∽ ÉPREUVES COMMUNES DE CONTRÔLE CONTINU n° 2 ∾
Corrigé du sujet 18 – mai 2020

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES - CLASSE : Première Générale

EXERCICE 1 **5 points**

1. On a $p(A\cup B) = p(A)+p(B)-p(A\cap B)$: comme A et B sont indépendants $p(A\cap B) = p(A)\times p(B) = 0,2\times 0,5 = 0,1$, donc $p(A\cup B) = p(A)+p(B)-p(A\cap B) = 0,5+0,2-0,1 = 0,6$.
2. Les termes de la somme sont les onze premiers termes de la suite géométrique de premier terme 1 et de raison 1,2 :
   $S = 1+1,2+1,2^2+1,2^3+\cdots+1,2^{10}$ (1), donc
   $1,2S = \quad 1,2+1,2^2+\ldots+1,2^{10}+1,2^{11}$ (2), d'où par différence (2) moins (1) :
   $0,2S = 1,2^{11}-1$ et par conséquent $S = \dfrac{1,2^{11}-1}{0,2} \approx 32,1504$ soit environ 32,15 au centième près.
   $f(x) = x\,\mathrm{e}^{-x}$.
3. $g'(x) = 2\,\mathrm{e}^{x}+(2x-5)\,\mathrm{e}^{x} = \mathrm{e}^{x}(2+2x-5) = \mathrm{e}^{x}(2x-3)$.
4. $\dfrac{\mathrm{e}^3\times\mathrm{e}^{-5}}{\mathrm{e}^2} = \dfrac{\mathrm{e}^{3-5}}{\mathrm{e}^2} = \dfrac{\mathrm{e}^{-2}}{\mathrm{e}^2} = \mathrm{e}^{-2-2} = \mathrm{e}^{-4} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^4}$.

EXERCICE 2 **5 points**

1. **a.** On a entré dans la cellule B3 : =1,05*B2-12
   b. 20 % de 1 000 représentent $0,20\times 1\,000 = 200$ (€). Il faut donc attendre la cinquième année.

On pose (v_n) la suite définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = u_n - 240$.

2. On a pour tout naturel n, $v_{n+1} = u_{n+1}-240 = 1,05u_n-12-240 = 1,05u_n-252 = 1,05\left(u_n-\dfrac{252}{1,05}\right) = 1,05(u_n-240) = 1,05v_n$.
   L'égalité, vraie pour tout naturel n, $v_{n+1} = 1,05v_n$ montre que la suite (v_n) est géométrique de raison 1,05 et de premier terme $v_0 = u_0-240 = 1\,000-240 = 760$.
3. On sait qu'alors pour tout naturel n, $v_n = 760\times 1,05^n$.
   Or $v_n = u_n-240$ entraine que $u_n = v_n+240 = 760\times 1,05^n+240$.
4. Application : pour $n = 20$, $u_{20} = 760\times 1,05^{20}+240 \approx 2\,256,51$.

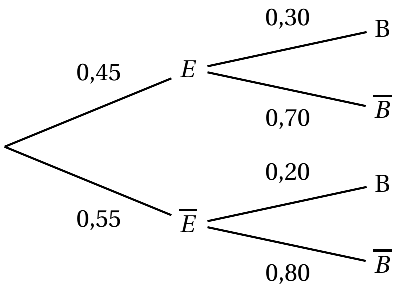
EXERCICE 3 **5 points**

Dans cet exercice toutes les probabilités seront données sous forme décimale, arrondie au millième.

Une entreprise récupère des smartphones endommagés, les répare et les reconditionne afin de les revendre à prix réduit.

— 45 % des smartphones qu'elle récupère ont un écran cassé ;
— parmi les smartphones ayant un écran cassé, 30 % ont également une batterie défectueuse ;
— par contre, seulement 20 % des smartphones ayant un écran non cassé ont une batterie défectueuse.

1. **a.**



b. • $p(E \cap B) = p(E) \times p_E(B) = 0,45 \times 0,30 = 0,135$;

• $p\left(\overline{E} \cap B\right) = p\left(\overline{E}\right) \times p_{\overline{E}}(B) = 0,55 \times 0,20 = 0,11$.

D'après la loi des probabilités totales :

$p(B) = p(E \cap B) + p\left(\overline{E} \cap B\right) = 0,135 + 0,11 = 0,245$.

c. On calcule $p_B(E) = \dfrac{p(B \cap E)}{p(B)} = \dfrac{p(E \cap B)}{p(B)} = \dfrac{0,135}{0,245} \approx 0{,}551\,02$, soit 0,551 au millième près.

2. **a.** Recopier et compléter sur la copie (aucune justification n'est attendue) le tableau suivant pour donner la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

x_i	20	50	60	90
$p(X = x_i)$	0,44	0,315	0,11	0,135

b. L'espérance mathématique de la variable aléatoire est égale à :

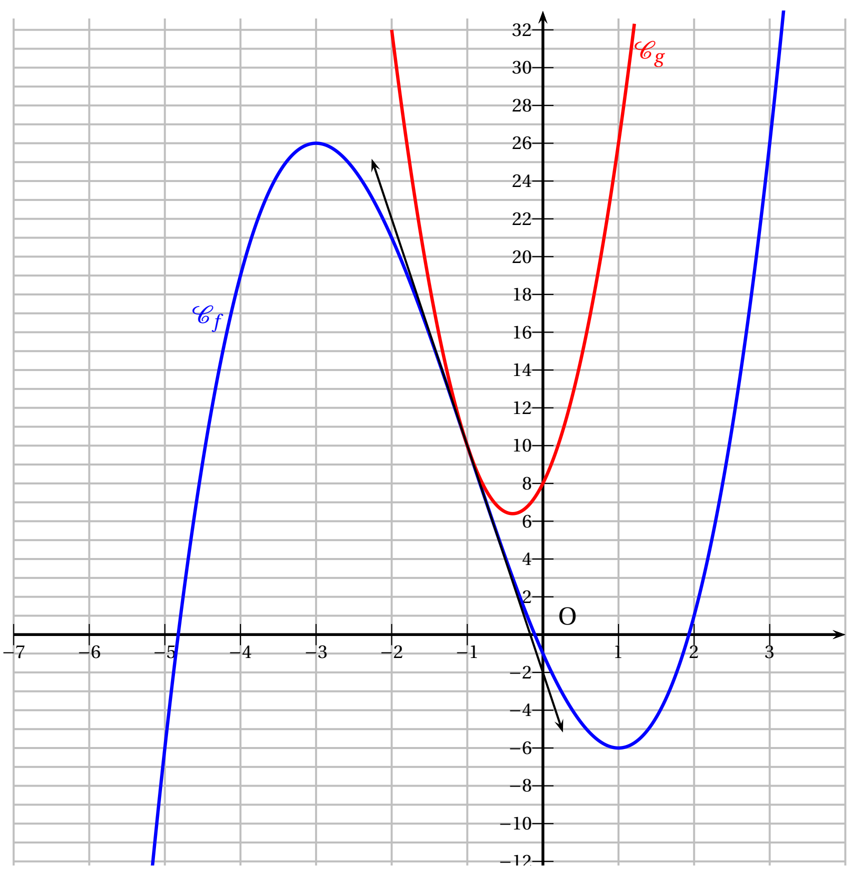
$E(X) = 20 \times 0,44 + 50 \times 0,315 + 60 \times 0,11 + 90 \times 0,135 = 8,8 + 15,75 + 6,6 + 12,15 = 45,30$.

Ceci représente le coût moyen de réparation par téléphone.

Donc pour 500 téléphones la dépense de l'entreprise sera environ de :

$500 \times 45,30 = 21\,650$ (euros).

EXERCICE 4 — 5 points



1.

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 1.$$

a. $f'(x) = 3x^2 + 6x - 9 = 3\left(x^2 + 2x - 3\right)$.

b. Le signe de $f'(x)$ est celui du trinôme $x^2 + 2x - 3$.
Pour celui-ci : $\Delta = 3^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 4 + 12 = 16 = 4^2 > 0$. Le trinôme a donc deux racines :

$$x_1 = \frac{-2+4}{2} = 1 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-2-4}{2} = -3.$$

On sait que ce trinôme est positif sauf entre les racines donc sur l'intervalle $]-3\,;\,1[$ où il est négatif.
Il en résulte que la fonction f est croissante sauf sur l'intervalle $]-3\,;\,1[$ où elle est décroissante.
Avec $f(-3) = 26$ et $f(1) = -6$ on a le tableau :

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		↗	26	↘	-6	↗	

c. On sait qu'une équation réduite de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse -1 est :
$y - f(-1) = f'(-1)(x - (-1))$.
Avec $f(-1) = 10$ et $f'(-1) = -12$, l'équation dévient :
$M(x\,;\,y) \in T \iff y - 10 = -12(x+1) \iff y = -12x - 12 + 10 \iff y = -12x - 2$.

2. **a.** La parabole a sa concavité tournée vers le haut : on a donc $a > 0$ (on rappelle que $a \neq 0$).
La parabole n'a pas de point commun avec l'axe des abscisses, donc le trinôme n'a pas de racines : $\Delta < 0$.

b. Un point est commun si et seulement si ses coordonnées vérifient les équations des deux courbes; il faut donc résoudre l'équation :
$x^3 + 3x^2 - 9x - 1 = 10x^2 + 8x + 8$ ou $x^3 - 7x^2 - 17x - 9 = 0$.
Ceci n'est pas possible mais sur la figure on voit que les deux courbes ont un point commun d'abscisse -1 :

- $f(-1) = 10$;
- $g(-1) = 10 - 8 + 8 = 10$.

De plus $f'(-1) = -12$ et comme $g'(x) = 20x + 8$, on a $g'(-1) = -20 + 8 = -12$.
Au point d'abscisse -1 les deux fonctions ont le même nombre dérivé, donc la même tangente.