ÉPREUVES COMMUNES DE CONTRÔLE CONTINU n° 2
Corrigé du sujet 34 – mai 2020

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES - CLASSE : Première Générale

EXERCICE 1 **5 POINTS**

1. L'ensemble des solutions de l'inéquation $-3x^2+2x+1>0$, où x est un nombre réel, est :
Pour le trinôme $-3x^2+2x+1$, le réel 1 est une racine évidente et comme leproduit des racines est égal à $\dfrac{c}{a}=\dfrac{1}{-3}$, l'autre racine est $-\dfrac{1}{3}$.
On sait que ce trinôme est du signe de $a=-3<0$, donc négatif, sauf (ce que nous cherchons) sur l'intervalle $\left]-\dfrac{1}{3}\ ;\ 1\right[$.

2. On a $M(x\ ;\ y)\in(d) \iff \overrightarrow{\text{A}M}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires donc si $-2(x-(-1)=3(y-5) \iff -2x-2=3y-15 \iff -2x-3y+13=0$.

3. Soit f la fonction définie sur $]-\infty\ ;\ 2[\cup]2\ ;\ +\infty[$ par $f(x)=\dfrac{2x+1}{x-2}$.
Sur l'intervalle $]-\infty\ ;\ 2[\cup]2\ ;\ +\infty[$, on a :
$f'(x)=\dfrac{2(x-2)-1(2x+1)}{(x-2)^2}=\dfrac{2x-4-2x-1)}{(x-2)^2}=\dfrac{-5)}{(x-2)^2}$.

4. $\dfrac{\left(\text{e}^x\right)^2\times\text{e}^{-x+1}}{\text{e}^{5x}}=\text{e}^{x^2-x+1-5x}=\text{e}^{x^2-6x+1}$.

5. La fonction f est définie pour tout x réel par

$$f(x)=\text{e}^x\left(3\text{e}^x-1\right).$$

Sur $\mathbb{R}$, $f'(x)=\text{e}^x\left(3\text{e}^x-1\right)+\text{e}^x\times3\text{e}^x=\text{e}^x\left(3\text{e}^x-1+3\text{e}^x\right)=\text{e}^x\left(6\text{e}^x-1\right)=6\text{e}^{2x}-\text{e}^x$.

EXERCICE 2 **5 POINTS**

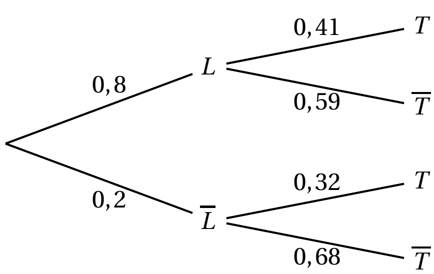
1. Il y a $100-80=20\,\%$ de boules de neige et parmi ceux-ci $100-32=68\,\%$ mesurent moins de 1,10 m.
Il y a donc $\dfrac{20}{100}\times\dfrac{68}{100}=\dfrac{1360}{10000}=\dfrac{13,6}{100}$, soit 13,6 % et donc moins de 15 %.

— L : « le *viburnum* choisi est un laurier tin »

— T : « le *viburnum* mesure plus de 1,10 m ».

2. $p_L\left(\overline{T}\right)$ désigne la probabilité de l'évènement : « sachant que le *viburnum* choisi est un laurier tin quelle est la probabilité qu'il mesure moins de 1,10 m ? ».
L'évènement $\overline{L}\cap T$: « le *viburnum* choisi est un boule de neige mesurant plus de 1,10 m ».

3.



4. On a $p(T)=p(L\cap T)+p\left(\overline{L}\cap T\right)$.

- $p(L\cap T)=p(L)\times p_L(T)=0,8\times0,41=0,328$;
- $p\left(\overline{L}\cap T\right)=p\left(\overline{L}\right)\times p_{\overline{L}}(T)=0,2\times0,32=0,064$;

Donc $p(T)=0,328+0,064=0,392$.

5. Il faut trouver $p_{\overline{T}}\left(\overline{L}\right) = \dfrac{\overline{T} \cap \overline{L}}{p\left(\overline{T}\right)} = \dfrac{0,2 \times 0,68}{1 - 0,392} = \dfrac{0,136}{0,608} \approx 0,2236$, soit 0,224 au millième près.

EXERCICE 3 **5 POINTS**

Partie A.

On considère la suite (v_n) définie par $v_0 = 1$ et $v_{n+1} = \frac{2}{3} v_n$ pour tout entier naturel n.

1. La relation $v_{n+1} = \frac{2}{3} v_n$, vraie pour tout entier naturel n montre que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{2}{3}$. Son premier terme est $v_0 = 1$.
2. On sait que $v_n = 1 \times \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$, pour tout entier naturel n.
3. $S_{10} = 1 + \dfrac{2}{3} + \left(\dfrac{2}{3}\right)^2 + \ldots + \left(\dfrac{2}{3}\right)^9$ (1) et en multipliant par $\dfrac{2}{3}$:
   $\dfrac{2}{3} S_{10} = \dfrac{2}{3} + \left(\dfrac{2}{3}\right)^2 + \ldots + \left(\dfrac{2}{3}\right)^9 + \left(\dfrac{2}{3}\right)^{10}$ (2).
   En faisant la différence (1) − (2), on obtient :
   $\dfrac{1}{3} S_{10} = 1 - \left(\dfrac{2}{3}\right)^{10}$, d'où en multipliant par 3 :
   $S_{10} = 3 - 3\left(\dfrac{2}{3}\right)^{10} = \dfrac{58\,025}{19\,683} \approx 2,947\,98$.

Partie B.

4. `terme(5)` donne le sixième terme de la suite (w_n) définie par $w_1 = 4$ et $w_{n+1} = 2w_n - 3$.
   On obtient les termes successifs : 4 ; 5 ; 7 ; 11 ; 19 ; 35.
5.
```
def somme_termes(n) :
  w= 4 :
  S = 4 :
     for i in range(n) :
        w=2*w- 3
        S = S + w
    return S
```

EXERCICE 4 **5 POINTS**

On considère la fonction f définie pour tout nombre réel x de l'intervalle $[-1\,;\,5]$ par :

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1.$$

1. la fonction polynôme f dérivable sur $\mathbb{R}$ l'est sur $[-1\,;\,5]$ et :
   $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3\left(x^2 - 4x + 3\right)$.
2. Le nombre 1 est une racine évidente du trinôme $x^2 - 4x + 3$ et comme le produit des racines est $\dfrac{c}{a} = \dfrac{3}{1} = 3$, l'autre racine est 3.
   On sait que $x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3)$, donc $f'(x) = 3(x-1)(x-3)$.
3. Le trinôme est du signe de $a = 1 > 0$, donc positif sauf sur l'intervalle $]1\,;\,3[$.
   Il en résulte que sur l'intervalle $[-1\,;\,5]$:
   — f est croissante sur $[-1\,;\,1]$ de $f(-1) = -1 - 6 - 9 + 1 = -15$ à $f(1) = 1 - 6 + 9 + 1 = 5$;
   — f est décroissante de $f(1) = 5$ à $f(3) = 27 - 54 + 27 + 1 = 1$;
   — f est croissante de $f(3) = 1$ à $f(5) = 125 - 150 + 45 + 1 = 21$.
4. On sait qu'une équation de la tangente T à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse 0 est :
   $M(x\,;\,y) \in T \iff y - f(0) = f'(0)(x - 0)$
   Avec $f(0) = 1$ et $f'(0) = 9$, on obtient :
   $M(x\,;\,y) \in T \iff y = 9x + 1$.

5. Si une autre tangente est parallèle à T son coefficient directeur est égal à 9.
Or $f'(x) = 9 \iff 3\left(x^2 - 4x + 3\right) \iff 3 = x^2 - 4x + 3 \iff x^2 - 4x = 0 \iff x(x-4) = 0$
On retrouve $x = 0$ tangente T et $x = 4$, pour lequel $f(4) = 64 - 96 + 36 + 1 = 5$.
La tangente à la courbe représentative de la fonction f au point B de coordonnées $(4\,;5)$ est parallèle à T.