൷ ÉPREUVES COMMUNES DE CONTRÔLE CONTINU n° 2 ൸
Corrigé du sujet 17 mai 2020

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES - CLASSE : Première Générale

EXERCICE 1 **(5 points)**

Question 1

On a $E(X) = -5\times 0,71 + 0\times 0,03 + 10\times 0,01 + 20\times \times 0,05 + 50\times 0,2 = -3,55 + 0,1 + 1 + 10 = 7,55$.

Question 2

Si C est le cercle on a :
$M(x\,;\,y) \in C \iff \text{A}M^2 = 9^2 \iff (x-(-2))^2 + (y-4)^2 = 81 \iff (x+2)^2 + (y-4)^2 = 81$.

Question 3

La parabole est tournée vers le bas, donc $a < 0$:
$f(0) = c > 0$;
Le trinôme a deux racines, donc $\Delta > 0$.

Question 4

Réponse : algorithme **d.**

Question 5

La suite (u_n) définie par $u_0 = -2$ et $u_{n+1} = 2u_n - 5$ est :
O a $u_0 = -2$, $u_1 = -9$ et $u_2 = -23$.
- $u_1 - u_0 = -7$ et $u_2 - u_1 = 14$: la différence de deux termes consécutifs n'est pas constante : ce n'est pas une suite arithmétique.
- $\dfrac{u_1}{u_0} = 4,5$ et $\dfrac{u_2}{u_1} = \dfrac{23}{9} \approx 2,56$: le quotient de deux termes consécutifs n'est pas constant : ce n'est pas une suite géométrique.

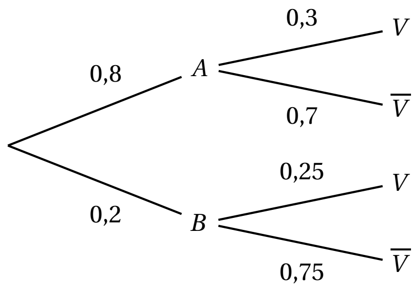
EXERCICE 2 **5 points**

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x+1}$$

1. Puisque $x > -1$, alors $x + 1 > 0$ f est donc une fonction quotient dérivable sur $]-1\,;\,+\infty[$ et
$f'(x) = \dfrac{2x(x+1) - 1\left(x^2+1\right)}{(x+1)^2} = \dfrac{2x^2+2x-x^2-1}{(x+1)^2} = \dfrac{x^2+2x-1}{(x+1)^2}$.
2. Comme, quel que soit le réel $x \in]-1\,;\,+\infty[$, $(x+1)^2 > 0$, le signe de $f'(x)$ est celui du numérateur le trinôme x^2+2x-1.
Pour celui-ci $\Delta = 4 + 4 = 4\times 2 = \left(2\sqrt{2}\right)^2$. Le trinôme a donc deux racines :
$x_1 = \dfrac{-2+2\sqrt{2}}{2} = -1 + \sqrt{2}$, $x_2 = \dfrac{-2-2\sqrt{2}}{2} - 1 + \sqrt{2}$.
On sait que le trinôme et donc la dérivée sont positifs, sauf sur l'intervalle $\left]-1-\sqrt{2}\,;\,-1+\sqrt{2}\right[$.
Comme $-1-\sqrt{2} \approx -2,414$, la dérivée est négative sur $\left]-1\,;\,-1+\sqrt{2}\right[$ et positive sur $\left]-1+\sqrt{2}\,;\,+\infty\right[$.
La fonction est donc décroissante sur $\left]-1\,;\,-1+\sqrt{2}\right[$ et croissante sur $\left]-1+\sqrt{2}\,;\,+\infty\right[$.
3. On sait que l'équation réduite de la tangente est : $y - f(0) = f'(0)(x-0)$.
Avec $f(0) = 1$ et $f'(0) = -1$, on obtient :
$M(x\,;\,y) \in \text{Y} \iff y - 1 = -x(-0) \iff y = -x + 1$.
4. On étudie la fonction différence entre la fonction f et la gonction g telle que $g'x) = x$, soit :
$d(x) = \dfrac{x^2+1}{x+1} - x = \dfrac{x^2+1-x(x+1)}{x+1} = \dfrac{x^2+1-x^2-x}{x+1} = \dfrac{-x+1}{x+1}$.
Or le signe de ce quotient est le même que le signe du produit $(-x+1)(x+1)$.
Or on sait que ce trinôme est négatif sauf entre ses racines -1 et 1 où il est positif.
Donc sur $]-1\,;\,1[$, $d(x) > 0$: la courbe est au dessus de la droite d'équation $y = x$;
Sur $]1\,;\,+\infty[$, $d(x) < 0$: la courbe est au dessous de la droite.

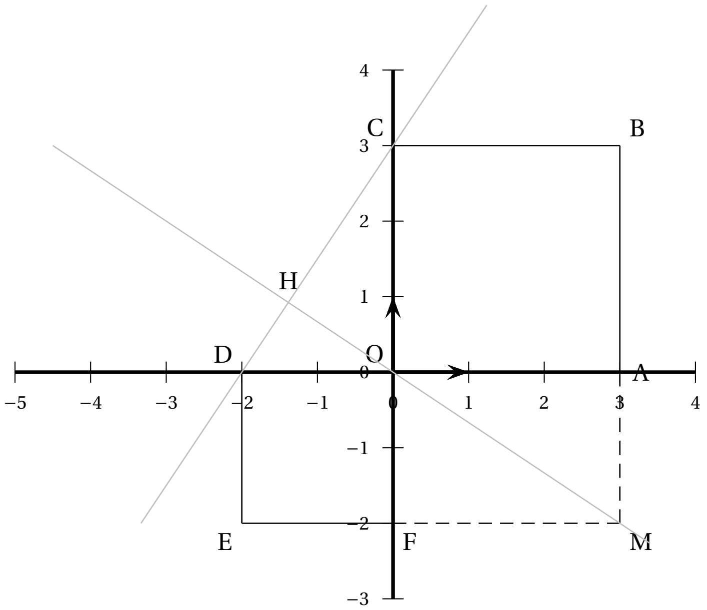
EXERCICE 3 **5 points**

On peut dresser un arbre pondéré : avec $\dfrac{4}{5} = \dfrac{8}{10} = 0,8$:



1. $p_B\left(\overline{V}\right) = 0,75$ signifie que la probabilité de perdre contre le monstre B est égale à 0,75.
2. On a $p(B \cap V) = p(B) \times p_B(V) = 0,2 \times 0,25 = 0,05 = \dfrac{25}{100} = \frac{1}{20}$.
3. On a de même : $p(A \cap V) = p(A) \times p_A(V) = 0,8 \times 0,3 = 0,24 = \dfrac{24}{100}$.
   D'après la loi des probabilités totales :
   $p(V) = p(A \cap V) + p(B \cap V) = 0,24 + 0,05 = 0,29$
4. Il faut trouver $p_V(B) = \dfrac{p(V \cap B)}{p(V)} = \dfrac{p(B \cap V)}{p(V)} = \dfrac{0,05}{0,29} = \dfrac{5}{29} \approx 0,172$.

EXERCICE 4 **5 points**



OABC et ODEF sont des carrés de côtés respectifs 3 et 2. OAMF est un rectangle. On note H le projeté orthogonal du point M sur la droite (DC).
Dans cet exercice, on pourra, si on le souhaite, se placer dans le repère $\left(\text{O}, \frac{1}{3}\overrightarrow{\text{OA}}, \frac{1}{3}\overrightarrow{\text{OC}}\right)$.

Avec le repère choisi, on a :
M(3 ; −2), D(−2 ; 0), C(0 ; 3).

1. On a $\overrightarrow{\text{O}M}\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\text{DC}}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{\text{OM}} \cdot \overrightarrow{\text{DC}} = 6 - 6 = 0$: les vecteurs sont orthogonaux, donc les droites (OM) et (DC) sont perpendiculaires (autrement dit : dans le triangle CDM (MH) est la hauteur issue de M.
2. On a $\overrightarrow{\text{CD}}\begin{pmatrix}-2\\-3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\text{CM}}\begin{pmatrix}3\\-5\end{pmatrix}$, d'où : $\overrightarrow{\text{CD}} \cdot \overrightarrow{\text{CM}} = -6 + 15 = 9$.
3. On sait que $\overrightarrow{\text{CD}} \cdot \overrightarrow{\text{CM}} = \overrightarrow{\text{CD}} \cdot \overrightarrow{\text{CH}} = \text{CD} \times \text{CH}$.
   Or dans le triangle rectangle en O, OCD, $\text{CD}^2 = \text{OD}^2 + \text{OC}^2 = 2^2 + 3^2 = 4 + 9 = 13$, d'où $\text{CD} = \sqrt{13}$.
   On a donc $\overrightarrow{\text{CD}} \cdot \overrightarrow{\text{CM}} = 9 = \text{CD} \times \text{CH} = \sqrt{13} \times \text{CH}$.
   Donc $\text{CH} = \dfrac{9}{\sqrt{13}} \approx 2,496$.