ÉPREUVES COMMUNES DE CONTRÔLE CONTINU n° 2
Corrigé du sujet 32 – mai 2020

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES - CLASSE : Première Générale

EXERCICE 1 **5 POINTS**

Question 1

Le produit est nul si l'un des facteurs est nul :

— $x-1=0$ si $x=1$;

— $x^2+x+1=0$. On a $\Delta=1-4=-3<0$:ce trinôme n'a pas de racines.

L'équation a donc une seule solution : 1.

Question 2

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(7x-23)\left(\mathrm{e}^x+1\right)$.
Comme quel que soit le réel x, $\mathrm{e}^x>0$, $\mathrm{e}^x+1>1>0$, $f(x)$ ne peut s'annuler que si $7x-23=0 \iff x=\dfrac{23}{7}$.

Question 3

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, le cercle de centre A$(-4~;~2)$ et de rayon $r=\sqrt{2}$ a pour équation :
$M(x~;~y)\in C\left(\mathrm{A}~;~R=\sqrt{2}\right) \iff \mathrm{A}M^2=\left(\sqrt{2}\right)^2 \iff (x+4)^2+(y-2)^2=2$.

Question 4

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, on considère les vecteurs $\vec{u}(m+1~;~-1)$ et $\vec{v}(m~;~2)$ où m est un réel.
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est nul, soit si :
$\vec{u}\cdot\vec{v}=0 \iff m(m+1)-2=0 \iff m^2+m-2=0$.
Pour le trinôme $\Delta=1+8=9=3^2>$: il a donc deux racines :

$$m_1=\frac{-1+3}{2}=1 \quad \text{et} \quad m_2=\frac{-1-3}{2}=-2.$$

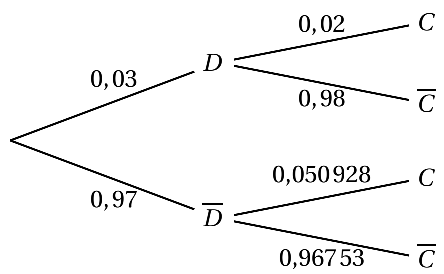
Réponse **b.**

Question 5

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, une équation cartésienne de la droite D passant par le point $A(-2~;~5)$ et admettant pour vecteur normal $\vec{n}\,(-1~;~3)$ est :
On a $M(x~;~y)\in(D) \iff \overrightarrow{\mathrm{A}M}\cdot\vec{n}=0 \iff -1(x-(-2))+3(y-5)=0 \iff -x-2+3y-15=0 \iff -x+3y-17=0 \iff x-3y+17=0$.

EXERCICE 2 **5 POINTS**

1. • 3 % représentent $\frac{3}{100}$ des téléviseurs soit 0,03.
   • On sait que sur les 3 % de télés ayant un défaut de dalle, seuls 2 % ont un défaut de condensateur, donc $p_D(C)=\dfrac{2}{100}=0,02$.
2.

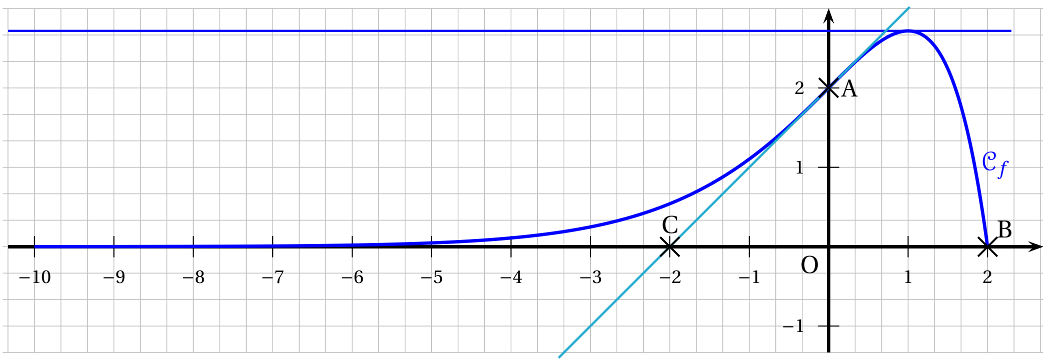


3. $p(D\cap C) = p(D)\times p_D(C) = 0,03\times 0,02 = 0{,}0006$.
4. Il faut calculer : $p_C(D) = \dfrac{p(C\cap D)}{p(C)} = \dfrac{0{,}0006}{0,05} = 0,012$.
5. D'après la loi des probabilités totales, on a :
   $p(C) = p(C\cap D) + p\left(C\cap\overline{D}\right)$, soit :
   $0,05 = 0{,}0006 + p\left(C\cap\overline{D}\right) \iff p\left(C\cap\overline{D}\right) = 0{,}0494$ ou $p\left(\overline{D}\cap C\right) = 0,0494$.
   Remarque : on peut compléter l'arbre ainsi :
   Or $p\left(\overline{D}\cap C\right) = \dfrac{p\left(\overline{D}\cap C\right)}{p\left(\overline{D}\right)}$, soit :
   $0{,}0494 = \dfrac{p\left(\overline{D}\cap C\right)}{0,05}$, d'où :
   $p\left(\overline{D}\cap C\right) = 0{,}0494\times 0,05 = 0{,}00247$.
   Par conséquent $p\left(\overline{C}\cap\overline{C}\right) = 0,97 - 0{,}00247 = 0{,}96753$.
   On termine avec $p_{\overline{D}}(C) = 0{,}050928$.

EXERCICE 3 **5 POINTS**

Dans le repère ci-dessous, on note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-10\,;\,2]$.
On a placé dans ce repère les points A (0 ; 2), B (2 ; 0) et C (−2 ; 0).
On dispose des renseignements suivants :

— Le point B appartient à la courbe $\mathcal{C}_f$.
— La droite (AC) est tangente en A à la courbe $\mathcal{C}_f$.
— La tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1 est une droite parallèle à l'axe des abscisses.



1. Si la tangente est horizontale le nombre dérivé $f'(1)$ est nul.
2. Cette tangente est la droite (AC), donc son équation est $-x+y=2$ ou $y=x+2$.

On admet que cette fonction f est définie sur $[-10\,;\,2]$ par

$$f(x) = (2-x)\mathrm{e}^x.$$

3. f est un produit de fonctions dérivables sur $[-10\,;\,2]$ et sur cet intervalle,
   $f'(x) = -\mathrm{e}^x + (2-x)\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x(-1+2-x) = \mathrm{e}^x(1-x)$.
4. On sait que quel que soit le réel x $\mathrm{e}^x > 0$, le signe de $f'(x)$ est celui de $1-x$.
   •$1-x>0 \iff 1>x$: sur l'intervalle $[-10\,;\,1[$ la fonction f est croissante de $f(-10) = 12\mathrm{e}^{-10} \approx 0{,}0005$ à $f(1) = \mathrm{e}^1 \approx 2,728$;
   •$1-x<0 \iff 1<x$: sur l'intervalle $[1\,;\,2[$ la fonction f est décroissante de $f(1) = \mathrm{e}^1 \approx 2,728$ à $f(2) = 0$;
   •$1-x=0 \iff 1=x$: $f(1)$ est le maximum de f sur l'intervalle $[-10\,;\,2]$.
5. Si Δ) est cette tangente on sait qu'une équation de celle-ci est :
   $M(x\,;\,y)\in(\Delta) \iff y - f(2) = f'(2)(x-2)$.
   Avec $f(2)=0$ et $f'(2) = -\mathrm{e}^2$, l'équation devient :
   $M(x\,;\,y)\in(\Delta) \iff y = -\mathrm{e}^2(x-2)$ ou $y = \mathrm{e}^2(2-x)$.

EXERCICE 4 **5 POINTS**

1. On a $a_1 = a_0 \times 0,80 + 400 = 0,8 \times 2\,500 + 400 = 2\,000 + 400 = 2\,400$;
   De même $a_2 0,8a_1 + 400 = 0,8 \times 2\,400 + 400 = 2\,320$.
2. **a.** Pour passer de a_n à a_{n+1} on multiplie par 0,8 puis on ajoute 400.
   Donc pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = 0,8a_n + 400$.
   Pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = a_{n+1} - 2\,000$ soit
   $v_{n+1} = 0,8a_n + 400 - 2\,000 = 0,8a_n - 1\,600 = 0,8\left(a_n - 2000\right)$, soit finalement :
   $v_{n+1} = 0,8v_n$: cette égalité montre que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,8 de premier terme $v_0 = a_0 - 2000 = 2\,500 - 2\,000 = 500$.

   b. On sait que, pour tout entier naturel n, $v_n = v_0 \times 0,8^n = 500 \times 0,8^n$

   c. Or $v_n = a_n - 2\,000 \iff a_n = 2\,000 + v_n = 2\,000 + 500 \times 0,8^n$.

   d. Il faut trouver le plus petit naturel n, tel que $a_n \leqslant 2\,010$ ou $2\,000+500\times 0,8^n \leqslant 2\,010 \iff 500 \times 0,8^n \leqslant 10 \iff 0,8^n \leqslant \dfrac{10}{500} \iff 0,8^n \leqslant \dfrac{20}{1\,000}$ soit enfin
   $0,8^n \leqslant 0,02$: la calculatrice donne $n = 18$ pour lequel $a_{18} \approx 2\,009{,}01$ soit en 2031.