∽ ÉPREUVES COMMUNES DE CONTRÔLE CONTINU n° 2 ∾
Corrigé du sujet 28 – mai 2020

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES - CLASSE : Première Générale

EXERCICE 1 — 5 POINTS

Question 1

Une équation de $\mathcal{D}$ est de la forme $M(x\,;\,y) \in \mathcal{D} \iff 1x+3y+c=0$ et avec :
$\text{A}(-1\,;\,2) \in \mathcal{D} \iff -1+6+c=0 \iff c=-5$, on obtient :
$M(x\,;\,y) \in \mathcal{D} \iff x+3y-5=0$.

Question 2

Un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ est par exemple $\overrightarrow{u}\binom{8}{5}$ ou $\dfrac{1}{2}\overrightarrow{u}\binom{4}{2{,}5}$, soit un vecteur directeur de $\mathcal{D}'$. Donc $\mathcal{D}$ est parallèle à $\mathcal{D}'$.

Question 3

Le coefficient directeur de la droite $\mathcal{D}$ est celui de la droite (AB) soit $\binom{1-(-1)}{1-0}$ ou $\binom{2}{1}$. Donc le nombre dérivé est égal à $\dfrac{2}{1}=2$.

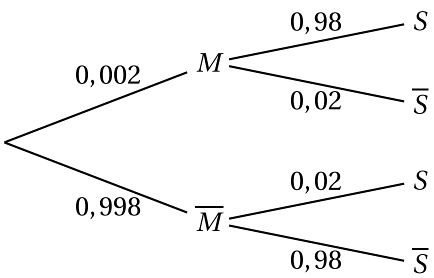
Question 4

Les expressions sont toutes des trinômes du second degré. Leurs racines sont -1 et 2. Donc leur somme est égale à $1=-\dfrac{b}{a}$ et leur produit $-2=\dfrac{c}{a}$. Le seul trinôme (à un coefficient multiplicatif près) ayant ces propriétés est $-x^2+x+2$.

Question 5

f produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ est dérivable sur cet intervalle et :
$f'x) = \text{e}^x + x\text{e}^x = \text{e}^x(1+x) = (x+1)\text{e}^x$.

EXERCICE 2 — 5 POINTS

1. 

On a $p(M) = \dfrac{1}{500} = \dfrac{2}{1\,000} = 0{,}002$. D'où $p\left(\overline{M}\right) = 1-0{,}02 = 0{,}998$.

2. D'après la loi des probabilités totales :
$p(S) = p(M\cap S) + p\left(\overline{M}\cap S\right)$:
- $p(M\cap S) = p(M)\times p_M(S) = 0{,}002\times 0{,}98 = 0{,}001\,96$;
- $p\left(\overline{M}\cap S\right) = p\left(\overline{M}\right)\times p_{\overline{M}}(S) = 0{,}998\times 0{,}02 = 0{,}019\,96$.

Donc $p(S) = 0{,}001\,96 + 0{,}019\,96 = 0{,}021\,92$.

3. **a.** Les passages étant indépendants les uns des autres et la probabilité de faire sonner étant pour chaque voyageur de 0,021 92, X suit une loi binomiale de para mètres $n=2$ et $p=0{,}021\,92$

b. Reprendre et compléter le tableau donnant la loi de X :

k	0	1	2
$p(X = k)$	0,956 64	0,042 88	0,000 48

c. On a $E(X) = 0 \times 0{,}95664 + 1 \times 0{,}04288 + 2 \times 0{,}00048 = 04384$.
Cela signifie qu'en moyenne sur un grand nombre de passages un peu plus de 4 % de passagers feront sonner alors qu'ils ne devraient être que de 0,2 %.

EXERCICE 3 **5 POINTS**

1. Diminuer de 5 %, c'est multiplier la quantité de déchets par $1 - \dfrac{5}{100} = 1 - 0,05 = 0,95$.
Donc l'entreprise s'engage à produire seulement en 2020 :
$6000 \times 0,95 = 5970$ (tonnes).

2. **a.** On a donc pour tout naturel n, $d_{n+1} = 0,95 d_n$.

b. La relation précédente montre que la suite (d_n) est une suite géométrique de raison 0,95 et de premier terme $d_0 = 6000$.

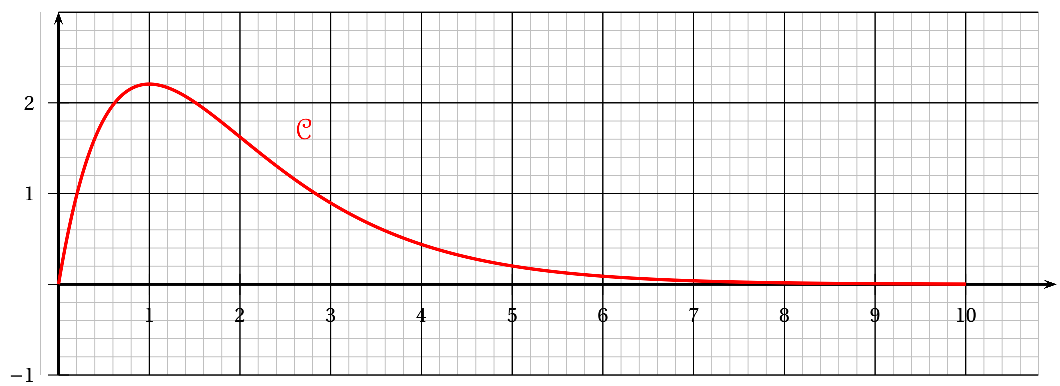
c. On sait que pour tout naturel n, $d_n = d_0 \times 0,95^n = 6000 \times 0,95^n$.
La quantité totale de déchets de 2019 à 2023 est :
$T = d_0 + d_1 + d_2 + d_3 + d_4$, soit :
$T = 6000 \times 0,95^0 + 6000 \times 0,95^1 + 6000 \times 0,95^2 + 6000 \times 0,95^3 + 6000 \times 0,95^4$ (1),
d'où par produit par 0,95 :
$0,95T = 6000 \times 0,95^1 + 6000 \times 0,95^2 + 6000 \times 0,95^4 + 6000 \times 0,95^4 + 6000 \times 0,95^5$ (2), d'où par différence (1) − (2) :
$0,05T = 6000 - 6000 \times 0,95^5$, d'où on tire $T = \dfrac{6000 - 6000 \times 0,95^5}{0,05} \approx 27146$ (tonnes).

3.

$D \longleftarrow 6000$
$N \longleftarrow 0$
Tant que $D > 3600$
$\quad D \longleftarrow 0,95 * D$
$\quad N \longleftarrow N + 1$
Fin Tant que

L'algorithme donnera $N = 10$, soit en 2029.

EXERCICE 4 **5 POINTS**



1. la fonction f est un quotient de fonctions dérivables le dénominateur étant non nul quel que soit le réel cx. On a donc sur $\mathbb{R}$, donc en particulier sur $[0\,;\,10]$
$f'x) = \dfrac{6\mathrm{e}^x - 6x \times \mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x)^2} = \dfrac{6\mathrm{e}^x(1-x)}{\mathrm{e}^x \times \mathrm{e}^x} = \dfrac{6(1-x)}{\mathrm{e}^x}$.

2. Comme $6\mathrm{e}^x > 0$, quel que soit $x : in[0\,;\,10]$, le signe de $f'(x)$ est donc celui de $1-x$:
- $1-x > 0 \iff 1 > x \iff x < 1$: la fonction f est donc croissante sur $[0\,;\,1]$de $f(0) = 0$ à $f(1) = \dfrac{6 \times 1}{\mathrm{e}^1} = 6\mathrm{e}^{-1} \approx 2,207$;
- $1-x < 0 \iff 1 < x \iff x > 1$: la fonction f est donc décroissante sur $[1\,;\,10]$de $f(1) = 6\mathrm{e}^{-1}$ à $f(10) = \dfrac{6 \times 10}{\mathrm{e}^{10}} = 60\mathrm{e}^{-10} \approx 0,003$;
- $1-x = 0 \iff x = 1$: $f(1) = 6\mathrm{e}^{-1} \approx 2,207$ est donc le maximum de la fonction sur l'intervalle $[0\,;\,10]$.

3. Les variations de f montrent que la concentration maximale est atteint après 1 heure et qu'elle est égale à environ 2,2 (mg/L).

4. Le sportif peut être contrôlé à tout moment après son injection, mais hélas il sera en infraction entre environ 43 minutes et 1 h 24 min après l'injection car la concentration sera à ce moment supérieure à 2 (g/L).