une base de la topologie quotient en prenant l'ensemble des intervalles ouverts du cercle. On peut vérifier que cette topologie est la même que la topologie induite sur le cercle par la topologie du plan, car, les boules formant une base des ouverts de cette dernière topologie, la famille des intersections des boules et du cercle forme une base de la topologie induite qui est bien la même que celle de la topologie quotient : l'espace quotient **R/Z** est donc homéomorphe à tout cercle.

b) Chaque classe d'équivalence ne contient qu'un point, sauf une classe qui contient deux points distincts a et b. (L'ensemble quotient peut être considéré comme une courbe formant une boucle et se croisant au point image commun de a et de b). Si on cherche à saturer pour cette relation d'équivalence les ouverts de **R**, on voit que le saturé de tout ouvert contenant b et pas a devra, lui, contenir a et ne sera plus ouvert. On obtiendra donc l'ensemble des ouverts de l'ensemble quotient en prenant l'image des ouverts qui contiennent a et b ou qui ne contiennent ni l'un, ni l'autre.



3. Topologie du plan projectif réel $P_2(\mathbf{R})$.

On peut définir le plan projectif comme espace quotient de $\mathbf{R}^3 - \{0\}$ par la relation d'équivalence (*) :

$$x \mathcal{R} y \iff \exists\, t \in \mathbf{R} - \{0\} \qquad y = tx.$$

$P_2(\mathbf{R})$ est donc l'ensemble des droites de $\mathbf{R}^3$, issues de l'origine et privées de l'origine.

Dans la topologie usuelle de $\mathbf{R}^3$, une base des ouverts est constituée des boules relatives à la distance euclidienne. Le saturé d'une telle boule, relativement à la relation $\mathcal{R}$ précédente, est un ouvert de $\mathbf{R}^3$ (intérieur d'un cône de révolution de sommet O) dont l'image, par l'application canonique sur $P_2(\mathbf{R})$, est l'ensemble des droites, privées de O, faisant avec l'une d'elles un angle inférieur à une valeur donnée, que nous appellerons cône élémentaire. Ces ensembles décrivent donc une base des ouverts de $P_2(\mathbf{R})$.

On peut remarquer que l'angle aigu de deux droites est une distance dans $P_2(\mathbf{R})$ qui définit la même topologie que celle que nous venons de trouver.

Exercice 26. — Dans ce qui suit, pour définir une relation d'équivalence on dira « on identifie tels et tels éléments », l'ensemble des éléments identifiés constituant une classe d'équivalence et tout élément dont il n'est pas question dans cet énoncé étant seul dans sa classe.

Montrer que $P_2(\mathbf{R})$ est homéomorphe aux espaces quotients déduits de :

a) une sphère S_2 de $\mathbf{R}^3$ dont on identifie les points diamétralement opposés ;

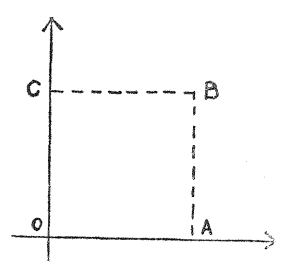
b) une demi-sphère fermée dont on identifie les points diamétralement opposés du bord ;

c) un disque fermé dont on identifie les points diamétralement opposés de la frontière.

Exercice 27. — *Droite projective.* L'image dans $P_2(\mathbf{R})$ d'un plan de $\mathbf{R}^3 - \{0\}$ issu de O est appelée droite projective. Montrer qu'une droite projective est homéomorphe à un cercle muni de sa topologie usuelle.

4. Autres exemples d'espaces quotients.

1° Soit le carré OABC, $[0,1] \times [0,1]$, muni de la topologie induite par celle de R^2.



a) L'espace quotient obtenu en identifiant les points de même abscisse de OA et de CB et les points de même ordonnée de OC et AB est *homéomorphe à un tore*. Il en serait de même si on identifiait le point

(*) Cf. Structures algébriques et structures topologiques; monographie n° 7 de l'*Enseignement mathématique* et *Bulletin de l'A.P.M.*, n° 180.

d'abscisse x de OA et le point d'abscisse $g(x)$ de CB d'une part, le point d'ordonnée y de OC avec le point d'ordonnée $h(y)$ de AB d'autre part, g et h étant deux applications continues croissantes de $[0,1]$ dans $[0,1]$.

b) En identifiant le point d'ordonnée y de OC avec le point d'ordonnée $(1 - y)$ de AB, on obtient pour espace quotient la célèbre bande de Möbius qui n'a qu'une face, ce qui correspond à la propriété de topologie algébrique de n'être pas « orientable ».

c) En identifiant les points de même abscisse de OA et CB d'une part, les points d'ordonnées y et $(1 - y)$ de OC et AB d'autre part, on obtient un espace appelé *bouteille de Klein* qui a la propriété remarquable d'être à la fois « sans bords » et non orientable.

2° Considérons le plan $\mathbf{R}^2$ muni de sa topologie usuelle et de sa structure de groupe additif. Si $x = (x_1, x_2)$ est l'élément générique de $\mathbf{R}^2$, les relations d'équivalence définies respectivement par :

$$(\mathcal{R}_1) \qquad x_1 - y_1 \in \mathbf{Z}$$

$$(\mathcal{R}_2) \qquad x_1 - y_1 \in \mathbf{Z} \text{ et } x_2 - y_2 \in \mathbf{Z}$$

conduisent à des ensembles quotients sur lesquels on peut définir une structure de groupe quotient et une topologie quotient dont on peut vérifier qu'elles sont compatibles (la structure de groupe a été étudiée dans *A.P.M. I*, exercice 28).

$\mathbf{R}^2/\mathcal{R}_1$ peut être appelé *cylindre de révolution :* il est homéomorphe à un tel cylindre de $\mathbf{R}^3$. En tant que groupe topologique, il est isomorphe à l'ensemble des déplacements hélicoïdaux d'axe donné de $\mathbf{R}^3$, avec une topologie définie, par exemple, comme celle des isométries du plan dans l'exercice 22.

$\mathbf{R}^2/\mathcal{R}_2$ peut être appelé *tore à deux dimensions*. Il est homéomorphe à la surface d'un tore de $\mathbf{R}^3$. Sa structure de groupe a été définie dans *A.P.M. I* (page 45 et exercice 28).

La situation qui conduit à une topologie quotient peut être généralisée : étant données une famille d'espaces topologiques E_i, et pour chacun une famille f_{ij} d'applications dans un même ensemble F, il est souvent intéressant de munir F de la plus fine des topologies rendant continues toutes les applications f_{ij}. Une telle topologie est qualifiée de *topologie finale*.

Chapitre IV

NOTION DE LIMITE

§ 1. LIMITE D'UNE APPLICATION SUIVANT UN FILTRE

1. Exemples classiques de limites.

Nous allons montrer comment la notion de filtre permet d'obtenir une formulation générale de la notion de *limite*, recouvrant les divers cas où ce mot est employé.

Rappelons d'abord les définitions classiques dans différents cas.

f étant une application de **R** *dans* **R** *:*

1° *f admet l pour limite, lorsque x tend vers x_0 :*

$$\lim_{x \to x_0} f = l \iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad \forall x \in]\, x_0 - \eta,\ x_0 + \eta\, [- \{ x_0 \} \quad |f(x) - l| < \varepsilon \ (*).$$

2° *f admet l pour limite, lorsque x tend vers x_0 à droite :*

$$\lim_{x \to x_0,\ x > x_0} f = l \iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad \forall x \in]\, x_0, x_0 + \eta\, [\quad |f(x) - l| < \varepsilon$$

$\{ u_n \}$ étant une suite de réels, u_n admet l pour limite :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = l \iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 > 0 \quad \forall n > n_0 \quad |u_n - l| < \varepsilon$$

Enfin, une des façons de définir l'intégrale définie d'une fonction continue sur un segment $[a, b]$ est de la considérer comme la limite l de la somme :

$$\sum_{i=o}^{i=n} (x_{i+1} - x_i)\, f(\xi_i),$$

où $x_0 = a < x_1 < x_2 \ldots < x_i < \ldots x_n = b$ sont des points de $[a, b]$ et où, pour tout i, ξ_i est un point de $[x_i, x_{i+1}]$, quand le module du découpage, c'est-à-dire la plus grande des longueurs des intervalles, tend vers zéro. Si on désigne par Δ l'ensemble du partage $a, x_1, \ldots, x_i, \ldots, b$ et des ξ_i, ensemble qui caractérise le découpage, par $\delta(\Delta)$ le module correspondant et par $S(\Delta)$ la somme correspondante, on a :

$$\forall \varepsilon > o \quad \exists \eta > o \quad \delta(\Delta) < \eta \implies |S(\Delta) - l| < \varepsilon.$$

Cherchons à dégager ce qu'ont de commun ces différents cas. Dans tous, une application d'un ensemble E dans un ensemble E′ est considé-

---

(*) Insistons sur la nécessité d'imposer $x \neq x_0$. Si on omettait cette condition, la seule limite possible serait $f(x_0)$.

rée, application f de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ dans les deux premiers, application $n \longrightarrow u_n$ de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{R}$ dans la troisième, et dans la quatrième, application S de l'ensemble des découpages dans $\mathbf{R}$. Si nous uniformisons les notations en appelant x l'élément de E, f l'application et l la limite, nous voyons que, dans chaque cas, la fin de l'énoncé exprime une condition du type :

$$f(x) \in V \in \mathcal{V}(l)$$

et que cette condition est vérifiée pour l'ensemble des x appartenant à un sous-ensemble de E qui est :

dans le 1er cas : $U_\eta = \{ x \,;\, |x - x_0| < \eta, x \neq x_0 \}$
dans le 2e cas : $V_\eta = \{ x \,;\, x_0 < x < x_0 + \eta \}$
dans le 3e cas : $W_{n_0} = \{ n \,;\, n > n_0 \}$
dans le 4e cas : $X_\eta = \{ \Delta \,;\, \delta(\Delta) < \eta \}$.

Or, de chacune des familles

$$\{ U_\eta \,;\, \eta \in \mathbf{R}^+ - \{0\} \},\ \{ V_\eta \,;\, \eta \in \mathbf{R}^+ - \{0\} \},$$
$$\{ W_{n_0} \,;\, n_0 \in \mathbf{N} \},\ \{ X_\eta \,;\, \eta \in \mathbf{R}^+ - \{0\} \},$$

on peut constater qu'elle constitue une base de filtre, qui définit dans chaque cas un filtre sur E [le troisième de ces filtres est le *filtre de Fréchet* (cf. II, 1, 4), le premier est formé de l'ensemble des éléments du filtre des voisinages de x_0 qui auraient été privés de x_0].

La condition trouvée dans chacun des cas est donc que, pour tout voisinage V de l, il existe un élément B de la base de filtre considérée, $\mathcal{B}$, tel que :

$$\forall x \in B \qquad f(x) \in V,$$

ou encore :

$$\forall V \in \mathcal{V}(l) \qquad \exists B \in \mathcal{B} \qquad f(B) \subset V.$$

Remarquons que certains cas classiques très importants n'ont pas été rappelés ci-dessus : ceux où il est question de variable réelle ou de fonction réelle tendant vers l'infini. Ils rentrent, en fait, dans le cadre général que nous venons de dégager :

a) Dire que la fonction f a une limite lorsque x tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$), c'est faire intervenir sur l'espace de départ la base de filtre constituée des demi-droites $]A, +\infty[$ (resp. $]-\infty, A[$).

b) Le cas où la fonction est dite tendre vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) est plus délicat, car $+\infty$ (resp. $-\infty$) n'est pas élément de $\mathbf{R}$. On remplace alors l'espace d'arrivée $\mathbf{R}$ par la droite réelle achevée $\overline{\mathbf{R}}$ (cf. *A.P.M. I*, p. 85), que l'on munit d'une topologie en prenant pour base des voisinages de $x \in \mathbf{R}$, la famille des intervalles $]x - \alpha, x + \alpha[$ de centre x, et pour base des voisinages de $+\infty$ (resp. $-\infty$), la famille des demi-droites $]A, +\infty]$ (resp. $[-\infty, A[$). On vérifie sans peine que les axiomes des voisinages (II, 1, 1) sont satisfaits et que la topologie ainsi définie sur $\overline{\mathbf{R}}$ induit sur $\mathbf{R}$ la topologie usuelle.

La définition classique de $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$, soit

$$\forall A \in \mathbf{R} \qquad \exists \eta \qquad |x - a| < \eta \Longrightarrow f(x) > A$$

s'écrit bien alors :

$$\forall V \in \mathcal{V}(+\infty) \qquad \exists B \in \mathcal{V}(a) \qquad f(B) \subset V.$$

2. *Notion générale de limite.*

Nous sommes donc amenés à définir une limite de la façon suivante :

Etant donnée une application f d'un ensemble E *dans un espace topologique* E', *on dira que f tend vers l suivant le filtre de base $\mathcal{B}$ sur* E *si :*

$$\forall V \in \mathcal{V}(l) \qquad \exists B \in \mathcal{B} \qquad f(B) \subset V. \tag{1}$$

Cette définition est susceptible de transformations. Considérons la famille

$$f(\mathcal{B}) = \{ f(B) \,;\, B \in \mathcal{B} \}$$

Cette famille n'est pas vide puisque $\mathcal{B}$ ne l'est pas ; le vide n'en fait pas partie ; d'autre part :

$$B \subset B_1 \cap B_2 \Longrightarrow f(B_1) \cap f(B_2) \supset f(B_1 \cap B_2) \supset f(B)$$

donc $f(B_1)$ et $f(B_2)$ étant deux éléments quelconques de $f(\mathcal{B})$ leur intersection contient un élément de $f(\mathcal{B})$.
$f(\mathcal{B})$ constitue donc une base de filtre sur E'.

Notons que :
$f(\mathcal{F}) = \{ f(F) \,;\, F \in \mathcal{F} \}$, si $\mathcal{F}$ est le filtre engendré par $\mathcal{B}$, est une autre base du même filtre : ce n'est pas un filtre car de l'intersection de deux éléments de $f(\mathcal{F})$ on peut seulement assurer qu'elle en contient un troisième. Nous appellerons *image du filtre* $\mathcal{F}$, le filtre sur E' engendré par $f(\mathcal{F})$ [ou $f(\mathcal{B})$].

Mais alors la condition (1) prend la forme suivante :

$$\forall V \in \mathcal{V}(l) \qquad \exists f(B) \in f(\mathcal{B}) \qquad f(B) \subset V$$

condition qui traduit la comparaison de deux filtres sur E' et s'énonce : le filtre de base $f(\mathcal{B})$ est plus fin que celui des voisinages de l. On pourra alors énoncer :

f, application de E *dans* E' *(espace topologique) admet une limite l suivant un filtre $\mathcal{F}$ si l'image de ce filtre par f est plus fine que le filtre des voisinages de l,*

ou, en dissociant ce qui est relatif à l'espace d'arrivée de ce qui est relatif à l'application, on dira :

sur un espace topologique E', *un filtre converge vers un élément l si ce filtre est plus fin que celui des voisinages de l,*

et : *une application de* E *dans un espace topologique* E' *converge vers l selon un filtre $\mathcal{F}$, si l'image de ce filtre par l'application converge vers l.*

Remarquons que si un filtre converge vers l, l'espace E' étant muni d'une topologie $\mathcal{T}$, il converge *a fortiori* vers l quand E' est muni d'une topologie moins fine que $\mathcal{T}$; ou encore, si un filtre converge vers l quand E' est muni d'une topologie $\mathcal{T}$, et ne converge pas quand E' est muni de $\mathcal{T}'$, on peut affirmer que $\mathcal{T}'$ n'est pas moins fine que $\mathcal{T}$. (Cf. exercice 70).

Sous une autre forme : plus une topologie est fine, moins il y a de filtres convergents pour cette topologie.

Exercice 28. — 1° Soient deux ensembles E et E', une application f de E dans E', et $\mathcal{F}'$ un filtre sur E'. On considère la famille des $\overset{-1}{f}(F')$ où F' décrit $\mathcal{F}'$. Montrer que cette famille décrit une base de filtre sur E si, et seulement si :

$$\forall F' \in \mathcal{F}' \quad F' \cap f(E) \neq \emptyset.$$

2° Soit $\mathcal{B}$ une base de filtre sur E, $f(\mathcal{B})$ son image par f, et $\mathcal{B}_1 = \overset{-1}{f} \circ f(\mathcal{B})$, l'image réciproque de $f(\mathcal{B})$. Montrer que $\mathcal{B}_1$ est une base de filtre. La comparer à $\mathcal{B}$. Etudier de même $\mathcal{B}'_1 = f \circ \overset{-1}{f}(\mathcal{B}')$, $\mathcal{B}'$ étant une base de filtre sur E'.

3. Continuité d'une application en un point.

E et F étant des espaces topologiques, nous n'avons défini jusqu'à présent que la continuité globale d'une application f de E dans F. Observons que cette continuité entraîne, si $x_0 \in$ E, que *l'image réciproque d'un voisinage de $f(x_0)$ est voisinage de x_0*. Nous prendrons cette propriété pour définition de la continuité au point x_0.

Réciproquement, une application f qui satisfait à cette propriété en tout point x_0 de E est globalement continue puisque l'image réciproque de tout ouvert (voisinage de tous ses points) est un ouvert.

Cette propriété peut se mettre sous la forme équivalente :

$$\forall\, V \in \mathcal{V}(f(x_0)) \qquad \exists\, V' \in \mathcal{V}(x_0) \qquad f(V') \subset V.$$

Or, ceci signifie que le filtre image de $\mathcal{V}(x_0)$ est plus fin que $\mathcal{V}((f(x_0))$, donc que *l'application f converge vers $f(x_0)$ suivant le filtre des voisinages de x_0*. Dans le cas $E = F = \mathbf{R}$, on retrouve la définition classique de la continuité en un point :

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

4. Quelques remarques sur le langage.

La notion de limite, que nous avons exposée ci-dessus, est fondée sur la notion de filtre dégagée par H. Cartan. C'est un exemple typique de bonne généralisation, qui, non seulement, permet une application très étendue d'une notion, mais surtout fait apparaître ce qu'il y avait d'essentiel dans les cas particuliers où il était d'usage de la faire intervenir. Chacun sentait bien, sans pouvoir le formuler nettement, qu'il s'agissait toujours au fond de la même chose, malgré la diversité apparente des situations.

Les éléments avec lesquels est bâtie une limite sont donc : un ensemble E, un filtre $\mathcal{F}$ sur E, un espace topologique F, un point l de F, une application f de E dans F. Et l'on énonce : l est la limite de l'application f suivant le filtre $\mathcal{F}$, ce qui s'écrit : $l = \lim_{\mathcal{F}} f$, et signifie : *le filtre de base $f(\mathcal{F})$ est plus fin que le filtre des voisinages de l dans* F.

E peut n'être pourvu d'aucune topologie (c'est usuellement le cas de **N** ; celui de l'ensemble des découpages Δ de $[a, b]$ utilisés dans la définition de l'intégrale) ; il peut être pourvu d'une topologie et, dans ce cas, interviendront souvent, comme filtres $\mathcal{F}$, les filtres $\mathcal{V}(x)$ des voisinages des points de E, ou les filtres $\mathcal{V}^*(x)$ des voisinages pointés $V - \{x\}$ de x (ce qui suppose qu'aucun voisinage de x n'est réduit à $\{x\}$, c'est-à-dire que x n'est pas point isolé de E). Si, en outre, E est muni d'une structure d'ordre, interviendront les filtres $\mathcal{V}^+(x)$ (resp. $\mathcal{V}^-(x)$) des voisinages à

droite (resp. à gauche) de x (cf. III.1.2). Les limites correspondantes seront notées :

$$\lim_{\mathcal{V}(x)} f \qquad \lim_{\mathcal{V}^*(x)} f \qquad \lim_{\mathcal{V}^+(x)} f.$$

La notion est claire et d'un maniement sûr, le langage est bien adapté à ce qu'il décrit. Ceci doit intéresser l'enseignant qui a constaté les multiples erreurs d'interprétation auxquelles donne lieu, chez le débutant, la notion de limite, dans sa présentation classique, et qui doit se demander si la responsabilité des erreurs ne doit pas être en partie imputée aux énoncés du type « *$f(x)$ tend vers l, quand x tend vers x_0* » (1), dont les inconvénients pédagogiques sont nombreux :

a) Bien sûr, le sens précis de (1) n'est pas différent de celui de l'énoncé proposé plus haut, et certains persisteront à lui donner la préférence sous prétexte qu'il est plus proche de l'intuition. Malheureusement, ce n'est pas la bonne intuition et on peut demander : Quel est le meilleur énoncé ? Celui qui porte la marque d'une intuition encore très éloignée de sa formulation mathématique, ou celui qui fournit directement la base de tout raisonnement valable concernant la notion ?

L'intuition courante qui s'exprime par le « *tend vers* » est de nature cinématique : x, mû par on ne sait quel moteur, se *rapproche* de x_0, et alors $f(x)$ se *rapproche* de l ; ce qui ne correspond d'ailleurs qu'à une situation assez particulière, car, pour employer le même langage, x se rapprochant de x_0, l peut être limite de f sans que $f(x)$ se rapproche constamment de l ; sans parler de ceux qui vont jusqu'à dire : la limite est la valeur que finit par prendre $f(x)$!

L'intuition qu'évoque l'énoncé (1) ne conduit pas sans détour à la formulation féconde de la notion de limite (cf. I.1), et elle agit même souvent comme un écran qui empêche de la voir nettement.

b) Mais ce n'est pas le seul inconvénient de l'énoncé (1). L'accent y est mis sur les « variables » et non sur la fonction. C'est un défaut général du style classique, qui, par exemple, recherchant une primitive d'une fonction, remplace cette fonction par une autre et parle de « changement de variable », laissant dans maints esprits l'idée que l'on s'occupe de la *même* fonction d'une *autre* variable, alors que souvent il s'agit d'une autre application du même ensemble de départ dans le même ensemble d'arrivée.

Le fait d'avoir une limite est une propriété de la fonction, et non de ses valeurs individuelles, et non plus de l'ensemble de ses valeurs. L'erreur caricaturale, mais pas si rare, de l'étudiant qui, sachant que « *la suite u_n a l pour limite* », se demande gravement si « *la suite u_{n-1} a aussi l pour limite* », montre bien le genre de ravages que peut provoquer l'habitude de mettre l'accent sur les valeurs de la fonction et non sur la fonction elle-même.

c) L'énoncé (1) a, en français, le même sens qu'on l'écrive :

« *$f(x)$ tend vers l, quand x tend vers x_0* »

ou :

« *quand x tend vers x_0, $f(x)$ tend vers l* ».

Or, nulle symétrie réelle ne correspond à cette symétrie relative de l'énoncé. L'énoncé explicite comporte deux quantificateurs différents qu'on ne peut intervertir, et il suffit d'avoir interrogé des étudiants de Spéciales ou de Propédeutique, pour constater que la dissymétrie introduite par le seul mot « quand » n'a pas été suffisante pour qu'ils n'embrouillent pas les rôles.

d) Enfin, n'y a-t-il pas une tendance très forte à donner un sens autonome à chacune des propositions « *x tend vers x_0* », « *$f(x)$ tend vers l* » ?

Assurément, les cours mettent en garde contre ce penchant, et insistent sur le fait que l'énoncé (1) doit être pris en bloc, et que ses morceaux n'ont plus de sens s'ils sont isolés. On a beau être convaincu du bien-fondé de cette interdiction, on la ressent comme une gêne, et d'ailleurs l'analyse classique parle officiellement de « variable infiniment petite », sans, à ma connaissance, en avoir jamais donné une définition satisfaisante. En fait, ce qui intervient alors implicitement, c'est le filtre des voisinages de l'origine. Considérer une variable infiniment petite, cela veut dire étudier, à propos de fonctions définies sur un ouvert de **R** contenant zéro, des énoncés vrais pour les restrictions de ces fonctions à des éléments assez petits de ce filtre.

La dissociation, que l'énoncé classique ne pouvait se permettre d'opérer, peut donc être réalisée, dans une certaine mesure, grâce à la notion de filtre, à celle de convergence d'un filtre dans un espace topologique et à la proposition : *l'image d'une base de filtre est une base de filtre.*

Les discussions relatives au langage peuvent paraître futiles : le mathématicien averti peut utiliser tous les énoncés, dès qu'il en connaît le sens précis, mais c'est pour le débutant que l'énoncé captieux est le plus dangereux, sans compter que le mathématicien préfère en général la formulation la plus adéquate à ce qu'elle décrit.

Vous n'allez tout de même pas préconiser l'introduction de la notion de filtre dès le début de l'analyse, nous demandera-t-on ?

Il n'est pas question de débuter par la théorie générale des filtres, ni des bases de filtres, ni de prononcer prématurément ces noms, mais il est sans doute payant de mettre en évidence dès le début ce qu'on appellera ultérieurement base de filtre.

Dès que la notion de limite est introduite, apparaît le jeu des (ε, η), et explicitement ou non les deux quantificateurs, et beaucoup pensent qu'il y a là un pas que seule une minorité d'esprits est capable de franchir. Notre devoir est de le faire franchir au plus grand nombre possible, et l'expérience permet d'affirmer que l'usage explicite des quantificateurs et de leurs symboles élimine beaucoup d'erreurs, mais il excite assez peu l'intuition. Or, la considération de bases de filtre convenables peut donner une idée géométrique simple et correcte de ce qu'est une limite.

S'agissant d'une suite réelle ayant l pour limite, la considération globale de chacune des deux familles d'ensembles : famille des intervalles de centre l, et famille des sections finissantes de la suite, n'a-t-elle pas plus de chance d'être parlante que celle des ε et des n_0 ? Elle aboutit à l'énoncé : « La suite $n \to u_n$ converge vers l, si tout intervalle de centre l contient une section finissante », qui échappe à tous les reproches faits ci-dessus aux énoncés anciens, et donne lieu à une intuition correcte, dans laquelle, par exemple, les intervalles de centre l sont perçus comme des pièges où viennent se prendre les sections finissantes. On pourra de même énoncer pour la limite d'une fonction réelle de variable réelle : « La fonction f a pour limite l, quand x est arbitrairement voisin de x_0 », avec la signification : « *Tout* intervalle de centre l contient l'image par f d'un intervalle *pointé* de centre x_0. »

« *Arbitrairement voisin* » ne vaut sans doute pas la référence explicite à un filtre, qui sera faite plus tard ; il paraît cependant moins dangereux pour l'intuition que le fallacieusement dynamique « *tend vers* ».

S'il vaut mieux ne pas parler de filtre au stade initial, le moment arrivera assez vite, où, plusieurs bases de filtres ayant été rencontrées, se posera le problème de leur interchangeabilité, c'est-à-dire de leur équivalence : or, une des manières d'exprimer cette équivalence, c'est de dire qu'elles engendrent le même filtre. La notion de filtre est alors légitimement introduite, ainsi que le terme de base de filtre.

Remarquons enfin, pour terminer, que la notion de limite est une des plus subtiles des débuts de l'analyse et qu'il est sans doute fâcheux que ce soit par celle-là que l'on entame les cours d'Analyse. On peut se demander si un autre ordre, allant des notions les moins fines aux notions les plus fines, ne serait pas plus favorable, et, puisque l'Analyse des débutants se déroule dans les espaces métriques, s'il n'y aurait pas lieu d'envisager l'ordre : *fonctions uniformément continues, fonctions continues partout, fonctions continues en un point, limites, valeurs d'adhérence.*

§ 2. GENERALISATION DE LA NOTION DE CONVERGENCE.

1. Point adhérent à un filtre. Valeur d'adhérence d'une fonction.

On dira que l est *adhérent à un filtre* $\mathcal{F}$, si l est adhérent à tous les ensembles du filtre, ce qui peut s'exprimer des trois manières équivalentes suivantes :

1° $\forall F \in \mathcal{F} \quad l \in \overline{F}$

2° $\forall V \in \mathcal{V}(l) \quad \forall F \in \mathcal{F} \quad V \cap F \neq \emptyset$

3° $l \in \bigcap \{\overline{F} ; F \in \mathcal{F}\}$.

Si un filtre converge vers l, ce point est adhérent au filtre ; mais la réciproque n'est pas vraie.

On dira que l'*application f admet la valeur d'adhérence l suivant le filtre* $\mathcal{F}$ (qui est ici filtre dans l'espace de départ) *si l est point adhérent du filtre image de* $\mathcal{F}$.

Exemple : $f : n \in \mathbf{N} \longrightarrow \sin n \in \mathbf{R}$. Toutes les valeurs de $[-1, +1]$ sont valeurs d'adhérence suivant le filtre de Fréchet.

De façon générale, lorsqu'on parle de limite d'une suite ou de valeur d'adhérence d'une suite, c'est toujours relativement au filtre de Fréchet sur **N**.

Considérons une suite $n \to u_n$ à valeurs dans un espace *métrique* E et supposons qu'elle admette l pour valeur d'adhérence ; cela signifie :

$$\forall V \in \mathcal{V}(l) \qquad \forall n_0 \qquad \{u_n ; n > n_0\} \cap V \neq \emptyset$$

ou encore :

$$\forall V \in \mathcal{V}(l) \qquad \forall n_0 \qquad \exists n > n_0 \qquad u_n \in V.$$

Pour base de $\mathcal{V}(l)$, nous pouvons prendre une famille dénombrable de boules $B(l, \varepsilon_p)$, la suite de réels strictement positifs ε_p tendant vers zéro.

La condition précédente donne alors :

$$\forall p \qquad \forall n_0 \qquad \exists n > n_0 \qquad u_n \in B(l, \varepsilon_p),$$

ce qui permet de définir par récurrence une suite n_p d'entiers, telle que :

$$n_p > n_{p-1} \qquad u_{n_p} \in B(l, \varepsilon_p)$$

(il suffit d'appliquer le résultat précédent à $n_0 = n_{p-1}$).

La suite u_{n_p} converge vers l. *D'une suite à valeurs dans un espace métrique admettant l comme valeur d'adhérence, on peut donc extraire une sous-suite qui converge vers l.*

2. Point adhérent à l'ensemble des valeurs d'une suite.

Etant donnée une suite $n \in \mathbf{N} \longrightarrow x_n \in E$ (espace topologique), on peut considérer la partie A de E constituée de l'ensemble des x_n ; un point adhérent à A, ou un point d'accumulation de A, est parfois appelé, par un abus de langage dangereux et qu'il faudrait proscrire, point adhérent à la suite ou point d'accumulation de la suite. Ces notions doivent être distinguées de celle de valeur d'adhérence d'une suite.

« l valeur d'adhérence de la suite $n \longrightarrow u_n$ » signifie :

$$\forall V \in \mathcal{V}(l) \qquad \forall n_0 \qquad \{ u_n \,;\, n > n_0 \} \cap V \neq \emptyset \,;$$

« l point adhérent à l'ensemble des valeurs de la suite » signifie :

$$\forall V \in \mathcal{V}(l) \qquad \{ u_n \,;\, n \in \mathbf{N} \} \cap V \neq \emptyset.$$

Il est évident que la première propriété est plus forte que la deuxième ; une valeur d'adhérence de la suite est point adhérent à l'ensemble des valeurs de la suite. Mais elle peut ne pas en être point d'accumulation. La suite définie, dans un espace métrique, par :

$$\forall n \qquad u_{2n} = a \qquad u_{2n+1} = b \qquad \text{avec } a \neq b$$

admet a et b comme valeurs d'adhérence, mais pas comme point d'accumulation de l'ensemble de ses valeurs.

Si A est l'ensemble des valeurs de la suite, on peut schématiser les résultats sous la forme :

Valeur d'adhérence de la suite

$\Uparrow \qquad \Downarrow$

Point adhérent à A.

$\Uparrow$

Point d'accumulation de A

Ce schéma sera complété ultérieurement dans le cas des espaces séparés par la flèche en pointillé (cf. exercice 33).

Exercice 29. — 1° Etant donné un filtre $\mathcal{F}$ sur un espace E et une application f de E dans **R**, on définit :

$$\lim\sup_{\mathcal{F}} f = \inf_{F \in \mathcal{F}} \{ \sup_{x \in F} f(x) \}$$

$$\lim\inf_{\mathcal{F}} f = \sup_{F \in \mathcal{F}} \{ \inf_{x \in F} f(x) \}$$

$\lim\sup_{\mathcal{F}} f$ et $\lim\inf_{\mathcal{F}} f$ sont des éléments de $\overline{\mathbf{R}}$.

En quoi ces deux notions généralisent-elles les notions de limite supérieure et inférieure d'une suite de réels (voir *A.P.M. I*, page 92) ?

Montrer que :

$$\lim\sup_{\mathcal{F}} f \geqslant \lim\inf_{\mathcal{F}} f.$$

Que signifie le fait que ces deux limites soient égales ? Que signifie-t-il en particulier quand $\mathcal{F}$ est le filtre des voisinages d'un point x_0 ? Dans ce dernier cas les limites supérieure et inférieure de f sont notées $M(f, x_0)$ et $m(f, x_0)$, et leur différence, notée $\Omega(f, x_0)$, est appelée oscillation de la fonction f au point x_0.

2° Montrer que $\lim\sup_{\mathcal{F}} f$ (resp. $\lim\inf_{\mathcal{F}} f$) est la plus grande (resp. la plus petite) des valeurs d'adhérence de f suivant le filtre $\mathcal{F}$.

3° Si $\mathcal{F}'$ est un filtre sur E plus fin que $\mathcal{F}$, comparer les limites inférieures et supérieures de f suivant les filtres $\mathcal{F}'$ et $\mathcal{F}$. Retrouver à partir de là, le fait que si E est muni de la topologie discrète toutes les applications de E dans **R** sont continues et montrer que si E est muni de la topologie grossière les seules applications continues de E dans **R** sont les applications constantes.

§ 3. STRUCTURE D'ORDRE SUR L'ENSEMBLE DES FILTRES

1. Demi-treillis des filtres d'un ensemble.

Nous avons déjà défini une relation d'ordre sur l'ensemble des filtres définis sur un ensemble (cf. III, 1, 2) :

$$\mathcal{F}_2 \text{ plus fin que } \mathcal{F}_1 \iff \mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2$$

et nous allons examiner la question de savoir si l'ensemble des filtres forme un treillis.

L'ENSEMBLE DES FILTRES SUR E FORME UN DEMI-TREILLIS.

C'est-à-dire qu'étant donnés deux filtres quelconques, ils admettent toujours *un filtre moins fin que chacun d'eux et plus fin que tout autre filtre moins fin que chacun d'eux.* Considérons en effet l'intersection $\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$ de deux filtres $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$. Cette partie de $\mathcal{P}(E)$ est bien un filtre, car :

1) si $F \in \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$ et $G \supset F$, on peut dire $G \in \mathcal{F}_1$, $G \in \mathcal{F}_2$, donc $G \in \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$;

2) si $F_1 \in \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$ et $F_2 \in \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$, il en résulte $F_1 \in \mathcal{F}_1$ et $F_2 \in \mathcal{F}_1$, donc $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}_1$. De même $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}_2$, donc $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$;

3) le vide ne lui appartient pas puisqu'il n'appartient ni à $\mathcal{F}_1$ ni à $\mathcal{F}_2$; elle n'est pas vide car elle contient au moins E.

Ce filtre est moins fin que $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ et est le plus fin des filtres moins fins que $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$.

2. Majorants communs éventuels à deux filtres.

Examinons ce que devrait être un filtre plus fin que $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$. S'il existait un tel filtre $\mathcal{F}$, il devrait contenir tout élément $F_1 \in \mathcal{F}_1$ et tout élément $F_2 \in \mathcal{F}_2$, donc leur intersection ; mais, si cette intersection était vide, elle ne pourrait pas appartenir à $\mathcal{F}$. Nous voyons donc apparaître une condition nécessaire pour qu'il existe un filtre plus fin que $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$:

$$\forall F_1 \in \mathcal{F}_1 \qquad \forall F_2 \in \mathcal{F}_2 \qquad F_1 \cap F_2 \neq \emptyset,$$

c'est-à-dire que *tout élément du filtre $\mathcal{F}_1$ doit rencontrer tout élément du filtre $\mathcal{F}_2$.*

Exemple : Dans les espaces métriques, il n'existe pas de filtre plus fin que les filtres des voisinages de deux points distincts, car si $x \neq y$, les boules de centre x et y et de rayon $\frac{1}{2}d(x, y)$ sont disjointes.

La condition nécessaire que nous venons de trouver est suffisante. En effet, l'ensemble :

$$\mathcal{F} = \{ F_1 \cap F_2 \, ; \, F_1 \in \mathcal{F}_1 \quad F_2 \in \mathcal{F}_2 \}$$

est un filtre quand cette condition est réalisée, car :
1° Si $F \in \mathcal{F}$ $\quad \exists F_1 \in \mathcal{F}_1, \quad \exists F_2 \in \mathcal{F}_2, \quad F = F_1 \cap F_2$.
Soit alors $G \supset F$. Considérons $G \cup F_1 \in \mathcal{F}_1$ et $G \cup F_2 \in \mathcal{F}_2$;
$(G \cup F_1) \cap (G \cup F_2) \in \mathcal{F}$.
Or, $(G \cup F_1) \cap (G \cup F_2) = G \cup (F_1 \cap F_2) = G \cup F = G$; donc $G \in \mathcal{F}$.

2° Si $F = F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$ et $F' = F'_1 \cap F'_2 \in \mathcal{F}$,
alors $F \cap F' = (F_1 \cap F_2) \cap (F'_1 \cap F'_2) = (F_1 \cap F'_1) \cap (F_2 \cap F'_2)$,
or $F_1 \cap F'_1 \in \mathcal{F}_1$, $F_2 \cap F'_2 \in \mathcal{F}_2$, donc $F \cap F' \in \mathcal{F}$.

3° $\emptyset \notin \mathcal{F}$ d'après l'hypothèse ; $\mathcal{F}$ n'est pas vide d'après la même hypothèse, puisque $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ ne le sont pas.
D'autre part, ce filtre contient $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ et c'est le moins fin des filtres qui les contiennent.

Etant donné deux filtres sur un ensemble E, *pour que la famille des filtres plus fins que chacun d'eux ne soit pas vide, il faut et il suffit que tout élément de l'un rencontre tout élément de l'autre, et alors la famille a un plus petit élément.*

CONSÉQUENCE. — *Un point a est adhérent à un filtre $\mathcal{F}$, si et seulement si, il existe un filtre plus fin que $\mathcal{F}$ qui converge vers a.* En effet, dire que a est adhérent à $\mathcal{F}$, c'est dire que tout élément de $\mathcal{F}$ rencontre tout élément du filtre $\mathcal{V}(a)$. Donc, $\mathcal{F}$ et $\mathcal{V}(a)$ possèdent un majorant commun, qui converge vers a puisqu'il est plus fin que $\mathcal{V}(a)$.

Nous avons vu un exemple de cette circonstance quand nous avons considéré le filtre $\mathcal{F}$, image par une application $n \to u_n$ du filtre de Fréchet. Dire que la suite u_n avait une valeur d'adhérence a, c'était dire que a était adhérent à ce filtre. Nous avions alors montré, dans l'hypothèse où l'espace d'arrivée était métrique, l'existence d'une sous-suite u_{n_p} convergeant vers a. Le filtre image du filtre de Fréchet par cette sous-suite est un filtre plus fin que $\mathcal{F}$ et $\mathcal{V}(a)$.

3. Ultrafiltre.

On appelle *ultrafitre* $\mathcal{U}$, *un élément maximal de l'ensemble ordonné des filtres sur un ensemble* E, c'est-à-dire *un élément qui vérifie :*

$$\mathcal{F} \supset \mathcal{U} \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{F} = \mathcal{U}.$$

On obtient un exemple d'ultrafiltre en considérant le filtre ayant pour base un point donné (filtre des surensembles du point).

Nous allons établir maintenant, plus généralement, le fait qu'*il existe un ultrafiltre plus fin que tout filtre donné* $\mathcal{F}_0$ en montrant que l'ensemble des filtres plus fins qu'un filtre donné satisfait aux hypothèses du théorème de Zorn (*A.P.M. II*, ch. I, p. 17).

Soit $\mathcal{F}_i$ $(i \in I)$ une sous-famille totalement ordonnée de filtres plus fins que $\mathcal{F}_0$.

La réunion $\bigcup_{i \in I} \mathcal{F}_i = \mathcal{F}$ *est un filtre plus fin que tous les* $\mathcal{F}_i$.

En effet :
1) si $F \in \mathcal{F}$, $\quad \exists i \in I$ tel que $F \in \mathcal{F}_i$; soit $G \supset F$, alors $G \in \mathcal{F}_i$, ce qui entraîne $G \in \mathcal{F}$;
2) si $F \in \mathcal{F}$ et $F' \in \mathcal{F}$, $\exists i \in I$ et $\exists j \in I$ tels que $F \in \mathcal{F}_i$ et $F' \in \mathcal{F}_j$.
Mais l'ensemble étant totalement ordonné, $\mathcal{F}_i \subset \mathcal{F}_j$ (ou l'inverse), donc $F \cap F' \in \mathcal{F}_j$, ce qui entraîne $F \cap F' \in \mathcal{F}$;
3) $\emptyset \notin \mathcal{F}$ et $\mathcal{F} \neq \emptyset$.

Toute chaîne de filtres plus fins que $\mathcal{F}_0$ est majorée ; donc, l'ensemble des filtres plus fins que $\mathcal{F}_0$ est inductif et possède un élément maximal.

THÉORÈME. — *La condition nécessaire et suffisante pour qu'un filtre sur* E *soit un ultrafiltre est que, de tout couple de sous-ensembles complémentaires de* E, *il contienne toujours l'un des éléments.*

Soit $\mathcal{U}$ un ultrafiltre et une *partition* de E en deux ensembles A et B ($A \cup B = E$, $\quad A \cap B = \emptyset$) et supposons que A n'appartienne pas à $\mathcal{U}$. Nous disons qu'il en résulte qu'il existe $F \in \mathcal{U}$ tel que $A \cap F = \emptyset$. En effet, si tout $F \in \mathcal{U}$ rencontrait A, donc si tout $F \in \mathcal{U}$ rencontrait tout sur-ensemble de A, nous serions dans le cas envisagé plus haut où deux filtres ($\mathcal{U}$ et le filtre des sur-ensembles de A) admettent un majorant commun, c'est-à-dire un filtre plus fin que chacun d'eux. A n'appartenant pas à $\mathcal{U}$, ce majorant devrait être strictement plus fin que $\mathcal{U}$, ce qui est contraire à l'hypothèse de maximalité de $\mathcal{U}$.
Donc :

$$A \notin \mathcal{U} \quad \Longrightarrow \quad \exists F \in \mathcal{U} \qquad A \cap F = \emptyset.$$

Mais :

$$A \cap F = \emptyset \quad \Longrightarrow \quad F \subset \complement_E A = B.$$

B contenant un élément de $\mathcal{U}$ appartient à $\mathcal{U}$.
Réciproquement, soit un filtre $\mathcal{F}$ qui possède cette propriété. Si ce n'était pas un ultrafiltre, il existerait un filtre plus fin, $\mathcal{U}$, c'est-à-dire un filtre qui posséderait plus d'éléments. Soit $A \notin \mathcal{F}$ un des éléments qui figurerait dans ce filtre. L'hypothèse entraîne $\complement A \in \mathcal{F}$, ce qui entraîne $\complement A \in \mathcal{U}$. Alors $\mathcal{U}$ contiendrait A et $\complement A$, donc leur intersection qui est vide, ce qui est impossible.
L'image d'un ultrafiltre par une application est une base d'ultrafiltre.
On sait que l'image d'un filtre $\mathcal{U}$ sur E est base d'un filtre $\mathcal{U}'$ sur E'.
Soient deux ensembles complémentaires A' et B' de E' ; leurs images réciproques $\overset{-1}{f}(A')$ et $\overset{-1}{f}(B')$ sont complémentaires dans E. Or $\mathcal{U}$, étant un ultrafiltre, contient un de ces deux ensembles, par exemple $\overset{-1}{f}(A')$. Mais

$$\overset{-1}{f}(A') \in \mathcal{U} \quad \Longrightarrow \quad f \circ \overset{-1}{f}(A') \in f(\mathcal{U}).$$

Or $A' \supset f \circ \overset{-1}{f}(A)$, donc A' appartient au filtre engendré par $f(\mathcal{U})$. Ce filtre contient l'un des deux éléments de tout couple d'ensembles complémentaires. C'est un ultrafiltre.

REMARQUE. — Si un point a est adhérent à un ultrafiltre, il existe un filtre plus fin que lui qui converge vers a. Ce filtre ne peut être que lui-même. *Un ultrafiltre converge vers tout point qui lui est adhérent.*

CHAPITRE V

AXIOMES DE SÉPARATION

Nous nous sommes placés jusqu'à présent dans un cadre très général, tel qu'il soit possible d'y définir les notions de continuité et de limite et de mettre en relief l'essentiel de ces notions. Mais les applications de la topologie à l'analyse exigent des espaces topologiques des propriétés supplémentaires. Nous allons étudier, dans les chapitres V, VI, VII, quelques-unes des plus importantes de ces propriétés.

§ 1. ESPACES SEPARES

1. Condition d'unicité des limites.

En analyse, on a toujours l'unicité de la limite. Cette propriété fondamentale ne s'étend pas aux limites définies de façon plus générale (comme dans le chapitre précédent) sur les espaces topologiques : par exemple si un espace E est muni de la topologie grossière, le filtre $\mathcal{V}(a)$ des voisinages de a étant réduit à E, tout filtre $\mathcal{F}$ contient $\mathcal{V}(a)$, donc tout filtre $\mathcal{F}$ converge vers tout point de E.

Supposons qu'un filtre $\mathcal{F}$ converge vers a et vers b avec $b \neq a$, c'est dire que :

$$\mathcal{F} \text{ plus fin que } \mathcal{V}(a) \text{ et que } \mathcal{V}(b).$$

Mais ceci entraîne :

$$\forall\, V \in \mathcal{V}(a) \quad \text{et} \quad \forall\, V' \in \mathcal{V}(b) \qquad V \cap V' \neq \emptyset.$$

Rétablir l'unicité des limites sur un espace topologique, c'est donc rendre ceci impossible, c'est donc assujettir l'espace à satisfaire l'axiome :

(T_2) $\forall a,\ \forall b \in E,\ a \neq b, \implies \exists\, V \in \mathcal{V}(a)\ \exists\, V' \in \mathcal{V}(b)\quad V \cap V' = \emptyset.$

Cet axiome, désigné par T_2 (T, initiale de Trennung = séparation en allemand) ou comme *axiome de Hausdorff*, caractérise les *espaces topologiques séparés* (*).

Si un espace E vérifie (T_2) pour une topologie $\mathcal{T}$, on dit que $\mathcal{T}$ est séparée.

Remarquons tout de suite que *les espaces métriques sont séparés.* En effet, si $d(a, b) = 2\,r > 0$, les boules ouvertes $B(a, r)$ et $B(b, r)$ sont disjointes.

(*) La notion d'espace topologique non séparé a cependant des applications. Dans ses développements récents, la géométrie algébrique en fait usage (topologie de Zariski).

CONSÉQUENCE DE L'AXIOME DE SÉPARATION. *Si un filtre* $\mathcal{F}$ *converge vers* a*, dans un espace séparé, il ne peut avoir d'autre point adhérent que* a. En effet, s'il était adhérent à b, il existerait un filtre $\mathcal{F}'$ plus fin que $\mathcal{F}$ qui convergerait vers b et vers a, contrairement à l'hypothèse de séparation.

En particulier, puisqu'un ultrafiltre converge vers tout point qui lui est adhérent, dans un espace séparé, un ultrafiltre ou bien converge vers un point, ou bien n'a aucun point adhérent.

REMARQUE.

Si l'axiome de Hausdorff a été numéroté T_2, c'est qu'avant lui d'autres axiomes avaient été considérés, en particulier l'axiome (T_1) ou axiome de Fréchet :

$$(T_1) \qquad \forall a, \forall b \in E \qquad a \neq b \implies \begin{cases} \exists\, V \in \mathcal{V}(a) & b \notin V, \\ \exists\, V' \in \mathcal{V}(b) & a \notin V'. \end{cases}$$

Il est clair que $(T_2) \implies (T_1)$.

(T_1) s'est révélé moins utile que (T_2). Il suffit toutefois pour démontrer un certain nombre de propriétés.

Exercice 30. — On peut aussi considérer l'axiome (T_0), plus faible encore que (T_1) :

(T_0) : Etant donnés deux points distincts quelconques de l'espace, un des deux possède un voisinage qui ne contient pas l'autre.

Montrer que si E est muni de la topologie grossière et si F satisfait à (T_0), les seules applications continues de E dans F sont les applications constantes.

Exercice 31. — (T_1) équivaut à « tout ensemble réduit à un point est fermé » et à « l'intersection des voisinages de a est $\{a\}$ ».

Exercice 32. — 1° Dans un espace vérifiant l'axiome (T_1), l'ensemble A' des points d'accumulation (appelé *ensemble dérivé de* A) est fermé. 2° Montrer qu'un ensemble A est fermé si et seulement si, $A \supset A'$.

Exercice 33. — Si un espace vérifie l'axiome (T_1), tout point d'accumulation de l'ensemble A des valeurs d'une suite de points de cet espace est une valeur d'adhérence de cette suite. Que peut-on dire d'un point adhérent à A ?

Exercice 34. — Pour que E soit séparé il faut qu'il y ait « assez » d'ouverts. De façon précise :

si sur E, la topologie $\mathcal{T}_1$ est séparée, toute topologie plus fine que $\mathcal{T}_1$ est séparée ;

si sur E, la topologie $\mathcal{T}_2$ est non séparée, toute topologe moins fine que $\mathcal{T}_2$ est non séparée.

Ces propriétés sont vraies aussi pour la séparation au sens de l'axiome (T_1).

Exercice 35. — Le fait d'être séparé est « héréditaire », c'est-à-dire si $A \subset E$ et si $\mathcal{T}$ est séparée sur E, la topologie $\mathcal{T}_A$ induite sur A est séparée.

Exercice 36. — 1° Montrer qu'une topologie définie par un écart e n'est séparée que si e est une distance.

2° Montrer qu'une topologie définie par une famille d'écarts $\{e_i\}$ est séparée, si, et seulement si, elle vérifie :

$$\forall x, \forall y \in E \quad x \neq y \implies \exists\, i \quad e_i(x, y) > 0.$$

2. Produits d'espaces séparés.

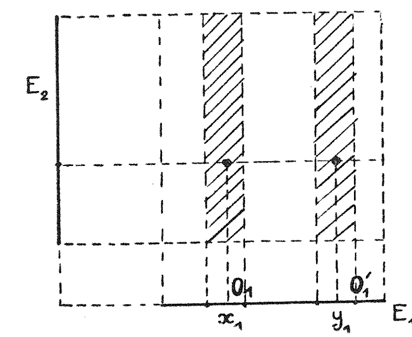
Nous allons démontrer : $E_1 \times E_2$ *est séparé pour la topologie produit si, et seulement si,* E_1 *et* E_2 *sont séparés.*

a) *Supposons d'abord* E_1 *et* E_2 *séparés.*

Soient

$$\begin{cases} x = (x_1, x_2) \in E_1 \times E_2 \\ y = (y_1, y_2) \in E_1 \times E_2 \end{cases}$$

avec $x \neq y$ (par exemple $x_1 \neq y_1$).

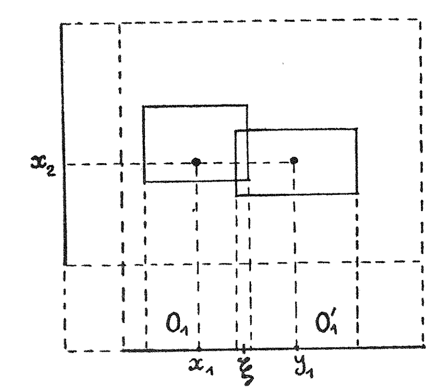


L'hypothèse de séparation entraîne qu'il existe des ouverts O_1 et O'_1 contenant respectivement x_1 et y_1, et tels que :

$$O_1 \cap O'_1 = \emptyset,$$

$\overset{-1}{pr_1}(O_1)$ et $\overset{-1}{pr_1}(O'_1)$ sont des ouverts disjoints de $E_1 \times E_2$ contenant respectivement x et y (figure ci-dessus).

b) *Réciproque.* Supposons que E_1 ne soit pas séparé, c'est-à-dire qu'il existe un couple x_1, y_1, avec $x_1 \neq y_1$, tel que tout ouvert contenant x_1 rencontre tout ouvert contenant y_1.



Soient les points (x_1, x_2) et (y_1, x_2) de $E_1 \times E_2$. Deux ouverts quelconques contenant respectivement ces points contiennent des éléments de la base des ouverts de la topologie produit, soit :

$$\Omega = \overset{-1}{pr_1}(O_1) \times \overset{-1}{pr_2}(O_2) \qquad \Omega' = \overset{-1}{pr_1}(O'_1) \times \overset{-1}{pr_2}(O'_2),$$

O_1 et O'_1 contenant respectivement x_1 et y_1, O_2 et O'_2 contenant x_2. Si $O_1 \cap O'_1$ contient ξ, $\Omega \cap \Omega'$ contient (ξ, x_2). L'intersection des deux ouverts n'est pas vide, et $E_1 \times E_2$ n'est pas séparé.

Remarque : Le raisonnement s'étend sans difficulté à un produit d'espaces en nombre quelconque, fini ou infini.

Exercice 37. — E est séparé équivaut à « sur $(E \times E)$, la diagonale est un fermé ».

§ 2. PROPRIETES PLUS FORTES QUE LA SEPARATION

1. Espaces réguliers.

Nous considérons maintenant l'axiome (T_3) (*) :

(T_3) : *Pour tout fermé* F *de l'espace topologique* E *et pour tout point* x *de* E, *n'appartenant pas à* F, *il existe un voisinage* V *de* x *et un voisinage* W *de* F *(ensemble contenant un ouvert contenant* F) *tels que :*

$$V \cap W = \emptyset.$$

Cet axiome n'est pas plus fort que (T_2), car une partie réduite à un point n'est pas forcément fermée, mais :

$$(T_1) \text{ et } (T_3) \implies (T_2).$$

En effet, pour tout y, (T_1) entraîne que $\{y\}$ est fermé (cf. exercice 31) et (T_3) entraîne alors :

$$\forall x \in E \quad \forall y \in E \quad y \neq x \implies [\exists V \in \mathcal{V}(x) \quad \exists W \in \mathcal{V}(\{y\}) = \mathcal{V}(y) \quad V \cap W = \emptyset].$$

On appelle *espace régulier* un espace topologique qui vérifie (T_1) et (T_3), (ou, ce qui est équivalent), (T_2) et (T_3).

Exercice 38. — Montrer que l'axiome (T_3) est équivalent à : *Tout point de* E *possède une base de voisinages fermés.*

2. Espaces complètement réguliers.

Axiome (T_4). *Pour tout fermé* F *de l'espace topologique* E, *et tout point* x *de* E *n'appartenant pas à* F, *il existe une application continue* f *de* E *dans le segment* $[0, 1]$ *de* **R** *telle que* $f(x) = 0$ *et* $f(F) = \{1\}$.

On a la proposition : $(T_4) \implies (T_3)$.

En effet, soient $x \in E$ et F un fermé de E ; dans $[0, 1]$ muni de la topologie induite de celle de **R**, $[0, \varepsilon[$ et $]1 - \varepsilon, 1]$ sont deux ouverts, d'intersection vide, si $\varepsilon < \frac{1}{2}$. On aura alors :

$$\overset{-1}{f}([0, \varepsilon[) \cap \overset{-1}{f}(]1 - \varepsilon, 1]) = \emptyset.$$

Or, $[0, \varepsilon[$ est un ouvert contenant $f(x)$. Si f est continue, l'image réciproque de cet ouvert est un ouvert contenant x ; $]1 - \varepsilon, 1]$ est un

(*) La notation T_1, T_2, T_3, ... des divers axiomes de séparation est celle du livre d'Alexandrov-Hopf (1934). Cependant, la notion d'espace complètement régulier n'avait pas été dégagée à cette époque et la classification ci-dessus s'écarte de celle d'Alexandrov-Hopf à partir de l'axiome T_4. Notons d'autre part qu'à l'étranger, pour dire qu'un espace est séparé, on le désigne souvent comme un « T_2-space », « T_2-Raum »..., etc...

ouvert contenant $f(F)$; son image réciproque est un ouvert contenant F. Donc l'axiome T_3 est vérifié.

Notons que, du fait des implications précédentes,

$$\left.\begin{matrix}(T_1)\\(T_4)\end{matrix}\right\} \iff \left\{\begin{matrix}(T_2)\\(T_4)\end{matrix}\right.$$

Les espaces satisfaisant à ces groupes d'axiomes sont appelés *espaces complètement réguliers.*

(T_4) CONSTITUE UNE CONDITION NÉCESSAIRE ET SUFFISANTE POUR QUE LA TOPOLOGIE SOIT DÉFINIE PAR UNE FAMILLE D'ÉCARTS.

Nous montrerons seulement, ici, que (T_4) est une condition nécessaire.

Soit donc un ensemble E, dont la topologie $\mathcal{T}$ est définie par une famille d'écarts $e_i (i \in I)$. Montrer que E satisfait à l'axiome (T_4) revient à montrer qu'étant donnés un point x_0 et un ouvert arbitraire contenant x_0, il existe une application continue de E dans $[0, 1]$ qui « envoie » x_0 sur 0 et sur 1 le complémentaire de l'ouvert. Nous avons démontré dans l'exercice 17 que tout point x_0 appartenant à un ouvert était centre de ce que nous avons appelé une pseudo-boule incluse dans l'ouvert, $B = B(x_0, J, \rho)$, J désignant une partie finie de I. Si on peut définir une application continue de E dans $[0, 1]$ qui envoie x_0 sur 0 et le complémentaire de B sur 1, cette application enverra *a fortiori* sur 1 le complémentaire de l'ouvert qui contient B.

En tout point x de B, on a :

$$\forall i \in J \qquad e_i(x, x_0) < \rho.$$

Posons $e(x, x_0) = \sup \{ e_i(x, x_0) ; i \in J \}$.

Ce nombre est défini en tout point x de B puisque J est fini, et s'annule pour $x = x_0$.

Considérons alors l'application φ de E dans **R** définie par :

$$\begin{cases} \forall x \in B & \varphi(x) = \dfrac{e(x, x_0)}{\rho} \\ \forall x \notin B & \varphi(x) = 1, \end{cases}$$

ou, ce qui revient au même :

$$\forall x \in E \qquad \varphi(x) = \inf \left\{ 1, \frac{e(x, x_0)}{\rho} \right\}$$

Cette application envoie x_0 sur 0 et le complémentaire de la pseudo-boule B sur 1 ; reste à vérifier qu'elle est continue. Remarquons d'abord que, e_i étant un écart, $x \to e_i(x_0, x)$ est une application de E dans $\mathbf{R}^+$ qui est continue. En effet, l'image réciproque d'un intervalle $]\alpha, \beta[$ de **R** est l'ensemble $\{x ; \alpha < e_i(x, x_0) < \beta\}$, intersection de l'ouvert $\{x ; e(x, x_0) > \alpha\}$ et de l'ouvert $\{x ; e(x, x_0) < \beta\}$, c'est un ouvert. $x \to e(x, x_0)$, sup d'un nombre fini de fonctions continues est aussi continue et φ, inf de deux fonctions continues est continue. La propriété est donc démontrée.

3. Espaces normaux.

Nous citerons enfin l'axiome.

(T_5). POUR TOUT COUPLE DE FERMÉS DISJOINTS A ET B, IL EXISTE DES VOISINAGES V(A) ET W(B) TELS QUE $V \cap W = \emptyset$.

Cet axiome n'entraîne aucun des précédents.

Il est équivalent à l'axiome suivant (théorème de Urysohn) : *Pour tout couple de fermés disjoints* A *et* B, *il existe une application continue de l'espace dans* $[0, 1]$ *qui vaut zéro sur* A *et* 1 *sur* B.

Le fait que cette nouvelle propriété implique (T_5) se démontre exactement comme l'implication $(T_4) \implies (T_3)$. Quant à la réciproque, nous la démontrerons dans l'exercice 39 ci-dessous. Grâce à ce théorème, on peut voir que :

$$\left.\begin{matrix}(T_1)\\(T_5)\end{matrix}\right\} \implies (T_4), \text{ donc tous les axiomes précédents.}$$

En effet, (T_1) entraîne qu'un point est un fermé.

Les espaces satisfaisant à (T_1) et (T_5) sont dits *espaces normaux.*

Les propriétés de régularité et de régularité complète sont héréditaires, c'est-à-dire sont vraies pour la topologie induite sur un sous-espace (immédiat), mais *la propriété d'être normale n'est pas héréditaire.* Cela tient à ce que deux fermés disjoints du sous-espace peuvent être les intersections avec ce sous-espace de deux fermés non disjoints.

Remarque : L'équivalence des deux énoncés de (T_5) pourrait faire croire à l'équivalence de (T_3) et de (T_4). Il 'en est rien : (T_3) n'implique pas (T_4).

Exercice 39. — f étant une application d'un ensemble X dans la droite numérique **R**, on pose :

$$\mathcal{G}(f, \lambda) = \{ x ; f(x) < \lambda \}$$
$$\bar{\mathcal{G}}(f, \lambda) = \{ x ; f(x) \leqslant \lambda \} .$$

1° *a)* Montrer que l'on a :

$$\bigcap \{ \mathcal{G}(f, \lambda) ; \lambda \in \mathbf{R} \} = \phi ; \bigcup \{ \mathcal{G}(f, \lambda) ; \lambda \in \mathbf{R} \} = X$$
$$\bigcup \{ \mathcal{G}(f, \lambda) ; \lambda < \mu \} = \mathcal{G}(f, \mu).$$

b) Montrer que les égalités ci-dessus sont encore valables si $f(x)$ ne décrit qu'une partie E de **R**, partout dense sur **R**.

2° Montrer que si une famille F_λ de parties X, où λ décrit **R**, vérifie

$$\bigcap \{ F_\lambda ; \lambda \in \mathbf{R} \} = \phi \qquad \bigcup \{ F_\lambda ; \lambda \in \mathbf{R} \} = X$$
$$\bigcup \{ F_\lambda ; \lambda < \mu \} = F_\mu ,$$

il existe une application f, unique, de X dans **R** telle que

$$\forall \lambda \in \mathbf{R} \qquad \mathcal{G}(f, \lambda) = F_\lambda .$$

Montrer que $f(x) = \lambda$ est équivalent à $x \in \bigcap \{ F_\mu ; \mu > \lambda \} - F_\lambda$.

3° $H(\mu)$ est une famille de parties de X définies pour $\mu \in E$ (E : partie de **R** partout dense sur **R**), et possédant les propriétés :

$$\bigcap \{ H(\mu) ; \mu \in E \} = \emptyset \qquad \bigcup \{ H(\mu) ; \mu \in E \} = X$$
$$\mu_1 < \mu_2 \implies H(\mu_1) \subset H(\mu_2).$$

Montrer que la famille F_λ définie *pour tout* λ *réel* par :

$$F_\lambda = \bigcup \{ H(\mu) ; \mu \in E, \mu < \lambda \}$$

possède les propriétés énoncées en 2°.

On suppose dans la suite que X est un espace topologique.

4° Montrer que si f est continue, on a :

$$\overline{\mathcal{G}(f, \lambda)} \subset \bar{\mathcal{G}}(f, \lambda).$$

On suppose que x n'est pas un point isolé de X et que x appartient à $\bar{\mathcal{G}}(f, \lambda) - \overline{\mathcal{G}(f, \lambda)}$. Quelle propriété f possède-t-elle en x ?

5° On dit qu'une partie A de X est fortement incluse dans une partie B de X, si l'on a $\bar{A} \subset \mathring{B}$. On notera cette relation $A \subset\subset B$.
L'inclusion forte est-elle une relation d'ordre sur $\mathcal{P}(X)$?
Que résulte-t-il de $A \subset\subset B$ et $B \subset\subset A$?

6° Montrer que la condition nécessaire et suffisante pour que f, application de X dans **R** soit continue est que pour tout couple de valeurs réelles λ, μ, on ait :

$$\lambda < \mu \implies \mathcal{G}(f, \lambda) \subset\subset \mathcal{G}(f, \mu).$$

7° Si la famille $H(\mu)$ de 3° vérifie :

$$\mu_1 < \mu_2 \implies H(\mu_1) \subset\subset H(\mu_2),$$

montrer que la fonction f que l'on peut lui associer, en vertu des résultats de 3° et 2°, est continue.

8° On suppose que X est un espace topologique normal, montrer que cette propriété est équivalente, pour un espace séparé, à la suivante :
Pour tout fermé F contenu dans un ouvert $O \neq X$, il existe un ouvert U tel que $F \subset U \subset \bar{U} \subset O$.
En déduire que, dans un espace normal, si un ouvert O_1 est fortement inclus dans un ouvert O_2, il existe un ouvert O tel que

$$O_1 \subset\subset O \subset\subset O_2.$$

9° A et B étant deux fermés disjoints d'un espace normal X, on définit une famille $H(\lambda)$ de la manière suivante :

a) On pose d'abord $H(\lambda) = \emptyset$ si $\lambda < 0$,
$H(0) = A$,
$H(1) = \complement B$,
$H(\lambda) = X$ si $\lambda > 1$.

b) Les résultats du 8° permettent ensuite d'affirmer l'existence d'un ouvert que l'on désignera par $H\left(\frac{1}{2}\right)$ et vérifiant

$$H(0) \subset\subset H\left(\frac{1}{2}\right) \subset\subset H(1).$$

c) On procède alors par récurrence. Ayant défini les ensembles $H\left(\frac{p}{2^n}\right)$ pour $p = 0, 1, \ldots 2^n$ on définit $H\left(\frac{2p+1}{2^{n+1}}\right)$ comme un ouvert vérifiant :

$$H\left(\frac{p}{2^n}\right) \subset\subset H\left(\frac{2p+1}{2^{n+1}}\right) \subset\subset H\left(\frac{p+1}{2^n}\right)$$

Justifier la formation des ensembles $H\left(\frac{p}{2^n}\right)$. Montrer que la famille $H(\lambda)$ définie pour $\lambda < 0$, $\lambda > 1$ et pour les nombres dyadiques de $[0, 1]$ vérifie les conditions du 7°. En déduire que dans un espace normal X, il existe pour tout couple de fermés disjoints A et B une fonction continue f définie sur X, à valeurs dans $[0, 1]$ et valant 0 sur A et 1 sur B.

10° On suppose que l'ensemble $\mathcal{C}(X, \mathbf{R})$ des fonctions numériques continues sur un espace normal X (ou seulement complètement régulier) possède la propriété que pour l'ordre naturel sur $\mathcal{C}(X, \mathbf{R})$ toute partie de $\mathcal{C}(X, \mathbf{R})$ qui est majorée possède un plus petit majorant. En déduire que sur X tout ouvert a une adhérence ouverte.

On pourra procéder comme suit : O étant ouvert tel que $\overline{O} \neq X$ on associe à tout point $x \in O$ une fonction g_x continue, à valeurs dans $[0, 1]$ prenant la valeur 0 sur $\complement O$ et la valeur 1 au point x. On montrera que la borne supérieure dans $\mathcal{C}(X, \mathbf{R})$ de l'ensemble $\{ g_x \,;\ x \in O \}$ prend la valeur 1 sur $\overline{O}$ et la valeur 0 sur $\complement \overline{O}$; d'où l'on déduira le résultat annoncé.

CHAPITRE VI

GRANDES CLASSES D'ESPACES TOPOLOGIQUES

La nécessité de donner des démonstrations correctes des diverses propriétés des fonctions continues sur un segment $[a, b]$ de $\mathbf{R}$ a conduit à dégager diverses propriétés de $\mathbf{R}$, qui caractérisent des familles plus générales et très importantes d'espaces topologiques. C'est ainsi que les propriétés :

$$f \text{ continue sur } [a, b] \implies f \text{ bornée}$$
$$f \text{ continue sur } [a, b] \implies f \text{ atteint ses bornes } m \text{ et } M$$

sont à rattacher au caractère « *compact* » d'un fermé borné de $\mathbf{R}$.

La propriété :

$$f \text{ continue sur } [a, b] \implies f \text{ prend toute valeur de } [m, M]$$

est à rattacher au caractère « *connexe* » de $[a, b]$.

La propriété :

$$f \text{ continue sur } [a, b] \implies f \text{ uniformément continue sur } [a, b]$$

se rattache au fait que $[a, b]$ est à la fois *compact* et *métrique*.

§ 1. ESPACES COMPACTS

1. Définition.

Une bonne démonstration de la première des propriétés ci-dessus est fournie par le théorème de Borel-Lebesgue. C'est la propriété qu'il énonce pour $[a, b] \subset \mathbf{R}$, qui a servi de définition pour les espaces compacts. Expliquons d'abord en quoi consiste ce théorème.

On appelle *recouvrement* d'une partie A de E, une famille $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(E)$, telle que :

$$\bigcup \{ X \,;\ X \in \mathcal{R} \} \supset A.$$

La famille $\mathcal{R}$ peut être finie ou infinie.
Si un recouvrement est formé d'ouverts, il est qualifié d'ouvert.

Ceci posé, le théorème de Borel-Lebesgue s'énonce : « *De tout recouvrement ouvert de* $[a, b] \subset \mathbf{R}$, *on peut extraire un recouvrement fini* » (1).

(1) Montrons, sans attendre la démonstration de ce théorème et sans attendre toutes les conséquences qu'on peut en déduire, comment il permet d'établir la première propriété des fonctions continues sur $[a, b]$. Si f est continue, ε étant choisi, tout $x \in [a, b]$ est centre d'un intervalle où $f(y) < f(x) + \varepsilon$; l'ensemble de ces intervalles constitue un recouvrement ouvert de $[a, b]$; en vertu du théorème de Borel-Lebesgue, on peut en extraire un recouvrement fini, formé de n intervalles de centre $x_i (1 \leqslant i \leqslant n)$; on peut alors affirmer que $\forall x \in [a, b], f(x) < \sup \{ f(x_i) \} + \varepsilon$.

DÉFINITION DES ESPACES COMPACTS (selon Bourbaki) (2).

Un espace *compact* :

1) est *séparé ;*

2) satisfait à un des quatre axiomes équivalents suivants :

(C_1). *Tout recouvrement ouvert de l'espace contient un recouvrement fini.*

(C_2). *Toute famille de fermés d'intersection vide contient une sous-famille finie d'intersection vide,*
ou sa variante :

(C'_2). *Si une famille de fermés est telle que toute intersection finie d'éléments de la famille est non vide, alors l'intercession de la famille est non vide.*

(C_3). *Tout filtre sur l'espace a un point adhérent* (3).

(C_4). *Tout ultra-filtre est convergent.*

Etablissons l'équivalence de ces axiomes :

● (C_1) $\Longleftrightarrow$ (C_2).

En effet, l'ensemble des complémentaires des éléments d'un recouvrement ouvert est une famille de fermés d'intersection vide, et réciproquement. Dire qu'on peut extraire, de toute famille d'ouverts qui soit un recouvrement, une famille finie qui soit un recouvrement, équivaut à dire qu'on peut extraire de toute famille de fermés d'intersection vide une famille finie d'intersection vide.

● (C_2) $\Longleftrightarrow$ (C'_2).

En effet, si $\mathcal{F}$ désigne une famille de fermés et $\mathcal{F}_J$ une sous-famille finie, l'axiome (C_2) s'exprime par :

$$\bigcap \{ F ; F \in \mathcal{F} \} = \emptyset \quad \Longrightarrow \quad \exists \mathcal{F}_J \subset \mathcal{F}, \quad \bigcap \{ F ; F \in \mathcal{F}_J \} = \emptyset$$

et (C'_2) s'exprime par :

$$\forall \quad \mathcal{F}_J \subset \mathcal{F}, \quad \bigcap \{ F ; F \in \mathcal{F}_J \} \neq \emptyset \quad \Longrightarrow \quad \bigcap \{ F ; F \in \mathcal{F} \} \neq \emptyset$$

Ces deux propositions sont équivalentes (A $\Longrightarrow$ B et non B $\Longrightarrow$ non A).

● (C_3) $\Longrightarrow$ (C_4).

Le filtre $\mathcal{U}$ a un point adhérent et on sait (cf. IV. 3. 3.) qu'un ultra-filtre converge vers tout point qui lui est adhérent.

● (C_4) $\Longrightarrow$ (C_3).

Soit $\mathcal{F}$ un filtre sur E. Il existe un filtre $\mathcal{U}$ plus fin que $\mathcal{F}$ qui converge vers un point a ; ceci entraîne que a est adhérent à $\mathcal{F}$, d'après IV. 3. 2.

---

(2) Certains auteurs, surtout anglo-saxons, ne font pas entrer la séparation dans la définition des espaces compacts. Il en résulte que leurs énoncés de théorèmes commencent généralement par : soit un « *compact-Hausdorff space* » ou un « *compact T_2-space* ».

(3) Ce qui entraîne en particulier : *toute suite d'éléments de l'espace a une valeur d'adhérence.*

● (C'_2) $\Longrightarrow$ (C_3).

Un point est adhérent à $\mathcal{F}$ si, *et* seulement s'il appartient à l'intersection des adhérences $\overline{F}$ des éléments F de $\mathcal{F}$. Or, toute intersection finie d'éléments F de $\mathcal{F}$ est non vide ; il en est de même de toute intersection finie d'éléments $\overline{F}$. Si l'espace satisfait à (C'_2), il en résulte que $\bigcap \{ \overline{F} ; F \in \mathcal{F} \}$ est non vide ; donc, que $\mathcal{F}$ possède un point adhérent.

● (C_3) $\Longrightarrow$ (C'_2).

Soit Ψ une famille de fermés telle que toute intersection finie soit non vide. Soit $\mathcal{B}$ la famille des intersections finies d'éléments de Ψ ; ($\mathcal{B} \supset \Psi$). Une intersection finie d'éléments de $\mathcal{B}$ est encore un élément de $\mathcal{B}$; d'autre part, $\emptyset \notin \mathcal{B}$; donc $\mathcal{B}$ est la base d'un filtre $\mathcal{F}$ et, en vertu de (C_3), ce filtre a un point adhérent, et l'intersection des adhérences des $F \in \mathcal{F}$ n'est pas vide. Comme $\mathcal{F} \supset \mathcal{B} \supset \Psi$, il en est, *a fortiori*, de même pour l'intersection des adhérences des éléments de Ψ, c'est-à-dire pour les éléments de Ψ eux-mêmes, ce qui établit (C'_2).

2. Théorème de Bolzano-Weierstrass.

Une conséquence immédiate des axiomes des espaces compacts est le théorème de Bolzano-Weierstrass : *Toute partie infinie d'un espace compact possède au moins un point d'accumulation.*

Nous en donnerons deux démonstrations.

1° Soit A une partie infinie du compact K. Les complémentaires F, par rapport à A, des parties finies de A, décrivent un filtre sur A, qui est la base d'un filtre $\mathcal{F}$ sur K. Le filtre $\mathcal{F}$ a un point adhérent a dont tout voisinage V rencontre tout ensemble F et $V \cap F$ est infini, sans quoi ($F - V \cap F$) serait complémentaire dans A d'une partie finie de A et ne rencontrerait pas V. Tout voisinage de a contient donc une partie infinie de A : *a est un point d'accumulation de* A.

2° Nous allons montrer qu'une partie A de K sans point d'accumulation est finie. Tout point x de K possède un voisinage ouvert ne contenant aucun point de A, ou contenant un seul point de A, si $x \in A$. L'ensemble de ces voisinages constitue un recouvrement ouvert de K. On peut en extraire un recouvrement fini : la réunion de ses éléments est K, elle contient donc A ; mais chacun de ses éléments contient au plus un élément de A. La partie A est donc finie.

Tout espace compact satisfait au théorème de Bolzano-Weierstrass. La réciproque n'est pas vraie en général. Mais on montrera qu'un espace *métrique* qui satisfait à Bolzano-Weierstrass est compact.

3. Tout espace compact est normal.

Par définition, un espace compact est séparé ; mais il possède en fait une propriété plus forte : il est *normal.* C'est ce que nous allons montrer maintenant :

Soient, dans un espace compact, un point x et un fermé A, avec $x \notin A$. Pour tout $y \in A$, il existe deux ouverts disjoints contenant respectivement x et y et que nous noterons U_y et V_y :

$$x \in U_y \qquad y \in V_y \qquad U_y \cap V_y = \emptyset.$$

Quand y décrit A, l'ensemble des V_y décrit un recouvrement ouvert de A. On peut en extraire un recouvrement fini $V_{y_1}, V_{y_2}, ..., V_{y_n}$.

Donc, l'ensemble $V_x = \bigcup_{i=1}^{n} V_{y_i}$ est un ouvert contenant A.

Mais $U_x = \bigcap_{i=1}^{n} U_{y_i}$ est un ouvert contenant x.

De $V_{y_i} \cap U_{y_i} = \emptyset$, on déduit $U_x \cap V_x = \emptyset$.

Si maintenant nous considérons deux fermés disjoints A et B, nous pourrons, pour tout $x \in B$, trouver deux voisinages ouverts disjoints, U_x de x et V_x de A. En faisant décrire B par x et en recommençant le raisonnement précédent, nous trouverons un ouvert U contenant B disjoint d'un ouvert V contenant A.

En vertu de l'implication $\left.\begin{matrix}(T_1)\\(T_5)\end{matrix}\right\} \Longrightarrow (T_4)$, nous pouvons en déduire qu'*un espace compact est complètement régulier.* Or, la propriété de régularité complète est héréditaire ; il en résulte que, pour pouvoir plonger un espace dans un espace compact, il est déjà nécessaire que cet espace soit complètement régulier (la propriété de normalité n'étant pas héréditaire, il n'est pas, en revanche, nécessaire qu'il soit normal).

4. Parties compactes d'un espace topologique.

DÉFINITION : On dit que $K \subset E$ est une *partie compacte* de E, si elle est compacte pour la topologie induite.

Remarquons que si $K \subset A \subset E$, la topologie sur A étant induite par celle de E, si K est une partie compacte de A, elle est une partie compacte de E et réciproquement, les topologies induites sur K par celles de E et de A étant identiques. *Le caractère compact d'une partie est donc un caractère intrinsèque,* contrairement aux caractères ouvert et fermé.

Exemple : Dans un espace séparé, tout ensemble fini est compact.

Exercice 40. — Dans un espace séparé où une suite de points (x_n) converge vers un point x, l'ensemble $\{ x_n ; n \in \mathbf{N} \} \cup \{ x \}$ est compact.

THÉORÈME. — UNE PARTIE COMPACTE D'UN ESPACE SÉPARÉ EST FERMÉE.

Soit E un espace séparé et $K \subset E$ une partie compacte. Soit a adhérent à K, dont il suffira de montrer qu'il appartient à K pour que la proposition soit établie. Dire que a est adhérent à K signifie :

$$\forall V \in \mathcal{V}(a) \qquad V \cap K \neq \emptyset.$$

D'autre part, la famille $\mathcal{F} = \{ V \cap K ; V \in \mathcal{V}(a) \}$ est un filtre sur K, comme on le vérifie immédiatement, et, d'après l'axiome (C_3), ce filtre est adhérent à un point b de K. Donc, il existe un filtre $\mathcal{F}'$ sur K, plus fin que $\mathcal{F}$ et qui converge vers b. Ce filtre $\mathcal{F}'$ peut être pris comme base d'un filtre $\widehat{\mathcal{F}}'$ *défini sur* E et $\mathcal{F}$ comme base d'un filtre $\widehat{\mathcal{F}}$ *défini sur* E. Le filtre $\widehat{\mathcal{F}}'$ est plus fin que $\widehat{\mathcal{F}}$ puisque tout élément de la base du deuxième est élément de la base du premier. Or, $\widehat{\mathcal{F}}$ est plus fin que $\mathcal{V}(a)$ puisque tout élément de $\mathcal{V}(a)$ contient un élément de la base de $\widehat{\mathcal{F}}$. Donc, $\widehat{\mathcal{F}}'$, plus fin que $\mathcal{V}(a)$, converge vers a. Il converge aussi vers b. [En effet, $\mathcal{F}'$, convergeant vers b dans K, est plus fin que le filtre $\{ V \cap K ; V \in \mathcal{V}(b) \}$

donc : $\quad \forall V \in \mathcal{V}(b), \quad \exists F' \in \mathcal{F}' \quad F' \subset V \cap K$

c'est-à-dire que tout élément du filtre $\mathcal{V}(b)$ contient un élément F' de $\widehat{\mathcal{F}}'$, base de $\widehat{\mathcal{F}}'$, donc que $\widehat{\mathcal{F}}'$ est plus fin que $\mathcal{V}(b)$]. Dans l'espace séparé E, le filtre $\widehat{\mathcal{F}}'$ ne peut avoir deux limites distinctes ; donc, $a = b$ et $a \in K$.

THÉORÈME. — UNE PARTIE FERMÉE D'UN ESPACE COMPACT EST COMPACTE.

Observons d'abord que E étant séparé, puisque compact, sa partie F est séparée, la séparation étant héréditaire. Pour montrer la compacité de F, utilisons l'axiome (C_2). Les fermés de F sont des fermés de E. D'une famille, d'intersection vide, de fermés F, on peut donc extraire une famille finie d'intersection vide ; F satisfait aussi à (C_2) ; il est compact.

L'ensemble de ces deux théorèmes montre que, dans un espace compact, il y a identité entre les parties compactes et les parties fermées. Notons les propriétés suivantes :

- *Dans un espace séparé, une réunion finie de compacts est un compact.*

En effet :

Un recouvrement ouvert étant donné, la réunion des recouvrements finis de chaque compact qu'on peut en extraire forme un recouvrement fini de la réunion. L'espace ayant été supposé séparé, ceci suffit pour que la réunion soit un compact.

- *Dans un espace séparé, une intersection de compacts est un compact.*

En effet, soient, dans E séparé, des compacts K_i (i décrivant un ensemble I d'indices, fini ou infini). Ces compacts sont fermés, donc leur intersection est un fermé de E et peut aussi être considérée comme un fermé de l'un d'entre eux, K_0 ; partie fermée de ce compact, cette intersection est compacte.

Pour montrer que l'hypothèse de séparation de l'espace est nécessaire à la validité des deux propositions précédentes nous renvoyons à l'exercice 41.

5. Compacts de $\mathbf{R}^n$.

Montrons d'abord que, dans un espace métrique, tout compact est borné. Soit E un espace métrique. L'axiome de Borel-Lebesgue, (axiome (C_1)), montre qu'on peut obtenir un recouvrement de tout compact par un nombre fini de boules de centre x_i ($1 \leqslant i \leqslant n$) et de même rayon r (puisqu'on a un recouvrement ouvert constitué de toutes les boules de rayon r). Soit alors x quelconque appartenant au compact ; on a :

$$d(x_1, x) \leqslant \sup_{2 \leq i < n} d(x_1, x_i) + r,$$

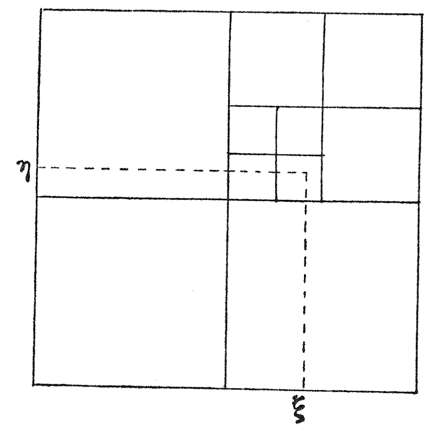
donc, ce compact est borné.

Un espace métrique étant séparé, la propriété que nous venons d'établir, rapprochée du théorème établi plus haut, permet d'affirmer : *dans un espace métrique, tout compact est un fermé borné.* La réciproque, généralement fausse, est vraie dans $\mathbf{R}^n$.

Pour fixer les idées, prenons $n = 2$.

Il est inutile de montrer que le fermé borné le plus général est un compact car, si nous établissons le théorème pour un carré fermé, la proposition « *toute partie fermée d'un compact est compacte* », nous permettra d'obtenir la compacité de n'importe quel fermé borné à partir de celle d'un carré qui le contient.

Soit donc un carré fermé et supposons qu'il ne satisfasse pas à l'axiome de Borel-Lebesgue, c'est-à-dire qu'il existe un recouvrement ouvert dont on ne puisse extraire aucun recouvrement fini. Partageons le carré en quatre carrés égaux. L'hypothèse faite entraîne que, du recouvrement ouvert considéré, on ne peut extraire un recouvrement fini pour un, au moins, des quatre carrés, sans quoi, en réunissant (dans $\mathcal{P}$ (E)) quatre recouvrements finis, on obtiendrait un recouvrement fini du grand carré. Partageons à nouveau en quatre carrés égaux celui des quatre



carrés précédents qui ne satisfait pas à l'axiome de Borel-Lebesgue ; un des quatre nouveaux carrés n'y satisfait pas non plus ..., et ainsi de suite. Les abscisses et les ordonnées des côtés du carré où l'axiome de Borel-Lebesgue n'est pas vérifié tendent vers des limites ξ et η. Nous avons abouti à une contradiction, car, du fait de sa définition, le point (ξ, η) appartient à un carré de dimensions arbitrairement petites, qui n'admet aucun recouvrement fini extrait du recouvrement initial, et pourtant il existe un élément de ce recouvrement qui contient (ξ, η), donc contient un carré de dimension suffisamment petite.

Si n avait été supérieur à 2, on aurait considéré, au lieu d'un carré, un pavé fermé à n dimensions et on l'aurait divisé en $\frac{1}{2^n}$ pavés égaux et le raisonnement se serait poursuivi de la même manière.

Nous avons donc montré : *les compacts de* $\mathbf{R}^n$ *en sont les fermés bornés.*

Exercice 41. — On considère l'espace produit de **R**, muni de la topologie usuelle, par un ensemble à deux éléments, muni de la topologie grossière, ensemble produit qui peut être représenté commodément par deux droites parallèles telles que leurs points de même abscisse sont projections orthogonales l'un de l'autre.

1) Indiquer une base des voisinages d'un point de cet espace produit et en conclure que cet espace n'est pas séparé.

2) Montrer que le sous-ensemble formé d'un semi-segment $]a, b]$ d'une des droites et du point d'abscisse a de l'autre est compact.

3) Choisir deux sous-ensembles de cette espèce de façon telle que leur réunion ne soit pas compacte.

4) Choisir deux sous-ensembles de cette espèce de façon telle que leur intersection ne soit pas compacte.

6. Image continue d'un compact dans un espace topologique séparé.

THÉORÈME. — SOIT E UN ESPACE TOPOLOGIQUE COMPACT ET E' UN ESPACE SÉPARÉ ; SI $f : E \longrightarrow E'$ EST CONTINUE, $f(E)$ EST COMPACTE.

Soit un recouvrement ouvert $\{ O'_i \,;\, i \in I \}$ de $f(E)$.

On a donc :

$$\bigcup_{i \in I} O'_i \supset f(E).$$

Puisque f est continue, $\overset{-1}{f}(O'_i)$ est un ouvert de E, et, de plus :

$$\bigcup_{i \in I} \overset{-1}{f}(O'_i) \supset \overset{-1}{f}(f(E)) = E.$$

Donc, $\{ \overset{-1}{f}(O'_i) \,;\, i \in I \}$ est un recouvrement ouvert de E.

En vertu de l'axiome (C_1) on peut extraire de ce recouvrement ouvert un recouvrement fini $\{ \overset{-1}{f}(O'_i) \,;\, i \in J \}$, J désignant une partie finie de I.

De : $\bigcup_{i \in J} \overset{-1}{f}(O'_i) \supset E$ résulte

$$f\Big(\bigcup_{i \in J} \overset{-1}{f}(O'_i)\Big) = \bigcup_{i \in J} f \circ \overset{-1}{f}(O'_i) \supset f(E).$$

Or : $\qquad f \circ \overset{-1}{f}(O'_i) \subset O'_i.$

Donc, *a fortiori :* $\bigcup_{i \in J} O'_i \supset f(E).$

D'un recouvrement ouvert arbitraire de $f(E)$ on a extrait un recouvrement fini. (C_1) est vérifié ; E' étant séparé, donc $f(E)$ aussi (la séparation est héréditaire), $f(E)$ est compacte.

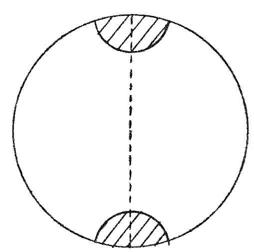
CONSÉQUENCES :

1° Nous avons maintenant le moyen de démontrer les deux premiers théorèmes fondamentaux relatifs aux fonctions continues sur un segment de **R**, puisque ce segment est un compact ; l'image par une application continue d'un compact dans **R** (qui est séparé) est un compact ; donc l'ensemble des valeurs de f est borné et comprend ses bornes.

2° *Compacité et topologie quotient.* Par application du théorème précédent, on voit que : *si* K *est un compact, et* $\mathcal{R}$ *une relation d'équivalence définie sur* K, *si* $K/\mathcal{R}$ *est séparé pour la topologie quotient,* $K/\mathcal{R}$ *est compact.* Pour que, K étant compact, $K/\mathcal{R}$ le soit, il est donc nécessaire et suffisant que $K/\mathcal{R}$ soit séparé.

Nous n'étudierons pas ici les conditions que doit vérifier $\mathcal{R}$ pour qu'il en soit ainsi. Notons seulement qu'il est à prévoir qu'il y a effectivement des conditions, la séparation n'ayant aucune raison de « passer aux classes », puisque deux voisinages disjoints peuvent ne pas avoir des images disjointes par l'application canonique.

Sans connaître les conditions générales sur $\mathcal{R}$, on trouvera des espaces quotients compacts chaque fois qu'on saura démontrer que ces espaces sont séparés. *Exemple d'espace quotient compact :* le plan projectif. Nous avons trouvé (cf. exercice 26) que le plan projectif était homéomorphe, pour la relation d'équivalence $\mathcal{R}$ qui identifie deux points diamétralement opposés, à l'espace quotient d'un disque plan fermé. Ce disque fermé est compact (cf. compacts de $\mathbf{R}^n$) ; d'autre part, il est immédiat que $K/\mathcal{R}$ est séparé ; en effet, pour un élément de $K/\mathcal{R}$ constitué par un point intérieur au disque, un voisinage est un voisinage pour la topologie usuelle de $\mathbf{R}^2$ et, pour un élément constitué de deux points diamétralement opposés du bord, un voisinage est



constitué des intersections avec le disque des voisinages usuels des deux points ; et on peut toujours dans ces conditions trouver des voisinages disjoints pour deux éléments distincts. On peut donc conclure que le plan projectif est compact.

7. Place des topologies compactes dans l'ensemble ordonné des topologies séparées.

Nous sommes maintenant en mesure de comparer du point de vue de la finesse les topologies compactes aux autres topologies séparées. Cette comparaison s'exprime dans la proposition suivante :

Si un ensemble E *est muni d'une topologie compacte* $\mathcal{T}$ *et d'une topologie séparée* $\mathcal{T}'$ *moins fine que* $\mathcal{T}$, *alors* $\mathcal{T} = \mathcal{T}'$.

Ce qui est équivalent aux énoncés :

- *Toute topologie strictement moins fine qu'une topologie compacte n'est pas séparée.*
- *Toute topologie strictement plus fine qu'une topologie séparée n'est pas compacte.*

Pour démontrer la première proposition, considérons l'application identique de E, muni de la topologie $\mathcal{T}$, dans E, muni de la topologie $\mathcal{T}'$. La topologie $\mathcal{T}'$ étant moins fine que $\mathcal{T}$, cette application est continue, puisque l'image réciproque d'un ouvert de $\mathcal{T}'$ est un ouvert de $\mathcal{T}$. Un compact (c'est-à-dire un fermé) de E, muni de $\mathcal{T}$, a pour image dans **E**, muni de $\mathcal{T}'$ (qui est séparé), un compact, donc un fermé. Tous les fermés de E, pour $\mathcal{T}$, sont donc fermés pour $\mathcal{T}'$; il en résulte que $\mathcal{T}'$ est plus fine que $\mathcal{T}$. En rapprochant de l'hypothèse on trouve que $\mathcal{T}' = \mathcal{T}$.

On peut encore énoncer ce théorème en disant que *les topologies compactes sont des éléments minimaux de l'ensemble des topologies séparées.* (La réciproque est fausse, tout élément minimal n'étant pas une topologie compacte).

De façon imagée, mais grossière, on pourrait dire qu'une topologie, pour être séparée, doit posséder « assez » d'ouverts, c'est-à-dire des ouverts « assez petits », mais pour qu'elle soit compacte, il faut qu'ils ne

« soient pas trop petits » afin que tout recouvrement ouvert contienne un recouvrement fini. La compacité correspond donc à un équilibre privilégié entre deux propriétés qui s'opposent.

8. Produit d'espaces compacts.

Théorème de Tychonov. — Pour qu'un produit d'espaces soit compact, il faut et il suffit que chacun de ces espaces soit compact.

Soit d'abord E un espace compact, produit d'espaces E_i et muni de la topologie produit. Nous savons déjà que E étant séparé, chaque E_i est séparé pour cette topologie. Considérons alors la projection pr_i de E sur E_i ; c'est une application continue d'un espace compact dans un espace séparé. Donc, pour tout i, E_i est compact.

Exercice 42. — Démontrer la réciproque dans le cas d'un produit de deux espaces à l'aide de l'axiome de Borel-Lebesgue.

Nous allons démontrer cette réciproque dans le cas général, c'est-à-dire quand $\{E_i\}$ est une famille finie ou infinie d'espaces. Nous établirons d'abord le théorème suivant : *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un filtre converge dans un espace produit est que chacune de ses projections converge.*

(La projection du filtre est, rappelons-le, le filtre qui admet pour base l'ensemble des projections des éléments du filtre, conformément à la définition générale donnée pour l'image d'un filtre par une application).

Soit $a = (a_i)$ un point de l'espace produit et $\mathcal{F}$ un filtre, sur cet espace, qui converge vers a, donc qui est plus fin que $\mathcal{V}(a)$. Or, la projection étant une application continue, $pr(\mathcal{V}(a))$ converge vers a_i (1), alors $pr(\mathcal{F})$, plus fin que $pr(\mathcal{V}(a))$, converge *a fortiori* vers a_i.

Réciproquement, désignons par $\mathcal{F}_i$ la projection sur E_i du filtre $\mathcal{F}$ et supposons que pour tout i, $\mathcal{F}_i$ converge vers a_i. Nous voulons montrer que $\mathcal{F}$ converge vers $a = (a_i)$ et, pour cela, montrer que tout voisinage de a contient un élément du filtre. Tout voisinage contient un ouvert qui est de la forme :

$$\bigcap_{i \in J} \overset{-1}{pr_i} O_i,$$

J étant une partie finie de l'ensemble des indices, et chaque O_i étant un ouvert de E_i qui contient a_i, donc contient, par hypothèse, un élément de $\mathcal{F}_i$. C'est dire que :

$$\forall i \in J \qquad \exists F_i \in \mathcal{F} \qquad pr_i(F_i) \subset O_i.$$

Soit alors :

$$F = \bigcap_{i \in J} F_i.$$

(1) Dire que $f(\mathcal{V}(a))$ converge vers $a_i = f(a)$ signifie que $f(\mathcal{V}(a))$ est plus fin que $\mathcal{V}(a_i)$. Mais ici, dans le cas particulier d'une projection, et étant donnée la construction des ouverts de l'espace produit, la projection d'un ouvert est un ouvert, ce qui entraîne :

$$\forall V \in \mathcal{V}(a) \qquad pr\,V \in \mathcal{V}(a_i),$$

donc : $pr(\mathcal{V}(a))$ moins fin que $\mathcal{V}(a_i)$,

finalement : $pr(\mathcal{V}(a) = \mathcal{V}(a_i)$.

C'est un élément de $\mathcal{F}$ qui vérifie :

$$\forall i \in J \qquad pr_i(F) \subset O_i,$$

ce qui entraîne :

$$\forall i \in J \qquad F \subset \overset{-1}{pr_i} \circ pr_i(F) \subset \overset{-1}{pr_i}(O_i),$$

d'où :

$$F \subset \bigcap_{i \in J} \overset{-1}{pr_i}(O_i).$$

Donc, tout voisinage de a contient un élément $F \in \mathcal{F}$ et, par suite, $\mathcal{F}$ converge vers a.

Revenons alors au produit d'un nombre fini ou infini d'espaces compacts E_i et appliquons le théorème précédent à un ultrafiltre $\mathcal{U}$ sur le produit. Nous savons (cf. IV. 3. 3) que la projection d'un ultrafiltre est une base d'ultrafiltre (ou un ultrafiltre si nous appelons, comme précédemment image du filtre, le filtre engendré par l'image). Dans les espaces E_i compacts, les ultrafiltres convergent ; c'est suffisant pour que $\mathcal{U}$ converge, donc E est compact.

§ 2. ESPACES LOCALEMENT COMPACTS. COMPACTIFICATION

1. Espaces localement compacts.

On appelle *espace localement compact, un espace séparé dont tout point possède un voisinage compact.*

Exemple : **R** *est localement compact*, tout point appartenant à un segment $[a, b]$ qui contient l'ouvert $]a, b[$ et est compact. $\mathbf{R}^n$ sera de même localement compact car tout point appartient à une boule fermée qui contient une boule ouverte et est compacte.

Plus généralement, *un produit fini d'espaces localement compacts est localement compact.* En effet, un produit d'espaces séparés est séparé. D'autre part, soit $x = (x_i)$, $(i = 1, 2, ..., n)$ avec $x_i \in E_i$ (espace localement compact). Pour tout i, x_i possède dans E_i un voisinage compact V_i. Le produit $\prod_{1 \leq i \leq n} V_i$ est voisinage de x, il est compact en vertu du théorème de Tychonov et $\prod E_i$ est localement compact.

Exercice 43. — Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un produit infini d'espaces topologiques soit localement compact est que les espaces facteurs soient compacts, à l'exception possible d'un nombre fini d'entre eux qui sont alors localement compacts.

Exercice 44. — Montrer que dans un espace localement compact, tout point possède une base de voisinages compacts.

Exercice 45. — Décider de chacune des propositions suivantes si elle est vraie (en la démontrant), ou si elle est fausse (en donnant un contre-exemple) :

a) Dans un espace topologique séparé, tout sous-espace localement compact est fermé.

b) Dans un espace topologique, l'intersection de deux sous-espaces localement compacts est localement compacte.

c) Dans un espace séparé, la réunion de deux sous-espaces localement compacts est localement compacte.

d) Dans un espace localement compact, tout sous-espace ouvert est localement compact.

e) Dans un espace localement compact, tout sous-espace fermé est localement compact.

f) Dans un espace localement compact, le complémentaire d'un sous-espace localement compact, est localement compact.

2. Compactification d'un espace topologique.

Compactifier un espace topologique E, c'est construire un espace $\widehat{E}$ qui a les propriétés suivantes :

1° $\widehat{E}$ *est compact.*

2° $\widehat{E}$ *contient* E *et induit sur* E *sa topologie initiale.*

3° E *est dense sur* $\widehat{E}$, *c'est-à-dire que son adhérence dans* $\widehat{E}$ *est* $\widehat{E}$ *lui-même* (1).

Pour les espaces localement compacts, on a le résultat suivant :

Théorème d'Alexandrov. — Il est possible de compactifier un espace localement compact en lui adjoignant un seul élément.

Avant de démontrer ce théorème, étudions quelques exemples :

3. Compactifications de la droite et du plan.

a) On peut compactifier **R** *par adjonction d'un élément* ω *qu'on appelle point à l'infini.*

Sur le nouvel ensemble $\widehat{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cup \{\omega\}$, on définit la topologie par les voisinages (cf. II. 1. 3) : On prend pour base des voisinages dans $\widehat{\mathbf{R}}$ de $x \in \mathbf{R}$ le filtre de ses voisinages dans **R**, et pour ω une base de voisinages formée des parties :

$$]-\infty, \beta[\;\cup\;]\alpha, +\infty[\;\cup\; \{\omega\} \qquad (1).$$

La vérification des axiomes des voisinages se fait sans difficultés. La topologie de $\widehat{\mathbf{R}}$ induit bien sur **R** la topologie usuelle, puisque l'intersection avec **R** d'un des nouveaux voisinages est un ancien voisinage. **R** est dense sur $\widehat{\mathbf{R}}$ (car ω est adhérent à **R**). Reste à prouver que $\widehat{\mathbf{R}}$ est compact : tout recouvrement ouvert de **R** comporte nécessairement un voisinage de ω, donc un ensemble de type (1) ; $\widehat{\mathbf{R}}$ est l'union de cet ensemble et de $[\alpha, \beta]$ qui est compact et admet donc un recouvrement fini extrait du recouvrement donné. $\widehat{\mathbf{R}}$ admet donc aussi un recouvrement fini extrait de ce recouvrement.

---

(1) On impose cette troisième condition pour obtenir un compact minimal répondant aux deux autres conditions. En effet, si E n'était pas dense sur $\widehat{E}$, son adhérence $\overline{E}$ dans $\widehat{E}$, partie fermée d'un compact, serait compacte et on pourrait remplacer $\widehat{E}$ par $\overline{E}$ strictement inclus dans $\widehat{E}$.

On peut voir que $\widehat{\mathbf{R}}$ est homéomorphe à la droite projective, elle-même homéomorphe à un cercle (cf. exercice 27). Une inversion réalise directement l'homéomorphisme de $\widehat{\mathbf{R}}$ et du cercle, ω est l'homologue du pôle d'inversion. Un cercle étant un fermé borné de $\mathbf{R}^2$, donc un compact, nous retrouvons bien ainsi la compacité de $\widehat{\mathbf{R}}$.

b) D'autre part, muni de la topologie définie en (IV, 1, 1), $\overline{\mathbf{R}}$ *est aussi un compactifié de* $\mathbf{R}$. Nous avons déjà vérifié les axiomes des voisinages et la propriété 2°. Les propriétés 1° et 3° se démontrent exactement comme pour $\widehat{\mathbf{R}}$. $\overline{\mathbf{R}}$, muni de cette topologie, s'appelle *droite achevée*. Ce procédé de compactification a, sur le précédent, l'avantage de conserver la structure d'ordre (*).

OPÉRATIONS DANS $\widehat{\mathbf{R}}$ OU $\overline{\mathbf{R}}$. — Il faut bien noter qu'avec l'un ou l'autre de ces procédés, la structure de corps de $\mathbf{R}$ ne se prolonge pas au compactifié. On peut toutefois définir dans $\widehat{\mathbf{R}}$ ou dans $\overline{\mathbf{R}}$ des prolongements des opérations définies sur $\mathbf{R}$, de telle façon que ces opérations soient continues dès l'instant qu'elles sont définies.

● *Dans* $\widehat{\mathbf{R}}$, on posera :

$$\forall a \in \mathbf{R} \qquad a + \omega = \omega \qquad\qquad \forall a \in \mathbf{R} - \{0\} \qquad a\omega = \omega$$

(ce qui montre déjà que $\widehat{\mathbf{R}}$ ne sera pas un groupe pour l'addition, ni $\widehat{\mathbf{R}} - \{0\}$ pour la multiplication). Avec ces conventions, les opérations :

$$(x, y) \in (\widehat{\mathbf{R}})^2 \longrightarrow x + y \in \widehat{\mathbf{R}} \qquad (1)$$
$$(x, y) \in (\widehat{\mathbf{R}})^2 \longrightarrow xy \in \widehat{\mathbf{R}} \qquad (2)$$

sont définies et continues, la première en tout point (a, ω) avec $a \neq \omega$, la deuxième en tout point (a, ω) avec $a \neq 0$.

Mais on peut voir qu'il est impossible d'attribuer à $\omega + \omega$ et $\omega 0$ des valeurs telles que (1) et (2) soient continues aux points correspondants. *Pour que l'opération* (2) *soit continue au point* $(\omega, 0)$, il faudrait que si x tend vers 0, ωx tende vers $\omega 0$, ce qui exigerait $\omega 0 = \omega$; il faudrait aussi que si x tend vers ω, $x0$ tende vers $\omega 0$, ce qui exigerait $\omega 0 = 0$.

Pour que l'opération (1) *soit continue au point* (ω, ω), il faudrait déjà que si x tend vers ω, $\omega + x$ tende vers $\omega + \omega$, ce qui exigerait $\omega + \omega = \omega$. Mais alors, pour que l'opération soit continue, il faudrait qu'étant donné un voisinage V de ω, il existe un voisinage de $(\omega, \omega) \in (\widehat{\mathbf{R}})^2$ dont l'image soit contenue dans V. Pour V prenons $\widehat{\mathbf{R}} - [-\alpha, +\alpha]$. Tout voisinage de (ω, ω) contient un voisinage de la forme :

$$(\widehat{\mathbf{R}} - [-\beta, +\beta]) \times (\widehat{\mathbf{R}} - [-\gamma, +\gamma]).$$

Si grands que soient les nombres β et γ, on peut toujours trouver dans ce voisinage un point $(-x_0, x_0)$ dont l'image est 0 et n'appartient pas à V.

D'autre part, les égalités de définition de $a + \omega$ et $a\omega$ montrent que ω n'a d'inverse ni pour l'addition, ni pour la multiplication. Mais si l'on considère les applications :

$$\varphi : x \in \mathbf{R} \longrightarrow -x \in \mathbf{R} \qquad \psi : x \in \mathbf{R} - \{0\} \longrightarrow \frac{1}{x} \in \mathbf{R},$$

(*) $\widehat{\mathbf{R}}$ et $\overline{\mathbf{R}}$ sont les compactifications les plus usuelles de $\mathbf{R}$, ce ne sont pas les seules possibles. De même, pour les compartifications de $\mathbf{R}^2$ indiquées plus loin.

il est possible de les prolonger par continuité à $\widehat{\mathbf{R}}$, c'est-à-dire de poser :

$$\begin{cases} \varphi(\omega) = \lim\limits_{x=\omega} \varphi(x) = \omega \\ \psi(\omega) = \lim\limits_{x=\omega} \psi(x) = 0 \\ \psi(0) = \lim\limits_{x=\omega} \psi(x) = \omega. \end{cases}$$

On sera donc amené à écrire :

$$-\omega = \omega \qquad \frac{1}{\omega} = 0 \qquad \frac{1}{0} = \omega,$$

étant bien entendu que ces trois notations n'ont plus leur sens algébrique puisque $\omega + (-\omega)$ et $\omega \dfrac{1}{\omega}$ ne sont pas définis.

Ces nouvelles définitions permettent de prolonger les opérations :

$$\begin{cases} (x, y) \in \mathbf{R}^2 \longrightarrow x - y = x + (-y) \in \mathbf{R} \\ (x, y) \in \mathbf{R}^2 \longrightarrow \dfrac{x}{y} = x\,\dfrac{1}{y} \in \mathbf{R}, \end{cases}$$

la première à $\widehat{\mathbf{R}}^2$ tout entier à l'exception du point (ω, ω), la deuxième à $\widehat{\mathbf{R}}^2$ tout entier à l'exception des points $(0, 0)$ et (ω, ω).

● De façon analogue, dans $\overline{\mathbf{R}}$, on posera :

$$\forall a \in \mathbf{R} \quad \begin{matrix} a + (+\infty) = +\infty \\ (+\infty) + (+\infty) = +\infty \end{matrix} \quad \text{et} \quad \begin{matrix} a + (-\infty) = -\infty \\ (-\infty) + (-\infty) = -\infty \end{matrix}$$

$$\forall a \in \mathbf{R}^+ - \{0\} \; \begin{matrix} a(+\infty) = +\infty \\ a(-\infty) = -\infty \end{matrix} \qquad \forall a \in \mathbf{R}^- - \{0\} \; \begin{matrix} a(+\infty) = -\infty \\ a(-\infty) = +\infty \end{matrix}$$

$$\text{et} \quad (+\infty)(+\infty) = +\infty \qquad (-\infty)(-\infty) = +\infty \qquad (+\infty)(-\infty) = -\infty$$

On vérifie encore qu'avec ces conventions les opérations

$$(x, y) \longrightarrow x + y \quad \text{et} \quad (x, y) \longrightarrow xy$$

sont continues quand elles sont définies. Mais un raisonnement analogue à celui fait précédemment montre qu'on ne peut attribuer à $(+\infty) + (-\infty)$, $(+\infty)\,0$ et $(-\infty)\,0$ des valeurs telles que les opérations correspondantes soient continues. On retrouve là l'origine de ce qu'on appelle classiquement les *formes indéterminées* $(\infty - \infty)$ et $(\infty \times 0)$.

Par ailleurs, bien que $+\infty$ et $-\infty$ n'aient pas d'inverses pour l'addition au sens algébrique du terme, on peut encore poser (en donnant à φ le même sens que ci-dessus) :

$$\varphi(+\infty) = -\infty \qquad \varphi(-\infty) = +\infty,$$

c'est-à-dire :

$$-\infty = -(+\infty).$$

L'opération

$$(x, y) \in \overline{\mathbf{R}}^2 \longrightarrow x - y = x + (-y) \in \overline{\mathbf{R}}$$

se trouvera alors étendue à $\overline{\mathbf{R}}^2$ tout entier à l'exception des points $(+\infty, +\infty)$ et $(-\infty, -\infty)$. Quant à l'opération ψ, elle peut être prolongée par continuité à $+\infty$ et $-\infty$ en posant :

$$\frac{1}{-\infty} = 0 \qquad \frac{1}{+\infty} = 0,$$

mais il est impossible de choisir $\psi(0)$ de telle sorte que cette opération soit continue à l'origine. L'opération $(x, y) \in \mathbf{R}^2 \longrightarrow \frac{x}{y} = x\,\frac{1}{y} \in \mathbf{R}$ ne peut donc être étendue à $\overline{\mathbf{R}}^2$ (1).

On peut de même *compactifier le plan* $\mathbf{R}^2$ en lui ajoutant un élément (point à l'infini du plan) qui a pour base de voisinages l'extérieur des cercles du plan. On montrerait de la même façon que l'espace ainsi obtenu est bien une compactification de $\mathbf{R}^2$.

Cette compactification est aussi utilisée pour le corps des complexes **C**, qui est homéomorphe à $\mathbf{R}^2$. Le compactifié obtenu, homéomorphe par inversion à une sphère, est appelé *sphère de Riemann*. Ce qui a été dit au sujet de la structure algébrique de la droite projective $\widehat{\mathbf{R}}$ peut se redire au sujet de la sphère de Riemann.

d) Une autre compactification du plan est fournie par le *plan projectif*. Nous avons vu ci-dessus que celui-ci était compact et homéomorphe au disque fermé plan à points du bord diamétralement opposés identifiés. Appelons Γ l'espace quotient, ainsi défini, à partir du disque de centre O et de rayon r. Appelons B le disque ouvert de centre O et de rayon r. Le disque B est dense sur Γ ; la topologie de Γ induit sur B la topologie usuelle ; Γ est donc un compactifié de B. La transformation définie en coordonnées polaires relatives à O par

$$\theta' = \theta \,(\mathrm{mod}\ 2\pi) \qquad \rho' = \operatorname{tg} \frac{\pi\rho}{2r} \qquad 0 < \rho < r$$

est une homéomorphie qui fait correspondre $\mathbf{R}^2$ à B. On peut la prolonger à Γ tout entier en posant :

$$\text{pour } \rho = r \qquad \rho' = \omega \qquad \theta' = \theta \,(\mathrm{mod}\ \pi).$$

Elle lui fait alors correspondre un compactifié de $\mathbf{R}^2$. Celui-ci possède sur toute droite issue de O un point à distance infinie de O, homologue du point de Γ n'appartenant pas à B situé sur cette droite.

4. Démonstration du théorème d'Alexandrov.

Soit E un espace topologique localement compact et non compact. Sa non-compacité peut se traduire par : il existe des filtres sans points adhérents. Soit $\mathcal{F}$ un tel filtre et K un compact de E. Si, pour tout $F \in \mathcal{F}$, l'intersection $F \cap K$ était non vide, $F \cap K$ décrirait un filtre $\mathcal{F}_K$ sur le compact K et $\mathcal{F}_K$ aurait un point adhérent a dans K. Le filtre $\mathcal{F}'$ sur E ayant $\mathcal{F}_K$ pour base aurait *a fortiori* a pour point adhérent dans E et $\mathcal{F}$, qui est moins fin que $\mathcal{F}'$, aurait aussi a pour point adhérent. Par suite, si $\mathcal{F}$ n'a pas de point adhérent, pour tout compact K de E :

$$\exists F \in \mathcal{F} \qquad F \cap K = \emptyset \quad \text{d'où} \quad F \subset \complement K \tag{1}$$

Or, la famille $\mathcal{G}$ des ensembles $\complement K$, où K décrit l'ensemble des compacts de E n'est pas vide (2) ; le vide ne lui appartient pas car E n'est

(1) On peut toutefois l'étendre soit à $(\overline{\mathbf{R}}+)^2$, soit à $(\overline{\mathbf{R}}-)^2$. Dans le premier cas, on pose $\frac{1}{0} = +\infty$; la division est alors définie partout sauf pour (0, 0) et $(+\infty, +\infty)$. Dans le deuxième, on pose $\frac{1}{0} = -\infty$.

(2) Tout espace séparé possède au moins comme parties compactes ses parties finies ; ici nous avons aussi un voisinage compact pour tout point.

pas compact ; enfin, si K_1 et K_2 sont des compacts, $K_1 \cup K_2$ est compact et

$$\complement K_1 \cap \complement K_2 = \complement\,(K_1 \cup K_2).$$

La famille $\mathcal{G}$ est donc la base d'un filtre Φ. Et la relation (1) signifie que tout filtre $\mathcal{F}$ sans point adhérent sur E est plus fin que Φ.

La construction du compactifié $\widehat{E}$ se fera alors très naturellement de la manière suivante : ω étant un élément n'appartenant pas à E, on considère l'ensemble :

$$\widehat{E} = E \cup \{\omega\}$$

sur lequel on définit une topologie $\widehat{\mathcal{T}}$, comme suit :

1° si $x \in E$, le filtre $\widehat{\mathcal{V}}(x)$ des voisinages de x dans $\widehat{E}$ a pour base $\mathcal{V}(x)$, filtre des voisinages de x dans E ;

2° le filtre $\mathcal{V}(\omega)$ des voisinages de ω est décrit par les ensembles $U \cup \{\omega\}$ quand U décrit Φ.

La vérification des axiomes (V_1), (V_2), (V_3) est immédiate. (V_4) résulte pour $\mathcal{V}(\omega)$ de ce que tout ensemble U contient un $\complement K$ qui est ouvert dans E, donc aussi dans $\widehat{E}$ en vertu de 1°.

Il est clair que la topologie induite sur E par $\widehat{\mathcal{T}}$ est la topologie initiale de E et que $\overline{E} = \widehat{E}$, car tout voisinage de ω rencontre E.

$\widehat{\mathcal{T}}$ *est séparée*. Si x et y appartiennent à E, cela résulte de la séparation de E ; si $x \in E$, il possède un voisinage compact K pour $\mathcal{T}$, donc aussi pour $\widehat{\mathcal{T}}$, qui est disjoint de $\complement K \cup \{\omega\}$, qui est voisinage de ω. On notera que c'est ici que l'hypothèse : « E localement compact », intervient.

Enfin, $\widehat{E}$ *est compact ;* en effet, un filtre $\widehat{\mathcal{F}}$ sur $\widehat{E}$ induit sur E un filtre $\mathcal{F}$ à condition que tout élément $F \in \widehat{\mathcal{F}}$ ait avec E une intersection non vide. Cette condition est remplie par tous les filtres $\widehat{\mathcal{F}}$, sauf par l'ultra-filtre des sur-ensembles de $\{\omega\}$. Ce dernier converge vers ω. Tout autre filtre $\widehat{\mathcal{F}}$ induit donc sur E un filtre $\mathcal{F}$ qui, ou bien a un point adhérent dans E, ou bien est plus fin que Φ, d'après ce qui a été montré. Dans le deuxième cas, ceci entraîne que $\widehat{\mathcal{F}}$, qui est $\{F \cup \{\omega\} ;\ F \in \mathcal{F}\}$, est plus fin que $\widehat{\mathcal{V}}(\omega)$, donc que $\widehat{\mathcal{F}}$ converge vers ω. Dans tous les cas, le filtre $\widehat{\mathcal{F}}$ a un point adhérent.

Remarque I : On remarquera qu'il n'y a rien d'essentiellement nouveau dans le cas général par rapport à la compactification de **R** ou $\mathbf{R}^2$ par adjonction d'un point.

Remarque II : Le point ω est crée ici « ex nihilo ». On pourrait préférer construire $\widehat{E}$ à partir de E, en utilisant uniquement le matériel fourni par E. Une des manières de faire cette construction est de considérer l'ensemble $\mathcal{E}$ de tous les ultrafiltres sur E qui est une partie de $\mathcal{P}\mathcal{P}$ (E). Pour un ultrafiltre dans un espace séparé il n'y a que deux possibilités : converger vers un point de E, ou ne pas avoir de point adhérent. On peut alors faire une partition de

$\mathcal{E}$ en mettant, pour chaque $x \in E$, dans une même classe les ultrafiltres qui convergent vers x (classe qui contient en particulier l'ultrafiltre de base $\{x\}$) et en mettant dans une même classe tous les ultrafiltres sans point adhérent. L'espace quotient ainsi déduit de $\mathcal{E}$ est la réunion d'une partie en bijection avec E et d'un élément (qui joue le rôle de ω) et on peut lui donner une topologie qui en fasse l'espace $\overline{E}$ construit plus haut (ou tout au moins un espace homéomorphe). L'intérêt du procédé est peut-être d'ailleurs moins de donner une existence « légitime » à ω que de permettre d'autres compactifications en remplaçant la partition ci-dessus par d'autres partitions plus fines, en ce qui concerne les ultrafiltres qui ne convergent pas, et en munissant le nouvel espace quotient d'une topologie adéquate. La droite achevée, par exemple, s'obtiendrait en mettant dans une classe les ultrafiltres qui contiennent $]0, +\infty[$ et dans une autre classe ceux qui contiennent la demi-droite complémentaire (tout ultrafiltre doit contenir l'une des deux ; cf. IV, 3, 3).

Exercice 46. — 1) Montrer que, si un espace E possède une compactification X telle que (X — E) soit fini, E est localement compact.

2) On considère l'ensemble $\mathcal{X}$ des compactifiés X d'un espace E et on considère sur $\mathcal{X}$ la relation $X_1 \mathcal{R} X_2$ définie par : il existe une application continue de X_2 sur X_1 qui est l'identité sur E. Montrer que $\mathcal{R}$ est un ordre si l'on identifie deux compactifiés tels qu'il existe une homéomorphie de l'un sur l'autre dont la restriction à E soit l'identité.

3) Montrer que si un compactifié X est tel que (X — E) ait plus d'un point, il existe un compactifié X' tel que $X' \mathcal{R} X$ et $X' \neq X$.

4) Montrer que $\mathcal{X}$ a un plus petit élément pour $\mathcal{R}$ si, et seulement si, l'espace E est localement compact.

Exercice 47. — On dit qu'une application f de E dans $\overline{\mathbf{R}}$ est semi-continue supérieurement en $x_0 \in E$ si elle satisfait à une des propriétés suivantes :

(a) $M(f, x_0) = f(x_0)$;

(cf. exercice 29, pour la signification du symbole $M(f, x_0)$).

(b) $\forall h > f(x_0) \quad \exists V \in \mathcal{V}(x_0) \quad \forall x \in V \quad f(x) < h.$

Une application f de E dans $\overline{\mathbf{R}}$ est dite semi-continue supérieurement sur E si elle est semi-continue supérieurement en tout point de E.

Les fonctions semi-continues inférieurement sont définies de façon analogue. On observera que toute fonction semi-continue inférieurement est l'opposée d'une fonction semi-continue supérieurement.

On observera aussi qu'une fonction est continue si et seulement si elle est à la fois semi-continue supérieurement et semi-continue inférieurement.

1° Etablir l'équivalence de (a) et (b).

2° Montrer qu'une fonction est semi-continue supérieurement sur E si et seulement si elle satisfait à une des propriétés suivantes :

(c) $\forall \lambda \in \overline{\mathbf{R}}, \ \overset{-1}{f}([-\infty, \lambda[)$ est ouvert ;

(d) Dans $E \times \overline{\mathbf{R}}$ l'ensemble $S(f) = \{(x, y), y > f(x)\}$ est ouvert.

3° Exemple : $E = \overline{\mathbf{R}}+$; f est définie par :

$\frac{p}{q}$ étant une fraction irréductible, $f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{1}{q}$

et $f(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbf{R}+ - \mathbf{Q}+$.

Montrer que f est semi-continue supérieurement et déterminer son oscillation (pour la définition de ce terme, voir exercice 29).

4° Montrer que la somme de deux fonctions semi-continues supérieurement est semi-continue supérieurement en tout point où elle est définie ; que le produit de deux fonctions semi-continues supérieurement et positives ou nulles est semi-continu supérieurement en tout point où il est défini ; que si f est une fonction semi-continue supérieurement et strictement positive, $\frac{1}{f}$ est semi-continue inférieurement en tout point.

5° Montrer que l'*inf* et le *sup* d'une famille finie de fonctions semi-continues supérieurement sont semi-continues supérieurement. Ces propriétés s'étendent-elles au cas d'une famille infinie ? Que peut-on dire de l'*inf* et du *sup* d'une famille de fonctions continues ?

6° Montrer que l'oscillation $\Omega(f, x)$ d'une fonction f quelconque à valeurs réelles est semi-continue supérieurement.

7° Une fonction semi-continue supérieurement, définie sur un compact, atteint sa borne supérieure.

§ 3. ESPACES CONNEXES

1. Définition.

Un espace connexe est, pour l'intuition, un espace « d'un seul tenant ».

De façon précise, un espace topologique est *non connexe* s'il possède l'une des trois propriétés suivantes, manifestement équivalentes :

1) *Il en existe une partition en deux ouverts non vides.*
2) *Il en existe une partition en deux fermés non vides.*
3) *Il existe une partie différente de l'espace tout entier et du vide qui est ouverte et fermée.*

Il est *connexe* dans le cas contraire.

Une *partie connexe* A d'un espace topologique E est une partie de A connexe pour la topologie induite, ce qui se traduit par exemple, par l'impossibilité de trouver deux ouverts O_1 et O_2 de E tels que :

$$\left.\begin{array}{l} O_1 \cap A \neq \emptyset \\ O_2 \cap A \neq \emptyset \end{array}\right\} \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{l} O_1 \cap O_2 \cap A = \emptyset \\ A \subset O_1 \cup O_2. \end{array}\right.$$

Exemples : 1) $\mathbf{R}$ *est connexe* car le complémentaire d'un ouvert, non vide, différent de $\mathbf{R}$, n'est pas ouvert : en effet un tel ouvert est réunion d'intervalles (ou de demi-droites) deux à deux disjointes. Une extrémité d'un tel intervalle appartient au complémentaire et n'admet pas ce complémentaire pour voisinage.

2) $\mathbf{R}^n$ *est connexe,* car si un ouvert O non vide est différent de $\mathbf{R}^n$, son intersection avec une droite (variété affine à une dimension), issue d'un point de O est un ouvert U non vide de cette droite. O étant différent de $\mathbf{R}^n$, cette droite peut être choisie non incluse dans O ; U a alors un point frontière qui appartient à $\complement O$ et n'a pas $\complement O$ comme voisinage. Le complémentaire de l'ouvert O ne peut pas être ouvert.

3) $\mathbf{Q}$ *n'est pas connexe* pour la topologie usuelle. L'ensemble des rationnels de carré inférieur à 2 et l'ensemble des rationnels de carré supérieur à 2 en sont deux ouverts complémentaires non vides.

4) La réunion de deux intervalles disjoints de $\mathbf{R}$, la réunion de deux disques disjoints du plan ne sont pas connexes.

Remarques : Si un ensemble E muni d'une topologie $\mathcal{T}$ est un espace connexe, il le demeure pour toute topologie moins fine que $\mathcal{T}$. Il peut ne pas l'être pour une topologie plus fine ; un espace discret est connexe si, et seulement si, il n'a qu'un point.

2. Image continue d'un connexe.

THÉORÈME. — L'IMAGE CONTINUE D'UN ESPACE CONNEXE EST CONNEXE.

Soit E un espace connexe et f une application continue de E dans un espace F. Supposons $f(E)$ non connexe. Il existe deux ouverts O_1 et O_2 de F tels que :

$$\begin{cases} 1) & O_1 \cap f(E) \neq \emptyset \quad \text{et} \quad O_2 \cap f(E) \neq \emptyset \\ 2) & O_1 \cap O_2 \cap f(E) = \emptyset \\ 3) & f(E) \subset O_1 \cup O_2. \end{cases}$$

Les images réciproques $\overset{-1}{f}(O_1)$ et $\overset{-1}{f}(O_2)$ sont des ouverts de E, car f est continue, ils sont non vides en vertu de 1), leur intersection est vide en vertu de 2) et leur réunion est E en vertu de 3). Alors, contrairement à l'hypothèse, E n'est pas connexe.

APPLICATIONS. — Si f est une application continue d'un segment $[a, b] \subset \mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, l'image de $[a, b]$ est un segment : nous savons, en effet, qu'elle est compacte et nous venons de montrer qu'elle est connexe ; or, un compact K de $\mathbf{R}$ est un fermé borné ; si c est sa borne inférieure et d sa borne supérieure et s'il n'était pas le segment $[c, d]$, c'est qu'il existerait $e \in [c, d]$, $e \notin K$. Mais alors $K \cap]-\infty, e[$ et $K \cap]e, +\infty[$ seraient des ouverts pour la topologie induite sur K et K admettrait une partition en ouverts disjoints, non vides.

Le résultat : « *une fonction continue d'une variable réelle ne passe pas d'une valeur à une autre sans passer par les valeurs intermédiaires* », est un cas particulier du théorème précédent.

PRODUIT D'ESPACES CONNEXES. — Une autre conséquence du théorème précédent est que, *si un produit d'espaces topologiques est connexe, chacun des espaces facteurs est connexe.* La réciproque est vraie : *un produit d'espaces connexes est connexe.* Nous ne le démontrerons pas ici.

3. Composantes connexes.

THÉORÈME. — SI, DANS UN ESPACE TOPOLOGIQUE, UNE FAMILLE A_i ($i \in I$) DE PARTIES CONNEXES A UNE INTERSECTION NON VIDE, LA RÉUNION A DES A_i EST CONNEXE.

Supposons A non connexe. Il existe alors deux ouverts O_1 et O_2 de E tels que :

$$\begin{cases} O_1 \cap A \neq \emptyset \quad \text{et} \quad O_2 \cap A \neq \emptyset \\ O_1 \cap O_2 \cap A = \emptyset \qquad A \subset O_1 \cup O_2. \end{cases}$$

Soit alors A_i une des parties de la famille ; A_i est contenue dans $O_1 \cup O_2$, mais on ne peut avoir $O_1 \cap A_i \neq \emptyset$ et $O_2 \cap A_i \neq \emptyset$, car $O_1 \cap O_2 \cap A = \emptyset$ implique $O_1 \cap O_2 \cap A_i = \emptyset$ et A_i ne serait pas connexe. On a donc, soit $A_i \subset O_1$, soit $A_i \subset O_2$.

Posons :

$$\begin{cases} I_1 = \{ i \,;\, i \in I, A_i \subset O_1 \} \\ I_2 = \{ i \,;\, i \in I, A_i \subset O_2 \}. \end{cases}$$

Aucun des deux ensembles I_1 et I_2 n'est vide, puisque A, qui est l'union des A_i, rencontre O_1 et O_2.

Mais

$$\bigcap \{ A_i \,;\, i \in I \} = [\bigcap \{ A_i \,;\, i \in I_1 \}] \cap [\bigcap \{ A_i \,;\, i \in I_2 \}].$$

Or $\quad \bigcap \{ A_i \,; i \in I_1 \} \subset O_1 \qquad \bigcap \{ A_i \,; i \in I_2 \} \subset O_2$

et $\quad O_1 \cap O_2 = \emptyset.$

D'où $\quad \bigcap \{ A_i \,;\, i \in I \} = \emptyset$ contrairement à l'hypothèse.

APPLICATION. — COMPOSANTE CONNEXE D'UN POINT. Dans un espace topologique E, considérons la famille des parties connexes contenant un point x. Cette famille n'est pas vide, car $\{ x \}$ est connexe. En vertu du théorème précédent, la réunion de la famille est connexe et, par suite, est la plus grande partie connexe contenant $\{ x \}$. On l'appelle *composante connexe* de x. Le même théorème prouve que deux composantes connexes qui ont un point commun sont confondues. *L'ensemble des composantes connexes d'un espace topologique en constitue donc une partition.*

Si E est connexe, tout point de E a E pour composante connexe. Si E est un ouvert de $\mathbf{R}$, ses composantes connexes sont les intervalles deux à deux disjoints dont il est la réunion. Dans $\mathbf{Q}$, la composante connexe de tout point est réduite à ce point ; on dit dans ce cas que l'espace est totalement discontinu. Tout espace discret est totalement discontinu.

Notons, à ce propos, qu'on appelle *continu* tout espace compact connexe. Les continus de $\mathbf{R}$ en sont les segments. L'image continue d'un segment de $\mathbf{R}$ dans un espace séparé est un continu. On appelle, plus particulièrement, *arc de Jordan* dans $\mathbf{R}^n$, l'image homéomorphe d'un segment de $\mathbf{R}$.

Les continus que nous venons de citer sont connexes par arc (cf. ci-dessous). Il en existe de beaucoup plus complexes.

4. Espace connexe par arc.

On dit qu'un espace topologique E est *connexe par arc* si, pour tout couple de points distincts (x, y) de E, il existe une application continue f de $[0, 1]$ dans E telle que $f(0) = x$, $f(1) = y$; autrement dit, deux points peuvent toujours être joints par un « arc continu ».

Un espace connexe par arc est connexe ; sinon, en prenant x et y dans deux ouverts non vides de E qui en constituent une partition, leurs images réciproques par f seraient deux ouverts non vides disjoints de $[0, 1]$ dont la réunion ne pourrait être $[0, 1]$.

La réciproque est fausse : le plan étant rapporté à un repère orthonormé, le sous-espace $E = C \cup D$ avec :

$$C : \text{graphe de } x \longrightarrow y = \sin \frac{1}{x} \qquad \text{pour } 0 < x < 1$$

$$D : \text{segment} \qquad x = 0, \quad -1 \leqslant y \leqslant 1$$

est connexe. En effet, C et D sont connexes (C comme image continue d'un connexe). Une partition en deux ouverts disjoints ne pourrait donc être que la partition en C et D. Or, D ne peut pas être ouvert pour la topologie induite sur E, tout ouvert du plan contenant D ayant avec C une intersection non vide. Et E n'est pas connexe par arc, aucun arc continu de E ne pouvant relier un point de D et un point de C.

Exercice 48. — Soit D un espace topologique connexe et soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence définie sur D. On suppose que tout $x \in D$ possède un voisinage V tel que $x \mathcal{R} y$ pour tout $y \in V$. Montrer que la classe d'équivalence d'un point x_0 de D est ouverte et fermée et en déduire que $x \mathcal{R} y$ est vérifiée pour tout couple (x, y) de points de D.

Exercice 49. — On appelle *chaîne* un ensemble totalement ordonné. La relation d'ordre sera notée $a \leqslant b$, et $a < b$ signifiera que a et b sont différents et vérifient la relation. Une chaîne est dite complète si toutes ses parties ont une borne supérieure et une borne inférieure.

1) Toute chaîne C peut être munie d'une topologie $\mathcal{T}$ admettant pour générateurs les intervalles $]a, b[= \{ x ; a < x < b \}$ et si C a un plus petit élément a_0 les semi-segments $[a_0, b[= \{ x ; a_0 \leqslant x < b \}$ et si C a un plus grand élément b_0 les semi-segments $]a, b_0] = \{ x ; a < x \leqslant b \}$.

Montrer que $\mathcal{T}$ est séparée et admet une base des ouverts formée des intervalles (et éventuellement semi-segments) définis ci-dessus.

2) *Une section commençante* de C en est une partie s telle que

$$x \in s, y \leqslant x \implies y \in s.$$

Une section commençante est dite *close* si elle a un plus grand élément. Montrer que toute section commençante close est fermée pour $\mathcal{T}$ et que, si toute section fermée pour $\mathcal{T}$ est close et si C a un plus petit élément, C est complète.

3) Montrer que C munie de $\mathcal{T}$, est compacte, si, et seulement si, C est complète.

4) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que C soit connexe pour $\mathcal{T}$.

CHAPITRE VII

ESPACES MÉTRIQUES

Nous avons commencé ce cours en introduisant la notion de distance et d'espace métrique, puis nous avons constaté que, lorsqu'on ne s'intéressait qu'à la continuité, ce qui importait, c'était les ouverts définis à partir d'une distance et non la distance elle-même (des distances différentes pouvant conduire aux mêmes ouverts). Cela nous a permis d'introduire la notion générale d'espace topologique et de définir les notions de continuité et de limite dans un cadre qui n'en retient que l'essentiel.

Mais si une topologie est définie par une distance, la structure topologique n'utilise qu'une partie de l'information fournie par la distance.

Nous nous proposons maintenant :

1° d'indiquer certaines propriétés importantes des topologies définies par une distance ;

2° de préciser ce qui, dans une structure d'espace métrique, n'est pas réductible à la topologie.

§ 1. PROPRIETES DES TOPOLOGIES D'ESPACES METRIQUES

1. Séparation.

Nous avons déjà signalé qu'une topologie d'espace métrique est séparée. Elle possède une propriété de séparation plus forte : *elle est normale.*

Introduisons à cette occasion la distance d'un point x à une partie A, soit $d(x, \mathrm{A})$, définie par :

$$d(x, \mathrm{A}) = \inf \{ d(x, y) \; ; \; y \in \mathrm{A} \}$$

$d(x, \mathrm{A})$ est un nombre réel, positif ou nul, et il est clair que :

$$d(x, \mathrm{A}) = 0 \iff x \in \overline{\mathrm{A}}.$$

Ceci étant, soient A et B deux fermés disjoints d'un espace métrique et considérons les ensembles :

$$\mathrm{U} = \{ x \; ; \; d(x, \mathrm{A}) < d(x, \mathrm{B}) \}$$
$$\mathrm{V} = \{ x \; ; \; d(x, \mathrm{B}) < d(x, \mathrm{A}) \} .$$

Puisque $d(x, \mathrm{A}) = 0$ équivaut à $x \in \mathrm{A}$ et que A et B sont disjoints, on constate que $\mathrm{A} \subset \mathrm{U}$ et $\mathrm{B} \subset \mathrm{V}$; en outre, $\mathrm{U} \cap \mathrm{V} = \emptyset$.

Enfin, U et V sont ouverts : en effet, soit x un point de U, alors $d(x, \mathrm{A}) < d(x, \mathrm{B})$. Posons : $d(x, \mathrm{B}) - d(x, \mathrm{A}) = 3h$.

Si $y \in B(x, h)$, on a : $\forall\, a \in A \quad d(y,a) < d(x,a) + h$.
Donc,
$$\inf \{ d(y,a) \; ; \; a \in A \} \leqslant \inf \{ d(x,a) \; ; \; a \in A \} + h$$
c'est-à-dire :
$$d(y, A) \leqslant d(x, A) + h.$$
D'autre part, $\forall\, b \in B$, on a : $\quad d(y, b) > d(x, b) - h$,
par suite :
$$\inf \{ d(y,b) \; ; \; b \in B \} \geqslant \inf \{ d(x,b) \; ; \; b \in B \} - h$$
c'est-à-dire :
$$d(y, B) \geqslant d(x, B) - h,$$
d'où :
$$d(y, B) - d(y, A) > h,$$
c'est-à-dire :
$$y \in U.$$

Tout point de U est bien centre d'une boule incluse dans U. Il en est de même pour V. Tout couple de fermés disjoints A et B possède bien un couple de voisinages U et V disjoints.

2. Premier axiome de dénombrabilité.

Pour tout point x d'un espace métrique, les boules de centre x et de rayon $\frac{1}{n}$ (ou de rayon ε_n, où $\{ \varepsilon_n \}$ est une suite de réels strictement positifs qui tend vers zéro) constituent une base du filtre des voisinages de x. *Tout point possède donc une base dénombrable de voisinages* ; on dit alors que l'espace satisfait au premier axiome de dénombrabilité.

Une conséquence capitale pour la manipulation des espaces métriques en est que toutes les notions topologiques peuvent s'y exprimer dans le langage des suites. Donnons-en deux exemples :

a) « *x est adhérent à une partie* A » est équivalent à « il existe une suite $\{ x_n \}$ de points de A qui converge vers x. En effet, dire que tout voisinage de x rencontre A est équivalent à dire que toute boule $B\left(x, \frac{1}{n}\right)$ rencontre A. Il suffit donc de choisir dans l'ensemble non vide $B\left(x, \frac{1}{n}\right) \cap A$ un élément x_n pour obtenir une suite de points de A convergeant vers x. La réciproque est évidente.

b) « *f est une application d'un espace métrique* X *dans un espace* Y *continue au point* x_0 » est équivalent à : « l'image $\{ f(x_n) \}$ de toute suite $\{ x_n \}$ de X convergeant vers x_0 est une suite convergeant vers $f(x_0) = y_0$ ».

Il est clair en effet que la continuité de f entraîne la convergence de $\{ f(x_n) \}$ vers $f(x_0)$. Et, inversement, supposons f non continue en x_0. Cela signifie :
$$\exists\, r_0 \in \mathbf{R}^+ - \{ 0 \} \qquad \forall\, r \in \mathbf{R}^+ - \{ 0 \} \qquad f(B(x, r)) \cap \complement B(y_0, r_0) \neq \emptyset.$$
On peut en particulier prendre $r = \frac{1}{n}$. Il existe alors un élément x_n de $B(x, r)$ dont l'image appartient au complémentaire de la boule $B(y_0, r_0)$. La suite x_n converge alors vers x_0 et $f(x_n)$ ne converge pas vers $f(x_0)$.

Exercice 50. — 1° Montrer que, dans un espace métrique, tout fermé est l'intersection d'une famille dénombrable d'ouverts. (On exprime ce fait en disant que l'ensemble est un G_δ).

2° Montrer que si E est un espace topologique et f une application continue de E dans **R**, l'image réciproque par f, d'un fermé de **R** est un G_δ **fermé** de E.

3° Utilisant le fait qu'un espace métrique est normal et le théorème d'Urysohn (cf. V. 2, 3), montrer que, pour tout G_δ fermé F d'un espace métrique, il existe une fonction f continue à valeurs réelles telle que $F = \overset{-1}{f}(0)$.

§ 2. PROPRIETES DE LA STRUCTURE D'ESPACE METRIQUE

La donnée de la distance permet, pour parler intuitivement, de comparer les petitesses des voisinages de deux points, ce que nous n'avons pas le moyen de faire dans un espace topologique quelconque. Il est de même possible de donner un sens à l'expression : une partie A est petite. On peut le faire dans un espace topologique, en comparant la partie au voisinage d'un point : pour parler de façon assez lâche, un filtre converge vers un point, s'il possède des éléments plus petits que les voisinages du point ; de façon un peu plus précise, s'il possède toujours un élément plus petit qu'un voisinage donné du point. Mais la comparaison n'est valable que pour les voisinages d'un point donné. Dans un espace métrique, la distance donne un moyen de comparer la petitesse des voisinages de deux points et de donner un sens absolu à la petitesse d'une partie. C'est à cette possibilité que se rapporte le qualificatif *d'uniforme* utilisé pour *caractériser la structure d'espace métrique et, plus généralement, les structures définies par la donnée d'une famille d'écarts.*

1. Diamètre d'une partie A d'un espace métrique.

C'est le nombre réel positif (éventuellement $+ \infty$) défini par :
$$\delta(A) = \sup \{ d(x, y) \; ; \; x \in A \; ; \; y \in A \}.$$

Un ensemble est borné si son diamètre est fini (ce qui est équivalent, comme on le vérifie sans peine au fait qu'il est contenu dans une boule). Dans $\mathbf{R}^2$, muni de la distance euclidienne : le diamètre d'un disque est son diamètre au sens habituel, le diamètre d'un triangle est la longueur de son plus grand côté. Un ensemble « petit » sera alors un ensemble de « diamètre petit ».

2. Suites de Cauchy.

Soit $\{ x_n \}$ une suite convergeant vers un point x. Ceci veut dire :
$$\forall\, \varepsilon \in \mathbf{R}^+ - \{ 0 \} \qquad \exists\, n_0 \in \mathbf{N} \qquad \forall\, n > n_0 \qquad d(x_n, x) < \varepsilon.$$
Ou encore, si l'on désigne par S_n la section finissante $\{ x_p \; ; \; p > n \}$:
$$\forall\, B(x, \varepsilon) \qquad \exists\, n_0 \in \mathbf{N} \qquad S_n \subset B(x, \varepsilon),$$
ce qui entraîne,
$$\forall\, \varepsilon \qquad \exists\, n_0 \qquad \forall\, p > n_0 \qquad \delta(S_p) \leqslant 2\varepsilon.$$

Autrement dit, *le diamètre de la section finissante* S_n *d'une suite convergente tend vers zéro quand* n *tend vers l'infini.*

Ce que l'on peut exprimer aussi par :
$$\forall\, \varepsilon \qquad \exists\, n_0 \qquad \forall\, n > n_0 \qquad \forall\, m > n_0 \qquad d(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

Une suite possédant cette propriété est une *suite de Cauchy*. La question qui se pose alors, et que nous avons déjà étudiée (cf. *A.P.M. I*, chapitre IV), est : toute suite de Cauchy est-elle convergente ? Nous savons que la réponse est négative ; toute suite de Cauchy de **Q** n'est pas convergente sur $\mathbf{Q}$; sur l'intervalle $]0, 1[$, muni de la distance usuelle, la suite $\left\{\frac{1}{n}\ ;\ n \in \mathbf{N}\right\}$ est une suite de Cauchy, elle ne converge pas. Sur $\mathbf{R}$, par contre, toute suite de Cauchy converge.

On a le théorème suivant : SI, DANS UN ESPACE MÉTRIQUE, UNE SUITE DE CAUCHY A UNE VALEUR D'ADHÉRENCE a, ELLE CONVERGE VERS a.

En effet, si a est une valeur d'adhérence :

$$\forall r,\ \forall n \qquad B(a, r) \cap S_n \neq \emptyset.$$

La suite étant de Cauchy :

$$\forall r \qquad \exists n_0 \qquad \forall n > n_0 \qquad \delta(S_n) < r.$$

On en déduit donc :

$$\forall r \qquad \exists n_0 \qquad \forall n > n_0 \qquad S_n \subset B(a, 2r),$$

ce qui établit que la suite converge vers a.

Le comportement d'une suite de Cauchy est donc extrêmement régulier : ou bien convergence, ou bien absence de valeurs d'adhérence.

3. Espaces métriques complets.

On dit qu'*un espace métrique est complet si toute suite de Cauchy de cet espace est convergente ;* c'est donc un espace dans lequel il y a identité entre les deux notions de suite convergente et de suite de Cauchy. Et l'intérêt de la notion de suite de Cauchy (cadeau de la structure uniforme) est alors la possibilité de décider de la convergence d'une suite, du seul examen intrinsèque de la suite, et sans avoir à déterminer d'abord la limite. Nous avons vu (*A.P.M. I*, exercice 66) que tout espace métrique E pouvait être considéré comme une partie, partout dense, d'un espace complet E, défini à une isométrie près et qu'on appelle le complété de l'espace et qui est obtenu comme ensemble-quotient de l'ensemble des suites de Cauchy de E. Nous ne démontrerons pas à nouveau ce résultat ici, nous contentant de souligner son importance considérable.

Notons que cette propriété d'être complet, pour un espace, est une propriété liée à la distance dans ce qu'elle représente de plus précis que la topologie qui en dérive, c'est-à-dire que c'est une propriété de la structure métrique et non de la topologie que l'on peut associer à cette structure. Ceci est illustré par le fait suivant : deux distances d_1 et d_2 étant définies sur un même espace E et y définissant la même topologie $\mathcal{T}$, l'espace E peut être complet pour une des distances et ne pas l'être pour l'autre.

Exemple : Soit E l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right[\subset \mathbf{R}$ et considérons sur E les deux distances suivantes : 1° la distance euclidienne $d_1(x, y) = |x - y|$; 2° la distance $d_2(x, y) = |\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y|$. Ces deux distances induisent la même topologie ; en effet on peut passer de $E(d_1)$ (c'est-à-dire E muni de d_1) à $E(d_2)$ par la composée des applications :

$$x \in E(d_1) \longrightarrow \operatorname{tg} x \in \mathbf{R} \longrightarrow x \in E(d_2)$$

$\mathbf{R}$ étant muni de la topologie usuelle. La première de ces deux applications est une bijection bicontinue ; la deuxième est une isométrie d'après la définition de d_2. Donc l'application identique $E(d_1) \longrightarrow E(d_2)$ est un homéomorphisme, et les ouverts sont les mêmes.

D'autre part, E muni de d_1 n'est pas complet car une suite de $\left]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right[$ convergeant, dans $\mathbf{R}$, vers $-\frac{\pi}{2}$ ou $+\frac{\pi}{2}$ est une suite de Cauchy de $E(d_1)$ qui ne converge pas dans E. Au contraire dans $E(d_2)$, isométrique à $\mathbf{R}$, toute suite de Cauchy converge.

4. Propriétés des espaces complets.

1° Nous montrerons, relativement aux parties d'un espace complet, les deux propriétés que l'on peut schématiser par :

(I) $\left.\begin{array}{l}\text{E } \textit{métrique} \\ \text{F } \textit{sous-espace complet de E}\end{array}\right\} \Longrightarrow$ F *fermé*.

(II) $\left.\begin{array}{l}\text{E } \textit{complet} \\ \text{F } \textit{fermé de E}\end{array}\right\} \Longrightarrow$ F *complet*.

Démonstration de (I). Soit $x \in \overline{F}$. Il existe une suite (x_n) avec $x_n \in F$ qui converge vers x et qui est donc une suite de Cauchy. F étant complet, toute suite de Cauchy de F y converge ; donc, $x \in F$ et on peut conclure que F est fermé.

Démonstration de (II). Soit une suite de Cauchy de F ; c'est aussi une suite de Cauchy de E, donc elle converge vers une limite x qui doit appartenir à $\overline{F}$, donc à F puisque F est fermé. Donc F est complet.

2° THÉORÈME. — UN PRODUIT FINI D'ESPACES MÉTRIQUES, MUNI D'UNE DES DISTANCES DÉFINIES DANS L'EXERCICE 19, EST COMPLET SI, ET SEULEMENT SI, LES ESPACES FACTEURS SONT COMPLETS.

E_1 et E_2 étant deux espaces munis de deux distances d_1 et d_2, nous avons indiqué à l'exercice 19 comment on pouvait en déduire plusieurs distances dont dérivait, sur $E_1 \times E_2$, la topologie produit des topologies dérivant de d_1 et d_2.

Supposons qu'on ait choisi pour définition de la distance :

$$d\,[(x_1, x_2), (y_1, y_2)] = \mathit{sup}\ \{ d_1(x_1, y_1), d_2(x_2, y_2) \}.$$

Dire que $\{x_1^n\}$ est une suite de Cauchy de E_1, c'est dire que :

$$\forall \varepsilon \qquad \exists n_1 \qquad \forall n, m > n_1 \qquad d(x_1^n, x_1^m) < \varepsilon \qquad (1).$$

Dire que $\{x_2^n\}$ est une suite de Cauchy de E_2, c'est dire que :

$$\forall \varepsilon \qquad \exists n_2 \qquad \forall n, m > n_2 \qquad d(x_2^n, x_2^m) < \varepsilon \qquad (2).$$

Dire que $\{(x_1, x_2)^n\}$ est une suite de Cauchy de $E_1 \times E_2$, c'est dire que :

$$\forall \varepsilon \qquad \exists N \qquad \forall n, m > N \qquad d((x_1, x_2)^n, (x_1, x_2)^m) < \varepsilon \qquad (3).$$

Supposons $E_1 \times E_2$ complet. Soit $\{x_1^n\}$ une suite de Cauchy de E_1, associons-la à une suite de Cauchy $\{x_2^n\}$ de E_2, que l'on pourrait d'ailleurs choisir constante. $\{(x_1, x_2)^n\}$ est une suite de Cauchy de $E_1 \times E_2$, car il suffit de prendre $N = \mathit{sup}\,(n_1, n_2)$ pour que la condition (3) soit réalisée quand (1) et (2) le sont. Donc, $\{(x_1, x_2)^n\}$ converge et ses projections convergent ; donc E_1 et E_2 sont complets. *Réciproquement*, supposons E_1 et E_2 complets et soit $\{(x_1, x_2)^n\}$ une suite de Cauchy de $E_1 \times E_2$; $\{x_1^n\}$ est une suite de Cauchy, car il suffit de prendre $n_1 = N$ pour que la condition (1) soit réalisée quand (3) l'est ; il en est de même pour $\{x_2^n\}$, donc ces suites convergent, $\{(x_1, x_2)^n\}$ aussi et $E_1 \times E_2$

est complet. On adaptera sans peine la démonstration aux autres définitions de la distance sur $E_1 \times E_2$ et au cas où le produit compte un nombre fini d'espaces (nombre supérieur à deux).

3° THÉORÈME. — SOIT E COMPLET ET $F_1 \supset F_2 \supset \dots \supset F_n \supset \dots$ UNE SUITE DÉCROISSANTE DE FERMÉS DE E DONT LE DIAMÈTRE TEND VERS ZÉRO QUAND n TEND VERS L'INFINI. L'INTERSECTION DE CES FERMÉS EST UN POINT.

Dans chaque F_n choisissons un point y_n ; on définit ainsi une suite qui est une suite de Cauchy de E, donc qui converge vers un point x. Mais, pour tout n, l'ensemble F_n, partie fermée d'un espace complet, est complet et contient y_p pour $p \geqslant n$. Il en résulte que :

$$\forall n, \qquad x \in F_n, \qquad \text{donc } x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n.$$

D'autre part, cette intersection ne peut contenir un point x' distinct de x, car le diamètre des ensembles F_n resterait supérieur à $d(x, x') > 0$.

REMARQUE : Notons que l'hypothèse du diamètre tendant vers zéro est nécessaire non seulement pour établir l'unicité du point intersection, mais pour établir son existence. Une suite décroissante de fermés dont le diamètre ne tend pas vers zéro peut avoir une intersection vide. *Exemple :* dans $\mathbf{R}^2$, les domaines convexes fermés limités par des paraboles déduites de l'une d'entre elles par les translations parallèles à son axe, d'amplitudes entières.

§ 3. CONTINUITE UNIFORME

1. Définition.

On sait que la continuité d'une application f définie sur un espace E, muni d'une distance d, dans un espace F, muni d'une distance d', s'exprime par :

$$\forall x \in E \quad \forall \varepsilon \quad \exists \eta(\varepsilon, x) \qquad d(x, y) < \eta(\varepsilon, x) \implies d'(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

et que la continuité est dite *uniforme* s'il existe η, *indépendant de* x, tel que l'on puisse écrire :

$$\forall \varepsilon \quad \forall (x, y) \in E \times E \quad \exists \eta(\varepsilon) \qquad d(x, y) < \eta \implies d'\ f(x), f(y) \ < \varepsilon \ (*)$$

La distance d'un espace métrique fournit un exemple d'application uniformément continue ; de façon précise :
E étant un espace métrique de distance d, si $E \times E$ est muni de la distance δ définie par :

$$\delta[(x, y), (u, v)] = d(x, u) + d(y, v),$$

l'application d de $E \times E$ dans $\mathbf{R}+$ est uniformément continue.

Cela résulte immédiatement de l'inégalité :

$$| d(x, y) - d(u, v) | \leqslant d(x, u) + d(y, v)$$

que l'on déduit sans peine de l'inégalité triangulaire.

(*) Remarquons que, pour chaque x, la borne supérieure de l'ensemble $H(\varepsilon, x)$ des nombres $\eta(\varepsilon, x)$, tels que :

$$d(y, x) < \eta(\varepsilon\ x) \implies d'(f(y), f(x)) < \varepsilon$$

appartient à l'ensemble $H(\varepsilon, x)$ car, une réunion de boules ouvertes de centre x est une boule ouverte de centre x. Si l'on désigne par $\bar\eta(\varepsilon, x)$ cette borne supérieure, la continuité uniforme est équivalente au fait que pour chaque $\varepsilon > 0$,

$$\mathit{inf}\ \{ \bar\eta(\varepsilon, x) \ ; \ x \in E \} > 0.$$

REMARQUE : On peut, dans l'énoncé précédent, remplacer la distance δ par une des autres distances définies dans l'exercice 19, et qui confèrent à $E \times E$ la topologie produit de celle que d confère à E. Si l'on pose, en effet :

$$\delta_1 [(x, y), (u, v)] = d(x, u) + d(y, v),$$
$$\delta_2 [(x, y), (u, v)] = \sup [d(x, u), d(y, v)],$$
$$\delta_3 [(x, y), (u, v)] = \sqrt{[d(x, u)]^2 + [d(y, v)]^2},$$

on a les inégalités :

$$\delta_2 \leqslant \delta_1 \leqslant 2\,\delta_2 \qquad\qquad \delta_2 \leqslant \delta_3 \leqslant \sqrt{2}\,\delta_2$$

qui prouvent que si d est uniformément continue pour l'une quelconque des trois distances δ_1, δ_2, δ_3, elle l'est pour les deux autres.

Corollaire. — Si x est dans E la limite de la suite $\{ x_n \}$, et y la limite de la suite $\{ y_n \}$, alors $d(x, y)$ *est la limite de la suite* $\{ d(x_n, y_n) \}$.

2. Propriétés des applications uniformément continues.

THÉORÈME. — SI f EST UNE APPLICATION UNIFORMÉMENT CONTINUE DE L'ESPACE MÉTRIQUE E, MUNI DE LA DISTANCE d, DANS L'ESPACE MÉTRIQUE E', MUNI DE LA DISTANCE d', L'IMAGE PAR f DE TOUTE SUITE DE CAUCHY DE E EST UNE SUITE DE CAUCHY DE E'.

En effet, la continuité uniforme permet d'écrire :

$$\forall \varepsilon \quad \exists \eta \quad d(u_n, u_m) < \eta \implies d'(f(u_n), f(u_m)) < \varepsilon.$$

et le fait que (u_n) soit une suite de Cauchy,

$$\forall \eta \quad \exists n_0 \quad \left.\begin{matrix} n > n_0 \\ m > n_0 \end{matrix}\right\} \implies d(u_n, u_m) < \eta.$$

Donc :

$$\forall \eta \quad \exists n_0 \quad \left.\begin{matrix} n > n_0 \\ m > n_0 \end{matrix}\right\} \implies d'(f(u_n), f(u_m)) < \varepsilon.$$

Donc, $\{ f(u_n) \}$ est une suite de Cauchy.

THÉORÈME. — UNE APPLICATION UNIFORMÉMENT CONTINUE D'UNE PARTIE PARTOUT DENSE D'UN ESPACE MÉTRIQUE DANS UN ESPACE COMPLET PEUT ÊTRE PROLONGÉE DE MANIÈRE UNIQUE EN UNE APPLICATION UNIFORMÉMENT CONTINUE DE L'ESPACE TOUT ENTIER.

Exemple : Une application uniformément continue définie sur $\mathbf{Q}$ et à valeurs dans $\mathbf{R}$ peut être prolongée en une application uniformément continue de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$.

Soit A, partie partout dense de E, espace métrique $(\bar{A} = E)$. Soit $x \in E$ et $x \notin A$; alors x est adhérent à A. Donc, il existe une suite $\{ x_n \}$ d'éléments de A qui converge vers x. Cette suite $\{ x_n \}$ est une suite de Cauchy.

Appliquons maintenant le théorème précédent à la suite $\{ x_n \}$ considérée, qui converge vers x. Alors $\{ f(x_n) \}$ est une suite de Cauchy qui, puisque l'espace d'arrivée a été supposé complet, converge vers un point. Nous prendrons, par définition, ce point pour image de x par l'application g que nous cherchons à construire, c'est-à-dire que nous posons :

$$\lim_{n \to +\infty} \{ f(x_n) \} = g(x).$$

Observons que ceci définit bien g, c'est-à-dire que s'il existe une autre suite $\{ y_n \}$ qui converge vers x, la suite $\{ f(y_n) \}$ converge vers le même point. [En effet, $d(x_n, y_n) < \eta$ entraîne $d'(f(x_n), f(y_n)) < \varepsilon$]. Cette application g a bien f pour restriction à A, et si le problème a une solution, seule g peut la fournir.

Reste à montrer que g est uniformément continue. Soient x et y appartenant à E vers lesquels convergent les suites $\{x_n\}$ et $\{y_n\}$ d'éléments de A.

Par suite :

$$d'(g(x), g(y)) = d'(\lim_{n\to+\infty} f(x_n), \lim_{n\to+\infty} f(y_n)) = \lim_{n\to+\infty} d'(f(x_n), f(y_n)).$$

Donc :

$$\forall \varepsilon \quad \exists n_0 \quad n > n_0 \implies d'(g(x), g(y)) < d'(f(x_n), f(y_n)) + \varepsilon.$$

Or, la continuité uniforme de f implique :

$$\forall \varepsilon \quad \exists \eta \quad d(x_n, y_n) < \eta \implies d'(f(x_n), f(y_n)) < \varepsilon.$$

Mais comme $\quad d(x, y) = \lim_{n\to+\infty} d\,(x_n, y_n)$,

$$\forall \eta \quad \exists n_1 \quad n > n_1 \implies d(x, y) > d(x_n, y_n) - \frac{\eta}{2}.$$

Donc, pour tout $n > n_1$, l'inégalité $d(x, y) < \frac{\eta}{2}$ entraîne :

$$d(x_n, y_n) < \eta \quad \text{donc} \quad d'(f(x_n), f(y_n)) < \varepsilon.$$

Finalement :

$$d(x, y) < \frac{\eta}{2} \implies d'(g(x), g(y)) < 2\,\varepsilon.$$

La continuité de g est uniforme.

Cette propriété est fausse si l'on suppose seulement l'application continue, comme le prouve l'exemple de l'application f de **Q** dans **R**, définie par :

$$f(x) = 0 \quad \text{si} \quad x^2 < 2 \qquad\qquad f(x) = 1 \quad \text{si} \quad x^2 > 2.$$

Cette application est continue sur **Q**, sans être uniformément continue, et ne peut pas être prolongée en une application continue de **R** dans **R**.

Exercice 51. — On dit qu'une application f d'un espace métrique E dans lui-même est *contractante* s'il existe un réel k, vérifiant $0 < k < 1$, et tel que pour tout couple $(x, y) \in E \times E$, on ait :

$$d(f(x), f(y)) \leqslant k\, d(x, y).$$

Une telle application est uniformément continue.

1° On suppose E complet. Montrer que la suite des itérés $f^n(x)$ de n'importe quel élément x de E converge vers un élément unique ξ vérifiant $\xi = f(\xi)$.

2° On considère l'équation différentielle $y' = f(x, y)$, où f est continue dans un rectangle $R = [a, b] \times [c, d]$ de $\mathbf{R}^2$, et lipschitzienne en y, ce qui veut dire qu'il existe un nombre réel positif H tel que :

$$\forall x \in [a, b] \quad \forall\ (y, z) \in [c, d] \times [c, d] \quad |f(x, y) - f(x, z)| \leqslant H\,|y - z|.$$

En mettant l'équation différentielle sous la forme :

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\, dt$$

et en utilisant 1°, montrer que tout point (x_0, y_0) de $\mathring{R}$ possède un voisinage contenant le graphe d'une fonction vérifiant l'équation différentielle.

On fera intervenir l'espace des fonctions continues réelles définies sur un segment V de centre x_0, muni de la distance :

$$d(y, z) = sup\ \{\, |y(x) - z(x)|,\ x \in V \,\}$$

§ 4. ESPACES METRIQUES COMPACTS

1. Un espace métrique compact est complet.

En effet, dans un espace compact, tout filtre a un point adhérent, donc le filtre de Fréchet formé des sections finissantes d'une suite a un point adhérent l, c'est-à-dire que la suite admet l comme valeur d'adhérence. Si la suite est une suite de Cauchy, nous savons (cf. VII, 2, 2) qu'elle converge vers l. Donc, dans un espace compact métrique, toute suite de Cauchy converge ; cet espace est complet.

2. Equivalence des propriétés de Borel-Lebesgue et de Bolzano-Weierstrass pour les espaces métriques.

Nous avons montré précédemment que la propriété de Borel-Lebesgue entraînait la propriété de Bolzano-Weierstrass. Nous allons voir maintenant que dans un espace métrique la réciproque est vraie.

SI UN ESPACE MÉTRIQUE POSSÈDE LA PROPRIÉTÉ DE BOLZANO-WEIERSTRASS, IL EST COMPACT.

Nous considérons donc, par hypothèse, un espace métrique E dans lequel toute partie infinie possède un point d'accumulation.

Remarquons d'abord que cette hypothèse peut se mettre sous la forme : « Toute suite dans E a une valeur d'adhérence. » On a vu, en effet (cf. exercice 33), que tout point d'accumulation de l'ensemble des valeurs d'une suite est valeur d'adhérence de cette suite, et que réciproquement, si cette propriété est vérifiée, toute partie infinie aura un point d'accumulation, car, de toute partie infinie, on pourra extraire une suite dont la valeur d'adherence sera un point d'accumulation du sous-ensemble considéré.

Ceci posé, nous montrerons d'abord :

Lemme. Une application continue à valeurs réelles définie sur un espace métrique qui satisfait à la propriété de Bolzano-Weierstrass a un maximum et un minimum finis qu'elle atteint.

Soit $f : E \longrightarrow \mathbf{R}$ une application continue et soit

$$M = sup\ \{\, f(x)\ ;\ x \in E \,\},$$

a priori M peut être infini, c'est-à-dire appartenir à $\overline{\mathbf{R}}$. Deux cas sont donc à distinguer :

- ou bien M est fini et

$$\forall n \quad \exists x_n \quad M - \frac{1}{n} < f(x_n) < M \qquad (1)$$

- ou bien M est infini et

$$\forall n \quad \exists x_n \quad f(x_n) > n \qquad (2)$$

Dans les deux cas, nous définissons ainsi une suite (x_n) qui, en vertu de l'hypothèse, a une valeur d'adhérence. On peut donc en extraire une sous-suite $\{x_p\}$ qui converge vers $x \in E$. Son image $\{f(x_p)\}$ converge vers $f(x) \in \mathbf{R}$. Le cas (2) est donc exclu, puisqu'il exigerait que $f(x)$ soit supérieur à tout n donné. On est donc dans le cas (1) et, $\{f(x_n)\}$ convergeant vers M, on peut affirmer :

$$f(x) = \mathrm{M}.$$

On montrerait de la même façon que f a un minimum fini qu'elle atteint.

Pour démontrer, maintenant, que l'espace E possède la propriété de Borel-Lebesgue, nous allons chercher à remplacer un recouvrement ouvert $\mathcal{R}$ par un recouvrement constitué de boules. Si $x \in \mathrm{E}$, il existe un ouvert de $\mathcal{R}$ qui contient x, donc une boule de centre x incluse dans cet ouvert. D'où l'existence d'une famille de boules qui constitue un recouvrement ouvert ; si de ce recouvrement par boules on peut extraire un recouvrement fini, en revenant aux ouverts de $\mathcal{R}$ par remplacement de chaque boule par un ouvert qui la contenait, on obtiendra bien un recouvrement fini extrait de $\mathcal{R}$. Posons :

$$\rho(x) = sup\,\{ r\,;\ \exists\, \mathrm{O} \in \mathcal{R}\,,\ \mathrm{B}(x, r) \subset \mathrm{O}\}.$$

Cette définition implique :

$$\forall r < \rho(x) \qquad \exists\, \mathrm{O} \in \mathcal{R} \qquad \mathrm{B}(x, r) \subset \mathrm{O}.$$

Montrons que l'application :

$$\rho : x \in \mathrm{E} \longrightarrow \rho(x) \in \mathbf{R}$$

est continue. Soit en effet $x \in \mathrm{E}$ et pour $\varepsilon > 0$ donné, la boule $\mathrm{B}(x, \rho(x) - \varepsilon)$. Soit y tel que $d(x, y) < \varepsilon$; la boule $\mathrm{B}(y, \rho(x) - 2\,\varepsilon)$ est incluse dans la précédente, donc dans un ouvert de $\mathcal{R}$; par suite, son rayon est inférieur à $\rho(y)$:

$$\rho(y) > \rho(x) - 2\,\varepsilon.$$

Mais, en intervertissant les rôles de x et de y, on trouvera :

$$\rho(x) > \rho(y) - 2\,\varepsilon,$$

donc :

$$d(x, y) < \varepsilon \implies \rho(x) - 2\,\varepsilon < \rho(y) < \rho(x) + 2\,\varepsilon,$$

c'est-à-dire que ρ est continue (et même uniformément continue).

ρ fonction continue réelle, strictement positive définie sur E, atteint son minimum ρ_0 ; celui-ci doit donc être strictement positif. Si ρ_1 est strictement compris entre 0 et ρ_0, tout point de E est donc centre d'une boule de rayon ρ_1, incluse dans un ouvert de $\mathcal{R}$. Nous allons montrer qu'il existe un recouvrement fini constitué de telles boules. Soit $x_1 \in \mathrm{E}$ et la boule $\mathrm{B}(x_1, \rho_1)$ et, si cette boule ne recouvre pas E, soit un point x_2 qui ne lui appartient pas, c'est-à-dire tel que :

$$d(x_1, x_2) \geqslant \rho_1.$$

Considérons la boule $\mathrm{B}(x_2, \rho_1)$. Si la réunion de ces deux boules n'est pas E, soit x_3 n'appartenant pas à leur réunion, c'est-à-dire tel que :

$$d(x_1, x_3) \geqslant \rho_1 \qquad d(x_2, x_3) \geqslant \rho_1.$$

Considérons la boule $\mathrm{B}(x_3, \rho_1)$; si la réunion de ces trois boules n'est pas E, soit x_4 n'appartenant pas à cette réunion... et ainsi de suite... Si n boules distinctes ne suffisent pas à recouvrir E, nous prendrons x_{n+1} dans la partie non recouverte, c'est-à-dire tel que,

$$\text{pour } 1 \leqslant i \leqslant n \qquad d(x_{n+1}, x_i) \geqslant \rho_1.$$

Si, quel que soit n, l'espace E n'était jamais entièrement recouvert par les boules ainsi choisies, on aurait défini une suite infinie $x_1, x_2 \ldots x_n \ldots$ de points de E telle que la distance mutuelle de deux quelconques de ces points ne soit jamais inférieure à ρ_1, donc une suite de points de E dont on ne peut extraire aucune suite de Cauchy. Or, ceci est contraire à

l'hypothèse qui entraîne que, de toute suite de E, on puisse extraire une sous-suite convergente. Il en résulte qu'un nombre fini de boules $\mathrm{B}(x_i, \rho_1)$ suffit à recouvrir E. Le théorème de Borel-Lebesgue est établi.

COMPACITÉ D'UNE PARTIE D'UN ESPACE MÉTRIQUE.

En appliquant le théorème de Bolzano-Weierstrass à une partie d'un espace métrique, on obtient la condition suivante :

Une partie A *d'un espace métrique* E *est compacte si, et seulement si, de toute suite d'éléments de* A, *on peut extraire une sous-suite convergeant vers un élément de* A, condition équivalente à : A *est fermé et, de toute suite d'éléments de* A, *on peut extraire une sous-suite convergeant dans* X.

3. Applications continues d'un métrique compact dans un métrique.

THÉORÈME. — UNE APPLICATION CONTINUE D'UN ESPACE COMPACT MÉTRIQUE DANS UN ESPACE MÉTRIQUE EST UNIFORMÉMENT CONTINUE.

(Ce théorème est une généralisation du théorème classique : une application continue de $[a, b] \subset \mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ est uniformément continue).

Soit K un espace compact métrique, E un espace métrique et $f : \mathrm{K} \longrightarrow \mathrm{E}$, une application continue.

Par suite :

$$\forall \varepsilon \qquad \forall x \in \mathrm{K} \qquad \exists\, \eta(\varepsilon, x) \qquad d(x, y) < \eta \implies d'(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

Considérons les boules $\mathrm{B}\Big(x, \dfrac{\eta}{2}(\varepsilon, x)\Big)$. Ces boules forment un recouvrement ouvert de K dont on peut extraire un recouvrement fini formé des boules de centre $x_1, x_2 \ldots x_p$. Soit η la borne inférieure des $\dfrac{\eta}{2}(\varepsilon, x_i)$.

Nous allons montrer que si $d(x, y) < \eta$, alors $d'(f(x), f(y)) < 2\,\varepsilon$. En effet, x appartient à une des boules du recouvrement fini ; soit x_i le centre de cette boule. Si $d(x, y) < \eta$, η étant inférieur au rayon de la boule, $d(x_i, y)$ est inférieur au double de ce rayon, c'est-à-dire que :

$$d(x_i, y) < \eta(x_i, \varepsilon),$$

donc $\qquad d'(f(x_i), f(y)) < \varepsilon,$

et comme $\qquad d'(f(x), f(x_i)) < \varepsilon,$

on en conclut $\qquad d'(f(x), f(y)) < 2\,\varepsilon.$

Chapitre VIII

ESPACES VECTORIELS NORMÉS

§ 1. PROPRIETES GENERALES

1. Corps valués. Normes.

Un corps K est dit *valué* s'il possède une *valeur absolue,* c'est-à-dire s'il existe une application de K dans $\mathbf{R}^+$, qui à $\lambda \in K$ fait correspondre sa valeur absolue $|\lambda| \in \mathbf{R}^+$, et qui possède les propriétés suivantes :

1° $|\lambda| = 0 \iff \lambda = 0.$

2° $\forall (\lambda, \mu) \in K \times K \qquad |\lambda\,\mu| = |\lambda|\,|\mu|.$

3° $\forall (\lambda, \mu) \in K \times K \qquad |\lambda + \mu| \leqslant |\lambda| + |\mu|.$

Un espace vectoriel E sur un corps valué K est *normé,* s'il possède une *norme,* c'est-à-dire s'il existe une application de E dans $\mathbf{R}^+$, qui à $x \in E$ fait correspondre sa norme $\|x\| \in \mathbf{R}^+$, et qui possède les propriétés suivantes :

1° $\|x\| = 0 \iff x = 0.$

2° $\forall \lambda \in K \quad \forall x \in E \qquad \|\lambda x\| = |\lambda| . \|x\|.$

3° $\forall (x, y) \in E \times E \qquad \|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|.$

Sur un corps valué K, l'application $(\lambda, \mu) \longrightarrow |\lambda - \mu|$ est une distance pour laquelle l'addition et la multiplication sont continues, ainsi que les applications $\lambda \longrightarrow -\lambda$, et $\lambda \longrightarrow \dfrac{1}{\lambda}$ (pour $\lambda \neq 0$), comme le lecteur le vérifiera aisément. Un corps valué est un corps topologique.

Sur un espace vectoriel normé E sur K, l'application :

$$(x, y) \longrightarrow \|x - y\|$$

est une distance pour laquelle l'application $(x, y) \longrightarrow x - y$ et la multiplication externe sont continues, comme on le vérifiera encore aisément. Un espace vectoriel normé est un espace vectoriel topologique. (On peut même noter que l'application $(x, y) \longrightarrow x - y$ est uniformément continue).

Parmi les valeurs absolues d'un corps figure celle pour laquelle $|0| = 0$ et $|\lambda| = 1$ pour $\lambda \neq 0$. Elle confère au corps une topologie discrète. S'il existe un $\lambda \neq 0$ ayant une valeur absolue différente de 1, le corps est valué non discret : c'est le cas important.

En Analyse, les corps qui interviennent sont $\mathbf{R}$ et $\mathbf{C}$, munis de leurs valeurs absolues usuelles, et c'est à ces cas que nous nous limiterons dans la suite. Remarquons toutefois que si $|\lambda|$ est la valeur absolue usuelle, $|\lambda|^\alpha$ est encore une valeur absolue pour $0 < \alpha < 1$.

D'autres corps valués interviennent cependant en Mathématiques, tels les corps p-adiques (cf. exercice 54).

BOULES DANS UN ESPACE VECTORIEL NORMÉ.

La boule de centre a et de rayon r est :

$$B(a, r) = \{ x \,;\, \|x - a\| < r \}$$

et la boule fermée correspondante :

$$\overline{B}(a, r) = \{ x \,;\, \|x - a\| \leqslant r \}\,.$$

La distance étant invariante par translation, ces boules se déduisent par la translation a des boules de centre l'origine et de même rayon. Une propriété des boules dans un espace vectoriel normé est *qu'elles sont convexes* (cf. *A.P.M. II*, exercice 49).

De cette propriété résulte qu'un point x situé à la distance r de a est $\lim\limits_{k \to 1} \{ kx \,;\, 0 < k < 1 \}$, donc que tout point de $\overline{B}(a, r)$ appartient à l'adhérence de $B(a, r)$. La boule fermée est ici l'adhérence de la boule ouverte. Comme x est aussi $\lim\limits_{k \to 1} \{ kx \,;\, k > 1 \}$, le point x appartient aussi à l'adhérence du complémentaire. On en déduit que la frontière des boules ouverte et fermée est la sphère $S = \{ x \,;\, \|x - a\| = r \}$, et l'intérieur de la boule fermée (complémentaire de la frontière dans ladite boule) n'est autre que la boule ouverte (1).

Exercice 52. — Réciproquement, étant donnée une partie convexe C d'un espace vectoriel sur $\mathbf{R}$ admettant l'origine O pour centre de symétrie et ne contenant aucune droite, montrer que :

$$p(x) = \mathit{inf} \{ r \,;\, r \in \mathbf{R}^+ \,,\, \frac{x}{r} \in C \}$$

est une norme, pour laquelle les boules unités, ouvertes et fermées, sont liées à C par les relations :

$$B(0, 1) = \mathring{C} \qquad \overline{B}(0, 1) = \overline{C}.$$

2. Espaces de Banach. Complétion d'un espace vectoriel normé.

Si un espace vectoriel normé est complet pour la distance déduite de sa norme, on dit que c'est un *espace vectoriel normé complet* ou *espace de Banach*.

Si E n'est pas complet, nous pouvons le plonger dans un espace complet $\widehat{E}$. Mais, *a priori*, la seule structure de E qui soit prolongée à $\widehat{E}$ est celle d'espace métrique muni d'une distance d. *Montrons que la structure d'espace vectoriel topologique de* E *peut aussi être prolongée.* L'addition sur $\widehat{E}$ est définie par le fait que $(\widehat{x + y})$ est la classe d'équivalence (dans l'ensemble des suites de Cauchy de $\widehat{E}$) de $(x_n + y_n)$, si $(x_n) \in \widehat{x}$ et $(y_n) \in \widehat{y}$.

(1) Notons que ces propriétés, très intuitives, des boules dans un espace vectoriel normé sont étroitement liées à la convexité et ne sont pas vraies dans un métrique quelconque. Il suffit de considérer $E \subset \mathbf{R}$ muni de la distance usuelle dans $\mathbf{R}$ et constitué des deux semi-segments $[a, b[$ et $[c, d[$ avec $b < c$ et $d(a, c) = r$. L'adhérence de la boule ouverte $B(a, r)$ est $[a, b[$; la boule fermée $\overline{B}(a, r)$ est $[a, b[\cup \{ c \}$. L'adhérence de la boule ouverte est donc strictement incluse dans la boule fermée. On en verra un autre exemple dans l'exercice 54, 2°.

On procède de même pour définir la multiplication par un scalaire et on vérifie que les deux opérations confèrent à $\widehat{E}$ une structure d'espace vectoriel.

D'autre part :

$$\|\widehat{x}\| = d(\widehat{x}, 0) = \lim_{n \to \infty} d(x_n, 0) = \lim_{n \to \infty} \|x_n\|$$

a évidemment les propriétés d'une norme et est bien le prolongement de la norme sur E. On vérifie que, sur $\widehat{E}$, on a encore $d(\widehat{x}, \widehat{y}) = \|\widehat{x} - \widehat{y}\|$.

En effet :

$$d(\widehat{x}, \widehat{y}) = \lim_{n \to \infty} d(x_n, y_n) = \lim_{n \to \infty} \|x_n - y_n\|$$

et, d'autre part :

$$\|x - y\| = \lim_{n \to \infty} \|x_n - y_n\|.$$

$\widehat{E}$ reçoit donc une structure d'espace vectoriel normé qui prolonge celle de E. Nous avons donc montré que *tout espace vectoriel normé peut être plongé dans un espace de Banach* dont il est un sous-espace partout dense et que cet espace de Banach est unique (à un isomorphisme près d'espace vectoriel normé).

3. Exemples d'espaces vectoriels normés.

En dehors des espaces de dimension finie, nous rencontrerons essentiellement des espaces d'applications dans $\mathbf{R}$ (espaces vectoriels sur $\mathbf{R}$) ou dans $\mathbf{C}$ (espaces vectoriels sur $\mathbf{C}$).

Nous trouvons ainsi des espaces d'applications de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$:

— Espace (m) des suites (réelles ou complexes) bornées avec :

$$\|a\| = \mathit{sup} \{ |a_n| \}\,, \text{ si on désigne par } a \text{ la suite } (a_n)\,;$$

— Sous-espace $(c) \subset (m)$ des suites convergentes ;

— Sous-espace $(c_0) \subset (c)$ des suites qui convergent vers zéro.

— Espace (l^1) des suites (a_n) telles que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$ avec :

$$\|a\| = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

c'est-à-dire l'espace des séries absolument convergentes ou, selon une autre terminologie que nous introduirons plus loin, espace des suites sommables. (Pour l'équivalence des deux notions, se reporter à la fin du chapitre).

— Espace (l^2) des suites (a_n) telles que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 < \infty$ avec :

$$\|a\| = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2}$$

appelé de même espace des suites de carré sommable.

Dans cet exemple, le fait que l'on ait bien choisi une norme, moins évident que dans les exemples précédents, se démontre à l'aide de l'inégalité de Schwarz (cf. *A.P.M. II*, page 172) :

$$\sum_{i=1}^{n} |a_i + b_i|^2 < \sum_{i=1}^{n} |a_i|^2 \sum_{i=1}^{n} |b_i|^2$$

Nous rencontrerons de même des espaces d'applications d'un ensemble quelconque E dans **R** :

— Espace $\mathcal{B}(\mathrm{E}, \mathbf{R})$ des fonctions bornées sur E, ($sup \{ f(x) ; x \in \mathrm{E} \} < \infty$), avec :

$$\|f\| = sup \{ |f(x)| ; x \in \mathrm{E} \} .$$

On remarquera que dire qu'une suite f_n de fonctions converge pour cette norme est équivalent à dire que f_n converge uniformément sur E. C'est pourquoi on appelle parfois cette norme : norme de la convergence uniforme sur E.

— L'espace $\mathcal{C}(\mathrm{K}, \mathbf{R})$, cas particulier du précédent, où E est un compact K et où on se limite au sous-espace des applications continues : toute fonction continue définie sur un compact étant bornée, la norme précédente est utilisable.

— Espace $\mathcal{U}$ des fonctions continues réelles définies sur $[0, 1]$ avec :

$$\|f\| = \int_0^1 |f(t)|\,dt.$$

Exercice 53. — Montrer que tous les espaces vectoriels normés, précédemment cités, sont complets, sauf le dernier.

Montrer que $\mathcal{U}$ n'est pas complet en utilisant le contre-exemple suivant :

$$f_n(x) = \sqrt{n} \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{n}$$

$$f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \quad \text{pour} \quad \frac{1}{n} \leqslant x \leqslant 1$$

Exercice 54. — On appelle espace ultramétrique un espace métrique E sur lequel la distance vérifie la propriété :

$$\forall\ (x, y, z) \in \mathrm{E}^3 \qquad d(x, z) \leqslant sup\ (d(x, y).\ d(y, z)).$$

1° *Montrer que $d(x, y) \neq d(y, z)$) entraîne $d(x, z) = sup\ (d(x, y), d(y, z))$.* Autrement dit : « Tout triangle est isocèle, les deux côtés égaux étant au moins égaux au troisième côté ».

2° Etudier les boules dans un espace upltramétrique. Montrer que toute boule, ouverte ou fermée, est à la fois ouverte et fermée. Montrer que tout point d'une boule est centre de cette boule et que si deux boules ne sont pas disjointes l'une est incluse dans l'autre.

3° Montrer que dans un espace ultramétrique pour qu'une suite (u_n) soit de Cauchy, il est suffisant que $\lim\limits_{n=\infty} d(u_n, u_{n+1}) = 0$).

Montrer aussi que les points d'une suite de Cauchy qui ne converge pas vers un point restent, à partir d'un certain rang, à distance constante de ce point.

4° Etant donné un nombre premier p fixé une fois pour toutes on définit, sur **Q**, une valeur absolue appelée valeur absolue p-adique de la façon sui-

vante : tout rationnel sera mis sous la forme $r = p^{\alpha}\dfrac{a}{b}$, les nombres a et b étant des entiers premiers avec p, α étant dans **Z** ; on posera alors :

$$|r|_p = \frac{1}{p^{\alpha}}$$

Montrer que la distance associée à cette valeur absolue est ultramétrique.

5° **Q**, muni de cette valeur absolue, est complété en un espace $\mathbf{Q}_p$. On vérifiera que l'on peut munir $\mathbf{Q}_p$ d'une structure de corps telle qu'il soit un surcorps de **Q** et que la valeur absolue sur **Q** peut être prolongée à $\mathbf{Q}_n$ en en posant $|x|_p = \lim |x_n|_p$, si (x_n) est une des suites de Cauchy qui définit $x \in \mathbf{Q}_p$; et que, pour la valeur absolue ainsi définie, $\mathbf{Q}_p$ est ultramétriaue.

Déduire du 3° que les valeurs absolues des éléments $\mathbf{Q}_n$ sont encore de la forme $\dfrac{1}{p^{\alpha}}$, $\alpha \in \mathbf{Z}$.

6° On considère dans $\mathbf{Q}_n$ les boules
$\mathrm{A}_p = \{ x ; |x|_p \leqslant 1 \}$ et $\mathcal{P} = \{ x : |x|_p < 1 \}$

Montrer que $\mathcal{P}$ est un idéal de l'anneau A_p. Etudier la répartition des éléments de **Z** entre les classes de A_p mod. $\mathcal{P}$. En déduire que $\mathrm{A}_p/\mathcal{P}$ est isomorphe à $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$.

7° Montrer que tout élément $x \in \mathrm{A}_p$ peut être mis de façon unique sous forme de la somme d'une série

$$x = a_o + a_1 p + \ldots + a_n p^n + \ldots \qquad \forall n \begin{cases} 0 \leqslant a_n \leqslant p - 1 \\ a_n \in \mathbf{Z} \end{cases}$$

(Développement de Hensel).

Montrer de même que tout élément $y \in \mathbf{Q}_p$ peut être mis, de façon unique, sous forme d'une série :

$$y = \sum_{n=k}^{+\infty} a_n p^n \qquad k \in \mathbf{Z} \quad \forall n \begin{cases} 0 \leqslant a_n \leqslant p - 1 \\ a_n \in \mathbf{Z} \end{cases}$$

8° Déduire du 6° que A_n est compact et $\mathbf{Q}_n$ localement compact.

4. Parties topologiquement libres.

Rappelons que $\mathrm{A} = \{ x_i \}$ étant une partie d'un espace vectoriel, $\Sigma\, \lambda_i x_i$ ($\lambda_i = 0$, sauf pour un nombre fini d'entre eux) décrit le plus petit sous-espace vectoriel H qui contient la partie [*A.P.M. II* (II, § 1, 4)]. Considérons l'adhérence $\overline{\mathrm{H}}$ de ce sous-espace : $x \in \overline{\mathrm{H}}$ signifie qu'il existe une suite (x_n) d'éléments de H qui converge vers x.

$\overline{\mathrm{H}}$ *est un sous-espace vectoriel,* car :

$$x \in \overline{\mathrm{H}},\ y \in \overline{\mathrm{H}} \implies \begin{cases} \exists\,(x_n) & \forall n & x_n \in \mathrm{H} & \lim\limits_{n \to \infty} x_n = x \\ \exists\,(y_n) & \forall n & y_n \in \mathrm{H} & \lim\limits_{n \to \infty} y_n = y. \end{cases}$$

Ceci entraîne :

$$\exists\,(x_n + y_n) \qquad \forall n \qquad x_n + y_n \in \mathrm{H}$$
$$\lim\,(x_n + y_n) = x + y \quad \text{donc } x + y \in \overline{\mathrm{H}}\ ;$$

$$\exists\,(\lambda x_n) \qquad \forall n \qquad \lambda x_n \in \mathrm{H} \qquad \lim \lambda x_n = \lambda x \quad \text{donc } \lambda x \in \overline{\mathrm{H}}$$

$\overline{\mathrm{H}}$ est le plus petit sous-espace vectoriel fermé contenant A. On pourra exprimer commodément les éléments de l'espace en fonction de ceux de A si $\overline{\mathrm{H}}$ est l'espace tout entier.

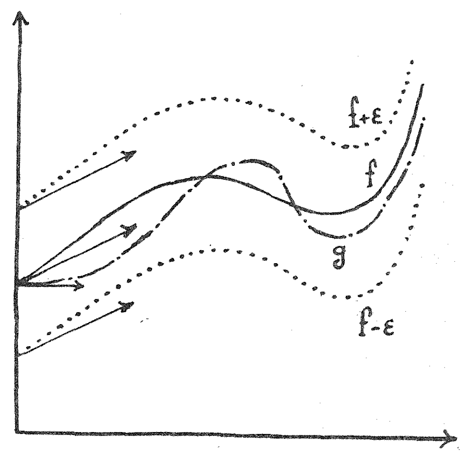
Exercice 55. — 1° Montrer qu'une application f d'un espace topologique E dans un espace topologique F est continue si, et seulement si :

$$\forall A \in \mathcal{P}(E) \qquad f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$$

2° Montrer que dans un espace vectoriel topologique quelconque l'adhérence d'un sous-espace vectoriel est un sous-espace vectoriel.

Remarquons, en particulier, que, si un sous-espace vectoriel de codimension 1 n'est pas fermé, son adhérence est alors un sous-espace vectoriel le contenant strictement, donc l'espace tout entier.

Exemple : Soit l'espace vectoriel $\mathcal{C}'$ des fonctions réelles, continues sur [0, 1] dérivables en 0, muni de la norme de la convergence uniforme. Considérons le sous-espace H de celles de ces fonctions pour lesquelles $f'(0) = 0$. C'est un sous-espace de codimension 1 (noyau de la forme linéaire $f'(0)$ sur $\mathcal{C}'$). Toute fonction $f \in \mathcal{C}'$ appartient à $\overline{H}$; en effet, étant donnés une telle fonction, et un réel positif ε, une fonction qui est à une distance de f inférieur à ε au sens de la convergence uniforme est une fonction dont le graphe est



situé dans la bande limitée par $y = f(x) + \varepsilon$ et $y = f(x) - \varepsilon$; on peut alors construire une fonction g appartenant à H, c'est-à-dire de tangente horizontale pour $x = 0$ et située dans cette bande. (Etant donné que

$$\forall \varepsilon \quad \exists \eta \quad |x| < \eta \implies |f(x) - f(0)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

on peut, par exemple, prendre comme fonction g celle qui vaut $f(0)$ sur $[0, \eta]$ et qui sur $[\eta, 1]$ admet un graphe se déduisant de celui de f par translation parallèle à $0y$. Un autre choix de g a été fait sur la figure).

Le même raisonnement montre d'ailleurs que H est partout dense dans l'ensemble $\mathcal{C}$ de toutes les fonctions continues sur $\mathbf{R}$ (c'est-à-dire $\overline{H}_{\mathcal{C}} = \mathcal{C}$, où $\overline{H}_{\mathcal{C}}$ désigne l'adhérence de H dans $\mathcal{C}$), mais cette fois H n'est plus de codimension 1, $\mathcal{C}'$ étant un vrai sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}$. Le passage de H à son adhérence fait donc gagner ici plus d'une dimension.

Une partie A était dite *algébriquement libre* si, aucun de ses éléments n'appartenait au sous-espace vectoriel engendré par les autres.

Elle sera dite *topologiquement libre* si, aucun de ses éléments n'appartient au plus petit sous-espace fermé contenant tous les autres.

On pourrait se demander s'il existe des parties topologiquement libres maximales analogues aux parties algébriquement libres maximales, c'est-à-dire aux bases. Il n'en est rien. Un essai de démonstration d'existence utilisant le théorème de Zorn est arrêté par le fait que l'ensemble des parties topologiquement libres n'est pas inductif, c'est-à-dire qu'il existe des sous-familles totalement ordonnées qui ne sont pas majorées.

Exercice 56. — Exemple. Dans l'espace (m) des suites bornées, considérons la famille des suites (e^n_m) avec $e^n_m = \delta^n_m$ pour $n \geqslant 1$ (c'est-à-dire que (e^n) est la suite 0, 0, . . . 0, 1, 0 . . .), auxquelles on adjoint pour e^0 la suite constante et égale à 1 ; puis considérons la famille définie par :

$$f^0 = e^0, \; f^1 = e^0 + e^1, \qquad \ldots f^n = e^0 + \frac{e^n}{n}$$

Montrer qu'une partie finie de la forme $\{ f^i ; \; 0 \leqslant i \leqslant p \}$ est topologiquement libre et que la réunion de ces parties (p décrivant $\mathbf{N}$) ne l'est pas. En déduire que la famille des parties topologiquement libres n'est pas inductive.

Remarque : Il est à noter que cette notion de partie topologiquement libre n'est intéressante que pour des espaces de dimension infinie, car dans un espace de dimension finie, une partie algébriquement libre est topologiquement libre. En effet, si H est un sous-espace et K un de ses supplémentaires, une suite d'éléments x_n de H est une suite d'éléments dont la composante sur K est nulle. Or, dans un espace de dimension finie, l'application projection sur un sous-espace parallèlement à un supplémentaire est une application continue. (C'est évident si l'espace a pour norme le *sup* des normes des coordonnées et nous verrons ci-dessous que toutes les normes que l'on peut définir sur un espace vectoriel de dimension finie y induisent la même topologie). Au contraire, dans un espace de dimension infinie, l'application projection peut n'être pas continue ; d'où la possibilité pour une suite d'éléments de H de converger vers un élément qui n'appartient pas à H. C'est ce qui se passe dans l'exemple donné ci-dessus de l'ensemble $\mathcal{C}'$ des fonctions dérivables en 0 ; $\mathcal{C}' = H \oplus K$, où K est l'ensemble des applications linéaires $x \to kx$; l'application projection sur K, parallèlement à H, fait correspondre à toute fonction $f \in \mathcal{C}$ la fonction $x \to f'(0)\,x$ puisqu'on peut écrire f sous la forme :

$$x \longrightarrow \underbrace{f(x) - xf'(0)}_{H} + \underbrace{xf'(0)}_{K}.$$

Il est aisé de voir que si $f = \lim\limits_{n \to \infty} f_n$, $f'(0)$ n'est pas forcément la limite de $f'_n(0)$.

5. Applications linéaires et continues d'un espace vectoriel normé dans un autre.

Nous nous intéresserons maintenant aux applications d'un espace vectoriel normé E dans un espace vectoriel normé F qui soient des homomorphismes pour la structure d'espace vectoriel, mais soient aussi continues. Nous désignerons leur ensemble par $\mathcal{L}_c(E, F)$. On a, évidemment :

$$\mathcal{L}_c(E, F) \subset \mathcal{L}\,(E, F).$$

Mais, de plus, la somme de deux applications continues et le produit, par $\lambda \in K$, d'une application continue, étant continus, $\mathcal{L}_c(E, F)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E, F)$.

On sait, *a priori*, qu'il existe au moins dans $\mathcal{L}_c$ l'application partout nulle. Nous montrerons ultérieurement qu'il en existe d'autres.

Auparavant, nous montrerons que, *pour qu'une application f de* E *dans* F (espaces vectoriels normés) *soit continue, il faut, et il suffit, qu'il existe $k \in R^+$ tel que* $\|f(x)\| < k . \|x\|$. (1)

Remarquons d'abord que, pour que f soit continue sur E, il suffit qu'elle soit continue à l'origine. En effet, la continuité en a s'exprime par :

$$\forall \varepsilon \quad \exists \eta \quad \|x - a\| < \eta \implies \|f(x) - f(a)\| < \varepsilon$$

mais, f étant linéaire, $f(x) - f(a) = f(x - a)$ et la continuité en a s'écrit :

$$\forall \varepsilon \quad \exists \eta \quad \|x - a\| < \eta \implies \|f(x - a)\| < \varepsilon$$

ce qui exprime la continuité à l'origine.

Or, pour que f soit continue à l'origine, (1) est suffisant car, à tout ε, on peut faire correspondre $\eta = \frac{\varepsilon}{k}$. La condition (1) entraîne donc la continuité.

Réciproquement, soit f continue :

$$\forall \varepsilon \quad \exists \eta \quad \|x\| < \eta \implies \|f(x)\| < \varepsilon.$$

Considérons les x dont la norme vaut $\frac{\eta}{2}$: pour eux, on peut écrire :

$$\|f(x)\| < \frac{2\varepsilon}{\eta} \|x\|.$$

Sur la sphère de centre l'origine et de rayon $\frac{\eta}{2}$, l'inégalité (1) est établie avec $k = \frac{2\varepsilon}{\eta}$. De cette sphère, on passe à l'espace tout entier, car tout point de l'espace est de la forme λx, x appartenant à cette sphère, et

$$\|f(\lambda x)\| = \|\lambda f(x)\| = |\lambda| \, \|f(x)\| < \frac{2\varepsilon}{\eta} |\lambda| \, \|x\| = \frac{2\varepsilon}{\eta} \|\lambda x\|$$

Norme d'une application linéaire continue.

Ce résultat peut s'exprimer en d'autres termes : une application linéaire d'un espace vectoriel normé dans un autre est continue si, et seulement si, l'ensemble des valeurs de $\frac{\|f(x)\|}{\|x\|}$ est majoré.

Il est alors naturel de considérer le plus petit majorant de cet ensemble.

Posons :

$$\|f\| = sup \left\{ \frac{\|f(x)\|}{\|x\|} \; ; \; x \in E \right\}$$

Nous allons vérifier que le nombre ainsi introduit définit bien une norme sur $\mathcal{L}_c(E, F)$:

1° $\|f\| = 0 \implies \forall x \in E \; \|f(x)\| = 0 \implies \forall x \in E \; f(x) = 0 \implies f = 0.$

2° Le rapport $\frac{\|f(x)\|}{\|x\|}$ étant invariant par homothétie, on peut alléger l'écriture en ne considérant que les x de norme 1, c'est-à-dire en prenant $\|f\| = sup \|f(x)\|$, le *sup* étant étendu aux points de la sphère unité. Ceci posé,

$$\|\lambda f\| = sup \|(\lambda f)(x)\| = sup \|\lambda f(x)\| = sup |\lambda| . \|f(x)\| = |\lambda| . \|f\|.$$

3° $\|f + g\| = sup \|(f + g)(x)\| = sup \|f(x) + g(x)\| \leqslant sup \, [\|f(x)\| + \|g(x)\|]$
$\leqslant sup \|f(x)\| + sup \|g(x)\| = \|f\| + \|g\|.$

L'ensemble $\mathcal{L}_c(E, F)$, qui avait déjà une structure d'espace vectoriel, est donc maintenant doté d'une structure d'espace vectoriel normé.

Notons que dans le cas d'une application linéaire de **R** dans **R**, qui est toujours continue, la norme n'est autre chose que la valeur absolue du coefficient angulaire. Des applications voisines pour cette norme sont donc des applications de coefficients angulaires voisins.

6. Normes équivalentes.

Des normes sur un espace vectoriel E sont dites *équivalentes* si elles induisent la même topologie sur l'espace E ; ceci équivaut au fait que l'application identique de E_1 (E muni de la norme $\|x\|_1$) dans E_2 (E muni de la norme $\|x\|_2$) soit bicontinue. Le résultat précédent permet alors, l'application identique étant linéaire, d'énoncer cette propriété sous une autre forme, l'application identique de E_1 dans E_2 est continue si, et seulement si :

$$\exists k \in R^+ \qquad \|x\|_1 < k \, \|x\|_2$$

et celle de E_2 dans E_1 si, et seulement si :

$$\exists k' \in R^+ \qquad \|x\|_2 < k' \, \|x\|_1.$$

Donc, les deux normes sont équivalentes si, et seulement si : $\frac{\|x\|_1}{\|x\|_2}$ reste borné par deux nombres fixes, positifs, A et B.

Il résulte de ceci que, si un espace vectoriel E est complet pour une norme $\|x\|_1$, il est complet pour une norme équivalente $\|x\|_2$.

En effet, soit (x_n) une suite de Cauchy de E_2 (E muni de $\|x\|_2$) :

$$\forall \varepsilon \quad \exists N \quad \left. \begin{array}{l} n > N \\ m > N \end{array} \right\} \implies \|x_n - x_m\|_2 < \varepsilon$$

mais :

$$\|x_n - x_m\|_1 \leqslant B \, \|x_n - x_m\|_2.$$

D'où x_n est aussi suite de Cauchy dans E_1 ; donc elle converge vers x, c'est-à-dire que :

$$\forall \varepsilon' \quad \exists N' \quad n > N' \implies \|x_n - x\|_1 < \varepsilon'$$

et comme :

$$\|x_n - x\|_2 < \frac{\|x_n - x\|_1}{A}$$

(x_n) converge vers x dans E_2 (1).

(1) Notons que cette propriété est propre aux espaces vectoriels normés. Nous avons vu (cf. VII, 2, 3) qu'un ensemble E muni de deux distances définissant la même topologie pouvait être complet pour une de ces distances et non complet pour l'autre.

7. Espaces vectoriels normés de dimension finie.

Nous savions déjà que tous les espaces vectoriels de dimension n sur $\mathbf{R}$ étaient algébriquement isomorphes à $\mathbf{R}^n$. Nous allons voir maintenant que tous les espaces vectoriels normés de dimension n sur $\mathbf{R}$ sont homéomorphes entre eux, c'est-à-dire que toutes les normes dont on peut munir $\mathbf{R}^n$ sont équivalentes entre elles.

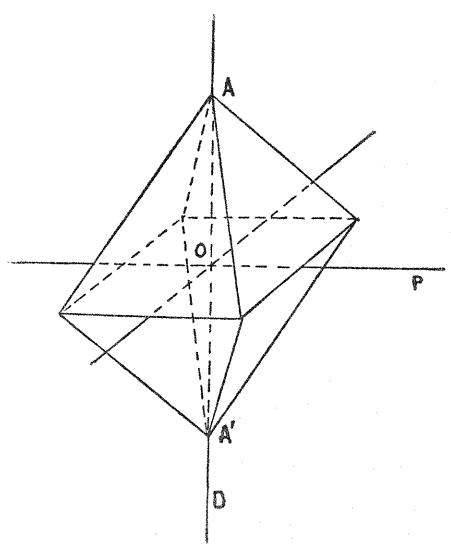
Pour les espaces de dimension n sur $\mathbf{C}$, on aurait des résultats identiques et la démonstration serait analogue.

Montrer que toutes les normes de $\mathbf{R}^n$ sont équivalentes entre elles, c'est montrer que toute topologie dérivant d'une norme est la même que la topologie produit de la topologie usuelle sur $\mathbf{R}$, topologie dont on sait qu'elle dérive de différentes normes, par exemple :

$$\|(x_1, x_2, \dots, x_n)\| = \sup_{1 \leq i \leq n} \|x_i\|.$$

Remarquons d'abord que sur $\mathbf{R}$, toute norme satisfaisant à $\|x\| = |x| \cdot \|1\|$, une norme est déterminée par le choix de la norme de 1 ; les différentes normes sont donc proportionnelles, donc équivalentes.

Le théorème se démontre alors par récurrence sur n. Supposons qu'il soit vrai pour $(n-1)$ et, pour l'établir pour n, comparons dans $\mathbf{R}^n$ les voisinages d'un point pour une topologie $\mathcal{T}$ dérivant d'une norme quelconque d'une part, et pour la topologie produit $\mathcal{T}_0$ d'autre part. Comme point, on peut prendre l'origine, ce qui allège l'écriture, sans rien changer aux résultats, les voisinages des différents points se déduisant les uns des autres par translation, et ceci pour toutes les normes.



Pour la topologie produit et la norme $\sup_{1 \leqslant i \leqslant n} \|x_i\|$, une boule est un pavé (parallélépipède si $n = 3$). $\mathbf{R}^n$ peut être considéré comme somme directe de $\mathbf{P} \approx \mathbf{R}^{n-1}$ et d'un sous-espace $\mathbf{D}$ de dimension 1 (figure faite pour $n = 3$). Une boule B, de centre O, dans $\mathbf{R}^n$ pour $\mathcal{T}$, doit contenir un

voisinage de O dans $\mathbf{P}$ pour la topologie induite par $\mathcal{T}$; mais, d'après l'hypothèse de récurrence, ce voisinage contient une boule pour la topologie produit, c'est-à-dire un pavé de $\mathbf{P}$. D'autre part, B doit contenir un intervalle AA' de $\mathbf{D}$ de centre O (car on peut, pour toute norme, trouver sur une droite passant par O deux points symétriques par rapport à O tels que leur distance à O ait une valeur donnée). Donc, puisque B est convexe, B contient la partie de E (double pyramide si $n = 3$) limitée par les variétés affines à une dimension définies par A ou A' et les points du contour du pavé. Une telle partie contient un pavé de $\mathbf{R}^n$. Donc, toute boule pour $\mathcal{T}$ contient une boule pour $\mathcal{T}_0$, c'est-à-dire que :

$$\mathcal{T} \text{ est moins fine que } \mathcal{T}_0.$$

Nous allons montrer maintenant que $\mathcal{T}$ *est plus fine que* $\mathcal{T}_0$ (d'où il résultera l'identité des deux topologies).

$\mathbf{P} \approx \mathbf{R}^{n-1}$ est complet ; or, si un espace vectoriel est complet pour une norme, il est complet pour toute norme équivalente et nous avons supposé toutes les normes équivalentes sur $\mathbf{R}^{n-1}$. Par suite, $\mathbf{P}$ est complet, donc (cf. VII, 2, 4) fermé. Donc, $\mathbf{R}^n - \mathbf{P}$ est ouvert pour la topologie $\mathcal{T}$. Cet ouvert est la réunion de deux ensembles disjoints :

$$O_1 = \{ (x_1, x_2, \dots, x_n) \ ; \ x_n > 0 \} \qquad O_2 = \{ (x_1, \dots, x_n) \ ; \ x_n < 0 \}$$

Tout point de $\mathbf{R}^n - \mathbf{P}$ est centre d'une boule incluse dans lui, mais cette boule étant convexe ne peut avoir de points dans O_1 et dans O_2 car elle en aurait dans $\mathbf{P}$ (1), donc elle est entièrement incluse dans celui des deux sous-ensembles où elle a son centre ; donc, O_1 et O_2 sont des ouverts pour $\mathcal{T}$. Il en résulte que toute portion d'espace comprise entre deux variétés affines parallèles à $\mathbf{P}$, $\{ x \ ; \ a < x_n < b \}$ est aussi un ouvert, car on peut la considérer comme l'intersection de deux ouverts obtenus par translation à partir de O_1 et O_2. Or, une telle portion d'espace est un ouvert de la topologie produit $\overset{-1}{pr_n}(]a, b[)$, $]a, b[$ étant un intervalle de $\mathbf{D}$.

En faisant jouer à chacun des sous-espaces de dimension 1, dont $\mathbf{R}^n$ est somme directe, le rôle que l'on a fait jouer à $\mathbf{D}$ dans ce qui précède, on montrera de même que les images réciproques par chacune des projections des ouverts du sous-espace de dimension 1 correspondant sont des ouverts de $\mathcal{T}$. Donc, tous les ouverts dont l'ensemble forme un système de générateurs de la topologie $\mathcal{T}_0$ sont des ouverts de $\mathcal{T}$. Il en résulte que $\mathcal{T}$ est plus fine que $\mathcal{T}_0$ et la propriété est démontrée.

§ 2. ESPACES $\mathcal{L}_c(\mathrm{E}, \mathrm{F})$. ESPACES DUALS

Nous avons vu que l'ensemble $\mathcal{L}_c(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ des applications linéaires et continues d'un espace vectoriel normé E dans un autre F, ayant le même corps K des scalaires, avait une structure naturelle d'espace vectoriel normé, la norme d'une application f étant définie par :

$$\|f\| = \sup \left\{ \frac{\|f(x)\|}{\|x\|} \ ; \ x \in \mathrm{E} - \{0\} \right\}$$

---

(1) En effet, si $x \in O_1$ ($x_n > 0$) et $y \in O_2$ ($y_n < 0$), la nième coordonnée d'un point du segment xy est de la forme $\lambda x_n + (1-\lambda)\, y_n$ avec $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ et prend donc une fois la valeur zéro.

ou, ce qui est équivalent :

$$\|f\| = sup \{ \|f(x)\| \; ; \; x \in E, \|x\| = 1 \}.$$

Un cas particulier extrêmement important est celui où F est le corps K des scalaires de E. Alors, $\mathcal{L}_c(E, K)$ est dit *le dual topologique* E′ de E ; c'est un sous-espace vectoriel du dual algébrique E*. (Il arrive que l'on dise, plus brièvement, dual, sans préciser lorsqu'il n'y a aucune ambiguïté sur la nature du dual dont on s'occupe).

Nous démontrerons d'abord dans le cas du dual (topologique) le très important théorème de Hahn-Banach, qui établit la possibilité de prolonger à E entier une forme linéaire et continue définie sur un sous-espace de E, et qui permet, en particulier, de garantir l'existence de formes linéaires et continues non nulles sur tout espace vectoriel normé. Après quoi, nous l'utiliserons pour étudier dans quelles conditions $\mathcal{L}_c(E, F)$ est complet.

1. Théorème de Hahn-Banach. Démonstration dans le cas réel.

THÉORÈME DE HAHN-BANACH. — SI H EST UN SOUS-ESPACE VECTORIEL DE E, SI f EST UNE FORME LINÉAIRE ET CONTINUE SUR H TELLE QUE $\|f\| = 1$, IL EXISTE SUR E UNE FORME F LINÉAIRE ET CONTINUE AVEC $\|F\| = 1$ DONT LA RESTRICTION A H EST f.

Si F existe, elle est connue sur H. Soit $x_0 \notin H$, et cherchons à définir F sur le sous-espace engendré par $H \cup \{x_0\}$. Le choix de $F(x_0)$ déterminera F sur tout le sous-espace. Pour que $\|F\| = 1$ il faut, et il suffit, que :

$$\forall x \in H \qquad \forall t \in \mathbf{R} \qquad \|F(x + tx_0)\| \leqslant \|x + tx_0\|$$

Mais, le premier membre de cette inégalité étant une norme dans **R**, ceci peut s'écrire, en se rappelant que pour $x \in H$, $F(x) = f(x)$:

$$\forall x \in H \qquad \forall t \in \mathbf{R} \qquad |f(x) + t\,F(x_0)| \leqslant \|x + tx_0\| \qquad (1).$$

Divisons par $|t|$ les deux membres de l'inégalité :

$$\left|f\left(\frac{x}{t}\right) + F(x_0)\right| \leqslant \left\|\frac{x}{t} + x_0\right\|.$$

Quand x décrit H et t décrit **R**, $\frac{x}{t}$ décrit H ; donc, la condition (1) équivaut à :

$$\forall x \in H \qquad |f(x) + F(x_0)| \leqslant \|x + x_0\|$$

ou encore :

$$\forall x \in H \qquad -f(x) - \|x + x_0\| < F(x_0) < \|x + x_0\| - f(x).$$

Une condition suffisante pour que l'on puisse choisir $F(x_0)$ répondant à la question est que l'*inf* de $\|x + x_0\| - f(x)$ soit supérieur au *sup* de $-\|x + x_0\| - f(x)$, c'est-à-dire que, quels que soient x_1 et x_2 appartenant à H :

$$-f(x_1) - \|x_1 + x_0\| \leqslant -f(x_2) + \|x_2 + x_0\|$$

ou :

$$f(x_2 - x_1) \leqslant \|x_1 + x_0\| + \|x_2 + x_0\|$$

or :

$$f(x_2 - x_1) \leqslant \|x_2 - x_1\| \leqslant \|x_1 + x_0\| + \|x_2 + x_0\|.$$

Donc, le choix de $F(x_0)$ tel que $\|F\| = 1$ est possible, F prolongeant alors f au sous-espace engendré par $H \cup \{x_0\}$.

Considérons alors tous les couples (F_i, V_i) tels que V_i soit un sous-espace contenant H et F_i une forme linéaire et continue, de norme 1, ayant f pour restriction à H. Cet ensemble est ordonné par la relation :

$$(F_i, V_i) \prec (F_j, V_j) \iff \begin{cases} V_i \subset V_j \\ F_i \text{ est la restriction de } F_j \text{ à } V_i. \end{cases}$$

Si cette famille possède une sous-famille totalement ordonnée $\{(F_i, V_i)\}$, le couple formé de $V = \bigcup V_i$ et de la forme F égale à F_i sur chaque V_i est un majorant de la sous-famille considérée. L'ensemble des couples (F_i, V_i) satisfait donc aux hypothèses du théorème de Zorn.

Donc, il possède un élément maximal ; mais, comme d'après ce que nous avons montré ci-dessus, on peut toujours prolonger la forme F définie sur un sous-espace, si ce sous-espace n'est pas E tout entier, il en résulte que l'élément maximal est un couple (F, E), ce qui achève la démonstration du théorème de Hahn-Banach dans le cas réel.

Corollaire. — Il existe des formes linéaires et continues sur E de norme donnée $\|f\|$. En effet, si $\mathbf{R}x_0$ est un sous-espace de dimension 1, en posant pour $x = kx_0$, $f(x) = k\,f(x_0)$, on obtient une forme linéaire et continue sur $\mathbf{R}x_0$ de norme $\|f\|$, si on a choisi $f(x_0)$ tel que $|f(x_0)| = \|f\|\,\|x_0\|$. Il n'y a plus qu'à étendre cette forme à l'espace tout entier. Ce même raisonnement prouve qu'il existe des formes prenant une valeur donnée en un point donné.

2. Démonstration dans le cas complexe.

Nous prenons **C** comme espace d'arrivée, l'espace E de départ étant un espace vectoriel sur **C**. Un espace vectoriel sur **C** est aussi un espace vectoriel sur **R**, mais il y a lieu de distinguer entre les formes **C**-linéaires, applications linéaires de E dans **C**, qui satisfont à :

$$\forall \lambda \in \mathbf{C} \qquad f(\lambda x) = \lambda f(x),$$

et les formes **R**-linéaires, applications linéaires de E dans **R**, qui satisfont seulement à :

$$\forall \lambda \in \mathbf{R} \qquad f(\lambda x) = \lambda f(x).$$

Soit F une forme **C**-linéaire ; $F(x) \in \mathbf{C}$ et peut-être écrit, en mettant en évidence partie réelle et partie imaginaire,

$$F(x) = G(x) + i\,H(x).$$

On vérifie sans peine que G et H sont des formes **R**-linéaires, mais elles ne sont pas indépendantes. En effet, F étant **C**-linéaire,

$$F(ix) = i\,F(x) = i\,G(x) - H(x),$$

mais, d'autre part,

$$F(ix) = G(ix) + i\,H(ix).$$

D'où :

$$\begin{aligned} G(ix) &= -H(x) \\ H(ix) &= G(x), \end{aligned} \qquad (1)$$

ces deux relations étant d'ailleurs équivalentes.

Réciproquement, étant données deux formes **R**-linéaires jouissant de la propriété (1), la forme F telle que

$$F(x) = G(x) + i\,H(x)$$

est **C**-linéaire.

Il est immédiat que : $F(x + y) = F(x) + F(y)$.

D'autre part, si $\lambda = \alpha + i\beta$ avec α et β réels,

$$\begin{aligned} F(\lambda x) &= G(\alpha x) + G(i\beta x) + i\,H(\alpha x) + i\,H(i\beta x) \\ &= \alpha G(x) - \beta\,H(x) + i\,\alpha\,H(x) + i\,\beta\,G(x) \\ &= (\alpha + i\beta)\,[G(x) + i\,H(x)]. \end{aligned}$$

La donnée d'une forme **C**-linéaire équivaut donc à la donnée de deux formes **R**-linéaires satisfaisant à (1) et, comme H est définie quand G l'est, équivaut à la donnée d'une forme **R**-linéaire. Il y a donc une bijection

$$\mathcal{L}(E, \mathbf{R}) \longrightarrow \mathcal{L}(E, \mathbf{C})$$

et cette bijection est un isomorphisme d'espaces vectoriels sur **R**.

Dans cet isomorphisme, $\mathcal{L}_c(E, \mathbf{R})$ correspond à $\mathcal{L}_c(E, \mathbf{C})$. Nous allons voir en effet que F est continue si, et seulement si, G est continue et que $\|F\| = \|G\|$.

Supposons F *continue :*

$$|F(x)| \leqslant \|x\|.\|F\|$$

or $\quad |G(x)| \leqslant |F(x)| \quad$ donc $\quad |G(x)| \leqslant \|x\|.\|F\|.$

Donc G *est continue et*

$$\|G\| < \|F\|.$$

Supposons maintenant G *continue ;* H l'est aussi, donc F aussi. Pour chercher la norme de F, posons $F(x) = \rho e^{i\theta}$. Alors $F(e^{-i\theta}\,x) = \rho$ est réel, donc :

$$F(e^{-i\theta}\,x) = G(e^{-i\theta}\,x).$$

D'où :

$$|F(x)| = |F(e^{-i\theta}\,x)| = |G(e^{-i\theta}\,x)| \leqslant \|G\|.\|e^{-i\theta}\,x\| = \|G\|.\|x\|.$$

Mais cette inégalité, vraie pour tout x de E, entraîne :

$$\|F\| < \|G\|.$$

En rapprochant du résultat trouvé plus haut, on voit que les deux formes ont même norme.

A partir de là on voit que le théorème de Hahn-Banach s'étend au cas des espaces vectoriels E sur **C**. Etant donnée une forme f de norme 1 sur $H \subset E$, il lui correspond une forme g de norme 1 sur H, considéré comme espace vectoriel sur **R**. Cette forme peut être prolongée à E tout entier par une forme G de norme 1 ; à celle-ci correspond la forme F telle que $F(x) = G(x) - i\,G(ix)$, également de norme 1, et dont la restriction à H est bien f.

3. Conditions pour que $\mathcal{L}_c(E, F)$ soit un espace de Banach.

Théorème. — $\mathcal{L}_c(E, F)$ est complet si, et seulement si, F est complet.

Soient E et F deux espaces vectoriels normés sur **C** (ou sur **R**).

1° Supposons F complet et soit f_n une suite de Cauchy de $\mathcal{L}_c(E, F)$:

$$\forall \varepsilon \qquad \exists\, N(\varepsilon) \left\{\begin{array}{l}\forall m > N \\ \forall n > N\end{array}\right. \|f_n - f_m\| < \varepsilon.$$

Nous voulons montrer l'existence de $f \in \mathcal{L}_c(E, F)$ telle que :

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\| = 0.$$

Soit $x \in E$: l'hypothèse entraîne que :

$$\left\{\begin{array}{l}\forall n > N \\ \forall m > N\end{array}\right. \quad \|f_n(x) - f_m(x)\| = \|(f_n - f_m)\,(x)\| \leqslant \|f_n - f_m\|.\|x\| \leqslant \varepsilon\,\|x\| \qquad (1).$$

Donc, pour x fixe, $f_n(x)$ est une suite de Cauchy de F qui converge, par hypothèse, vers un élément $f(x)$.

On a ainsi défini une application f dont nous allons démontrer qu'elle appartient à $\mathcal{L}_c(E, F)$ et que $\{f_n\}$ converge vers elle.

a) *D'abord, cette application est linéaire* car :

$$f(x + y) = \lim f_n(x + y) = \lim\,[f_n(x) + f_n(y)].$$

Or, nous savons que l'application $(X, Y) \in F^2 \longrightarrow (X + Y) \in F$ est continue, ce qui implique que si deux suites (X_n) et (Y_n) convergent respectivement vers X_0 et Y_0, leur somme converge vers $(X_0 + Y_0)$. D'où :

$$\lim_{n\to\infty}\,[f_n(x) + f_n(y)] = \lim_{n\to\infty} f_n(x) + \lim_{n\to\infty} f_n(y)$$

et

$$f(x + y) = f(x) + f(y).$$

De même :

$$f(\lambda x) = \lim f_n(\lambda x) = \lim \lambda\, f_n(x).$$

Or, nous savons aussi que l'application $(\lambda, X) \in \mathbf{C} \times F \longrightarrow \lambda X \in F$ est continue, donc, en particulier, que si λ est fixe et que si la suite (X_n) converge vers X_0, la suite (λX_n) converge vers X_0. D'où :

$$\lim \lambda\, f_n(x) = \lambda \lim f_n(x)$$

et

$$f(\lambda x) = \lambda f(x).$$

b) *Cette application est continue.*

Laissons n fixe et faisons tendre m vers l'infini, l'inégalité (1) montre que :

$$\forall n > N(\varepsilon) \qquad \|(f_n - f)(x)\| < \varepsilon.\|x\| \qquad (2).$$

Cette inégalité, valable pour tout x, montre que $(f_n - f)$ est une application continue (cf. VIII, 1, 5). Mais alors, f_n étant continue, f est aussi continue comme différence de deux applications continues. Nous pouvons conclure :

$$f \in \mathcal{L}_c(E, F).$$

c) $\{f_n\}$ *converge vers* f.

L'inégalité (2) peut s'écrire :

$$\forall n > N(\varepsilon) \qquad \|f_n - f\| < \varepsilon$$

et montre donc que :

$$\lim f_n = f.$$

2° Supposons maintenant que F ne soit pas complet, c'est-à-dire qu'il existe une suite de Cauchy $\{y_n\}$ de F qui ne converge pas ; nous allons montrer qu'on peut en déduire l'existence d'une suite de Cauchy de $\mathcal{L}_c(E, F)$ qui ne converge pas.

Soit $x_0 \in E$, fixe, de norme 1. Le théorème de Hahn-Banach prouve l'existence d'une forme φ, linéaire et continue, de norme 1, définie sur E et telle que $\varphi(x_0) = 1$. Définissons alors une suite d'éléments de $\mathcal{L}_c(E, F)$ par :

$$f_n(x) = \varphi(x)\,.\,y_n.$$

On a :

$$\|f_n(x)\| = |\varphi(x)|.\|y_n\| \leqslant \|x\|.\|y_n\|$$

donc f_n est continue avec une norme telle que :

$$\|f_n\| \leqslant \|y_n\|$$

mais comme $\|f_n(x_0)\| = y_n$, on a $\|f_n\| = \|y_n\|$.

Le même raisonnement appliqué à $(f_n - f_m)$ montre que :

$$\|f_n - f_m\| = \|y_n - y_m\|.$$

Il en résulte que $\{ f_n \}$ est bien une suite de Cauchy de $\mathcal{L}_c(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ et cette suite ne converge pas, puisque $f_n(x_0)$ n'étant autre que y_n, elle ne converge pas au point x_0.

4. Espaces duals.

En application du théorème précédent, nous voyons, puisque $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$ sont complets, que *les duals des espaces vectoriels normés sur* $\mathbf{R}$ *ou* $\mathbf{C}$ (qui ne sont autres que les espaces $\mathcal{L}_c(\mathrm{E}, \mathbf{R})$ ou $\mathcal{L}_c(\mathrm{E}, \mathbf{C})$) *sont des espaces de Banach.*

Exercice 57. — 1° Montrer que le dual de l'espace (l^1) (cf. VIII.1.3) des suites complexes sommables est l'espace (m) des suites complexes bornées.

On remarquera que (l^1) possède une base topologique e_n avec $e_n^m = \delta_n^m$ (symbole de Kronecker, e_n^m désignant le *m-ième* terme de la suite e_n) telle que si a désigne la suite de terme général a^m on ait :

$$a = \lim_n \sum_{p=1}^{n} a^p e_p = \sum_{p}^{\infty} a^p e_p.$$

Si f appartient au dual topologique de (l^1) on a :

$$f(a) = \sum_{p=1}^{\infty} a^p\, f(e_p)$$

f est déterminée par la donnée de la suite $\{ f(e_p) \}$ qu'il s'agit de choisir convenablement.

2° Trouver le dual de l'espace (c) des suites complexes convergentes.

On pourra utiliser pour base topologique la base précédente à laquelle on aura adjoint la suite constante et égale à 1.

3° Montrer que l'espace (l^2) des suites réelles de carré sommable est isomorphe à son dual.

On utilisera la même base topologique qu'au 1°. (Il sera commode d'utiliser le théorème suivant que l'on commencera par vérifier : Si u_n est le terme général d'une série divergente à termes positifs et S_n la somme de ses n premiers termes, la série de terme général $v_n = \dfrac{u_n}{S_n}$ est convergente *si* $\alpha > 1$, divergente si $\alpha \leqslant 1$).

Autre exemple de dual. — Soit $\mathrm{E} = \mathcal{C}([0, 1], \mathbf{R})$, espace d'applications continues qui est un espace vectoriel normé avec :

$$\|f\| = \sup \{ |f(x)| \; ; \; x \in [0, 1] \} .$$

Un théorème célèbre de F. Riesz établit que toute forme linéaire et continue sur $\mathcal{C}$ s'exprime par :

$$\mathrm{I}(f) = \int_0^1 f dg$$

où g est une fonction à variation bornée et où l'intégrale est l'intégrale de Stieltjès correspondante.

Une fonction à variation bornée g est la différence de deux fonctions croissantes p et n ; et on pose, par définition :

$$\int_0^1 f\,dg = \int_0^1 f\,dp - \int_0^1 f\,dn.$$

L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f\,dp$ étant définie à partir des sommes :

$$\sum_{i=o}^{n-1} f(\xi_i)\,[p(x_{i+1}) - p(x_i)]$$

comme l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ est définie à partir des sommes :

$$\sum_{i=o}^{n-1} f(\xi_i)\;(x_{i+1} - x_i).$$

(Quand la fonction g est continuement dérivable, l'intégrale de Stieltjès n'est pas autre chose que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(x) g'(x) dx$).

Le théorème de Riesz [1] précise que :

$$\|\mathrm{I}\| = \mathrm{V}_0^1(g)$$

$\mathrm{V}_0^1(g)$, ou variation de la fonction g, étant définie par :

$$\mathrm{V}_0^1(g) = \sup \left\{ \sum_{i=o}^{n-1} |g(x_{i+1}) - g(x_i)| \right\}$$

le *sup* étant relatif à l'ensemble des découpages du segment $[0, 1]$.

Bidual. — On peut chercher le dual du dual. On se rappelle que, dans le cas des duals algébriques, on trouvait dans E^{**} un sous-espace $\tilde{\mathrm{E}}$ isomorphe à E, dont les éléments étaient définis par :

$$\tilde{x}(x^*) = x^*(x)$$

$\tilde{x}$ étant alors l'image de x dans l'isomorphisme en question.

Nous étendrons ce résultat dans l'exercice suivant :

Exercice 58. — Montrer qu'à tout élément x de E (espace vectoriel normé), on peut associer une forme linéaire et continue $\tilde{x}$ sur son dual topologique E' par la condition suivante :

$$\tilde{x}(x') = x'(x).$$

L'application

$$x \in \mathrm{E} \longrightarrow \tilde{x} \in \mathrm{E}''$$

est un isomorphisme algébrique et une isométrie ($\|\tilde{x}\| = \|x\|$) de E sur un sous-espace $\tilde{\mathrm{E}}$ de E'' (Il sera nécessaire d'utiliser le théorème de Hahn-Banach).

(1) Pour plus de détails concernant l'intégrale de Stieltjès et le théorème de Riesz, se reporter à l'article « Théorie de l'intégration », dans la monographie n° 10 de l'*Enseignement Mathématique* : « Problèmes de mesure ».

En général, $\tilde{E}$ est strictement inclus dans E″. On dit qu'un espace est *réflexif* si $\tilde{E} = E''$.

Par exemple, on montre que l'espace (l^p) des suites complexes de puissance $p^{ème}$ sommable, espace vectoriel normé où la norme est la racine $p^{ème}$ de la somme, admet pour dual topologique l'espace (l^q) avec

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

La symétrie de la relation montre que ces espaces sont réflexifs.

§ 3. FAMILLES SOMMABLES

Dans un espace vectoriel, on peut faire la somme des éléments d'une partie indexée *finie* quelconque. La notion que nous allons introduire doit donner un sens précis à ce qu'on pourrait appeler intuitivement la somme d'une infinité d'éléments d'un espace vectoriel normé. C'est ce qu'on attend classiquement de la notion de série, mais il faut noter que dans cette dernière l'ordre des éléments intervient, si bien que les propriétés d'associativité et de commutativité des sommes finies ne s'étendent pas aux sommes infinies que sont les séries, sauf pour les séries absolument convergentes de $\mathbf{R}^n$ ou $\mathbf{C}^n$.

La notion de famille sommable ne contient aucune référence à un ordre sur l'ensemble des indices de la famille : la commutativité est donc dans la définition. L'associativité, en un sens très fort, se démontre dans le cas le plus général.

La notion a le double avantage : 1° de donner directement le cadre dans lequel se déroule la théorie des séries absolument convergentes, alors que l'exposé classique donne une définition faisant intervenir un ordre sur les termes, pour montrer ensuite que cet ordre n'a rien à voir dans la question ; 2° de généraliser, de manière simple et utile, les propriétés des séries commutativement convergentes.

La notion de série ne perd pas pour cela tout intérêt, mais c'est une notion plus fine et plus délicate que celle de famille sommable.

Nous considérons, dans ce qui suit des familles d'éléments d'un espace vectoriel normé, ce qui correspond à une situation très fréquente en Analyse, mais le cadre le plus général pour traiter la question est celui d'un groupe topologique (les résultats seraient analogues, et les démonstrations essentiellement les mêmes dans leur principe).

1. Définition. Propriétés générales.

Soit une famille d'éléments $\{ a_i \, ; \, i \in I \}$ d'un espace vectoriel normé indexée par l'ensemble I. Pour toute partie finie J de I, posons :

$$S_J = \Sigma \{ a_i \, ; \, i \in J \}$$

et désignons par $\mathcal{P}_f(I)$ l'ensemble des parties finies de I. La famille (a_i) sera dite sommable, de somme S, si :

$$\forall \varepsilon \quad \exists J_0 \in \mathcal{P}_f(I) \quad \forall J \in \mathcal{P}_f(I) \quad J \supset J_0 \implies \|S - S_J\| < \varepsilon.$$

On notera indifféremment $S = \sum \{ a_i \, ; \, i \in I \} = \sum\limits_{i \in I} a_i$.

Notons que cette définition peut s'exprimer en termes de limite. Lorsque la partie finie J_0 décrit $\mathcal{P}_f(I)$, l'ensemble des parties finies qui la contiennent décrit une base de filtre sur $\mathcal{P}_f(I)$ [le vide ne lui appartient pas ; elle n'est pas vide et l'intersection de l'ensemble des parties qui contiennent J_0 et de l'ensemble des parties qui contiennent J'_0 est

l'ensemble des parties qui contiennent $J_0 \cup J'_0$]. L'ensemble $\mathcal{P}_f(I)$ étant ordonné par inclusion, on peut appeler le filtre engendré par cette base, filtre des sections finissantes de $\mathcal{P}_f(I)$ (cf. exercice 8). Dire que la *famille indexée par* I *est sommable de somme* S *est alors dire que l'application*

$$J \in \mathcal{P}_f(I) \longrightarrow S_J \in E$$

converge vers S *suivant le filtre des sections finissantes de* $\mathcal{P}_f(I)$.

Le lecteur établira aisément la proposition suivante : soit $\{ a_i \, ; \, i \in I \}$ une famille sommable de somme S, d'éléments de E, espace vectoriel normé ; soit f une application linéaire et continue de E dans un espace vectoriel normé F : la famille $\{ f(a_i) \, ; \, i \in I \}$ est sommable de somme $f(S)$.

Quand l'ensemble des indices est **N**, la famille reçoit le nom de suite sommable.

On peut rapprocher la définition d'une suite sommable de celle d'une série convergente.

$$\forall \varepsilon \qquad \exists N \qquad n \geqslant N \longrightarrow \left|S - \sum_{p=1}^{n} u_p\right| < \varepsilon.$$

Mais il convient de noter que cette condition est moins forte que la condition (1) appliquée à la famille $\{ u_n \, ; \, n \in \mathbf{N} \}$, car elle ne fait pas intervenir toutes les parties finies contenant l'ensemble :

$$J_0 = \{ p \, ; \, 1 \leqslant p \leqslant N \}$$

mais seulement les parties finies de la forme $\{ p \, ; \, 1 \leqslant p \leqslant n \}$ avec $n \geqslant N$. La suite des termes d'une série convergente ne constitue donc pas, en général, une suite sommable.

Remarquons toutefois que, dans le cas particulier important des familles de réels positifs, il y a identité entre la notion de série convergente et de série dont la suite des termes est sommable. En effet, observons d'abord que, *pour qu'une famille de réels positifs soit sommable, il est nécessaire* (c'est évident) *et suffisant que l'ensemble de ses sommes finies soit borné*. En effet, soit une telle famille indexée par I et *soit* A *le sup de ses sommes finies :*

$$\forall \varepsilon \qquad \exists J_0 \in \mathcal{P}_f(I) \qquad A - \varepsilon < S_{J_0} < A.$$

Mais alors :

$$J \supset J_0 \implies S_J > S_{J_0} \implies A - \varepsilon < S_J < A$$

et *la famille est sommable de somme* A. Si l'on considère alors une série de réels positifs convergente, ses sommes $\sum\limits_{p=1}^{n} u_p$ sont bornées et toute partie finie pouvant être incluse dans une telle somme l'est aussi. La famille $\{ u_n \, ; \, n \in \mathbf{N} \}$ est donc sommable.

Espace vectoriel des familles sommables.

Si la famille $\{ a_i \, ; \, i \in I \}$ est sommable de somme A et la famille $\{ b_i \, ; \, i \in I \}$ est sommable de somme B, la famille $\{ a_i + b_i \, ; \, i \in I \}$ est sommable de somme A + B et la famille $\{ \lambda a_i \, ; \, i \in I \}$, λ étant un élément du corps K sur lequel E est espace vectoriel, est sommable de somme λA, comme il est aisé de le vérifier.

L'ensemble $\mathcal{S}$ des familles sommables de même ensemble d'indices I a donc une structure naturelle d'espace vectoriel sur K et l'application qui, à la famille, fait correspondre sa somme, est une forme linéaire sur cet espace vectoriel. $\mathcal{S}$ est un sous-espace de $\mathcal{F}$ (I, E).

2. Associativité des familles sommables.

NOUS ALLONS ÉTABLIR LE RÉSULTAT SUIVANT : ÉTANT DONNÉE UNE FAMILLE SOMMABLE $\{ a_i \,;\, i \in I \}$ DE SOMME S ET UNE PARTITION DE I EN SOUS-ENSEMBLE I_λ AVEC $\lambda \in \Lambda$, SI LES SOUS-FAMILLES $\{ a_i \,;\, i \in I \}$ SONT SOMMABLES, DE SOMMES S_λ, ALORS LA FAMILLE $\{ S_\lambda \,;\, \lambda \in \Lambda \}$ EST SOMMABLE DE SOMME S.

Démonstration. — Soit, pour ε, donné la partie finie J_o de I que la définition des familles sommables lui associe et soit $\Lambda_o \subset \Lambda$ défini par :

$$\Lambda_o = \{ \lambda \,;\, I_\lambda \cap J_o \neq \emptyset \}$$

c'est-à-dire l'ensemble des indices λ, tels que la sous-famille correspondante ait des éléments dans J_o ; Λ_o est fini puisque J_o l'est. Nous allons démontrer que :

$$\forall U \in \mathcal{P}_f(\Lambda) \qquad U \supset \Lambda_o \implies \Big\| S - \sum_{\lambda \in U} S_\lambda \Big\| < 2\varepsilon$$

autrement dit, que la famille des S est sommable de somme S. Posons en effet : card $U = n$, c'est-à-dire qu'il existe n sous-familles I_λ dont les indices appartiennent à U. Pour chacun de ces n indices λ, on peut dire, puisque la sous-famille est sommable :

$$\forall \frac{\varepsilon}{n} \qquad \exists J_\lambda \in \mathcal{P}_f(I_\lambda) \qquad \| S - \Sigma \{ a_i \,;\, i \in J_\lambda \} \| < \frac{\varepsilon}{n} \qquad (1).$$

et nous pouvons choisir J_λ, contenant $I_\lambda \cap J_o$, de façon que :

$$I_\lambda \supset J_\lambda \supset I_\lambda \cap J_o. \qquad (2)$$

Additionnons membre à membre les n inégalités du type (1).
Il vient :

$$\sum_{\lambda \in U} \| S_\lambda - S_{J_\lambda} \| < \varepsilon.$$

D'où, *a fortiori :*

$$\Big\| \sum_{\lambda \in U} S_\lambda - \sum_{\lambda \in U} S_{J_\lambda} \Big\| < \varepsilon.$$

Mais (2) entraîne que $J = \bigcup_{\lambda \in U} J_\lambda$ contient J_o, donc :

$$\| S - S_J \| = \Big\| S - \sum_{\lambda \in U} S_{J_\lambda} \Big\| < \varepsilon,$$

et, par conséquent :

$$\Big\| S - \sum_{\lambda \in U} S_\lambda \Big\| < 2\varepsilon.$$

REMARQUE. — Il faut se garder d'appliquer, consciemment ou non, la réciproque qui est fausse. La réunion d'une famille de familles sommables peut n'être pas sommable, même si la famille des sommes est sommable.

On montrera toutefois :

Exercice 59. — Etant donnée une famille $\{ a_i \,;\, i \in I \}$, si $(I_\lambda \,;\, \lambda \in \Lambda)$ est une partition *finie* de I, si chacune des familles $\{ a_i \,;\, i \in I_\lambda \}$ est sommable de somme S_λ, la famille $\{ a_i : i \in I \}$ est sommable et a pour somme $\Sigma \{ S \,;\, \lambda \in \Lambda \}$.

Et, à titre de contre-exemple, dans le cas d'une partition infinie :

Exercice 60. — Construire une famille U de nombres réels indexés par les couples (m, n) d'entiers positifs telle que la famille $\{ U_{m,n} \,;\, (m, n) \in \mathbf{N}^2 \}$ ne soit pas sommable, mais que chacune des familles $\{ U_{m,n} \,;\, n \in \mathbf{N} \}$ soit sommable de somme S_m et que la famille $\{ S_m \,;\, m \in \mathbf{N} \}$ soit sommable.

3. Critère de Cauchy. Familles sommables dans un espace de Banach.

Soit une partie finie K de I, disjointe de J_o. On peut appliquer à la partie finie, $J = K \cup J_o$, la propriété qui a servi à définir la famille sommable :

$$\| S - S_J \| < \varepsilon.$$

Mais on a aussi : $\quad \| S - S_{J_o} \| < \varepsilon.$

D'où : $\quad \| S_J - S_{J_o} \| = \| S_K \| < 2\varepsilon.$

2ε étant arbitraire, cette propriété s'énonce :

$$\forall \varepsilon \qquad \exists J_o \qquad \forall K \in \mathcal{P}_f(I) \qquad K \cap J_o = \emptyset \implies \| S_K \| < \varepsilon.$$

Cette propriété appelée *critère de Cauchy,* comme l'analogue relatif aux séries $\quad (\forall \varepsilon \quad \exists N \quad n > N,\ m > N \implies |S_n - S_m| < \varepsilon)$
est une condition nécessaire de sommabilité d'une famille.

Elle entraîne le corollaire : ***Une famille sommable ne contient qu'un ensemble au plus dénombrable d'éléments non nuls :***

$$\text{card } \{ a_i \,;\, i \in I \,;\, a_i \neq 0 \} \leqslant \aleph_o.$$

Donnons-nous en effet une suite décroissante :

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n, \ldots \qquad \text{avec } \lim \varepsilon_n = 0$$

$\left(\text{par exemple } \varepsilon_n = \dfrac{1}{n}\right)$. A chaque ε_n, le critère de Cauchy permet d'associer une partie finie J_o^n qui contient nécessairement tout élément de norme supérieure à ε_n, car un tel élément qui n'appartiendrait pas à J_o^n constituerait à lui seul une partie finie qui contredirait le critère. Il n'y a donc qu'un nombre fini d'éléments de la famille sommable dont la norme soit supérieure à ε_n et ceci pour tout n.
L'ensemble des éléments non nuls de la famille sommable apparaît alors comme une réunion dénombrable d'ensembles finis, c'est-à-dire qu'il est fini ou dénombrable.
Ce résultat pourrait faire penser qu'on doit se borner à ne considérer que des familles sommables indexées par des ensembles dénombrables. Il n'en est rien, car il arrive que l'on rencontre des ensembles de familles (a) telles que, si $J(a)$ est la partie dénombrable de I qui indexe les éléments non nuls de (a), $J(a)$ varie avec (a), et que la réunion des $J(a)$ soit I.

RÉCIPROQUE DU CRITÈRE DE CAUCHY ; celle-ci exige que l'espace soit complet : SI UNE FAMILLE D'ÉLÉMENTS D'UN ESPACE DE BANACH SATISFAIT AU CRITÈRE DE CAUCHY, CETTE FAMILLE EST SOMMABLE.

Démonstration. — Donnons-nous une suite décroissante :

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n, \ldots \qquad \text{avec } \lim \varepsilon_n = 0$$

et à chaque ε_n faisons correspondre la partie J_o^n définie comme précédemment. On peut choisir ces parties de façon telle que :

$$\forall n \qquad J_o^n \subset J_o^{n+1}.$$

(Si on trouve *a priori* pour ε_{n+1} une partie finie qui ne contienne pas J_o^n on pourra toujours lui ajouter J_o^n ce qui donnera une autre partie finie jouissant de la même propriété que J_o^{n+1}). Dans ce cas, la suite $\{ S_{J_o^n} \}$ est une suite de Cauchy d'éléments de l'espace, car :

$$\forall \varepsilon \qquad \exists N \qquad \varepsilon_N < \varepsilon$$

donc : $\quad \forall \varepsilon \qquad \exists J_o^n \qquad \forall K \in \mathcal{P}_f(I) \qquad K \cap J_o^n = \emptyset \implies \|S_K\| < \varepsilon.$

Or, si $n > N$ et $m > N$, $\|S_{J_o^n} - S_{J_o^m}\|$ représente la norme de la somme associée à une partie finie, disjointe de J_o^n, donc est inférieure à ε.

La suite $\{ S_{J_o^n} \}$, suite de Cauchy d'un espace complet, converge vers un élément S. Il suffit alors de fixer $n = N + 1$ et de faire tendre m vers l'infini pour voir que :

$$\|S - S_{J_o^{N+1}}\| \leqslant \varepsilon. \qquad (1)$$

Soit alors une partie finie $J \supset J_o^{N+1}$. La définition de J_o^N entraîne, puisque $J_o^{N+1} \supset J_o^N$:

$$\|S_J - S_{J_o^{N+1}}\| < \varepsilon_N < \varepsilon$$

ce qui, rapproché de (1), donne :

$$\|S - S_J\| < 2\varepsilon.$$

Nous avons donc (ε étant quelconque) :

$$\forall \varepsilon \qquad \exists J_o^N \qquad \forall J \in \mathcal{P}_f(I) \qquad J \supset J_o^N \implies \|S - S_J\| < \varepsilon$$

la famille est bien sommable de somme S.

Nous en déduisons d'abord : *Dans un espace de Banach, toute partie d'une famille sommable est sommable.*

Soit $L \subset I$; la famille $\{ a_i \,;\, i \in L \}$ satisfait au critère de Cauchy ; en effet, la famille initiale $\{ a_i \,;\, i \in I \}$ y satisfait ; soit J_o la partie finie associée à un ε donné ; considérons $L_o = J_o \cap L$ qui est fini. Soit alors $H \in \mathcal{P}_f(L) \subset \mathcal{P}_f(I)$ une quelconque partie finie disjointe de L_o, donc de J_o. En vertu de l'hypothèse relative à la famille initiale $\|S_H\| < \varepsilon$, ce qui établit que la famille restreinte satisfait au critère, donc est sommable si elle appartient à un espace complet.

Remarque : Il faut bien noter que cette propriété exige que l'espace soit complet. Prenons par exemple pour famille sommable dans **Q** la famille indexée par **Z** et définie par :

$$a_o = 4 \qquad \text{et} \qquad \forall n \neq 0 \qquad a_n = \frac{sgn\, n}{|n|\,!}.$$

On peut faire une partition de la famille en éléments indexés par les entiers $\geqslant 0$ et en éléments indexés par les entiers < 0. La première sous-famille n'est pas sommable puisque la somme d'une partie finie diffère aussi peu que l'on veut de $(3 + e)$ qui n'appartient pas à Q ; la deuxième qui diffère aussi peu que l'on veut de $(1 - e)$ n'est, de même, pas sommable. Pourtant, la famille entière est sommable de somme 4 puisque, pour tout ε, il existe N tel que, si on considère la partie finie :

$$J_o = \{ n \,;\, |n| < N \},$$

on puisse affirmer :

$$\forall J \supset J_o \qquad |S_J - 4| < \varepsilon.$$

Associativité des familles sommables dans un espace de Banach.

— Nous pouvons maintenant, en supposant que nous nous plaçions dans un espace de Banach, compléter le théorème relatif à l'associativité des familles sommables : Si une famille $\{ a_i \,;\, i \in I \}$ est sommable de somme S et si on fait encore une partition de la famille en sous-familles indexées par $\{ I_\lambda \,;\, \lambda \in \Lambda \}$, nous pourrons, en vertu de ce qui précède, conclure, sans qu'il soit besoin d'une autre hypothèse, que chaque famille $\{ a_i \,;\, i \in I_\lambda \}$ est sommable et, nous retrouvant alors dans les hypothèses du théorème précédemment démontré, que la famille de leurs sommes est sommable de somme S.

4. Familles absolument sommables.

On appelle ainsi une famille $\{ a_i \,;\, i \in I \}$ telle que la famille des normes des a_i soit sommable.

● *Si, dans un espace de Banach, une famille est absolument sommable, elle est sommable.*

En effet, dire qu'elle est absolument sommable, c'est dire que :

$$\forall \varepsilon \qquad \exists J_o \qquad \forall K \in \mathcal{P}_f(I) \qquad K \cap J_o = \emptyset \implies \sum_{i \in K} \|a_i\| < \varepsilon.$$

Or, $\|S_K\| < \sum_{i \in K} \|a_i\|$; donc, la famille $\{ a_i \,;\, i \in I \}$ satisfait au critère de Cauchy et est sommable.

Exercice 61. — Trouver un contre-exemple établissant que cette propriété n'est pas exacte si l'espace n'est pas complet.

Inversement, une famille sommable n'est généralement pas absolument sommable, mais elle l'est dans $\mathbf{R}^n$ ou $\mathbf{C}^n$; c'est ce que nous allons établir maintenant.

● *Si une famille $\{ a_i \,;\, i \in I \}$ de nombres réels est sommable, elle est absolument sommable.*

En effet, les sous-familles formées respectivement par les a_i positifs et les a_i négatifs sont sommables puisque **R** est complet. Or, ces deux familles peuvent être indexées par I si l'on pose :

$$\begin{aligned} a_i^+ &= a_i \quad \text{si} \quad a_i \geqslant 0 \qquad & a_i^- &= a_i \quad \text{si} \quad a_i \leqslant 0 \\ &= 0 \quad \text{si} \quad a_i < 0 & &= 0 \quad \text{si} \quad a_i > 0 \end{aligned}$$

on a alors :

$$a_i = a_i^+ + a_i^-$$
$$|a_i| = a_i^+ - a_i^-$$

La famille $\{ |a_i| \,;\, i \in I \}$ somme des deux familles sommables $\{ a_i^+ \}$ et $\{ -a_i^- \}$ est donc sommable.

● *Si une famille $\{ a_i \,;\, i \in I \}$ de vecteurs de $\mathbf{R}^n$ est sommable, elle est absolument sommable.*

Toutes les normes de $\mathbf{R}^n$ étant équivalentes (cf. VIII. 1. 7), il suffit de le démontrer pour une quelconque des normes de $\mathbf{R}^n$. Si

$x = (x^1, x^2, \ldots, x^n)$, nous prendrons comme norme $\|x\| = \sum_{p=1}^{n} |x^p|$

qui sera, ici, la plus commode.
Si la famille $\{ a_i \}$ est sommable, il en est de même de la famille $\{ a_i^p \,;\, i \in \mathrm{I} \}$ des *p-ièmes* projections, puisque la projection est une application linéaire et continue. Donc, les familles $\{ a_i^p \,;\, i \in \mathrm{I} \}$ sont

sommables, donc absolument sommables, et la famille $\{ \sum_{p=1}^{n} |a_i^p| \,;\, i \in \mathrm{I} \}$,

c'est-à-dire $\{ \|a_i\|, i \in \mathrm{I} \}$, est aussi sommable, comme somme (dans l'espace $\mathcal{S}$ des familles sommables réelles indexées par I) de familles sommables.
La propriété s'étend à $\mathbf{C}^n$, la sommabilité y étant la même que dans $\mathbf{R}^{2n}$.
Il résulte de ceci que, dans $\mathbf{C}$ en particulier, les notions de suite sommable, suite absolument sommable, suite dont les termes constituent une série absolument convergente, se confondent ; [puisqu'il suffit que la série des modules soit convergente pour que la famille de ses termes soit sommable].

Exercice 62. — Soit une série de terme général a_n ($n \in \mathbf{N}$), où a_n est un élément d'un espace vectoriel normé E.
La série est dite *commutativement convergente* si, quelle que soit la bijection φ de $\mathbf{N}$ sur $\mathbf{N}$, la série $b_n = a_{\varphi(n)}$ est convergente. Montrer que la condition nécessaire et suffisante pour que la série (a_n) soit commutativement convergente est que la famille $\{ a_n \,;\, n \in \mathbf{N} \}$ soit sommable.

Exercice 63. — Si $\{ a_i \,;\, i \in \mathrm{I} \}$ et $\{ b_j \,;\, j \in \mathrm{J} \}$ sont deux familles sommables de nombres complexes, la famille $\{ a_i b_j \,;\, (i, j) \in \mathrm{I} \times \mathrm{J} \}$ est sommable et a pour somme le produit des sommes.

CHAPITRE IX

ESPACES DE HILBERT

§ 1. RAPPEL DES NOTIONS FONDAMENTALES

1. Définitions.

Rappelons les définitions suivantes données dans le *Cours A.P.M. II* (IX, 6) : Une forme *sesquilinéaire* est une application

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{E} \times \mathrm{E} & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ (x, y) & & (x|y) \end{array} \quad \text{noté aussi } < x, y >$$

qui satisfait aux conditions suivantes :
a) être *linéaire en x*

$$\begin{cases} (x + x'|y) = (x|y) + (x'|y) & (1) \\ (\lambda x|y) = \lambda(x|y) & (2) \end{cases}$$

b) jouir de la *symétrie hermitienne,* c'est-à-dire vérifier :

$$(x|y) = \overline{(y|x)} \qquad (3)$$

Les conditions (3) et (1) entraînent : $(x|y + y') = (x|y) + (x|y')$ (4)

Les conditions (3) et (2) entraînent : $(x|\lambda y) \quad = \overline{\lambda}(x|y)$ (5)

Une forme qui jouit des propriétés (4) et (5) est dite *semi-linéaire en y* ; une forme linéaire en x et semi-linéaire en y est dite sesquilinéaire. Une forme qui jouit de l'ensemble de ces cinq propriétés (ensemble dont l'énoncé est surabondant comme on vient de le voir) est dite *sesquilinéaire-hermitienne.*

La condition (3) entraîne que $(x|x)$ est réel. Si l'application

$$x \in \mathrm{E} \longrightarrow (x|x) \in \mathbf{R}$$

est telle que :

$$\forall x \in \mathrm{E} \qquad (x|x) \geqslant 0$$

et $\qquad (x|x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = 0,$

cette application est dite *définie positive* ou *non dégénérée positive.*

On peut alors montrer que $\sqrt{(x|x)} = \|x\|$ jouit des propriétés d'une norme (cf. *A.P.M. II*, exercice 56).

Nous dirons alors :

Un espace préhilbertien complexe est un espace vectoriel sur $\mathbf{C}$ *sur lequel est définie une forme sesquilinéaire hermitienne appelée produit scalaire, telle que le carré scalaire soit une forme définie positive. Si, pour la norme définie comme racine du carré scalaire, l'espace préhilbertien est complet, il est qualifié d'espace hilbertien.*

Rappelons encore l'inégalité de Schwarz (*A.P.M. II,* exercice 56) dont on a déduit :

$$\left|(x|y)\right| \leqslant \|x\|.\|y\|.$$

On trouve encore, en écrivant :

$$(x+y \mid x+y) = (x|x) + 2\,\mathcal{R}\,(x|y) + (y|y)$$
$$(x-y \mid x-y) = (x|x) - 2\,\mathcal{R}\,(x|y) + (y|y)$$

que :

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\,\|x\|^2 + 2\,\|y\|^2.$$

On peut aussi considérer des espaces de Hilbert réels et des espaces préhilbertiens réels (cf. *A.P.M. II,* IX, 4). Le produit scalaire y est défini comme la valeur d'une forme bilinéaire et symétrique associée à une forme quadratique définie positive. La quantité $\dfrac{(x|y)}{\|x\|.\|y\|}$, de valeur absolue inférieure ou égale à 1, est alors appelée *cosinus de l'angle des deux vecteurs x et y.*

2. Complétion d'un espace préhilbertien.

Le complété $\widehat{E}$ (cf. VIII. 1. 2) d'un espace préhilbertien E peut recevoir une structure d'espace de Hilbert, car il est possible de prolonger à $\widehat{E}$ le produit scalaire de E avec conservation de ses propriétés.

En effet, nous savons déjà que la norme de E se prolonge à $\widehat{E}$, la norme de $x \in \widehat{E}$ étant la limite de $\{\|x_n\|\}$, si $\{x_n\}$ est la suite de points de E dont x est la limite.

D'autre part, si x et y sont les limites des suites $\{x_n\}$ et $\{y_n\}$ de E, on peut remarquer que $\{(x_n|y_n)\}$ est elle-même une suite de Cauchy car :

$$\left|(x_n|y_n) - (x_m|y_m)\right| = \left|(x_n - x_m|y_n) + (x_m|y_n - y_m)\right|$$
$$\leqslant \|x_n - x_m\|.\|y_n\| + \|x_m\|.\|y_n - y_m\|.$$

Or, $\|y_n\|$ et $\|x_m\|$ sont bornés ; $\|x_n - x_m\|$ et $\|y_n - y_m\|$ sont inférieurs à ε arbitraire pour n et m supérieurs à N assez grand ; $(x_n|y_n)$ est donc le terme général d'une suite de Cauchy de **R** ou **C**. Cette suite converge vers un nombre que nous noterons $(x|y)$.

Il est alors immédiat que $\|x\| = \lim_n \|x_n\| = \lim_n (x_n|x_n) = (x|x)$. Immédiat aussi, par passage à la limite, que toutes les propriétés (sesquilinéarité, symétrie hermitienne) du produit scalaire sur E s'étendent à la forme $(x, y) \in \widehat{E} \times \widehat{E} \longrightarrow (x|y) \in \mathbf{C}$, que cette forme est donc un produit scalaire et $\widehat{E}$ un espace de Hilbert.

§ 2. PROJECTION SUR UN CONVEXE FERME

1. Théorème de F. Riesz.

Etant donnés, dans un espace de Hilbert, un vecteur a et un ensemble convexe fermé C, il existe $a' \in$ C unique tel que

$$\|a - a'\| = d(a, C) \qquad \text{(cf. VII. 1. 1).}$$

Remarquons que, les translations de l'espace affine respectant les distances, il suffit d'établir ce théorème quand a est le zéro de l'espace vectoriel.

Soit donc un convexe fermé C ; si $0 \in C$, le théorème est évident. Supposons donc que $0 \notin C$ et soit :

$$d = d(0, C) = \inf\,\{\|x\|\ ;\ x \in C\},$$

nombre strictement positif.

Considérons alors la boule fermée de centre 0 et de rayon $d+\varepsilon$ (avec $\varepsilon \in \mathbf{R}^+$) et considérons son intersection avec C :

$$A_\varepsilon = C \cap \overline{B}(0, d+\varepsilon)$$

qui est non vide et convexe fermée, comme intersection de deux convexes fermés. A_ε n'est réduit à un point que si C l'est lui-même, auquel cas le théorème est vérifié. Si A_ε a plus d'un point, soient x et y deux d'entre eux. On peut écrire :

$$\|x-y\|^2 = 2\,\|x\|^2 + 2\,\|y\|^2 - 4\,\left\|\frac{x+y}{2}\right\|^2.$$

Mais A_ε étant convexe, $\dfrac{x+y}{2}$ lui appartient, donc $\dfrac{\|x+y\|}{2}$ est minoré par d et $\|x-y\|^2$ est majoré par :

$$4\,(d+\varepsilon)^2 - 4\,d^2 = 4\varepsilon\,(\varepsilon + 2\,d),$$

ce qui signifie que le diamètre de l'ensemble A_ε tend vers zéro avec ε.

Mais alors, si on prend une suite de valeurs de ε, décroissante et de limite zéro, la famille des ensembles A_ε qu'elle définit est une suite décroissante de fermés dont le diamètre tend vers zéro ; en vertu du théorème établi en VII. 2. 4, l'intersection de cette famille est un point a'. Ce point est à une distance de 0 comprise entre d et $(d+\varepsilon)$, quel que soit ε, donc à une distance d de 0.

Revenant au cas où a est un point quelconque, nous appellerons, *projection de a sur le convexe* C, le point a' dont on vient d'établir l'existence.

Conséquence. — Considérons un autre point de C que nous désignons par $a'+y$; le point a' est caractérisé par le fait que pour tout y et tout $a'+y \in C$, on ait :

$$\|a'-a\| < \|a'-a+y\|.$$

En élevant au carré les deux membres de cette inégalité stricte, on trouve :

$$\|a'-a\|^2 < \|a'-a\|^2 + 2\,\mathcal{R}\,(a'-a \mid y) + \|y\|^2$$

ou

$$2\,\mathcal{R}\,(a'-a \mid y) + \|y\|^2 > 0,$$

mais C étant convexe, cette inégalité doit être vérifiée par tout point $a'+\lambda y$ avec $0 < \lambda \leqslant 1$, ce qui exige :

$$\forall \lambda \in]0, 1] \qquad 2\,\mathcal{R}\,(a'-a \mid y) + \lambda\,\|y\|^2 > 0.$$

Ceci n'est possible que si :

$$\mathcal{R}\,(a'-a \mid y) \geqslant 0$$

et, réciproquement, ceci entraîne $2\,\mathcal{R}\,(a'-a \mid y) + \|y\|^2 > 0$.

La condition « $\mathcal{R}\,(a'-a \mid y) \geqslant 0$ *pour tout* y *tel que* $a'+y \in C$ » *est donc nécessaire et suffisante pour que* a' *soit la projection de* a *sur* C.

Dans le cas d'un espace hilbertien réel, cette condition prend la forme :

$$(a'-a \mid y) \geqslant 0,$$

ce qui peut s'exprimer en disant que l'angle du vecteur aa' et de tout vecteur joignant a' à un point de C est aigu ou droit.

Exercice 64. — Etant donné un convexe fermé montrer que si a et b ont pour projection a' et b'

$$\|a' - b'\| < \|a - b\|.$$

2. Projection orthogonale sur une variété affine fermée.

Supposons maintenant que le *convexe* C soit un sous-espace vectoriel fermé ou, plus généralement, *une variété affine fermée.*

Si y appartient au sous-espace vectoriel V parallèle à la variété $(a' + y \in C)$, $-y$ lui appartient aussi $(a' - y \in C)$. On doit donc avoir :

$$\mathcal{R}(a' - a \mid y) \geqslant 0 \qquad \mathcal{R}(a' - a \mid (-y)) \geqslant 0,$$

d'où :

$$\mathcal{R}(a' - a \mid y) = 0.$$

De cela nous allons déduire que le produit scalaire $(a' - a \mid y)$ est lui-même nul. Posons :

$$(a' - a \mid y) = \rho e^{i\theta}.$$

Le produit de y par un complexe appartient encore à V ; donc :

$$(a' - a \mid e^{i\theta} y) = 0.$$

Or,

$$(a' - a \mid e^{i\theta} y) = e^{-i\theta}(a' - a \mid y) = \rho.$$

On en déduit que $\rho = 0$.

Le vecteur joignant a à sa projection sur la variété est orthogonal à tous les vecteurs parallèles à la variété. Il s'agit bien d'une généralisation de la notion géométrique de projection orthogonale.

3. Sous-espaces supplémentaires orthogonaux.

Soit E un espace de Hilbert et V un sous-espace vectoriel fermé. Considérons un vecteur $x \in E$ et x_v sa projection sur V ; on écrit :

$$x - x_v \perp V$$

pour exprimer le fait que $x - x_v$ est orthogonal à tous les vecteurs de V. On peut écrire aussi :

$$x = x_v + x_w \text{ avec } x_w \in V^{\perp}$$

en notant $V^{\perp}$ (ou, plus généralement, $A^{\perp}$, si A est une partie quelconque de E) l'ensemble des éléments de E orthogonaux à tous les éléments de V (resp. A), conformément à la notation introduite dans le *Cours A.P.M. II* (IV. 2 et IX. 2. 3). On a démontré alors que $V^{\perp}$ (resp. $A^{\perp}$) était toujours un sous-espace vectoriel de E [on le retrouve d'ailleurs ici, en remarquant que $(u_1 \mid x) = 0$, $(u_2 \mid x) = 0$ entraîne $(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 \mid x) = 0$ pour tout $x \in A$ et pour tout couple (u_1, u_2) d'éléments de $A^{\perp}$].

Mais ici nous pouvons ajouter cette précision que $A^{\perp}$ *est un sous-espace vectoriel fermé.* En effet, l'inégalité de Schwarz :

$$|(u|x) - (u_0|x)| = |(u - u_0|x)| \leqslant \|u - u_0\| \cdot \|x\|$$

prouve que l'application $u \longrightarrow (u|x)$ est continue

$$\left(\text{puisque } \|u - u_0\| < \frac{\varepsilon}{\|x\|} \text{ entraîne } |(u|x) - (u_0|x)| < \varepsilon\right).$$

Un point u_0 de $A^{\perp}$, qui est la limite d'une suite (u_n) de points de $A^{\perp}$, est alors lui-même un point de $A^{\perp}$ car, si pour tout n, $(u_n|x) = 0$, alors $\lim (u_n|x) = (u_0|x) = 0$.

Le fait qu'on se trouve dans un espace de Hilbert et que l'on n'y considère que des sous-espaces vectoriels fermés va nous permettre de **montrer que deux *sous-espaces orthogonaux fermés sont supplémentaires*** et d'en déduire *la réciprocité entre sous-espaces orthogonaux fermés.*

On a vu, en effet, que tout $x \in E$ pouvait se mettre sous la forme :

$$x = x_v + x_w \qquad x_v \in V \qquad x_w \in V^{\perp}.$$

D'autre part, $V \cap V^{\perp} = \{0\}$ car, si x appartient à $V \cap V^{\perp}$, il vérifie $(x|x) = 0$, donc $x = 0$. On peut donc écrire :

$$E = V \oplus V^{\perp}.$$

Si l'on pose alors $W = V^{\perp}$, l'espace E est de même égal à $W \oplus W^{\perp}$. Les sous-espaces V et $W^{\perp}$ sont supplémentaires d'un même sous-espace et $W^{\perp} \supset V$; il en résulte que $W^{\perp} = V$. W est dit *supplémentaire orthogonal* de V. Notons enfin que de la nullité de $(x_v|x_w)$, on déduit :

$$\|x\|^2 = \|x_v\|^2 + \|x_w\|^2.$$

Pour une partie quelconque A, on peut encore considérer les parties $A^{\perp}$, $A^{\perp\perp}$, $A^{\perp\perp\perp}$, (avec $A^{\perp\perp\perp} = A^{\perp}$).

$A^{\perp\perp}$ est un sous-espace vectoriel fermé qui contient A ; c'est le plus petit car, si H est le plus petit sous-espace vectoriel fermé contenant A, d'une part, $H \supset A$ implique $H^{\perp\perp} = H \supset A^{\perp\perp}$, et, d'autre part, $A^{\perp\perp}$ étant un sous-espace vectoriel fermé qui contient A, $A^{\perp\perp} \supset H$, donc $H = A^{\perp\perp}$.

§ 3. DUAL TOPOLOGIQUE D'UN ESPACE DE HILBERT

Nous allons démontrer la propriété suivante :

Le dual topologique E′ *d'un espace de Hilbert* (*réel ou complexe*) *est isométrique et algébriquement isomorphe à cet espace* (en un sens qui va être précisé.

Nous avons déjà vu ci-dessus (avec d'autres notations) que l'application $x \longrightarrow (x|y_0)$ satisfaisant à :

$$\left|(x|y_0)\right| \leqslant \|y_0\| \; \|x\|$$

était une forme linéaire et continue. Sa norme, qui d'après cette inégalité est au plus égale à $\|y_0\|$, vaut exactement $\|y_0\|$ en vertu de :

$$(y_0|y_0) = \|y_0\|^2.$$

Nous allons montrer maintenant que tous les éléments de E′ sont de cette forme. Soit $f \in E'$ une forme linéaire et continue non nulle. Son noyau $\overset{-1}{f}(0)$ est un sous-espace vectoriel de co-dimension 1, fermé, car l'image réciproque d'un point de **C** par une application continue est fermée. Soit H cet hyperplan et K son supplémentaire orthogonal qui est de dimension 1, donc de la forme $\{\lambda a \; ; \; \lambda \in \mathbf{C}\}$. Pour tout x de E, on a :

$$x = x_H + x_K, \quad x_H \in H, \quad x_K \in K$$

$$f(x) = f(x_K).$$

Or, x_K peut être évalué en fonction de $(x|a)$. En effet :

$$(x|a) = (x_K|a) = (\lambda a|a) = \lambda \|a\|^2.$$

D'où :

$$x_K = \lambda a = \frac{(x|a)\ a}{\|a\|^2}.$$

$(x|a)$ et $\|a\|^2$ étant des scalaires, on peut en déduire :

$$f(x) = f\left(\frac{(x|a)\ a}{\|a\|^2}\right) = \frac{(x|a)}{\|a\|^2}\ f(a) = (x|y),$$

à condition de poser :

$$y = \frac{f(a)}{\|a\|^2}\ a.$$

Donc, à toute forme linéaire et continue sur E, on peut associer un élément $y \in$ E tel que :

$$\forall x \qquad f(x) = (x|y).$$

Il y a donc une bijection entre les éléments de E *et ceux de* E'.

Cette bijection est une isométrie puisque $\|f\| = \|y\|$.

Il est facile de vérifier *qu'elle respecte la somme.* Soient f_{y_1} et f_{y_2} les formes associées à y_1 et y_2 :

$$(f_{y_1} + f_{y_2})(x) = (x|y_1) + (x|y_2) = (x|y_1 + y_2) = f_{y_1+y_2}(x).$$

En outre :

$$(\lambda f_y)(x) = \lambda(x|y) = (x|\bar{\lambda}y) = f_{\bar{\lambda}y}(x).$$

La bijection $y \longrightarrow f_y$ est donc semi-linéaire. On la qualifie parfois d'anti-isomorphisme. On peut aussi la considérer comme un isomorphisme de E sur $\overline{\text{E}'}$, ce symbole désignant le dual topologique de E, muni de la structure d'espace vectoriel qu'on a définie dans *A.P.M. II* (IX, 6, 2). Bien entendu, dans le cas d'un espace de Hilbert réel, la bijection $y \longrightarrow f_y$ est un isomorphisme ordinaire pour la structure d'espace vectoriel.

Remarquons la grande analogie de ce qui précède avec ce que nous avons fait pour les espaces vectoriels quelconques sur **R**, sur lesquels était définie une forme bilinéaire symétrique (*A.P.M., II*, IX, 2, 3), et pour les espaces vectoriels sur **C**, sur lesquels était définie une forme sesquilinéaire hermitienne (IX, 6, 2). La considération de l'application $y \longrightarrow g_y$, définie exactement comme l'a été, ici, $y \longrightarrow f_y$, avait alors permis d'établir une correspondance entre E et son dual algébrique. Cette correspondance était un isomorphisme dans le cas où E était de dimension finie n et où la forme quadratique associée à la forme bilinéaire était de rang n. Mais si la forme quadratique n'était pas de rang n, il existait des vecteurs non nuls orthogonaux à tous les vecteurs de l'espace et il en résultait que l'application $y \longrightarrow g_y$ n'était pas injective. D'autre part, dans un espace de dimension infinie, les formes linéaires du type g_y ne sont pas les seules qui existent et l'application n'était pas surjective. Ici, au contraire, la forme quadratique $(x|x)$ est définie positive et l'application $y \longrightarrow f_y$ est injective, et, d'autre part, sur l'espace E' des formes continues, elle est également surjective, comme nous venons de le montrer. Le dual topologique d'un espace de Hilbert E apparaît donc comme un sous-espace, *isomorphe à* E, du dual algébrique.

Une conséquence de la possibilité d'identifier E et son dual, au moyen de l'isomorphisme précédent, est la réciprocité entre les sous-espaces orthogonaux fermés. Dans le cours *A.P.M. II,* nous n'avons obtenu cette réciprocité que pour des espaces de dimension finie, entre

sous-espaces de E et de son dual d'abord, puis entre sous-espaces de E, après avoir procédé à l'identification, au moyen de l'application $y \longrightarrow g_y$. Le résultat obtenu ici est plus général en ce sens qu'il s'applique à un espace de dimension infinie, moins général en ce sens qu'il exige que la forme linéaire servant à l'identification dérive d'une forme définie positive, alors que, pour les espaces de dimension finie, il nous avait suffi d'une forme de rang n. Notons enfin que, dans les deux cas, il s'agit de sous-espaces vectoriels fermés, ceux d'un espace topologique de dimension finie l'étant toujours, quelle que soit la topologie.

§ 4. FAMILLES ORTHONORMEES DANS UN ESPACE DE HILBERT

1. Définition. Familles maximales.

Une famille $\{ e_i ;\ i \in \mathrm{I}) \}$ est orthonormée, si elle satisfait à :

$$\forall i \qquad \|e_i\| = 1 \qquad \text{et} \qquad i \neq j \implies (e_i|e_j) = 0.$$

Une telle famille est une famille topologiquement libre. En effet, une suite de vecteurs appartenant au sous-espace vectoriel engendré par $\{ e_i ;\ i \in \mathrm{I} - \{ i_0 \} \}$, c'est-à-dire une suite de vecteurs de la forme $v_n = \sum \lambda^j e_j$, j décrivant une partie finie J_n de $\mathrm{I} - \{ i_0 \}$, ne peut pas avoir pour limite e_{i_0}, car $(e_{i_0}|v_n)$, qui est nul pour tout n, devrait, en vertu de la continuité du produit scalaire, avoir pour limite $(e_{i_0}|e_{i_0})$ qui vaut 1.

Remarquons que l'ensemble des familles (ou systèmes) orthonormées d'un espace de Hilbert, ordonné par inclusion, est inductif. En effet, un ensemble totalement ordonné de familles orthonormées est majoré par sa réunion (tous les éléments ont pour norme 1 et, étant donnés deux éléments de la réunion, il existe une des familles qui les contient tous les deux, donc ils sont orthogonaux).
En vertu du théorème de Zorn, *il existe donc une famille orthonormée maximale.*

Considérons n vecteurs constituant une famille orthonormée. Le produit scalaire $(x|e_i) = x^i$ est appelé *coordonnée du vecteur* x *par rapport à* e_i, et $x_i = x^i e_i$ est la *composante du vecteur* x *sur* e_i. Le vecteur $y = x - \sum_{i=1}^{n} x_i$ est orthogonal à tous les e_i, car :

$$\forall i \qquad (y|e_i) = (x|e_i) - x^i(e_i|e_i) = 0.$$

Il en résulte que y est orthogonal à tout vecteur du sous-espace vectoriel engendré par les e_i. Donc, $\sum_{i=1}^{n} x_i$ est la projection de x sur ce sous-espace. D'autre part, y étant, en particulier, orthogonal à $\sum_{i=1}^{n} x_i$, il en résulte que :

$$\|x\|^2 = \|\sum_{i=1}^{n} x_i\|^2 + \|y\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2 + \|y\|^2.$$

Or :

$$\|x_i\|^2 = (x^i e_i|x^i e_i) = x^i\ \overline{x^i}(e_i|e_i) = \|x^i\|^2.$$

D'où :

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 + \|y\|^2.$$

Il en résulte que si $\{ e_i \; ; \; i \in I \}$ est une famille orthonormée, pour toute partie finie J de I, on peut écrire :

$$\sum_{i \in J} |x^i|^2 < \|x\|^2.$$

Les sommes $\sum_{i \in J} |x^i|^2$ sont. pour tout $J \in \mathcal{P}_f(I)$, majorées par $\|x\|^2$ et il en résulte que ces sommes ont un plus petit majorant et qu'on peut en déduire que la famille $\{ |x^i|^2 \; ; \; i \in I \}$ est sommable, de somme ce plus petit majorant.

2. Propriétés des familles maximales.

Ces considérations nous amènent au théorème suivant :

Théorème. — Les six propositions suivantes, relatives a une famille orthonormée $\{ e_i \}$ d'un espace de Hilbert, sont équivalentes :

(a) $\{ e_i \}$ *est maximale.*
(b) $(\forall i \quad (x|e_i) = 0) \implies x = 0$.
(c) *Le sous-espace vectoriel fermé engendré par* $\{ e_i \}$ *est* E.
(d) $\forall x$, *x est la somme de la famille sommable* $\{ x_i \; ; \; i \in I \}$.
(e) $\forall x$, *$\|x\|^2$ est la somme de la famille sommable* $\{ \|x_i\|^2 \; ; \; i \in I \}$.
(f) $\forall (x, y)$, *$(x|y)$ est la somme de la famille sommable* $\{ (x_i|y_i) \; ; \; i \in I \}$:

$$(x|y) = \sum \{ (x_i|y_i) \; ; \; i \in I \} = \sum \{ x^i \bar{y}^i \; ; \; i \in I \}.$$

Démonstration :

• **(a) $\implies$ (b),** car si $\{ e_i \}$ est maximale, il ne peut exister de x non nul orthogonal à tous les e_i.

• **(b) $\implies$ (c).** Si le sous-espace vectoriel fermé engendré par les e_i n'était pas E, l'existence d'éléments non nuls dans son supplémentaire orthogonal contredirait l'hypothèse.

• **(c) $\implies$ (d).** Soit V le plus petit sous-espace vectoriel engendré par les e_i ; l'hypothèse signifie que $\overline{V} = E$, c'est-à-dire que, pour tout $x \in E$, il existe une suite de points de V qui converge vers x, c'est-à-dire que pour tout ε on peut trouver une partie finie J_0 de I et des scalaires λ^i tels que :

$$\|x - \sum_{i \in J_0} \lambda^i e_i\| < \varepsilon. \tag{1}$$

Mais la quantité $\|x - \sum_{i \in J_0} \lambda^i e_i\|$ représente la norme du vecteur qui joint x à un point du sous-espace vectoriel H_0 engendré par $\{ e_i \; ; \; i \in J_0 \}$, sous-espace vectoriel fermé, puisque de dimension finie. En vertu du théorème de Riesz, la distance d'un point à ce sous-espace admet un minimum strict qui est la distance du point à sa projection sur ce sous-

espace. S'il existe une famille de λ^i, associée à la partie J_0, telle que l'on ait (1), on aura donc, *a fortiori*, (1) pour la famille où $\lambda^i = x^i = (x|e_i)$ et on peut écrire :

$$\forall x \quad \forall \varepsilon \quad \exists J_0 \in \mathcal{P}_f(I) \quad \|x - \sum_{i \in J_0} x_i\| < \varepsilon.$$

Or, si $J \supset J_0$, si y_0 désigne $x - \sum_{i \in J_0} x_i$ et si y_J désigne $x - \sum_{i \in J} x_i$, on a :

$$y_0 = y_J + \sum_{i \in J - J_0} x_i.$$

D'où il résulte que $\|y_0\|^2 > \|y_J\|^2$ et par conséquent $\|y_0\| > \|y_J\|$.

Donc :

$$\forall J \supset J_0 \quad \|x - \sum_{i \in J} x_i\| < \varepsilon. \tag{2}$$

C'est dire que la famille $\{ x_i \}$ est sommable de somme x.

• **(d) $\implies$ (a).** En effet, si $\{ e_i \}$ n'était pas maximale, il existerait un élément non nul orthogonal à tous les e_i et il ne pourrait être la somme de la famille sommable de ses composantes sur les e_i qui seraient toutes nulles.

L'équivalence des quatre premières propositions est établie.

• D'autre part, **(c) $\implies$ (e).** Reprenons la démonstration de « **(c) $\implies$ (d)** ».

Avec les notations introduites, on peut écrire :

$$\forall x \quad \forall \varepsilon \quad \exists J_0 \in \mathcal{P}_f(I) \quad \forall J \supset J_0 \quad \|y_J\| < \varepsilon. \tag{2bis}$$

mais ceci entraîne :

$$\|y_J\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{i \in J} |x_i|^2 < \varepsilon^2. \tag{3}$$

ce qui indique que la famille $\{ |x^i|^2 \}$ est sommable de somme $\|x\|^2$.

Inversement, **(e) $\implies$ (c),** car la condition (3) entraîne (2^{bis}) ou (2) qui signifie que, tout $x \in E$ est la limite d'une suite d'éléments de V, c'est-à-dire que $\overline{V} = E$.

• Enfin, **(e) $\iff$ (f).** En effet, de même que :

$$\mathcal{R}(x|y) = \frac{\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2}{4},$$

on montre sans peine que $\mathcal{I}(x|y)$, partie imaginaire du produit scalaire $(x|y)$, est donnée par :

$$\mathcal{I}(x|y) = \frac{i \, \|ix - y\|^2 - \|ix + y\|^2}{4},$$

Il résulte alors de **(e)**, en vertu de la propriété relative à l'addition des familles sommables, que $(x|y)$ est la somme de la famille $(x_i|y_i)$.

Et, pour passer de **(f)** à **(e)**, il suffit de faire $y = x$. Toutes les équivalences se trouvent ainsi établies.

Remarquons que la propriété **e)** admet une réciproque : Si (x^i) est une famille de nombres complexes indexée par l'ensemble I qui indexe la famille orthonormée maximale et si $\{ |x^i|^2 \}$ est une famille sommable, il existe un élément x de l'espace de Hilbert admettant, pour tout i, x^i comme coordonnée sur e_i (et par conséquent pour norme la racine carrée de la somme de la famille). En effet, la sommabilité de la famille $\{ |x^i|^2 \}$ entraîne :

$$\forall \varepsilon \qquad \exists J_0 \in P_f(I) \qquad J \cap J_0 = \emptyset \implies \sum_{i \in J} |x^i|^2 = \| \sum_{i \in J} x^i e_i \|^2 < \varepsilon,$$

donc la sommabilité de la famille $\{ x^i e_i \}$.

Il y a donc une bijection entre l'ensemble des familles $\{ x^i ; i \in I \}$, *dont les carrés des modules forment une famille sommable, et l'ensemble des vecteurs de l'espace de Hilbert, dont un système orthonormé maximal est indexé par* I.

Cette bijection permet de donner une structure d'espace de Hilbert à l'ensemble des familles de carré sommable, en prenant pour valeur du produit scalaire de deux familles $\{ x^i ; i \in I \}$ et $\{ y^i ; i \in I \}$ le nombre $\{ \Sigma (x^i \bar{y}^i ; i \in I \}$, dont l'équivalence (*e*) $\iff$ (*f*), établie ci-dessus, garantit l'existence. On pourrait d'ailleurs démontrer directement l'existence de ce nombre, et en déduire la structure hilbertienne de l'espace des familles de carré sommable en étendant ce qui a été fait pour l^2 dans l'exercice 57.

3. Cardinaux des familles orthonormées maximales.

Dans le cas où un système orthonormé maximal a un nombre fini d'éléments, il constitue une base (au sens algébrique du terme) de l'espace de Hilbert, puisque c'est une partie libre qui engendre un sous-espace de dimension finie, donc complet, donc fermé, donc identique à l'espace entier en vertu de **(c)**. Il en résulte que, si un espace de Hilbert à un système orthonormé maximal fini, tout autre système orthonormé maximal aura même cardinal (car toutes les bases ont même cardinal) (1). Reste à savoir si, quand les cardinaux de deux systèmes orthonormés maximaux sont infinis, ces cardinaux sont encore égaux. La réponse est « oui ».

Pour justifier cette réponse, nous établirons d'abord la propriété suivante : *Etant donné un système orthonormé maximal infini d'un espace hilbertien* E, *il existe une partie de* E *dense sur* E, *de même cardinal que le système.*

Rappelons d'abord qu'une partie $A \subset E$ dense sur E (ou partout dense) est une partie dont l'adhérence $\bar{A}$ est E, ce qui, dans un espace métrique, se traduit par le fait que toute boule contient au moins un point de A.

Soit donc un système orthonormé maximal $\{ e_j ; j \in I \}$ de cardinal infini a. Considérons la partie :

$$A = \left\{ \sum_{j \in J} \lambda^j e_j \; ; \; J \in \mathcal{P}_f(I) \; ; \; \lambda^j \in \mathbf{Q} + i\mathbf{Q} \right\}$$

(où I désigne le nombre complexe bien connu), c'est-à-dire la famille des vecteurs qui sont des combinaisons linéaires finies de vecteurs du système, à coordonnées rationnelles complexes.

---

(1) Un système orthonormé maximal d'un espace de Hilbert en est une base topologique ; on le désigne souvent du nom de « *base orthonormée* » (ou orthonormale). Cette utilisation du mot base ne présente pas de danger sérieux, car ou bien l'espace est de dimension finie et nous venons de voir qu'une base orthonormée est une base algébrique, ou bien l'espace est de dimension infinie, et on n'aura alors pratiquement jamais recours aux bases algébriques.

Nous allons montrer successivement que $\bar{A} = E$ et que card $A = a$.

1° $\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{E}$. En effet, d'après la propriété **(d)**, pour tout $x_0 \in E$, il existe une partie J_0 telle que $\|y_{J_0}\|$ (notation indiquée ci-dessus) soit inférieure à ε.

Or, si $x = \{ \sum \lambda^j e_j ; j \in J_0 \}$, on a :

$$\|x - x_0\| = \|y_{J_0}\|^2 + \sum_{i \in J_0} |\lambda^j - x^j|^2.$$

Tout x^i peut être approximé par un rationnel λ^j avec une approximation arbitraire. Si J_0 a n éléments, il suffira de prendre, pour tout $j \in J_0$,

$\lambda^j - x^j < \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$ pour avoir $\|x - x_0\|^2 < 2\,\varepsilon^2$.

2° **Card A = *a*.** En effet, le choix d'un élément de A est celui d'une partie finie et des λ^j correspondants. Une partie finie étant choisie et ayant n éléments, le choix des λ^j rationnels complexes à lui associer est celui d'un élément de $\mathbf{Q}^{2n}$ dont le cardinal est $\aleph_0$. Cet ensemble de familles de λ^j peut donc être indexé par **N**, et ceci pour toutes les parties finies. Le choix d'un élément de A est alors celui d'un élément du produit cartésien $\mathcal{P}_f(I) \times \mathbf{N}$, c'est-à-dire, d'après la définition du produit de deux cardinaux et la règle $ab = sup\,(a, b)$.

$$\text{card } \mathcal{P}_f(I)\,\aleph_0 = \text{card } \mathcal{P}_f(I).$$

Quant à $\mathcal{P}_f(I)$, c'est la réunion des ensembles des parties finies à un élément, à deux éléments..., à n éléments... L'ensemble des parties finies de 1 à n éléments a un cardinal manifestement compris entre a et a^n, donc égal à a.

L'ensemble de toutes les parties finies est donc formé par une réunion dénombrable d'ensembles de cardinal a. Son cardinal est $a\aleph_0 = a$. Remarquons que si, dans ce raisonnement, nous remplaçons a par un cardinal fini, card $\mathcal{P}_f(I)$ devient un nombre fini et card $\mathcal{P}$ (I). $\aleph_0 = \aleph_0$; si donc, un espace de Hilbert a des systèmes orthonormés maximaux finis, il possède une partie dénombrable partout dense.

Démontrons maintenant que *tous les systèmes orthonormés maximaux d'un espace de Hilbert ont même cardinal*. Soit, dans un espace de Hilbert, un système orthonormé maximal T de cardinal c infini (la question a déjà été réglée dans le cas fini). Les points de T sont à une distance les uns des autres égale à $\sqrt{2}$ (puisque $[d(e_i, e_j)]^2 = \|e_i\|^2 + \|e_j\|^2 = 2$).

Il en résulte que la famille des boules $\left\{ B\left(e_i ; \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) ; i \in T \right\}$ forme une famille de parties deux à deux disjointes dont chacune contient un élément de T, donc de E. Tout ensemble dense sur E a donc au moins un point dans chacune de ces boules ; donc son cardinal est au moins égal à c. Si donc, E admet un autre système orthonormé maximal T', de cardinal infini c', le théorème précédent appliqué à T' permet d'affirmer que $c' \geqslant c$. Il suffit d'échanger les rôles de T et T' pour obtenir $c' \leqslant c$, donc $c' = c$.

§ 5. ESPACES DE HILBERT SATISFAISANT AU DEUXIEME AXIOME DE DENOMBRABILITE

1. Définition.

Nous avons vu plus haut que si le cardinal des systèmes orthonormés maximaux était fini ou dénombrable, l'espace possédait une partie dénombrable dense sur lui. Pour qualifier un espace topologique ayant une partie dénombrable dense sur lui, on a d'abord utilisé le terme de *séparable*, que l'on rencontre encore et qui survit grâce à sa brièveté, mais dont le rapprochement avec « séparé » est assez fâcheux, car un espace séparé peut n'être pas séparable, et un espace séparable peut n'être pas séparé. Beaucoup d'auteurs préfèrent introduire une propriété voisine, appelée 2ᵉ *axiome de dénombrabilité* qui s'énonce : *l'espace possède une base dénombrable des ouverts,* et qui est équivalente *à la séparabilité dans le cas des espaces métriques.*

Exercice 65. — *a)* Montrer que le 2ᵉ axiome de dénombrabilité implique la séparabilité.

b) Montrer qu'un espace métrique séparable vérifie le 2ᵉ axiome de dénombrabilité.

2. Procédé d'orthogonalisation de Schmidt.

Nous allons indiquer maintenant un procédé qui permet, étant donnée une partie dénombrable partout dense d'un espace de Hilbert, d'en extraire un système dénombrable (ou fini) orthonormé maximal. Ceci établira en même temps la réciproque de ce qui précède : tout espace séparable a des systèmes orthonormés maximaux de cardinal inférieur ou égal à $\aleph_0$, donc de conclure : *un espace de Hilbert est séparable si, et seulement si, le cardinal de ses systèmes orthonormés maximaux est inférieur ou égal à* $\aleph_0$.

Soient donc $(a_i\,;\ i \in \mathbf{N})$ une famille dénombrable partout dense d'éléments de l'espace de Hilbert E.

Soit a_{i_1} l'élément, de plus petit indice, différent de 0.

$$\text{Posons : } e_1 = \frac{a_{i_1}}{\|a_{i_1}\|}.$$

Ensuite, considérons l'élément a_{i_2}, de plus petit indice supérieur à i_1, et n'appartenant pas au sous-espace engendré par e_1 et posons :

$$b_2 = a_{i_2} - (a_{i_2}|e_1)e_1$$

puis $e_2 = \dfrac{b_2}{\|b_2\|}$.

$\{ e_1, e_2 \}$ est un système orthonormé.

On prend alors l'élément a_{i_3}, de plus petit indice supérieur à i_2, et n'appartenant pas au sous-espace engendré par e_1 et e_2. Posons :

$$b_3 = a_{i_3} - (a_{i_3}|e_1)e_1 - (a_{i_3}|e_2)e_2, \quad \text{puis} \quad e_3 = \frac{b_3}{\|b_3\|}.$$

$\{ e_1, e_2, e_3 \}$ est un système orthonormé.

Et ainsi de suite. Ayant obtenu un système orthonormé de n éléments $\{ e_1, e_2, ..., e_n \}$, on prendra $a_{i_{n+1}}$ élément de plus petit indice supérieur à i_n et n'appartenant pas au sous-espace engendré par $(e_1, e_2, ..., e_n)$ et on posera $b_{n+1} = a_{i_{n+1}} - \sum\limits_{i=1}^{n} (a_{i_{n+1}}|e^i)e_i$, puis $e_{n+1} = \dfrac{b_{n+1}}{\|b_{n+1}\|}$.

Le processus s'interrompra si on ne trouve plus de vecteur a_i, hors du sous-espace engendré par les e_i déjà choisis, ou se continuera indéfiniment. Dans le premier cas, on aura construit un système orthonormé

fini ; dans le deuxième, un système orthonormé de cardinal $\aleph_0$. Dans les deux cas ce système sera maximal, car tout vecteur a_i finit par appartenir au sous-espace engendré par les e_i, donc ce sous-espace inclut celui engendré par les a_i, donc son adhérence est E.

Remarque I : On obtiendrait exactement dans les mêmes conditions une famille orthonormée maximale en partant d'une famille $\{ a_i \}$, non plus dense dans E, mais qui engendre un sous-espace vectoriel dense dans E. Une telle famille est alors dite **totale.** C'est dans cette situation qu'est le plus fréquemment appliqué dans la pratique le procédé de Schmidt, en substituant dans tous les cas à $\{ a_i \}$ une base algébrique, ou même topologique, du sous-espace qu'elle engendre.

Remarque II : Revenant sur une remarque faite plus haut dans le cas général, nous voyons qu'à chaque système orthonormé maximal d'un espace de Hilbert séparable correspond un isomorphisme de cet espace sur l'espace (l^2) des suites de carré sommable, muni du produit scalaire $(x|y) = \sum\limits_{1}^{\infty} x_n \overline{y}_n$:

Tout espace de Hilbert séparable est isomorphe à (l^2).

3. Exemple.

L'espace $\mathcal{C}(\ [0, 2\pi], \mathbf{C}\ )$ des fonctions continues à valeurs complexes avec pour produit scalaire :

$$(f|g) = \int_0^{2\pi} f(t) . \overline{g}(t) dt$$

et sa partie $\mathcal{C}(\ [0, 2\pi], \mathbf{R})$ où le produit scalaire est :

$$(f|g) = \int_0^{2\pi} f(t) . g(t) dt$$

sont des espaces préhilbertiens respectivement sur **C** et sur **R**, comme il est aisé de le vérifier.

La sesquilinéarité et la symétrie hermitienne du produit scalaire sont évidentes ; le fait que $\|f\| = \sqrt{\int_0^{2\pi} |f|^2 dt}$ soit positive ou nulle aussi ; enfin, $\|f\| = \sqrt{\int_0^{2\pi} |f|^2 dt}$ ne peut être nulle que si f est nulle : une fonction continue différente de zéro en un point l'étant nécessairement sur un intervalle entourant ce point.

Quant au fait que cet espace soit seulement préhilbertien, on peut le vérifier à l'aide du contre-exemple suivant : soit la suite $\{ f_n \}$ définie par

$$f_n(x) = inf\left(n, x^{-\frac{1}{4}}\right).$$

● *C'est une suite de Cauchy pour la norme choisie.* En effet, pour tout $m > n$:

$$\|f_n - f_m\| < \int_0^{\frac{1}{n^4}} (x^{-\frac{1}{4}} - n)^2\, dx < \int_0^{\frac{1}{n^4}} (x^{-\frac{1}{2}} + n^2)\, dx = \frac{3}{n^2}$$

• D'autre part, *une telle suite ne peut converger vers une fonction f continue sur* $[0, 2\pi]$. En effet, s'il existait une telle limite f (à valeurs réelles ou complexes), et si, pour une valeur x_0 de $]0, 2\pi]$, on avait

$$f(x_0) \neq x_0 - \tfrac{1}{4},$$

toutes les fonctions f_n (avec $n > x_0 - \frac{1}{4}$) seraient telles que $\int_0^{2\pi} |f_n(x) - f(x)|^2\, dx$ serait minorée par le nombre $\int_{x_0}^{2\pi} |f_n(x) - f(x)|^2\, dx$, nombre fixe indépendant de n et strictement positif puisque $f_n \neq f$.

Donc, pour tout $x \in\,]0, 2\pi]$, f devrait vérifier $f(x_0) = x_0 - \frac{1}{4}$, il serait alors impossible d'attribuer à $f(0)$ une valeur telle que f soit continue sur $[0, 2\pi]$. La suite $\{ f_n \}$ n'a donc pas de limite dans $\mathcal{C}\,([0, 2\pi], \mathbf{C})$.

Le complété de $\mathcal{C}$, muni de cette norme, est désigné par $L^2_{\mathbf{C}}\,[0, 2\pi]$. Le complété de $\mathcal{C}\,([0, 2\pi], \mathbf{R})$ est l'espace hilbertien réel $L^2_{\mathbf{R}}\,[0, 2\pi]$. Indiquons d'abord un système orthonormé maximal de ce dernier espace (dont l'existence montrera que cet espace est séparable). Il est facile de voir que la famille

$$\{ 1 \} \cup \{ \cos nx, \ \sin nx \ ; \ n \in \mathbf{N} \} \tag{1}$$

est formée d'éléments deux à deux orthogonaux et que la famille

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right\} \cup \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx, \ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nx \ ; \ n \in \mathbf{N} \right\} \tag{2}$$

est orthonormée.

D'autre part, on peut démontrer que cette famille est maximale (1).
Si l'on considère alors une fonction continue f, ses produits scalaires avec les éléments du système orthonormé ont pour valeur :

$$\alpha_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} f(x)dx$$

$$\forall n \neq 0 \quad \alpha_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx \, dx \qquad \beta_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx \, dx$$

et ses composantes sur ces éléments ont donc pour expression :

$$a_0, \ a_1 \cos x, \ b_1 \sin x, \ \dots, \ a_n \cos nx, \ b_n \sin nx \ \dots$$

---

(1) La démonstration repose sur le théorème suivant que nous ne démontrerons pas : « La famille A des polynômes en $\sin x$ et $\cos x$ est une partie dense de $\mathcal{C}\,([0, 2\pi], \mathbf{R})$, muni de la norme de la « convergence uniforme », ce qui signifie que toute fonction continue réelle f peut être approximée par un polynôme P en $\sin x$ et $\cos x$ de façon telle que $\forall\, \varepsilon$, $\forall\, x \in [0, 2\pi], |f(x) - P(x)| < \varepsilon$.

Ceci entraîne $\sqrt{\int_0^{2\pi} |f - P|^2\, dx} < \varepsilon \sqrt{2\pi}$, donc que la famille des polynômes est également dense sur $\mathcal{C}$ muni de la présente norme et comme $\mathcal{C}$ est dense sur L^2 cette famille est dense sur L^2 (en effet, $adh_{L^2} A \supset adh\ A = \mathcal{C}$ ce qui entraîne $adh_{L^2}(adh_{L^2} A) = adh_{L^2} A \supset adh_{L^2} \mathcal{C} = L^2$; d'où $adh_{L^2} A = L^2$).

Mais la formule de Moivre montre que tout polynômes en $\sin x$ et $\cos x$ est une combinaison linéaire finie des éléments de (1) donc appartient au sous-espace vectoriel engendré par (1) donc par (2). Autrement dit, l'adhérence de ce sous-espace est L^2 et (2) est une famille maximale (propriété (c) des familles maximales).

avec :

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)dx, \qquad \forall n \neq 0, \ a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx \, dx,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx \, dx.$$

Ces derniers nombres sont les *coefficients de Fourier* de la fonction et la propriété (*d*) des systèmes orthonormés maximaux s'énonce alors :

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^{2\pi} \sum_0^n |f(x) - \sum_0^n a_n \cos nx + b_n \sin x|^2 \, dx = 0.$$

On arrive ainsi à une représentation valable pour toute fonction continue (alors que la série de terme général $a_n \cos nx + b_n \sin nx$ ne converge, ni uniformément, ni simplement, vers $f(x)$ pour une fonction continue quelconque). En outre, si f est la fonction du temps qui représente l'amplitude d'un phénomène vibratoire, l'intégrale du carré de cette fonction représente, à un coefficient numérique près, l'énergie transportée. Approximer une fonction suivant la norme ci-dessus, c'est donc négliger les termes de faible énergie. D'où le double intérêt de considérer que la représentation d'une fonction continue par sa série de Fourier est faite dans L^2 : du point de vue mathématique, la représentation est toujours possible, car la série est toujours convergente ; du point de vue physique, l'approximation a un sens expérimental.

Il est immédiat de montrer (par exemple, à partir de ce qui précède) que, dans $L^2_{\mathbf{C}}\,[0, 2\pi]$, la suite $\{ e^{inx} \ ; \ n \in \mathbf{Z} \}$ dont l'indexation naturelle est faite, cette fois par $\mathbf{Z}$ et non par $\mathbf{N}$, est un système orthonormé maximal.

Un autre exemple célèbre de système orthonormé maximal est la famille des polynômes de Legendre pour l'espace $L^2_{\mathbf{R}}\,[-1, +1]$, et on peut la déduire par le procédé de Schmidt de la suite $1, x, \dots, x^n$, qui est totale, car l'espace qu'elle engendre est celui des polynômes $\mathbf{R}[x]$ **qui est dense dans** $\partial\,([-1, +1], \mathbf{R})$ **pour la norme de la convergence** uniforme ($\|f\| = sup\,\{ |f(x)| \} \ ; \ -1 \leqslant x \leqslant 1$) en vertu du théorème de Weierstrass, et donc *a fortiori* pour la norme de L^2.

Exercice 66. — Soit H un espace hilbertien complexe et soit $(e_n \ ; \ n \in \mathbf{N})$ une base orthonormée de cet espace.

Soit $(\lambda^n \ ; \ n \in \mathbf{N})$ une suite de nombres complexes non nuls, non nécessairement deux à deux distincts et on suppose que la suite $(|\lambda^n|)$ décroît (au sens large) et tend vers zéro.

1° Montrer qu'il existe une application linéaire continue A de H dans lui-même et une seule telle que

$$\forall n \in \mathbf{N} \qquad A(e_n) = \lambda^n e_n.$$

Quelle est la norme de A ? son noyau ? ses valeurs propres ? Quel est le sous-espace propre associé à une valeur propre μ de A ?

2° Soit λ un nombre complexe. On demande d'étudier pour y donné dans H, les solutions de l'équation :

$$A(x) - \lambda x = y \qquad \text{(E)}.$$

Montrer qu'on est amené à distinguer les trois cas :

a) λ différent de zéro et de chacun des λ^n

b) λ égal à un des λ^n

c) $\lambda = 0$.

3° Résoudre (E) dans le cas *a*). Déduire du résultat que dans le cas $\lambda \neq 0$ et, pour tout n, $\lambda \neq \lambda^n$, l'application $A - \lambda I$ (I désignant l'identité sur H) admet une application réciproque, linéaire et continue, dont on précisera la norme.

4° Résoudre et discuter (E) dans le cas *b*).

5° Résoudre et discuter (E) dans le cas *c*). On donnera une condition nécessaire et suffisante pour que (E) ait une solution ; puis on montrera qu'il existe effectivement des $y \in H$ tels que (E) n'ait pas de solution.

Montrer que, pour tout $M > 0$, il existe des $y \in H$ tels que $\|y\| < 1$ et que (E) ait une solution unique de norme supérieure à M.

Peut-on trouver une application linéaire et continue B de H dans lui-même telle que $B \circ A$ soit l'application identique ?

Exercice 67. — Soit H un espace de Hilbert. On note $(x|y)$ le produit hermitien de deux vecteurs x et y. On désigne par $\mathcal{L}(H)$ l'ensemble des applications linéaires et continues de H dans H, par T_x l'image de $x \in H$ par $T \in \mathcal{L}(H)$ et par TS le composé $T \circ S$ de deux éléments S et T de $\mathcal{L}(H)$.

1° Montrer qu'à toute application $T \in \mathcal{L}(H)$ correspond une application $T^* \in \mathcal{L}(H)$ et une seule telle que, pour tout couple (x, y) de vecteurs de H, on ait :

$$(x|Ty) = (T^*x|y).$$

Montrer que : $(T^*)^* = T$.
Comparer $\|T\|$ et $\|T^*\|$.
Montrer que si T et S appartiennent à $\mathcal{L}(H)$ et λ à **C**

$$(T+S)^* = T^* + S^*$$
$$(\lambda T)^* = \bar{\lambda} T^*$$
$$(TS)^* = S^*T^*.$$

2° On considère un sous-espace fermé V et on désigne par P_V l'application qui à $x \in H$ fait correspondre sa projection orthogonale x_V sur V. Montrer que $P_V \in \mathcal{L}(H)$ et qu'on a :

$$\|P\| \leqslant 1 \qquad P_V^2 = P_V \qquad P_V^* = P_V.$$

P_V est appelé le projecteur relatif au sous-espace fermé V.

3° On considère une application $T \in \mathcal{L}(H)$ telle que :

$$T^2 = T \qquad T^* = T. \qquad (1).$$

Montrer que si V est le sous-espace fermé de H engendré par T(H) on a $T = P_V$, autrement dit les conditions (1) sont nécessaires et suffisantes pour que T soit un projecteur.

Montrer que si I est l'application identique de H sur H, $(I - T)$ est aussi un projecteur. A quel sous-espace fermé est-il relatif ?

Montrer que l'on peut déduire directement des conditions (1) :

$$\|Tx\|^2 = (T\,x|x) \text{ et } \|Tx\| < \|x\|.$$

4° Si P_V et P_W sont les projecteurs relatifs aux sous-espaces fermés V et W respectivement, montrer que les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

(*a*) $V \subset W$,
(*b*) $P_V P_W = P_W P_V = P_V$
(*c*) $\forall x \in H \quad \|P_V x\| \leqslant \|P_W x\|$.

5° Montrer que si P_V et P_W sont des projecteurs $P_V P_W$ en est un si, et seulement si, $P_V P_W = P_W P_V$.

Que peut-on dire des sous-espaces fermés auxquels sont relatifs P_V, P_W et $P_V P_W$?

6° $P_{V_1}, P_{V_2} \dots P_{V_n}$ étant des projecteurs, montrer que si $P_{V_1} + P_{V_2} + \dots + P_{V_n}$ en est un

$$\|P_{V_1}x\|^2 + \|P_{V_2}x\|^2 + \dots + \|P_{V_n}x\|^2 \leqslant \|x\|^2.$$

En déduire que $P_{V_1} + P_{V_2} + \dots + P_{V_n}$ est un projecteur si, et seulement si, $P_{V_i} P_{V_j} = 0$ pour tout couple d'indices i, j avec $i \neq j$.

Que peut-on dire alors des sous-espaces $V_1, V_2, \dots, V_n$?

A quel sous-espace $P_{V_1} + P_{V_2} + \dots + P_{V_n}$ est-il relatif ?

7° Montrer que si P_V et P_W sont des projecteurs $P_W - P_V$ en est un si, et seulement si, $P_V P_W = P_W P_V = P_V$.

Que peut-on dire des sous-espaces fermés auxquels sont relatifs P_V, P_W et $P_W - P_V$?

CHAPITRE X

ESPACES FONCTIONNELS

§ 1. TOPOLOGIES SUR L'ENSEMBLE $\mathcal{F}$ (E, F) DES APPLICATIONS D'UN ENSEMBLE E DANS UN ESPACE METRIQUE F

Nous allons, dans ce qui va suivre, étudier certaines topologies dont on peut munir les espaces fonctionnels $\mathcal{F}(\mathbf{E}, \mathbf{F})$ dans le cas où F *est un espace métrique.*

1. Deux modes classiques de convergence des suites de fonctions réelles de variables réelles.

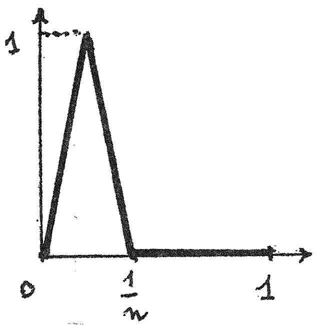
Historiquement c'est d'abord, dans le cas où $\mathrm{F} = \mathbf{R}$ et où $\mathbf{E} \subset \mathbf{R}$ qu'on a été amené à étudier cette question et d'abord sous la forme suivante : *chercher à définir la limite d'une suite de fonctions réelles de variables réelles.*

Une première définition qui vient à l'esprit est celle, dite de la convergence simple : $\{f_n\}$ définie sur $[a, b]$, converge vers f si, pour tout $x \in [a, b]$, la suite numérique $f_n(x)$ a une limite $f(x)$, soit :

$$\forall \varepsilon \quad \forall x \in [a, b] \quad \exists \mathrm{N}(x, \varepsilon) \quad \forall n > \mathrm{N} \quad |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon.$$

Une autre définition vient tout aussi naturellement à l'esprit si l'on songe au graphe des applications : une application φ sera voisine d'une application f si le graphe de φ est dans la bande comprise entre les graphes de $f - \varepsilon$ et $f + \varepsilon$; ce qui donne pour la convergence vers f de la suite $\{f_n\}$ la définition suivante :

$$\forall \varepsilon \quad \exists \mathrm{N} \quad \forall n > \mathrm{N} \quad \forall x \in [a, b] \quad |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon.$$



Il est clair qu'une suite qui converge au au deuxième sens converge au premier, mais la réciproque est fausse comme le prouve l'exemple suivant :

Soit f_n définie sur $[0, 1]$ par le graphe ci-contre. Quand n tend vers l'infini, $\{f_n\}$ a pour limite au premier sens la fonction nulle sur $[0, 1]$, mais n'a aucune limite au second sens.

Le second mode de convergence, introduit par Weierstrass, est appelé convergence uniforme, le mot « uniforme » soulignant ici le fait que le N de la définition est indépendant de x. Bien que se présentant chacun de façon « naturelle », les deux modes de convergence ont des propriétés différentes et doivent être soigneusement distingués.

Nous allons, dans la suite, chercher à quelle structure de $\mathcal{F}$ (E, F) ils correspondent et étudier des modes de convergence plus généraux dont ils sont les cas extrêmes.

2. Structure métrique de la convergence uniforme.

Nous commençons par l'étude de la convergence uniforme. Plus généralement que dans ce qui précède, étant donné E quelconque et F métrique, sur l'espace $\mathcal{F}$ (E, F) (espace dont, dans la pratique, on ne considère généralement que des parties), nous pourrons définir la distance suivante :

$$d(f, g) = sup \{ d(f(x), g(x)) \ ; \ x \in E \} .$$

Il est aisé de vérifier que d jouit bien des propriétés d'une distance, sous la seule réserve d'admettre que cette distance est à valeurs dans $\overline{\mathbf{R}}^+$, car elle peut être infinie. La convergence d'une suite $\{ f_n \}$ de $\mathcal{F}$ (E, F), muni de cette distance, vers un élément f, s'écrit :

$$\forall \varepsilon \quad \exists N \quad \forall n > N \quad d(f_n, f) < \varepsilon$$

ou :

$$\forall \varepsilon \quad \exists N \quad \forall n > N \quad \forall x \in E \quad d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon.$$

Si $F = \mathbf{R}$, $d(f_n(x), f(x)) = |f_n(x) - f(x)|$, c'est bien la convergence uniforme définie ci-dessus.

La structure sur $\mathcal{F}$ (E, F) qui correspond à ce mode de convergence est donc une structure d'espace métrique. On s'y référera en parlant de la métrique de la convergence uniforme, et la topologie correspondante sera aussi appelée topologie de la convergence uniforme.

On peut montrer que, pour cette distance, $\mathcal{F}$ (E, F) *est complet si, et seulement si,* F *est complet.*

Supposons F complet et soit $\{ f_n \}$ une suite de Cauchy de $\mathcal{F}$. L'hypothèse

$$\forall \varepsilon \quad \exists N \quad \forall n > N, \ m > N \quad d(f_n, f_m) = sup \{ d(f_n(x), f_m(x)) \} < \varepsilon$$

entraîne que, pour tout x, $\{ f_n(x) \}$ soit une suite de Cauchy de F, donc que $\{ f_n(x) \}$ converge vers $f(x)$ telle que :

$$\forall x \quad \forall n > N \quad d(f_n(x), f(x)) \leqslant \varepsilon$$

$\{ f_n \}$ converge donc vers f.

Inversement, supposons qu'il existe dans F une suite de Cauchy $\{ y_n \}$ qui ne converge pas. Considérons la suite de Cauchy $\{ f_n \}$ de $\mathcal{F}$ constituée des applications constantes : $\forall x \in E \quad f_n(x) = y_n$. Elle ne peut pas converger.

Une partie intéressante de $\mathcal{F}$ (E, F) est le *sous-espace* $\mathcal{B}$ (E, F) *des applications bornées.*

On dira que f est bornée si le diamètre $\delta(f(E))$ est fini :

$$sup \{ d(f(x), f(y)) \ ; \ (x, y) \in E \times E \} < \infty.$$

Alors $\mathcal{B}$ (E, F) est fermé dans $\mathcal{F}$ (E, F). En effet, soit une suite (f_n) de fonctions bornées :

$$\forall n \quad \exists A_n \quad \forall x \in E, \quad \forall y \in E \quad d(f_n(x), f_n(y)) < A_n.$$

Soit f la limite d'une telle suite, on peut affirmer :

$$\forall \varepsilon \quad \exists N \quad \forall x \in E \quad d(f_N(x), f(x)) < \varepsilon.$$

Soit alors à évaluer $\delta(f(E))$.

$$\forall x \in E \quad d(f(x), f(y)) < d(f(x), f_N(x)) + d(f_N(x), f_N(y)) + d(f_N(y), f(y)) < A_N + 2\varepsilon$$

donc, $f \in \mathcal{B}$(E, F), ce qui prouve que ce sous-ensemble est fermé. $\mathcal{B}$ est donc complet si F est complet (cf. VII, 2, 4) et seulement si F est complet. (Si F ne l'était pas, c'est-à-dire si une suite de Cauchy $\{ y_n \}$ de F ne convergeait pas, les fonctions constantes f_n de valeurs respectives y_n sont bornées et constitueraient une suite de Cauchy de $\mathcal{B}$ (E, F) qui ne convergerait pas).

3. Structure de la convergence uniforme sur une famille de parties.

Soit $A \subset E$. On peut considérer pour tout couple (f, g) l'élément de $\overline{\mathbf{R}^+}$,

$$e_A(f, g) = sup \{ d(f(x), g(x)) \ ; \ x \in A \}$$

L'application e_A est un écart.

A une famille $\mathcal{S}$ de parties de E, on peut alors faire correspondre une famille d'écarts et considérer la topologie définie par cette famille d'écarts.

On sait (cf. exercice 17) qu'on obtient une famille de générateurs de la topologie avec la famille des boules :

$$B(A, f, r) = \{ g \ ; \ e_A(f, g) < r \}$$

et une base des ouverts de la topologie avec la famille des pseudo-boules :

$$V(f, J, r) = \{ g \ ; \ e_{A_i}(f, g) < r \ ; \ i \in J \}$$

famille obtenue en faisant décrire $\mathcal{F}$ par f ; $\mathbf{R}^+ - \{ 0 \}$ par r et par J l'ensemble $\mathcal{P}_f(I)$ des parties finies de l'ensemble I qui indexe les éléments A de $\mathcal{S}$.

On voit tout de suite que si $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$ sont deux familles de parties de E, telles que $\mathcal{S}_1 \supset \mathcal{S}_2$, si $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$ sont les topologies correspondantes, la famille des ouverts de $\mathcal{T}_1$ contient tous les ouverts de $\mathcal{T}_2$. Donc :

$$\mathcal{S}_1 \supset \mathcal{S}_2 \implies \mathcal{T}_1 \text{ plus fine que } \mathcal{T}_2 \qquad (1)$$

Remarquons, d'autre part, que $e_{A_i}(f, g) < r$ pour tout A_i tel que $i \in J$ équivaut à $e_B(f, g) < r$ avec $B = \cup \{ A_i \ ; \ i \in J \}$. On ne change donc pas la topologie ainsi définie si on ajoute à l'ensemble $\mathcal{S}$ les réunions finies d'ensembles appartenant déjà à $\mathcal{S}$.

Remarquons aussi que $A \supset A'$ entraîne $B(A, f, r) \subset B(A', f, r)$, ce qui signifie qu'on ne change pas la topologie en supprimant de $\mathcal{S}$, ou en lui ajoutant, les ensembles qui sont inclus dans d'autres ensembles appartenant aussi à $\mathcal{S}$ (puisque ces « petits » ensembles n'introduiraient que des voisinages déjà introduits par l'ensemble « plus gros »).

Les remarques précédentes conduisent à considérer comme familles $\mathcal{S}$ *des familles saturées,* c'est-à-dire des familles qui contiennent toutes les parties des ensembles qu'elles contiennent et toutes les réunions finies de ces ensembles. A deux familles saturées différentes correspondent deux topologies différentes : en effet, si $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$ sont deux familles saturées distinctes, c'est qu'il existe au moins un ensemble A dans $\mathcal{S}_1$ (par exemple) qui n'appartient pas à $\mathcal{S}_2$; parmi les générateurs de la topologie $\mathcal{T}_1$, il y aura donc les boules $B(A, f, r)$ qui ne font pas partie de la famille des ouverts de $\mathcal{T}_2$. Il y a donc une correspondance bijective entre les topologies du type considéré et les familles saturées qui les engendrent. Il en résulte que l'implication (1) peut être inversée si $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$ sont des familles saturées.

Il résulte de (1) que la plus fine de toutes les topologies de cette nature est obtenue avec $\mathcal{S} = \mathcal{P}(E)$. Or, dans $\mathcal{P}(E)$, il y a E et l'écart relatif à E n'est autre que la distance précédemment définie, et cette topologie est celle de la convergence uniforme.

Cherchons, à l'opposé, la moins fine des topologies séparées parmi les topologies de la famille. L'axiome de séparation, appliquée à une topologie définie par une famille d'écarts, exige que, pour tout couple (x, y) d'éléments distincts de E, il existe un indice i pour lequel $e_i(x, y) \neq 0$, ce qui donne ici :

$$\forall f,\ g\ (f \neq g) \qquad \exists\, A \qquad e_A(f, g) > 0.$$

Mais ceci exige qu'il y ait un écart non nul pour deux applications qui coïncident, sauf en un point de E, donc qu'il existe un A comprenant ce point, donc que :

$$\bigcup \{ A\ ;\ A \in \mathcal{S} \} = E$$

et cette condition est manifestement suffisante pour que la topologie soit séparée.

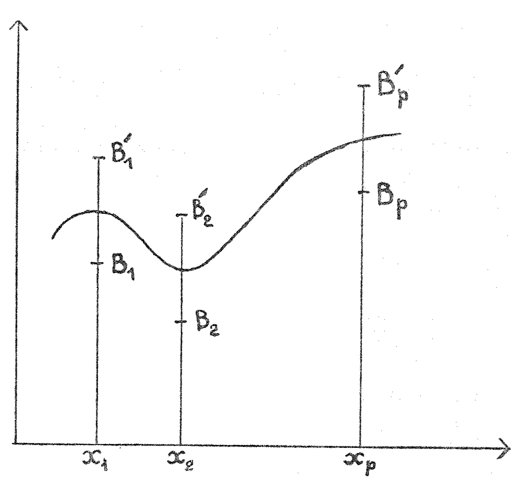
Il en résulte que la moins fine des topologies séparées peut être obtenue en prenant pour $\mathcal{S}$ la famille des points de E. La famille saturée correspondante est la famille $\mathcal{P}_f(E)$. Une famille de générateurs des ouverts de la topologie est alors constituée des boules :

$$B(f, x, r) = \{ g\ ;\ d(f(x), g(x)) < r \}$$

et une base des voisinages de f est la famille :

$$V(f, x_1, x_2, ..., x_p, r) = \{ g\ ;\ d(f(x_i), g(x_i)) < r\ ;\ i \in \{1, 2, ..., p\}\ \}.$$

(Pour $E = F = \mathbf{R}$, une fonction appartenant à un tel voisinage de f est une fonction dont le graphe rencontre chacun des p segments $B_1B'_1, B_2B'_2, ..., B_pB'_p$, centrés sur le graphe de f et de longueur $2r$).



Cherchons ce que signifie *converger vers f, pour une suite* $\{ f_n \}$ de $\mathcal{F}$ muni de cette topologie. Ceci signifie : pour tout voisinage de f, il existe N, tel que, pour tout $n > N$, f_n appartienne au voisinage, et il suffit que la propriété soit vérifiée pour les éléments de la base des voisinages de f.

f_n converge vers f, signifie donc :

$$\forall r \quad \forall \{ x_1, ..., x_p \} \in \mathcal{P}_f(E) \quad \exists N \quad \forall n > N \quad f_n \in V(f, x_1, ..., x_p, r) \quad (1)$$

ou encore :

$$\forall r \quad \forall \{ x_1, ..., x_p \} \in \mathcal{P}_f(E) \quad \exists N \quad \forall n > N \ \ d(f(x_i), f_n(x_i)) < r \quad (i = 1, 2, ..., p).$$

Mais cette condition entraîne, en particulier :

$$\forall r \quad \forall x \quad \exists N_x \quad \forall n > N_x \quad d(f(x), f_n(x)) < r. \qquad (2)$$

Et, *réciproquement*, si (2) est vérifiée, (1) l'est, car il suffit de prendre pour N le *sup* des N_x relatifs aux points $x_1, ..., x_p$. Donc, $\{ f_n \}$ converge vers f équivaut à la condition (2). Or, celle-ci exprime que $\{ f_n \}$ converge vers f au sens de la convergence simple. Pour cette raison, cette topologie est appelée *topologie de la convergence simple*.

Nous pouvons donc conclure :

De toutes les topologies définies sur $\mathcal{F}(E, F)$ par une famille d'écarts liée à une famille de parties de E, la plus fine est celle de la convergence uniforme et la moins fine des séparées est celle de la convergence simple (1).

Entre ces deux topologies extrêmes, il y en a d'autres qui sont utilisées, en particulier celle-ci : E étant un espace topologique, on prend pour famille $\mathcal{S}$ la famille des parties compactes ou, ce qui revient au même, la famille saturée déduite de cette famille. Cette famille saturée est obtenue en prenant la famille des sous-ensembles des parties compactes (2). La topologie définie par cette famille est appelée *topologie de la convergence compacte*. Cette topologie est surtout utilisée dans le cas où E est localement compact.

Un exemple de convergence suivant cette topologie nous est fourni par les séries entières dans le domaine D, intérieur de leur cercle de convergence ($|z| < R$). On sait qu'une telle série converge uniformément vers sa somme sur tout disque intérieur au cercle de convergence et on peut montrer qu'elle converge uniformément sur toute partie compacte du disque ouvert D.

En effet, soit $K \subset D$ un tel compact. L'application :

$$z \in K \longrightarrow |z| \in \mathbf{R}^+$$

étant continue et définie sur un compact, a un maximum fini qu'elle atteint. Si M est ce maximum (M est nécessairement plus petit que R), il en résulte que K est inclus dans le disque fermé de centre O et de

---

(1) Remarquons que, de même que la donnée d'une distance définit une structure métrique plus riche qu'une topologie, la donnée d'une famille d'écarts définit une structure plus riche qu'une topologie et qui est appelée structure uniforme. Mais nous nous contenterons ici d'aborder l'étude de la topologie qui lui est associée.

(2) Notons une propriété de ces sous-ensembles. Si E est séparé leur adhérence est compacte. En effet, un compact K d'un espace séparé est fermé. Donc :

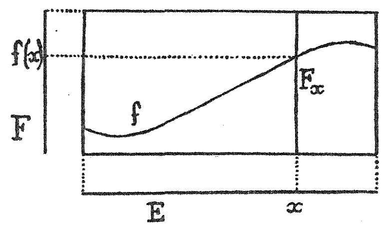
$$A \subset K \implies \overline{A} \subset \overline{K} = K.$$

Il en résulte que $\overline{A}$, partie fermée d'un espace compact est compacte. Un tel ensemble dont l'adhérence est compacte est dit *relativement compact*.

rayon M ($|z| \leqslant M$) qui est compact. La série est donc uniformément convergente sur ce disque et par conséquent sur K. Une série entière converge donc vers sa somme selon la convergence compacte sur le disque ouvert limité par son cercle de convergence.

4. Topologie de la convergence simple et topologie produit.

Revenons à la convergence simple. *La topologie de la convergence simple sur* $\mathcal{F}(E, F)$ *est la topologie produit de* $\prod_{x \in E} F_x$.



Considérons l'espace $\prod_{x \in E} F_x$, produit cartésien indexé par E d'une infinité de répliques de l'espace F. La donnée d'un élément de cet espace équivaut à la donnée d'un élément de $\mathcal{F}(E, F)$. On sait que la topologie sur $\prod_{x \in E} F_x$ définie comme topologie produit de la topologie sur F admet une base des ouverts constituée des ensembles :

$$\prod_{x \in E - J} F_x \times O_1 \times \dots \times O_p$$

où J est une partie finie $\{x_1, \dots, x_p\}$, et $O_1, O_2, \dots, O_p$ des ouverts respectifs de $E_{x_1}, E_{x_2}, \dots, E_{x_p}$; et qu'on obtient une base des voisinages d'une fonction f, pour cette topologie, en faisant écrire à $\{x_1, \dots, x_p\}$ l'ensemble des parties finies de E, et à $O_1, O_2, \dots, O_p$ l'ensemble des boules de centre $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_p)$. Les voisinages de f pour cette topologie produit sont donc les mêmes que pour la topologie de la convergence simple.

La topologie de la convergence simple est donc la topologie produit $\prod_{x \in E} F_x$. Il résulte alors du théorème de Tychonov que, *si F est compact,* $\mathcal{F}(E, F)$ *est compact pour la convergence simple* et on en déduit que $\mathcal{F}(E, F)$ ne peut pas être compact pour les topologies strictement plus fines, en particulier pour la topologie de la convergence uniforme.

Exercice 68. — Soit E un espace de Banach sur **C** et son dual E' qui est un espace de Banach pour la topologie de la norme et soit $\tilde{E} \subset E''$ isomorphe et isométrique à E (notations du chapitre précédent).

On munit souvent E' de la topologie dite « faible » qui est définie comme la moins fine des topologies qui rendent continues toutes les formes $\tilde{x}$.

Montrer que cette topologie n'est autre que la topologie sur E' de la convergence simple sur E.

En déduire que la boule unité fermée de E' (c'est-à-dire l'ensemble des applications de norme inférieure ou égale à 1) est compacte pour la topologie faible.

§ 2. CAS OU E EST UN ESPACE TOPOLOGIQUE

Tout ce qui précède était valable sans que E soit muni d'aucune structure. Supposons maintenant que E soit un espace topologique et supposons toujours F métrique. On peut considérer l'ensemble des applications continues $\mathcal{C}(E, F) \subset \mathcal{F}(E, F)$ et considérer les topologies induites sur cet ensemble par celles qu'on vient de définir.

1. $\mathcal{C}$ (E, F) est-il fermé dans $\mathcal{F}$ (E, F) ?

La première question qui se pose est de savoir si $\mathcal{C}$ est fermé, ce qui exige que toute limite de suite de fonctions continues soit continue (et équivaut à cette propriété dans le cas où $\mathcal{F}$ est métrique).

Pour la topologie de la convergence uniforme, la réponse est positive. En effet, on peut écrire, en tout point $x_0 \in E$:

	$\forall \varepsilon$	$\exists N$	$\forall x$	$d(f_N(x), f(x)) < \varepsilon$
et	$\forall \varepsilon$	$\exists V \in \mathcal{V}(x_0)$	$\forall x \in V$	$d(f_N(x), f_N(x_0)) < \varepsilon$.
D'où :	$\forall \varepsilon$	$\exists V \in \mathcal{V}(x_0)$	$\forall x \in V$	$d(f(x), f(x_0)) < 3\varepsilon$.

Nous concluons donc : *Une limite uniforme de fonctions continues est continue,* (limite uniforme signifiant limite selon la convergence uniforme), ou, ce qui est équivalent : $\mathcal{C}(E, F)$ *est fermé dans* $\mathcal{F}$ (E, F) *muni de la topologie de la convergence uniforme.*

Remarquons en outre que, si F est complet, on peut déduire de ce qui précède :

$$F \text{ complet} \implies \mathcal{F}(E, F) \text{ complet} \implies \mathcal{C}(E, F) \text{ complet.}$$

Autrement dit : toute suite de Cauchy de $\mathcal{C}$ (E, F), muni de la topologie de la convergence uniforme, converge vers une fonction continue si F est complet.

Exercice 69. — Soient X et Y deux espaces métriques. On désigne par $B(a, r)$ la boule de centre a et de rayon r d'un des espaces, par $\delta(A)$ le diamètre de la partie A d'un des espaces.

Etant donnée une application f de X dans Y, on pose, pour $a \in X$:

$$\omega(f\,;a) = \inf_{r > 0} \delta\,(f(B(a, r))$$

(borne inférieure des diamètres des images par f des boules ouvertes de centre a) ; $\omega(f\,;a)$ est donc un réel $\geqslant 0$ ou $+\infty$.

1° Que signifie la condition $\omega(f\,;a) = 0$?

2° On suppose que $\omega(f\,;a) < +\infty$. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\eta > 0$ tel que l'on ait :

$$\omega(f\,;x) < \omega(f\,;a) + \varepsilon$$

pour tout $x \in B(a, \eta)$. Enoncer ce résultat en termes de semi-continuité pour $\omega(f, x)$. (Voir le texte de l'exercice 47).

3° Soit g une autre application de X dans Y, telle que :

$$\sup_{x \in X} d\left(f(x), g(x)\right) \leqslant \varepsilon \qquad (\varepsilon > 0)$$

Soit A un sous-ensemble de X ; comparer les diamètres des images $f(A)$ et $g(A)$ de A dans Y. Comparer (pour $x \in X$) les nombres $\omega(f\,;x)$ et $\omega(g\,;x)$.

Que peut-on dire de $\omega(f\,;\,x)$, considéré comme fonction de f ?

4° Soit k un nombre réel $\geqslant 0$. Montrer que l'ensemble des applications f de X dans Y satisfaisant à la relation

$$\forall x \in X \qquad \omega(f, x) \leqslant k$$

est *fermé* dans l'espace $\mathcal{F}$ (X, Y) de toutes les applications de X dans Y muni de la topologie de la convergence uniforme. De quel théorème classique, cette propriété est-elle une généralisation ?

Pour la topologie de la convergence compacte, $\mathcal{C}$ **(E, F)** ***est encore fermé, si*** **E** ***est localement compact.***

Soit, en effet, $f \in \overline{\mathcal{C}}$. Etudions cette fonction au voisinage d'un point quelconque $x_0 \in$ E. Ce point admet un voisinage compact K. L'hypothèse $f \in \overline{\mathcal{C}}$ veut dire :

$$\forall V \in \mathcal{V}(f) \qquad \exists g \in \mathcal{C} \qquad g \in V$$

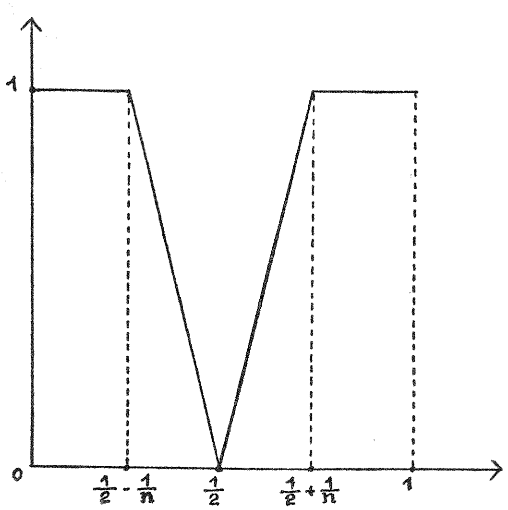
mais, vu la définition de la convergence compacte, ceci implique, en particulier :

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}^+ - \{0\} \qquad \exists g \in \mathcal{C} \qquad e_K(f, g) < \varepsilon$$

c'est-à-dire : $\qquad \forall x \in K \qquad d(f(x), g(x)) < \varepsilon.$

Si nous considérons alors les restrictions à K de f et des fonctions g précédentes, ce que nous venons d'écrire signifie que la restriction de f appartient à l'adhérence de $\mathcal{C}$ (K, F), dans $\mathcal{F}$ (K, F), muni de la topologie de la convergence uniforme, donc à $\mathcal{C}$ (K, F) lui-même, puisqu'il est fermé dans $\mathcal{F}$ (K, F). Ceci implique, en particulier, que f est continue en x_0. Donc, f est continue sur E et $\mathcal{C}$ (E, F) est fermé.

Un exemple de ce fait nous est fourni par la somme d'une série entière qui est continue sur tout le disque ouvert limité par le cercle de convergence. C'est bien une limite, pour la convergence compacte, de fonctions continues, sur un espace localement compact (les sommes s_n), donc une fonction continue.



Inversement, il est facile de voir que $\mathcal{C}$ (E, F) ***n'est pas fermé dans*** $\mathcal{F}$ (E, F) ***muni de la topologie de la convergence simple.*** Donnons le contre-exemple suivant : E $= [0, 1]$; F $= \mathbf{R}$. Considérons la suite des fonctions f_n définies par le graphe ci-contre. Il est clair que, pour tout n, f_n est continue et qu'au sens de la convergence simple, f_n converge vers f égale à 1 sur $[0, \frac{1}{2}[$ et sur $]\frac{1}{2}, 1,]$ et égale à zéro pour $x = \frac{1}{2}$.

2. Compacité des sous-espaces de $\mathcal{C}$ **(E, F).**

Si F est compact, $\mathcal{F}$(E, F) est compact pour la topologie de la convergence simple. Ses parties compactes sont ses parties fermées. En vertu de ce qui précède, $\mathcal{C}$ (E, F) n'est donc pas compact ; il ne l'est *a fortiori* pas pour les topologies plus fines et, en particulier, pour celle de la convergence uniforme.

Il est alors naturel de chercher une caractérisation des parties compactes de $\mathcal{C}$, muni, par exemple, de la topologie de la convergence uniforme. C'est à cette question que répond le théorème suivant, que nous n'énonçons pas sous sa forme la plus générale.

THÉORÈME D'ASCOLI. — SOIENT E ET F, DEUX ESPACES MÉTRIQUES COMPACTS. UNE PARTIE $\mathcal{E} \subset \mathcal{C}$(E, F) A UNE ADHÉRENCE COMPACTE POUR LA TOPOLOGIE DE LA CONVERGENCE UNIFORME SI, ET SEULEMENT SI, C'EST UNE PARTIE ÉQUICONTINUE.

Pour donner la définition de l'équicontinuité d'une famille de fonctions, nous allons repartir de la définition de la continuité en un point d'une fonction, pour situer les diverses continuités les unes par rapport aux autres.

Soit $\mathcal{F}$ une famille de fonctions continues de E métrique, dans F métrique. On peut affirmer :

$$\forall \varepsilon \quad \forall f \in \mathcal{E} \quad \forall x_0 \in E \qquad \exists \eta \qquad d(x, x_0) < \eta \implies d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon.$$

D'après cet énoncé, η dépend de ε, de f et de x_0.

Dire que la *famille* ε *est équicontinue en* x_0, c'est dire que l'on peut choisir η indépendant de f, ce qui donne l'énoncé :

$$\forall \varepsilon \quad \forall x_0 \quad \exists \eta \quad \forall f \in \mathcal{E} \quad d(x, x_0) < \eta \implies d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon.$$

Dire que chaque *fonction* f *est uniformément continue,* c'est dire que, pour chaque f, η peut être choisi indépendant de x_0, ce qui donne :

$$\forall \varepsilon \quad \forall f \quad \exists \eta \quad \forall x_0 \quad d(x, x_0) < \eta \implies d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon.$$

Une notion plus forte est celle d'une famille uniformément équicontinue, pour laquelle η peut être choisi indépendant de x_0 et de f. On a alors :

$$\forall \varepsilon \quad \exists \eta \quad \forall x_0 \quad \forall f \quad d(x, x_0) < \eta \implies d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon.$$

Si E est métrique compact, on démontre qu'une famille de fonctions équicontinues en tout point est uniformément équicontinue, exactement comme on démontre qu'une fonction continue en tout point d'un espace métrique compact y est uniformément continue (cf. VII, 4, 3).

Dans ce cas, on pourra donc parler de famille équicontinue, sans préciser davantage.

Démonstration du théorème d'Ascoli.

Soit $\mathcal{E}$ une partie compacte de $\mathcal{C}$ (E, F). Un nombre $\varepsilon \in \mathbf{R}^+ - \{0\}$ étant fixé, la famille des boules de centre f et de rayon ε constitue, quand f décrit $\mathcal{E}$, un recouvrement ouvert de $\mathcal{E}$. On peut en extraire le recouvrement fini $\{B(f_i, \varepsilon)\,;\; 1 \leqslant i \leqslant n\}$, ce qui signifie que toute fonction $f \in \mathcal{E}$ peut être approchée à moins de ε près par l'une des fonctions f_i :

$$\forall x \in E \qquad d(f(x), f_i(x)) < \varepsilon.$$

Mais f_i étant uniformément continue, puisque continue sur E compact,

$$\forall \varepsilon \quad \exists \eta_i \quad d(x,y) < \eta_i \implies d(f_i(x), f_i(y)) < \varepsilon.$$

Il suffit alors d'appliquer l'inégalité triangulaire pour en déduire :

$$d(x,y) < \eta_i \implies d(f(x), f(y)) < 3\varepsilon.$$

Soit alors η l'*inf* des n nombres η_i ainsi introduits ; on peut dire :

$$\forall \varepsilon \quad \exists \eta \quad \forall f \in \mathcal{E} \quad \forall (x,y) \in E^2 \quad d(x,y) < \eta \implies d(f(x), f(y)) < 3\,\varepsilon,$$

ce qui établit que $\mathcal{E}$ est une famille équicontinue.

Si maintenant $\mathcal{E}$ est une partie d'adhérence compacte, nous venons d'établir que $\overline{\mathcal{E}}$ est équicontinue. Il en résulte immédiatement que $\mathcal{E}$ l'est aussi.

Soit, ***réciproquement***, $\mathcal{E}$ équicontinue. Remarquons d'abord que son adhérence l'est aussi. En effet, l'hypothèse s'écrit :

$$\forall \varepsilon \quad \exists \eta \quad \forall f \in \mathcal{E} \quad \forall (x,y) \in E^2 \quad d(x,y) < \eta \implies d(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

Soit $g \in \overline{\mathcal{E}}$.

$$\forall \alpha \qquad \exists f \in \mathcal{E} \qquad d(f,g) < \alpha,$$

donc :

$$d(f(x), g(x)) < \alpha \quad , \quad d(f(y), g(y)) < \alpha.$$

L'inégalité triangulaire donne alors :

$$d(g(x), g(y)) < \varepsilon + 2\alpha.$$

Cette inégalité est obtenue quel que soit α, ce qui exige :

$$d(g(x), g(y)) \leqslant \varepsilon.$$

On peut donc conclure :

$$\forall \varepsilon \quad \exists \eta \quad \forall g \in \overline{\mathcal{E}} \quad \forall (x,y) \in E^2 \quad d(x,y) < \eta \implies d(g(x), g(y)) \leqslant \varepsilon,$$

donc à l'équicontinuité de $\overline{\mathcal{E}}$.

Soit donc $\overline{\mathcal{E}}$ une partie équicontinue fermée dont nous allons chercher à établir la compacité. Pour montrer qu'une partie fermée d'un espace métrique est compacte, il suffit (cf. VII, 4, 2) de montrer que, de toute suite d'éléments de cette partie, on peut extraire une sous-suite convergente ; et, comme $\mathcal{C}$ (E, F) est complet (puisque F est compact donc complet), tout revient à montrer que d'une suite $\{f_n\}$ de $\overline{\mathcal{E}}$ on peut extraire une suite de Cauchy.

Soit donc $\{f_n\}$ une telle suite qui, par hypothèse, satisfait à :

$$\forall \varepsilon \quad \exists \eta \quad \forall n \quad \forall (x,y) \in E^2 \qquad d(x,y) < \eta \implies d(f_n(x), f_n(y)) < \varepsilon.$$

La famille des boules $B(x, \eta)$ constitue un recouvrement ouvert de E dont on peut extraire le recouvrement fini $\{B(x_i, \eta) ; 1 \leqslant i \leqslant p\}$. Soient alors deux fonctions f_n et f_n' de la suite et x quelconque dans E. Cet x appartient à une des boules précédentes, soit, pour fixer les idées, celle de centre x_i ; on a alors (toujours en vertu de l'inégalité triangulaire) :

$$d(f_n(x), f_n'(x)) < 2\varepsilon + d(f_n(x_i), f_n'(x_i)) \qquad (1).$$

Considérons alors la suite $\{f_n(x_1)\}$ qui est une suite d'éléments de F, espace compact. On peut en extraire une sous-suite $\{f_q(x_1)\}$ qui soit une suite de Cauchy, qui est donc telle que pour q et q' assez grands $d(f_q(x_1), f_{q'}(x_1)) < \varepsilon$. On ne garde que les éléments vérifiant cette inégalité et on considère la sous-suite des fonctions correspondantes. On procède de même à partir de cette sous-suite et de ses valeurs pour x_2 et on en extrait une autre sous-suite telle que deux quelconques de ses

éléments diffèrent de moins de ε en x_1 et x_2 ; ...et ainsi de suite... Finalement, après p opérations, on aura obtenu une sous-suite $\{f_n^1\}$ de fonctions telles que :

$$\forall i \in \{1, 2, ..., p\} \qquad \forall n \quad \forall n' \qquad d(f_n^1(x_i), f_{n'}^1(x_i)) < \varepsilon.$$

Il résulte alors de (1) que :

$$\forall x \in E \qquad \forall n \quad \forall n' \qquad d(f_n^1(x), f_{n'}^1(x)) < 3\varepsilon.$$

Autrement dit, on a extrait de $\{f_n\}$ une sous-suite $\{f_n^1\}$ telle que :

$$\forall n \quad \forall n' \qquad d(f_n^1, f_{n'}^1) < 3\varepsilon.$$

Pour ε, prenons $\frac{1}{6}$. Nous avons donc la suite $\{f_n^1\}$ de diamètre $< \frac{1}{2}$. Ayant obtenu cette suite, on procède sur elle comme on l'a fait sur $\{f_n\}$ en prenant cette fois $\varepsilon = \frac{1}{3 \times 2^2}$; on obtient une suite $\{f_n^2\}$ de diamètre $< \frac{1}{2^2}$ ...et ainsi de suite. On construit ainsi une suite de suites extraites les unes des autres, la suite $\{f_n^k\}$ obtenue après avoir appliqué k fois le procédé ayant un diamètre $< \frac{1}{2^k}$.

Considérons alors la suite $\{f_n^n\}$ ou suite diagonale constituée en prenant dans chaque suite l'élément dont le rang dans la suite est égal au rang de la suite. C'est une suite extraite de la suite primitive $\{f_n\}$ et c'est une suite de Cauchy puisque pour n et m supérieurs à N, f_n^n et f_m^m appartiennent à une suite de diamètre $< \frac{1}{2^N}$.

On a donc finalement extrait de $\{f_n\}$ une suite de Cauchy et $\overline{\mathcal{E}}$ est compact.

Remarque : La démonstration précédente reste valable si on remplace l'hypothèse « F compact » par : « F est complet et pour tout point $x \in E$ l'ensemble $\mathcal{E}(x)$ des valeurs prises en x par les fonctions de $\mathcal{E}$ est une partie relativement compacte de F. »

Variante de la démonstration précédente.

La démonstration de la réciproque donnée ci-dessus a été longtemps classique. Une présentation plus moderne (et plus puissante, car elle permettrait de restreindre les hypothèses utilisées ici) s'obtient en utilisant le théorème de Tychonov au lieu de procéder à l'extraction de la suite diagonale.

Les étapes de cette démonstration sont les suivantes :

a) *L'espace produit* $\prod_{x \in E} F_x = \mathcal{F}(E, F)$ *est compact en vertu du théorème de Tychonov*. (Il en est de même de $\prod_{x \in E} \overline{\mathcal{E}}(x)$, si $\mathcal{E}(x)$, ensemble des valeurs prises en x par les fonctions de la famille $\mathcal{E}$, est relativement compact en F).

b) La topologie produit est celle de la convergence simple (cf. X, 1, 4) et non celle de la convergence uniforme, mais, *sur une partie équicontinue $\mathcal{E}$, la topologie de la convergence simple $\mathcal{T}_s$ et celle de la convergence uniforme $\mathcal{T}_u$ de $\mathcal{F}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ induisent la même topologie.*

Il suffit pour s'en convaincre d'adapter la démonstration du théorème direct, dont on peut ainsi résumer l'esprit : pour que la distance de deux fonctions de $\mathcal{E}$ soit petite, il suffit que ces deux fonctions prennent des valeurs assez voisines en un nombre fini de points assez rapprochés les uns des autres sur le compact E. De manière précise : toute boule $\mathrm{B}(f, r)$ dans $\mathcal{E}$ (voisinage de f pour $\mathcal{T}_u$) contient le voisinage $\mathrm{V}(f\,;\, x_1, ..., x_p\,;\, h)$ de f dans $\mathcal{E}$ pour $\mathcal{T}_s$, si l'on choisit $h = \frac{r}{3}$, et si les $x_1, ..., x_p$ sont les centres de boules de rayon ρ constituant un recouvrement fini de E, ρ étant choisi tel que $d(x, y) < \rho$ implique, pour toute fonction f de $\mathcal{E}$, $d(f(x), f(y)) < \frac{h}{3}$.

c) Enfin, *l'adhérence $\overline{\mathcal{E}}_s$ de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{F}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ muni de $\mathcal{T}_s$ est égale à l'adhérence $\overline{\mathcal{E}}_u$ de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{F}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ muni de $\mathcal{T}_u$*, et donc aussi à celle de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{C}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ qui, pour la topologie $\mathcal{T}_u$, est fermé dans $\mathcal{F}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$.

On a, en effet, $\overline{\mathcal{E}}_s \supset \overline{\mathcal{E}}_u$ en vertu de la finesse relative des deux topologies. Soit, d'autre part, $g \in \overline{\mathcal{E}}_s$. Si x et y sont deux points de E et α un réel positif, il existe $f \in \mathcal{E}$ telle que

$$d(f(x), g(x)) < \alpha \qquad d(f(y), g(y)) < \alpha.$$

L'équicontinuité de $\mathcal{E}$ sur le compact E s'exprime par

$$\forall f \in \mathcal{E} \quad \forall \varepsilon \quad \exists \eta \qquad d(x, y) < \eta \implies d(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

On en déduit

$$d(x, y) < \eta \implies d(g(x), g(y)) < \varepsilon + 2\alpha,$$

d'où, α étant arbitraire

$$d(x, y) < \eta \implies d(g(x), g(y)) \leqslant \varepsilon.$$

$\overline{\mathcal{E}}_s$ est donc équicontinue aussi, et du raisonnement de b) on déduit immédiatement que $g \in \overline{\mathcal{E}}_u$, (toute boule de centre g contient un voisinage de g pour $\mathcal{T}_s$, qui contient un élément de $\mathcal{E}$). On a donc $\overline{\mathcal{E}}_s \subset \overline{\mathcal{E}}_u$, d'où $\overline{\mathcal{E}}_s = \overline{\mathcal{E}}_u$.

Or, $\overline{\mathcal{E}}_s$ est fermée dans le compact $\mathcal{F}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ (ou $\prod_{x \in \mathrm{E}} \overline{\mathcal{E}_x}$), et est donc compacte. $\overline{\mathcal{E}}_u$ muni de la topologie de la convergence uniforme est donc, en vertu de *b*, aussi compacte.

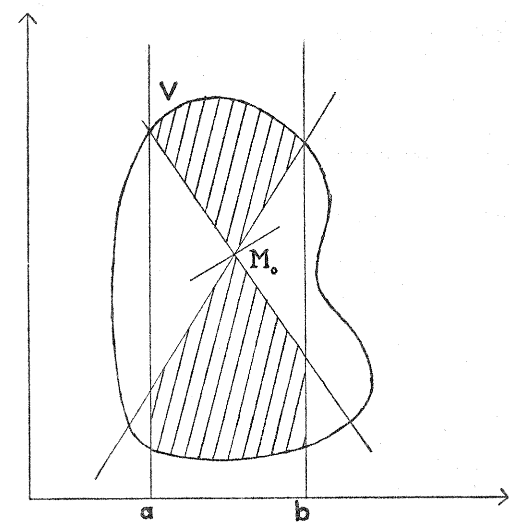
3. Exemple d'application du théorème d'Ascoli.

Celui-ci permet d'établir un important théorème d'existence des solutions des équations différentielles :

Théorème de Peano. — Etant donnée l'équation différentielle $y' = f(x, y)$ où f est une fonction définie et continue dans un domaine

D (ouvert connexe) inclus dans $\mathbf{R}^2$, pour tout point $\mathrm{M}_0(x_0, y_0)$ de D, il existe au moins une solution de l'équation définie au voisinage de x_0 et vérifiant $y_0 = f(x_0)$.

Soit M_0 et soit $\mathrm{V} \subset \mathrm{D}$ un voisinage compact de M_0. Soit H le *sup* de $f(x, y)$ dans ce voisinage. Au point M_0, traçons les droites de pente $\pm$ H



elles définissent quatre angles dont deux contiennent la droite de pente $f(x_0, y_0)$. Soit Δ le plus grand ensemble inclus dans ces angles et dans V et limité par des parallèles à Oy, d'abcisses a et b.

Nous allons montrer l'existence d'une solution de l'équation différentielle définie sur $[a, b]$ et passant par M_0. Pour ce faire, traçons un segment $\mathrm{M}_0\mathrm{M}_1$ de pente $f(x_0, y_0)$, M_1 étant choisi tel que, sur $\mathrm{M}_0\mathrm{M}_1$, f diffère de $f(x_0, y_0)$ de moins de ε, nombre fixé. En M_1, traçons un segment $\mathrm{M}_1\mathrm{M}_2$ de pente $f(x_1, y_1)$, M_2 étant choisi tel que sur $\mathrm{M}_1\mathrm{M}_2$, f diffère de $f(x_1, y_1)$ de moins de ε et ainsi de suite... ; ayant obtenu une ligne brisée $\mathrm{M}_0...\mathrm{M}_p$, on tracera $\mathrm{M}_p\,\mathrm{M}_{p+1}$ de pente $f(x_p, y_p)$, M_{p+1} étant choisi tel que sur $\mathrm{M}_p\,\mathrm{M}_{p+1}$, f diffère de $f(x_p, y_p)$ de moins de ε. On procède de la même façon de l'autre côté de M_0.

On a ainsi défini au voisinage de x_0 une fonction continue $x \longrightarrow \psi(x)$, par son graphe qui est la ligne brisée $\mathrm{M}_0\mathrm{M}_1.....\mathrm{M}_p.....$, qui est incluse dans Δ.

Remarquons d'abord que le procédé permet de définir ψ sur $[a, b]$, c'est-à-dire que l'on peut choisir la suite (x_p) de telle sorte qu'elle ne converge pas vers un nombre inférieur à b quand p tend vers l'infini. En effet, f est uniformément continue sur le compact V ; donc :

$$\exists\,\eta \qquad \left.\begin{array}{l}|x-x'|<\eta\\ |y-y'|<\eta\end{array}\right\} \Longrightarrow |f(x,y)-f(x',y')|<\varepsilon,$$

ce qui montre que pour tout p, $|x_{p+1}-x_p|$ peut être choisi au moins égal à η, donc qu'on atteindra b (par exemple) en $N \leqslant \dfrac{b-x_0}{\eta}+1$ segments au plus.

Remarquons ensuite qu'en tout point M_p, la fonction ψ admet une dérivée à droite qui est $f(x_p, y_p) = f(x_p, \psi(x_p))$. Et, en tout point d'abscisse $x \in\,]x_p, x_{p+1}[$, la fonction ψ admet pour dérivée $f(x_p, \psi(x_p))$.

Si donc on intègre la fonction en escalier qui vaut pour tout p : $f(x_p, \psi(x_p))$ sur $[x_p, x_{p+1}[$, l'intégrale de cette fonction entre x_0 et x est égale à $\psi(x)-\psi(x_0)$. Mais, du fait de la construction de ψ, pour tout $x \in [x_p, x_{p+1}[$:

$$f(x_p, \psi(x_p)) = f(x, \psi(x)) + \varepsilon\,\lambda(x) \quad \text{avec} \quad |\lambda(x)|<1,$$

où λ est une fonction continue. La fonction ψ définie sur $[a, b]$ vérifie donc :

$$\psi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \psi(t))\,dt + \varepsilon\int_{x_0}^{x} \lambda(t)\,dt$$

$$= y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \psi(t))\,dt + \varepsilon(x-x_0)\,\mu(x)$$

avec $|\mu(x)|<1$.

A chaque réel ε on peut ainsi faire correspondre une fonction (notons-la ψ_ε) et définir ainsi une famille de fonctions ψ_ε qui est équicontinue sur le compact Δ, car :

$$\forall \psi_\varepsilon \qquad \forall x \qquad \forall x' \qquad \left|\frac{\psi_\varepsilon(x)-\psi_\varepsilon(x')}{x-x'}\right| \leqslant H.$$

Il en résulte que la famille des fonctions ψ_ε a une adhérence compacte, donc que, de toute suite, on peut extraire une suite convergente. Soit alors une suite de fonctions $\psi_1, \psi_2, ..., \psi_n, ...$ définies par une suite $\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n, ...$ décroissante et tendant vers zéro.

On en extrait une sous-suite $\Psi_1, \Psi_2, ..., \Psi_k, ...$ qui converge vers une fonction Ψ qui est continue, comme limite uniforme de fonctions continues :

$$\forall \eta \qquad \exists N \qquad \forall k > N \quad \|\Psi - \Psi_k\| < \eta$$
$$\text{ou} \quad \forall x \qquad |\Psi(x) - \Psi_k(x)| < \eta \qquad (1).$$

On peut alors écrire, pour tout $x \in [a, b]$:

$$|y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \Psi(t))\,dt - \Psi(x)| < |\Psi_k(x) - \Psi(x)| + \qquad (2).$$

$$|y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \Psi_k(t))\,dt - \Psi_k(x)| + \left|\int_{x_0}^{x} f(t, \Psi(t))\,dt - \int_{x_0}^{x} (f\,t, \Psi_k(t))\,dt\right|$$

Le premier terme de cette somme est majoré par η si $k > N$, le deuxième l'est, en vertu de ce qui a été montré pour toute fonction ψ, par $\varepsilon_k|x-x_0|$; quant au troisième, c'est la valeur absolue de :

$$\int_{x_0}^{x} f(t, \Psi(t)) - f(t, \Psi_k(t))\,dt.$$

Mais f étant uniformément continue sur le compact Δ, (x, y_1) et (x, y_2) étant deux points de Δ :

$$\forall \zeta \qquad \exists \eta \qquad |y_1 - y_2| < \eta \Longrightarrow |f(x, y_1) - f(x, y_2)| < \zeta$$

donc, en rapprochant de (1) :

$$\forall \zeta \qquad \exists N \qquad \forall k > N \qquad \forall t \in [x_0, x] \qquad |\Psi(t) - \Psi_k(t)| < \eta,$$
$$\text{donc } |f(t, \Psi(t)) - f(t, \Psi_k(t))| < \zeta.$$

Le troisième terme de la somme (2) est alors majoré par :

$$\zeta|x - x_0|$$

Finalement :

$$|y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \Psi(t))\,dt - \Psi(x)| < \eta + |x - x_0|\,\varepsilon_k + |x - x_0|\,\zeta$$

Or, on peut choisir k pour que η, ζ et ε_k soient arbitrairement petits. On a donc :

$$\Psi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \Psi(t))\,dt$$

Donc Ψ est une solution de l'équation différentielle définie sur $[a, b]$; son graphe qui passe par M_0 est tout entier situé dans Δ.

Le théorème d'Ascoli joue un rôle très important en Analyse, où comme dans la démonstration précédente, il est un auxiliaire très puissant dans la recherche de théorèmes d'existence : la théorie des familles « normales » de fonctions analytiques de P. Montel en a été un des premiers exemples.

4. Autres topologies d'espaces fonctionnels.

Les topologies définies dans ce chapitre sur l'ensemble $\mathcal{F}$ (E,F) ou certaines de ses parties ne sont pas les seules que l'on puisse imaginer, ni les seules qu'on envisage effectivement. En particulier, la définition d'une intégrale pour certaines fonctions définies sur E (ou, ce qui revient au même, la définition d'une mesure sur E) permet de définir d'autres topologies.

Nous avons déjà vu sur $\mathcal{C}([0, 1], \mathbf{R})$ la structure préhilbertienne associée au produit scalaire $\displaystyle\int_0^1 fg\,dx$ et à la norme associée $\sqrt{\displaystyle\int_0^1 f^2dx}$, mais on peut sur le même espace définir d'autres normes telles que :

$$\int_0^1 |f|\,dx, \qquad \sqrt[p]{\int |f|^p\,dx} \qquad (p > 1)$$

On utilise, dans ces divers cas, les expressions de convergence en moyenne, en moyenne quadratique, en moyenne d'ordre p. $\mathcal{C}$ n'est pas complet pour ces diverses normes ; les complétés sont les espaces classiquement désignés par :

$$L^1([0,1],\mathbf{R}) \qquad L^2([0,1],\mathbf{R}), \qquad L^p([0,1],\mathbf{R})$$

L'introduction de ces espaces a amené l'introduction d'autres modes de convergence, que nous nous contenterons ici de citer : convergence simple presque partout, convergence uniforme presque partout, convergence presque uniforme, convergence en mesure qui interviennent en particulier dans la théorie des probabilités, où, par exemple, la convergence en mesure y prend le nom de convergence en probabilité.

Exercice 70. — On veut comparer la finesse de certaines des topologies précédemment définies sur $\mathcal{C}([0,1],\mathbf{R})$.

1° Montrer que la topologie de la convergence uniforme est plus fine que la topologie de la convergence en moyenne d'ordre p (pour tout $p \geqslant 1$). Est-elle strictement plus fine ?

2° Montrer au moyen de deux contre-exemples que la topologie de la convergence simple et la topologie de la convergence en moyenne d'ordre p ne sont pas comparables.

SOLUTION DES EXERCICES

Exercice 1.

L'énoncé signifie que si l'ensemble des décimales de rang impair de x est périodique à partir d'un certain rang, $\varphi(x)$ est le nombre qui admet pour développement décimal illimité celui formé de toutes les décimales de rang pair situées à la droite du rang où a commencé la périodicité. Par exemple, si :

$$x_0 = 8{,}435762546950635\ldots$$

$$\varphi(x_0) = 7{,}24903\ldots$$

Ceci dit, soient x_1 et x_2 deux valeurs quelconques de $[0,10[$. Soit y un nombre quelconque de $[0,10[$ donné par son développement décimal.

Si la différence entre x_1 et x_2 est supérieure à $\dfrac{1}{10^k}$ un nombre compris entre x_1 et x_2 aura un développement arbitraire à partir de la $(k+1)$ème décimale. Nous pourrons alors choisir les k premiers chiffres de son développement de telle façon qu'il soit compris entre x_1 et x_2, puis choisir les décimales suivantes de manière que la suite des décimales de rang impair soit périodique et que la suite des décimales de rang pair reconstitue le développement de y. Le nombre ξ ainsi choisi sera tel que : $\varphi(\xi) = y$. Il en résulte que :

1° quand x décrit l'intervalle $]x_1, x_2[$, $\varphi(x)$ prend, entre autres, toutes les valeurs de $]\varphi(x_1), \varphi(x_2)[$; $\varphi(x)$ satisferait donc à la première définition envisagée.

2° si petit soit η, on peut trouver $x \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[$ tel que $\varphi(x)$ soit un nombre arbitraire y de $[0,10[$, ce qui peut, si l'on pose :

$$|\varphi(x_0) - y| = \varepsilon,$$

s'écrire :

$$\exists \varepsilon \quad \forall \eta \in \mathbf{R}^+ - \{0\} \quad \exists x \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[\qquad |\varphi(x) - \varphi(x_0)| = \varepsilon,$$

ce qui est la négation de la continuité au point x_0 de la fonction φ.

Exemple. — Si x_0 est la valeur ci-dessus, nous pourrons trouver x tel que :

$$|x - x_0| < \frac{1}{10^k} \quad \text{et} \quad \varphi(x) = \pi.$$

Nous prendrons : $\quad x = 8{,}\underbrace{43576}_{A}\ldots 23212412529\ldots$

A est constitué par les premières décimales de x_0 au nombre de k ou de $(k+1)$ suivant que k est pair ou impair, de façon à ce que les rangs des chiffres de π soient pairs et les rangs des 2 impairs. Bien entendu, à la place des 2, on pourrait mettre n'importe quel groupement périodique, sauf (5, 6), car alors la périodicité aurait commencé plus tôt et $\varphi(x)$ ne serait pas π.

Exercice 2.

Soient A et B les valeurs prises par la dérivée de f en deux points x_1 et x_2 de $[a, b]$; supposons $A < B$ et soit C tel que $A < C < B$. Soit ε un nombre positif inférieur à $(C - A)$ et à $(B - C)$. Il existe un nombre h tel que :

$$\frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h} < A + \varepsilon \quad \text{et} \quad \frac{f(x_2) - f(x_2 - h)}{h} > B - \varepsilon$$

L'application $\qquad x \longrightarrow \dfrac{f(x + h) - f(x)}{h}$

est continue ; elle prend en x_1 une valeur inférieure à $A + \varepsilon$, en $(x_2 - h)$ une valeur supérieure à $(B - \varepsilon)$. Elle prend donc, pour une valeur $\zeta \in]x_1, x_2 - h[$, la valeur C et en vertu du théorème des accroissements finis la dérivée f' de f prend la valeur C pour un point appartenant à $]\zeta, \zeta + h[$, donc à $]x_1, x_2[$.

La fonction définie sur $[-1, +1]$ par :

$$y(0) = 0 \qquad \text{et pour } x \neq 0 \qquad y(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$$

est dérivable en tout point et sa dérivée n'est pas continue pour $x = 0$.

Exercice 3.

1° $\forall x \in E \qquad e(x, x) = 0$, la relation $\mathcal{R}$ est réflexive.

$\forall (x, y) \in E^2, \qquad e(x, y) = 0 \implies e(y, x) = 0$, la relation $\mathcal{R}$ est symétrique.

$\forall (x, y, z) \in E^3, \quad e(x, y) = 0$ et $e(y, z) = 0 \implies e(x, z) \leqslant 0 + 0$ donc $e(x, z) = 0$. La relation $\mathcal{R}$ est transitive.

2° Soit :

$$\begin{cases} \dot{x} = \{ y \ ; \ e(x, y) = 0 \} \in E/\mathcal{R}, \\ \dot{x}' = \{ y' \ ; \ e(x', y') = 0 \} \in E/\mathcal{R}. \end{cases}$$

Alors : $\qquad \forall y \in \dot{x} \quad \text{et} \quad \forall y' \in \dot{x}'$:

$$e(y, y') \leqslant e(y, x) + e(x, x') + e(x', y') = e(x, x').$$

Mais on montrerait de même : $\qquad e(x, x') \leqslant e(y, y')$.

Il en résulte : $\qquad e(x, x') = e(y, y')$

et on peut alors poser :

$$d(\dot{x}, \dot{x}') = e(x, x').$$

L'application d de $E/\mathcal{R}$ dans $\mathbf{R}$ ainsi définie est bien une distance, car elle vérifie la propriété de symétrie et l'inégalité triangulaire que vérifie l'écart ; d'autre part :

$$d(\dot{x}, \dot{x}') = 0 \implies e(x, x') = 0 \implies x' \in \dot{x} \implies \dot{x}' = \dot{x}.$$

Exercice 4.

δ est bien un réel positif, car c'est le *sup* de deux réels positifs. δ satisfait évidemment à l'axiome de symétrie. D'autre part, $\delta(x, y)$,

sup de deux réels positifs, ne peut être nul que si tous deux sont nuls. donc :

$$\delta(x, y) = 0 \implies d(x, y) = 0 \implies x = y.$$

Enfin, δ satisfait à l'inégalité triangulaire, car x, y, z étant trois points quelconques de l'espace métrique :

$$\delta(x, z) = \textit{sup}\ [d(x, z), d(z, x)].$$

Or :

$$d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z) \leqslant \delta(x, y) + \delta(y, z),$$
$$d(z, x) \leqslant d(z, y) + d(y, x) \leqslant \delta(x, y) + \delta(y, z).$$

D'où :

$$\textit{sup}\ [d(x, z), d(z, x)] \leqslant \delta(x, y) + \delta(y, z).$$

Ce qui établit l'inégalité triangulaire.

Exercice 5.

Soit O un ouvert au sens indiqué dans le cours. Soit $x \in O$ quelconque. Il est, d'après la définition, centre d'une boule incluse dans O. Soit U l'union de toutes les boules ainsi associées à chaque point de O. Par construction, $U \subset O$, mais, puisque U contient aussi tous les points de O, $U \supset O$, donc $U = O$ et O est une réunion de boules.

Soit, *réciproquement*, une réunion de boules. Une boule est un ouvert et une réunion d'ouverts est un ouvert.

Exercice 6.

Remarquons d'abord que la boule de la droite réelle de centre x_0 et de rayon r est l'intervalle $]x_0 - r, x_0 + r[$.

Soit O un ouvert de la droite réelle et soit $x_0 \in O$. Cherchons tous les points du complémentaire de O qui sont à droite de x_0. Ou bien il n'y en a pas, ce qui signifierait que la demi-droite $[x_0 + \infty[$ appartient à O ; ou bien il y en a et leur ensemble, minoré par x_0, admet une borne inférieure l. Si l appartenait à O, l devrait être centre d'une boule incluse dans O, c'est-à-dire d'un intervalle ouvert inclus dans O ; ceci serait en contradiction avec le fait qu'entre l et $l + \varepsilon$, il y a, si petit que soit ε, des éléments du complémentaire, donc $l \in \complement O$.

Il en résulte, puisque l est le plus petit élément du complémentaire supérieur à x_0, qu'on peut affirmer :

$$[x_0, l[\subset O \qquad \text{et} \qquad l \notin O.$$

En raisonnant de la même façon à gauche de x_0, on montrerait, de même, que O inclut ou toute la demi-droite $]-\infty, x_0]$ ou un semi-segment $]l', x_0]$, sans contenir l'. L'ouvert O inclut donc l'intervalle $]l', l[$ et tous ses autres points seront à droite de l ou à gauche de l'.

On a donc démontré que tout point de O appartient à un intervalle ouvert inclus dans O et disjoint de toute autre partie de O, cet intervalle pouvant, éventuellement, être une demi-droite ou la droite tout entière. On peut donc conclure que O est la réunion d'intervalles deux à deux disjoints.

Reste à montrer que le cardinal de la famille de ces intervalles est au plus $\aleph_0$.

On sait (cf. *A.P.M. I*) qu'à l'intérieur de tout intervalle $]\alpha, \beta[$ de la droite réelle, on peut choisir un rationnel. On peut donc définir une injection de l'ensemble des intervalles dont la réunion constitue O dans l'ensemble des rationnels. Par définition de l'inégalité entre nombres cardinaux, il en résulte que le cardinal de l'ensemble des intervalles est inférieur ou égal à celui des rationnels, c'est-à-dire à $\aleph_0$.

Exercice 7.

Soient d'abord $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ deux bases d'un filtre $\mathcal{F}$; tout élément B_1 de $\mathcal{B}_1$ appartient à $\mathcal{F}$ puisque $\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{F}$; donc, on peut dire, en vertu de la définition des bases, appliquée à $\mathcal{B}_2$ et à B_1 considéré comme élément du filtre :

$$\forall B_1 \in \mathcal{B}_1 \qquad \exists B_2 \in \mathcal{B}_2 \qquad B_2 \subset B_1. \tag{1}$$

On montrerait de la même façon, en intervertissant les rôles de $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ dans le raisonnement :

$$\forall B_2 \in \mathcal{B}_2 \qquad \exists B_1 \in \mathcal{B}_1 \qquad B_1 \subset B_2. \tag{2}$$

Réciproquement, soient deux ensembles $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ de parties de E satisfaisant à (1), (2) et aux axiomes des bases de filtre. Pour que F appartienne au filtre $\mathcal{F}_1$ engendré par $\mathcal{B}_1$, il faut, et il suffit, qu'il contienne un élément B_1 de $\mathcal{B}_1$:

$$F \in \mathcal{F}_1 \iff \exists B_1 \in \mathcal{B}_1 \qquad F \supset B_1.$$

Mais (1) entraîne $F \supset B_2$, donc $F \in \mathcal{F}_2$ si $\mathcal{F}_2$ est le filtre engendré par $\mathcal{B}_2$. D'où :

$$F \in \mathcal{F}_1 \implies F \in \mathcal{F}_2.$$

On montrerait de même l'implication inverse ; les deux filtres sont les mêmes et les bases sont équivalentes.

Exercice 8.

Une section finissante s d'un ensemble ordonné E est définie par la condition :

$$\forall x \in s \qquad y > x \implies y \in s.$$

Voyons à quelles conditions l'ensemble $\mathcal{B}$ des sections finissantes de E satisfait aux axiomes (B_1) et (B_2) des bases de filtres. Dès l'instant que E possède au moins un élément, il possède au moins la section finissante réduite à cet élément ; donc, $\mathcal{B} \neq \emptyset$. Comme, d'autre part, on ne considère que les sections finissantes non vides, $\emptyset \notin \mathcal{B}$. L'axiome ($B_2$) est donc vérifié. L'intersection de deux sections finissantes, si elle n'est pas vide, est une section finissante. Pour que (B_1) soit vérifié, ***il est donc nécessaire et suffisant que l'intersection de deux sections finissantes ne soit jamais vide.***

Cette condition peut être mise sous une forme équivalente :

Parmi les sections finissantes de E, on trouve celles formées de l'ensemble des majorants d'un élément de E. Pour que l'ensemble de deux telles sections finissantes $s_1 = \{ x > x_1 \}$ et $s_2 = \{ x > x_2 \}$ ait une intersection non vide, il faut que x_1 et x_2 possèdent des majorants communs.

Réciproquement, si E est tel que tout couple (x_1, x_2) d'éléments de E possède des majorants communs, deux sections finissantes non vides quelconques s et s' contiennent chacune au moins un élément, soient x et x' respectivement ; les majorants communs à x et x' appartiennent à $s \cap s'$ qui n'est donc pas vide.

Nous pouvons conclure : *Pour que l'ensemble des sections finissantes de l'ensemble ordonné* E *forme une base de filtre sur* E, *il faut, et il suffit, que l'ordre sur* E *soit tel que tout couple d'éléments de* E *possède au moins un majorant.*

Remarquons que tout demi-treillis (ensemble ordonné sur lequel tout couple d'éléments possède un *sup*) satisfait à cette condition et en particulier tout ensemble totalement ordonné. Mais le fait d'être un demi-treillis n'est pas nécessaire.

Remarquons encore que si nous considérons l'ensemble $\mathcal{B}'$ dont chaque élément est l'ensemble s_x des majorants de $x \in E$, cet ensemble $\mathcal{B}'$ est inclus dans $\mathcal{B}$.

Il est donc tel que :

$$\forall s_x \in \mathcal{B}' \qquad \exists s \in \mathcal{B} \qquad s = s_x. \tag{1}$$

Il satisfait aux axiomes des bases de filtre dans le cas où $\mathcal{B}$ y satisfait. Enfin, il est tel que :

$$\forall s \in \mathcal{B} \qquad \exists s_x \in \mathcal{B}' \qquad s_x \subset s. \tag{2}$$

(puisqu'il suffit pour cela de prendre $x \in s$).

Les conditions (1) et (2) montrent, en vertu de l'exercice précédent, que $\mathcal{B}'$ forme une base équivalente à $\mathcal{B}$, plus « économique » que $\mathcal{B}$.

Exercice 9.

Soit la formule :

$$\mathring{A} = \{ x ; A \in \mathcal{V}(x) \}.$$

Le complémentaire du premier membre est :

$$\complement \mathring{A} = \overline{\complement A}.$$

Le complémentaire du deuxième membre est :

$$A' = \{ x ; A \notin \mathcal{V}(x) \}. \tag{1}$$

Or :

$$\begin{aligned} A \notin \mathcal{V}(x) &\iff \forall V \in \mathcal{V}(x) \qquad V \not\subset A \\ &\iff \forall V \in \mathcal{V}(x) \qquad V \cap \complement A \neq \emptyset \\ &\iff x \in adh\ \complement A. \end{aligned}$$

Donc :

$$A' = adh\ \complement A.$$

et :

$$\overline{\complement A} = adh\ \complement A.$$

$\complement A$ étant une partie arbitraire de E, on a bien démontré l'identité de l'adhérence et de la fermeture.

Exercice 10.

a) *Par dualité :*

1° Partons de l'implication :

$$A \subset B \implies \overline{A} \subset \overline{B}$$

et écrivons un équivalent de chaque membre en faisant intervenir les complémentaires A' et B' de A et B respectivement. Il vient :

$$A' \supset B' \implies \mathring{A}' \supset \mathring{B}'.$$

2° Partons de la formule :

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

et cherchons les complémentaires des deux membres :

$$\complement\,\overline{A \cap B} = \overset{\circ}{\widehat{\complement(A \cup B)}} = \overset{\circ}{\widehat{A' \cap B'}}$$

$$\complement(\bar{A} \cup \bar{B}) = \complement\bar{A} \cap \complement\bar{B} = \mathring{A}' \cap \mathring{B}'$$

d'où :

$$\overset{\circ}{\widehat{A' \cap B'}} = \mathring{A}' \cap \mathring{B}'.$$

3° De même si on part de :

$$\overline{A \cap B} \subset \bar{A} \cap \bar{B}$$

on trouve comme complémentaire du premier membre $\widehat{A' \cup B'}$ et comme complémentaire du deuxième $\mathring{A}' \cup \mathring{B}'$. D'où :

$$\overset{\circ}{\widehat{A' \cup B'}} \supset \mathring{A}' \cup \mathring{B}'.$$

b) *Directement :*

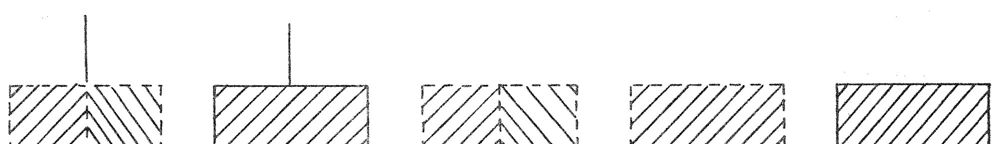
1° $\mathring{B}'$ plus grand ouvert contenu dans B', l'est dans A' qui inclut B', il est donc inclus dans le plus grand ouvert inclus dans A'.

2° $\mathring{A}'$ est un ouvert inclus dans A', $\mathring{B}'$ est un ouvert inclus dans B' ; leur intersection est donc un ouvert contenu dans $A' \cap B'$, donc dans $\overset{\circ}{\widehat{A' \cap B'}}$. Mais, réciproquement, $\overset{\circ}{\widehat{A' \cap B'}}$ est un ouvert contenu dans $A' \cap B'$, donc dans A' ; il est donc contenu dans $\mathring{A}'$; pour la même raison, il est contenu dans $\mathring{B}'$; il l'est donc dans $\mathring{A}' \cap \mathring{B}'$; l'égalité est établie.

3° $\overset{\circ}{\widehat{A' \cup B'}}$ est le plus grand ouvert contenu dans $A' \cup B'$; il contient donc tout ouvert contenu dans $A' \cup B'$ et en particulier $\mathring{A}'$ et $\mathring{B}'$; il contient donc $\mathring{A}' \cup \mathring{B}'$.

Exercice 11.

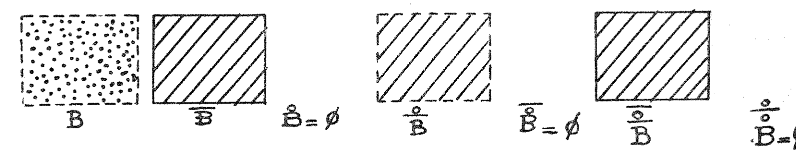
Considérons la partie A du plan représentée ci-dessous, les contours pointillés ne lui appartenant pas. On trouve successivement :



$A \qquad \bar{A} \qquad \mathring{A} \qquad \bar{\mathring{A}} \qquad \mathring{\bar{A}}$

Ces cinq ensembles sont distincts, mais $\mathring{\overline{\mathring{A}}} = \overline{\mathring{A}}$ et $\overline{\mathring{\overline{A}}} = \overline{\mathring{A}}$.

Considérons alors l'ensemble B formé de tous les points à coordonnées rationnelles d'un carré (côtés exclus). On trouve à partir de B les ensembles suivants (les régions hachurées sont considérées comme l'ensemble de tous leurs points ; les régions sablées comme l'ensemble de leurs points à coordonnées rationnelles) :



On a donc : $\mathring{\overline{\mathring{B}}} \neq \overline{\mathring{B}}$ et $\overline{\mathring{\overline{B}}} \neq \overline{\mathring{B}}$.

Il suffit alors de prendre comme ensemble C l'union de A et de B disposés de telle sorte que $\bar{A} \cap \bar{B} = \emptyset$ pour que les sept ensembles relatifs à C, qui sont tous, dans ce cas, l'union des ensembles correspondants relatifs à A et B soient distincts.

Exercice 12.

1° A fermé $\implies A = \bar{A} \implies \bar{A} \cap \complement A \subset A$.

Réciproquement, soit A tel que :

$$\bar{A} \cap \complement A \subset A \quad \text{qui équivaut à} \quad \bar{A} \cap \complement\mathring{A} \subset A.$$

Quel que soit $x \in \bar{A}$, ou bien $x \in \complement\mathring{A}$, et, en vertu de l'hypothèse, $x \in A$, ou bien $x \in \mathring{A}$, et comme $\mathring{A} \subset A$, x appartient encore à A. Donc :

$$x \in \bar{A} \implies x \in A$$

c'est-à-dire que $\bar{A} = A$ et A est fermé.

2° Soit A' le complémentaire de A. Remarquons que :

$$\text{frontière de } A = \bar{A} \cap \bar{A'} = \text{frontière de } A'.$$

L'équivalence du 1° peut s'écrire :

$$A' \text{ ouvert} \iff \text{frontière de } A' \text{ incluse dans } \complement A'.$$
$$\iff \text{frontière de } A' \text{ disjointe de } A'.$$

Exercice 13.

A est ouvert pour la topologie induite, il est donc nécessaire qu'il soit ouvert dans E. La condition est suffisante, puisqu'un ouvert de A est l'intersection d'un ouvert de E avec A et sera alors un ouvert de E. Raisonnement identique pour « fermé ».

Exercice 14.

Comparer les intérieurs revient à comparer les ensembles $\mathcal{O}_E^B$ et $\mathcal{O}_A^B$ des ouverts inclus dans B pour chacune des topologies. Or, si un ouvert, pour $\mathcal{T}$, est inclus dans B, il est aussi inclus dans A, donc est un ouvert pour $\mathcal{T}_A$.

D'où :

$$\mathcal{O}_E^B \subset \mathcal{O}_A^B$$

Or, $int_E B$ étant la réunion de tous les éléments de $\mathcal{O}_E^B$ est donc bien inclus dans $int_A B$, qui est la réunion de tous les éléments de $\mathcal{O}_E^A$.

2° Précisons d'abord qu'un fermé pour $\mathcal{T}_A$ est le complémentaire, par rapport à A d'un ouvert ; c'est donc l'intersection de A et d'un fermé pour $\mathcal{T}$. Ceci dit, un fermé pour $\mathcal{T}_A$ qui inclut B est l'intersection avec A d'un fermé pour $\mathcal{T}$ qui inclut B.

Les fermés qui servent à définir $adh_A B$ sont donc les intersections avec A de ceux qui servent à définir $adh_E B$. Si $\mathcal{F}$ représente l'ensemble des fermés de E (pour $\mathcal{T}$) on a :

$$adh_E B = \bigcap \{ F \in \mathcal{F} ; F \supset B \} \qquad adh_A B = \bigcap \{ F \cap A ; F \in \mathcal{F}\ F \supset B \}$$

mais en vertu des propriétés de l'intersection de deuxième ensemble est :

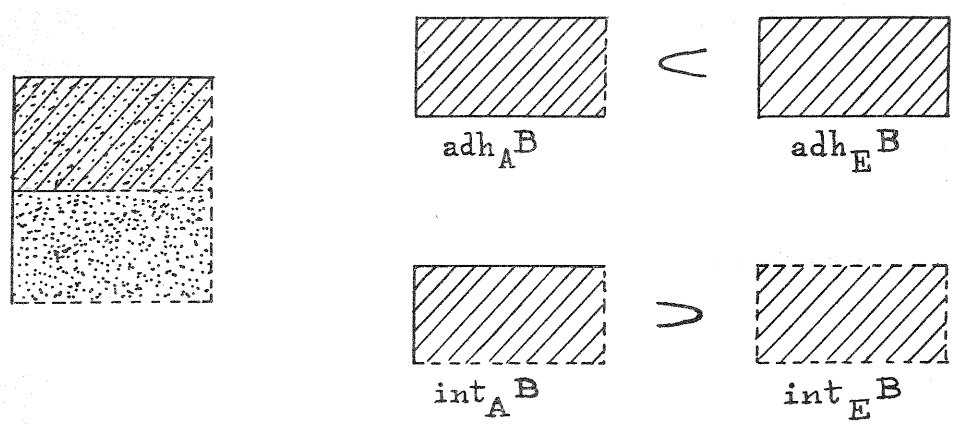
$$adh_A B = A \cap \bigcap \{ F \in \mathcal{F} ; F \supset B \}$$

d'où :

$$adh_A B = A \cap adh_E B$$

Représentons les différents ensembles, intervenant dans cet exercice, sur l'exemple suivant :

A : sablé et comprenant les bords tracés en traits pleins ;
B : hachuré et comprenant ses bords tracés en traits pleins ;
E : le plan muni de sa topologie usuelle.



Exercice 15.

Pour que tout élément de $\mathcal{F}_2$ soit élément de $\mathcal{F}_1$, il faut que :

$$\forall F_1 \in \mathcal{F}_1 \quad \exists B_2 \in \mathcal{B}_2 \quad B_2 \subset F_1.$$

Les éléments B_1 de $\mathcal{B}_1$ figurant parmi les éléments F_1 de $\mathcal{F}_1$, cette condition comprend la condition :

$$\forall B_1 \in \mathcal{B}_1 \quad \exists B_2 \in \mathcal{B}_2 \quad B_2 \subset B_1. \qquad (1).$$

La condition ainsi trouvée est suffisante car si $F_1 \in \mathcal{F}_1$, il existe $B_1 \in \mathcal{B}_1$ telle que $B_1 \subset F_1$ donc :

$$\exists B_2 \in \mathcal{B}_2 \qquad B_2 \subset B_1 \subset F_1.$$

et comme B_2 est élément de $\mathcal{F}_2$ on a bien montré que F_1, appartenait à $\mathcal{F}_2$.

La condition (1) étant réalisée, supposons que l'inclusion $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2$ soit stricte ; ceci signifie :

$$\exists F_2 \in \mathcal{F}_2 \qquad F_2 \notin \mathcal{F}_1,$$

c'est-à-dire :

$$\exists F_2 \in \mathcal{F}_2 \qquad \forall B_1 \in \mathcal{B}_1 \qquad B_1 \not\subset F_2.$$

F_2 contenant un élément B_2 de $\mathcal{B}_2$, cette condition entraîne *a fortiori :*

$$\exists B_2 \in \mathcal{B}_2 \qquad \forall B_1 \in \mathcal{B}_1 \qquad B_1 \not\subset B_2. \qquad (2).$$

Réciproquement, si (2) est vérifié, l'élément B_2 de $\mathcal{F}_2$ n'appartient pas à $\mathcal{F}_1$ et l'inclusion $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2$ est stricte.

Remarque. — Ces conditions (1) et (2) peuvent naturellement être appliquées à $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ eux-mêmes, considérés comme leurs propres bases.

Exercice 16.

1) L'intersection d'une famille finie de demi-droites $]a_i, +\infty[$, $(i \in I)$, est la demi-droite $]b, +\infty[$, si $b = sup \{ a_i ; i \in I \}$. Il en résulte, en utilisant les notations du cours que $\mathcal{G}_1 = \mathcal{G}$. Une réunion de demi-droites $]b_j, +\infty[$, $(j \in J$; J ensemble fini ou infini d'indices), est la demi-droite $]c, +\infty[$, avec $c = inf \{ b_j ; j \in J \}$, si l'ensemble $\{ b_j \}$ est borné. C'est la droite tout entière si cet ensemble n'est pas borné. On a donc $\mathcal{G}_2 = \mathcal{G} \cup \{ \mathbf{R} \}$.

2) Raisonnement analogue dans le cas des demi-droites.

$$]-\infty, a[$$

3) Une intersection finie de demi-droites est, en vertu de ce qui précède l'intersection de deux demi-droites appartenant à chacune des deux familles ; cette intersection est vide ou bien est un intervalle ouvert. L'ensemble $\mathcal{G}_1$ est donc l'ensemble des intervalles ouverts de la droite. L'ensemble $\mathcal{G}_2$ est donc l'ensemble des réunions d'intervalles ; on sait qu'il est constitué de l'ensemble des réunions d'intervalles disjoints et on retrouve la topologie usuelle de $\mathbf{R}$.

4) On trouve $\mathcal{G}_1 = \mathcal{G}$ comme au 1), mais l'*inf* d'un ensemble borné de rationnels est un réel, généralement non rationnel donc $\mathcal{G}_2$ est l'ensemble des demi-droites $]a, +\infty[$, où a décrit $\mathbf{R}$. La topologie 4) est donc la même que la topologie 1).

Remarquons que l'ensemble des ouverts obtenu à partir de l'ensemble $\mathcal{G}_1$ du 4) étant le même que celui obtenu à partir du $\mathcal{G}_1$ du 1), le $\mathcal{G}_1$ du 4) fournit une autre base des ouverts de la topologie 1) (base incluse dans la première).

5) Même raisonnement. La topologie est identique à la topologie 2).

6) Les réunions infinies d'intervalles ouverts à extrémités rationnelles sont des intervalles à extrémités réelles ; la topologie 6) est la même que la topologie 3) dont nous venons de trouver une base moins riche.

Nous ne retenons donc que les trois topologies 1), 2), 3), la troisième étant la topologie usuelle.

Applications continues. — Appelons $\mathbf{R}_1$, $\mathbf{R}_2$, $\mathbf{R}_3$ l'espace $\mathbf{R}$ muni respectivement des topologies 1), 2), 3). Nous devons examiner ce qu'est chacune des neuf familles d'applications continues de $\mathbf{R}_1$ dans $\mathbf{R}_1$, de $\mathbf{R}_1$ dans $\mathbf{R}_2$, ... etc... Une application continue de $\mathbf{R}_3$ dans $\mathbf{R}_3$ est continue au sens usuel du mot.

• *Applications continues* de $\mathbf{R}_1$ dans $\mathbf{R}_1$. Soit a quelconque et son image $f(a)$; l'ouvert $]f(a), +\infty[$, doit avoir pour image réciproque une demi-droite $]b, +\infty[$, qui ne doit pas contenir a, donc avec $b \geqslant a$:

$$\overset{-1}{f}\ ]f(a), +\infty[\ = \ ]b, +\infty[\quad \text{avec} \quad b \geqslant a$$

Mais ceci entraîne :

$$\forall\ x < b \qquad f(x) \notin\ ]f(a), +\infty[$$

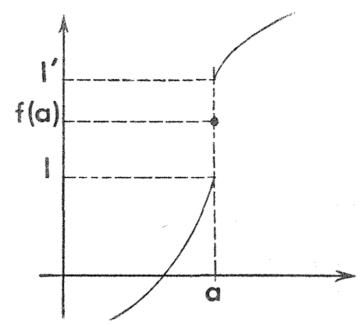
ou encore :

$$x < b \implies f(x) \leqslant f(a)$$

donc :

$$x < a \implies f(x) \leqslant f(a)$$

L'application f doit être croissante. *Examinons si cette condition est suffisante.* Si a est une valeur quelconque où f est continue au sens ordinaire du mot, l'image réciproque de $]f(a), +\infty[$ sera $]a, +\infty[$; mais supposons qu'en a, la fonction f soit discontinue, elle a une limite



à gauche l, une limite à droite l'. L'image réciproque de $]b, +\infty[$, pour tout b tel que $f(a) \leqslant b \leqslant l'$ est $]a, +\infty[$; mais l'image réciproque de $]b, +\infty[$, pour b tel que $l \leqslant b < f(a)$ est $[a, +\infty[$ et n'est donc pas un ouvert. Pour que l'application f soit continue de $\mathbf{R}_1$ dans $\mathbf{R}_1$ il est donc nécessaire que $f(a) = l$, c'est-à-dire que f soit continue à gauche au sens usuel du mot ; et le raisonnement précédent montre que l'ensemble de la condition f croissante et de cette nouvelle condition est suffisant.

Les applications continues *de* $\mathbf{R}_1$ *dans* $\mathbf{R}_1$ sont celles qui *sont croissantes et continues à gauche* (au sens usuel du mot).

• Par des raisonnements analogues, on trouve que les applications continues :

de $\mathbf{R}_2$ *dans* $\mathbf{R}_2$ sont celles qui sont *croissantes et continues à droite.*
de $\mathbf{R}_1$ *dans* $\mathbf{R}_2$ sont celles qui sont *décroissantes et continues à gauche.*
de $\mathbf{R}_2$ *dans* $\mathbf{R}_1$ sont celles qui sont *décroissantes et continues à droite.*

• *Les applications continues de* $\mathbf{R}_1$ (resp. $\mathbf{R}_2$) *dans* $\mathbf{R}_3$ doivent être continues au sens de la topologie de $\mathbf{R}_1$ (resp. $\mathbf{R}_2$) dans $\mathbf{R}_1$ et dans $\mathbf{R}_2$ puisque l'ensemble des ouverts de $\mathbf{R}_3$ contient ceux des ouverts de $\mathbf{R}_1$ et

de $\mathbf{R}_2$. Ces applications doivent être à la fois croissantes et décroissantes. Elles sont donc constantes. *Réciproquement,* une application constante ($\forall\ x$, $f(x) = a$) est bien continue de $\mathbf{R}_1$ dans $\mathbf{R}_3$, puisque l'image réciproque d'un ouvert de $\mathbf{R}_3$ qui contient a sera $\mathbf{R}_1$ tout entier, et celle d'un ouvert qui ne contient pas a sera le vide. Donc :

les applications continues de $\mathbf{R}_1$ dans $\mathbf{R}_3$ sont les *applications constantes.*
les applications continues de $\mathbf{R}_2$ dans $\mathbf{R}_3$ sont les *applications constantes,*

Remarque. — Ce résultat peut être retrouvé directement. Soient a et b ($a < b$) deux éléments quelconques de $\mathbf{R}_1$, $f(a)$ et $f(b)$ leurs images. L'image réciproque d'un intervalle ouvert contenant $f(a)$ et ne contenant pas $f(b)$ doit être une demi-droite $]c, +\infty[$ contenant a et ne contenant pas b, ce qui est impossible. Il est donc nécessaire que $f(a) = f(b)$.

Restent à étudier les applications continues de $\mathbf{R}_3$ dans $\mathbf{R}_1$ et dans $\mathbf{R}_2$. Pour qu'une application de $\mathbf{R}_3$ dans $\mathbf{R}_1$ soit continue en x_0, il faut et il suffit que tout voisinage de $f(x_0)$ contienne l'image d'un voisinage de x_0, c'est-à-dire, que pour toute demi-droite $]b, +\infty[$, avec $b < f(x_0)$, il existe un intervalle $]x_0 - \eta, x_0 + \eta[$ dont l'image soit incluse dans $]b, +\infty[$:

$$\forall\ b < f(x_0) \qquad \exists\ \eta \qquad |x - x_0| < \eta \implies f(x) > b$$

ou encore :

$$\forall\ \varepsilon > 0 \qquad \exists\ \eta \qquad |x - x_0| < \eta \implies f(x) > f(x_0) - \varepsilon.$$

Une fonction qui satisfait à cette condition est semi-continue inférieurement.

Pour qu'une application de $\mathbf{R}_3$ dans $\mathbf{R}_2$ soit continue, on trouvera de même la condition :

$$\forall\ \varepsilon \qquad \exists\ \eta \qquad |x - x_0| < \eta \implies f(x) < f(x_0) + \varepsilon.$$

Les applications continues de :

$\mathbf{R}_3$ dans $\mathbf{R}_1$ sont les applications *semi-continues inférieurement* ;
$\mathbf{R}_3$ dans $\mathbf{R}_2$ sont les applications *semi-continues supérieurement.*

Exercice 17.

En chaque point x de E, considérons l'intersection des boules relatives à un même rayon $r \in \mathbf{R}^+ - \{0\}$ et à une famille finie d'écarts e_i (i décrit une partie finie J de I). Appelons cet élément pseudo-boule, notons-le :

$$\mathrm{B}(x, \mathrm{J}, r)$$

et appelons $\mathcal{B}$ la famille de pseudo-boules obtenues quand x décrit E, r décrit $\mathbf{R}^+ - \{0\}$ et J l'ensemble des parties finies de I.

Tout élément de $\mathcal{B}$ est un ouvert de $\mathcal{T}$, puisque c'est une intersection finie d'ouverts. Pour montrer que $\mathcal{B}$ est une base des ouverts de $\mathcal{T}$, il suffit donc de montrer que tout ouvert de $\mathcal{T}$ est une réunion d'éléments de $\mathcal{B}$.

Or, tout ouvert de $\mathcal{T}$ est une réunion d'ensembles U, eux-mêmes intersections finies de boules. Soit U un tel ensemble. Il est défini par l'ensemble J des indices des écarts, par l'ensemble des centres pour chaque indice $i \in \mathrm{J}$ et par l'ensemble des rayons pour chaque centre et pour chaque indice. Soit x un point de U. Ce point appartenant à une boule relative à l'écart e_i est centre d'une autre boule $\mathrm{B}(x, e_i, r_i)$, relative à cet écart et incluse dans la précédente, donc dans U. Il en est de même pour tous les e_i ($i \in J$) ; x est donc centre de la pseudo-boule :

$$\mathrm{B}(x, \mathrm{J}, \rho)$$

si ρ représente $inf \{ r_i ; i \in J \}$, nombre positif, puisque J est fini. Cette pseudo-boule est incluse dans U.

Tout point de U appartient donc à un élément de $\mathcal{B}$ inclus dans U. Il en résulte que U est une réunion d'éléments de $\mathcal{B}$: et un ouvert de $\mathcal{T}$, réunion d'éléments tels que U est aussi une réunion d'éléments de $\mathcal{B}$.

Supposons maintenant que I soit fini ; et définissons l'écart e par :

$$e(x, y) = sup \{ e_i(x, y) \; ; \; i \in I \}$$

nombre qui existe puisque I est fini. C'est un écart, les deux premiers axiomes se vérifiant immédiatement et l'inégalité triangulaire résultant de ce que :

$$e(x, z) = sup \{ e_i(x, z) \} \leqslant sup \{ e_i(x, y) + e_i(y, z) \}$$
$$\leqslant sup \{ e_i(x, y) \} + sup \{ e_i(y, z) \} = e(x, y) + e(y, z).$$

D'autre part, la boule relative à cet écart et au rayon r, soit $B(x, e, r)$, coïncide avec la pseudo-boule $B(I, x, r)$ définie précédemment, car :

$$y \in \bigcap_{i \in I} B(e_i, x, r) \iff \forall i \in I \quad e_i(x, y) < r \iff sup \{ e_i(x, y) \} < r$$
$$\iff y \in B(e, x, r).$$

Tout point d'un ensemble U est donc centre d'une boule relative à l'écart e incluse dans U et ces boules forment une base de la topologie $\mathcal{T}$.

On aurait pu aussi bien utiliser les écarts :

$$e(x, y) = \sum_{i \in I} e_i(x, y)$$

ou :

$$e(x, y) = \sqrt{\sum_{i \in I} (e_i)^2(x, y)}.$$

Exercice 18.

Soit f un des homéomorphismes cherchés, et trois points a, b, c, avec $a < b < c$, de $[0, 1]$, et α, β, γ les valeurs de f en ces points, distinctes puisque f est bijective. Supposons que β n'appartienne pas à l'intervalle $]\alpha, \gamma[$. La fonction f, étant continue, prendrait au moins deux fois les valeurs comprises entre β et le plus proche des deux nombres α et γ, ce qui est absurde. f doit donc être monotone.

Inversement, une application monotone et continue de $[0, 1]$ sur $[0, 1]$ a une réciproque continue et est bien un homéomorphisme de $[0, 1]$ sur lui-même.

Exercice 19.

Admettons que l'application de $(E_1 \times E_2)^2$ dans $\mathbf{R}^+$ vérifie bien les propriétés d'une distance. Soit $\mathcal{T}$ la topologie qu'elle définit, $\mathcal{T}'$ la topologie produit. Montrer que $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$ coïncident revient à montrer, par exemple, que, pour tout x de E, les filtres des voisinages $\mathcal{V}(x)$ et $\mathcal{V}'(x)$ pour chacune des topologies sont les mêmes, c'est-à-dire que tout élément de $\mathcal{V}(x)$ inclut un élément de $\mathcal{V}'(x)$ et réciproquement. La topologie $\mathcal{T}$ étant définie par ces boules B_d et $\mathcal{T}'$ par la base de ses ouverts : $\{ O_1 \times O_2 \; ; \; O_1 \in \mathcal{O}_1 \; O_2 \in \mathcal{O}_2 \}$, il faut que tout $O_1 \times O_2$ contenant x contienne une boule de centre x et que toute boule de centre x contienne

un ouvert qui contient x. Cette double condition est nécessaire et suffisante (cf. exercice 15). Notons que ce type de raisonnement peut aussi s'interpréter comme démonstration de la bicontinuité de l'application identique (cf. III, 4, 2).

Pour chacune des distances d proposées nous devrons donc :

1° vérifier qu'il s'agit d'une distance ;

2° vérifier la double condition précédente.

● CAS a) : $d(x, y) = d_1(x_1, y_1) + d_2(x_2, y_2)$.

Première partie : d est une distance.

1) $d(x, y) = 0 \iff \begin{cases} d_1(x_1, y_1) = 0 \iff x_1 = y_1 \\ d_2(x_2, y_2) = 0 \iff x_2 = y_2 \end{cases} \iff x = y.$

2) $d(x, y) = d(y, x)$ puisque $\begin{cases} d_1(x_1, y_1) = d_1(y_1, x_1) \\ d_2(x_2, y_2) = d_2(y_2, x_2). \end{cases}$

3) Comparons $d(x, z) = d_1(x_1, z_1) + d_2(x_2, z_2)$ et

$d(x, y) + d(y, z) = d_1(x_1, y_1) + d_2(x_2, y_2) + d_1(y_1, z_1) + d_2(y_2, z_2)$.

L'inégalité triangulaire appliquée à d_1 et à d_2 entraîne que la deuxième somme est supérieure à la première.

Donc d est une distance.

Deuxième partie.

Tout ouvert $O_1 \times O_2$ de la topologie produit contenant le point (x_1, x_2) contient $B_1 \times B_2$, B_1 étant une boule de E_1 pour d_1, soit $B(x_1, r_1)$ et B_2 une boule de E_2 pour d_2 soit $B(x_2, r_2)$.

$B_1 \times B_2$ contient la boule $B((x_1, x_2) \; ; \; inf \, (r_1, r_2))$ pour la distance que nous étudions. Et une boule $B((x_1, x_2), \rho))$ pour cette distance contient l'ouvert $B\left(x_1, \frac{\rho}{2}\right) \times B\left(x_2, \frac{\rho}{2}\right)$.

● CAS b) : $d(x, y) = sup \{ d_1(x_1, y_1), \; d_2(x_2, y_2) \}$.

Première partie : d est une distance.

1) $d(x, y) = 0 \iff x = y$

2) $d(x, y) = d(y, x)$

Mêmes démonstrations qu'au a).

3) Comparons $d(x, z)$ et

$$d(x, y) + d(y, z) = sup \left((d_1(x_1, y_1), d_2(x_2, y_2)\right) + sup \left(d_1(y_1, z_1), \; d_2(y_2, z_2)\right)$$

La somme des *sup* est supérieure ou égale au *sup* des sommes donc :

$$d(x, y) + d(y, z) \geqslant d(x, z).$$

Deuxième partie.

Cette fois $B_1 \times B_2$, défini comme au a, contient la boule $B\left((x_1, x_2), inf \, (r_1, r_2)\right)$ et $B\left((x_1, x_2), \rho\right)$ contient l'ouvert

$$B_1(x_1, \rho) \times B_2(x_2, \rho).$$

● CAS c) :

Première partie.

1) $d(x, y) = 0 \iff x = y$

2) $d(x, y) = d(y, x)$

Même démonstration qu'au a).

3) Pour comparer $d(x, z)$ et $d(x, y) + d(y, z)$, comparons leurs carrés :

$A = [d_1(x_1, z_1)]^2 + d_2(x_2, z_2]^2$ et $B = [d(x, y) + d(y, z)]^2$, c'est-à-dire

$B = [d_1(x_1, y_1)]^2 + [d_2(x_2, y_2)]^2$
$+ [d_1(y_1, z_1)]^2 + [d_2(y_2, z_2)]^2 + 2d(x, y) . d(y, z).$

Or, $A \leqslant A'$ avec :

$$A' = [d_1(x_1, y_1) + d(y_1, z_1)]^2 + [d_2(x_2, y_2) + d_2(y_2, z_2)]^2,$$

soit, en posant $\begin{cases} d_1(x_1, y_1) = \alpha_1 & d_1(y_1, z_1) = \beta_1, \\ d_2(x_2, y_2) = \alpha_2 & d_2(y_2, z_2) = \beta_2. \end{cases}$

$$A' = \alpha_1^2 + \beta_1^2 + \alpha_2^2 + \beta_2^2 + 2\alpha_1\beta_1 + 2\alpha_2\beta_2$$

Comparer A′ à B revient à comparer :
$\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2$ et $d(x, y)\ d(y, z)$. Pour comparer ces quantités positives, comparons leurs carrés :

$$(\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2)^2 \quad \text{et} \quad (\alpha_1^2 + \alpha_2^2)(\beta_1^2 + \beta_2^2)$$

Il est immédiat que la deuxième est plus grande que la première (c'est d'ailleurs un cas particulier très simple de l'inégalité de Schwarz), donc $B \geqslant A' \geqslant A$ et l'inégalité triangulaire est encore vérifiée.

Deuxième partie.

$B_1 \times B_2$ contient la boule $B\big((x_1, x_2),\ \mathit{inf}\,(r_1, r_2)\big)$, et la boule $B((x_1, x_2), \rho)$ contient l'ouvert $B_1\left(x_1, \dfrac{\rho}{\sqrt{2}}\right) \times B_2\left(x_2, \dfrac{\rho}{\sqrt{2}}\right)$.

Exercice 20.

1° *a*) $\delta = \dfrac{d}{1 + d}$ est une distance.

En effet :

1) $\delta(x, y) = 0 \iff d(x, y) = 0 \iff x = y$.
2) $\delta(x, y) = \delta(y, x)$ puisque $d(x, y) = d(y, x)$.
3) *Inégalité triangulaire.* Soit à comparer $\delta(x, z)$ et $\delta(x, y) + \delta(y, z)$.

Remarquons d'abord que l'application $X \longrightarrow \dfrac{X}{1 + X}$ étant croissante dans $]0, +\infty[$, si $d(x, z)$ est inférieure soit à $d(x, y)$, soit à $d(y, z)$, la même inégalité est vérifiée par les δ correspondants et l'inégalité est démontrée. Soit donc le cas où $d(x, z) \geqslant d(x, y)$ et $d(x, z) \geqslant d(y, z)$. Dans ce cas :

$$\delta(x, y) + \delta(y, z) \geqslant \frac{d(x, y) + d(y, z)}{1 + d(x, z)} \geqslant \frac{d(x, z)}{1 + d(x, z)} = \delta(x, z)$$

et l'inégalité est encore vérifiée.

b) Comparaison des topologies définies par d et δ.

Une boule $B_\delta(x, r)$ relative à la distance δ est l'ensemble des points y tels que :

$$\delta(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)} < r < 1 \qquad (1)$$

(Si $r \geqslant 1$, la boule $B_\delta(x, r)$ est E tout entier, puisque δ est toujours inférieur à 1).

L'inégalité (1) équivaut à :

$$d(x, y) < \frac{r}{1 - r}.$$

$\dfrac{1 - r}{r}$ étant positif, la boule $B_\delta(x, r)$ coïncide avec la boule $B_d\left(x, \dfrac{r}{1 - r}\right)$.

Pour tout x, les deux topologies ont donc le même ensemble de boules de centre x (sauf E qui est une boule B_δ et n'est pas une boule B_d, mais est toutefois un ouvert).

2° Observons d'abord que la série de terme général $\dfrac{\delta_n}{2^n}$ est majorée par celle de terme $\dfrac{1}{2^n}$, série convergente de somme 1 ; δ est donc bien un nombre réel positif.

$$\delta(x, y) = 0 \iff \forall n \quad \delta_n = 0 \iff x = y$$

$$\delta(x, y) = \delta(y, x) \text{ puisque } \forall n,\ \delta_n(x, y) = \delta_n(y, x).$$

Enfin :

$$\delta(x, y) + \delta(y, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\delta_n(x, y)}{2^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\delta_n(y, z)}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\delta_n(x, y) + \delta_n(y, z)}{2^n}$$

$$\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\delta_n(x, z)}{2^n} = \delta(x, z)$$

δ est bien une distance sur E. Appelons $\mathcal{T}$ la topologie d'espace métrique qu'elle définit.

Soit $\mathcal{T}'$ la topologie produit. Une base des ouverts de la topologie $\mathcal{T}_i$ sur l'espace E_i, définie par la distance δ_i étant fournie par les boules B_i relatives à cette distance, on obtient conformément à la théorie générale (voir III, 3, 2), une base des ouverts de $\mathcal{T}'$ en prenant l'ensemble des parties de E de la forme

$$O = \prod_{i \in I} B_i \times \prod_{j \in N - I} E_j$$

I décrivant l'ensemble des parties finies de **N**, les rayons des boules décrivant $\mathbf{R}^+ - \{0\}$ et leurs centres décrivant respectivement chaque E_i.

Pour montrer que $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$ coïncident, nous nous trouvons dans la même situation que dans l'exercice précédent et devons montrer que tout ensemble U de la base des ouverts de $\mathcal{T}'$ qui contient x, contient une boule $B_\delta(x, r)$ de $\mathcal{T}$ et que toute boule $B_\delta(x, r)$ contient un ouvert U qui contient x.

Soit un ouvert :

$$O = B_{i_1}(\xi_{i_1}\ \rho_1) \times B_{i_2}(\xi_{i_2}\ \rho_2) \ \dots\ B_{i_n}(\xi_{i_n}, \rho_n) \times \prod_{j \in N - I} E_j$$

déterminé par le choix de $I = \{i_1, i_2 \dots i_n\}$, des n centres et des n rayons. Soit $x = \{x_k\}$, $(k \in \mathbf{N})$, un point de U (x_{i_1} appartient à B_{i_1} ; x_{i_2} à B_{i_2} ; ..., x_{i_n} à B_{i_n} ; les autres x_k étant quelconques dans l'espace E_k correspondant). x_{i_1} est donc le centre d'une boule $B_{i_1}(x_{i_1}, r_1)$ incluse dans $B_{i_1}(\xi_{i_1}, \rho_1)$, ..., x_{i_n} est le centre d'une boule $B_{i_n}(x_{i_n}, r_n)$ incluse dans $B_{i_n}(\xi_{i_n}, \rho_n)$.

Posons alors :

$$r = \mathit{inf}\left\{\frac{2^i}{r_i}\ ;\ i \in I\right\}$$

et considérons la boule $B_\delta(x, r)$ de centre x et de rayon r. Cette boule est incluse dans U. Il est en effet évident que, pour que la somme de la série définissant $\delta(x, y)$ soit inférieure à r, il faut que chacun des termes soit inférieur à r, donc en particulier :

$$\forall\, i \in \mathrm{I} \qquad \frac{\delta_i(x_i, y_i)}{2^i} < r$$

ce qui entraîne : $\delta_i(x_i, y_i) < r_i$

soit : $y_i \in \mathrm{B}_i$.

Réciproquement, soit une boule $\mathrm{B}_\delta(x, \rho) = \{ y \; ; \; \delta(x, y) < \rho \}$ et soit n_0 tel que :

$$\frac{1}{2^{n_0}} < \rho < \frac{1}{2^{n_0-1}}$$

La boule $\mathrm{B}_\delta\left(x, \frac{1}{2^{n_0}}\right)$ est incluse à l'intérieur de la précédente. Or, on peut rendre $\delta(x, y)$ inférieur à $\frac{1}{2^{n_0}}$ en choisissant les distances $\delta_n(x_n, y_n)$ de la façon suivante : on ne précise rien pour les indices $n \geqslant n_0 + 2$ et pour les $n_0 + 1$ premiers indices, on choisit :

$$\frac{\delta_n(x_n, y_n)}{2^n} < \frac{(n_0+1)2^{n_0+1}}{1} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \delta_n(x_n, y_n) < \frac{1}{n_0+1}\, 2^{n-n_0-1}$$

On aura alors, en effet :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\delta_n(x_n, y_n)}{2^n} = \sum_{n=1}^{n_0+1} \frac{\delta_n(x_n, y_n)}{2^n} + \sum_{n=n_0+2}^{\infty} \frac{\delta_n(x_n, y_n)}{2^n}$$

$$< (n_0+1)\,\frac{1}{(n_0+1)2^{n_0+1}} + \frac{1}{2^{n_0+2}} \times \frac{1}{1-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{2^{n_0+1}} + \frac{1}{2^{n_0+1}} = \frac{1}{2^{n_0}}$$

Or, l'ensemble des éléments y qui satisfont à ces conditions constitue un ensemble inclus dans $\mathrm{B}_\delta\left(x, \frac{1}{2^{n_0}}\right)$, et qui est :

$$\prod_{n=1}^{n_0+1} \mathrm{B}_n\left(x_n, \frac{2^{n-n_0-1}}{n_0+1}\right) \times \prod_{n=n_0+2}^{\infty} \mathrm{E}_n$$

c'est-à-dire un ensemble U.

Exercice 21.

Par définition de la topologie produit, p_1 et p_2 sont continues ; la composée de deux applications continues étant continue,

$$f \text{ continue} \implies \left.\begin{matrix} p_1 \circ f \\ p_2 \circ f \end{matrix}\right\} \text{continues}$$

Réciproquement, supposons que $p_1 \circ f$ et $p_2 \circ f$ soient continues. L'image réciproque $(p_1 \circ f)^{-1}(\mathrm{O}_1)$ d'un ouvert O_1 de E_1 est un ouvert de F ; mais :

$$(p_1 \circ f)^{-1}(\mathrm{O}_1) = \overset{-1}{f}\left(\overset{-1}{p_1}(\mathrm{O}_1)\right)$$

L'hypothèse signifie que l'image réciproque par f de $\overset{-1}{p_1}(\mathrm{O}_1)$ pour tout $\mathrm{O}_1 \in \mathcal{O}^1$ est un ouvert de F. De même, l'image réciproque par f de $\overset{-1}{p_2}(\mathrm{O}_2)$,

pour tout $\mathrm{O}_2 \in \mathcal{O}_2$, est un ouvert de F. Mais l'image réciproque d'une intersection est l'intersection des images réciproques. Donc :

$$\overset{-1}{f}\left(\overset{-1}{p_1}(\mathrm{O}_1) \cap \overset{-1}{p_2}(\mathrm{O}_2)\right)$$

est un ouvert de F pour tout $\mathrm{O}_1 \in \mathcal{O}_1$ et tout $\mathrm{O}_2 \in \mathcal{O}_2$.

Or : $\{ \overset{-1}{p_1}(\mathrm{O}_1) \cap \overset{-1}{p_2}(\mathrm{O}_2) \; ; \; \mathrm{O}_1 \in \mathcal{O}_1, \; \mathrm{O}_2 \in \mathcal{O}_2 \}$ constitue une base des ouverts de $\mathrm{E}_1 \times \mathrm{E}_2$; f est donc continue.

Soient φ_1 et φ_2 les homéomorphismes de E_1 sur $\mathrm{E'}_1$ et E_2 sur $\mathrm{E'}_2$. A tout $(x_1, x_2) \in \mathrm{E}_1 \times \mathrm{E}_2$, faisons correspondre $(x'_1, x'_2) \in \mathrm{E'}_1 \times \mathrm{E'}_2$ avec : $x'_1 = \varphi_1(x_1)$, $x'_2 = \varphi_2(x)$ conformément au schéma suivant. L'application f ainsi définie est bijective. Montrons qu'elle est bicontinue. Pour

$$\begin{tikzcd}
 & x_1 \arrow[r, "\varphi_1"] & x'_1 & \\
(x_1, x_2) \arrow[ur, "p_1"] \arrow[dr, "p_2"'] \arrow[rrr, "f"] & & & (x'_1, x'_2) \arrow[ul, "p'_1"'] \arrow[dl, "p'_2"] \\
 & x_2 \arrow[r, "\varphi_2"] & x'_2 &
\end{tikzcd}$$

que f, application de $\mathrm{F} = \mathrm{E}_1 \times \mathrm{E}_2$ dans $\mathrm{E'}_1 \times \mathrm{E'}_2$ soit continue, il suffit d'après ce qui précède que $p'_1 \circ f$ et $p'_2 \circ f$ soient continues. Mais :

$$p'_1 \circ f = \varphi_1 \circ p_1 \qquad \text{et} \qquad p'_2 \circ f = \varphi_2 \circ p_2.$$

Or, φ_1 (resp. φ_2) est continue par hypothèse et p_1 (resp. p_2) l'est par définition de la topologie produit, donc f est continue. On montrera de façon analogue que f^{-1} l'est aussi.

Exercice 22.

I. — 1° $\delta(f, g) = 0 \iff f = g$

$\delta(f, g) = \delta(g, f)$.

Appelons $a', a'', a''', b', b'', b''', c', c'', c'''$ les images de a, b, c respectivement par f, g, h :

$$\begin{aligned} \delta(f, g) + \delta(g, h) &= \sup\,(a'a'', b'b'', c'c'') + \sup\,(a''a''', b''b''', c''c''') \\ &\geqslant \sup\,(a'a'' + a''a''', b'b'' + b''b''', c'c'' + c''c''') \\ &\geqslant \sup\,(a'a''', b'b''', c'c''') = \delta(f, h) \end{aligned}$$

δ est donc bien une distance.

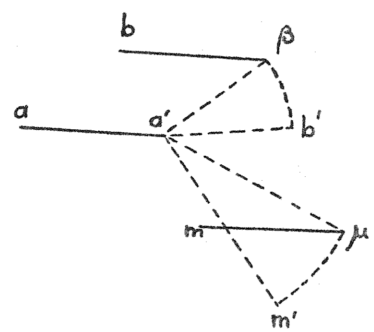
2° Soit une isométrie directe f.

Cette isométrie peut être décomposée en une translation qui transforme a en a', b en β, c en α, et un point arbitraire m en μ, suivie d'une rotation de centre a qui tranforme β en b', α en c' et μ en m'. Si on désigne par e l'identité, nous avons :

$$\delta(e, f) = \sup\,(aa', bb', cc').$$

D'autre part :

$$d(m, f(m)) = mm' \leqslant m\mu + \mu m'$$
$$= aa' + \beta b' \frac{\mu a'}{\beta a'}$$
$$= aa' + \beta b' \frac{ma}{ba}$$



Or : $\beta b' \leqslant \beta b + bb' = aa' + bb'$.

D'où : $mm' \leqslant aa' + (aa' + bb') \dfrac{ma}{ba} \leqslant \delta(e, f) . \left(1 + 2 \dfrac{ma}{ba}\right)$.

Donc : $d(m, f(m)) \leqslant \lambda . \delta(e, f)$,

λ étant un coefficient positif qui ne dépend que du point m (et ne dépend pas de f).

Plus généralement, si *f et g sont deux isométries de même nature :*

$$d(g(m), f(m)) = d(m, \overset{-1}{g}\circ f(m)),$$

puisque $\overset{-1}{g}$ est une isométrie qui ne change pas la distance.

Puisque $\overset{-1}{g}\circ f$ est une isométrie positive :

$$d(m, \overset{-1}{g}\circ f(m)) \leqslant \lambda . \delta(e, \overset{-1}{g} . f) = \lambda . \delta(g, f).$$

Donc :

$$d(g(m), f(m)) \leqslant \lambda . \delta(g, f),$$

λ ne dépendant que de m.

3° *Il n'existe pas d'isométries négatives au voisinage de l'identité,* c'est-à-dire qu'il existe $\varepsilon \in \mathbb{R}^+ - \{0\}$ tel qu'il n'existe pas d'isométrie négative g pour laquelle $\delta(e, g) < \varepsilon$. En effet, une isométrie négative peut toujours être décomposée en la symétrie par rapport à ab qui transforme c en c_1, suivie d'une isométrie directe qui transforme a en a', b en b' et c_1 en c'. Pour que $\delta(e, g)$ soit inférieur à ε, il faudrait :

$$aa' < \varepsilon \qquad \text{et} \qquad bb' < \varepsilon.$$

Mais si on désigne par h la distance de c au côté ab

$$cc' > cc_1 - c_1c' = 2\,h - c_1c'.$$

Or, en appliquant le résultat trouvé dans 2) :

$$c_1c' \leqslant aa' + (aa' + bb') \frac{c_1a}{ba} < \varepsilon\left(1 + 2\frac{ca}{ba}\right) = k\varepsilon$$

k étant un nombre fixe.

D'où : $cc' > 2h - k\varepsilon$.

h et k étant fixes, il est clair qu'on ne peut, *pour tout* ε, avoir $cc' < \varepsilon$.

Il en résulte qu'il *existe un voisinage d'une application f dans lequel il n'y a que des applications de même nature.*

En effet : $\delta(f, g) < \varepsilon \iff \delta(e, \overset{-1}{f}\circ g) < \varepsilon$ et nous venons de voir qu'il existait $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tel que cette inégalité ne puisse être satisfaite que par $\overset{-1}{f}\circ g$ positive donc f et g de même nature. Cela signifie que toute isométrie positive (resp. négative) possède un voisinage où il n'y a que des isométries positives (resp. négatives). Donc, l'ensemble P des isométries positives et celui, N, des isométries négatives sont voisinages de tous leurs points ; ce sont deux ouverts et ils sont complémentaires, donc ils sont aussi fermés.

4° Nous devons montrer que l'application :

$$(f, g) \in G^2 \longrightarrow f\circ g^{-1} \in G$$

est continue.

(Dans ce qui suit, pour alléger l'écriture, nous écrirons fg au lieu de $f\circ g$). Soit $(f_0, g_0) \in G^2$ et soit donc à montrer que l'on peut choisir f suffisamment voisin de f_0 et g suffisamment voisin de g_0 pour que $\delta(f_0g_0^{-1}, fg^{-1})$ soit inférieur à ε donné. En vertu de ce qui a été montré ci-dessus, nous ne considérerons que f et g respectivement de même nature que f_0 et g_0.

On a :

$$\delta(f_0g_0^{-1}, fg^{-1}) \leqslant \delta(f_0g_0^{-1}, fg_0^{-1}) + \delta(fg_0^{-1}, fg^{-1}) \qquad (1)$$

Ouvrons alors une parenthèse pour voir comment la multiplication par une même isométrie modifie la distance de deux isométries. On a déjà utilisé le résultat évident :

$$\forall h \quad \forall f \quad \forall g \qquad \delta(hf, hg) = \delta(f, g).$$

Comparons maintenant $\delta(f, g)$ et $\delta(fh, gh)$.

$$\delta(fh, gh) = sup\ [d(f(h(a)), g(h(a))), d(f(h(b)), d(f(h(c)), g(h(c))]$$

or, $d(f(h(a)), g(h(a))) \leqslant \lambda . \delta(f, g)$, λ dépendant de $h(a)$, mais ni de f, ni de g, pourvu que f et g soient de même nature.

De même :

$$d[f(h(b)), g(h(b))] \leqslant \lambda' . \delta(f, g),$$
$$d[f(h(c)), g(h(c))] \leqslant \lambda'' . \delta(f, g).$$

D'où :

$$\delta(fh, gh) \leqslant \mu . \delta(f, g) \qquad \text{avec} \quad \mu = sup\ (\lambda, \lambda', \lambda'').$$

Donc :

si f et g sont de même nature,

$$\forall h \qquad \delta(fh, gh) \leqslant \mu . \delta(f, g)$$

μ ne dépendant que de h.

Ceci étant, le premier terme de (1) est inférieur à $\mu . \delta(f_0, f)$, μ ne dépendant que de g_0, puisque f et f_0 sont de même nature ; le deuxième terme est égal à $\delta(g_0^{-1}, g^{-1})$.

Or $\delta(g_0^{-1}, g^{-1}) = \delta(gg_0^{-1}, e) = \nu . \delta(gg_0)$,

ν ne dépendant que de g_0 puisque gg_0^{-1} et e sont de même nature.

Donc :

$$\delta(f_o g_o^{-1}, fg^{-1}) \leqslant \mu.\delta(f_o, f) + \nu.\delta(g_o, g).$$

Il suffit de prendre $\delta(f_o, f) < \frac{\varepsilon}{2\mu}$ et $\delta(g_o, g) < \frac{\varepsilon}{2\nu}$ pour avoir $\delta(f_o g_o^{-1}, fg^{-1}) < \varepsilon$. L'application est bien continue.

5° Nous savons que, dans un groupe topologique, les voisinages d'un élément h se déduisent des voisinages de l'origine par les translations à droite et à gauche relatives à h ($f \longrightarrow fh$ et $f \longrightarrow hf$). (Nous avons même vu, dans la question précédente, que, dans le cas particulier de ce groupe, les translations à gauche ($f \longrightarrow hf$) étaient non seulement des homéomorphismes, mais aussi des isométries). Pour comparer les topologies définies sur G par la distance δ (définie à partir des trois points a, b, c) et par une distance δ_1 (définie à partir de trois points a_1, b_1, c_1), il suffit donc de comparer les voisinages de e pour ces deux distances.

Soit un voisinage de e, pour δ, suffisamment petit pour ne contenir que des isométries positives, et f un de ses éléments. Le résultat de 2° nous montre que :

$$d\left(a_1, f(a_1)\right) \leqslant \lambda.\delta(e, f)$$
$$d\left(b_1, f(b_1)\right) \leqslant \mu.\delta(e, f)$$
$$d\left(c_1, f(c_1)\right) \leqslant \nu.\delta(e, f)$$

d'où : $$\delta_1(e, f) \leqslant k.\delta(e, f),$$

k désignant le plus grand des trois nombres λ, μ, ν, et étant donc un réel dépendant de (a_1, b_1, c_1) mais non de f. Il en résulte que toute boule pour δ, de centre e, de rayon r, contient la boule pour δ_1, de centre e, de rayon $\frac{r}{k}$. Comme les rôles des deux triplets de points sont symétriques, l'identité des deux topologies est bien établie.

D'autre part, si l'on remplace dans le plan la distance d par une autre des distances définies en I, 2, 2, soit d', on a vu (exercice 19) que toute boule du plan relative à la distance d et de rayon ε contient une boule de même centre relative à la distance d' et ayant un rayon ε'. Il en résulte que la boule $B(e, \varepsilon)$ de G pour la distance δ associée à d, et qui est l'ensemble des isométries f vérifiant :

$$d(a, f(a)) < \varepsilon \qquad d(b, f(b)) < \varepsilon \qquad d(c, f(c)) < \varepsilon$$

contient l'ensemble des isométries f vérifiant :

$$d'(a, f(a)) < \varepsilon' \qquad d'(b, f(b)) < \varepsilon' \qquad d'(c, f(c)) < \varepsilon'$$

qui est la boule $B(e, \varepsilon')$ pour la distance δ' associée à d'.

Comme on peut encore échanger les rôles de d et d', l'identité des topologies est encore établie.

6° Considérons le sous-groupe T des translations et soit un point du complémentaire de T dans P, c'est-à-dire une rotation r, de centre ω et d'angle $\theta \neq 2k\pi$. Cherchons si dans une boule de G, de centre r, de rayon ε, il peut y avoir une translation t ; il faudrait $\delta(t, r) < \varepsilon$. Or, nous

savons que $d\left(t(\omega), r(\omega)\right) < \lambda.\delta(t, r)$, et comme $d\left(t(\omega), r(\omega)\right)$ est l'amplitude l de la translation, il faudrait :

$$l < \lambda\varepsilon \tag{1}$$

λ étant fixe quand ω est choisi.

Mais, d'autre part, il faudrait $a'a'' < \varepsilon$, si a' et a'' sont respectivement les images de a par t et par r.

Or, $$a'a'' > aa'' - aa' = 2a\,\omega \sin\frac{\theta}{2} - l.$$

Il faudrait donc :

$$2a\,\omega \sin\frac{\theta}{2} - l < \varepsilon$$

$$l > 2\omega a \sin\frac{\theta}{2} - \varepsilon \tag{2}$$

Il est clair que ω, θ et λ étant fixés, (1) et (2) ne sont pas compatibles pour tout ε. Tout point du complémentaire de T dans **P** possède donc un voisinage inclus dans ce complémentaire ; ce complémentaire est ouvert et T est fermé.

De même, considérons le groupe R_o des rotations de centre O fixe et soit un point du complémentaire dans P de R_o, c'est-à-dire une isométrie positive f qui ne laisse pas O invariant. Cherchons si dans une boule de centre f, de rayon ε, il peut y avoir une rotation r de centre O. Il faudrait $\delta(r, f) < \varepsilon$; donc $d\left(r(O), f(O)\right) < \lambda\varepsilon$, λ étant fixé quand O est fixé. Mais $d\left(r(O), f(O)\right) = OO'$, si O' est l'image de O par f ; OO' étant fixe, il existe ε tel que OO' ne soit pas inférieur à $\lambda\varepsilon$. Nous concluons comme précédemment que $P - R_o$ est ouvert et que R_o est fermé.

II. 1° L'ensemble des translations est un sous-groupe invariant de G (cf. *A.P.M. I*, p. 41). Si s est une translation, il existe donc toujours une translation s' telle que $s' \circ \varphi = \varphi \circ s$. On en déduit :

$$s' = \varphi \circ s \circ \varphi^{-1}.$$

D'où $s'(\omega) = \varphi[s(\omega)]$, c'est-à-dire $s' = \varphi(s)$ ou $s = \varphi^{-1}(s')$.

2° Evident.

3° La distance de deux isométries, l'une positive d'angle θ, l'autre négative de paramètre θ_1, est minorée par :

$$|\cos\theta - \cos\theta_1| + |\sin\theta + \sin\theta_1| + |\sin\theta - \sin\theta_1| + |\cos\theta + \cos\theta_1|.$$

Si l'on considère les deux points du cercle de rayon 1 et d'abscisses θ et θ_1, $|\cos\theta - \cos\theta_1| + |\sin\theta - \sin\theta_1|$ majore la longueur de la corde, et $|\sin\theta + \sin\theta_1| + |\cos\theta + \cos\theta_1|$ majore le double de l'apothème. Leur somme majore donc le diamètre du cercle. La quantité considérée est donc au moins égale à 2, et comme elle vaut 2 pour $\theta = \theta_1$, 2 en est le plus grand minorant.

Dans G, une boule de rayon inférieur à 2 ne contient donc que des isométries de même nature que son centre. P et son complémentaire sont donc tous deux ouverts, c'est-à-dire aussi tous deux fermés.

4° Que δ donne une distance sur P et une distance sur N est évident. De
$$|\cos\theta - \cos\tau| + |\sin\theta - \sin\tau| < 2\,|\theta - \tau|$$
résulte immédiatement qu'une boule, de rayon inférieur à 2, pour d, contient une boule de même centre pour δ.

Inversement, si $|\cos\theta - \cos\tau| + |\sin\theta - \sin\tau| < h < 1$, la corde de l'arc $(\theta - \tau)$ du cercle de rayon 1 est inférieure à $2\,h$ et on a $|\theta - \tau| < \pi h$, ce qui prouve que toute boule de rayon assez petit pour δ contient une boule pour d.

Tout élément de G a donc même filtre de voisinages pour les deux topologies.

5° Soient $f_0 = t_0 \circ \varphi_0$ et $g_0 = s_0 \circ \psi_0$ deux éléments de G et $f = t \circ \varphi$, $g = s \circ \varphi$ deux éléments respectivement voisins de f_0 et g_0 (φ caractérisée par θ et ψ par τ).

Etudions $d(f \circ g^{-1}, f_0 \circ g_0^{-1})$. Pour cela, mettons $f \circ g^{-1}$ sous la forme $u \circ \chi$, u translation, χ transformation orthogonale de Tω.
Or, $f \circ g^{-1} = t \circ \varphi \circ \psi^{-1} \circ s^{-1}$, ce qui, en vertu du résultat de 1°, vaut :
$$t \circ s' \circ \varphi \circ \psi^{-1} = (t + s') \circ \varphi \circ \psi^{-1} \quad \text{avec} \quad s' = \varphi \circ \varphi^{-1}(s^{-1}).$$

Autrement dit, le vecteur s' est déduit du vecteur $-s$ par la rotation d'angle $(\theta - \tau)$.

On a :
$$\begin{aligned}\delta(f \circ g^{-1}, f_0 \circ g_0^{-1}) &= \|t + s' - (t_0 + s'_0)\| + |\theta - \tau - \theta_0 + \tau_0| \\ &\leqslant \|t - t_0\| + \|s' - s'_0\| + |\tau - \tau_0| + |\theta - \theta_0|.\end{aligned}$$

Or, l'application qui au vecteur s et à l'angle $(\theta - \tau) = \sigma$ fait correspondre le vecteur déduit de $-s$ par la rotation de Tω d'angle σ est continue en (s, σ). On aura donc $\|s' - s'_0\|$ aussi petit qu'on voudra à condition que $\|s - s_0\| + |\sigma - \sigma_0|$ le soit. On aura donc finalement $\delta(f \circ g^{-1}, f_0 \circ g_0^{-1})$ aussi petit que l'on voudra, dès que $\delta(f, f_0)$ et $\delta(g, g_0)$ seront assez petits.

6° Pour définir une des distances définies en I, nous choisissons le triplet constitué de ω et des points de coordonnées $(0, 1)$ et $(1, 0)$ par rapport au repère de Tω. Comme on a montré (en I, 6°) que l'on pouvait prendre dans le plan une quelconque des distances équivalentes à la distance euclidienne, nous choisirons ici la plus commode pour le but visé : la somme des valeurs absolues des différences des coordonnées par rapport au repère de Tω, et nous appellerons δ_{I} la distance correspondante sur G.

Si x et y sont les coordonnées d'un vecteur t, la distance δ_{I} de deux isométries directes, f et f', (un calcul analogue peut être fait pour deux isométries inverses) sera le plus grand des trois nombres :
$$\begin{aligned}&|x - x'| + |y - y'| \\ &|x - x' + \cos\theta - \cos\theta'| + |y - y' + \sin\theta - \sin\theta'| \\ &|x - x' - \sin\theta + \sin\theta'| + |y - y' + \cos\theta - \cos\theta'|.\end{aligned}$$

Si l'on désigne par δ_{II}, celle qui a été utilisée en II sous le nom de δ, on a évidemment $\delta_{\mathrm{I}} < 2\delta_{\mathrm{II}}$, et inversement, il est clair que si $\delta_{\mathrm{I}}(f, f') < \varepsilon$, on a $|\cos\theta - \cos\theta'| < 2\varepsilon$ et $|\sin\theta - \sin\theta'| < 2\varepsilon$. D'où $|\theta - \theta'| < 4\pi\varepsilon$ et $\delta_{\mathrm{II}}(f, f') < (1 + 4\pi)\varepsilon$, d'où il résulte, comme en II, 4°, que δ_{I} et δ_{II} conduisent à la même topologie.

Exercice 23.

Le fait que l'on ait une distance et qu'elle définisse une topologie compatible avec l'addition est évident.

Pour la multiplication, il suffit de remarquer que :
$$\sum_{i,k} \Big| \sum_{j} \left(\alpha_i^j \beta_j^k - \alpha'^j_i \beta'^k_j\right) \Big|$$
est majoré par :
$$\sum_{i,j,k} \Big| \left(\alpha_i^j \beta_j^k - \alpha'^j_i \beta'^k_j\right) \Big|$$
et *a fortiori* par :
$$\sum_{i,i,k} |\alpha_i^j|\,|\beta_j^k - \beta'^k_j| + \sum_{i,j,k} |\beta'^k_j|\,|\alpha_i^j - \alpha'^j_i|$$
et que l'ensemble des coefficients des matrices appartenant à une boule ayant pour centre une matrice donnée est borné.

Exercice 24.

Soit C un convexe d'un espace vectoriel topologique E. Soient x et y deux points quelconques de $\overline{\mathrm{C}}$ et soit $(\lambda x + \mu y)$ avec $\lambda + \mu = 1$ (λ et μ positifs fixes) un barycentre positif quelconque de ces points dont nous désirons montrer qu'il appartient aussi à $\overline{\mathrm{C}}$.

Considérons l'application f définie par :
$$f\,(x, y) = \lambda x + \mu y,$$
qui est continue, par définition des espaces vectoriels topologiques. Soit V un voisinage de $(\lambda x + \mu y)$. Son image réciproque par f contient un voisinage de (x, y). Un tel voisinage contient un voisinage de la forme :
$$\mathrm{V}_x \times \mathrm{V}_y \quad \text{avec} \quad \mathrm{V}_x \in \mathcal{V}(x) \quad \text{et} \quad \mathrm{V}_y \in \mathcal{V}(y).$$
D'après l'hypothèse V_x et V_y rencontrent C. On peut donc trouver dans $\mathrm{V}_x \times \mathrm{V}_y$ un élément (x_1, y_1), où x_1 et y_1 sont des points de C et :
$$f(x_1, y_1) = \lambda x_1 + \mu y_1 \in \mathrm{V}.$$
Mais $(\lambda x_1 + \mu y_1)$, barycentre positif de deux points de C appartient à C. Donc tout voisinage V de $\lambda x + \mu y$ rencontre C, ce que l'on voulait démontrer.

Exercice 25.

1° Nous devons montrer que les applications :
$$f : \begin{matrix}\mathrm{E}^2 & \longrightarrow & \mathrm{E} \\ (x, y) & \longrightarrow & x - y\end{matrix} \qquad \text{et} \qquad \varphi : \begin{matrix}\mathrm{C} \times \mathrm{E} & \longrightarrow & \mathrm{E} \\ (\lambda, x) & \longrightarrow & \lambda x\end{matrix}$$
sont continues.

a) Pour la première, soit (x_0, y_0) un élément de E^2. Pour que f soit continue en ce point, il faut et il suffit que :
$$\forall \varepsilon \quad \exists \eta \quad d\big((x, y), (x_0, y_0)\big) \leqslant \eta \implies d(x - y,\ x_0 - y_0) \leqslant \varepsilon.$$
Or :
$$d(x - y,\ x_0 - y_0) = \|x - y - (x_0 - y_0)\| \leqslant \|x - x_0\| + \|y - y_0\|$$
sera inférieur à ε si : $\begin{cases} \|x - x_0\| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2} \\ \|y - y_0\| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2} \end{cases}$

c'est-à-dire pour $d\big((x, y), (x_0, y_0)\big) < \eta = \frac{\varepsilon}{2}$ si l'on prend pour distance sur E^2 :

$$d\big((x, y), (x_0, y_0)\big) = \sup\big(\|x - x_0\|, \|y - y_0\|\big)$$

distance dont on a montré (cf. exercice 19) qu'elle était une de celles qui définissaient la topologie produit.

b) Soit (λ_0, x_0) un élément de $\mathbf{C} \times E$. Pour que φ soit continue en ce point, il faut et il suffit que l'on puisse trouver un voisinage de (λ_0, x_0) tel que, pour tout (λ, x) appartenant à ce voisinage :

$$d(\lambda x, \lambda_0 x_0) \leqslant \varepsilon.$$

Or :

$$\begin{aligned} d(\lambda x, \lambda_0 x_0) &= \|\lambda . (x - x_0) + x_0 . (\lambda - \lambda_0)\| \\ &\leqslant |\lambda| . \|x - x_0\| + \|x_0\| . |\lambda - \lambda_0| \end{aligned}$$

sera inférieure à ε si,

$$|\lambda - \lambda_0| < \frac{\varepsilon}{2\|x_0\|} \quad \text{et} \quad \|x - x_0\| < \frac{\varepsilon}{2|\lambda_1|},$$

en choisissant λ_1 fixe tel que $|\lambda_1| > |\lambda_0|$,

donc si :

$$\left\{\begin{aligned} &|\lambda - \lambda_0| < \inf\left(\frac{\varepsilon}{2\|x_0\|}, |\lambda_1 - \lambda_0|\right) \\ &\|x - x_0\| < \frac{\varepsilon}{2|\lambda_1|}. \end{aligned}\right.$$

L'ensemble des (λ, x) satisfaisant à ces deux inégalités est bien le produit de deux boules relatives à chacune des deux topologies sur $\mathbf{C}$ et sur E, donc un ouvert de $\mathbf{C} \times E$, c'est-à-dire un voisinage de (λ_0, x_0).

2° Ne supposons plus connue la topologie sur $\mathbf{C}$ et considérons la restriction de φ à une coupe de $\mathbf{C} \times E$ où $x = e_1$, en désignant par e_1 un vecteur de norme 1 (on peut toujours trouver un tel vecteur en divisant par sa norme un vecteur quelconque non nul). Cette restriction de φ fait correspondre λe_1 à (λ, e_1). Elle doit être continue. Pour qu'il en soit ainsi, au point (λ_0, e_1) il faut que, pour tout ε positif, l'ensemble des couples (λ, e_1) pour lesquels $d(\lambda e_1, \lambda_0 e_1) < \varepsilon$, soit un voisinage de $\lambda_0 e_1$. Or, $d(\lambda e_1, \lambda_0 e_1) = |\lambda - \lambda_0|$. Cet ensemble est donc l'ensemble :

$$\{ (e_1, \lambda) \; ; \; |\lambda - \lambda_0| < \varepsilon \}.$$

D'autre part, la topologie sur la coupe étant induite par la topologie produit, un voisinage de (λ_0, e_1) est un ensemble $\{ (e_1, \lambda) \}$, où λ décrit un voisinage de λ_0 pour la topologie cherchée. Pour que l'application φ soit continue, il est donc nécessaire que l'ensemble des λ tels que $|\lambda - \lambda_0| < \varepsilon$ soit un voisinage de λ_0 pour la topologie cherchée. La topologie usuelle, définie par la distance, répond bien à la question, l'ensemble $\{ \lambda \; ; \; |\lambda - \lambda_0| < \varepsilon \}$ étant alors une boule, donc un voisinage. Toute autre topologie répondant à la question admet en tout point λ_0 un voisinage inclus dans cette boule. Son filtre des voisinages est donc plus fin que celui de la topologie usuelle.

Exercice 26.

Dans chaque cas, il faut montrer :

1° qu'il existe une bijection entre les classes d'équivalence, modulo la relation $\mathcal{R}$ envisagée, des ensembles *a*), *b*) ou *c*) et un élément de S_2 ;

2° montrer que par cette bijection et la bijection réciproque l'image de tout ouvert d'un des espaces est un ouvert de l'autre.

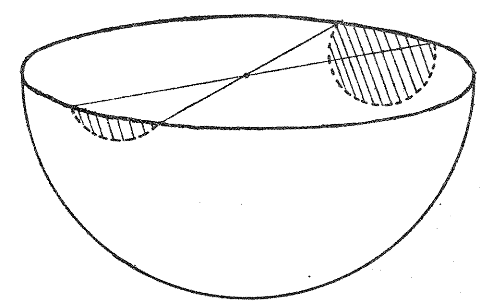
● Cas *a*). La bijection, évidente, fait correspondre une droite issue du centre de la sphère (élément de $P_2(\mathbf{R})$) et l'ensemble des deux points où elle perce la sphère (élément de $S_2/\mathcal{R}$). $S_2/\mathcal{R}$ étant muni de la topologie quotient, déduite de la topologie induite sur la sphère par la topologie usuelle de $\mathbf{R}^3$, les ouverts de $S_2/\mathcal{R}$ admettent pour base l'ensemble des intérieurs des couples de cercles diamétralement opposés sur la sphère. Tout ouvert de cette base a pour image, dans la bijection, l'intérieur d'un cône de révolution de somment O, donc un ouvert de $P_2(\mathbf{R})$. *Réciproquement*, tout intérieur de tel cône (dont l'ensemble forme une base des ouverts de $P_2(\mathbf{R})$) a pour image l'intérieur d'un couple de cercles de S_2, donc un ouvert de $S_2/\mathcal{R}$.

● Cas *b*). On a encore une bijection évidente entre une droite issue de O et le point où elle perce la demi-sphère Σ si elle n'est pas dans le plan du cercle limite C, le couple des points où elle la perce si elle est dans le plan de C. Il y a donc bijection entre $P_2(\mathbf{R})$ et $\Sigma/\mathcal{R}$.

Les ouverts de $\Sigma/\mathcal{R}$ sont les images par l'application canonique, soit des ouverts de Σ qui n'ont pas de points communs avec C, soit de ceux qui ont en commun avec C les intérieurs de deux arcs de cercle diamétralement opposés. On obtiendra une base de ces ouverts en prenant l'ensemble des images par l'application canonique des ensembles suivants :

1° intérieurs des cercles situés tout entiers dans Σ ;

2° ensembles obtenus à partir d'un cercle coupant C comme la réunion de la portion de l'intérieur de ce cercle située dans Σ et de la symé-



trique par rapport à O de la portion de cet intérieur situé dans C ou dans la demi-sphère complémentaire de Σ.

Or cette base des ouverts est précisément l'image par la bijection de la base des ouverts de $P_2(\mathbf{R})$.

● Cas *c*). La demi-sphère Σ est en correspondance bijective, par projection orthogonale, avec le disque fermé D limité par C, les points identifiés de Σ correspondant aux points identifiés de C. Il y a donc correspondance bijective entre $\Sigma/\mathcal{R}$ et $D/\mathcal{R}'$, si on appelle $\mathcal{R}'$ la relation d'équivalence sur D, donc entre $P_2(\mathbf{R})$ et $D/\mathcal{R}'$. Le disque fermé D étant muni de la topologie induite par la topologie usuelle du plan, les ouverts de $D/\mathcal{R}'$ sont les images par l'application canonique des ouverts du plan qui sont entièrement intérieurs à D ou qui coupent C selon des arcs diamétralement opposés. On peut prendre pour base de ces ouverts les ensembles obtenus en projetant ceux de la base des ouverts de $\Sigma/\mathcal{R}$. Cette base des ouverts de $D/\mathcal{R}'$ sera donc l'image par la bijection de celle de $P_2(\mathbf{R})$.

Exercice 27.

Il y a une bijection évidente entre un cercle passant par O et l'ensemble des droites issues de O (et privées de O), à condition de faire correspondre à O la tangente au cercle en O.

Une base des ouverts de la topologie induite sur la droite projective par la topologie du plan projectif est formée des intérieurs des angles de sommet O (considérés comme ensemble de droites). L'image de cette base par la bijection précédente est formée par l'ensemble des arcs ouverts du cercle, donc par une base des ouverts de la topologie usuelle du cercle. L'homéomorphie est donc établie.

Exercice 28.

Soit la famille $\mathcal{B} = \{ \overset{-1}{f}(F') \ ; \ F' \in \mathcal{F}' \}$. Pour que cette famille puisse être une base de filtre, il faut qu'elle ne contienne pas le vide. La condition :

$$\forall F' \in \mathcal{F} \qquad F' \cap f(E) \neq \emptyset$$

est donc nécessaire.

Cette condition étant remplie, $\mathcal{B}$ ne contient pas le vide et n'est pas vide. Par ailleurs :

$$B_1 \in \mathcal{B},\ B_2 \in \mathcal{B} \implies \exists F'_1 \in \mathcal{F}' \quad \exists F'_2 \in \mathcal{F}' \quad \overset{-1}{f}(F'_1) = B_1 \qquad \overset{-1}{f}(F'_2) = B_2.$$

Or, d'après les propriétés des applications réciproques :

$$\overset{-1}{f}(F'_1) \cap \overset{-1}{f}(F'_2) = \overset{-1}{f}(F'_1 \cap F'_2) \in \mathcal{B},$$

donc $\mathcal{B}$ satisfait aux axiomes de base de filtre.

Remarquons que $\mathcal{B}$ n'est pas un filtre malgré la vérification des deuxième et troisième axiomes des filtres, car si $B \in \mathcal{B}$ et $G \supset B$, G peut ne pas être image réciproque d'un élément de $\mathcal{F}'$.

2° $\mathcal{B}_1$ est une base de filtre puisque c'est l'image réciproque de la base de filtre $f(\mathcal{B})$ qui satisfait évidemment à la condition précédente :

$$\mathcal{B}_1 = \{ \overset{-1}{f} \circ f(B) \ ; \ B \in \mathcal{B} \},$$

or $\qquad \overset{-1}{f} \circ f(B) \supset B$, donc

$$\forall B_1 \in \mathcal{B}_1 \qquad \exists B \in \mathcal{B} \qquad B \subset B_1,$$

donc, si l'on désigne par $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}_1$, les filtres respectivement engendrés par $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}_1$, le filtre $\mathcal{F}_1$ est moins fin que le filtre $\mathcal{F}$. De même, si le filtre de base $\mathcal{B}'$ satisfait à la condition du 1°, $\overset{-1}{f}(\mathcal{B}')$ est une base de filtre sur E et son image est une base de filtre :

$$\mathcal{B}'_1 = \{ f \circ \overset{-1}{f}(B') \ ; \ B' \in \mathcal{B}' \},$$

mais $\qquad f \circ \overset{-1}{f}(B') \subset B'$; donc,

$$\forall B' \in \mathcal{B}' \qquad \exists B'_1 = f \circ \overset{-1}{f}(B') \subset B'.$$

Quand $\mathcal{B}'$ satisfait à la condition du 1°, $f \circ \overset{-1}{f}(\mathcal{B}')$ est base d'un filtre plus fin que celui engendré par $\mathcal{B}'$.

Exercice 29.

1° Si on prend $E = \mathbf{N}$, pour $\mathcal{F}$ le filtre de Fréchet et pour f l'application $n \longrightarrow u_n$ de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{R}$, $\mathit{lim\ sup}_{\mathcal{F}} f$ et $\mathit{lim\ inf}_{\mathcal{F}} f$ ne sont autres que $\overline{\lim}\, u_n$ et $\underline{\lim}\, u_n$. La démonstration donnée en *A.P.M. I* du fait que $\overline{\lim}\, u_n \geqslant \underline{\lim}\, u_n$ se généralise immédiatement : soient $a = \mathit{lim\ sup}_{\mathcal{F}} f$ et $b = \mathit{lim\ inf}_{\mathcal{F}} f$ et soit à comparer $\mathit{sup}\, f(F_1)$ et $\mathit{inf}\, f(F_2)$, F_1 et F_2 étant deux éléments quelconques du filtre $\mathcal{F}$. Considérons $F_3 = F_1 \cap F_2$:

$$\mathit{inf}\ f(F_1) \leqslant \mathit{inf}\ f(F_3) \leqslant \mathit{sup}\ f(F_3) \leqslant \mathit{sup}\ f(F_2).$$

Il en résulte que tous les $\mathit{sup}\ f(F)$ sont majorants de tous les $\mathit{inf}\ f(F)$, donc la borne inférieure des *sup* est au moins égale à la borne supérieure des *inf*. Soit :

$$b \leqslant a.$$

Cette démonstration est valable que a et b soient finies ou infinies.

Dans le cas où $b = a$ et où ce nombre est fini, la définition de $\mathit{lim\ sup}_{\mathcal{F}} f$ permet d'écrire :

$$\forall \varepsilon \quad \exists F_1 \in \mathcal{F} \quad \mathit{sup}\ f(F_1) < a + \varepsilon$$

et celle de $\mathit{lim\ inf}_{\mathcal{F}} f$:

$$\forall \varepsilon \quad \exists F_2 \in \mathcal{F} \quad \mathit{inf}\ f(F_2) > a - \varepsilon.$$

Donc :

$$\forall \varepsilon \quad \exists F_3 = F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F} \quad a - \varepsilon < \mathit{inf}\ f(F_3) \leqslant \mathit{sup}\ f(F_3) < a + \varepsilon$$
$$\text{ou} \qquad f(F_3) \subset\ ]a - \varepsilon, a + \varepsilon[.$$

Les intervalles $]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$ décrivant une base des voisinages de a, ceci exprime que le filtre image de $\mathcal{F}$ par f est plus fin que celui des voisinages de a, autrement dit que *f tend vers a suivant le filtre $\mathcal{F}$*.

Si $a = b = +\infty$, le fait que $\underset{F \in \mathcal{F}}{\mathit{sup}} \{ \mathit{inf}\ f(F) \} = +\infty$ se traduit par

$$\forall A \quad \exists F_1 \in \mathcal{F} \quad \mathit{inf}\ f(F_1) > A$$
$$\text{ou} \qquad f(F_1) \subset\ ]A, \infty].$$

$]A, +\infty]$ décrivant une base des voisinages de $+\infty$, on a encore montré que f tend vers $+\infty$ suivant le filtre $\mathcal{F}$. La démonstration serait évidemment la même pour le cas $a = b = -\infty$.

Réciproquement, si f tend vers a suivant le filtre $\mathcal{F}$ on a, dans le cas où a est finie :

$$\forall \varepsilon \quad \exists F \in \mathcal{F} \quad f(F) \subset\ ]a - \varepsilon, a + \varepsilon[,$$

ce qui entraîne :

$$\forall \varepsilon \quad \exists F \in \mathcal{F} \begin{cases} \sup f(F) < a + \varepsilon & \text{d'où } \inf\limits_{F \in \mathcal{F}} \sup f(F) \leqslant a \\ \inf f(F) > a - \varepsilon & \text{d'où } \sup\limits_{F \in \mathcal{F}} \inf f(F) \geqslant a, \end{cases}$$

d'où l'égalité des deux limites.

Et dans le cas où a est $+\infty$:

$$\forall A \quad \exists F \in \mathcal{F} \quad f(F) \subset]A, +\infty],$$

ce qui entraîne :

$$\forall A \quad \exists F \in \mathcal{F} \quad \inf f(F) > A \quad \text{d'où} \quad \sup \inf f(F) = \infty,$$

d'où encore l'égalité des deux limites.

Les deux limites inférieure et supérieure de f suivant le filtre $\mathcal{F}$ sont égales si, et seulement si, f tend vers cette limite commune suivant le filtre $\mathcal{F}$.

Si, en particulier, $\mathcal{F} = \mathcal{V}(x_0)$, et si les deux limites $M(f, x_0)$ et $m(f, x_0)$ sont égales, on aura $M = m = f(x_0)$, puisque $f(x_0)$, qui appartient à tous les $f(F)$, est, dans le cas général, compris entre ces deux limites. *L'égalité de $M(f, x_0)$ et $m(f, x_0)$ caractérise donc les fonctions f continues en x_0* puisqu'elle caractérise les fonctions f qui tendent vers $f(x_0)$ suivant le filtre des voisinages de x_0.

2° Soit $a = \lim\limits_{\mathcal{F}} \sup f$ et soit l une valeur d'adhérence de f suivant le filtre $\mathcal{F}$.

$$\forall \varepsilon \quad \forall F \in \mathcal{F} \quad f(F) \cap]l - \varepsilon, l + \varepsilon[\neq \emptyset,$$

donc $\quad \forall \varepsilon \quad \forall F \in \mathcal{F} \quad \sup f(F) > l - \varepsilon,$

donc $\quad \forall \varepsilon \quad a = \inf\limits_{F \in \mathcal{F}} \sup f(F) \geqslant l - \varepsilon.$

Ceci exige :

$$a \geqslant l.$$

a est donc un majorant de l'ensemble des valeurs d'adhérence. D'autre part, a est lui-même valeur d'adhérence. En effet, si a est fini, la définition de $\lim\limits_{\mathcal{F}} \sup f$ montre que :

$$\forall \varepsilon \quad \exists F_0 \in \mathcal{F} \quad a \leqslant \sup f(F_0) < a + \varepsilon,$$

et la définition de $\sup f(F_0)$ montre que :

$$\forall \varepsilon \quad \exists x \in F_0 \quad f(x) > \sup f(F_0) - \varepsilon \text{ donc } f(x) \in]a - \varepsilon, a + \varepsilon[.$$

D'où :

$$\forall \varepsilon \quad \exists \quad F_0 \quad f(F_0) \cap]a - \varepsilon, a + \varepsilon[\neq \emptyset.$$

Or, si on considère un élément F du filtre $\mathcal{F}$ inclus dans F_0,

$$\sup f(F) < \sup f(F_0) < a + \varepsilon,$$

donc :

$$\forall \varepsilon \quad \forall F \subset F_0 \quad f(F) \cap]a - \varepsilon, a + \varepsilon[\neq \emptyset.$$

Mais si on considère un élément F' de $\mathcal{F}$ quelconque, son intersection avec F_0 est incluse dans F_0 et $f(F') \cap]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$ est, *a fortiori*, non vide. Finalement :

$$\forall \varepsilon \quad \forall F \in \mathcal{F} \quad f(F) \cap]a - \varepsilon, a + \varepsilon[\neq \emptyset.$$

$]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$ décrivant une base des voisinages de a, ceci exprime que

a est valeur d'adhérence de f suivant $\mathcal{F}$. Dans le cas où a est infini, on a immédiatement :

$$\forall F \in \mathcal{F} \quad \sup f(F) = +\infty.$$

D'où :

$$\forall A \quad \forall F \in \mathcal{F} \quad f(F) \cap]A, +\infty] \neq \emptyset,$$

ce qui démontre encore que $+\infty$ est valeur d'adhérence.

Dans tous les cas, a est la plus grande des valeurs d'adhérence. On démontre de la même façon que b est la plus petite.

3° Si $\mathcal{F}'$ est plus fin que $\mathcal{F}$, alors $\{F ; F \in \mathcal{F}\} \subset \{F' ; F' \in \mathcal{F}'\}$.

Donc $\quad \{\sup f(F) ; F \in \mathcal{F}\} \subset \{\sup f(F') ; F' \in \mathcal{F}'\},$

d'où $\quad \lim \sup_{\mathcal{F}} f \leqslant \lim \sup_{\mathcal{F}'} f.$

De même $\quad \lim \inf_{\mathcal{F}} f \geqslant \lim \inf_{\mathcal{F}'} f.$

En particulier, si $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ sont les filtres des voisinages d'un même point x de E pour des topologies différentes, on voit que la plus grande des limites supérieures est obtenue pour la topologie la moins fine. En particulier, la plus grande de toutes les limites supérieures est obtenue pour la topologie grossière et la plus petite pour la topologie discrète.

Si E est muni de la topologie discrète, pour $x_0 \in E$ quelconque, parmi les éléments de $\mathcal{V}(x_0)$, il y a $\{x_0\}$, donc :

$$\lim\limits_{\mathcal{V}(x_0)} \sup f = \lim\limits_{\mathcal{V}(x_0)} \inf f = f(x_0),$$

et f est continue en x_0.

Au contraire, si E est muni de la topologie grossière, le seul élément de $\mathcal{V}(x_0)$ est E et :

$$\lim\limits_{\mathcal{V}(x_0)} \sup f = \sup f(E),$$

$$\lim\limits_{\mathcal{V}(x_0)} \inf f = \inf f(E).$$

Pour que f soit continue, il est donc nécessaire et suffisant que f soit constante sur E.

Exercice 30.

Supposons que $f : E \longrightarrow F$ prenne deux valeurs distinctes a et b. En vertu de (T_0), un des deux points, a pour fixer les idées, possède un voisinage V qui ne contient pas b. Mais $\overset{-1}{f}(V)$, qui n'est pas vide, ne peut être que E tout entier et alors $f(E)$, qui devrait être inclus dans V, ne pourrait pas contenir b ; il y aurait contradiction. (Ce résultat généralise celui vu dans l'exercice 29 dans le cas où F était $\mathbb{R}$).

Exercice 31.

1° Si $a \neq b$,

$\{a\}$ fermé $\Longrightarrow$ $E - \{a\}$ ouvert $\Longrightarrow$ $E - \{a\} \in \mathcal{V}(b)$.

De même $E - \{b\} \in \mathcal{V}(a)$.

Donc (T_1) est vérifié.

Réciproquement, si (T_1) est vérifié :

$$\forall b \neq a \qquad \exists V \in \mathcal{V}(b) \qquad a \notin V.$$

Mais ceci implique $E - \{a\} \in \mathcal{V}(b)$; l'ensemble $E - \{a\}$ étant voisinage de tous ses points est ouvert ; donc $\{a\}$ est fermé.

2° Si l'intersection des voisinages de a contenait b, distinct de a, (T_1) ne pourrait pas être vérifié pour a et b ; donc (T_1) entraîne que l'intersection des voisinages de a soit réduite à $\{a\}$.

Réciproquement, si l'intersection des voisinages de a est réduite à $\{a\}$ et si $b \neq a$, il y a au moins un voisinage de a qui ne contient pas b, et on montrerait de même qu'il existe un voisinage de b qui ne contient pas a.

Exercice 32.

1° Nous allons montrer que A', ensemble dérivé de A, est fermé en montrant qu'il coïncide avec son adhérence $\overline{A'}$. Soit donc $x \in \overline{A'}$ et soit V un voisinage quelconque de x. Par définition de l'adhérence, ce voisinage de x rencontre A' et contient un ouvert O qui rencontre aussi A'. On peut donc dire :

$$\exists a \in O \subset V \in \mathcal{V}(x) \qquad a \in A'.$$

L'ouvert O, contenant a, est voisinage de a ; mais, du fait de (T_1), il existe un autre voisinage W de a qui ne contient pas x ; considérons $W \cap O = V'$; $V' \in \mathcal{V}(a)$ et d'après la définition de A' :

$$V' \cap A \neq \emptyset.$$

Ce qui implique, puisque $V \supset V'$:

$$V \cap A \neq \emptyset,$$

et, puisque V' ne contient pas x :

$$(V - \{x\}) \cap A \neq \emptyset.$$

C'est dire que x est point d'accumulation de A. On a donc montré que :

$$x \in \overline{A'} \implies x \in A',$$

donc que A' est fermé.

2° Si A est fermé, $A = \overline{A}$; or $\overline{A}$ contient A' car tout point d'accumulation est point adhérent ; donc A contient A'. *Réciproquement*, soit un ensemble A contenant son dérivé A', et soit $x \in \overline{A}$; ou bien, $x \in A$, ou bien $x \notin A$; dans ce deuxième cas, x serait un point adhérent n'appartenant pas à l'ensemble, donc un point de A' ; mais comme $A' \subset A$, il y aurait contradiction. Donc :

$$x \in \overline{A} \implies x \in A,$$

c'est-à-dire que $A = \overline{A}$ et A est fermé.

Exercice 33.

Si un espace E satisfait à (T_1), tout point d'accumulation l d'un ensemble $A \subset E$ est tel qu'il y a une infinité de points de A à l'intérieur de tout voisinage de l. En effet, dans un voisinage $V_1 \in \mathcal{V}(l)$, il y a un point x_1 de A distinct de l ; l'axiome (T_1) permet d'envisager un voisinage $V_2 \in \mathcal{V}(l)$ qui ne contient pas x_1 et est contenu dans V_1 (nous le construirons, comme dans l'exercice précédent, par intersection de V_1 et d'un voisinage quelconque ne contenant pas V_1) ; le voisinage V_2 rencontre A en un point x_2 distinct de l et ainsi de suite... ; quand on aura trouvé x_n contenu dans $V_n \subset V_1$ et dans A, on prendra un voisinage $V_{n+1} \subset V_n$ et ne contenant pas $x_1, ..., x_n$ qui rencontrera A en x_{n+1} distinct de l...

Pour ensemble A, prenons alors l'ensemble $\{u_n ; n \in \mathbf{N}\}$ des valeurs d'une suite. Le raisonnement précédent montre qu'il y a une infinité d'éléments u_n dans tout voisinage de A, donc que pour tout n_0, l'ensemble $\{u_n ; n > n_0\}$ rencontre $\mathcal{V}(l)$, donc que l est valeur d'adhérence de la suite. Si maintenant l est, par hypothèse, point adhérent à la suite, ou bien l est un point de la suite, ou bien c'est un point d'accumulation.

Un point adhérent à l'ensemble des valeurs d'une suite est — valeur d'adhérence de la suite ou point de la suite.

Exercice 34.

Si la topologie $\mathcal{T}'_1$ est plus fine que $\mathcal{T}_1$ et si $\mathcal{T}_1$ satisfait à (T_2), il est évident que $\mathcal{T}'_1$ y satisfait puisque les voisinages suivant $\mathcal{T}_1$ sont voisinages suivant $\mathcal{T}'_1$.

Si $\mathcal{T}_2$ n'est pas séparée c'est que, pour un couple (a, b) d'éléments distincts de E, il n'existe pas de couples disjoints $V \in \mathcal{V}(a)$ et $V' \in \mathcal{V}(b)$. Si $\mathcal{T}'_2$ est moins fine que $\mathcal{T}_2$, les filtres $\mathcal{V}'(a)$ et $\mathcal{V}'(b)$ sont moins fins que $\mathcal{V}(a)$ et $\mathcal{V}(b)$, il sera *a fortiori* impossible d'y trouver des éléments disjoints.

Exercice 35.

Soient a et b distincts appartenant à A.

$$\mathcal{T}_E \text{ séparée} \implies \exists V \in \mathcal{V}(a) \qquad \exists V' \in \mathcal{V}(b) \qquad V \cap V' = \emptyset.$$

Ceci entraîne évidemment :

$$(V \cap A) \cap (V' \cap A) = \emptyset,$$

donc $\mathcal{T}_A$ est séparée.

Exercice 36.

1° Pour que la topologie soit séparée, il faut que, quels que soient x et y distincts, il existe des voisinages respectifs disjoints de ces deux points. Mais ces voisinages contiennent respectivement des boules de centre x et y. Il est donc nécessaire qu'il existe de telles boules disjointes. Or, si e n'est pas une distance et si x et y sont tels que $e(x, y) = 0$, toute boule de centre x contient y. Il est donc nécessaire que e soit une distance.

2° Si la condition posée est réalisée, les boules de centre x et y respectivement et de rayon $\dfrac{e_i(x, y)}{2}$ sont disjointes. (T_2) est vérifié.

Réciproquement, si la topologie est séparée, il existe des éléments appartenant à une base des ouverts, contenant respectivement x et y et disjoints. Or, on a vu (exercice 17) qu'on pouvait prendre pour base des ouverts l'ensemble des pseudo-boules $B(J, x, r)$. L'hypothèse (la topologie $\mathcal{T}$ est séparée) exige donc :

$$\exists J \text{ et } J' \text{ parties finies de } I, \qquad \exists r > 0, \qquad \exists r' > 0,$$

$$B(J, x, r) \cap B(J', y, r') = \emptyset.$$

Considérons alors la partie finie $(J \cup J') \subset I$:

$$B(J \cup J', x, r) \subset B(J, x, r),$$
$$B(J \cup J', y, r') \subset B(J', y, r'),$$

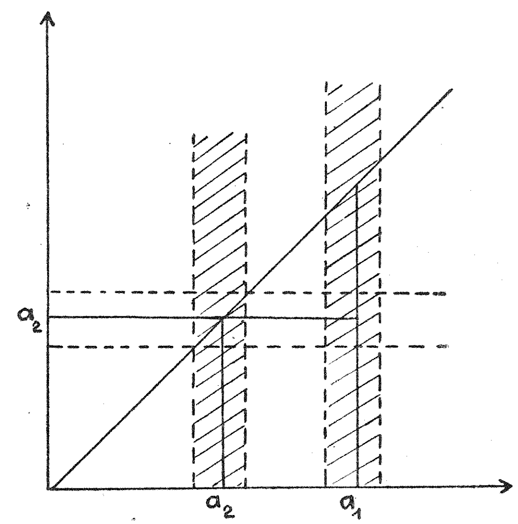
donc $\qquad B(J \cup J', x, r) \cap B(J \cup J', y, r') = \emptyset \qquad (1).$

Si pour tous les indices $i \in J \cup J'$ on avait $e_i(x, y) = 0$, (1) serait impossible. Il existe donc au moins un indice i tel que $e_i(x, y) \neq 0$.

Exercice 37.

Supposons que E soit séparé et soit (a_1, a_2) avec $a_1 \neq a_2$ un point du complémentaire de la diagonale. Il existe deux ouverts O_1 et O_2 de E, tels que :

$$a_1 \in O_1, \quad a_2 \in O_2 \quad \text{et} \quad O_1 \cap O_2 = \emptyset.$$



L'ensemble $\qquad \{(x_1, x_2) ; \ x_1 \in O_1 ; \ x_2 \in O_2\}$

est un ouvert de $(E \times E)$ puisque c'est $\overset{-1}{pr_1}(O_1) \cap \overset{-1}{pr_2}(O_2)$. Il contient (a_1, a_2) et son intersection avec la diagonale est vide. Donc (a_1, a_2) appartient à un ouvert inclus dans le complémentaire de la diagonale. Ce complémentaire est ouvert et la diagonale est fermée.

Réciproquement, supposons la diagonale fermée. Soient a_1 et a_2 distincts de E. Considérons le point (a_1, a_2) de $(E \times E)$ qui appartient au complémentaire de la diagonale ; ce point appartient à un ouvert dont l'intersection avec la diagonale est vide, donc à un élément de la base des ouverts

$$\overset{-1}{pr_1}(O_1) \cap \overset{-1}{pr_2}(O_2) \quad \text{avec} \quad a_1 \in O_1, \quad a_2 \in O_2,$$

dont l'intersection avec la diagonale est vide. Ceci n'est possible que si

$$O_1 \cap O_2 = \emptyset.$$

La topologie sur E est séparée.

Exercice 38.

Supposons que tout point admette une base de voisinages fermés. Soit x un point et $F \not\ni x$ un fermé. Le complémentaire $\complement F$ de F est un

voisinage de x. Il contient un fermé F_1 appartenant aussi à $\mathcal{V}(x)$, dont le complémentaire $\complement F_1$ est un ouvert et

$$\complement F \supset F_1 \quad \Longrightarrow \quad F \subset \complement F_1 \quad \Longrightarrow \quad \complement F_1 \in \mathcal{V}(F).$$

Puisque $F_1 \in \mathcal{V}(x)$, l'axiome (T_3) est vérifié pour x et F, par F_1 et $\complement F_1$.

Réciproquement, supposons l'axiome (T_3) vérifié et soit $x \in E$ et un voisinage ouvert $V \in \mathcal{V}(x)$; son complémentaire $\complement V$ est fermé. En appliquant (T_3) à x et à $\complement V$, on en déduit l'existence d'un voisinage $W \in \mathcal{V}(\complement V)$ et d'un voisinage $V' \in \mathcal{V}(x)$ disjoints. Il existe un ouvert O tel que :

$$W \supset O \supset \complement V \qquad \text{et } V' \subset \complement W.$$

Il en résulte :

$$\complement W \subset \complement O \subset V \qquad \text{et } V' \subset \complement O,$$

donc V contient le fermé $\complement O$; alors $\complement O$, contenant V', est bien voisinage de x. Tout voisinage ouvert $V \in \mathcal{V}(x)$ contient un voisinage fermé. Si V n'est pas ouvert, il contient un voisinage ouvert auquel s'appliquera le raisonnement précédent. Tout point x admet bien une base de voisinages fermés.

Exercice 39.

1° *a*) $\bigcap \{\mathcal{G}(f, \lambda) ; \lambda \in \mathbf{R}\}$ est l'ensemble des x tels que $f(x)$ soit inférieur à tout réel ; cet ensemble est donc vide. L'union des mêmes sous-ensembles est l'ensemble des x tels que $f(x)$ possède dans **R** un majorant ; c'est donc X tout entier. Enfin, $\bigcup \{\mathcal{G}(f, \lambda) ; \lambda < \mu\}$ est l'ensemble des x tels que $f(x)$ soit inférieur à μ ; c'est donc $\mathcal{G}(f, \mu)$.

b) Si on remplace **R** par une partie E partout dense (pour E on pourrait prendre **Q**, par exemple), tout réel est majoré par des éléments $\lambda \in E$, donc le premier ensemble considéré est toujours vide, et le deuxième est toujours X. D'autre part, il reste évident que :

$$\bigcup \{\mathcal{G}(f, \lambda) ; \lambda < \mu, \lambda \in E\} \subset \mathcal{G}(f, \mu) \qquad (1).$$

D'autre part, si $x \in \mathcal{G}(f, \mu)$, c'est que $f(x) < \mu$; mais E étant partout dense, il existe λ_0 compris entre $f(x)$ et μ et x appartient à $\mathcal{G}(f, \lambda_0)$, donc à $\bigcup \{\mathcal{G}(f, \lambda) ; \lambda < \mu, \lambda \in E\}$. L'inclusion (1) peut donc être remplacée par l'égalité.

2° Pour que l'application f de X dans **R** soit telle que, pour tout λ, on ait $\mathcal{G}(f, \lambda) = F_\lambda$, il faut et il suffit que :

$$x \in F_\lambda \iff f(x) < \lambda$$

ou

$$\begin{cases} x \in F_\lambda \Longrightarrow f(x) < \lambda \\ x \notin F_\lambda \Longrightarrow f(x) \geqslant \lambda \end{cases} \qquad (2).$$

Pour définir $f(x)$, cherchons donc à quel ensemble de parties F_λ appartient un x donné de X. En vertu de la deuxième hypothèse sur les F_λ, il existe de telles parties et en vertu de la troisième, si x appartient à F_{λ_1}, il appartient à F_{λ_2} pour tout $\lambda_2 > \lambda_1$; il appartient donc à tous les ensembles d'une famille $\{F_\mu\}$, où μ décrit une section finissante de **R**. Cette section finissante est ouverte car, si elle possédait un plus petit élément λ_0, x appartiendrait à F_{λ_0} sans appartenir à aucun F_μ avec $\mu < \lambda_0$, ce qui contredirait la troisième propriété. Donc x appartient à F_μ pour tous les μ de la section finissante ouverte définie par un réel λ_0 :

$$\forall \mu > \lambda_0 \qquad x \in F_\mu .$$

On doit donc avoir, pour que soit vérifiée la première ligne de (2) :

$$\forall \mu > \lambda_0 \qquad f(x) < \mu, \quad \text{donc} \quad f(x) \leqslant \lambda_0,$$

et, puisque x n'appartient pas à F_{λ_0}, pour que soit vérifiée la deuxième ligne : $f(x) \geqslant \lambda_0$.

Donc $$f(x) = \lambda_0.$$

L'application f cherchée est parfaitement définie ; *elle fait correspondre à tout* $x \in X$, *le réel que définit la section finissante des indices des parties auxquelles cet* x *appartient*, c'est-à-dire qu'on aura $f(x) = \lambda_0$ si, et seulement si, x appartient à toutes les parties d'indices strictement supérieurs à λ_0, sans appartenir à la partie F_{λ_0}, ce qu'on peut exprimer par :

$$f(x) = \lambda \iff x \in \bigcap \{F_\mu \,;\, \mu < \lambda\} - F_\lambda .$$

3° A tout λ réel, on peut associer μ_1 appartenant à E avec $\mu_1 < \lambda$, et il est clair, puisque $\mu < \mu_1 \implies H_\mu \subset H_{\mu_1}$, que

$$F_\mu \subset H_{\mu_1} .$$

Donc :

$$\bigcap \{F_\lambda \,;\, \lambda \in \mathbf{R}\} \subset \bigcap \{H_{\mu_1} \,;\, \mu_1 < \lambda \,;\, \lambda \in \mathbf{R}\}$$
$$\subset \bigcap \{H_\mu \,;\, \mu \in E\} = \emptyset .$$

D'autre part :

$$\bigcup_{\lambda \in \mathbf{R}} \left\{ \bigcup \{H_\mu \,;\, \mu \in E,\ \mu < \lambda\} \right\} = \bigcup \{H_\mu \,;\, \mu \in E\} = X.$$

Enfin, cherchons :

$$\bigcup \{F_\lambda \,;\, \lambda < \mu_0\} .$$

C'est $\bigcup_{\lambda < \mu_0} \left\{ \bigcup \{H_\mu \,;\, \mu < \lambda\} \right\}$ qui est égal à $\bigcup \{H_\mu \,;\, \mu < \mu_0\}$, car pour tout $\mu < \mu_0$, on peut trouver un réel compris entre μ et μ_0. D'où :

$$\bigcup \{F_\lambda \,;\, \lambda < \mu_0\} = F_{\mu_0} .$$

4° $\overline{\mathcal{G}}(f, \lambda) = \overset{-1}{f}([\lambda, +\infty[)$, image réciproque d'un fermé de **R** par une application continue est un fermé. Elle contient $\mathcal{G}(f, \lambda) = \overset{-1}{f}(]\lambda + \infty[)$, donc contient le plus petit fermé qui contient ce deuxième ensemble, c'est-à-dire $\overline{\mathcal{G}(f, \lambda)}$.

Soit :

$$x \in \overline{\mathcal{G}}(f, \lambda) - \overline{\mathcal{G}(f, \lambda)} .$$

Or, $$x \in \overline{\mathcal{G}}(f, \lambda) \implies f(x) \leqslant \lambda.$$

Et $x \notin \overline{\mathcal{G}(f, \lambda)}$ entraîne déjà $x \notin \mathcal{G}(f, \lambda)$, donc $f(x) \geqslant \lambda$, d'où : $f(x) = \lambda$, mais, en outre, dire que x n'appartient pas à l'adhérence de $\mathcal{G}(f, \lambda)$ signifie qu'il existe un voisinage de x où il n'y a pas de points de $\mathcal{G}(f, \lambda)$, c'est-à-dire où il n'y a pas de x tels que $f(x) < \lambda$. Si x n'est pas isolé, il y a des points y dans ce voisinage mais pour eux $f(y) \geqslant \lambda$. En d'autres termes, *x est un minimum local de l'application f, qui y prend la valeur λ.*

5° La relation d'inclusion forte est transitive ($\overline{A} \subset \mathring{B}$ et $\overline{B} \subset \mathring{C}$ entraînent $\overline{A} \subset \mathring{C}$), mais elle n'est, en général, pas réflexive, car $\overline{A} \subset \mathring{A}$ ne peut être vérifié que si A est ouvert et fermé.

Enfin, $\overline{A} \subset \mathring{B}$ et $\overline{B} \subset \mathring{A}$, qui entraînent $\overline{A} \subset \mathring{B} \subset \overline{B} \subset \mathring{A}$, exigent que les ensembles A et B soient confondus et vérifient la condition d'être en même temps ouverts et fermés.

6° Supposons f continue. Nous venons de voir que :

$$\overline{\mathcal{G}(f, \lambda)} \subset \overline{\mathcal{G}}(f, \lambda),$$

mais, si $\mu > \lambda$, $$\overline{\mathcal{G}}(f, \lambda) \subset \mathcal{G}(f, \mu),$$

d'où $$\overline{\mathcal{G}(f, \lambda)} \subset \mathcal{G}(f, \mu).$$

Or, $\mathcal{G}(f, \mu)$ est un ouvert. Donc :

$$\mathcal{G}(f, \lambda) \subset\subset \mathcal{G}(f, \mu).$$

Etudions la réciproque. Montrer que l'application est continue revient à montrer que tout élément $]\lambda, \mu[$ de la base des ouverts de **R** a pour image réciproque par f un ouvert.

Or : $$\overset{-1}{f}(]\lambda, \mu[) = \mathcal{G}(f, \mu) - \overline{\mathcal{G}}(f, \lambda)$$
$$\mathcal{G}(f, \mu) = \bigcup \{\mathcal{G}(f, \alpha) \,;\, \alpha < \mu\} .$$

Mais, pour tout $\alpha < \mu$, il existe β tel que $\alpha < \beta < \mu$, et l'hypothèse permet d'affirmer :

$$\mathcal{G}(f, \alpha) \subset \overline{\mathcal{G}(f, \alpha)} \subset \overset{\circ}{\widehat{\overline{\mathcal{G}}(f, \beta)}} \subset \mathcal{G}(f, \beta) \subset \mathcal{G}(f, \mu),$$

donc :

$$\bigcup \{\mathcal{G}(f, \alpha) \,;\, \alpha < \mu\} \subset \bigcup \{\overset{\circ}{\widehat{\overline{\mathcal{G}}(f, \beta)}} \,;\, \beta < \mu\} \subset \mathcal{G}(f, \mu).$$

Le premier et le troisième des ensembles ci-dessus étant égaux, les trois le sont ; le second est une réunion d'ouverts, il est donc ouvert, et $\mathcal{G}(f, \mu)$ l'est aussi.

Etudions de même :

$$\overline{\mathcal{G}}(f, \lambda) = \bigcap \{\mathcal{G}(f, \alpha) \,;\, \alpha > \lambda\} .$$

Pour tout $\alpha > \lambda$, il existe β tel que $\lambda < \beta < \alpha$ et

$$\mathcal{G}(f, \lambda) \subset \mathcal{G}(f, \beta) \subset \overline{\mathcal{G}(f, \beta)} \subset \overset{\circ}{\widehat{\overline{\mathcal{G}}(f, \alpha)}} \subset \mathcal{G}(f, \alpha),$$

donc :

$$\overline{\mathcal{G}}(f, \lambda) \subset \bigcap \{\overline{\mathcal{G}(f, \beta)} \,;\, \beta > \lambda\} \subset \bigcap \{\mathcal{G}(f, \alpha) \,;\, \alpha > \lambda\} .$$

L'égalité des premiers et troisièmes termes entraîne encore l'égalité des trois ; le second est une intersection de fermés, il est fermé et $\overline{\mathcal{G}}(f, \lambda)$ l'est aussi. L'ensemble $\overset{-1}{f}(]\lambda, \mu[)$, intersection d'un ouvert et du complémentaire d'un fermé, est ouvert. L'application f est continue.

7° Comparons, pour λ et μ réels quelconques avec $\lambda < \mu$, les ensembles :

$$F_\lambda = \mathcal{G}(f, \lambda) = \bigcup \{ H_\nu \,;\ \nu < \lambda \}$$

et

$$F_\mu = \mathcal{G}(f, \mu) = \bigcup \{ H_\nu \,;\ \nu < \mu \} .$$

Entre λ et μ on peut trouver deux éléments ν_1 et ν_2 de E, partout dense sur **R**. On aura :

$$\lambda < \nu_1 < \nu_2 < \mu \qquad \text{et} \qquad F_\lambda \subset H_{\nu_1} \subset H_{\nu_2} \subset F_\mu,$$

ce qui impliquera :

$$\overline{F_\lambda} \subset \overline{H_{\nu_1}} \quad \text{et} \quad \mathring{H}_{\nu_2} \subset \mathring{F}_\mu .$$

L'hypothèse permet alors d'écrire :

$$\overline{H_{\nu_1}} \subset \mathring{H}_{\nu_2},$$

donc

$$F_\lambda \subset\subset F_\mu .$$

En vertu du 6°, cette condition réalisée pour tout couple λ, μ est suffisante pour que f soit continue.

8° Supposons l'espace X normal et soit $F \subset O \neq X$; appliquons l'hypothèse de normalité à F et à $\complement O$. Il existe deux voisinages ouverts disjoints U et U' de F et $\complement O$, respectivement, c'est-à-dire que l'on a les inclusions :

$$F \subset U \subset \complement U' \subset O.$$

Or, $\complement U'$ est fermé ; donc il contient $\overline{U}$ et on a :

$$F \subset U \subset \overline{U} \subset O.$$

Réciproquement, supposons cette propriété vérifiée et soient deux fermés disjoints A et B de X. Appliquons l'hypothèse à A et à $\complement B$. Il existe U tel que :

$$A \subset U \subset \overline{U} \subset \complement B.$$

Mais ceci implique :

$$\complement \overline{U} \supset B.$$

U est un voisinage ouvert de A ; $\complement \overline{U} = \overset{\circ}{\widehat{\complement U}}$ est un voisinage ouvert de B ; U et $\complement \overline{U}$ sont disjoints ; X est normal. Si, dans un espace normal, O_1 est fortement contenu dans O_2, c'est que :

$$\overline{O_1} \subset \mathring{O}_2.$$

La propriété que nous avons démontrée permet d'affirmer l'existence de U ouvert :

$$\overline{O_1} \subset U \subset \overline{U} \subset \mathring{O}_2.$$

Or $\qquad U = \mathring{U} \quad \text{donc} \quad O_1 \subset\subset U \subset\subset O_2.$

9° La famille $H(\lambda)$ vérifie évidemment la propriété d'intersection vide et de réunion égale à X. Voyons si elle vérifie :

$$\mu_1 < \mu_2 \implies H(\mu_1) \subset\subset H(\mu_2).$$

a) Si $\mu_1 < \mu_2 < 0$: $\left\{ \begin{array}{ll} H(\mu_1) = \emptyset & \overline{H(\mu_1)} = \emptyset \\ H(\mu_2) = \emptyset & \overset{\circ}{\widehat{H(\mu_2)}} = \emptyset \end{array} \right\} \quad \emptyset \subset \emptyset.$

b) Si $\mu_1 < \mu_2 = 0$: $\quad H(\mu_2) = A \qquad \overset{\circ}{\widehat{H(\mu_2)}} = \mathring{A} \qquad \emptyset \subset \mathring{A}.$

c) Si $\mu_1 = 0 < \mu_2 < 1$, ou $0 < \mu_1 < \mu_2 < 1$, ou $0 < \mu_1 < \mu_2 = 1$.

μ_1 et μ_2 étant des nombres diadiques, les $H(\mu_1)$ et $H(\mu_2)$ correspondants ont été construits de façon à ce que la propriété soit vérifiée.

d) Si $\mu_1 = 1 < \mu_2$: $\left\{ \begin{array}{ll} H(\mu_1) = \complement B & \overline{H(\mu_1)} = \overline{\complement B} \\ H(\mu_2) = X & \overset{\circ}{\widehat{H(\mu_2)}} = X \end{array} \right\} \quad \overline{\complement B} \subset X.$

e) Si $1 < \mu_1 < \mu_2$: $\left\{ \begin{array}{ll} H(\mu_1) = X & \overline{H(\mu_1)} = X \\ H(\mu_2) = X & \overset{\circ}{\widehat{H(\mu_2)}} = X \end{array} \right\} \quad X \subset X.$

En vertu du 7°, il existe donc une application continue de X dans **R** définie comme au 2°. Il nous reste à trouver la valeur que prend cette application sur A et sur B. Nous savons que :

$$f(x) = 0 \iff x \in \bigcap \{ F_\mu \,;\ \mu > 0 \} - F_0.$$

Mais $\qquad F_0 = \bigcup \{ H_\nu \,;\ \nu < 0 \} = \emptyset$

et, pour tout $\mu > 0$, $\qquad F_\mu = \bigcup \{ H_\nu \,;\ \nu < \mu \} \supset H_0 = A,$

donc : $\qquad \bigcap \{ F_\mu \,;\ \mu > 0 \} \supset A.$

et $\qquad f(A) = \{ 0 \}.$

Nous avons, de même :

$$f(x) = 1 \iff x \in \bigcap \{ F_\mu \,;\ \mu > 1 \} - F_1,$$

avec : $\qquad F_1 = \bigcup \{ H_\mu \,;\ \mu < 1 \} \subset H_1 = \complement B$

$$\bigcap \{ F_\mu \,;\ \mu > 1 \} = X.$$

Donc l'ensemble des x pour lesquels $f(x) = 1$ est $X - F_1$ avec $F_1 \subset \complement B$. Il contient donc $X - \complement B = B$, donc : $f(B) = \{ 1 \}$.

10° Remarquons d'abord que $\forall x \in O$, il existe bien une application g_x continue telle que $g_x(x) = 1$ et $g_x(\complement O) = 0$, du fait que X satisfait à l'axiome des espaces complètement réguliers.

Soit s le *sup* de ces applications dans $\mathcal{C}(X, \mathbf{R})$. Par hypothèse, ce *sup* existe puisque l'ensemble des applications est borné. L'application qui vaudrait 1 sur tout X serait un majorant des g_x et serait continue ; c'est donc un majorant de s. Il en résulte que $\forall y \in X$, $s(y) \leqslant 1$. Or, en tout point y de O, il y a une des fonctions g qui vaut 1 ; donc $s(y)$ doit être au moins égal à 1 :

$$\forall y \in O \qquad s(y) = 1.$$

Examinons maintenant ce que doit être $s(y)$ pour $y \in \overline{O}$.

$$\forall V \in \mathcal{V}(y) \qquad \exists z \in V \qquad z \in O,$$

donc :
$$\forall V \in \mathcal{V}(y) \qquad \exists z \in V \qquad s(z) = 1,$$

s devant être continue ceci exige que $s(y) = 1$.

On a donc : $\qquad \forall y \in \overline{O} \qquad s(y) = 1.$

Examinons enfin ce que doit être $s(y)$ pour $y \in \complement \overline{O}$. En vertu de l'axiome de régularité complète, il existe une application continue de X dans $\mathbf{R}$ qui vaut 1 sur $\overline{O}$ et 0 pour y. Or, cette fonction est un majorant des g_x. Donc elle majore leur *sup* et $s(y)$ ne peut être que nul. On a donc :

$$\forall y \in \overline{O} \quad s(y) = 1 \qquad \forall y \in \complement \overline{O} \quad s(y) = 0.$$

Or, s est continue. L'image réciproque par s d'un voisinage ouvert de 1 ne contenant pas zéro est $\overline{O}$; on en conclut que $\overline{O}$ est ouvert. Dans X, l'adhérence de tout ouvert O est un ouvert.

Exercice 40.

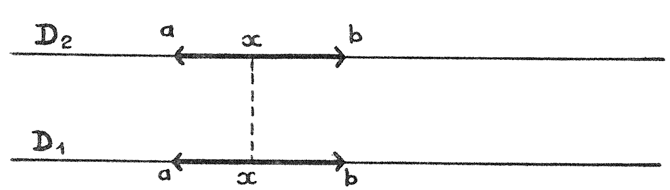
Soit un recouvrement ouvert de l'ensemble $\{x_n ; n \in \mathbf{N}\} \cup \{x\}$. Ce recouvrement comprend un voisinage V de x. Or l'hypothèse signifie que :

$$\forall V \in \mathcal{V}(x) \qquad \exists N \qquad n > N \implies x_n \in V.$$

Il y a donc au plus n points de l'ensemble situés hors de V et il suffit d'adjoindre à V des ouverts du recouvrement qui les contiennent pour extraire du recouvrement donné un recouvrement comprenant au plus $(N + 1)$ ouverts.

Exercice 41.

1) Un élément de l'ensemble produit est un couple (x, i) formé d'un réel x et d'un indice i qui ne peut prendre que l'une ou l'autre de deux valeurs, 1 et 2 par exemple. Soit, pour fixer les idées, un point $(x, 1)$. On sait qu'on obtient une base de ses voisinages, pour la topologie produit,



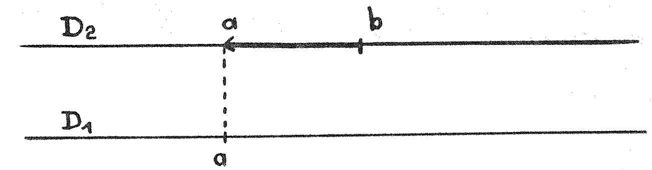
en prenant l'ensemble des produits cartésiens des éléments de la base des voisinages de $x \in \mathbf{R}$ et des éléments de la base des voisinages de 1. Or, le seul voisinage de 1 est l'ensemble $\{1, 2\}$ puisque c'est le seul ouvert non vide pour la topologie grossière. Donc une base des voisinages de $(x, 1)$ est formée des ensembles :

$$]a, b[\times \{1, 2\}, \text{ tels que } a < x < b,$$

c'est-à-dire des ensembles réunions des deux intervalles $]a, b[$ des droites D_1 et D_2.

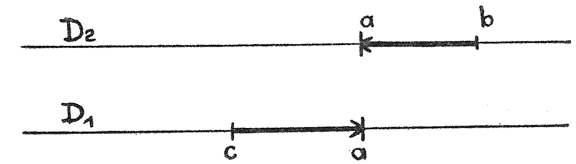
Les deux points $(x, 1)$ et $(x, 2)$ ont donc même base de voisinages et l'espace ne peut pas satisfaire à l'axiome (T_2) (ni même à l'axiome (T_1)).

2) Le point $(a, 1)$, qui fait partie du sous-ensemble envisagé par l'énoncé et représenté ci-contre, a les mêmes voisinages que le point $(a, 2)$



qui, lui, n'en fait pas partie. Ce sous-ensemble est donc homéomorphe au segment $[a, b]$ de D_2 et est, par suite, compact.

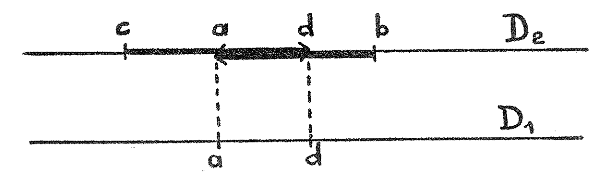
3) Soient le sous-ensemble précédent et celui formé de $(a, 2)$ et du semi-segment $[c, a[$ de D_1.



La réunion de ces deux sous-espaces n'est pas séparée puisque $(a, 1)$ et $(a, 2)$ ont mêmes voisinages.

La réunion des deux compacts envisagés est non séparée, donc non compacte.

4) Soient encore le sous-ensemble considéré au 2) et l'ensemble formé de $[c, d[$ de D_2 et du point $(d, 1)$ avec $c < a < d < b$.



L'intersection des deux sous-ensembles est formée de l'ouvert $]a, d[$ de D_2, qui n'est pas compact (il est séparé, mais ne satisfait pas à l'axiome (C_1)).

Notons que la réunion de ces deux sous-ensembles n'est pas séparée et fournit une autre solution de 3).

Exercice 42.

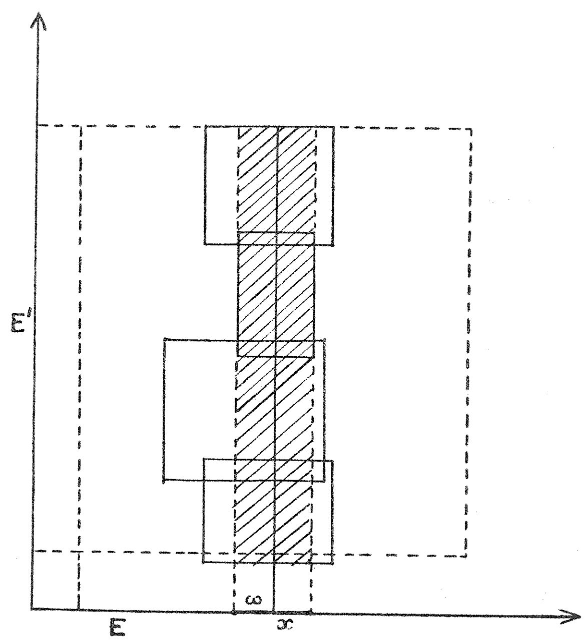
Soient E et E′ deux espaces compacts et un recouvrement ouvert $\mathcal{R}$ de $E \times E'$. Tout ouvert de $E \times E'$ étant la réunion d'ouverts de la forme $O \times O'$ (O ouvert de E, O′ ouvert de E′), il existe une famille $\mathcal{U}$ d'ouverts de cette forme qui constitue aussi un recouvrement ouvert de $E \times E'$ et qui est telle que tout élément de $\mathcal{U}$ est inclus dans au moins un élément de $\mathcal{R}$. Supposons que nous ayons montré que, de la famille $\mathcal{U}$, on peut extraire un recouvrement fini de $E \times E'$; en remplaçant chaque ouvert de $\mathcal{U}$ par un ouvert de $\mathcal{R}$ qui le contient, on obtiendra un recouvrement ouvert fini extrait de $\mathcal{R}$. Pour montrer que $E \times E'$ est compact, on peut donc se contenter de montrer que de tout recouvrement ouvert formé d'une famille d'ensembles $O \times O'$, on peut extraire un recouvrement fini.

Soit donc un recouvrement $\mathcal{U}$ de $E \times E'$ formés d'ouverts $O \times O'$. Considérons la coupe de $E \times E'$ correspondant à l'élément x de E. Cette coupe, homéomorphe à E' est compacte. La coupe des éléments de $\mathcal{U}$ en constitue un recouvrement ouvert ; on peut en extraire un recouvrement fini qui est constitué par les coupes des ouverts :

$$O_x^1 \times O'^1,\ O_x^2 \times O'^2,\quad \ldots,\ O_x^n \times O'^n \qquad (1),$$

les ouverts O_x^1, O_x^2, ..., O_x^n contenant tous x. Considérons alors :

$$\omega_x = O_x^1 \cap O_x^2 \cap \ldots \cap O_x^n.$$



la partie hachurée représente $\omega_x \times E'$

C'est un ouvert qui contient x et la famille (1) constitue un recouvrement de $\omega_x \times E'$.

A chaque point x de E on peut associer aussi un ouvert ω_x.

L'ensemble de ces ω_x constitue, quand x décrit E, un recouvrement de E. On peut en extraire un recouvrement fini :

$$\{\omega_{x_1}, \omega_{x_2}, \ldots,\quad \omega_{x_p}\}$$

et $\{\omega_{x_1} \times E', \omega_{x_2} \times E' \ldots, \omega_{x_p} \times E'\}$ constitue un recouvrement ouvert de $E \times E'$. Chaque élément de ce recouvrement admettant lui-même un recouvrement fini du type (1) extrait de $\mathcal{U}$, la réunion de ces recouvrements est un recouvrement de $E \times E'$ fini et extrait de $\mathcal{U}$.

Exercice 43.

Soit $E = \prod E_i$ $(i \in I)$, un espace localement compact et soit $a = (a_i)$ un point de E. Il possède un voisinage compact ; ce voisinage contient un élément de la base des ouverts de E, soit :

$$O = \prod_{j \in J} O_j \times \prod_{i \in I - J} E_i$$

O_j étant, pour tout j, un ouvert de E_j et J étant une partie finie de l'ensemble des indices I. Le voisinage compact se projette suivant un compact sur chaque espace facteur, ce compact incluant la projection de O. Or cette projection est l'ouvert O_j pour chaque E_j et est l'espace tout entier pour chaque E_i. Il en résulte que tous les E_i $(i \in (I - J))$ sont compacts et que, dans chaque E_j $(j \in J)$, a_j possède un voisinage compact. Tout point de E_j, pour tout j, étant projection d'un point de E qui possède un voisinage compact, tout point de E_j possède un voisinage compact et E_j est localement compact.

Réciproquement, supposons E_i localement compact pour $i \in J$ (J partie finie de l'ensemble I des indices), et supposons E_i compact pour $i \in (I - J)$. Soit $a = (a_i)$ un point de $\prod E_i$.

Pour tout $i \in J$, a_i possède un voisinage compact C_i (C_i est un compact qui contient un ouvert O_i contenant a_i).

L'ensemble

$$\prod_{i \in J} C_i \times \prod_{i \in (I - J)} E_i$$

est un voisinage de a puisqu'il contient l'ouvert :

$$\prod_{i \in J} O_i \times \prod_{i \in (I - J)} E_i$$

et il est compact puisque c'est un produit d'espaces compacts. Tout point de $E = \prod E_i$ possède donc un voisinage compact. D'autre part E, produit d'espaces séparés est séparé, donc E est localement compact.

Exercice 44.

Soit un point a d'un espace E localement compact. Le point a possède un voisinage compact K. On sait qu'un espace compact est régulier et nous avons vu (ex. 38) que l'axiome de régularité (T_3) entraînait le fait que tout point de l'espace possédait une base de voisinages fermés ; a possède donc, dans K, une base de voisinages fermés et, comme les parties fermées d'un espace compact sont compactes, a possède, dans K, une base de voisinages compacts.

Montrons qu'il en possède aussi une dans E. Si V est un voisinage de a dans E, $K \cap V$ est un autre voisinage de a dans E ou dans K ; comme voisinage dans K, il contient un voisinage compact C dans K.

C, voisinage de a dans K, contient un ouvert de K contenant a ; donc :

$$\exists O \in \mathcal{O}_E \qquad a \in O \qquad C \supset O \cap K.$$

Or, O et K sont deux voisinages de a dans E ; donc C est aussi voisinage de a dans E.

Par ailleurs C, compact dans K, est compact dans E (cf. VI. 1. 4).

Donc V inclut un voisinage C compact. Tout voisinage de a incluant un voisinage compact, a possède une base de voisinages compacts.

Exercice 45.

a) La réponse est *non*.

Un intervalle ouvert de **R** est localement compact et n'est pas fermé.

b) La réponse est *oui*.

Tout point a de l'intersection $A \cap B$ possède un voisinage compact K_1 inclus dans A et un voisinage compact K_2 inclus dans B. Considérons l'intersection de ces deux voisinages ; elle est compacte comme intersection de deux compacts ; elle est aussi un voisinage car elle contient les ouverts contenant a, $O_1 = O_1' \cap A$ et $O_2 = O_2' \cap B$, O_1' et O_2' étant deux ouverts de l'espace E. Elle contient donc $O_1' \cap O_2' \cap A \cap B$ qui est un ouvert de $A \cap B$ contenant a. Dans $A \cap B$, le point a possède donc un voisinage compact. D'autre part, $A \cap B$ est séparé, puisque A et B le sont. Donc $A \cap B$ est localement compact.

c) La réponse est *non*.

Dans $\mathbf{R}^+$, localement compact, considérons le sous-espace constitué par la réunion des intervalles $\left]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right[$, n décrivant **N**. Ce sous-espace est localement compact. Considérons d'autre part le sous-espace réduit à l'origine qui est compact, donc localement compact. Leur réunion n'est pas localement compacte car O n'y possède pas de voisinage compact. En effet, tout voisinage de O dans cette réunion doit contenir un intervalle ouvert de **R** privé de ses points de la forme $\frac{1}{n}$ et un tel ensemble n'est pas compact puisque la suite des points $\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{p} ; p \in \mathbf{N}\right)$ n'y a pas de valeur d'adhérence.

d) La réponse est *oui*.

Soit E un espace localement compact et O un ouvert de E. Un point a de O admet O pour voisinage dans E, qui est localement compact, donc a possède un voisinage compact V relatif à E et inclus dans O (cf. exercice 44), mais V étant inclus dans O est aussi voisinage de a pour la topologie induite sur O. L'ouvert O, qui est, par ailleurs, séparé, est donc localement compact.

e) La réponse est *oui*.

Soit E l'espace localement compact et F fermé inclus dans E. Un point a de F possède un voisinage compact $V \subset E$. Or, V est fermé comme partie compacte d'un espace séparé ; $V \cap F$ est donc un voisinage de a pour la topologie induite. Il est fermé dans E, dans F, dans V ; comme

partie fermée du compact V, cette partie est compacte et le point a possède dans F un voisinage compact. Donc F, qui est, par ailleurs, séparé, est localement compact.

f) La réponse est *non*.

Le sous-espace de $\mathbf{R}^+$ trouvé en *c*) et non localement compact admet pour complémentaire l'ensemble $\left\{\frac{1}{n} ; n \in \mathbf{N} - \{0\}\right\}$ qui est localement compact puisque chacun de ses points possède lui-même comme voisinage compact.

Exercice 46.

1° Nous avons démontré (cf. ex. 44) que dans un espace localement compact (et a fortiori dans un espace compact), tout point possédait une base de voisinages compacts, c'est-à-dire que tout voisinage V (voisinage dans X) d'un point $a \in E \subset X$ inclut un voisinage compact V'. Pour montrer que E est localement compact, il suffit donc de montrer qu'on peut trouver un voisinage V de a inclus dans E, car alors V' sera aussi inclus dans E, et la topologie sur E étant la topologie induite par la topologie sur X, V' sera bien un voisinage de a dans E.

Or, soient $x_1, x_2, ..., x_m$ les éléments de la partie finie $X - E$.

L'axiome (T_1) permet d'affirmer :

$$\forall i \qquad \exists V_i \in \mathcal{V}(a) \qquad V_i \not\ni x_i.$$

Considérons alors :

$$\bigcap_{1 \leqslant i \leqslant n} V_i = V.$$

C'est un voisinage de a, et il ne contient aucun des x_i ; donc, il est inclus dans E et la propriété est établie.

2° L'identité étant une application continue, la relation est réflexive. La convention d'identification de deux compactifiés homéomorphes signifie justement que la relation est antisymétrique.

Enfin, si $X_1 \mathcal{R} X_2$ et $X_2 \mathcal{R} X_3$ $\left\{\begin{array}{l}\exists f \text{ continue : } X_3 \longrightarrow X_2 \\ \exists g \text{ continue : } X_2 \longrightarrow X_1.\end{array}\right.$

Alors $g \circ f$ est une application continue de X_3 sur X_1, sa restriction à E est l'identité ; donc $X_1 \mathcal{R} X_3$.

$\mathcal{R}$ est donc une relation d'ordre.

3° Soit X un compactifié de E, et soit X' l'espace quotient de X par la relation d'équivalence qui consiste à identifier en un point x', deux points x_1 et x_2 de $X - E$, tous les autres points de X étant seuls dans leur classe. X' étant muni de la topologie quotient, l'application canonique $f : X \longrightarrow X'$ est continue ; elle est l'identité sur E (à condition d'identifier un élément de X et la classe où il est seul). Reste à vérifier que X' est compact et pour cela (cf. VI. 1. 6) que X' est séparé, ce qui se ramène, X étant séparé, à vérifier que le point x' possède un voisinage disjoint de tout autre point y de X'. Or, un voisinage de x' est l'image, par l'application canonique, de la réunion d'un voisinage de x_1 et d'un voisinage de x_2. L'ensemble X étant séparé, on peut choisir ces deux voisinages disjoints d'un voisinage de y ; leur réunion en est aussi disjointe ; son image par l'application canonique est disjointe du voisinage de y (qui est identique à son image canonique). X' est donc séparé, donc compact, et on peut noter $X' \mathcal{R} X$.

4° Si l'ensemble $\mathcal{X}$ ne possède que des éléments X tels que $X - E$ soit infini, il ne peut contenir de plus petit élément. En effet, on pourra, pour tout X, trouver un X', construit comme on vient de le voir, tel que $X' \mathcal{R} X$, il suffit alors de montrer que la chaîne des compactifiés ainsi formée ne peut pas être stationnaire, c'est-à-dire qu'il est impossible que deux éléments X et X' soient homéomorphes. Supposons qu'il existe une bijection continue $f : X' \longrightarrow X$; si φ désigne l'application canonique $X \longrightarrow X'$, $\psi = \varphi \circ f$ serait une application continue de X' sur lui-même qui serait l'identité sur E et qui donnerait, des deux valeurs distinctes $y_1 = \overset{-1}{f}(x_1)$ et $y_2 = \overset{-1}{f}(x_2)$, une même image x'. Montrons que c'est impossible. X' étant partout dense sur E, tout voisinage V_1 de y_1 rencontre E. Le filtre $\{ V_1 \cap E \}$ plus fin que $\mathcal{V}_1(y_1)$ converge vers y_1 ; ψ étant continue, l'image de ce filtre par ψ converge vers $\psi(y_1)$; or, ce filtre est invariant par ψ et, X' étant séparé, il ne peut converger vers deux points distincts. Donc $\psi(y_1) = y_1$; de même $\psi(y_2) = y_2$ (1). Il y a contradiction avec l'hypothèse. La chaîne des compactifiés n'est pas stationnaire et $\mathcal{X}$ ne peut avoir de plus petit élément. Donc, pour que $\mathcal{X}$ puisse avoir un plus petit élément, il est nécessaire que E soit localement compact.

Réciproquement, soit E localement compact. Ou bien E est compact et $\mathcal{X}$ possède bien un plus petit élément, qui est E lui-même.

Ou bien E n'est pas compact ; il admet le compactifié d'Alexandrov $X = E \cup \{ \omega \}$ avec

$$\mathcal{V}(\omega) = \{ U \cup \{ \omega \} \; ; \; U \in \Phi \}$$

(cf. cours : démonstration du théorème d'Alexandrov).
Supposons que E admette un autre compactifié $X' = E \cup \{ \omega' \}$. Montrer que $\mathcal{X}$ a un plus petit élément revient à montrer que X et X' sont identifiables au sens de la relation d'ordre, en d'autres termes, qu'à une homéomorphie près, il n'y a, pour un espace localement compact, qu'un compactifié par adjonction d'un seul point.

Il faut prouver que l'application $f : X' \longrightarrow X$, définie par $f(\omega') = \omega$, et par le fait que sa restriction à E soit l'identité, est une homéomorphie. Cette application est bijective ; d'autre part, dans un espace séparé, le filtre des voisinages d'un point ne peut posséder de point adhérent distinct du point. Donc, $\mathcal{V}(\omega')$ n'a pas de point adhérent autre que ω' et

$$\left\{ V' - \{ \omega' \} \; ; \; V' \in \mathcal{V}(\omega') \right\}$$

est un filtre $\mathcal{F}$ sur E, qui n'a pas de point adhérent, donc qui est plus fin que Φ. Or, $f(V') = (V' - \{ \omega' \}) \cup \{ \omega \}$.

Comme $\mathcal{F}$ est plus fin que Φ, $f(\mathcal{F})$ est plus fin que $\mathcal{V}(\omega)$, donc converge vers ω. L'application f est donc continue.

---

(1) Remarquons que ce raisonnement établit la propriété suivante : « *Une application continue d'un espace séparé dans lui-même qui est l'identité sur une partie partout dense est l'identité sur l'espace tout entier.* »

Enfin, la bijection réciproque $g = \overset{-1}{f}$ est aussi continue. En effet, X et X' étant compacts, les images, par f, des fermés de X' sont des fermés de X. Donc les images réciproques par g (qui sont des images par f) des fermés de X' sont des fermés de X et g est continue.

Exercice 47.

1° En un point x_0 où $f(x_0) = +\infty$, l'application f satisfait à la condition (a) ; quant à la condition (b), puisqu'il n'y a pas d'élément h strictement supérieur à $+\infty$, elle est aussi forcément satisfaite.

Si maintenant $f(x_0) < +\infty$, la condition (a) signifie :

$$\forall h > f(x_0) \qquad \exists V \in \mathcal{V}(x_0) \qquad \sup f(V) < h,$$

ce qui entraîne :

$$\forall h > f(x_0) \qquad \exists V \in \mathcal{V}(x_0) \qquad \forall x \in V \qquad f(x) < h \qquad (b).$$

Réciproquement, la condition (b) entraîne :

$$\forall h > f(x_0) \qquad \exists V \in \mathcal{V}(x_0) \qquad \sup f(V) \leqslant h,$$

donc $\quad M(f, x_0) = \inf \{ \sup f(V) \; ; \; V \in \mathcal{V}(x_0) \} \leqslant h.$

Ceci étant vrai pour tout $h > f(x_0)$ et, d'autre part, $M(f, x_0)$ étant $\geqslant f(x_0)$, il en résulte que $M(f, x_0)$ ne peut être égal qu'à $f(x_0)$. (Démonstration valable même si $f(x_0) = -\infty$). Dans tous les cas, $a) \iff b)$.

2° ● Propriété c).

Soit $\quad A_\lambda = \overset{-1}{f}([-\infty, \lambda[) = \{ x \; ; \; f(x) < \lambda \}$.

Ou bien A_λ est vide et est, par conséquent, ouvert ; ou bien A_λ n'est pas vide et soit alors $x_0 \in A_\lambda$; si f est semi-continue supérieurement, puisque $f(x_0) < \lambda$, en vertu de (b) :

$$\exists V \in \mathcal{V}(x_0) \qquad \forall x \in V \qquad f(x) < \lambda,$$

donc $\qquad V \subset A_\lambda$.

Donc tout $x_0 \in A_\lambda$ possède un voisinage inclus dans A_λ et A_λ est ouvert.

Réciproquement, supposons que, pour tout λ, l'ensemble A_λ soit ouvert. Soit $x_0 \in E$. Si $f(x_0) = +\infty$, f est semi-continue supérieurement en x_0. Si $f(x_0)$ est fini, pour tout $\lambda > f(x_0)$, A_λ est un ouvert qui contient x_0, donc un voisinage, et la condition (b) est vérifiée au point x_0 ; ce point étant quelconque, f est semi-continue supérieurement.

● Propriété d).

Soit maintenant $(x_0, y_0) \in S(f)$, où on a $y_0 = f(x_0) + \delta$, avec $\delta > 0$. Si f est semi-continue supérieurement, en vertu de (b) :

$$\exists V \in \mathcal{V}(x_0) \qquad \forall x \in V \qquad f(x) < f(x_0) + \frac{\delta}{2}.$$

Considérons alors l'ensemble produit cartésien de $V \subset E$ par :

$$]y_0 - \frac{\delta}{2}, +\infty[\subset \mathbf{R}.$$

Cet ensemble est un voisinage de (x_0, y_0). Or, pour tout élément de ce voisinage :

$$\left.\begin{array}{l} y > y_0 - \dfrac{\delta}{2} = f(x_0) + \dfrac{\delta}{2} \\ f(x) < f(x_0) + \dfrac{\delta}{2} \end{array}\right\} \quad y > f(x), \quad \text{donc} \quad (x, y) \in S(f),$$

(x_0, y_0) possède donc un voisinage inclus dans $S(f)$ et $S(f)$ est ouvert.

Inversement, supposons qu'en un point $x_0 \in E$, f ne soit pas semi-continue supérieurement. Ceci s'exprime par :

$$\exists\, h > f(x_0) \qquad \forall\, V \in \mathcal{V}(x_0) \qquad \exists\, x \in V \qquad f(x) > h.$$

Soit alors, le point (x_0, h) qui appartient à $S(f)$. Une base des voisinages de ce point est constituée par l'ensemble des produits cartésiens d'un voisinage $V \in \mathcal{V}(x_0)$ et d'un intervalle ouvert contenant h ; et dans tout voisinage de cette espèce il y a, en vertu de l'hypothèse, des points (x, y) avec $f(x) > h$ et $y < h$, donc des points qui n'appartiennent pas à $S(f)$. Aucun élément de la base des voisinages de (x_0, h) ne peut être contenu dans $S(f)$ et $S(f)$ n'est pas ouvert. On a donc établi :

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ semi-continue supérieurement} \implies (d) \\ f \text{ non semi-continue supér.} \implies \text{non } (d) \end{array}\right\} \; f \text{ semi-cont. sup.} \iff (d).$$

3° Etant donné $x_0 \in \mathbf{R}^+$ et h arbitraire positif, considérons l'intersection des intervalles $\left]\dfrac{\lambda}{n}, \dfrac{\lambda+1}{n}\right[$, n décrivant l'ensemble des entiers de 1 à N avec $\dfrac{1}{N} < h$, et λ étant l'entier défini pour tout n par $\dfrac{\lambda}{n} < x_0 < \dfrac{\lambda+1}{n}$. Il n'y a dans cette intersection aucune fraction irréductible de dénominateur inférieur à N si x_0 est irrationnel, aucune fraction irréductible de dénominateur inférieur à N et différente de x si $x = \dfrac{p}{q}$

Etant donné $x_0 \in \mathbf{R}^+$ quelconque et h arbitraire, on peut donc toujours trouver un intervalle entourant x_0 dans lequel $0 \leqslant f(x) < h$ sauf, peut-être, en x_0. Si donc x_0 est irrationnel $(f(x_0) = 0)$, f est continue en x_0 ; si x_0 est rationnel, f est semi-continue supérieurement en x_0. Donc, f est semi-continue supérieurement sur $\mathbf{R}^+$.

En x_0 irrationnel, $\Omega(f, x_0) = 0$ puisque f est continue.

En $x = \dfrac{p}{q}$, il résulte de ce qui précède que :

$$\left.\begin{array}{lll} & \exists\, V_0 \in \mathcal{V}\left(\dfrac{p}{q}\right) & \mathit{sup}\,\big(f(V_0)\big) = \dfrac{p}{q} \\ \text{et} & \forall\, V \in \mathcal{V}\left(\dfrac{p}{q}\right) & \mathit{sup}\,\big(f(V)\big) \geqslant \dfrac{p}{q} \end{array}\right\} \quad \text{donc} \quad M\left(f, \frac{p}{q}\right) = \frac{p}{q}$$

D'autre part, dans tout voisinage du rationnel $\dfrac{p}{q}$, il y a des irrationnels ; donc :

$$\forall\, V \in \mathcal{V}\left(\frac{p}{q}\right) \qquad \mathit{inf}\,\big(f(V)\big) = 0, \quad \text{donc} \quad m\left(f, \frac{p}{q}\right) = 0$$

et
$$\Omega\left(f, \frac{p}{q}\right) = \frac{p}{q}.$$

Cette fonction offre donc cette particularité d'être identique à son oscillation.

4° Soient f et g semi-continues supérieurement en un point $x_0 \in E$. Si $f(x_0)$ ou $g(x_0) = +\infty$, $(f+g)(x_0) = +\infty$ sous la seule réserve que cette somme soit définie (c'est-à-dire que si $f(x_0) = +\infty$, $g(x_0)$ soit différent de $-\infty$; cf. opérations dans $\overline{\mathbf{R}}$, VI, 2, 3), donc $(f+g)$ est aussi semi-continue supérieurement en x_0. Soit maintenant x_0, où $f(x_0)$ et $g(x_0)$ sont $< +\infty$. Tout $H > f(x_0) + g(x_0)$ peut être mis sous la forme $h + k$ avec $h > f(x_0)$ et $k > g(x_0)$, et on peut alors dire :

$$\begin{array}{lll} \exists\, V \in \mathcal{V}(x_0) & \forall\, x \in V & f(x) < h \\ \exists\, W \in \mathcal{V}(x_0) & \forall\, x \in W & g(x) < k, \end{array}$$

donc :

$$\exists\, V \cap W \in \mathcal{V}(x_0) \qquad \forall\, x \in V \cap W \qquad (f+g)(x) < H,$$

donc $(f+g)$ est semi-continue supérieurement en tout x_0 où elle est définie.

De même si f et g sont $\geqslant 0$ et semi-continues supérieurement, en un point x_0 où $f(x_0) = +\infty$, $fg(x_0) = +\infty$ et fg est semi-continue supérieurement sous la seule réserve que $g(x_0)$ ne soit pas nulle, c'est-à-dire que $fg(x_0)$ soit défini. Si maintenant en x_0, $f(x_0)$ et $g(x_0)$ sont $< +\infty$, tout $H > f(x_0)g(x_0)$ peut-être mis sous la forme hk avec $h > f(x_0)$ et $k > g(x_0)$ et avec les mêmes hypothèses que ci-dessus on arrive à :

$$\forall\, x \in V \cap W \qquad fg(x) < H,$$

donc fg est semi-continue supérieurement en tout x_0 où elle est définie.

Enfin si $f \geqslant 0$, en x_0 tel que $f(x_0) = +\infty$, $\dfrac{1}{f}(x_0) = 0$ et $\dfrac{1}{f}$ ayant un minimum en ce point y est semi-continue inférieurement.

Si $f(x_0)$ est finie, non nulle, à tout nombre $h < \dfrac{1}{f(x_0)}$ correspond $\dfrac{1}{h} > f(x_0)$; or :

$$\forall\, \frac{1}{h} > f(x_0) \qquad \exists\, V \in \mathcal{V}(x_0) \qquad \forall\, x \in V \qquad f(x) < h,$$

donc :
$$\frac{1}{f}(x) > \frac{1}{h},$$

donc $\dfrac{1}{f}$ est semi-continue inférieurement en x_0.

Dans $\overline{\mathbf{R}}$, $\dfrac{1}{f}$ ne peut être définie en x_0 si $f(x_0) = 0$. Donc on peut conclure que $\dfrac{1}{f}$ est semi-continue inférieurement partout où elle est définie.

(Remarquons que dans $\overline{\mathbf{R}}^+$ on pourrait encore définir $\dfrac{1}{f}$ au point x_0 où $f(x_0) = 0$ avec $\dfrac{1}{f}(x_0) = +\infty$ et $\dfrac{1}{f}$ serait encore semi-continue inférieurement en ce point, le raisonnement fait ci-dessus dans le cas de $f(x_0)$ finie et $\neq 0$ s'appliquant sans modifications).

5° Soit $\{f_i\}$ $i \in I$, ensemble fini d'indices, une famille de fonctions semi-continues supérieurement définies sur un ensemble E et soit à étudier les fonctions s et t définies par :

$$\forall x \in E \quad \left| \begin{array}{l} s(x) = sup \ \{f_i(x)\ ;\ i \in I\} \\ t(x) = inf \ \{f_i(x)\ ;\ i \in I\} \end{array} \right.$$

si en x_0 une des fonctions prend la valeur $+\infty$, $s(x_0) = +\infty$ et s est semi-continue supérieurement en x_0.

Supposons donc que, pour tout i, $f_i(x_0) < +\infty$, ce qui entraîne (I étant fini) $s(x_0) < +\infty$. Soit $h > s(x_0)$.

$$\forall i \qquad \exists\ V_i \in \mathcal{V}(x_0) \qquad \forall x \in V_i \quad f_i(x) < h,$$

donc $\exists\ V = \bigcap_{i \in I} V_i \in \mathcal{V}(x_0) \qquad \forall x \in V \qquad s(x) < h.$

Le *sup* s des fonctions f_i est donc semi-continue supérieurement.

Si toutes les fonctions f_i sont infinies pour x_0, $t(x_0)$ l'est aussi et t est semi-continue supérieurement en x_0. Dans les autres cas la définition de t entraîne :

$$\forall h > t(x_0) \qquad \exists\, i \in I \qquad f_i(x_0) < h,$$

et le fait que f_i soit semi-continue supérieurement en x_0 entraîne, puisque $h > f_i(x_0)$,

$$\exists\ V \in \mathcal{V}(x_0) \qquad \forall x \in V \qquad f_i(x) < h,$$

ce qui entraîne $\qquad t(x) < h.$

Donc :

$$\forall h > t(x_0) \qquad \exists\ V \in \mathcal{V}(x_0) \qquad \forall x \in V \qquad t(x) < h$$

et t est semi-continue supérieurement en x_0.

Supposons maintenant que I soit infini. Il est clair que rien ne sera changé à la deuxième des démonstrations ci-dessus. Mais la première est en défaut à partir du moment où on considère l'intersection des voisinages V_i, une intersection infinie de voisinages n'étant pas nécessairement un voisinage. Le résultat n'est d'ailleurs pas vrai comme le montre le contre-exemple suivant : la famille des fonctions continues f_k : $x \longrightarrow kx$, k décrivant **R** admet pour *sup* la fonction s telle que $s(0) = 0$ et $s(x) = +\infty$ pour tout $x \neq 0$, fonction qui n'est pas semi-continue supérieurement. *La fonction* inf *d'une famille infinie de fonctions semi-continues supérieurement est semi-continue supérieurement. La fonction* sup *de ces fonctions ne l'est pas nécessairement.*

On montre de la même façon qu'une famille infinie de fonctions semi-continues inférieurement admet un *sup* semi-continu inférieurement.

Des fonctions continues étant semi-continues inférieurement et supérieurement, on déduit donc de ce qui précède qu'*une famille de fonctions continues à valeurs réelles admet un* inf *semi-continu supérieurement et un* sup *semi-continu inférieurement.*

Autre démonstration. Considérons pour chacune des fonctions f_i l'ensemble $S(f_i)$ défini au 2°. L'ensemble $S(t)$ relatif à l'*inf* des fonctions f_i est la réunion $\bigcup_{i \in I} S(f_i)$, car :

$$y > t(x) \iff \exists\, i \quad y > f_i(x).$$

Or les ensembles $S(f_i)$ sont ouverts. Une réunion d'ouverts est un ouvert, donc, en vertu de la propriété (*d*), t est semi-continue supérieurement.

D'autre part, dans le cas où I *est fini* :

$$S(s) = \bigcap_{i \in I} S(f_i),$$

car $\qquad y > s(x) \iff \forall i \quad y > f_i(x).$

Une intersection finie d'ouverts étant un ouvert, s est semi-continue supérieurement.

6° Soit f une application quelconque de E dans $\overline{\mathbf{R}}$. Si $M(f, x_0) = +\infty$, $M(f, x)$ est semi-continue supérieurement en x_0. Si $M(f, x_0) < +\infty$, la définition de $M(f, x_0)$ permet d'écrire :

$$\forall h > M(f, x_0) \qquad \exists\ V \in \mathcal{V}(x_0) \qquad sup\,(f(V)) < h.$$

Mais V contient un ouvert O qui contient x_0 et O est voisinage de tous ses points donc appartient à la fois à $\mathcal{V}(x_0)$ et à $\mathcal{V}(x)$ pour tout $x \in O$. D'autre part $sup\ f(O) \leqslant sup\ f(V) < h$.

Donc :

$$M(f, x) = inf\ \{sup\ f(V)\ ;\ V \in \mathcal{V}(x)\} < h.$$

Finalement on a montré que :

$$\forall h > M(f, x_0) \qquad \exists\ O \in \mathcal{V}(x_0) \qquad \forall x \in O \qquad M(f, x) < h,$$

$M(f, x)$ est donc semi-continu supérieurement.

On démontrerait de la même façon que $m(f, x)$ est semi-continue inférieurement, donc $-m(f, x)$ est semi-continue supérieurement et $\Omega(f, x)$ est semi-continue supérieurement comme somme de deux fonctions semi-continues supérieurement.

7° Supposons E compact et f semi-continue supérieurement. Considérons la famille des ensembles $\overset{-1}{f}([\lambda, +\infty])$ obtenue en faisant décrire $f(E) \subset \overline{\mathbf{R}}$ par λ (ensembles qui sont fermés comme complémentaires des ensembles A_λ de la 2^e question). Cette famille est telle que toute sous-famille finie caractérisée par l'ensemble $\{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n\}$ que décrit λ a une intersection non vide puisque cette intersection est $\overset{-1}{f}([\lambda_0, +\infty])$, λ_0 étant le plus grand des nombres $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$. Donc en vertu de l'axiome $(\dot{C}_2)$ des compacts l'intersection de la famille entière est non vide. C'est dire qu'il existe au moins un point a qui appartient à tous les $\overset{-1}{f}([\lambda, +\infty])$, donc qui est tel que $f(a) \geqslant \lambda$ pour tout $\lambda \in f(E)$, ou encore tel que :

$$\forall x \in E \qquad f(a) \geqslant f(x).$$

C'est dire que $f(a)$ est le *sup* de $f(E)$; autrement dit f atteint en a sa borne supérieure.

Il en résulte que si f est finie pour tout x, $f(a)$ est lui-même fini et majore $f(E)$: une fonction *à valeurs dans* **R**, semi-continue supérieurement sur un compact, est majorée et atteint sa borne supérieure.

Exercice 48.

Soit $x_0 \in D$ et soit X la classe d'équivalence de x_0 modulo $\mathcal{R}$. X est ouvert car tout $x \in X$ possède un voisinage inclus dans X. X est fermé : en effet, si $x \in \overline{X}$, son voisinage V tel que $x\ \mathcal{R}\ y$ pour tout $y \in V$ a une intersection non nulle avec X, ce qui entraîne (transitivité de $\mathcal{R}$) que $x_0 \mathcal{R} x$, donc $x \in X$.

Or, dans le connexe D il n'y a pas d'autres parties ouvertes et fermées à la fois que $\emptyset$ et D lui-même. X n'est pas vide donc $X = D$. Et, quels que soient x et y dans D, $x \mathcal{R} y$.

Exemples : I. f est une fonction définie sur D. On pose :
$x \mathcal{R} y \iff f(x) = f(y)$. Si la fonction f est localement constante sur D (c'est-à-dire si tout point possède un voisinage où elle est constante) elle est constante sur tout D.

II. Si, dans $\mathbf{R}^n$, $x \mathcal{R} y$ signifie il existe une ligne brisée reliant x à y, tout point y d'une boule de centre x vérifie $x \mathcal{R} y$, par suite si D est un ouvert connexe de $\mathbf{R}^n$, ce qu'on appelle un *domaine* de $\mathbf{R}^n$, on peut énoncer : deux points quelconques d'un domaine de $\mathbf{R}^n$ peuvent être reliés par une ligne brisée incluse dans le domaine. On peut, en outre, imposer que chaque côté de la ligne brisée ait l'une de n directions fixes.

Exercice 49.

1° Soient deux éléments x, x', distincts de C. Puisque C est totalement ordonnée, un des deux, soit x, est inférieur à l'autre. Pour montrer que $\mathcal{T}$ est séparée, considérons deux cas :

PREMIER CAS : il existe au moins un élément y tel que :

$$x < y < x'.$$

Alors si a est un élément inférieur à x et b un élément supérieur à x' :

$$]a, y[\quad \text{et} \quad]y, b[$$

sont deux voisinages disjoints de x et x'. Au cas où x serait égal à a_0, le premier de ces voisinages serait remplacé par $[a_0, y[$; de même si x' était égal à b_0, le deuxième serait remplacé par $]y, b_0]$.

DEUXIÈME CAS : il n'existe aucun élément y entre x et x'. Les intervalles :

$$]a, x'[=]a, x] \quad \text{et} \quad]x, b[= [x', b[$$

seraient des voisinages disjoints (à modifier comme précédemment si $x = a_0$ ou $x' = b_0$).

La topologie $\mathcal{T}$ est donc séparée.

Le système des générateurs de la topologie $\mathcal{T}$ est en même temps base des ouverts de cette topologie si toute intersection finie d'intervalles (ou éventuellement de semi-segments) est formée d'intervalles (ou éventuellement de semi-segments). On vérifie immédiatement qu'il en est bien ainsi.

2° Si s possède un plus grand élément a, son complémentaire $\complement s$, formé de tous les éléments supérieurs à a, est toujours un ouvert. (En effet, si C possède un plus grand élément b_0, le complémentaire $\complement s =]a, b_0]$ est un ouvert ; si C n'en possède pas, $\complement s$ est la réunion des intervalles $]a, b[$ avec $b > a$; c'est donc encore un ouvert). Donc s est fermée.

Supposons maintenant que toute section commençante fermée soit close et soit A une partie quelconque de C. L'intersection des sections commençantes fermées qui contiennent A est une section commençante fermée qui contient A. Cette section a, par hypothèse, un plus grand

élément b et cet élément est la borne supérieure de A. En effet, b est un majorant de A et, d'autre part, si A possédait un majorant c plus petit que b, la section commençante $\{x ; x \leqslant c\}$ fermée et qui contient A serait strictement incluse dans l'intersection précédente. Il y aurait donc contradiction.

Toute partie A de C admet une borne supérieure. Comme C possède un plus petit élément, on sait (cf. *A.P.M. I*, page 86) que A possède aussi une borne inférieure.

Remarquons que si nous supprimons l'hypothèse « C *a un plus petit élément* », la première partie de la démonstration précédente reste valable. Or, le théorème cité indique que si un ensemble ordonné est tel que tout sous-ensemble propre a un *sup*, alors tout sous-ensemble minoré a aussi un *inf*. Un tel ensemble est dit *un treillis conditionnellement complet.* Si l'ordre est total, nous dirons que c'est une chaîne conditionnellement complète.

On a alors montré : « *Si toute section commençante propre fermée de* C *est close, alors* C *est une chaîne conditionnellement complète.* »

3° Soit C compact. Supposons que C ne possède pas de plus petit élément : cela entraîne que pour tout élément x de C, il existe un $y < x$. Par suite, l'intersection des sections commençantes closes de C est vide. Or, ces sections commençantes closes sont fermées, et l'intersection d'un nombre fini d'entre elles est la plus petite ; elle est non vide : il existerait donc une famille de fermés de C dont l'intersection serait vide, bien que toutes les intersections finies ne le soient pas ; l'axiome (C_2) ne serait donc pas satisfait.

Soit ensuite une section commençante fermée s. Partie fermée d'un espace compact, s est compacte. Un raisonnement analogue portant sur les sections finissantes closes de s montrerait que s possède un plus grand élément. On en déduit, en vertu de 2), que C est complète.

Réciproquement, soit C complète et soit $\mathcal{F}$ un filtre sur C. Tout $F_i \in \mathcal{F}$ possède un *inf*, soit a_i. Posons :

$$a = sup\ \{a_i ; F_i \in \mathcal{F}\}$$

et montrons que a est adhérent à $\mathcal{F}$. Tout voisinage V de a contient un semi-segment $]b, a]$ avec $b < a$. Ce semi-segment $]b, a]$ contient au moins un a_i sans quoi b serait un majorant de $\{a_i\}$ plus petit que a. Soit alors $F_j \in \mathcal{F}$ quelconque. Si $]b, a] \cap F_j$ était vide, F_j n'aurait aucun élément supérieur à b et F_i aucun élément inférieur à $a_i \geqslant b$; alors $F_i \cap F_j$ serait vide, ce qui est impossible. Donc :

$$\forall V \in \mathcal{V}(a) \qquad \forall j \qquad V \cap F_j \neq \emptyset,$$

ce qu'on voulait montrer. Il en résulte que C satisfait à (C_3), donc est compacte.

4° Supposons C connexe. Une section commençante fermée s est non ouverte si elle n'est pas la chaîne toute entière. Or, s non ouverte signifie qu'il existe $a \in s$ qui n'appartient à aucun ouvert inclus dans s. Ceci entraîne que a est le plus grand élément de s. En effet, s'il existait $a' > a$, il existerait un ouvert $]b, a'[\subset s$ et contenant a. Donc, s est close. Donc :

$$s \text{ non ouverte} \implies s \text{ close}$$

par conséquent, C étant connexe nous avons :

$$s \text{ propre fermée} \implies s \text{ close},$$

donc C est conditionnellement complète.

intersection non nulle avec X, ce qui entraîne (transitivité de $\mathcal{R}$) que $x_0 \mathcal{R} x$, donc $x \in X$.

Or, dans le connexe D il n'y a pas d'autres parties ouvertes et fermées à la fois que $\emptyset$ et D lui-même. X n'est pas vide donc $X = D$. Et, quels que soient x et y dans D, $x \mathcal{R} y$.

Exemples : I. f est une fonction définie sur D. On pose : $x \mathcal{R} y \iff f(x) = f(y)$. Si la fonction f est localement constante sur D (c'est-à-dire si tout point possède un voisinage où elle est constante) elle est constante sur tout D.

II. Si, dans $\mathbf{R}^n$, $x \mathcal{R} y$ signifie il existe une ligne brisée reliant x à y, tout point y d'une boule de centre x vérifie $x \mathcal{R} y$, par suite si D est un ouvert connexe de $\mathbf{R}^n$, ce qu'on appelle un *domaine* de $\mathbf{R}^n$, on peut énoncer : deux points quelconques d'un domaine de $\mathbf{R}^n$ peuvent être reliés par une ligne brisée incluse dans le domaine. On peut, en outre, imposer que chaque côté de la ligne brisée ait l'une de n directions fixes.

Exercice 49.

1° Soient deux éléments x, x', distincts de C. Puisque C est totalement ordonnée, un des deux, soit x, est inférieur à l'autre. Pour montrer que $\mathcal{T}$ est séparée, considérons deux cas :

Premier cas : il existe au moins un élément y tel que :

$$x < y < x'.$$

Alors si a est un élément inférieur à x et b un élément supérieur à x' :

$$]a, y[\quad \text{et} \quad]y, b[$$

sont deux voisinages disjoints de x et x'. Au cas où x serait égal à a_0, le premier de ces voisinages serait remplacé par $[a_0, y[$; de même si x' était égal à b_0, le deuxième serait remplacé par $]y, b_0]$.

Deuxième cas : il n'existe aucun élément y entre x et x'. Les intervalles :

$$]a, x'[=]a, x] \quad \text{et} \quad]x, b[= [x', b[$$

seraient des voisinages disjoints (à modifier comme précédemment si $x = a_0$ ou $x' = b_0$).

La topologie $\mathcal{T}$ est donc séparée.

Le système des générateurs de la topologie $\mathcal{T}$ est en même temps base des ouverts de cette topologie si toute intersection finie d'intervalles (ou éventuellement de semi-segments) est formée d'intervalles (ou éventuellement de semi-segments). On vérifie immédiatement qu'il en est bien ainsi.

2° Si s possède un plus grand élément a, son complémentaire $\complement s$, formé de tous les éléments supérieurs à a, est toujours un ouvert. (En effet, si C possède un plus grand élément b_0, le complémentaire $\complement\, s =]a, b_0]$ est un ouvert ; si C n'en possède pas, $\complement s$ est la réunion des intervalles $]a, b[$ avec $b > a$; c'est donc encore un ouvert). Donc s est fermée.

Supposons maintenant que toute section commençante fermée soit close et soit A une partie quelconque de C. L'intersection des sections commençantes fermées qui contiennent A est une section commençante fermée qui contient A. Cette section a, par hypothèse, un plus grand

élément b et cet élément est la borne supérieure de A. En effet, b est un majorant de A et, d'autre part, si A possédait un majorant c plus petit que b, la section commençante $\{ x ; x \leqslant c \}$ fermée et qui contient A serait strictement incluse dans l'intersection précédente. Il y aurait donc contradiction.

Toute partie A de C admet une borne supérieure. Comme C possède un plus petit élément, on sait (cf. *A.P.M. I*, page 86) que A possède aussi une borne inférieure.

Remarquons que si nous supprimons l'hypothèse « C *a un plus petit élément* », la première partie de la démonstration précédente reste valable. Or, le théorème cité indique que si un ensemble ordonné est tel que tout sous-ensemble propre a un *sup*, alors tout sous-ensemble minoré a aussi un *inf*. Un tel ensemble est dit *un treillis conditionnellement complet.* Si l'ordre est total, nous dirons que c'est une chaîne conditionnellement complète.

On a alors montré : « *Si toute section commençante propre fermée de* C *est close, alors* C *est une chaîne conditionnellement complète.* »

3° Soit C compact. Supposons que C ne possède pas de plus petit élément : cela entraîne que pour tout élément x de C, il existe un $y < x$. Par suite, l'intersection des sections commençantes closes de C est vide. Or, ces sections commençantes closes sont fermées, et l'intersection d'un nombre fini d'entre elles est la plus petite ; elle est non vide : il existerait donc une famille de fermés de C dont l'intersection serait vide, bien que toutes les intersections finies ne le soient pas ; l'axiome (C_2) ne serait donc pas satisfait.

Soit ensuite une section commençante fermée s. Partie fermée d'un espace compact, s est compacte. Un raisonnement analogue portant sur les sections finissantes closes de s montrerait que s possède un plus grand élément. On en déduit, en vertu de 2), que C est complète.

Réciproquement, soit C complète et soit $\mathcal{F}$ un filtre sur C. Tout $F_i \in \mathcal{F}$ possède un *inf*, soit a_i. Posons :

$$a = sup\ \{ a_i ;\ F_i \in \mathcal{F} \}$$

et montrons que a est adhérent à $\mathcal{F}$. Tout voisinage V de a contient un semi-segment $]b, a]$ avec $b < a$. Ce semi-segment $]b, a]$ contient au moins un a_i sans quoi b serait un majorant de $\{ a_i \}$ plus petit que a. Soit alors $F_j \in \mathcal{F}$ quelconque. Si $]b, a] \cap F_j$ était vide, F_j n'aurait aucun élément supérieur à b et F_i aucun élément inférieur à $a_i \geqslant b$; alors $F_i \cap F_j$ serait vide, ce qui est impossible. Donc :

$$\forall V \in \mathcal{V}(a) \qquad \forall j \qquad V \cap F_j \neq \emptyset,$$

ce qu'on voulait montrer. Il en résulte que C satisfait à (C_3), donc est compacte.

4° Supposons C connexe. Une section commençante fermée s est non ouverte si elle n'est pas la chaîne toute entière. Or, s non ouverte signifie qu'il existe $a \in s$ qui n'appartient à aucun ouvert inclus dans s. Ceci entraîne que a est le plus grand élément de s. En effet, s'il existait $a' > a$, il existerait un ouvert $]b, a'[\subset s$ et contenant a. Donc, s est close. Donc :

$$s \text{ non ouverte} \quad \Longrightarrow \quad s \text{ close}$$

par conséquent, C étant connexe nous avons :

$$s \text{ propre fermée} \quad \Longrightarrow \quad s \text{ close},$$

donc C est conditionnellement complète.

D'autre part, s'il existait a et a', (avec $a < a'$), ne comprenant entre eux aucun élément, les ensembles :

$$\{ x \,;\, x \leqslant a \} = \{ x \,;\, x < a' \}$$
$$\text{et} \quad \{ x \,;\, x \geqslant a' \} = \{ x \,;\, x > a' \}$$

seraient deux ouverts disjoints réalisant une partition de C. Donc, pour que C soit connexe, il faut qu'entre deux éléments a et a' quelconques, il y ait toujours un autre élément, c'est-à-dire que C soit dense pour son ordre.

Nous arrivons donc au système de conditions nécessaires suivantes :

$$\text{C connexe} \Longrightarrow \begin{cases} \text{C conditionnellement complète} \\ \text{C dense pour son ordre.} \end{cases}$$

Supposons maintenant ces deux conditions réalisées et supposons qu'il existe une partition de C en deux ouverts A et $\complement A$, non vides. Appelons A celui qui ne contient pas b_0. La première hypothèse entraîne qu'il existe *sup* A ; cet élément ne peut appartenir à A car C étant dense, il ne pourrait appartenir à aucun intervalle inclus dans A ; pour une raison identique, il ne peut appartenir à $\complement A$; il y a donc contradiction et les deux hypothèses entraînent que C est connexe.

Remarquons que parmi les chaînes les plus usuelles, **N**, **Z**, **Q**, **R**, $\overline{\mathbf{R}}$, toutes ne vérifient pas ces propriétés. La seule de ces chaînes à être compacte est $\overline{\mathbf{R}}$ qui est une chaîne complète ; **R** est connexe parce qu'elle est à la fois dense pour l'ordre et conditionnellement complète. **Q** n'est pas connexe, quoique dense, car il n'est pas conditionnellement complet.

Exercice 50.

1° Soit F une partie fermée d'un espace métrique. A tout $n \in \mathbf{N}$, associons l'ouvert :

$$\bigcup_{x \in F} B\left(x, \frac{1}{n}\right)$$

qui est l'ensemble des points situés à une distance de F inférieure à $\frac{1}{n}$.

Puis considérons :

$$G = \bigcap_{n \in \mathbf{N}} \left\{ \bigcup_{x \in F} B\left(x, \frac{1}{n}\right) \right\}$$

Cet ensemble, intersection dénombrable d'ouverts, est l'ensemble des points dont la distance à F est, pour tout n, inférieure à $\frac{1}{n}$, autrement dit l'ensemble des points dont la distance à F est nulle. On sait que cet ensemble est $\overline{F}$, c'est-à-dire F. Donc $G = F$.

2° Si E est un espace topologique et f une application continue, un fermé de **R** (espace métrique) étant une intersection dénombrable d'ouverts, son image réciproque est une intersection dénombrable d'ouverts, donc un G_δ ; ce G_δ est fermé comme image réciproque d'un fermé.

3° Soit F, fermé et intersection dénombrable d'ouverts O_n d'un espace métrique E. Les ensembles F et $\complement O_n$ sont des fermés disjoints et, d'après le théorème d'Uryshon, il existe une application continue de l'espace dans $[0, 1]$ qui vaut zéro sur F et 1 sur $\complement O_n$. En composant cette application avec une homothétie, on peut toujours remplacer $[0, 1]$ par tout segment $[0, a]$ que l'on veut. Donc, $\exists f_n : E \longrightarrow [0, a_n]$ continue

$$f_n(F) = \{ 0 \} \qquad f_n\left(\complement O_n\right) = \{ a_n \}.$$

Considérons alors l'application :

$$g : E \longrightarrow \mathbf{R} \qquad g = \sum_{n=1}^{\infty} f_n.$$

Si on choisit les fonctions f_n de façon à ce que la série $f_n(x)$ soit, quand x décrit E, uniformément convergente, la fonction g sera continue. Or, il suffit pour cela de choisir la série a_n convergente puisque, pour tout n, a_n majore f_n, g est alors une application continue qui vaut zéro sur F ; elle ne peut valoir zéro en $x \notin F$, car :

$$x \notin F \Longrightarrow \exists n \quad x \notin O_n \Longrightarrow f_n(x) = a_n \Longrightarrow g(x) \geqslant a_n.$$

La fonction g répond bien à la question.

En rapprochant les résultats du 2° et du 3°, on peut énoncer : une condition nécessaire et suffisante pour qu'une partie d'un espace métrique soit l'ensemble des zéros d'une application continue à valeurs réelles est que cette partie soit un G_δ fermé.

Exercice 51.

1° De $d(f(x), f(y)) \leqslant k\, d(x, y)$, on déduit successivement :

$$d(f(x), f^2(x)) \leqslant k\, d(x, f(x))$$
$$d(f^n(x), f^{n+1}(x) \leqslant k^n d(x, f(x))$$
$$d(f^n(x), f^{n+p}(x)) \leqslant \frac{k^n}{1-k}\, d(x, f(x)).$$

La suite $\{ f^n(x) \}$ est donc une suite de Cauchy, qui converge vers un point ξ puisque E est complet.

ξ vérifie $\xi = f(\xi)$ car, pour tout réel positif ε, il existe n_0 tel que pour $n > n_0$, on ait :

$$d(f^n(x), \xi) < \varepsilon.$$

On a, par suite,

$$d(f^{n+1}(x), f(\xi)) < k\,\varepsilon$$

et $\qquad d(\xi, f(\xi)) < \varepsilon(1 + k)$, d'où $d(\xi, f(\xi)) = 0$.

Le point ξ est indépendant du point de départ x, car si y est un autre point, on a :

$$d(f^n(x), f^n(y)) \leqslant k^n d(x, y)$$

et il est l'unique solution de l'équation $\xi = f(\xi)$, car une autre solution η vérifierait $d(\xi, \eta) \leqslant k\, d(\xi, \eta)$.

2° Soit E l'espace des fonctions continues réelles définies sur le segment V de centre x_0, de longueur $2l$, et qui valent y_0 en x_0. On le munit de la distance indiquée dans l'énoncé, et on considère l'application φ de E dans E qui à $y \in E$ fait correspondre $\varphi(y)$ qui pour $x \in V$ prend la valeur :

$$y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\, dt.$$

De

$$\left| \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\, dt - \int_{x_0}^{x} f(t, z(t))\, dt \right|$$

$$\leqslant \left| \int_{x_0}^{x} |f(t, y(t)) - f(t, z(t))|\, dt \right| \leqslant \mathrm{H} \left| \int_{x_0}^{x} \left| (y(t)) - z(t) \right| dt, \right.$$

on déduit :

$$d\big(\varphi(y), \varphi(z)\big) \leqslant \mathrm{H}l\, d(y, z).$$

On peut choisir l pour que $\mathrm{H}l < 1$, et si M est le maximum de $|f|$ dans R, pour que :

$$c \leqslant y_0 - \mathrm{M}l < y_0 + \mathrm{M}l \leqslant d.$$

E étant complet, le résultat de 1° garantit l'existence d'une fonction y définie sur $[x_0 - l, x_0 + l]$ à valeurs dans $[y_0 - \mathrm{M}l, y_0 + \mathrm{M}l]$ et vérifiant $\varphi(y) = y$, c'est-à-dire vérifiant l'équation différentielle.

Le résultat de 1° ne garantit pas seulement l'existence d'une solution, il permet de la déterminer comme limite de la suite des itérées d'une fonction particulière, par exemple, de la fonction constante de valeur y_0.

On a là un exemple de la Méthode des approximations successives, dont un exemple plus élémentaire est la résolution des équations du type $x = f(x)$, où f est une fonction réelle définie sur un segment de **R**, et dont le principe est, dans tous les cas, le résultat de 1°.

Exercice 52.

1) $inf \left\{ r \,;\, \frac{x}{r} \in \mathrm{C} \right\} = 0$ signifie :

$$\forall r \in \mathbf{R}+ \qquad \frac{x}{r} \in \mathrm{C}.$$

Cette propriété est évidemment vérifiée si $x = 0$, et, *réciproquement*, si elle était vérifiée pour $x \neq 0$, elle entraînerait que C contienne la droite $\mathrm{O}x$, ce qui est exclu par hypothèse. Elle exige donc que $x = 0$. Donc :

$$p(x) = 0 \iff x = 0.$$

2) Soit λ un scalaire. $p(\lambda x)$ est la borne inférieure des scalaires positifs r tels que $\frac{\lambda x}{r}$ appartienne à C, ce qui, vu l'hypothèse de symétrie de C, entraîne que $\frac{|\lambda| x}{r}$ appartienne à C. Mais si l'on pose $r = |\lambda| \rho$:

$$\frac{|\lambda| x}{r} \in \mathrm{C} \iff \frac{x}{\rho} \in \mathrm{C},$$

donc $\quad inf \left\{ r \,;\, \frac{|\lambda| x}{r} \in \mathrm{C} \right\} = |\lambda|\, inf \left\{ \rho \,;\, \frac{x}{\rho} \in \mathrm{C} \right\}$

ou $\quad p(\lambda x) = |\lambda| p(x).$

3) Soient x et y deux éléments quelconques de l'espace. Considérons

$$x' = \frac{x}{\lambda p(x)} \qquad y' = \frac{y}{\lambda p(y)}.$$

Pour tout $\lambda > 1$, x' et y' appartiennent à C par définition de p. Considérons alors le point :

$$\frac{x + y}{\lambda\big(p(x) + p(y)\big)} = \frac{x' p(x)}{p(x) + p(y)} + \frac{y' p(y)}{p(x) + p(y)}$$

Sous la deuxième des formes ci-dessus, ce point apparaît comme un barycentre positif de x' et y' ; ce point appartient donc à C, ce qui entraîne, d'après la définition de $p(x + y)$:

$$\lambda\big(p(x) + p(y)\big) \geqslant p(x + y).$$

Cette inégalité devant être vérifiée pour tout $\lambda > 1$, ceci exige :

$$p(x) + p(y) \geqslant p(x + y),$$

$p(x)$ jouit bien des propriétés d'une norme.

Boules unités. — La boule ouverte de centre O est l'ensemble des x qui vérifient :

$$inf \left\{ r \,;\, \frac{x}{r} \in \mathrm{C} \right\} < 1,$$

ce qui entraîne :

$$\exists r < 1 \qquad \frac{x}{r} \in \mathrm{C},$$

et par conséquent : $\quad x \in \mathrm{C}.$

D'où $\quad \mathrm{B}(\mathrm{O}, 1) \subset \mathrm{C}.$

Mais, *réciproquement*,

$$x \in \mathrm{C} \implies \forall r > 1 \qquad \frac{x}{r} \in \mathrm{C},$$

donc $\quad inf \left\{ r \,;\, \frac{x}{r} \in \mathrm{C} \right\} \leqslant 1.$

D'où $\quad \mathrm{C} \subset \overline{\mathrm{B}}(\mathrm{O}, 1),$

et, puisque dans un espace vectoriel normé l'adhérence de la boule ouverte est la boule fermée et l'intérieur de la boule fermée est la boule ouverte, de $\mathrm{B}(\mathrm{O}, 1) \subset \mathrm{C} \subset \overline{\mathrm{B}}(\mathrm{O}, 1)$ on déduit :

$$\overline{\mathrm{B}}(\mathrm{O}, 1) \subset \overline{\mathrm{C}} \quad \text{donc} \quad \overline{\mathrm{B}}(\mathrm{O}, 1) = \overline{\mathrm{C}}$$

et $\quad \mathring{\mathrm{C}} \subset \mathrm{B}(\mathrm{O}, 1) \quad$ donc $\quad \mathrm{B}(\mathrm{O}, 1) = \mathring{\mathrm{C}}.$

Remarque I. — Il peut sembler que l'on aurait simplifié le 3) du raisonnement précédent en considérant les points $\frac{x}{p(x)}$ et $\frac{y}{p(y)}$. Mais ces points n'appartiennent pas toujours à C ; ils appartiennent à $\overline{\mathrm{B}}$; or, la convexité de $\overline{\mathrm{B}}$ résulte du fait qu'elle est boule pour la norme p ; on ne peut donc, sans tourner dans un cercle vicieux, l'utiliser pour montrer que p est une norme.

Remarque II. — Si on était dans un espace vectoriel sur **C** et non plus sur **R**, il faudrait que la partie convexe C soit, par hypothèse, invariante non seulement dans la symétrie de centre O, mais dans toute homothétie de centre O et de rapport $e^{i\theta}$, afin que l'on puisse étendre la démonstration 2).

Exercice 53.

Nous désignerons par des lettres latines les éléments de **C** et par des lettres grecques les éléments de l'espace de suites étudié.

● **Espace (m).** Soit la suite $\alpha^1, \alpha^2, ..., \alpha^p, ...$ de (m), notée (α^p), où α^p désigne la suite (a_n^p) de **C** de terme général a_n^p.

$$\begin{array}{lllll}
\alpha^1 : & a_1^1 & a_2^1 & \ldots\ldots & a_n^1 \ \ldots\ldots \\
\alpha^2 : & a_1^2 & a_2^2 & \ldots\ldots & a_n^2 \ \ldots\ldots \\
\alpha^p : & a_1^p & a_2^p & \ldots\ldots & a_n^p \ \ldots\ldots \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\
\alpha \ : & a_1 & a_2 & \ldots\ldots & a_n \ \ldots\ldots
\end{array}$$

Si c'est une suite de Cauchy de (m) c'est que :

$$\forall \varepsilon \quad \exists P \quad \left.\begin{array}{l} p > P \\ q > P \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad \|\alpha^p - \alpha^q\| < \varepsilon.$$

Or :

$$\|\alpha^p - \alpha^q\| = \sup_{n \in \mathbf{N}} \left| a_n^p - a_n^q \right|.$$

Donc, si (α^p) est une suite de Cauchy, c'est que :

$$\forall \varepsilon \quad \exists P \quad \left.\begin{array}{l} p \geqslant P \\ q \geqslant P \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad \forall n \quad \left| a_n^p - a_n^q \right| < \varepsilon.$$

Considérons alors la suite $a_n^1, a_n^2, \ldots\ldots a_n^p \ldots\ldots$ **C'est une suite de C,** dont ce qui précède exprime qu'elle est une suite de Cauchy. Toute suite de Cauchy de **C** converge. Soit donc :

$$a_n = \lim_{p\, \infty} a_n^p$$

qui vérifie :

$$\forall n \qquad p \geqslant P \quad \Longrightarrow \quad |a_n^p - a_n| \leqslant \varepsilon \qquad\qquad (1).$$

Considérons alors la suite $\alpha = (a_n)$. L'inégalité précédente montre que :

$$\forall n \qquad |a_n| \leqslant |a_n^P| + \varepsilon,$$

donc :

$$\sup_{n \in \mathbf{N}} |a_n| \leqslant \sup_{n \in \mathbf{N}} |a_n^P| + \varepsilon.$$

La suite α^P appartenant à (m), la suite α lui appartient aussi. D'autre part, la suite (α^p) converge vers α car :

$$\|\alpha - \alpha^p\| = \sup_{n \in \mathbf{N}} |a_n - a_n^p|$$

et la formule (1) exprime que pour $p \geqslant P$, ce *sup* est inférieur ou égal à ε.

Donc toute suite de Cauchy de (m) converge vers un élément de (m) ; c'est-à-dire que (m) est complet.

● **Sous-espace (c).** Supposons que $\alpha^1, \alpha^2, ..., \alpha^p, ...$ soient des suites convergentes et montrons que la suite (α) l'est aussi. On peut écrire :

$$|a_n - a_{n'}| \leqslant |a_n - a_n^P| + |a_n^P - a_{n'}^P| + |a_{n'}^P - a_{n'}|.$$

En vertu de (1) le premier et le dernier terme de cette somme sont majorés par ε. Observons d'autre part, que α^P, étant une suite convergente est une suite de Cauchy de **C**, qu'en conséquence :

$$\exists N \quad \left.\begin{array}{l} n > N \\ n' > N \end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad |a_n^P - a_{n'}^P| < \varepsilon.$$

Donc :

$$\forall \varepsilon \qquad \exists N \quad \left.\begin{array}{l} n > N \\ n' > N \end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad |a_n - a_{n'}| < 3\,\varepsilon,$$

α est donc une suite de Cauchy de **C**, donc convergente, et puisqu'elle est la limite de (α^p), on peut dire que le sous-espace (c) est complet. (Il en résulte qu'il est fermé dans (m)).

● **Sous-espace (c_0).** Pour montrer que (c_0) est complet, il suffit de montrer qu'il est fermé dans (c), ou, ce qui revient au même, que l'ensemble des suites qui convergent vers un point différent de zéro est ouvert. Soit donc une suite α qui converge vers $z_0 \in \mathbf{C}$ $(z_0 \neq 0)$. La boule, dans (c), de centre α et de rayon $\frac{|z_0|}{3}$ ne peut contenir aucune suite $\beta = (b_n)$ de (c_0), car d'une part,

$$\exists n_0 \qquad \forall n > n_0 \qquad |a_n - z_0| < \frac{|z_0|}{3},$$

d'autre part,

$$\exists n_1 \qquad \forall n > n_1 \qquad |b_n| < \frac{|z_0|}{3},$$

donc :

$$\exists n_2 = \sup \{ n_0, n_1 \} \qquad \forall n > n_2 \qquad |a_n - b_n| > \frac{|z_0|}{3},$$

donc :

$$\|\alpha - \beta\| = \sup_{n \in \mathbf{N}} |a_n - b_n| > \frac{|z_0|}{3}.$$

● **Espace (l_1).** Conservons les notations que nous avons utilisées pour l'espace (m). Le fait que la suite (α^p) soit une suite de Cauchy de (l_1) s'exprime, cette fois par :

$$\forall \varepsilon \qquad \exists P \qquad \left.\begin{array}{l} p \geqslant P \\ q \geqslant P \end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} |a_n^p - a_n^q| < \varepsilon \qquad (1).$$

Considérons encore, pour tout n, la suite $a_n^1, a_n^2, ..., a_n^p ...$ En vertu de (1) ce sera encore une suite de Cauchy de **C** et nous pourrons poser comme ci-dessus :

$$a^n = \lim_{p \to \infty} a_n^p$$

et considérer la suite $\alpha = (a_n)$. Nous allons montrer que α appartient à (l_1) et qu'elle est la limite de (α^p).

Soit N fixe, quelconque. La condition (1) permet d'écrire :

$$\forall q \geqslant P \qquad \sum_{n=1}^{N} |a_n^p - a_n^q| < \varepsilon$$

et, par conséquent, la limite, quand q tend vers l'infini, de cette somme d'un nombre fixe fini de termes est elle-même inférieure ou égale à ε, soit :

$$\sum_{n=1}^{N} |a_n^P - a_n| \leqslant \varepsilon.$$

Une telle inégalité étant obtenue quel que soit N, on peut affirmer :

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n^P - a_n| \leqslant \varepsilon \qquad (2).$$

Cette inégalité prouve d'abord que la suite $\alpha - \alpha^p$, de terme général $a_n - a_n^P$ est sommable, donc (puisque α^p est sommable), que α est sommable. L'inégalité (2) prouve ensuite que la suite (α^p) admet α pour limite, selon la norme de (l_1).

L'espace (l_1) est donc complet.

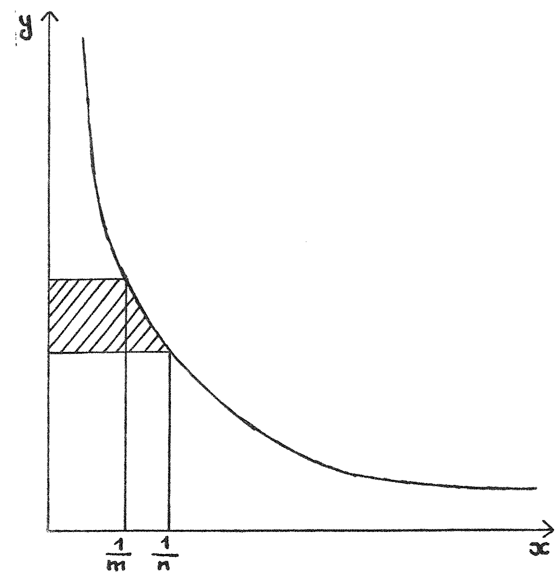
● **Espace (l_2).** On a, au départ, toujours avec les mêmes notations, l'hypothèse :

$$\forall \varepsilon \quad \exists P \quad \left.\begin{matrix} p \geqslant P \\ q \geqslant P \end{matrix}\right\} \Longrightarrow \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |a_n^p - a_n^q|^2} < \varepsilon.$$

Le raisonnement se poursuit alors comme précédemment et aboutit à :

$$\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |a_n^P - a_n|^2} \leqslant \varepsilon,$$

inégalité qui établit que la suite $(\alpha - \alpha^p)$ appartient à (l_2), donc que α lui appartient aussi et montre en même temps que α est la limite de la suite $\alpha^1, \alpha^2, \ldots, \alpha^p, \ldots$



● **Espace $\mathcal{U}$.**

La suite de fonctions f_n indiquée pour le contre-exemple est bien une suite de Cauchy. En effet,

$$\|f_n - f_m\|,$$

représentée par l'aire hachurée sur la figure est majorée par l'intégrale,

$$\int_0^{\frac{1}{n}} x^{-\frac{1}{2}}\, dx,$$

intégrale qui, étant convergente, peut être rendue arbitrairement petite pour n suffisamment grand.

D'autre part, cette suite ne converge pas dans $\mathcal{U}$. On montrerait, en effet,

exactement comme on l'a fait (cf. IX. 5. 3), dans un contre-exemple analogue du cours, que cette suite ne peut converger vers une fonction f distincte, sur $]0, 1]$, de la fonction $x \longrightarrow x^{-\frac{1}{2}}$, et qu'elle ne peut donc converger vers une fonction continue sur $[0, 1]$. $\mathcal{U}$ n'est donc pas complet.

Exercice 54.

1° Soient x, y, z, de E tels que $d(x, y) > d(y, z)$. Par hypothèse :

$$d(x, z) \leqslant d(x, y).$$

Mais, d'autre part : $\quad d(x, y) \leqslant sup\,(d(x, z), d(y, z)).$

Si $d(x, y)$ était strictement plus grand que $d(x, z)$, étant déjà plus grand que $d(y, z)$, il ne pourrait être inférieur au *sup* de ces deux nombres. Il faut donc que $d(x, z) = d(x, y)$,

$$d(x, y) > d(y, z) \quad \Longrightarrow \quad d(x, z) = d(x, y).$$

Ce que l'on peut énoncer : tout triangle de E est isocèle, les deux côtés égaux étant au moins égaux au troisième côté.

2° Soit la boule ouverte de centre x_0 et de rayon r,

$$B(x_0, r) = \{ x \,;\, d(x_0, x) < r \}.$$

Soit y_0 appartenant à B ; par suite, $d(y_0, x_0) < r$ et

$$d(y_0, x) \leqslant sup\,(d(y_0, x_0), d(x, x_0)) < r.$$

Tout point de $B(x_0, r)$ appartient donc à la boule de même rayon $B(y_0, r)$. Mais la réciproque se montre de la même façon. Les deux boules coïncident. Elles admettent pour centre tout point qui leur appartient.

Soit maintenant z_0 n'appartenant pas à B, c'est-à-dire $d(z_0, x_0) \geqslant r$ et considérons encore la boule $B(z_0, r) = \{ z \,;\, d(z, z_0) < r \}$. Comme $d(x_0, z_0)$ est strictement supérieur à $d(z_0, z)$, il résulte de 1° que $d(x_0, z) = d(x_0, z_0) \geqslant r$. La boule $B(z_0, r)$ appartient donc toute entière au complémentaire de $B(x_0, r)$; donc ce complémentaire est ouvert et B est fermée.

Si maintenant nous considérons la boule fermée :

$$\overline{B}(x_0, r) = \{ x \,;\, d(x_0, x) \leqslant r \}$$

et si nous considérons encore $y_0 \in B$, le même raisonnement que ci-dessus montre que :

$$\forall x \in \overline{B} \qquad d(y_0, x) \leqslant r.$$

La boule $\overline{B}$ admet encore pour centre un quelconque de ses points. Elle est donc ouverte.

Dans un espace ultra-métrique toutes les boules sont à la fois ouvertes et fermées.

En outre, nous avons vu que toute boule admettait pour centre un quelconque de ses points. Donc si x appartient à l'intersection de deux boules il est centre de ces deux boules et l'une d'elles est incluse dans l'autre.

3° Pour toute suite (u_n) de E, on a :

$$d(u_m, u_{m+p}) = \sup_{0 \leq k < p-1} d(u_{m+k}, u_{m+k+1}).$$

D'où, si S_m est la section finissante de rang m de la suite et δ_m son diamètre :

$$\lim_{m=\infty} \delta_m = 0 \iff \lim_{n=\infty} d(u_n, u_{n+1}) = 0.$$

Pour qu'une suite de E soit de Cauchy, il est donc nécessaire et suffisant que $d(u_n, u_{n+1})$ tende vers zéro quand n tend vers l'infini.

Quand E aura en outre une structure d'espace vectoriel, on pourra, *s'il est complet,* énoncer cette propriété : une série converge si, et seulement si, son terme général tend vers zéro.

Soit maintenant (u_n) une suite de Cauchy de E qui ne converge pas vers un point O. Ceci signifie :

$$\exists \varepsilon \quad \forall N \quad \exists n > N \quad d(u_n, O) > \varepsilon \qquad (1).$$

Mais la suite étant de Cauchy, pour cet ε là :

$$\exists N_0 \quad \forall n > N_0, m > N_0 \quad d(u_n, u_m) < \varepsilon \qquad (2).$$

Pour N de la ligne (1), prenons le N_0 de la ligne (2). Il existera $n_0 > N_0$ tel que :

$$d(u_{n_0}, O) > \varepsilon \quad \text{et} \quad \forall m > N_0 \quad d(u_{n_0}, u_m) < \varepsilon.$$

La règle du triangle isocèle (première question) nous donne alors :

$$\forall m > N_0 \quad d(u_m, O) = d(u_{n_0}, O).$$

A partir du rang N_0, les points u_n restent à distance fixe du point O.

4° On vérifie immédiatement que la valeur absolue p-adique a bien les propriétés d'une valeur absolue sur **Q**, espace vectoriel sur lui-même. Cette valeur absolue définit bien une distance ultramétrique. En effet, x, y, z étant trois éléments de **Q**, si on a :

$$y - x = p^\alpha \frac{a}{b} \qquad z - y = p^\beta \frac{c}{d}$$

(a, b, c, d étant quatre entiers premiers avec p) on aura, en supposant $\alpha \geqslant \beta$ pour fixer les idées,

$$z - x = p^\alpha \frac{a}{b} + p^\beta \frac{c}{d} = p^\beta \frac{p^{\alpha-\beta} ad + bc}{bd}$$

$$|y - x|_p = \frac{1}{p^\alpha} \qquad |z - y|_p = \frac{1}{p^\beta}$$

et bd étant premier avec p, l'exposant de p dans l'expression de $(z - x)$ est au moins égal à β. Donc :

$$|z - x|_p \leqslant \frac{1}{p^\beta} = \sup(|y - x|_p, |z - y|_p).$$

(On vérifie sur cet exemple la propriété de la première question. Si $\alpha \neq \beta$, $|z - x|_p = \dfrac{1}{p^\beta}\Big)$.

5° Un élément de $\mathbf{Q}_p$ est la classe d'équivalence d'une suite de Cauchy de **Q** pour la relation :

$$(x_n)\ R(y_n) \iff \lim_{n=\infty} |x_n - y_n|_p = 0.$$

La démonstration, donnée dans le cours *A.P.M. I,* du fait que **R**, défini comme complété de **Q** pour la valeur absolue ordinaire, est un sur-corps de **Q**, s'applique sans changement.

Il est immédiat de vérifier que $|x|_p = \lim_n |x_n|_p$ ne dépend pas du représentant de la classe choisi, que $x = 0 \iff |x|_p = 0$, que

$$|xy|_p = |x|_p\,|y|_p \ ; \quad \text{que} \quad |x + y|_p = \lim_n |x_n + y_n|_p$$

avec $|x_n + y_n|_p < \sup(|x_n|_p, |y_n|_p)$, ce qui entraîne :

$$\lim_n |x_n + y_n|_p < \sup(\lim_n |x_n|_p, \lim_n |y_n|_p) = \sup(|x|, |y|).$$

D'autre part, nous savons (voir troisième question) que (x_n) étant une suite de Cauchy ne tendant pas vers 0, $|x_n|_p$ reste constante à partir d'un certain rang. La valeur de $|x|_p$ est alors égale à cette constante. Il en résulte que les valeurs absolues des éléments non nuls de $\mathbf{Q}_p$ sont, comme celles des éléments de **Q**, de la forme $\dfrac{1}{p^\alpha}$.

6° Soient $A_p = \{ x \in \mathbf{Q}_p \ ; \ |x|_p \leqslant 1 \}$ et

$$\mathcal{P} = \{ x \in \mathbf{Q}_p \ ; \ |x|_p < 1 \} = \{ x \in \mathbf{Q}_p \ ; \ |x|_p \leqslant \frac{1}{p} \}$$

Il est immédiat de vérifier que A_p forme un anneau qui contient **Z** et que $\mathcal{P}$ est un idéal de cet anneau. Considérons les classes *mod* $\mathcal{P}$ de cet anneau.

Il est d'abord clair que les éléments de **Z** sont congrus ou incongrus *mod* $\mathcal{P}$, suivant que leur différence est, ou non, divisible par p. Ils se répartissent donc entre p classes dont chacune contient une classe de **Z** *mod* p.

Si maintenant on considère $\dfrac{a}{b} \in \mathbf{Q} \cap A_p$ (a et b sont des entiers rationnels et b est premier avec p), le théorème de Bezout permet d'affirmer qu'il existe λ et μ dans **Z** tels que :

$$\lambda b + \mu p = 1$$

$$\lambda a + \mu \frac{a}{b} p = \frac{a}{b}$$

$$\frac{a}{b} - \lambda a = \mu \frac{a}{b} p,$$

ce qui implique $\left| \dfrac{a}{b} - \lambda a \right|_p \leqslant \dfrac{1}{p}$ ou $\dfrac{a}{b} \equiv \lambda a \pmod{\mathcal{P}}$, $\lambda a \in \mathbf{Z}$,

donc $\dfrac{a}{b}$ est dans la même classe *mod* $\mathcal{P}$ qu'un élément de **Z**. Les éléments rationnels de A_p se partagent donc entre les p classes déjà déterminées.

Si, enfin, $x \in A_p$ n'est pas rationnel, il est tel, par construction, que si (u_n) est une des suites de Cauchy de rationnels qui le définit $\lim_n |x - u_n|_p = 0$, donc x et u_n sont dans la même classe *mod* $\mathcal{P}$ pour n suffisamment grand. Les éléments de A_p introduits par la complétion se répartissent encore entre les p classes déterminées par les éléments de **Z**.

Il y a donc p classes *mod* $\mathcal{P}$. Ce sont p boules de rayon $\frac{1}{p}$ (incluant les points à distance $\frac{1}{p}$ du centre) et qui admettent comme centre un quelconque de leurs points, chacune contenant tous les entiers d'une même classe *mod* p ; chacune peut être caractérisée par l'entier a $(0 \leqslant a \leqslant (p-1)$ unique qu'elle contient. Il y a donc bijection entre $A_p/\mathcal{P}$ et $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ et il est immédiat de constater que cette bijection est un isomorphisme pour les structures d'anneau de $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ et $A_p/\mathcal{P}$. Il en résulte que $A_p/\mathcal{P}$ est un corps.

7° Soit $x \in A_p$. Soit $a_0 \in \mathbf{Z}$ $(0 \leqslant a_0 \leqslant p-1)$ l'entier de sa classe *mod* $\mathcal{P}$.

$$x - a_0 = \beta_1 \qquad \beta_1 \in \mathcal{P}.$$

On peut écrire :

$$\beta_1 = p\alpha_1 \qquad \alpha_1 \in A_p.$$

Soit alors $a_1 \in \mathbf{Z}$ $(0 \leqslant a_1 \leqslant p-1)$ l'entier de la classe de α_1 *mod* $\mathcal{P}$:

$$x - a_0 - pa_1 = \beta_2 \quad \text{avec} \quad |\beta_2|_p < \frac{1}{p^2},$$

d'où
$$\beta_2 = p^2\alpha_2 \qquad \alpha_2 \in A_p,$$

et ainsi de suite...

On détermine une suite d'entiers $a_0, a_1, ..., a_n, ...,$ $\forall i$ $0 \leqslant a_i \leqslant p-1$ tels que :

$$|x - a_0 - pa_1 ... - p^n a_n|_p = |\beta_{n+1}|_p \leqslant \frac{1}{p^{n+1}}.$$

D'où
$$\beta_{n+1} = p^{n+1}\alpha_{n+1} \qquad \alpha_{n+1} \in A_p,$$

et il existera $a_{n+1} \in \mathbf{Z}$ $(0 \leqslant a_{n+1} \leqslant p-1)$ congru *mod* $\mathcal{P}$ à α_{n+1} :

$$|x - a_0 - pa_1 ... - p^n a_n - p^{n+1}a_{n+1}|_p \leqslant \frac{1}{p^{n+2}},$$

x est donc la limite de la suite $u_n = a_0 + a_1 p + ... + a_n p^n$ ou encore la somme de la série de terme général $a_n p^n$.

Il est clair que x n'admet qu'un développement de cette forme puisque, si on avait : $y = b_0 + b_1 p + ... + b_n p^n + ...$ avec $b_k \neq a_k$, on aurait $|y - x|_p \geqslant \frac{1}{p^k}$.

Si maintenant $y \in \mathbf{Q}_p$, on peut toujours trouver $k \in \mathbf{N}$ tel que :

$$y = \frac{1}{p^k}x \qquad x \in A_p.$$

Du développement de Hensel de x, $x = a_0 + a_1 p + ... + a_n p^n + ...,$ on déduit celui de y :

$$y = a_0 p^{-k} + a_1 p^{1-k} + ... + a_n p^{n-k} + ...$$

(C'est bien la forme indiquée).

Remarquons que, réciproquement, tout développement de cette forme est convergent, car la suite des sommes de ses n premiers termes est de Cauchy et $\mathbf{Q}_p$ est complet.

8° Soit M une partie infinie de A_p. Elle a nécessairement un nombre infini d'éléments dans une, au moins, des p classes *mod* $\mathcal{P}$ de A_p. Soit

M_1 la partie infinie incluse dans cette classe et x_1 un de ces éléments. Considérons l'ensemble des classes *mod* $\mathcal{P}^2$ de la classe de x_1. Tous les éléments de cette classe étant de la forme $a_0 + py$ (notation de la question précédente), deux éléments de cette classe seront congrus *mod* $\mathcal{P}^2$ si, et seulement si, les y correspondants sont congrus *mod* $\mathcal{P}$. La classe envisagée est donc partagée en p classes *mod* $\mathcal{P}^2$ et l'une d'entre elles, au moins, contient une partie infinie $M_2 \subset M_1$. Soit x_2 un de ses éléments. La classe contenant M_2 se partage en p classes *mod* $\mathcal{P}^3$... et ainsi de suite... On définit ainsi une suite $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ d'éléments de A_p qui est une suite de Cauchy puisque, pour r et q plus grands que n, $x_r - x_q \in \mathcal{P}^n$, donc $|x_r - x_q|_p \leqslant \frac{1}{p^n}$. Cette suite de Cauchy converge vers un élément $x \in A_p$ puisque A_p, qui est une partie fermée de $\mathbf{Q}_p$ complet, est complet.

De toute partie infinie de A_p, on peut donc extraire une suite convergente. Ceci démontre que A_p est compact, en tant qu'espace métrique qui possède la propriété de Bolzano-Weierstrass.

Il en résulte que $\mathbf{Q}_p$ est localement compact, car tout élément $a \in \mathbf{Q}_p$ est centre d'une boule $\{ x \,;\, |x - a|_p \leqslant 1 \}$ algébriquement isomorphe et isométrique à A_p, donc compacte.

Exercice 55.

1° Supposons f continue. L'image réciproque du fermé $\overline{f(A)}$ est un fermé ; et comme $\overline{f(A)} \supset f(A)$, on obtient :

$$\overset{-1}{f}\left(\overline{f(A)}\right) \supset \overset{-1}{f}\circ f(A) \supset A.$$

Mais alors $\overset{-1}{f}\left(\overline{f(A)}\right)$, fermé contenant A, contient $\overline{A}$:

$$\overline{A} \subset \overset{-1}{f}\left(\overline{f(A)}\right).$$

Ceci entraîne :

$$f\left(\overline{A}\right) \subset f\circ\overset{-1}{f}\left(\overline{f(A)}\right) \subset \overline{f(A)}.$$

Variante. Soit $x_0 \in \overline{A}$. La continuité de f au point x_0 exige que le filtre-image des voisinages de x_0 soit plus fin que le filtre des voisinages de $f(x_0)$, c'est-à-dire que :

$$\forall\ W \in \mathcal{V}(f(x_0)) \qquad \exists\ V \in \mathcal{V}(x_0) \qquad f(V) \subset W.$$

Donc si $x_0 \in \overline{A}$, on a $V \cap A \neq \emptyset$, et ce qui précède entraîne :

$$f(V) \cap f(A) \neq \emptyset, \text{ donc } W \cap f(A) \neq \emptyset, \text{ donc } f(x_0) \in \overline{f(A)}.$$

Réciproque. Supposons que $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$, pour tout $A \in \mathcal{P}(E)$. Soit B un fermé de F et soit $A = \overset{-1}{f}(B)$.

$$f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)} = \overline{f\circ\overset{-1}{f}(B)} \subset \overline{B} = B.$$

Mais $f\left(\overline{A}\right) \subset B$ entraîne $\overset{-1}{f}\circ f\left(\overline{A}\right) \subset \overset{-1}{f}(B)$. Or $\overset{-1}{f}\circ f\left(\overline{A}\right) \supset \overline{A}$. Donc $\overline{A} \subset A$, ce qui prouve que A est fermé. B étant un fermé quelconque de F, f est continue.

2° Soit $H \subset E$ un sous-espace vectoriel. Soit $x \in \overline{H}$ et $y \in \overline{H}$, deux points de son adhérence. Montrer que $\overline{H}$ est un sous-espace, c'est montrer que $x + y$ et λy (pour tout λ du corps) appartiennent à $\overline{H}$.

Appliquons la propriété du 1°, aux applications continues φ et ψ suivantes :

$$\varphi : \ (x, y) \in E^2 \longrightarrow (x + y) \in E \qquad \psi : \ x \in E \longrightarrow \lambda x \in E,$$

après avoir remarqué, pour l'application φ, que $\left(\overline{H}\right)^2 = \overline{H^2}$, comme on le voit aisément en utilisant la définition de la topologie produit. On a donc :

$$\left.\begin{array}{l} y \in \overline{H} \\ x \in \overline{H} \end{array}\right\} \Longleftrightarrow (x, y) \in \left(\overline{H}\right)^2 = \overline{H^2} \Longrightarrow x + y \in \varphi\left(\overline{H^2}\right) \subset \overline{\varphi(H^2)} = \overline{H}.$$

De même:

$$x \in \overline{H} \Longrightarrow \lambda x \in \psi(\overline{H}) \subset \overline{\psi(H)} = \overline{H}.$$

Exercice 56.

Soit la partie $\{ f^i \,;\, 0 \leqslant i \leqslant p \}$ et soit f^q un élément fixe de cette partie. Un élément quelconque, a, du sous-espace vectoriel engendré par les autres éléments de la partie est une combinaison linéaire finie de la forme :

$$a = \sum_{0 \leq i \leq p \,;\, i \neq q} \lambda_i f^i = \sum_{0 \leq i \leq p \,;\, i \neq q} \lambda_i e^0 + \sum_{0 \leq i \leq p \,;\, i \neq q} \frac{\lambda_i}{i} e^i$$

Pour simplifier l'écriture, posons :

$$\sum_{0 \leq i \leq p \,;\, i \neq q} \lambda_i = \mu,$$

et écrivons explicitement les suites réelles que sont a et f^q, en supposant d'abord $q \neq 0$.

$$a : \quad \mu,\ \mu + \lambda_1,\ \mu + \frac{\lambda_2}{2},\ \ldots,\ \mu + \frac{\lambda_{q-1}}{q-1},\ \mu,\ \mu + \frac{\lambda_{q+1}}{q+1},\ \ldots,\ \mu + \frac{\lambda_p}{p},\ \mu,\ \mu,\ \ldots$$

$$f^q : \quad 1,\ 1,\ 1,\ \ldots,\ 1,\ 1 + \frac{1}{q},\ 1,\ \ldots,\ 1,\ 1, 1,\ \ldots$$

Pour que f^q soit adhérent au sous-espace vectoriel décrit par les a, il faudrait qu'à tout $\varepsilon > 0$ on puisse associer au moins un élément a, tel que $\|a - f^q\| < \varepsilon$, ce qui exigerait en particulier :

$$|\mu - 1| < \varepsilon \quad \text{et} \quad \left|\mu - 1 - \frac{1}{q}\right| < \varepsilon,$$

conditions incompatibles pour ε arbitraire.

D'autre part, une suite du sous-espace vectoriel engendré par $\{ f^i \,;\, 1 \leqslant i \leqslant p \}$ s'écrit :

$$b : \quad \mu,\ \mu + \lambda_1,\ \ldots,\ \mu + \frac{\lambda_p}{p},\ \mu,\ \mu,\ \ldots,$$

et pour qu'une suite d'éléments de cette forme converge vers f^0, il faudrait que, pour tout $\varepsilon > 0$:

$$|\mu - 1| < \varepsilon \quad \text{et pour} \quad 1 \leqslant i \leqslant p \quad \left|\mu + \frac{\lambda_i}{i} - 1\right| < \varepsilon,$$

conditions qui ne peuvent être compatibles pour ε arbitraire que si :

$$\text{pour } 1 \leqslant i \leqslant p \qquad \lambda_i = 0.$$

Mais alors $\sum_{1 \leq i \leq p} \lambda_i = \mu = 0$, ce qui est incompatible avec la première des conditions ci-dessus.

Aucun des f^q ne peut donc être limite d'une suite d'éléments du sous-espace vectoriel engendré par les autres f^i. La partie considérée est topologiquement libre.

Au contraire, si nous considérons la réunion de ces parties, c'est-à-dire la famille $\{ f^i \,;\, i \in \mathbf{N} \}$, nous voyons que la suite $f^1, f^2, \ldots, f^n, \ldots$, converge vers f^0. En effet, $\|f^n - f^0\| = \frac{1}{n}$ et pour n suffisamment grand cette norme sera arbitrairement petite.

On en déduit que la famille des parties topologiquement libres n'est pas inductive. Nous venons, en effet, de trouver une sous-famille totalement ordonnée :

$$(p < p' \Longrightarrow \{ f^i \,;\, 0 \leqslant i \leqslant p \} \subset \{ f^i \,;\, 0 \leqslant i \leqslant p' \})$$

qui ne possède pas de majorant dans la famille des parties topologiquement libres puisque un tel majorant devrait inclure la réunion et qu'une partie topologiquement libre ne peut avoir elle-même une partie qui ne le soit pas.

Exercice 57.

1° *Dual topologique de* (l^1).

Une base topologique de (l^1) est une partie topologiquement libre maximale, c'est-à-dire une partie topologiquement libre telle que tout élément de (l^1) appartienne à la fermeture du sous-espace vectoriel qu'elle engendre, c'est-à-dire encore telle que tout élément de (l^1) soit limite d'une suite d'éléments qui soient des combinaisons linéaires finies d'éléments de la base.

Or, étant donnée la suite a quelconque de (l^1) de terme général a^n il est clair que

$$a = \lim_p \sum_{n=1}^{p} a^n e_n,$$

puisque

$$\left\|a - \sum_{n=1}^{p} a^n e_n\right\| = \sum_{n=p+1}^{\infty} |a^n|$$

tend vers zéro quand p tend vers l'infini, par définition des suites sommables, ce qui prouve que la famille $\{ e_n \,;\, n \in \mathbf{N} \}$ constitue bien une base topologique de (l^1).

Si f appartient au dual topologique de (l^1) sa linéarité exige qu'elle vérifie :

$$f\left(\sum_{n=1}^{p} a^n e_n\right) = \sum_{n=1}^{p} a^n f(e_n),$$

et le fait que f soit continue exige qu'elle vérifie :

$$f\left(\lim_p \sum_{n=1}^{p} a^n e_n\right) = \lim_p f\left(\sum_{n=1}^{p} a^n e_n\right)$$

donc :

$$f(a) = \lim_p \sum_{n=1}^{p} a^n f(e_n),$$

f est alors déterminée par le choix de la suite $\{ f(e_n) \}$. Une telle suite doit être choisie de façon telle que $f(a)$ soit définie pour tout a, donc que la série de terme général $a^n f(e_n)$ soit convergente, quels que soient les a^n.

On voit d'abord qu'une suite bornée répond à la question. En effet :

$$\forall n \quad |f(e_n)| \leqslant A \implies \left| \sum_1^\infty a^n f(e_n) \right| \leqslant \sum_1^\infty |a^n| |f(e_n)| \leqslant A \sum_1^\infty |a_n|.$$

Or $\sum_1^\infty |a^n|$ est fini, par définition de (l^1) ; la série de terme général $a^n f(e_n)$ est donc convergente (et même, absolument convergente).

Réciproquement, il est nécessaire que $\{ f(e^n) \}$ soit une suite bornée. En effet le fait que f soit continue exige (cf. VIII. 1. 5) qu'il existe K, indépendant de a tel que :

$$|f(a)| \leqslant K\|a\|,$$

soit :

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} a^n f(e_n) \right| \leqslant K \sum |a^n| \qquad (1).$$

Considérons alors la suite a définie par $a^n = \delta_n^p$. Pour cette suite la condition (1) s'écrit ;

$$|f(e_p)| \leqslant K,$$

ceci étant vrai quel que soit p, exprime que :

$$\{ f(e_n) \} \in (m).$$

La donnée d'une forme linéaire et continue équivaut donc à la donnée d'une suite $\{ f(e_n) \} \in (m)$. Il existe donc une bijection entre (m) et le dual topologique de (l^1) et cette bijection est manifestement un isomorphisme algébrique.

Nous allons maintenant comparer les normes sur ces deux espaces. Soit $\{ f(e_n) \}$ une suite de (m) dont la norme est :

$$A = \sup_{n \in \mathbf{N}} |f(e_n)|,$$

et soit f l'élément du dual de (l^1), défini par cette suite et dont la norme est

$$\|f\| = \sup \{ |f(a)| \ ; \ \|a\| = 1 \},$$

c'est-à-dire que :

$$\|f\| = \sup \left\{ \left| \sum_1^\infty a^n f(e_n) \right| \right\},$$

pour les suites a telles que $\sum_{n=1}^{\infty} |a^n| = 1$.

Ce *sup* est encore A. En effet, d'abord, comme nous l'avons vu ci-dessus :

$$\left| \sum_1^\infty f(e_n) a^n \right| \leqslant A \sum_1^\infty |a^n| = A.$$

D'autre part :

$$\forall \varepsilon \quad \exists n_0 \quad A - \varepsilon < |f(e_{n_0})| < A.$$

Prenons pour suite a la suite $a^n = \delta_{n_0}^n$. On aura :

$$f(a) = f(e_{n_0}),$$

donc :

$$\forall \varepsilon \quad \exists a \quad A - \varepsilon < |f(a)| < A,$$

et A est bien le *sup* de $\{ f(a) \ ; \ \|a\| = 1 \}$.

Les deux normes sont donc égales, et nous pouvons conclure : *le dual topologique de* (l^1) *est algébriquement isomorphe et isométrique à l'espace* (m).

2° *Dual topologique de* (c). La famille formée de la suite e_0 (suite constante et égale à 1) et des suites e_n est une base topologique de (c). En effet, étant donnée la suite $a = (a^n)$, considérons la suite :

$$b = a^p e_0 + (a^1 - a^p) e_1 + (a^2 - a^p) e_2 + \dots + (a^{p-1} - a^p) e_{p-1}$$

suite qui s'écrit :

$$a^1, a^2, \dots, a^{p-1}, a^p, a^p, \dots, a^p, \dots$$

on voit que :

$$\|a - b\| = \sup \{ |a^n - a^p| \ ; \ n > p \}.$$

Or une suite convergente de complexes étant une suite de Cauchy, cette norme peut être rendue arbitrairement petite pour p suffisamment grand. On peut donc écrire :

$$a = \lim_p \left[a^p e_0 + \sum_{n=1}^{p-1} (a^n - a^p) e_n \right],$$

ou, en posant $\alpha = \lim_p a^p$,

$$a = \alpha\, e_0 + \lim_p \sum_{n=1}^{p-1} (a^n - a^p) e_n.$$

Le même raisonnement qu'au 1° montre alors qu'un élément du dual topologique est tel que :

$$f(a) = \alpha f(e_0) + \lim_p \sum_{n=1}^{p-1} (a^n - a^p) f(e_n),$$

et qu'il est encore déterminé par la donnée d'une suite $\{ f(e_n) \}$ de complexes. Pour simplifier l'écriture, posons $f(e_n) = c_n$. Cette suite doit être choisie de façon telle que la suite de terme général :

$$u_p = a^p c_0 + \sum_{n=1}^{p-1} (a^n - a^p)\, c_n,$$

soit convergente, quelle que soit la suite (a^n). Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que $\{ u_p \}$ soit une suite de Cauchy.

Or, si $p < q$:

$$|u_q - u_p| = |c_0(a^q - a^p) + (a^p - a^q) \sum_{n=1}^{p-1} c_n + \sum_{n=p}^{q-1} (a^n - a^q) c_n|$$

$$|u_q - u_p| \leqslant |a^q - a^p| \sum_{n=0}^{p-1} |c_n| + \sum_{n=p}^{q-1} |a^n - a^q|\,|c_n|.$$

Or, toute suite $a \in (c)$ est une suite de Cauchy, donc :

$$\forall \varepsilon \quad \exists P \quad \forall p > P \quad \forall q > P \quad |a^q - a^p| < \varepsilon.$$

L'expression majorant $|u_q - u_p|$ est donc, à son tour, majorée par :

$$\varepsilon \sum_{n=0}^{p-1} |c_n| + \varepsilon \sum_{n=p}^{q-1} |c_n| = \varepsilon \sum_{n=0}^{q-1} |c_n|.$$

On voit donc qu'il suffit que (c_n) soit une suite sommable pour que la suite (u_p) soit une suite de Cauchy. Montrons que cette condition suffisante est nécessaire. Le fait que f soit continue exige encore qu'il existe K tel que :

$$|f(a)| < K\,\|a\|,$$

soit

$$|\alpha c_0 + \lim_p \sum_{n=1}^{p-1} (a^n - a^p) c_n| < K\, sup\, \{ |a_p| \}.$$

Supposons que $c_n = \rho_n e^{i\theta_n}$ et considérons la suite définie par $a^n = e^{-i\theta_n}$ pour $n \leqslant q$ et par $a^n = 0$ pour $n > q$. La condition précédente appliquée à cette suite donne :

$$\sum_{n=1}^{q} \rho_n < K.$$

Comme on peut obtenir cette condition pour tout q, il en résulte que :

$$(c_n) \in (l^1).$$

Il existe donc une bijection entre le dual de (c) et l'espace (l^1) des suites sommables.

Etudions maintenant la norme sur ce dual ; mais, à cette fin, transformons auparavant l'expression de $f(a)$. On a :

$$f(a) = \alpha c_0 + \lim_p \sum_{n=1}^{p-1} a^n c_n - \lim_p a^p \sum_{n=1}^{p-1} c_n.$$

c_n étant le terme général d'une suite sommable et a^n celui d'une suite convergente, $a^n c_n$ est le terme général d'une suite sommable et le deuxième terme de la somme précédente est $\sum_{p=1}^{\infty} a^n c_n$. Quant au troisième terme, il est égal à $\alpha \sum_{n=1}^{\infty} c_n$. En effet :

$$|\alpha \sum_{n=1}^{\infty} c_n - a^p \sum_{n=1}^{p-1} c_n| = |(\alpha - a^p) \sum_{n=1}^{p-1} c_n + \alpha \sum_{n=p-1}^{\infty} c_n|$$

$$\leqslant |\alpha - a^p| \sum_{n=1}^{\infty} |c_n| + \alpha \sum_{n=p-1}^{\infty} |c_n|.$$

Or, pour p suffisamment grand $|\alpha - a^p|$ est arbitrairement petit et $\sum_{n=p-1}^{\infty} |c_n|$ également. $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|$ et α étant fixes, la quantité précédente est

arbitrairement petite pour p suffisamment grand, ce qui prouve que :

$$\lim_p a^p \sum_{n=1}^{p-1} c_n = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} c_n.$$

D'où :

$$f(a) = \alpha [c_0 - \sum_{n=1}^{\infty} c_n] + \sum_{n=1}^{\infty} a^n c_n.$$

Or,

$$\|f\| = sup\, \{ |f(a)| \,;\, \|a\| = 1 \},$$

c'est-à-dire :

$$\|f\| = sup\, \{ |f(a)| \,;\, sup\, |a^n| = 1 \}.$$

On voit tout de suite que si $sup\, |a^n| = 1$,

$$|f(a)| < |c_0 - \sum_{n=1}^{\infty} c_n| + \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|,$$

et nous allons voir que le majorant ainsi trouvé pour $|f(a)|$ en constitue bien le sup. En effet :

$$\forall \varepsilon \qquad \exists N \quad \sum_{n=N+1}^{\infty} |c_n| < \varepsilon.$$

Posant encore $c_n = \rho_n e^{i\theta_n}$, définissons alors une suite a par les conditions :

$$a^n = e^{-i\theta_n} \quad \text{pour } 1 \leqslant n \leqslant N$$
$$a^n = \alpha \quad \text{pour } n > N$$

avec

$$\alpha = e^{-i\,arg\,[c_0 - \sum_{n=1}^{\infty} c_n]}.$$

Cette suite est bien convergente et de norme 1 et pour elle :

$$f(a) = |c_0 - \sum_{n=1}^{\infty} c_n| + \sum_{n=1}^{N} |c_n| + \alpha \sum_{n=N+1}^{\infty} c_n.$$

D'où

$$|f(a)| \geqslant |c_0 - \sum_{n=1}^{\infty} c_n| + \sum_{n=1}^{N} |c_n| - |\alpha| \sum_{n=N+1}^{\infty} |c_n|$$

et, en tenant compte de ce que $|\alpha| = 1$:

$$|f(a)| \geqslant |c_0 - \sum_{n=1}^{\infty} c_n| + \sum_{n=1}^{\infty} |c_n| - 2 \sum_{n=N+1}^{\infty} |c_n|$$

$$\geqslant |c_0 - \sum_{n=1}^{\infty} c_n| + \sum_{n=1}^{\infty} |c_n| - 2\,\varepsilon$$

ce qui prouve bien que $|c_0 - \sum_{n=1}^{\infty} c_n| + \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|$ est le sup de $|f(a)|$.

Donc :

$$\|f\| = |f(e_0) - \sum_{n=1}^{\infty} f(e_n)| + \sum_{n=1}^{\infty} |f(e_n)|.$$

Nous pouvons, de plus, remarquer que la norme ainsi trouvée est équivalente à la norme sur (l^1) :

$$\|(f(e_n))\| = \sum_{n=0}^{\infty} |f(e_n)| = \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|.$$

En effet :

$$\|f\| \leqslant |c_0| + \sum_{n=1}^{\infty} |c_n| + \sum_{n=0}^{\infty} |c_n| \leqslant 2 \sum_{0}^{\infty} |c_n|.$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} 2\|f\| &\geqslant |c_0 - \sum_{n=1}^{\infty} c_n| + 2 \sum_{n=1}^{\infty} |c_n| \\ &\geqslant |c_0| - | \sum_{n=1}^{\infty} c_n| + 2 \sum_{n=1}^{\infty} |c_n| \\ &\geqslant |c_0| + \sum_{n=1}^{\infty} |c_n| = \|(f(e_n))\|. \end{aligned}$$

D'où :

$$\frac{1}{2} \leqslant \frac{\|f\|}{\|(f(e_n))\|} \leqslant 2.$$

Les deux normes sont équivalentes (voir VIII, 1, 6) et (l^1) *et le dual de* (c) *sont algébriquement isomorphes et homéomorphes* (mais non isométriques).

3° *Lemme.* Pour tout n, désignons par S_n la somme des n premiers termes de la série divergente de terme général u_n et par Σ_n la somme des n premiers termes de la série de terme général $\frac{u_n}{S_n}$

Soit d'abord $\alpha = 1$; pour m et n, entiers arbitraires, avec $m > n$, on a :

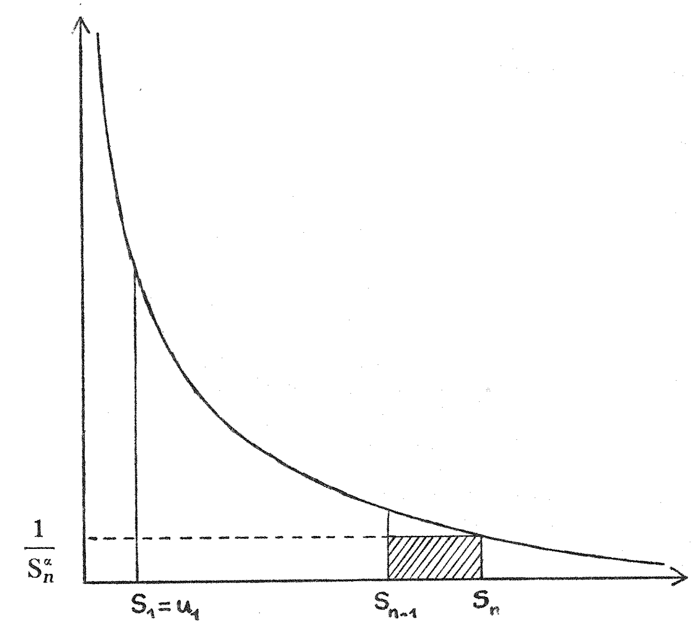
$$\Sigma_m - \Sigma_n = \sum_{p=n+1}^{m} \frac{u_p}{S_p} > \frac{1}{S_m} \sum_{p=n+1}^{m} u_p = \frac{S_m - S_n}{S_m}$$

Puisque la série (u_n) est divergente, à tout n, on peut associer m tel que $(S_m - S_n)$ dépasse S_n, ce qui entraîne $\frac{S_m - S_n}{S_m} > \frac{1}{2}$. A tout n, on peut associer $m > n$ tel que $(\Sigma_m - \Sigma_n)$ dépasse $\frac{1}{2}$. Cela entraîne que la série $\left(\frac{u_n}{S_n}\right)$ est divergente.

Si $\alpha < 1$, $\frac{u_n}{S_n^\alpha} > \frac{u_n}{S_n}$ et la série $\frac{u_n}{S_n^\alpha}$ est, *a fortiori*, divergente.

Supposons maintenant $\alpha > 1$. Traçons le graphe de $x \longrightarrow \frac{1}{x^\alpha}$ et marquons sur l'axe des abscisses les points d'abscisses S_n.

$\frac{u_n}{S_n^\alpha}$ est représenté par l'aire hachurée et $\sum_{p=2}^{n} \frac{u_p}{S_p^\alpha}$ est majoré par $\int_{u_1}^{S_n} \frac{dx}{x^\alpha}$ donc tend vers une limite finie quand n tend vers l'infini. La série de terme général $v_n = \frac{u_n}{S_n^\alpha}$ est donc convergente si $\alpha > 1$.



Dual topologique de (l^2). La base $\{ e_p \}$ est base topologique de (l^2), car on peut écrire pour $a \in (l^2)$, comme on l'a fait pour $a \in (l^1)$,

$$a = \lim_p \sum_{n=1}^{p} a^n e_n,$$

puisque :

$$\|a - \sum_{n=1}^{p} a^n e_n\| = \sqrt{\sum_{n=p}^{\infty} |a^n|^2},$$

tend vers zéro quand p tend vers l'infini, par définition des suites de carrés sommables. On aura encore, pour une forme f du dual topologique :

$$f(a) = \lim_p \sum_{n=1}^{p} a^n f(e_n)$$

et la donnée de f sera celle d'une suite $\{f(e_n)\}$ telle que la série $a^n f(e_n)$ soit convergente pour toute suite a.

Il est suffisant, pour cela, que $\{f(e_n)\} \in (l^2)$. En effet, quel que soit l'entier p, on a l'égalité de Schwarz :

$$\left(\sum_{n=1}^{p} |a^n f(e_n)|\right)^2 < \sum_{n=1}^{p} |a_n|^2 \times \sum_{n=1}^{p} |f(e_n)|^2.$$

Dans ces conditions, la série qui définit $f(a)$ est absolument convergente.

La condition $\{f(e_n)\} \in (l^2)$ est aussi nécessaire. En effet, supposons que $\{f(e_n)\}$ ne soit pas de carré sommable. Posons $f(e_n) = \rho_n e^{i\theta_n}$ et considérons la suite a définie par :

$$a^n = \frac{\rho_n e^{-i\theta_n}}{\sum_{q=1}^{n} \rho_q^2}.$$

La suite a ainsi définie appartient bien à (l^2), car :

$$|a^n|^2 = \frac{\rho_n^2}{\left(\sum_{q=1}^{n} \rho_q^2\right)^2},$$

est le terme général d'une série convergente en vertu de la deuxième partie du lemme. Quant à la série de terme général :

$$a^n f(e_n) = \frac{\rho_n^2}{\sum_{q=1}^{n} \rho_q^2},$$

elle est divergente en vertu de la première partie du lemme. La suite $\{f(e_p)\}$ qui n'appartient pas à (l^2) n'est donc pas acceptable. Et il y a une bijection entre (l^2) et son dual.

Comparons maintenant les normes sur les deux espaces, c'est-à-dire :

$$\|(f(e_n))\| = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |f(e_n)|^2},$$

et
$$\|f\| = sup\ \{ |f(a)|\ ;\ \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 = 1 \}.$$

Nous voyons d'abord que :

$$|f(a)| = |\sum_{n=1}^{\infty} a^n f(e_n)| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |a^n||f(e_n)| = \sqrt{\left(\sum_{n=1}^{\infty} |a^n||f(e_n)|\right)^2}$$
$$\leqslant \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |a^n|^2 \times \sum_{n=1}^{\infty} |f(e_n)|^2} = \|(f(e_n))\|.$$

D'où $$sup\ |f(a)| \leqslant \|(f(e_n))\|.$$
Mais on peut montrer, d'autre part, que cette borne supérieure est atteinte. Il suffit pour cela, si $f(e_n) = \rho_n e^{i\theta_n}$ et si l'on pose

$$\|(f(e_n))\| = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |\rho_n|^2} = M$$

de considérer la suite a définie par :

$$a^n = \frac{e^{-i\theta_n}\rho_n}{M}.$$

Cette suite a a bien pour norme 1 puisque :

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a^n|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\rho_n^2}{M^2} = 1, .$$

et, pour elle :

$$f(a) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\rho_n^2}{M} = M.$$

L'égalité des deux normes est donc établie et nous pouvons conclure que *l'espace (l^2) est algébriquement isomorphe et isométrique à son dual topologique.*

Remarque. — Nous montrerons dans le chapitre IX que (l^2) est un espace de Hilbert où le produit scalaire de deux suites $\{x_n\}$ et $\{y_n\}$ est défini par $\sum_1^{\infty} x_n\overline{y_n}$. Nous établirons alors que (l^2) est isomorphe à son dual dans un isomorphisme qui fait correspondre à une forme f un élément $y \in (l^2)$ tel que, pour tout $x \in (l^2)$, $f(x) = (x|y)$. L'isomorphisme que nous venons d'établir est distinct de celui-ci puisqu'à f il fait correspondre une suite $\{f(e_n)\}$ telle que $f(x) = \sum_1^{\infty} x_n f(e_n)$. Si z est l'élément de (l^2) défini par cette suite et z' l'élément dont les coordonnées, par rapport à la base, sont imaginaires conjuguées, on a donc $f(x) = (x|z')$. L'isomorphisme $f \longrightarrow z$ n'est pas canonique, puisqu'il dépend de la base à laquelle est rapportée l'espace tandis que l'isomorphisme $f \longrightarrow y$, est canonique puisque le raisonnement du cours ne fait appel à aucune base. Signalons enfin cette différence que l'isomorphisme $f \longrightarrow y$ fait correspondre $\overline{\lambda} y$ à λf tandis que $f \longrightarrow z$ fait correspondre λz à λf.

Exercice 58.

On vérifie immédiatement que la forme x définie sur E' par :

$$\forall x' \in E' \qquad \tilde{x}(x') = x'(x),$$

est linéaire. Pour montrer qu'elle est continue, évaluons :

$$|\tilde{x}(x')| = |x'(x)|.$$

Par définition de $\|x'\|$:

$$|x'(x)| \leqslant \|x'\|\,\|x\|,$$

d'où
$$|\tilde{x}(x')| \leqslant \|x'\| \, \|x\|,$$
ce qui prouve, $\|x\|$ étant ici un nombre fixe, que $\tilde{x}$ est une application linéaire continue dont la norme vérifie :
$$\|\tilde{x}\| \leqslant \|x\|.$$
Pour montrer l'égalité de ces deux normes, il suffit de considérer une forme $x'_0 \in E'$ satisfaisant à :
$$x'_0(x) = \|x\| \qquad \|x'_0\| = 1.$$
Une telle forme existe bien en vertu du théorème de Hahn-Banach (cf. VIII, 2, 1, Corollaire). Pour cette forme x'_0, on a :
$$\frac{\tilde{x}(x'_0)}{\|x'_0\|} = \|x\|,$$
ce qui exige que :
$$\|\tilde{x}\| \geqslant \|x\|,$$
d'où, l'égalité des deux normes.

Exercice 59.

L'hypothèse est que, pour tout $\lambda \in \Lambda$:
$$\forall \varepsilon \qquad \exists J^0_\lambda \in \mathcal{P}_f(I_\lambda) \qquad \forall J \in \mathcal{P}_f(I_\lambda) \qquad J \supset J^0_\lambda \implies |S_J - S_\lambda| < \varepsilon.$$
Considérons alors :
$$J^0 = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} J^0_\lambda,$$
et soit $J \in \mathcal{P}_f(I)$ $J \supset J_0$. La partition de I induit une partition de J en J_λ, et, pour tout λ, $J_\lambda \supset J^0_\lambda$. On a alors :
$$|S_J - \sum_{\lambda \in \Lambda} S_\lambda| = \left| \sum_{\lambda \in \Lambda} (S_{J_\lambda} - S_\lambda) \right| < \sum_{\lambda \in \Lambda} | S_{J_\lambda} - S_\lambda | < N\varepsilon,$$
si N désigne le cardinal fini de Λ. La famille est donc sommable de somme ΣS_λ.

Exercice 60.

Considérons la famille, indexée par des couples d'entiers strictement positifs, définie par :
$$\forall m \qquad u_{1,m} = -1 \qquad u_{2,m} = 1$$
et
$$\forall n \geqslant 3 \qquad u_{n,m} = \frac{1}{m^2 \times 2^{n-2}}.$$
On trouve alors : $\quad S_m = -1 + 1 + \dfrac{1}{m^2} \displaystyle\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{2^p} = \frac{1}{m^2},$

et la famille $\{ S_m ; m \geqslant 1 \}$ est sommable puisque la série $\left(\dfrac{1}{m^2}\right)$ est convergente.

Or, la famille $\{ u_{n,m} \}$ n'est pas sommable puisqu'elle contient, par exemple, une infinité de termes égaux à 1, dont on peut extraire des familles finies de sommes arbitrairement grandes.

Exercice 61.

Considérons une série (u_n) à termes rationnels positifs convergeant vers un irrationnel x et une série (v_n) à termes rationnels positifs convergeant vers $(q - x)$ où $q \in \mathbf{Q}$. (Il suffit, pour obtenir deux telles séries, de considérer des suites croissantes convergeant respectivement vers x et $(q - x)$, par exemple les suites des valeurs décimales approchées par défaut de x et $q - x$).

Ceci posé, considérons la série (w_p) définie par :
$$\forall n \quad \begin{aligned} w_{2n} &= u_n \\ w_{2n+1} &= -v_n. \end{aligned}$$
La famille $\{ w_p ; p \in \mathbf{N} \}$ est une famille d'éléments de $\mathbf{Q}$. Dans $\mathbf{Q}$, la famille $\{ |w_p| \}$ est sommable de somme q. Quant à la famille $\{ w_p \}$, elle est sommable dans $\mathbf{R}$ où elle a pour somme l'irrationnel $2x - q$. Elle n'est donc pas sommable dans $\mathbf{Q}$.

Exercice 62.

Soit $\{ a_n ; n \in \mathbf{N} \}$ une suite sommable,
$$\forall \varepsilon \qquad \exists J_0 \qquad \forall J \supset J_0 \qquad \|S - S_J\| < \varepsilon.$$
Soit alors, pour une bijection φ quelconque, la série $a_{\varphi(n)}$. Posons :
$$n_0 = \sup \{ \varphi(n) ; \varphi(n) \in J_0 \}.$$
Pour tout n tel que $\varphi(n) > n_0$ le segment de $\mathbf{N}$, $[1, \varphi(n)]$ est alors une partie finie qui contient J_0. Donc :
$$\forall \varepsilon \qquad \exists n_0 \qquad \forall \varphi(n) > n_0 \qquad \|S_{\varphi(n)} - S\| < \varepsilon,$$
c'est-à-dire que la série $(a_{\varphi(n)})$ est convergente, donc que (a_n) est commutativement convergente.

Réciproquement, soit la série (a_n) commutativement convergente. Supposons que la famille $\{ a_n ; n \in \mathbf{N} \}$ ne soit pas sommable. La négation du critère de Cauchy s'écrit :
$$\exists \varepsilon \qquad \forall J_0 \qquad \exists K_1 \qquad K_1 \cap J_0 = \emptyset \qquad \|S_{K_1}\| > \varepsilon$$
(J_0 et K_1 désignant des parties finies de l'ensemble des indices, c'est-à-dire de $\mathbf{N}$).

Prenons d'abord pour J_0 l'ensemble $[1, n_0] \subset \mathbf{N}$ des entiers de 1 à n_0 fixe. Soit alors n_1 le *sup* des éléments de K_1. Prenons alors pour J_0 l'ensemble $[1, n_1]$:
$$\exists K_2 \qquad K_2 \cap [1, n_1] = \emptyset \qquad \|S_{K_2}\| > \varepsilon.$$
Soit n_2 le *sup* des éléments de K_2. Prenons pour nouvelle partie J_0 l'ensemble $[1, n_2]$:
$$\exists K_3 \qquad K_3 \cap [1, n_2] = \emptyset \qquad \|S_{K_3}\| > \varepsilon,$$
et ainsi de suite...

Nous pouvons alors définir une bijection φ de $\mathbf{N}$ sur lui-même qui consiste à ranger la famille $\{ a_n \}$ en prenant successivement, et dans leur ordre naturel, les éléments de
$$\begin{gathered} [1, n_0] \\ K_1 \\ [n_0 + 1, n_1] - K_1 \\ K_2 \\ [n_1 + 1, n_2] - K_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{gathered}$$

et ainsi de suite. Ayant obtenu par ce procédé une bijection de $[1, n_p]$ sur lui-même, on range les éléments de la partie finie K_{p+1} telle que $[1, n_p] \cap K_{p+1} = \emptyset$ et telle que $\|S_{K_{p+1}}\| > \varepsilon$, puis n_{p+1} représentant le *sup* de K_{p+1}, les éléments de $[1, n_{p+1}] - K_{p+1}$, c'est-à-dire ceux des éléments qui ont été omis, et on obtient ainsi une bijection de $[1, n_{p+1}]$ sur lui-même.

Il est clair que l'on obtient par ce procédé une bijection de N sur lui-même, donc une série $(a_{\varphi(n)})$ qui devrait être convergente en vertu de l'hypothèse. Or, quel que soit le rang p considéré, on peut trouver, dans cette série, un groupe de termes consécutifs de rangs supérieurs à p et dont la valeur absolue de la somme dépasse ε, ce qui est la négation du critère de Cauchy pour les séries. Il y a donc contradiction.

Exercice 63.

Soient S et S' les sommes des deux familles. Ces familles complexes, étant sommables, sont absolument sommables. Nous convenons de désigner par $\overline{S}$ et $\overline{S'}$ les sommes des familles $\{ |a_i| ; i \in I \}$ et $\{ |b_k| ; k \in K \}$ ainsi que par $\overline{S_J}$ et $\overline{S'_L}$ les sommes des modules des éléments indexés par les parties finies $J \subset I$ ou $L \subset K$.

L'hypothèse entraîne :

$$\forall \varepsilon \begin{cases} \exists J_0 & J \supset J_0 \implies \overline{S} - \overline{S_J} \leqslant \varepsilon \\ \exists L_0 & L \supset L_0 \implies \overline{S'} - \overline{S'_L} \leqslant \varepsilon \end{cases}$$

Observons d'abord que $|S - S_J|$ est majoré par $\overline{S} - \overline{S_J}$ et qu'en conséquence :

$$J \supset J_0 \implies |S - S_J| \leqslant \varepsilon$$

et de même

$$L \supset L_0 \implies |S' - S'_L| \leqslant \varepsilon.$$

Pour les parties finies P du produit $I \times K$, convenons de désigner par Σ_P la somme des éléments indexés par P et par $\overline{\Sigma_P}$ la somme des modules de ces éléments.

Considérons alors la partie finie $J_0 \times L_0$ de $I \times K$ et une partie finie quelconque $P \supset J_0 \times L_0$ et évaluons $|SS' - \Sigma_P|$. On peut écrire :

$$|SS' - \Sigma_P| \leqslant |SS' - \Sigma_{J_0 \times L_0}| + |\Sigma_P - \Sigma_{J_0 \times L_0}| \qquad (1).$$

Or

$$\Sigma_{J_0 \times L_0} = S_{J_0} \times S'_{L_0}$$

et

$$|SS' - S_{J_0} S'_{L_0}| = |(S - S_{J_0}) S' + (S' - S'_{L_0}) S_{J_0}| \leqslant \varepsilon |S'| + \varepsilon |S_{J_0}|$$

soit, $|S_{J_0}|$ étant majorée par $\overline{S_{J_0}}$, elle-même majorée par $\overline{S}$:

$$|SS' - S_{J_0} S'_{L_0}| \leqslant \varepsilon (|S'| + \overline{S}) \leqslant \varepsilon (\overline{S} + \overline{S'}).$$

(Cette partie de la démonstration revient simplement à montrer que l'application $(x, y) \longrightarrow xy$ est continue dans C). Cherchons de même à majorer le deuxième terme de la somme (1) :

$$|\Sigma_P - \Sigma_{J_0 \times L_0}| = |\Sigma_{P - J_0 \times L_0}| \leqslant \overline{\Sigma_{P - J_0 \times L_0}}$$

Mais il existe une partie finie $J \times L$ telle que :

$$J \times L \supset P \text{ avec } J \supset J_0,\ L \supset L_0.$$

La quantité précédente est majorée par $\overline{\Sigma_{J \times L - J_0 \times L_0}}$. Or, on voit aisément que $J \times L - J_0 \times L_0$ est la réunion des deux ensembles disjoints $(J - J_0) \times L$ et $(L - L_0) \times J_0$ et que le majorant cherché est donc :

$$\overline{S_{J-J_0}} \times \overline{S'_L} + \overline{S'_{L-L_0}} \times \overline{S_{J_0}}$$

quantité elle-même majorée par :

$$\varepsilon \overline{S'} + \varepsilon \overline{S}.$$

Finalement,

$$|SS' - \Sigma| \leqslant 2 \varepsilon (\overline{S} + \overline{S'}),$$

$\overline{S} + \overline{S'}$ étant fixé et ceci étant obtenu pour tout $P \supset J_0 \times L_0$, on a bien établi que la famille produit était sommable de somme SS'.

Observons que le théorème obtenu ici est plus naturel que le théorème classique sur le produit de deux séries absolument convergentes, la formation de la série de terme général $c_n = \sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}$ ne se justifiant que dans le cas des séries de puissances, et ses propriétés se déduisant en tout cas immédiatement du résultat précédent et de l'associativité des familles sommables.

Exercice 64.

On peut écrire :

$$\|a - b\|^2 = \|a - a' + a' - b' + b' - b\|^2 =$$
$$\|a' - b'\|^2 + \|a - a' + b' - b\|^2 + 2\, \mathcal{R}(a' - b' | a - a') + 2\, \mathcal{R}(a' - b' | b' - b)$$

Or, ces deux parties réelles de produits scalaires sont positives. D'où :

$$\|a - b\|^2 \geqslant \|a' - b'\|^2.$$

Exercice 65.

a) Soit $\{ O_n ; n \in N \}$ une base dénombrable des ouverts et soit A un ensemble obtenu en choisissant un point a_n dans chaque O_n. A est évidemment dénombrable. Il est dense sur E : en effet, si $x \in E$ et si V est un voisinage ouvert de x, V est réunion d'ensembles O_n ; il existe donc au moins un indice p tel que $x \in O_p \subset V$, et par suite un point a_p de A qui appartient à V.

b) Soit $\{ a_n ; n \in N \}$ une partie dénombrable dense sur l'espace métrique E. Montrons que la famille dénombrable des boules $B(a_n, \frac{1}{p})$; $n \in N$, $p \in N$, est une base des ouverts. Soit, en effet, O un ouvert et $x \in O$. Il existe une boule $B(x, r)$ incluse dans O. Soit alors p tel que $\frac{1}{p} < \frac{r}{2}$. Il existe un point a_n dans la boule $B(x, \frac{1}{p})$, puisque A est dense sur E. On a alors :

$$x \in B(a_n, \frac{1}{p}) \subset B(x, r) \subset O.$$

Tout point de O appartient à une boule de la famille incluse dans O, c'est-à-dire que O est une réunion de telles boules, donc cette famille constitue une base des ouverts.

Exercice 66.

1° Tout $x \in \mathrm{H}$ est de la forme

$$x = \lim_n \sum_1^n x^p e_p.$$

La linéarité de A exige que :

$$\mathrm{A}\left(\sum_1^n x^p e_p\right) = \sum_1^n \lambda^p x^p e_p,$$

et sa continuité que :

$$\mathrm{A}\left(\lim_n \sum_1^n x^p e_p\right) = \lim_n \sum_1^n \lambda^p x^p e_p.$$

Si A existe, elle est donc déterminée. Pour qu'elle existe, il faut et il suffit que la limite ci-dessus existe, c'est-à-dire que $(|\lambda^p x^p|^2)$ soit une famille sommable. Or, puisque $|\lambda^n|$ est une suite décroissante et tendant vers zéro, $|\lambda^n|$ est majoré par $\Lambda = |\lambda^1|$, et on peut écrire :

$$\sum_1^\infty |\lambda^p x^p|^2 \leqslant \Lambda^2 \sum_1^\infty |x^p|^2 < \infty.$$

L'application A existe donc bien.

L'inégalité précédente prouve aussi qu'elle est continue et que sa norme, qui est le *sup* de :

$$\frac{\|\mathrm{A}(x)\|}{\|x\|} = \sqrt{\frac{\sum_1^\infty |\lambda^p x^p|^2}{\sum_1^\infty \Sigma\, |x^p|^2}}$$

est majorée par Λ. D'autre part, il suffit de considérer $x = e_{n_0}$ pour voir que $\dfrac{\|\mathrm{A}(e_{n_0})\|}{\|e_{n_0}\|} = \Lambda$, donc que ce majorant est atteint.

On a donc :

$$\|\mathrm{A}\| = |\lambda^1|.$$

Noyau. — $\quad \mathrm{A}(x) = 0 \iff \|\mathrm{A}(x)\| = 0 \iff \sum_1^\infty |\lambda^n x^n|^2 = 0.$

Les $|\lambda^n|$ étant non nuls, cette dernière condition équivaut à :

$$\forall n \quad x^n = 0,$$

ou encore à $x = 0$. On peut donc conclure :

$$\overset{-1}{\mathrm{A}}(0) = \{ 0 \}.$$

Valeurs propres. — La définition de A nous apprend que, pour tout n, e_n est vecteur propre de valeur propre λ^n. Pour qu'un autre vecteur x soit propre, il faut, si $\mathrm{J} \subset \mathrm{N}$ est le sous-ensemble des indices des vecteurs de la base sur lesquels x a des composantes non nulles, que A multiplie toutes ces composantes par le même scalaire, donc que tous les λ^n soient égaux pour n décrivant J. Il en résulte que les λ^n sont les seules valeurs propres de A, que J est fini et formé d'entiers consécutifs, que le sous-

espace propre correspondant à une valeur propre μ est celui engendré par les e_n tels que $\lambda^n = \mu$. (Dans le cas où la suite $|\lambda^n|$ est strictement décroissante, tous les sous-espaces propres sont de dimension 1).

2° Une solution de (E) sera déterminée par ses coordonnées $x^n = (x|e_n)$ qui doivent vérifier :

$$(\mathrm{A}(x)|e_n) - \lambda(x|e_n) = (y|e_n)$$

et comme $(\mathrm{A}(x)|e_n) = \lambda^n x^n$, x^n doit vérifier :

$$(\lambda^n - \lambda)\, x^n = y^n \qquad (1).$$

Si $(\lambda^n - \lambda)$ est, pour tout n, différent de zéro, x^n est déterminé de manière unique par

$$x^n = \frac{y^n}{\lambda^n - \lambda}$$

et x existe, unique, si la suite (x^n) ainsi définie appartient à (l^2). On voit alors que la question se pose différemment suivant que $\dfrac{1}{|\lambda^n - \lambda|}$ est borné ou non, c'est-à-dire suivant que λ est différent de zéro ou égal à zéro.

3° Si $\lambda \neq 0$, $\lambda^n - \lambda \neq 0$ pour tout n, alors $|\lambda^n - \lambda|$ est minoré par un nombre fixe $\Lambda' \neq 0$ (qu'il atteint pour une valeur n_0 de n). On a donc :

$$\forall n \qquad \frac{1}{|\lambda^n - \lambda|} \leqslant \frac{1}{|\lambda^{n_0} - \lambda|} = \frac{1}{\Lambda'}$$

et

$$\Sigma\, |x^n|^2 < \frac{1}{\Lambda'^2}\ \Sigma\, |y^n|^2 \qquad (2),$$

ce qui prouve que $(x^n) \in (l^2)$, donc que x existe, unique. En d'autres termes, l'application $\mathrm{A} - \lambda\mathrm{I}$ est une bijection et l'application B_λ qui à y fait correspondre la solution de l'équation E relative à y en est la bijection réciproque. Elle est linéaire comme réciproque d'une application linéaire et (2) montre qu'elle est continue et que sa norme est inférieure ou égale à $\dfrac{1}{\Lambda'}$. Cette valeur du rapport $\dfrac{\|x\|}{\|y\|}$ étant atteinte pour $y = e_{n_0}$, on peut conclure :

$$\|\mathrm{B}_\lambda\| = \frac{1}{\mathit{inf}\ |\lambda^n - \lambda|}.$$

4° Si $\lambda = \lambda^p = \lambda^{p+1} = \ldots\ldots = \lambda^{p+q-1}$, l'équation (1) montre que x ne peut exister que si $y^n = 0$ pour $p \leqslant n \leqslant p + q - 1$, c'est-à-dire si y appartient au sous-espace vectoriel fermé H_λ, supplémentaire orthogonal du sous-espace K_λ engendré par $\{ e_n\,;\ p \leqslant n \leqslant p + q - 1 \}$. Si y appartient à ce sous-espace H_λ, les coordonnées x^n de x pour $n \notin [p, p + q - 1]$ sont déterminées de manière unique par $x^n = \dfrac{y^n}{\lambda^n - \lambda}$; les q autres sont arbitraires. On montre, comme dans le cas précédent, que la suite $\dfrac{y^n}{\lambda^n - \lambda}$ est de carré sommable (et elle reste de carré sommable quand on lui adjoint q composantes arbitraires dans K_λ). Il existe donc une solution unique x_0 appartenant à H_λ et la solution générale décrit la variété affine de dimension q :

$$x_0 + \mathrm{K}_\lambda.$$

(Ceci est bien conforme à la théorie générale des équations linéaires, K_λ représentant le noyau de l'application $\mathrm{A} - \lambda\mathrm{I}$).

5° Nous savons déjà qu'il existe au plus une solution déterminée par ses coordonnées $x^n = \frac{y^n}{\lambda^n}$. Pour qu'elle existe, *il est nécessaire et suffisant que* $\left(\frac{y^n}{\lambda^n}\right)$ *soit de carré sommable.* Montrer qu'il existe des $y \in H$ tels que (E) n'ait pas de solution, c'est montrer qu'il existe des suites (y^n) de $\mathbf{C}$ qui sont de carré sommable et qui sont telles que $\left(\frac{y^n}{\lambda^n}\right)$ ne le soit pas, la suite (λ^n) étant donnée. Posons, pour simplifier l'écriture :

$$\frac{1}{|\lambda^n|^2} = \mu_n \qquad |y^n|^2 = \beta_n.$$

Le problème est de trouver une suite de réels positifs (β_n) telle que la série $\sum_1^\infty \beta_n$ soit convergente et la série $\sum_1^\infty \beta_n \mu_n$ divergente, (μ_n) étant une suite donnée croissante et tendant vers l'infini. Nous pouvons définir une suite strictement croissante d'entiers positifs $n(p)$ par les conditions que $n(1)$ soit le plus petit entier tel que $\mu_{n(1)}$ dépasse 1 et qu'ensuite $n(p)$ soit le plus petit entier supérieur à $n(p-1)$ et tel que $\mu_{n(p)}$ dépasse p^2. Choisissons alors la suite (β_n) de la façon suivante :

$$\forall p \quad \beta_{n(p)} = \frac{1}{p^2} \qquad \forall n \notin \{\, n(p)\ ;\ p \in \mathbf{N} \,\} \quad \beta_n = 0.$$

La série $\sum_{n=1}^\infty \beta_n = \sum_{p=1}^\infty \frac{1}{p^2}$ est convergente. La série $\sum_{n=1}^\infty \beta_n \mu_n$, dont une infinité de termes sont supérieurs à 1, est divergente, et le vecteur y défini par cette suite (β_n) est tel que (E) n'ait pas de solution ; en d'autres termes, il n'appartient pas au sous-espace A(H).

D'autre part, $\frac{1}{|\lambda^n|}$ tendant vers l'infini,

$$\forall M \quad \exists n_0 \quad \frac{1}{|\lambda^{n_0}|} \geqslant M.$$

Si l'on prend alors $y = e_{n_0}$, on aura $\|y\| = 1$ et $\|x\| = \frac{1}{|\lambda^{n_0}|} \geqslant M$. Donc :

$$\forall M \quad \exists y \quad \frac{\|x\|}{\|y\|} \geqslant M.$$

Il en résulte que si l'on considère l'application :

$$B : \quad y \in A(H) \longrightarrow x \in H$$

définie par le fait que x soit la solution de $A(x) = y$, cette application B, qui est telle que $B \circ A$ soit l'identité sur H, n'est pas continue.

Exercice 67.

1° Considérons l'application

$$y \in H \longrightarrow (x|Ty) \in \mathbf{C}$$

composée de l'application T et de la forme semi-linéaire $Ty \longrightarrow (x|Ty)$. C'est une forme semi-linéaire définie sur H. Etant donnée une forme semi-linéaire définie sur H, il existe un élément x' tel que $(x'|y)$ représente la valeur pour y de la forme semi-linéaire en question. Cet élément

x' est image de x par une application que l'on peut désigner par T^* et on a :

$$(x|Ty) = (T^*x|y).$$

Reste à montrer que $T^* \in \mathcal{L}(H)$.

$$\forall y \in H \quad \left\{\begin{array}{l}(x_1|Ty) = (T^*x_1|y)\\(x_2|Ty) = (T^*x_2|y)\end{array}\right\} \Longrightarrow \quad (x_1 + x_2|Ty) = (T^*x_1 + T^*x_2|y).$$

Or, par définition de T^* : $\quad (x_1 + x_2|Ty) = (T^*(x_1 + x_2)|y)$.

D'où :

$$\forall y \in H \qquad (T^*x_1 + T^*x_2|y) = (T^*(x_1 + x_2)|y),$$

donc $\qquad T^*x_1 + T^*x_2 = T^*(x_1 + x_2)$,

et ceci, quels que soient x_1 et $x_2 \in H$. D'autre part :

$$\forall y \in H \qquad (T^*(\lambda x)|y) = (\lambda x|Ty) = \lambda(x|Ty) = \lambda(T^*x|y) = (\lambda T^*x|y),$$

donc $\qquad T^*(\lambda x) = \lambda T^*x$,

et ceci, quel que soit x. T^* est donc linéaire.

Cherchons ce que représente $(T^*)^*x$. Par définition de la correspondance $T \longrightarrow T^*$ appliquée à T^* on a, pour tout x et tout y :

$$\big((T^*)^*x|y\big) = (x|T^*y) = \overline{(T^*y|x)}.$$

Mais d'après la même définition appliquée à T, ceci vaut $\overline{(y|Tx)} = (Tx|y)$.

D'où :

$$\forall y \in H \qquad \big((T^*)^*x|y\big) = (Tx|y),$$

donc $\qquad (T^*)^*x = Tx$,

et comme ceci est vrai pour tout $x \in H$:

$$(T^*)^* = T.$$

Evaluons $\|T^*x\|$, *dont le carré est :*

$$\|T^*x\|^2 = (T^*x|T^*x) = (x|TT^*x) \leqslant \|x\| . \|TT^*x\| \leqslant \|x\| . \|T^*x\| . \|T\|.$$

D'où $\qquad \|T^*x\| \leqslant \|x\| . \|T\|$,

ce qui prouve que T^* est continue et que $\|T^*\| \leqslant \|T\|$. Mais ce résultat appliqué à T^* donne :

$$\|T^{**}\| = \|T\| \leqslant \|T^*\|,$$

donc $\qquad \|T\| = \|T^*\|$.

On peut donc conclure que $T^* \in \mathcal{L}(H)$ *et a même norme que* T.

$(T + S)^*$ est définie par sa valeur pour tout x et celle-ci est définie par le fait que pour tout y :

$$\big((T+S)^*x|y\big) = (x|(T+S)y) = (x|Ty) + (x|Sy)$$
$$= (T^*x|y) + (S^*x|y) = \big((T^* + S^*)x|y\big)$$

D'où $\qquad \forall x \qquad (T + S)^*x = (T^* + S^*)x$,

soit $\qquad (T + S)^* = T^* + S^*$.

De même :

$$\big((\lambda T)^*x|y\big) = (x|(\lambda T)y) = (x|\lambda(Ty)) = \overline{\lambda}(x|Ty) = \overline{\lambda}(T^*x|y).$$

D'où $\qquad (\lambda T)^* = \overline{\lambda}\, T^*$.

Enfin : $\big((TS)^*x|y\big) = (x|TSy)$ qui, en appliquant à T la définition de l'application $T \longrightarrow T^*$, est égal à $(T^*x|Sy)$, qui, en appliquant à S la même définition, est égal à $(S^*T^*x|y)$.

Donc :

$$\forall x,\ \forall y \qquad \big((TS)^*x|y\big) = (S^*T^*x|y),$$

soit, toujours en vertu du même raisonnement :

$$(TS)^* = S^*T^*.$$

2° L'appartenance de P_V à $\mathcal{L}(H)$ et les deux premières propriétés sont immédiates. Pour établir la troisième, remarquons que :

$$(x|y_V) = (x_V|y) = (x_V|y_V)$$

puisque, x_W et y_W désignant les projections orthogonales sur W, supplémentaire orthogonal de V, $(x_W|y_V)$ et $(x_V|y_W)$ sont nuls. L'égalité $(x|y_V) = (x_V|y)$ montre que x_V est P_V^*x. Ceci étant vrai pour tout x,

$$P_V^* = P_V.$$

3° La deuxième hypothèse permet d'écrire $(x|Ty) = (Tx|y)$. Cherchons $T(Tx)$:

$$\big(T(Tx)|y\big) = (Tx|Ty),$$

mais comme $T(Tx) = Tx$, on trouve $(Tx|y) = (Tx|Ty)$.

Il en résulte que :

$$\forall x \qquad (Tx|y - Ty) = 0,$$

c'est-à-dire que $(y - Ty)$ appartient à l'orthogonal W de $V = \overline{T(H)}$. On doit donc avoir $y_V + y_W - Ty \in W$, donc $y_V - Ty \in W$, et comme ce vecteur appartient aussi à V, il est nécessaire et suffisant pour cela que $Ty = y_V$. Donc : $T = P_V$.

Remarquons alors que $P_V(H)$ est évidemment V tout entier. Donc, $T(H) = V$ est fermé.

On a :

$$(I - T)^2 = I^2 - IT - TI + T^2 = I - T - T + T = I - T$$
$$(I - T)^* = I^* - T^* = I - T.$$

Donc $(I - T)$, qui satisfait aux conditions (1), est un projecteur.
Pour tout $x = x_V + x_W$, $(I - T)x = x_W$.
Donc :

$$I - P_V = P_W.$$

Dans l'égalité $(Tx|y) = (x|Ty)$ qui exprime que $T^* = T$, faisons $y = Tx$. On trouve :

$$(Tx|Tx) = (x|T^2x) = (x|Tx).$$

D'où : $\|Tx\|^2 = (x|Tx) = (Tx|x)$.

D'autre part, $(Tx|x) \leqslant \|Tx\| . \|x\|$,

donc $\|Tx\| \leqslant \|x\|$.

4° Supposons que la condition (a) soit vérifiée. Soit V' le supplémentaire orthogonal de V par rapport à W :

$$P_W x = x_W = x_V + x_{V'}, \qquad P_V x = x_V$$
$$P_V P_W x = x_V \qquad P_W P_V x = x_V.$$

D'où $(a) \Longrightarrow (b)$.

D'autre part, $\|P_V x\|^2 = \|x_V\|^2$, $\|P_W x\|^2 = \|x_V\|^2 + \|x_{V'}\|^2$.
D'où $(a) \Longrightarrow (c)$.

Supposons que la condition (b) soit satisfaite. $P_W P_V = P_V$ prouve que, pour tout x, $P_V x$ appartient à W ; donc $P_V(H) = V \subset W$. Par suite, $(b) \Longrightarrow (a)$.

Enfin, supposons que l'on ait (c). Soit $x \in V$, $P_V x = x$, donc $\|P_W x\| \geqslant \|x\|$, mais comme la norme de P_W est inférieure à 1, $\|P_W x\| = \|x\|$, ce qui n'est possible que si x appartient à W ; donc, $x \in V \Longrightarrow x \in W$.
Donc, $(c) \Longrightarrow (a)$.

5° $(P_V P_W)^* = P_W^* P_V^* = P_W P_V$. Pour que $P_V P_W$ soit un projecteur, il est donc nécessaire que $P_V P_W = P_W P_V$. Et si cette condition est réalisée, $P_V P_W$ satisfait aux deux conditions (1), car alors :

$$P_V P_W P_V P_W = P_V P_V P_W P_W = P_V P_W.$$

Il est d'abord évident que le sous-espace $P_W P_V(H)$ est inclus dans l'intersection U de V et W. Appelons V' et W' les supplémentaires orthogonaux de U respectivement dans V et dans W. On a :

$$P_V x = x_U + x_{V'}, \qquad P_W P_V x = x_U + P_W x_{V'},$$
$$P_W x = x_U + x_{W'}, \qquad P_V P_W x = x_U + P_V x_{W'},$$

Pour que $P_V P_W = P_W P_V$, il est donc nécessaire et suffisant que $P_W x_{V'} = P_V x_{W'}$. Or, $P_W x_{V'} \in W'$ puisque V', étant orthogonal à U, la projection sur W d'un vecteur de V' n'a pas de composante non nulle sur U. De même $P_V x_{W'} \in V'$. L'intersection $V' \cap W'$ étant réduite à 0 d'après la définition de ces sous-espaces, il en résulte que $P_W x_{V'}$ et $P_V x_{W'}$ doivent être nuls, donc que W' doit être orthogonal à V et V' à W. En conclusion : $P_V P_W = P_W P_V$ *si et seulement si le supplémentaire orthogonal de* $V \cap W$ *par rapport à chacun des sous-espaces* V *et* W *est orthogonal à l'autre.*

Et il résulte alors des égalités ci-dessus que :

$$P_V P_W = P_W P_V = P_{V \cap W}.$$

6° En vertu de la fin du 3°, si $P_{V_1} + P_{V_2} + \ldots + P_{V_n}$ est un projecteur,

$$\big((P_{V_1} + P_{V_2} + \ldots + P_{V_n})x|x\big) = \|(P_{V_1} + P_{V_2} + \ldots + P_{V_n})x\|^2 \leqslant \|x\|^2.$$

Or $\big((P_{V_1} + P_{V_2} + \ldots + P_{V_n})x|x\big) = (P_{V_1}x|x) + (P_{V_2}x|x) + \ldots + (P_{V_n}x|x)$

$$= \|P_{V_1}x\|^2 + \|P_{V_2}x\|^2 + \ldots + \|P_{V_n}x\|^2.$$

D'où $\|P_{V_1}x\|^2 + \|P_{V_2}x\|^2 + \ldots + \|P_{V_n}x\|^2 \leqslant \|x\|^2.$

Appliquons cette propriété au vecteur $P_{V_i}x$; on trouve :

$$\|P_{V_i}x\|^2 + \sum_{j \neq i} \|P_{V_j}P_{V_i}x\|^2 \leqslant \|P_{V_i}x\|^2.$$

D'où, pour tout couple (i, j) avec $i \neq j$, $\|P_{V_j}P_{V_i}x\| = 0$, ce qui entraîne :

$$P_{V_i}P_{V_j} = 0.$$

Il est immédiat que cette condition nécessaire est suffisante car, si elle est réalisée :

$$(P_{V_1} + P_{V_2} + \ldots + P_{V_n})^2 = P_{V_1}^2 + P_{V_2}^2 + \ldots + P_{V_n}^2 = P_{V_1} + P_{V_2} + \ldots + P_{V_n}$$

et la seconde des conditions (1) est également vérifiée.
Le cas où nous nous trouvons est un cas particulier de celui de la question précédente. $P_{V_i}P_{V_j} = P_{V_j}P_{V_i} = P_{V_i \cap V_j}$, donc $V_i \cap V_j = \{0\}$ et V_i et V_j sont orthogonaux (puisque le supplémentaire orthogonal par rapport à V_i de l'intersection, soit V_i lui-même, est orthogonal à V_j).

$$V = V_1 + V_2 + \ldots + V_n$$

est donc une somme directe de sous-espaces deux à deux orthogonaux. Il est alors évident que tout $x \in H$ a comme projection sur V la somme de ses projections sur $V_1, V_2 \ldots V_n$. D'où :

$$P_{V_1} + P_{V_2} + \ldots + P_{V_n} = P_{V_1 \oplus V_2 \oplus \ldots \oplus V_n}.$$

7° Si $P_W - P_V = Q$ est un projecteur, $P_V + Q$ est un projecteur, donc $P_V Q = Q P_V = 0$, ce qui donne :

$$P_V P_W = P_W P_V = P_V.$$

Cette condition nécessaire est évidemment suffisante pour que $P_W - P_V$ soit un projecteur, puisque alors :

$$(P_W - P_V)^2 = P_W{}^2 - P_W P_V - P_V P_W + P_V{}^2 = P_W - P_V$$

et que la seconde des conditions (1) est aussi vérifiée.

En vertu de la troisième question, il en résulte que $V \subset W$ et

$$\forall x \in H \qquad P_W x = P_V x + P_{V'} x$$

si V′ *est le supplémentaire orthogonal de* V *par rapport à* W. Donc $(P_W - P_V)x = P_{V'}x$

$$P_W - P_V = P_{V'}$$

On remarquera que toutes les propriétés précédentes sont des généralisations de propriétés bien connues de l'espace euclidien (théorème des 3 perpendiculaires, etc...).

Exercice 68.

La moins fine des topologies de E′ qui rendent continues toutes les formes $\tilde{x}$ est celle qui admet pour système de générateurs de ses ouverts l'ensemble des images réciproques par ces formes d'une base des ouverts de **C**, base des ouverts pour laquelle on peut prendre la famille des boules $B(y, r)$ où y décrit **C** et r décrit $\mathbf{R}^+ - \{0\}$. L'image d'une telle boule par la forme $\tilde{x}$ est

$$\begin{aligned} \tilde{x}^{-1}(B(y, r)) &= \{x' \; ; \; |\tilde{x}(x') - y| < r\} \\ &= \{x' \; ; \; |x'(x) - y| < r\} \qquad (1) \end{aligned}$$

Le système des générateurs de la topologie cherchée sur E′ est la famille des ensembles de la forme (1), famille obtenue en faisant décrire $\tilde{E}$ par $\tilde{x}$ (donc E par x), $\mathbf{R}^+ - \{0\}$ par r et **C** par y.

D'autre part, la topologie sur E′ de la convergence simple sur E (topologie induite par la topologie sur $\mathcal{F}(E, \mathbf{C})$) admet pour systèmes de générateurs la famille des ensembles :

$$\{x' \; ; \; |x'(x) - f(x)| < r\} \qquad (2)$$

qui sont les intersections avec E′ des boules $B(x, f, r)$, famille obtenue en faisant décrire E par x, $\mathbf{R}^+ - \{0\}$ par r et $\mathcal{F}(E, \mathbf{C})$ par f.

Il est alors aisé de voir qu'il y a identité entre la famille des ensembles (1) et celle des ensembles (2), car, x et r étant fixés, $f(x)$ décrit **C** quand f décrit $\mathcal{F}$. La topologie faible sur E′ est donc bien la topologie de la convergence simple sur E.

Les formes de E′ de normes inférieures ou égales à 1 constituent un sous-ensemble de l'ensemble $\mathcal{F}_1(E, \mathbf{C})$ des applications f de E dans **C** qui vérifient

$$\forall x \qquad |f(x)| < \|x\|.$$

Quand $\mathcal{F}(E, \mathbf{C})$ est muni de la topologie de la convergence simple sur E, $\mathcal{F}_1$ est muni de la topologie induite. La topologie de la convergence simple étant identique à la topologie produit sur $\prod_{x \in E} \mathbf{C}_x$, la topologie qu'elle induit sur $\mathcal{F}_1$ est encore la topologie d'espace produit sur un produit cartésien de même type, c'est-à-dire indexé par E, mais où, pour tout x, **C** est remplacé par le disque fermé de centre l'origine et de rayon $\|x\|$. Or, ces disques sont compacts ; donc, la topologie produit sur $\mathcal{F}_1$ est une topologie compacte.

Pour montrer que la boule unité B de E′ est compacte, il suffit donc de montrer qu'elle est fermée dans $\mathcal{F}_1$, donc de montrer que si f appartient à l'adhérence de B, f appartient à B. Soit donc $f \in \overline{B}$ (il s'agit, bien entendu, d'adhérence pour la topologie de la convergence simple). Cette hypothèse signifie qu'il existe $x' \in B$ dans tout voisinage de f. Soient alors x_1 et x_2 quelconques appartenant à E. Considérons le voisinage de f défini par x_1, x_2, $x_1 + x_2$ et une valeur ε positive arbitraire, c'est-à-dire l'ensemble des fonctions de $\mathcal{F}_1$ qui s'écartent de f de moins de ε, pour les trois valeurs x_1, x_2 et $x_1 + x_2$. L'hypothèse entraîne donc l'existence de $x' \in B$ telle que :

$$\begin{aligned} &|f(x_1) - x'(x_1)| < \varepsilon \\ &|f(x_2) - x'(x_2)| < \varepsilon \\ &|f(x_1 + x_2) - x'(x_1 + x_2)| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Et on peut écrire :

$$\begin{aligned} &|f(x_1 + x_2) - f(x_1) - f(x_2)| \\ &\leqslant |f(x_1 + x_2) - x'(x_1 + x_2)| + |x'(x_1) + x'(x_2) - f(x_1) - f(x_2)| < 3\,\varepsilon. \end{aligned}$$

Une telle inégalité pouvant être obtenue pour tout ε, ceci exige que :

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2).$$

Soient de même $x_1 \in E$ et le scalaire $k \in \mathbf{C}$. Considérons le voisinage de f défini par x_1, kx_1 et ε positif arbitraire. L'hypothèse entraîne l'existence de $x' \in B$ telle que :

$$\begin{aligned} &|f(x_1) - x'(x_1)| < \varepsilon \\ &|f(kx_1) - x'(kx_1)| < \varepsilon \end{aligned}$$

et on peut écrire :

$$\begin{aligned} |f(kx_1) - k\,f(x_1)| &\leqslant |f(kx_1) - x'(kx_1)| + |k|\,|f(x_1) - x'(x_1)| \\ &< (1 + |k|)\,\varepsilon, \end{aligned}$$

k étant fixe et ε arbitraire, ceci exige :

$$f(kx_1) = k\,f(x_1),$$

f est donc linéaire. Or, le fait que $\dfrac{|f(x)|}{\|x\|} \leqslant 1$ prouve à la fois que cette forme linéaire est continue et que sa norme est au plus égale à 1. Donc $f \in B$ et B est fermée, donc compacte.

Exercice 69.

1° $\omega(f \; ; \; a) = 0$ signifie :

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists r \qquad \delta(f(B(a, r))) < \varepsilon,$$

ce qui entraîne :

$$f(B(a, r)) \subset B(f(a), \varepsilon).$$

Autrement dit, toute boule de centre $f(a)$ contient l'image d'une boule de centre a, ce qui exprime que *f est continue en a.*

Réciproquement, si f est continue en a, c'est que :

$$\forall \varepsilon \qquad \exists \eta \qquad d(a, x) < \eta \implies d(f(a), f(x)) < \varepsilon.$$

Mais ceci entraîne, en vertu de l'inégalité triangulaire,

$$\forall x_1, x_2 \in B(a, \eta) \qquad d(f(x_1), f(x_2)) < 2\,\varepsilon,$$

donc

$$\delta(f(B(a, \eta))) < 2\,\varepsilon.$$

D'où :

$$\forall \varepsilon \quad \exists \eta \quad \delta(f(B(a, \eta))) < 2\,\varepsilon,$$

ce qui exige

$$\omega(f\,;\,a) = 0.$$

La propriété $\omega(f\,;\,a) = 0$ *caractérise donc les applications continues en* a.

2° Par définition de $\omega(f\,;\,a)$:

$$\forall \varepsilon \quad \exists \eta \quad \delta(f(B(a, \eta))) < \omega(f\,;\,a) + \varepsilon.$$

Soit alors $x \in B(a, \eta)$. Il est centre d'une boule $B(x, \rho)$ incluse dans $B(a, \eta)$ et, pour deux points y_1 et y_2 quelconques de cette boule :

$$d(f(y_1), f(y_2)) < \omega(f\,;\,a) + \varepsilon,$$

donc

$$\delta(f(B(x, \rho))) < \omega(f\,;\,a) + \varepsilon,$$

ce qui entraîne que :

$$\omega(f\,;\,x) < \omega(f\,;\,a) + \varepsilon.$$

En définitive :

$$\forall \varepsilon \quad \exists \eta \quad d(x, a) < \eta \implies \omega(f\,;\,x) < \omega(f\,;\,a) + \varepsilon.$$

Ceci exprime que *l'application* $x \in X \longrightarrow \omega(f\,;\,x) \in \mathbf{R}$ *est semi-continue supérieurement au point* a.

3° Soient x_1 et x_2 quelconques dans A :

$$d(g(x_1), g(x_2)) \leqslant d(f(x_1), f(x_2)) + d(f(x_1), g(x_1)) + d(f(x_2), g(x_2))$$
$$\leqslant \delta(f(A)) + 2\,\varepsilon.$$

D'où :

$$\delta(g(A)) \leqslant \delta(f(A)) + 2\,\varepsilon \qquad (1)$$

En échangeant les rôles de f et g, on arrive à :

$$|\delta(f(A)) - \delta(g(A))| \leqslant 2\,\varepsilon.$$

Pour parties A, on peut prendre les boules de centre x. L'inégalité (1) donne alors pour tout r :

$$\delta(g(B(x, r))) \leqslant \delta(f(B(x, r))) + 2\,\varepsilon,$$

donc

$$\omega(g\,;\,x) \leqslant \omega(f\,;\,x) + 2\,\varepsilon,$$

et finalement :

$$|\omega(f\,;\,x) - \omega(g\,;\,x)| \leqslant 2\,\varepsilon.$$

On peut donc dire :

$$\forall \varepsilon \quad \exists \eta = \frac{\varepsilon}{2} \quad d(f, g) \leqslant \eta \implies |\omega(f\,;\,x) - \omega(g\,;\,x)| \leqslant \varepsilon.$$

Ceci exprime *que l'application* $f \in \mathcal{F}(X, Y) \longrightarrow \omega(f\,;\,x) \in \mathbf{R}$, $\mathcal{F}$ *étant muni de la topologie de la convergence uniforme, est une application continue et même uniformément continue.*

4° Soit (f_n) une suite de fonctions appartenant au sous-ensemble considéré de $\mathcal{F}$ et supposons que cette suite converge vers f au sens de la convergence uniforme, ce qui signifie :

$$\forall \varepsilon \quad \exists N \quad \forall n > N \quad \forall x \quad d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon.$$

Il suffit alors d'appliquer aux fonctions f et f_n le résultat de la question précédente pour voir que :

$$\omega(f\,;\,x) \leqslant k + 2\,\varepsilon.$$

Mais une telle inégalité ne peut être vérifiée pour tout ε que si

$$\omega(f\,;\,x) \leqslant k,$$

autrement dit si la fonction $f = \lim\limits_{n=\infty} f_n$ appartient au sous-ensemble considéré. Ce sous-ensemble est donc fermé.

Lorsque $k = 0$, nous retrouvons le théorème : « une limite uniforme de fonctions continues est continue ».

Exercice 70.

1) Il s'agit de comparer les topologies dérivant de deux normes. Pour cela, il suffit de comparer les boules, pour ces deux normes, ayant pour centre un point quelconque (les boules centrées en un autre point étant déduites des premières par translation) et, pour ce point, on peut choisir l'origine, c'est-à-dire l'application nulle sur $[0, 1]$.

La boule B de centre cette application, et de rayon r, relative à la norme de la convergence uniforme, est :

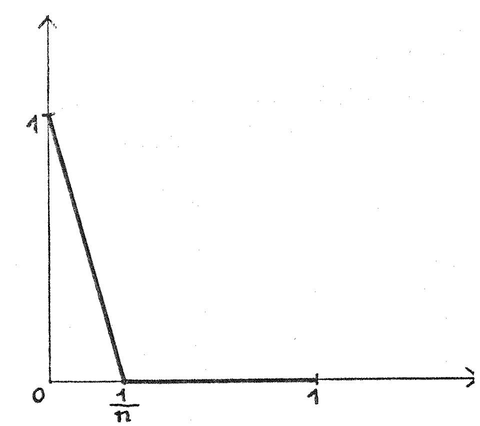
$$B(0, r) = \{ f\,;\, \|f\| < r \} = \{ f\,;\, \forall x \in [0, 1],\ |f(x)| < r \}.$$

La boule B′ relative à la norme de la convergence en moyenne d'ordre p $(p \geqslant 1)$ est :

$$B'(0, r) = \left\{ f\,;\, \sqrt[p]{\int_0^1 |f(x)|^p dx} < r \right\}.$$

Il est immédiat que $B(0, r) \subset B'(0, r)$. La topologie $\mathcal{T}$ de la convergence uniforme est donc plus fine que celle $\mathcal{T}'$ de la convergence en moyenne d'ordre p.

Montrons qu'elle est strictement plus fine. Pour cela, considérons la suite de fonctions $\{ f_n \}$, f_n appartenant à $\mathcal{C}$, et étant définie par le graphe ci-dessous. Cette suite converge en moyenne d'ordre p vers la

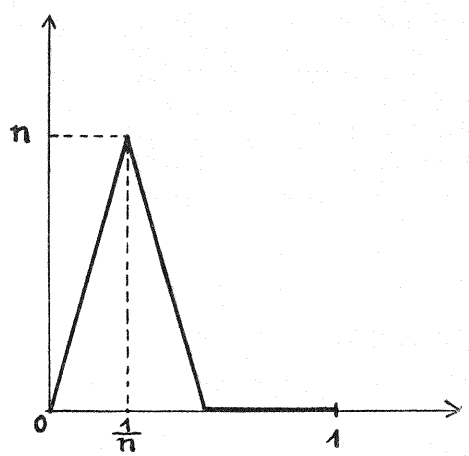


fonction partout nulle, mais ne converge pas uniformément vers cette fonction. Le filtre des voisinages pour $\mathcal{T}'$ de la fonction nulle est donc moins fin que l'image du filtre des sections finissantes de **N**. Si celui des voisinages pour $\mathcal{T}$ de la fonction nulle était moins fin que celui des voisinages pour $\mathcal{T}'$, on aurait *a fortiori* convergence pour $\mathcal{T}'$. Il est donc impossible qu'il en soit ainsi et *la topologie de la convergence uniforme est strictement plus fine que celle de la convergence en moyenne d'ordre* p.

2° Dans l'exemple précédent, la suite $\{ f_n \}$ ne convergeait pas non plus vers la fonction nulle pour la topologie $\mathcal{T}''$ de la convergence simple. Le même raisonnement que ci-dessus montre donc que :

$\mathcal{T}''$ n'est pas moins fine que $\mathcal{T}'$.

Considérons maintenant la suite $\{ f_n \}$, où $f_n \in \mathcal{C}$ est définie par le graphe ci-dessous. Cette suite converge vers la fonction partout nulle au



sens de la convergence simple. Elle ne converge pas vers cette fonction pour $\mathcal{T}'$. Le même raisonnement sur la comparaison des voisinages aboutit donc à conclure que :

$\mathcal{T}'$ n'est pas moins fine que $\mathcal{T}''$.

La topologie de la convergence simple et la topologie de la convergence en moyenne d'ordre p ne sont pas comparables.

ERRATA DES TOMES PRECEDENTS

TOME I. *Les corrections suivantes s'ajoutent à celles qui ont été données p. 199, du tome II.*

Page 13 : 11ᵉ ligne : $A \cup B$, au lieu de : $A \cap B$.

Page 43 : 2ᵉ ligne : G, au lieu de : G_1.

Page 48 : Exercice 29, dernière ligne :
$f(x) = x$, au lieu de : $f(x) \approx x$.

Page 72 : Exercice 47, question 1,
font de $\mathcal{A}$ un anneau,
au lieu de :
font de un anneau.

Page 91 : 7ᵉ ligne du bas :
Supprimer le deuxième signe $\exists$.

Page 93 : 4ᵉ ligne du bas :
$\forall n, m$, au lieu de : Vn, m.

Page 106 : 8ᵉ ligne :
f est surjective, au lieu de : B est surjective.

Page 116 : dernière ligne :
toute valeur de n,
au lieu de :
toute valeur de A.

TOME II.

Page 41 : 6ᵉ ligne :

opération interne sur F,
au lieu de :
opération interne sur $\mathcal{F}$.

10ᵉ ligne du bas :
opération externe sur F,
au lieu de :
opération externe sur $\mathcal{F}$.

Page 62 : 10ᵉ ligne du bas :

Il en résulte que $A^{\perp}$ est un sous-espace vectoriel de E. Considérons $A^{\perp\perp}$,
au lieu de :
Il en résulte que $A^{\perp\perp}$ est un sous-espace vectoriel de E. Considérons $A^{\perp}$.

Page 109 : 4ᵉ ligne :

multilinéaires, au lieu de : multilénaires.

Index terminologique

Adhérence II.3.3.
Axiome de Borel-Lebesgue VI.1.1.
Axiome de dénombrabilité (premier) VII.1.2.
Axiome de dénombrabilité (deuxième) IX.5.1.
Axiome de Hausdorff V.1.1.
Base de filtre II.1.4.
Base d'un Hilbert IX.4.3.
Base des ouverts III.1.5.
Base de voisinages II.1.4.
Bases équivalentes II.1.4.
Boule I.2.2. — VIII.1.1.
Compact VI.1.
Compactification VI.2.2.
Complet VII.2.3.
Complètement régulier V.2.2.
Composante connexe VI.3.3.
Connexe VI.3.1.
Connexe par arc VI.3.4.
Continuité I.1.
Continuité uniforme VII.3.1.
Convergence compacte X.1.3.
Convergence simple X.1.
Convergence uniforme X.1.
Coupe III.3.3.
Corps topologique III.4.2.
Corps valué VIII.1.1.
Diamètre VII.2.1.
Distance I.2.1.
Dual topologique VIII.2.
Ecart I.2.1.
Equicontinue X.2.2.
Espace de Banach VIII.1.2.
Espace de Hilbert IX.
Espace l^1 VIII.1.3.
Espace l^2 VIII.1.3. — IX.5.2.
Espace L^1 X.2.4.
Espace L^2 IX.5.3. — X.2.4.
Espace métrique I.2.1.
Espace métrique complet VII.2.3.
Espace préhilbertien IX.1.1.
Espace topologique I.3.1.
Espace vectoriel normé III.4.3.
Espace vectoriel topologique III.4.3.
Famille orthonormée IX.4.1.
Famille sommable VIII.3.
Famille totale IX.5.2.
Fermé II.2.
Fermeture II.3.1.
Filtre II.1.2.
Filtre convergent IV.1.2.
Filtre de Fréchet II.1.4.
Finesse des filtres III.1.2.
Finesse des topologies III.1.1.
Fonction continue I.1. — I.2.2. — I.3.2.
Forme sesquilinéaire hermitienne IX.1.1.
Frontière II.3.3.
Générateurs III.1.5.
Groupe topologique III.4.1.
Homéomorphe III.2.2.
Intérieur II.3.1.
Limite IV.
Localement compact VI.2.1.
Normal V.2.3.
Norme III.4.3. — VIII.1.1.
Norme d'une application linéaire et continue VIII.1.5.
Ouvert I.2.3.
Partie topologiquement libre VIII.1.4.
Point adhérent à une partie II.3.2.
Point adhérent à un filtre IV.2.1.
Point d'accumulation II.3.2.
Produit scalaire IX.1.1.
Projection orthogonale IX.1.3.
Régulier V.2.1.
Saturé III.5.1.
Semi-continuité : exercice 47.
Semi-norme III.4.3.
Séparable IX.5.1.
Séparé V.1.
Sous-espace topologique II.4.
Suite de Cauchy VII.2.2.
Supplémentaire orthogonal IX.1.3.
Topologie discrète I.3.1.
Topologie finale III.5.4.
Topologie grossière I.3.1.
Topologie initiale III.2.3.
Topologie induite II.4.
Topologie métrisable I.3.1.
Topologie produit III.3.
Topologie quotient III.5.
Ultrafiltre IV.3.3.
Ultramétrique : exercice 54.
Valeur d'adhérence IV.2.1.
Voisinage I.2.2. — II.2.

I.F.Q.A.-Cahors. — 40.981. — Dépôt légal : II-1966