Concours général des lycées - Session 2023

1 Problème 1 : Soyons rationnels !

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note $v(n)$ le plus grand entier k tel que $\frac{n}{2^k}$ soit un entier.
On définit la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ par récurrence, en posant $u_1 = 1$ puis, pour tout entier $n \geqslant 2$,

$$u_n = \begin{cases} 0 & \text{si } u_{n-1} = 0 \\ 1 + 2v(n) - \frac{1}{u_{n-1}} & \text{si } u_{n-1} \neq 0 \end{cases}$$

1. Donner la valeur des entiers $v(1)$, $v(2)$, $v(3)$ et $v(4)$.
2. Démontrer, pour tout entier $n \geqslant 1$, que $v(n) = 0$ si n est impair et que $v(n) = v\left(\frac{n}{2}\right) + 1$ si n est pair.
3. Calculer les huit premiers termes de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et vérifier que $u_8 = 4$.
4. Démontrer, pour tout entier $n \geqslant 1$, que u_n est un nombre rationnel strictement positif, que $u_{2n} = u_n + 1$ et que $u_{2n+1} = \frac{u_n}{u_n+1}$.
5. Démontrer que tout nombre rationnel strictement positif est égal à un terme u_n.
6. Démontrer que tout nombre rationnel strictement positif est égal à un unique terme u_n.

2 Problème 2 : Limite sympathique !

2.1 Quelques exemples

1. On considère dans cette question, pour tout entier $n \geqslant 1$, l'équation :

$$x^2 + \frac{1}{n}x - 1 = 0$$

d'inconnue x.

a. Soit n un entier naturel non nul. Démontrer que cette équation admet une unique solution réelle positive ; on la note x_n. Exprimer x_n en fonction de n.

b. Démontrer que la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ converge, on note x_∞ sa limite.

c. Démontrer que x_∞ est solution de l'équation $x^2 - 1 = 0$.

2. On considère dans cette question, pour tout entier $n \geqslant 1$, l'équation :

$$\frac{1}{n}y^2 - y - 1 = 0$$

d'inconnue y.

a. Soit n un entier naturel non nul. Démontrer que cette équation admet une unique solution réelle positive, on la note y_n.

b. Démontrer que la suite $\left(y_n\right)_{n\geqslant 1}$ diverge.

3. On considère dans cette question, pour tout entier $n \geqslant 1$, l'équation :

$$z^3 + \frac{1}{n}z^2 - 1 = 0$$

d'inconnue z.

a. Soit n un entier naturel non nul.

i. Étudier les variations de la fonction $z \mapsto z^3 + \frac{1}{n}z^2 - 1$ sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

ii. En déduire que cette équation admet une unique solution réelle positive, on la note z_n. Démontrer que z_n appartient à l'intervalle $]0, 1[$.

b. Démontrer que la suite $(z_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente.
On pourra s'intéresser au signe du réel $z_{n+1}^3 + \frac{1}{n}z_{n+1}^2 - 1$.

c. On note z_∞ la limite de la suite $(z_n)_{n\geqslant 1}$.
Démontrer que z_∞ est solution de l'équation $z^3 - 1 = 0$.

4. On considère dans cette question, pour tout entier $n \geqslant 1$, l'équation :

$$\frac{1}{n}t^3 - t^2 - 1 = 0$$

d'inconnue t.

a. Soit n un entier naturel non nul. Démontrer que cette équation admet une unique solution réelle, on la note t_n.

b. La suite $(t_n)_{n\geqslant 1}$ est-elle convergente ? Si oui, quelle est sa limite ?

2.2 Polynômes sympathiques

Dans les deux prochaines parties, on considère un entier $d \geqslant 1$. La fonction P est un *polynôme de degré au plus* d s'il existe des réels $a_0, a_1, \ldots, a_d$ tels que :

$$P(x) = a_d x^d + a_{d-1}x^{d-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

pour tout réel x.
Soit $P : x \mapsto a_d x^d + a_{d-1}x^{d-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$ un polynôme de degré au plus d. On dit que :

- ▹ P est *initialement sympathique* si $a_0 = -1$ et si $a_k \geqslant 0$ pour tout entier k tel que $1 \leqslant k \leqslant d$;
- ▹ P est *faussement sympathique* si $a_0 = -1$ et si $a_k \leqslant 0$ pour tout entier k tel que $1 \leqslant k \leqslant d$;
- ▹ P est *vraiment sympathique* si $a_0 = -1$ et s'il existe un entier k tel que $1 \leqslant k \leqslant d - 1$ et pour lequel $a_1 \leqslant 0, a_2 \leqslant 0, \ldots, a_k \leqslant 0$ et $a_{k+1} > 0, a_{k+2} \geqslant 0, \ldots, a_d \geqslant 0$.

Enfin, on dit que P est *sympathique* s'il est initialement, faussement ou vraiment sympathique.

5. Quels sont les polynômes qui sont à la fois faussement sympathiques et initialement sympathiques ?
6. Démontrer que tout polynôme faussement sympathique est

a. strictement négatif sur l'intervalle $[0, +\infty[$;

b. décroissant sur l'intervalle $[0,+\infty[$.

7. Soit P un polynôme vraiment sympathique et initialement sympathique.

a. Démontrer que P est strictement croissant sur l'intervalle $[0,+\infty[$;

b. Démontrer que l'équation $P(x)=0$ admet une unique solution strictement positive.

8. Soit P un polynôme vraiment sympathique mais pas initialement sympathique.

a. Démontrer qu'il existe un réel $b>0$, un entier $\ell \geqslant 0$ et un polynôme Q vraiment sympathique tels que :

$$P'(x)=bx^{\ell}Q(x)$$

pour tout réel x.

b. Démontrer qu'il existe un réel $r>0$ tel que le polynôme P vérifie les quatre propriétés suivantes :

- ▷ P est décroissant sur l'intervalle $[0,r]$;
- ▷ P est strictement croissant sur l'intervalle $[r,+\infty[$;
- ▷ P est strictement négatif sur l'intervalle $[0,r]$;
- ▷ l'équation $P(x)=0$ admet une unique solution dans l'intervalle $[r,+\infty[$.

9. Quels sont les polynômes sympathiques P pour lesquels l'équation $P(x)=0$ admet au moins une solution strictement positive? Donner, dans ce cas, le tableau de signes de P sur l'intervalle $[0,+\infty[$.

2.3 De la suite dans les idées

On considère désormais des polynômes vraiment sympathiques $P_1, P_2, \dots$ Puisque ces polynômes sont de degré au plus d, on peut écrire chaque polynôme P_n sous la forme :

$$P_n : x \mapsto a_{d,n}x^d + a_{d-1,n}x^{d-1} + \cdots + a_{2,n}x^2 + a_{1,n}x + a_{0,n}$$

On suppose en outre, pour tout entier k tel que $0 \leqslant k \leqslant d$, que la suite $\left(a_{k,n}\right)_{n\geqslant 1}$ est convergente, on note $a_{k,\infty}$ sa limite.
On considère alors le polynôme P_∞ défini par :

$$P_\infty : x \mapsto a_{d,\infty}x^d + a_{d-1,\infty}x^{d-1} + \cdots + a_{2,\infty}x^2 + a_{1,\infty}x + a_{0,\infty}$$

Enfin, pour tout entier $n \geqslant 1$, on note x_n l'unique solution strictement positive de l'équation $P_n(x)=0$. Ci-dessous, on étudie la convergence éventuelle de la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$.

10. Soit t un réel fixé. Démontrer que la suite $(P_n(t))_{n\geqslant 1}$ converge vers $P_\infty(t)$.

11. Démontrer que le polynôme P_∞ est sympathique.

12. On suppose dans cette question que le polynôme P_∞ est vraiment sympathique, et on note x_∞ l'unique solution strictement positive de l'équation $P_\infty(x)=0$.

a. Soient u et v deux réels tels que $0<u<x_\infty<v$. Démontrer qu'il existe un entier $M_{u,v}$ tel que $P_n(u)<0<P_n(v)$ pour tout entier $n \geqslant M_{u,v}$.

b. En déduire que la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers x_∞.

13. On suppose dans cette question que le polynôme P_∞ est faussement sympathique. Démontrer que $(x_n)_{n\geqslant 1}$ diverge vers $+\infty$.

14. Retrouver les résultats de la première partie.

3 Problème 3 : Polynômes et polygones réguliers

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $\mathscr{R}=(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.
Soit k un entier tel que $k \geqslant 3$. Les points $M_1, M_2, \dots, M_k$ sont les sommets d'un polygone régulier de centre O si ces points

- ▷ sont deux à deux distincts,
- ▷ apparaissent dans le sens trigonométrique (c'est-à-dire le sens contraire des aiguilles d'une montre) sur un même cercle de centre O, et
- ▷ vérifient l'égalité $M_1M_2 = M_2M_3 = \cdots = M_{k-1}M_k = M_kM_1$. En particulier, pour $k=3$, il s'agit d'un triangle équilatéral; pour $k=4$, il s'agit d'un carré.

Pour tout entier $d \geqslant 0$, une fonction P est un polynôme de degré d s'il existe des réels $a_0, a_1, \dots, a_d$ tels que $a_d \neq 0$ et

$$P(x) = a_dx^d + a_{d-1}x^{d-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

pour tout réel x; on pourra admettre que, pour un tel polynôme, l'équation $P(x)=0$ admet au plus d solutions réelles.
Quant à elle, la fonction $P : x \mapsto 0$ est appelée le polynôme nul.
Enfin, étant donné un polynôme P (nul ou non), on note $\mathscr{C}_P$ la courbe représentative de P dans le repère $\mathscr{R}$.

3.1 Triangles équilatéraux

1. Soit P un polynôme de degré 1. Existe-t-il un triangle équilatéral dont les sommets appartiennent à $\mathscr{C}_P$?

2. On considère les points :

$$A\left(1, \frac{\sqrt{3}}{3}\right) \quad , \quad B\left(-1, \frac{\sqrt{3}}{3}\right) \quad \text{et} \quad C\left(0, -\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$$

a. Démontrer que A, B et C sont les sommets d'un triangle équilatéral de centre O.

b. Démontrer que les points A, B et C appartiennent à la courbe représentative du polynôme :

$$Q : x \mapsto \frac{\sqrt{3}}{3}\left(3x^2-2\right)$$

c. Démontrer que les points A, B et C appartiennent à la courbe représentative du polynôme :

$$R : x \mapsto \frac{\sqrt{3}}{3}\left(3x^2-2\right) + x\left(x^2-1\right)$$

d. Démontrer que, pour tout entier $d \geqslant 2$, il existe un polynôme de degré d dont la courbe représentative contient les points A, B et C.

3.2 Carrés de centre O

Dans les questions **3.** et **4.**, on considère un polynôme P et un carré $ABCD$ de centre O dont les quatre sommets appartiennent à $\mathscr{C}_P$.

3. a. Exprimer les coordonnées des points B, C et D en fonction de celles de A. Démontrer que les abscisses de A, B, C et D sont distinctes et non nulles.

b. Démontrer que P est non nul et que son degré vaut au moins 3.

4. On suppose dans cette question qu'il existe des réels a, b et c tels que :

$$P : x \mapsto x^3 + ax^2 + bx + c$$

a. Démontrer que $a = 0$ et $c = 0$.

b. Démontrer que les abscisses respectives de A, B, C et D sont solutions de l'équation :

$$P(P(x)) + x = 0$$

c. Démontrer que le polynôme :

$$Q : x \mapsto x^4 + 3bx^3 + 3b^2x^2 + b\left(b^2+1\right)x + b^2 + 1$$

admet au moins deux racines positives distinctes.

d. Démontrer que $b < 0$.

e. On suppose qu'il existe deux réels α et β tels que $0 < \alpha < \beta$ et

$$Q(x) = (x-\alpha)^2(x-\beta)^2$$

pour tout réel x. Démontrer qu'alors $b = -\sqrt{8}$, puis déterminer les valeurs de α et β.

5. a. Démontrer qu'il existe un polynôme P de degré 3 et un carré $ABCD$ de centre O dont les sommets appartiennent à $\mathscr{C}_P$.

b. Pour quels entiers d existe-t-il un polynôme de degré d dont la courbe représentative contient les points A, B, C et D obtenus en question **5.a.**?

3.3 Où l'on prouve que $d \geqslant k-1$

Soit $M_1M_2\cdots M_k$ un polygone régulier de centre O. On suppose dans cette question qu'il existe un polynôme P, de degré d, dont la courbe contient les points $M_1, M_2, \dots, M_k$. On souhaite alors démontrer que $d \geqslant k-1$.
Pour tout i, on note $\left(x_i, y_i\right)$ les coordonnées de M_i dans le repère $\mathscr{R}$.

6. a. Pourquoi peut-on supposer que x_1 est inférieur ou égal à $x_2, x_3, \dots, x_k$ et que $y_1 \leqslant 0$?

b. Démontrer que les abscisses x_i sont deux à deux distinctes et que les ordonnées y_i sont non nulles.

c. Démontrer qu'il existe un nombre réel $R > 0$ et un nombre réel θ appartenant à l'intervalle $]0, \pi/k[$ tels que $x_1 = -R\cos(\theta)$ et $y_1 = -R\sin(\theta)$.

d. Démontrer que $x_1 < x_k < x_2 < x_{k-1} < x_3 < x_{k-2} < \cdots$

e. Démontrer que P admet une racine sur chacun des $k-1$ intervalles :

$$]x_1, x_k[\quad , \quad]x_k, x_2[\quad , \quad]x_2, x_{k-1}[\quad , \quad]x_{k-1}, x_3[\quad , \quad]x_3, x_{k-2}[\quad , \dots$$

f. En conclure que $d \geqslant k-1$.

3.4 Où l'on prouve que tout entier $d \geqslant k-1$ convient

On suppose dans cette partie que les abscisses x_i sont deux à deux distinctes et on veut démontrer que, pour tout entier $d \geqslant k-1$, il existe un polynôme de degré d dont la courbe contient les points $M_1, M_2, \dots, M_k$.

7. Soient a et b deux réels. Dans le repère $\mathscr{R}$, on considère les points :

$$A(\cos(a), \sin(a)) \quad , \quad B(\cos(a+b), \sin(a+b)) \quad \text{et} \quad C(-\sin(a), \cos(a))$$

a. Démontrer que le repère $\mathscr{R}' = (O; \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC})$ est orthonormé.

b. Quelles sont les coordonnées du point B dans le repère $\mathscr{R}'$?

c. En déduire que :

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b);$$
$$\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b).$$

8. On considère la suite de polynômes définie par $T_0 : x \mapsto 1$, $T_1 : x \mapsto x$ et

$$T_{n+2} : x \mapsto 2xT_{n+1}(x) - T_n(x)$$

pour tout entier $n \geqslant 0$.

a. Démontrer que $T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$ pour tout entier $n \geqslant 0$ et tout réel θ.

b. Soit θ un réel, et soient $\ell \geqslant 1$ et $j \geqslant 0$ deux entiers. Démontrer que :

$$T_{\ell-1}\left(\cos\left(\theta + \frac{2j\pi}{\ell}\right)\right) - \cos(\ell\theta)\cos\left(\theta + \frac{2j\pi}{\ell}\right) = \sin(\ell\theta)\sin\left(\theta + \frac{2j\pi}{\ell}\right)$$

c. Démontrer que, pour tout entier $d \geqslant k-1$, il existe un polynôme de degré d dont la courbe contient les points $M_1, M_2, \dots, M_k$.