∽ Baccalauréat Première Métropole-La Réunion ∾
série générale e3c Corrigé du n° 20 année 2020

Exercice 1 **5 points**

Question 1

Soit ABC un triangle tel que AB = 6, AC = 3 et $\widehat{\text{BAC}} = \dfrac{\pi}{3}$.

On a $\overrightarrow{\text{AB}} \cdot \overrightarrow{\text{AC}} = \text{AB} \times \text{AC} \times \cos \widehat{\text{BAC}} = 6 \times 3 \times \dfrac{1}{2} = 3 \times 3 = 9$.

Question 2

$\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h} = h^2 + 3h - 1$ ou $\dfrac{f(1+h)-f(1)}{(1+h)-1} = h^2 + 3h - 1$.

On a par définition $\lim h \to 0 \dfrac{f(1+h)-f(1)}{(1+h)-1} = f'(1)$ si cette limite existe

Or $\lim h \to 0 h^2 + 3h - 1 = -1$. Donc $f'(1) = -1$ (nombre dérivé de la fonction f en 1.

$f'(1) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} h^2 + 3h - 1 = -1$.

Question 3

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x+2)\text{e}^x$.

f est un produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, donc sur $\mathbb{R}$,
$f'(x) = 1\text{e}^x + (x+2)\text{e}^x = \text{e}^x(1+x+2) = (x+3)\text{e}^x$.

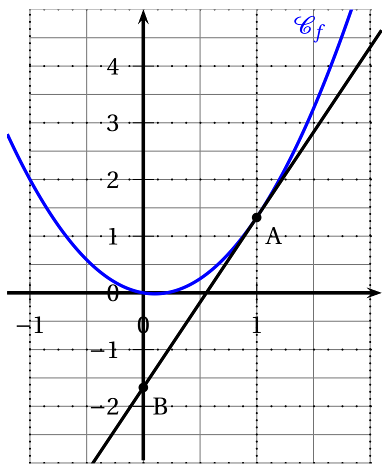
Question 4

Soit f une fonction telle que $f(2) = 5$ et $f'(2) = -1$.
Dans un repère, la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 2 a pour équation :

On sait qu'une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 2 est :
$y - f(2) = f'(2)(x-2)$, soit $y - 5 = -1(x-2)$ ou encore $y = -x + 7$.

Question 5

Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ dont la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ dans un repère est la courbe ci-dessous.



La tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point $\text{A}\left(1\,;\,\dfrac{4}{3}\right)$ passe par le point $\text{B}\left(0\,;\,-\dfrac{5}{3}\right)$.
Alors :

Pour l'équation réduite de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A, l'ordonnée à l'origine est celle de B soit $-\dfrac{5}{3}$ et son coefficient directeur est celle de la droite (AB), soit $\dfrac{-\frac{5}{3}-\frac{4}{3}}{0-1} = \dfrac{-3}{-1} = 3$. On sait que ce coefficient directeur est égal au nombre dérivé $f'(1) = 3$.

Exercice 2 **5 points**

Une entreprise fabrique q milliers d'objets, $q \in [1\ ;\ 20]$. Le coût total de fabrication, exprimé en euros en fonction de q, est donné par l'expression :

$$C(q) = q^3 - 18q^2 + 750q + 200.$$

1. **a.** Calculer le coût total de fabrication de 5 000 objets soit 5 milliers d'objets.
   $C(5) = 5^3 - 18 \times 5^2 + 750 \times 5 + 200 = 3\,625$ (€).

   b. Déterminer le coût moyen de fabrication d'un millier d'objets lorsqu'on fabrique 5 000 objets.
   Le coût moyen de fabrication d'un millier d'objets lorsqu'on fabrique 5 000 objets est donc : $\dfrac{3\,625}{5} = 725$.

2. Le coût moyen $C_M(q)$ de fabrication de q milliers d'objets, exprimé en euros, est donné par l'expression :

$$C_M(q) = \frac{C(q)}{q} = q^2 - 18q + 750 + \frac{200}{q}.$$

   a. On note C'_M la fonction dérivée, sur l'intervalle $[1\,;20]$, de la fonction C_M.
   Montrer que, pour tout $q \in [1\ ;\ 20]$,

$$C'_M(q) = \frac{2(q-10)\left(q^2+q+10\right)}{q^2}$$

   On a sur l'intervalle $[1\,;20]$, $C'_M(x) = 2q - 18 - \dfrac{200}{q^2} = \dfrac{2q^3 - 18q^2 - 200}{q^2}$.
   Or $2(q-10)\left(q^2+q+10\right) = (2q-20)\left(q^2+q+10\right) = 2q^3 + 2q^2 + 20q - 20q^2 - 20q - 200 = 2q^3 - 18q^2 - 200$ soit le numérateur de $C'_M(x)$. Donc :
   pour tout $q \in [1\ ;\ 20]$, $C'_M(q) = \dfrac{2(q-10)\left(q^2+q+10\right)}{q^2}$.

   b. Étudier le signe de C'_M et dresser le tableau de variation de la fonction C_M sur l'intervalle $[1\,;20]$.
   Pour le trinôme $q^2 + q + 10$, on a $\Delta = 1 - 40 = -39$: pas de racines réelles et on sait que le trinôme est positif (signe de 1 coefficient de q^2).
   Comme $q^2 > 0$ sur $[1\,;20]$, le signe de $C'_M(x)$ est celui de $q - 10$.
   Donc sur $[1\,;10]$, $C'_M(x) < 0$: la fonction C'_M est décroissante de $C_M(1) = 1 - 18 + 750 + 200 = 933$ à $C_M(10) = 10^2 - 18 \times 10 + 750 + 20 = 690$.
   Sur $[10\,;20]$, la fonction C_M est croissante de $C_M(10) = 690$ à $C_M(20) = 20^2 - 18 \times 20 + 750 + 10 = 800$.

x	1		10		20
$C'_M(x)$		$-$	0	$+$	
C_M	933	$\searrow$	690	$\nearrow$	800

   c. Quel est le coût moyen minimal et pour quelle quantité d'objets est-il obtenu ?
   On voit sur le tableau que le coût moyen minimal 690 est obtenue lorsque l'entreprise fabrique 10 000 objets.

Exercice 3 **5 points**

La famille A décide de diminuer de 2 % par mois sa quantité de déchets produits par mois à partir du 1er janvier 2020.
Au mois de décembre 2019, elle a produit 120 kg de déchets.

1. Justifier qu'au bout de 2 mois, la famille A aura produit environ 115 kg de déchets.

On admet que la quantité de déchets produits chaque mois conserve la même évolution toute l'année.
On modélise l'évolution de la production de déchets de la famille A par la suite de terme général a_n, où a_n représente la quantité, en kg, de déchets produits par la famille A n mois après décembre 2019.
Ainsi, a_0 représente la quantité de déchets produits durant le mois de décembre 2019, a_1 représente la quantité de déchets produits durant le mois de janvier 2020, etc.

2. **a.** Déterminer la nature de la suite (a_n).

Diminuer de 2 % revient à multiplier par $1 - 0,02 = 0,98$.

On a donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\;a_{n+1} = 0,98a_n$: la suite a_n est une suite géométrique de premier terme $a_0 = 120$ et de raison $0,98$.

b. Pour tout entier naturel n, exprimer a_n en fonction de n.

On sait alors que quel que soit le naturel n, $\;a_n = a_n \times 0,98^n = 120 \times 0,98^n$.

c. Déterminer la quantité totale de déchets que produira la famille A durant l'année 2020.

On rappelle que :

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison q, $q \neq 1$. La somme S de termes consécutifs est égale à $S = u_1 + u_2 + \ldots + u_n = u_1 \times \dfrac{1-q^n}{1-q}$.

En 2020 la famille A produira :

$S_{2020} = a_1 + a_2 + \ldots + a_{12} = 120 \times 0,98 + 120 \times 0,98^2 + \ldots + 120 \times 0,98^{12}$. Or

$0,98S_{2020} = 120 \times 0,98^2 + \ldots + 120 \times 0,98^{12} + 120 \times 0,98^{13}$.

Par différence entre les deux lignes précédentes :

$0,02S_{2020} = 120 \times 0,98 - 120 \times 0,98^{13}$ ou encore :

$0,02S_{2020} = 120 \times 0,98\left(1 - 0,98^{12}\right)$ et

$S_{2020} = \dfrac{120 \times 0,98\left(1 - 0,98^{12}\right)}{0,02} = 49 \times 120\left(1 - 0,98^{12}\right) \approx 1265,8$.

Donc $S_{2020} \approx 1266$ (kg) de déchets en 2020.

On arrondira le résultat à l'unité.

d. On donne le programme ci-dessous.

```
def S(n) :
    U = 120
    S = 0
    for k in range (n) :
        U = 0.98 * U
        S = S + U
    return (S)

```

Que représente le résultat renvoyé par la fonction si on entre l'instruction S(6) ?

S(6) donne la somme $a_1 + a_2 + + \ldots + a_6$ soit la somme des déchets de la famille du premier semestre 2020.

Exercice 4 **5 points**

Pierre joue à un jeu dont une partie est constituée d'un lancer d'une fléchette sur une cible suivi d'un tirage au sort dans deux urnes contenant des tickets marqués « gagnant » ou « perdant » indiscernables.

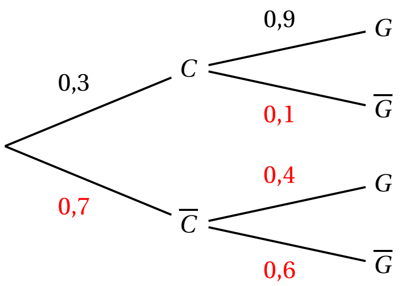
- S'il tire un ticket marqué « gagnant », il pourra recommencer une partie.
- S'il atteint le centre de la cible, Pierre tire un ticket dans l'urne U_1 contenant exactement neuf tickets marqués « gagnant » et un ticket marqué « perdant ».
- S'il n'atteint pas le centre de la cible (donc même s'il n'atteint pas la cible), Pierre tire un ticket dans l'urne U_2 contenant exactement quatre tickets marqués « gagnant » et six tickets marqués « perdant ».

Pierre atteint le centre de la cible avec une probabilité de $0,3$.

On note les évènements suivants :

C : « Pierre atteint le centre de la cible » ;
G : « Pierre tire un ticket lui offrant une autre partie ».

1. Recopier l'arbre pondéré ci-dessous et justifier la valeur $0,9$.
Pierre a atteint le centre donc tire un ticket de l'urne U_1 dans laquelle il y a 9 tickets gagnants sur 10.



2. Compléter sur la copie l'arbre pondéré en traduisant les données de l'exercice.
Voir ci-dessus.

3. Calculer la probabilité de l'évènement $\overline{C} \cap G$.
On a $P\left(\overline{C} \cap G\right) = P\left(\overline{C}\right) \times P_{\overline{C}}(G) = 0,7 \times 0,4 = 0,28$.

4. Montrer que la probabilité qu'à l'issue d'une partie Pierre en gagne une nouvelle est égale à $0,55$.
D'après la loi des probabilités totales, on a :
$P(G) = P(C \cap G) + P\left(\overline{C} \cap G\right) = 0,3 \times 0,9 + 0,28 = 0,27 + 0,28 = 0,55$.

5. Sachant que Pierre a gagné une nouvelle partie, quelle est la probabilité qu'il ait atteint le centre de la cible ? Arrondir le résultat à 10^{-3}.
Il fut calculer $P_G(C) = \dfrac{P(G \cap C)}{P(G)} = \dfrac{P(C \cap G)}{P(G)} = \dfrac{0,27}{0,55} \approx 0,4909$, soit 0,491 à 10^{-3} près.