∽ ÉPREUVES COMMUNES DE CONTRÔLE CONTINU n° 2 ∾
Corrigé du sujet n° 33 mai 2020

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES - CLASSE : Première Générale

EXERCICE 1 **5 POINTS**

Question 1 :

On sait qu'un vecteur directeur de la droite (d) est $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$, soit ici $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$.

Question 2 :

Un vecteur directeur de la droite est $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$, donc un vecteur normal est par exemple $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$ ou encore $-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}1\\\frac{3}{2}\end{pmatrix}$.

Question 3 :

$\overrightarrow{EB} = \overrightarrow{BA}$ entraîne en faisant intervenir C : $\overrightarrow{EC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}$, d'où $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CE}$.
De même $\overrightarrow{ED} = 2\overrightarrow{BC}$ entraîne $\overrightarrow{EC} + \overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{BC}$ d'où $\overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CE}$.
Conclusion : $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CD}$ ce qui démontre que C est le milieu de [AD].

Question 4 :

$\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux donc $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0$, soit $9(-x+4)+7(2x-5) = 0$ ou $-9x+36+14x-35 = 0$, d'où $5x+1 = 0$ et $x = -\dfrac{1}{5}$.

Question 5 :

Avec $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}-5\\4\end{pmatrix}$, on obtient :
$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 4 \times (-5) + 1 \times 4 = -20 + 4 = -16$.

EXERCICE 2 **5 POINTS**

1. Prendre 150 % de quelque chose c'est le multiplier par $\dfrac{150}{100} = 1,5/$
   Donc $u_1 = 2; u_2 = 2 \times 1,5 = 3; u_3 = 3 \times 1,5 = 4,5; u_4 = 4,5 \times 1,5 = 6,75$.
2. On a vu que quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 1$, $u_{n+1} = 1,5u_n$.
   Cette relation montre que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison $q = 1,5$, de premier terme $u_1 = 2$.
3. On sait que pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 1$, $u_n = u_1 \times q^{n-1}$, soit $u_n = 2 \times 1,5^{n-1}$.
4.

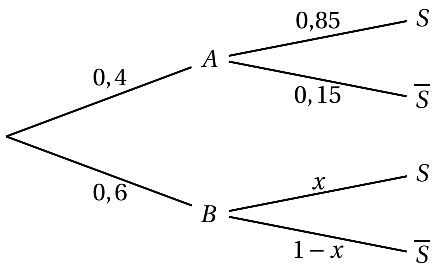
```
i = 1
u = 2
longueur = 2
while longueur < 1000 :
    i = i + 1
    u = 1,5*u
    longueur = longueur + u
print(i)
```

Il faut calculer $L = u_1 + u_2 + \ldots + u_{14}$ (1). Or
$1,5L = u_2 + u_3 + \ldots + u_{15}$ (2) et par différence (2) − (1) :
$0,5L = u_{15} - u_1$, d'où $L = 2(u_{15} - u_1) = 2\left(2 \times 1,5^{14} - 2\right) \approx 1\,163,7$ (mm), soit effectivement environ 1,164 m au mm près.

EXERCICE 3 **5 points**

1. $p(B) = 1 - p(A) = 1 - 0,40 = 0,6$.

2. On note $p_B(S) = x, \quad x \in [0~;~1]$. Recopier et compléter sur la copie avec les trois valeurs demandées l'arbre pondéré ci-dessous traduisant la situation :



3. On doit trouver : $p(A \cap S) = p(A) \times p_A(S) = 0,4 \times 0,85 = 0,34$.

4. On a comme à la question **1.** :
$p\,(B \cap S) = p(B) \times p_B\,(S) = 0,4 \times x = 0,6x$.
D'après la loi des probabilités totales :
$p(S) = p(A \cap S) + p(B \cap S)$, soit $0,91 = 0,34 + 0,6x$.
On en déduit : $p(B \cap S) = 0,6x = 0,91 - 0,34$ ou $p(B \cap S) = 0,6x = 0,57$.
On a donc $x = \text{ö}dfrac0,570,6 = \dfrac{57}{60} = \dfrac{19}{20} = \dfrac{95}{100} = 0,95$.

5. Il faut trouver $p_S(B) = \dfrac{p(S \cap B)}{p(S)} = \dfrac{p(B \cap S)}{p(S)} = \dfrac{0,57}{0,91} \approx 0{,}6263$ soit 0,626 à 10^{-3} près.

EXERCICE 4 **5 POINTS**

$$g(x) = \mathrm{e}^x - x + 1.$$

1. g est la somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$; elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et :
$g'(x) = \mathrm{e}^x - 1$.

2. • $\mathrm{e}^x - 1 > 0 \iff \mathrm{e}^x > 1$ ou $\mathrm{e}^x > \mathrm{e}^0$, soit $x > 0$: la dérivée est positive, donc g est croissante ur $[0\,;5]$.
• $\mathrm{e}^x - 1 < 0 \iff \mathrm{e}^x < 1$ ou $\mathrm{e}^x < \mathrm{e}^0$, soit $x < 0$: la dérivée est négative, donc g est décroissante ur [-5 ; 0].
• $\mathrm{e}^x - 1 = 0 \iff \mathrm{e}^x = 1 \iff x = 0$: $g(0)$ est le minimum de la fonction sur $]-5~;~5]$ et $g(0) = 1 - 0 + 1 = 2$.
On a $g(-5) = \mathrm{e}^{-5} - (-5) + 1 = 6 + \mathrm{e}^{-5}$ et $g(5) = \mathrm{e}^5 - 5 + 1 = \mathrm{e}^5 - 4$

3. La question précédente a montré que le minimum de la fonction g sur l'intervalle $[-5~;~5]$ est 2, donc sur $[-5~;~5]$, $g(x) \geqslant 2 > 0$.

Soit f la fonction définie sur $[-5~;~5]$ par :

$$f(x) = x + 1 + \frac{x}{\mathrm{e}^x}.$$

4. On a sur $[-5~;~5]$, $f'(x) = 1 + \dfrac{1\mathrm{e}^x - x\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x)^2} = 1 + \dfrac{\mathrm{e}^x(1-x)}{(\mathrm{e}^x)^2}$.
$f'(x) = \dfrac{(\mathrm{e}^x)^2 + \mathrm{e}^x(1-x)}{(\mathrm{e}^x)^2} = \dfrac{\mathrm{e}^x\,(\mathrm{e}^x + 1 - x)}{(\mathrm{e}^x)^2} = \dfrac{(\mathrm{e}^x + 1 - x)}{(\mathrm{e}^x)} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^x} \times g(x)$.
Le signe de $f'(x)$ est celui de $g(x)$. Or on a vu que sur $[-5~;~5]$, $g(x) > 0$, donc $f'(x) > 0$: la fonction f est donc strictement croissante de $f(0) = 1$ à plus l'infini.

5. Si T_0 est cette tangente, on sait qu'une équation de T_0 est :
$M(x~;~y) \in T_0 \iff y - f(0) = f'(0)(x - 0)$.
Avec $f(0) = 1$ et $f'(0) = \dfrac{g(0)}{\mathrm{e}^0} = g(0) = 2$, l'équation devient :
$M(x~;~y) \in T_0 \iff y - 1 = 2(x - 0) \iff y = 2x + 1$.