ÉPREUVES COMMUNES DE CONTRÔLE CONTINU n° 2
Corrigé du sujet 27 mai 2020

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES - CLASSE : Première Générale

EXERCICE 1 **5 POINTS**

Question 1

La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sur cet intervalle : $g'(x) = 100\text{e}100x$.
On sait que quel que soit le réel x, $\text{e}^{100x} > 0$: la fonction g est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Question 2

$f(x) = 100x^2+10x+1 = 100\left(x^2+0,1x+0,01\right) = 100\left[(x+0,05)^2-0,05^2+0,01\right] = 100\left[(x+0,05)^2+0{,}0075\right]$.
Le minimum de la fonction est obtenu lorsque $x = -0,05$ et ce minimum est égal à $f(-0,05) = 0075$.
l'axe de symétrie de la parabole représentative est $x = -0,05$.

Question 3

On a $a(x) = b(x) \iff 3x^2+15x+1 = 25x^2+5x-100 \iff 22x^2-10x-101 = 0$.
On a $\Delta = (-10)^2-4\times 22\times(-101) = 100+8888 = 8988 > 0$.
L'équation a donc deux solutions. les deux courbes ont deux points d'intersection.

Question 4

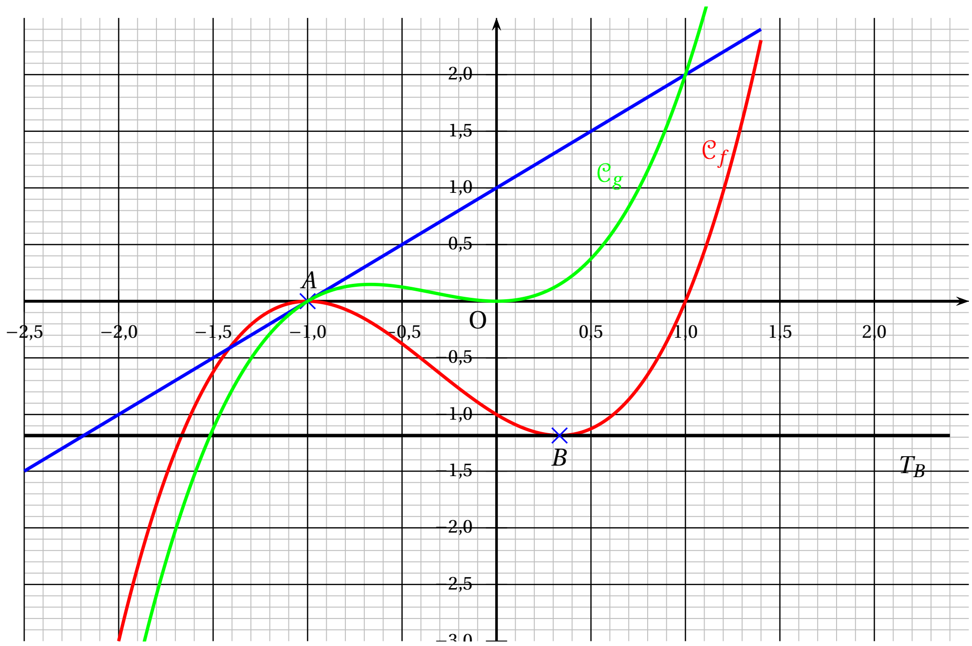
$S = 1+5+5^2+\cdots+5^{10}$ (1), d'où :
$5S = 5+5^2+\ldots+5^{10}+5^{11}$ (2) et par différence (2) - (1) :
$4S = 5^{11}-1$, d'où $S = \dfrac{5^{11}-1}{4} = 12\,207\,031$.

Question 5

Comme $f'(-1) = 0$ et $f'(-1)\times f'(3) = 0$.

a. strictement positif **b.** strictement négatif **c.** égal à 0 **d.** égal à $f'(-3)$.

EXERCICE 2 **5 POINTS**



1. On lit sur la figure $f(-1) = 0$ et $f(1) = 0$.

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3+x^2-x-1$. On note f' la dérivée de f.

2. La fonction polynôme f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sur cet intervalle :
$f'(x) = 3x^2 + 2x - 1$.

3. On sait que $f'(x)$ s'annule pour $x = -1$ et pour $x = \dfrac{1}{3}$.
Comme $f'(x) = a(x-\alpha)(x-\beta)$, avec a coefficient de x^2, α et β racines du trinôme on a :
$f'(x) = 3\left(x - \dfrac{1}{3}\right)(x-(-1)) = 3\left(x - \dfrac{1}{3}\right)(x+1)$.
On sait que ce trinôme est du signe de $a = 3$, donc positif sauf entre l'intervalle $\left]-1\,;\,\dfrac{1}{3}\right[$.
la fonction f est donc croissante sauf sur l'intervalle $\left]-1\,;\,\dfrac{1}{3}\right[$ où elle est décroissante (ce que conforte la figure donnée ;)

4. Des variations précédentes on constate que :
- $f(x) < 0$ sur $]-\infty\,;\,1[$
- $f(x) > 0$ sur $]1\,;\,+\infty[$.

La fonction d définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$d(x) = g(x) - (x+1) = x^3 + x^2 - x - 1 = f(x)$$

donne la différence pour deux points d'abscisse x entre leurs images par g et par $x \longmapsto x+1$.
Or les variations précédentes de f montrent que :

- $f(x) < 0$ sur $]-\infty\,;\,1[$; autrement dit $x^3 + x^2 < x+1$, soit la courbe $\mathcal{C}_g$ est au dessous de la droite d'équation $y = x+1$;
- $f(x) > 0$ sur $]1\,;\,+\infty[$; autrement dit $x^3 + x^2 > x+1$, soit la courbe $\mathcal{C}_g$ est au dessus de la droite d'équation $y = x+1$.

EXERCICE 3 — 5 POINTS

1. — Premier modèle :
on fait l'hypothèse que ce nombre augmente de 21 % par an. On définit alors une suite (u_n) où, selon ce modèle, u_n est le nombre (en milliers) de voitures électriques immatriculées en France l'année $2015+n$ avec $n \in \mathbb{N}$. Ainsi, on a $u_0 = 17,3$.

— Second modèle :
on définit la suite (v_n) par $v_0 = 17,3$ et pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = 0,7v_n + 10$. D'après ce modèle et pour tout entier naturel n, v_n est le nombre (en milliers) de voitures électriques immatriculées en France l'année $2015+n$.

a. Ajouter 21 %, c'est multiplier par $1 + \dfrac{21}{100} = 1 + 0,21 = 1,21$. Donc
- $u_1 = u_0 \times 1,21 = 17,3 \times 1,21 \approx 20,9$;
- $u_2 \approx 25,3$;
- $u_3 \approx 30,6$.
- $v_1 = 0,7 \times 17,3 + 10 \approx 22,1$.
- $v_2 \approx 25,5$;
- $v_3 \approx 27,8$.

b. Le second modèle donne des nombres plus proches de la réalité des ventes.

2. **a.** On a vu que quel que soit le naturel n, $u_{n+1} = 1,21u_n$: ceci montre que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison 1,21 de premier terme 17,3.

b. On sait que quel que soit le naturel n, $u_n = 17,3 \times 1,21^n$.

c. On considère l'algorithme en langage Python ci-dessous.

```
u=17.3
n=0
while u<50 :
  u=1.21*u
  n=n+1
```

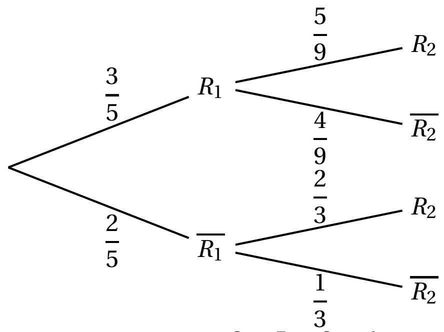
L'algorithme va donner $n = 5$ pour s'arrêter avant que u ne dépasse 50, soit 50 000 voitures électriques.

EXERCICE 4 **5 POINTS**

1. Au départ il y a 6 jetons rouges sur 10, donc $p\left(R_1\right) = \dfrac{6}{10} = \dfrac{3}{5} = 0,6$.

Si un jeton rouge a été tiré il reste 5 rouges sur 9 jetons, donc $p_{R_1}\left(R_2\right) = \dfrac{5}{9}$

Si un jeton noir a été tiré en premier, il reste 6 rouges sur 9 jetons, donc $p_{\overline{R_1}}\left(R_2\right) = \dfrac{6}{9} = \dfrac{2}{3}$.



2. **a.** On a $p(A) = p\left(R_1 \cap R_2\right) = p\left(R_1\right) \times p_{R_1}\left(R_2\right) = \dfrac{3}{5} \times \dfrac{5}{9} = \dfrac{3}{9} = \dfrac{1}{3}$.

b. L'évènement $\overline{A}$ signifie « le joueur obtient au plus un jeton rouge ».

c. On a $p\left(\overline{R_1} \cap R_2\right) = p\left(\overline{R_1}\right) \times p_{\overline{R_1}}\left(R_2\right) = \dfrac{2}{5} \times \dfrac{2}{3} = \dfrac{4}{15}$.

D'après la loi des probabilités totales :

$p\left(R_2\right) = p\left(R_1 \cap R_2\right) + p\left(\overline{R_1} \cap R_2\right) = \dfrac{1}{3} + \dfrac{4}{15} = \dfrac{5}{15} + \dfrac{4}{15} = \dfrac{9}{15} = \dfrac{3}{5} = 0,6$.

d. On a $p_{\overline{R_2}}\left(R_1\right) = \dfrac{p\left(\overline{R_2} \cap R_1\right)}{p\left(R_2\right)} = \dfrac{p\left(R_1 \cap \overline{R_2}\right)}{p\left(R_2\right)} = \dfrac{\dfrac{3}{5} \times \dfrac{4}{9}}{\dfrac{3}{5}} = \dfrac{4}{9} < \dfrac{4,5}{9} = 0,5$. L'affirmation est donc fausse.