Baccalauréat Première Métropole-La Réunion
série générale e3c Corrigé du nº 13 année 2020

Exercice 1 **5 points**

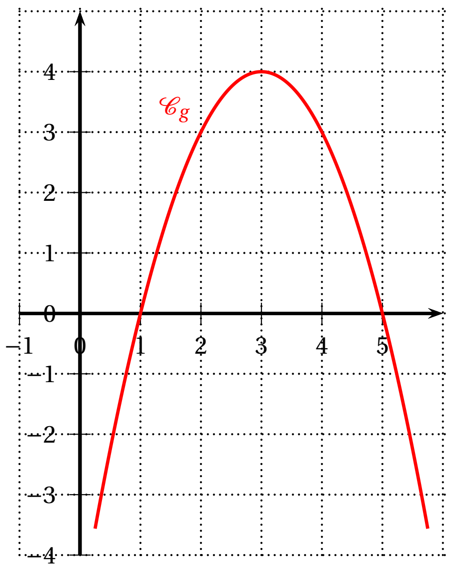
Question 1

Soit a, b et c trois réels tels que $a \neq 0$ et soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = ax^2 + bx + c.$$

Soit Δ son discriminant.
La représentation graphique de la fonction g dans un repère orthonormé est donnée ci-contre.
Alors on peut affirmer que :

a. $a > 0$ et $\Delta > 0$
b. $a > 0$ et $\Delta < 0$
c. $a < 0$ et $\Delta > 0$
d. $a < 0$ et $\Delta < 0$



La parabole a sa concavité vers le bas donc $a < 0$ et l'équation $g(x) = 0$ a deux solutions distinctes donc $\Delta > 0$.

Question 2

On considère la fonction f dont la fonction dérivée est la fonction g considérée dans la question 1.
Le tableau des variations de f est :

a.

x	$-\infty$	3	$+\infty$
Variations de f	↗		↘

b.

x	$-\infty$	3	$+\infty$
Variations de f	↘		↗

c.

x	$-\infty$	1	5	$+\infty$
Variations de f	↘	↗	↘	

d.

x	$-\infty$	1	5	$+\infty$
Variations de f	↗	↘	↗	

La dérivée est négative sauf sur l'intervalle $[1~;~5]$; la fonction est donc décroissante puis croissante sur $[1 ; 5]$ et ensuite décroissante. Réponse **c.**

Question 3

On considère à nouveau la fonction f dont la fonction dérivée est la fonction g considérée dans la question 1. On sait de plus que $f(3) = 7$.
La tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 3 a pour équation réduite :

a. $y = 4$	**b.** $y = 4x + 3$	**c.** $y = 4x + 7$	**d.** $y = 4x - 5$

La tangente au point d'abscisse 3 a pour équation :
$y - f(3) = f'(3)(x-3)$; avec $f(3) = 7$ et $f'(3) = g(3) = 4$, une équation de la tangente est :
$y - 7 = 4(x-3)$ ou $y = 7 + 4x - 12$ et enfin $y = 4x - 5$.

Question 4

Dans un repère orthonormé, on considère les points A(5 ; −1), B(3 ; 2) et C(1 ; −3).
Une équation cartésienne de la droite perpendiculaire à (AB) et passant par C est :

a. $-2x+3y+11=0$	**b.** $3x-2y-9=0$	**c.** $x-3y-10=0$	**d.** $3x+2y+3=0$

Le vecteur $\overrightarrow{\text{AB}}\binom{-2}{3}$ est normal à tout vecteur directeur de la droite perpendiculaire. Une équation de cette droite est donc :
$-2x+3y+c=0$ et comme le couple $(1\;;\;-3)$ vérifie cette équation on a $-2-9+c=0 \iff c=11$.
On a finalement $-2x+3y+11=0$.

Question 5

Dans un repère orthonormé, on considère les points A(5 ; −1), B(3 ; 2) et C(1 ; −3).
Une mesure, arrondie au degré, de l'angle $\widehat{\text{ABC}}$, est :

a. 11	**b.** 25	**c.** 55	**d.** 88

Par définition du produit scalaire :
$\overrightarrow{\text{BA}}\cdot\overrightarrow{\text{BC}} = \text{BA}\times\text{BC}\times\cos\left(\overrightarrow{\text{BA}}\;;\;\overrightarrow{\text{BC}}\right)$,
ce qui donne avec $\overrightarrow{\text{BA}}\binom{2}{-3}$, $\overrightarrow{\text{BC}}\binom{-2}{-5}$, $\text{BA}^2 = 4+9 = 13$, donc $\text{BA} = \sqrt{13}$; $\text{BC}^2 = 4+25 = 29$, donc BC= $\sqrt{29}$;
$-4+15 = \sqrt{13}\times\sqrt{29}\times\cos\left(\overrightarrow{\text{BA}}\;;\;\overrightarrow{\text{BC}}\right)$, d'où :
$\cos\left(\overrightarrow{\text{BA}}\;;\;\overrightarrow{\text{BC}}\right) = \dfrac{11}{\sqrt{13\times29}}$.
La calculatrice donne $\left(\overrightarrow{\text{BA}}\;;\;\overrightarrow{\text{BC}}\right)\approx 55,49°$, soit au degré près 55°.

Exercice 2 **5 points**

En 2000, la production mondiale de plastique était de 187 millions de tonnes. On suppose que depuis 2000, cette production augmente de 3,7 % chaque année.
On modélise la production mondiale de plastique, en millions de tonnes, produite en l'année $2000+n$ par la suite de terme général u_n où n désigne le nombre d'année à partir de l'an 2000.
Ainsi, $u_0 = 187$.

1. Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on donnera la raison.
   Ajouter 3,7 %, c'est multiplier par $1+\dfrac{3,7}{100} = 1+0,037 = 1,037$.
   On a donc pour tout naturel n, $u_{n+1} = 1,037u_n$: la suite (u_n) est une suite géométrique de premier terme $u_0 = 187$ et de raison $1,037$.
2. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, exprimer u_n en fonction de n.
   On sait qu'alors qu'avec q comme raison $u_n = u_0\times q^n$, que que soit le naturel n.
   Ici $u_n = 187\times1,037^n$.
3. Étudier le sens de variation de la suite (u_n).
   $u_{n+1} = 1,037u_n \iff \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1,037 > 1$: la suite est donc croissante.
4. Selon cette estimation, calculer la production mondiale de plastique en 2019. Arrondir au million de tonnes.
   2019 correspond à $n = 19$, donc $u_{19} = 187\times1,037^{19}\approx 372,9$, donc environ 373 millions au million près.

5. Des études montrent que 20 % de la quantité totale de plastique se retrouve dans les océans, et que 70 % de ces déchets finissent par couler.

Montrer que la quantité totale, arrondie au million de tonnes, de déchets flottants sur l'océan dus à la production de plastique de 2000 à 2019 compris est de 324 millions de tonnes.

Sur les 20 % de plastiques allant à la mer, 30 % flottaient en 2000, soit : 6 %.

La production totale de plastiques de 2000 à 2019 est :

$S_{2019} = u_0 + 1,037u_0 + \ldots + 1,37^{19}u_0$, donc :

$1,037S_{2019} = 1,037u_0 + 1,037^2u_0 + \ldots + 1,037^{19}u0 + 1,037^{20}u_0$ et par différence :

$0,037S_{2019} = 1,037^{n+1}u_0 - u_0$, soit finalement :

$S_{2019} = u_0\dfrac{1,037^{20}-1}{0,037} = 187 \times \dfrac{1,037^{20}-1}{0,037} \approx 5\,398,32$. Restent en surface :

$5\,398,32 \times 0,20 \times 0,30 \approx 323,89$, soit 324 millions au million près.

Exercice 3 **5 points**

Un cafetier propose à ses clients des cookies au chocolat ou aux noisettes en s'approvisionnant dans trois boulangeries. Un client prend un cookie au hasard.

On note :

C l'évènement « le cookie est au chocolat »,

N l'évènement « le cookie est aux noisettes »,

B_1 l'évènement « le cookie provient de la boulangerie 1 »,

B_2 l'évènement « le cookie provient de la boulangerie 2 »,

B_3 l'évènement « le cookie provient de la boulangerie 3 ».

On suppose que :

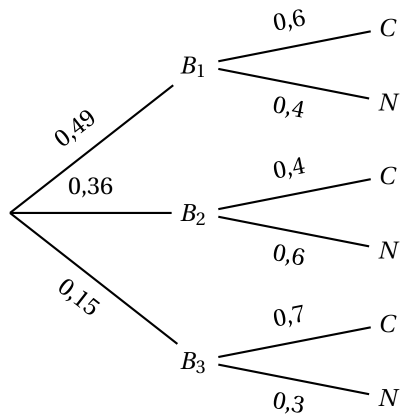
— la probabilité que le cookie provienne de la boulangerie 1 est de 0,49 ;

— la probabilité que le cookie provienne de la boulangerie 2 est de 0,36 ;

— $P_{B_2}(C) = 0,4$ où $P_{B_2}(C)$ est la probabilité conditionnelle de C sachant B_2 ;

— la probabilité que le cookie soit aux noisettes sachant qu'il provient de la troisième boulangerie est de 0,3.

L'arbre pondéré ci-dessous correspond à la situation et donne une information supplémentaire : le nombre 0,6 sur la branche de B_1 à C.



1. Exprimer par une phrase l'information donnée par le nombre 0,6 sur la branche de B_1 à C.

« La probabilité que le cookie soit au chocolat, sachant qu'il provient de la boulangerie 1 est égale à 0,6 ».

2. Recopier et compléter sur la copie l'arbre pondéré ci-dessus.

Voir ci-dessus

3. Définir par une phrase l'évènement $B_1 \cap C$ et calculer sa probabilité.

$B_1 \cap C$ est l'évènement : « le cookie vient de la boulangerie 1 et est au chocolat ».

4. Montrer la probabilité $P(C)$ d'avoir un cookie au chocolat est égale à 0,543.

D'après la loi des probabilités totales :

$P(C) = P(B_1 \cap C) + P(B_2 \cap C) + P(B_3 \cap C) = P(B_1) \times P_{B_1}(C) + P(B_2) \times P_{B_2}(C) + P(B_3) \times P_{B_3}(C) = 0,49 \times 0,6 + 0,36 \times 0,4 + 0,15 \times 0,7 = 0,294 + 0,144 + 0,105 = 0,543$.

5. Calculer la probabilité d'avoir un cookie provenant de la boulangerie 2 sachant qu'il est au chocolat. On donnera le résultat arrondi au millième.
Il faut trouver $P_C(B_2) = \dfrac{P(C \cap B_2}{P(C)} = \dfrac{0,144}{0,543} = \dfrac{144}{543} \approx 0{,}265\,1$, soit 0,265 au millième près.

Exercice 4 **5 points**

1. Étudier le signe de la fonction P définie sur $\mathbb{R}$ par $P(x) = x^2 + 4x + 3$.
$P(x) = x^2 + 4x + 3 = (x+2)^2 - 4 + 3 = (x+2)^2 - 1 = (x+2+1)(x+2-1) = (x+3)(x+1)$.
On sait que $P(x) \geqslant 0$, sauf sur l'intervalle $]-3\,;\,-1[$ $(-3$ et (-1) étant les racines du trinôme..

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]-2\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 1}{x+2}$$

et on note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan. On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $]-2\,;\,+\infty[$.

2. Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $]-2\,;\,+\infty[$,

$$f'(x) = \frac{P(x)}{(x+2)^2}$$

où f' est la fonction dérivée de f.
Pour $x > -2$, f est dérivable et sur $]-2\,;\,+\infty[$:
$f'(x) = \dfrac{(2x+1)(x+2) - \left(x^2 + x - 1\right)}{(x+2)^2} = \dfrac{2x^2 + 4x + x + 2 - x^2 - x + 1}{(x+2)^2} = \dfrac{x^2 + 4x + 3}{(x+2)^2} = \dfrac{P(x)}{(x+2)^2}$.

3. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $]-2\,;\,+\infty[$ et construire le tableau de variations de la fonction f sur $]-2\,;\,+\infty[$.
Comme $(x+2)^2 > 0$ sur $]-2\,;\,+\infty[$, le signe de $f'(x)$ est celui du numérateur $P(x)$ étudié à la question **1.**
Donc sur $]-2\,;\,-1[$, $f'(x) < 0$: la fonction est décroissante et sur $]-1\,;\,+\infty[$ la fonction f est croissante.

x	-2		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	-1	$\nearrow$	

4. Donner le minimum de la fonction f sur $]-2\,;\,+\infty[$ et la valeur pour laquelle il est atteint (on donnera les valeurs exactes).
D'après la question précédente $f(-1) = \dfrac{1-1-1}{-1+2} = -1$ est le minimum de la fonction f sur $]-2\,;\,+\infty[$.

5. Déterminer le coefficient directeur de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 2.
Le coefficient directeur de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 2 est le nombre dérivé $f'(2) = \dfrac{4+8+3}{(2+2)^2} = \dfrac{15}{16} = 0{,}937\,5$.