∽ Baccalauréat Première Métropole-La Réunion ∾
série générale e3c Corrigé du n° 12 année 2020

Calculatrice autorisée

Exercice 1 **5 points**

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple (QCM). Pour chaque question, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Une bonne réponse rapporte un point. Une mauvaise réponse, une réponse multiple ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point.
Relevez sur votre copie le numéro de la question ainsi que la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

Question 1

Quelle est la forme factorisée de $f(x) = 0,5(x-2)^2 - 8$?

a. $0,5x^2 - 2x - 6$	**b.** $0,5(x+10)(x-6)$
c. $0,5(x-6)(x+2)$	**d.** $0,5(x-10)(x+6)$

$f(x) = 0,5(x-2)^2 - 8 = 0,5(x-2)^2 - 0,5 \times 16 = 0,5\left[(x-2)^2 - 16\right] = 0,5(x-2+4)(x-2-4) = 0,5(x+2)(x-6)$.

Question 2

(u_n) est une suite arithmétique de raison $r = 0,5$ telle que $u_{10} = -4$. Quelle est la valeur du terme u_2 ?

a. 8	**b.** 0	**c.** -10	**d.** -8

On sait que $u_n = u_0 + nr$, donc en particulier $u_{10} = u_0 + 10 \times 0,5$, donc $-4 = u_0 + 5 \iff u_0 = -9$.
Alors $u_2 = u_0 + 2r = -9 + 1 = -8$.

Question 3

Soit la fonction f définie pour tout $x \neq -2$ par : $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+2}$.
Parmi les expressions suivantes, laquelle définit la dérivée f' de la fonction f sur $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$?

a. $f'(x) = -\dfrac{5}{(x+2)^2}$	**b.** $f'(x) = \dfrac{3}{(x+2)^2}$	**c.** $f'(x) = \dfrac{5}{(x+2)^2}$	**d.** $f'(x) = 2$

Pour $x \neq -2$, f est dérivable et $f'(x) = \dfrac{2(x+2) - (2x-1)}{(x+2)^2} = \dfrac{2x+4-2x+1}{(x+2)^2} = \dfrac{5}{(x+2)^2}$.

Question 4

On se place dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$. Laquelle de ces équations est une équation cartésienne de la droite Δ, de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$ et passant par le point $\mathrm{A}(-1\,;\,3)$?

a. $2x - y + 1 = 0$	**b.** $x + 2y + 1 = 0$	**c.** $-x + 2y - 7 = 0$	**d.** $-2x - y + 1 = 0$

Une équation de la droite Δ est $2x+y+c = 0$ et comme $\mathrm{A}(-1\,;\,3) \in \Delta \iff -2+3+c = 0 \iff c = -1$, une équation de Δ est $2x + y - 1 = 0$. (ou $-2x - y + 1 = 0$.)

Question 5

On se place dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$. Parmi ces propositions, quelle est l'équation cartésienne du cercle de centre $\mathrm{A}(2\,;\,4)$ et de rayon 3 ?

a. $(x-2)^2 + (y-4)^2 = 3$	**b.** $(x+2)^2 + (y+4)^2 = 9$
c. $x^2 + y^2 - 4x - 8y + 11 = 0$	**d.** $x^2 + y^2 + 11 = 0$

$M(x\,;\,y) \in C \iff \text{A}M^2 = 3^2 \iff (x-2)^2+(y-4)^2 = 9 \iff x^2+y^2-4x-8y+11 = 0.$

Exercice 2 **5 points**

Aujourd'hui les chardons (une plante vivace) ont envahi 300 m^2 des champs d'une région. Chaque semaine, la surface envahie augmente de 5 % par le développement des racines, auquel s'ajoutent 15 m^2 suite à la dissémination des graines.
Pour tout entier naturel n, on note u_n la surface envahie par les chardons, en m^2, après n semaines ; on a donc $u_0 = 300\ \left(\text{m}^2\right)$.

1. **a.** Calculer u_1 et u_2.

- $u_1 = 300 \times 1,05 + 15 = 315 + 15 = 330$;
- $u_2 = 330 \times 1,05 + 15 = 346,5 + 15 = 361,5$.

b. Montrer que la suite (u_n) ainsi définie, n'est ni arithmétique ni géométrique.

- $u_1 - u_0 = 30$ et $u_2 - u_1 = 31,5$: la suite n'est pas arithmétique.
- $\dfrac{u_1}{u_0} = \dfrac{330}{300} = 1,1$ et $\dfrac{u_2}{u_1} = \dfrac{361,5}{330} \approx 1,95$: la suite n'est pas géométrique.

On admet dans la suite de l'exercice que, pour tout entier naturel n,
$u_{n+1} = 1,05u_n + 15$.

2. On considère la suite (v_n), définie pour tout entier naturel n, par : $v_n = u_n + 300$.

a. Calculer v_0, puis montrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $q = 1,05$.

- $v_0 = u_0 + 300 = 300 + 300 = 600$.
- $v_= u_n + 300 = 1,05u_n + 15 + 300 = 1,05u_n + 315 = 1,05u_n + 1,05 \times 300 = 1,05\,(u_n + 300) = 1,05v_n$.

b. Pour tout entier naturel n, exprimer v_n en fonction de n, puis montrer que $u_n = 600 \times 1,05^n - 300$.

L'égalité $v_{n+1} = 1,05v_n$ vraie pour tout naturel n, montre que la suite (v_n) est géométrique de raison $q = 1,05$ de premier terme 600.

On sait qu'alors quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $v_n = 600 \times 1,05^n$.

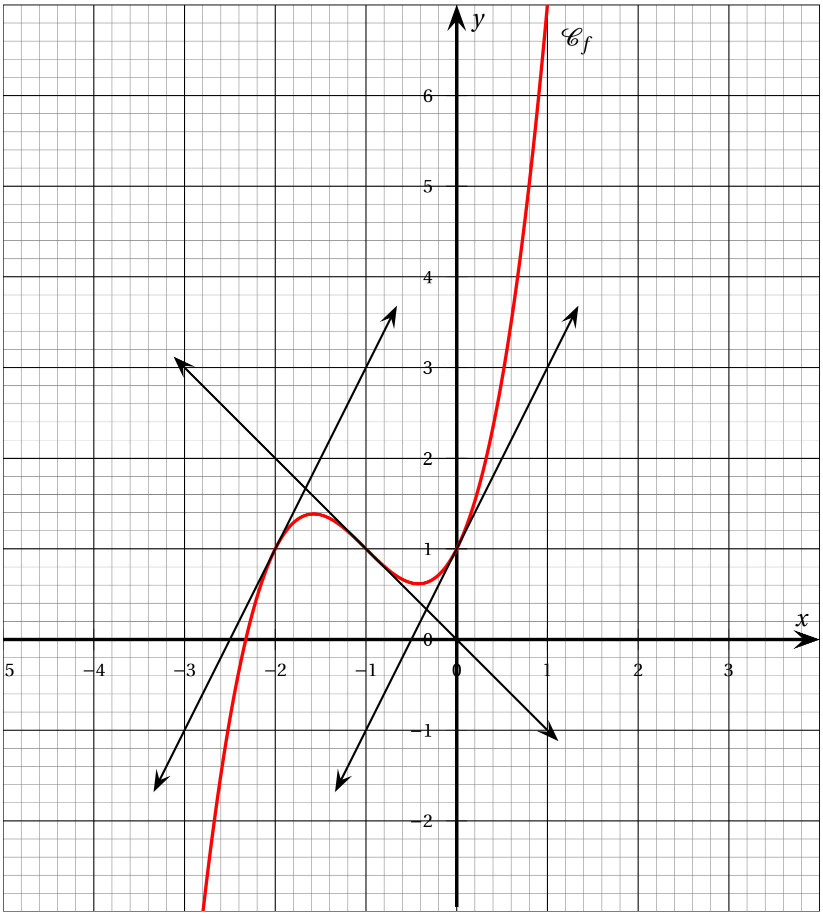
3. Est-il correct d'affirmer que la surface envahie par les chardons aura doublé au bout de 8 semaines ? Justifier la réponse.

On a $v_8 = 600 \times 1,05^8 \approx 886,473$.

Or $v_8 = u_8 + 300 \iff u_8 = v_8 - 300 \approx 886,473 - 300 \approx 536,5$ soit moins du double de la surface initiale.

Exercice 3 **5 points**

Dans la figure ci-dessous, on a tracé $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ ainsi que les tangentes à $\mathscr{C}_f$ aux points d'abscisses -2, -1 et 0.



1. Recopier sur la copie en le complétant le tableau de valeurs ci-dessous.

x	-1	0
$f(x)$	1	1
$f'(x)$	-1	2

On admet que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^3 + 3x^2 + 2x + 1.$$

2. **a.** Calculer $f'(x)$, pour tout réel x.
On a sur $\mathbb{R}$, $f'(x) = 3x^2 + 6x + 2$.

b. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $f'(x) = 0$.
$f'(x) = 0 \iff 3x^2 + 6x + 2 = 0$; on a $\Delta = 36 - 24 = 12 = \left(2\sqrt{3}\right)^2 > 0$.
L'équation a donc deux solutions :

$$x_1 = \frac{-6+2\sqrt{3}}{6} = \frac{-3+\sqrt{3}}{3} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-6-2\sqrt{3}}{6} = \frac{-3-\sqrt{3}}{3}.$$

3. Dresser le tableau de variations de la fonction f.

On sait que $f'(x) \geqslant 0$, sauf sur l'intervalle $\left]\dfrac{-3-\sqrt{3}}{3}\,;\,\dfrac{-3+\sqrt{3}}{3}\right[$ où $f'(x) < 0$.

Donc f est croissante sauf sur l'intervalle $\left]\dfrac{-3+\sqrt{3}}{3}\,;\,\dfrac{-3+\sqrt{3}}{3}\right[$ où elle est décroissante.

x	$-\infty$		$\frac{-3-\sqrt{3}}{3}$		$\frac{-3+\sqrt{3}}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$	$1+\frac{2\sqrt{3}}{9}$	$\searrow$	$1-\frac{2\sqrt{3}}{9}$	$\nearrow$	

4. Le point S$(-4\ ;\ -3)$ appartient-il à la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse $x = -2$?

Équation de la tangente au point $(-2\ ;\ f(-2))$.

On a $f(-2) = (-2)^3 + 3 \times (-2)^2 + 2 \times (-2) + 1 = -8 + 12 - 4 + 1 = 1$.

$f'(-2) = 3 \times (-2)^2 + 6 \times (-2) + 2 = 2$.

La tangente (T) en S a pour équation ;

$M(x\ ;\ y) \in (T) \iff y - f(-2) = f'(-2)(x - (-2)) \iff y - 1 = 2(x+2) \iff y = 2x + 4 + 1 \iff y = 2x + 5$.

Donc S$(-4\ ;\ -3) \in (T) \iff -3 = 2 \times (-4) + 5 \iff -3 = -8 + 5$ qui est vraie.

Exercice 4 **5 points**

Une étude statistique menée lors des entraînements montre que, pour un tir au but, Karim marque avec une probabilité de $0,7$.

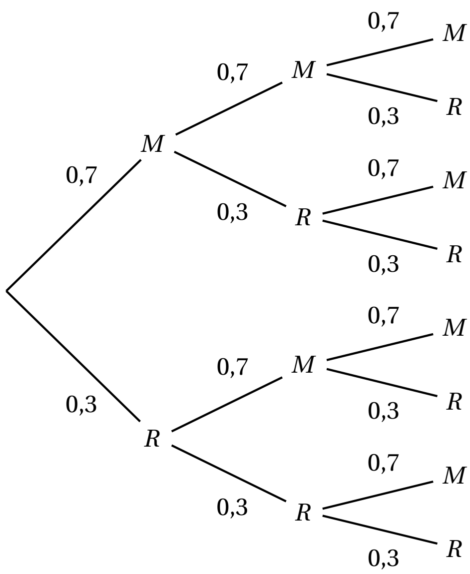
Karim effectue une série de 3 tirs au but. Les deux issues possibles après chaque tir sont les évènements :

- M : « Karim marque un but » ;
- R : « Karim rate le tir au but ».

On admet que les tirs au but de Karim sont indépendants.

1. On note X la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre total de buts marqués à l'issue de cette série de tirs par Karim.

a. Réaliser un arbre pondéré permettant de décrire toutes les issues possibles.



b. Déterminer la loi de probabilité de X.

X peut prendre les valeurs 0, 1, 2 et 3.

X	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	0,027	0,189	0,441	0,343

c. Calculer l'espérance $E(X)$ de la variable aléatoire X.

On a $E(X) = 0 \times 0,027 + 1 \times 0,189 + 2 \times 0,441 + 3 \times 0,343 = 0,189 + 0,882 + 1,029 = 2,100$.

Sur un grand nombre de tirs Karim en réussira 21 sur 30.

2. On propose à un spectateur le jeu suivant : il mise 15 € avant la série de tirs au but de Karim ; chaque but marqué par Karim lui rapporte 6 €, et chaque but manqué par Karim ne lui rapporte rien.

On note Y la variable aléatoire qui prend pour valeur le gain algébrique du spectateur, c'est-à-dire la différence entre le gain total obtenu et la mise engagée.

a. Exprimer Y en fonction de X.

On a $Y = 6X - 15$. Les valeurs de Y sont donc : -15, -9, -3 et 3.

b. Calculer l'espérance $E(Y)$ de la variable aléatoire Y.

Interpréter ce résultat dans le contexte de l'énoncé.

On a donc $E(Y) = -15 \times 0,027 - 9 \times 0,189 - 3 \times 0,441 + 3 \times 0,343 =$

$-0,405 - 1,323 - 1,701 - 1,323 + 1,029 = -2,4$, soit $-2,40$ €.

Cela signifie qu'en moyenne sur un grand nombre de tirs le spectateur perdra 2,40 € par série de trois tirs. Le jeu est inéquitable.