ೋ ÉPREUVES COMMUNES DE CONTRÔLE CONTINU n° 2 ೋ
Corrigé du sujet 36 – mai 2020

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES - CLASSE : Première Générale

EXERCICE 1 **5 POINTS**

1. Un vecteur directeur de D est $\overrightarrow{u}\binom{-5}{4}$, donc un vecteur normal est par exemple $\overrightarrow{n}\binom{4}{5}$.

2. $x^2-2x+y^2=3 \iff (x-1)^2-1+y^2=3 \iff (x-1)^2+y^2=4 \iff (x-1)^2+(y-0)^2=2^2 \iff$ $AM^2=2^2$ signifie que les points M appartiennent au cercle de centre $A(1\,;\,0)$ et de rayon 2.

3. Avec $S=15+16+17+\dots+243$, on peut aussi écrire :
$S=243+242+\ldots+17+16+15$ et en sommant membre à membre :
$2S=229\times 258$ d'où $S=\dfrac{229\times 258}{2}=229\times 129=29\,541$.

4. $f'(x)=1\mathrm{e}^x+(x+1)\mathrm{e}^x=\mathrm{e}^x(1+x+1)=(x+2)\mathrm{e}^x$.

5. D'après la loi des probabilités totales :
$p(B)=p(A\cap B)+p\left(\overline{A}\cap B\right)$
$p(B)=p(A)\times p_A(B)+p\left(\overline{A}\right)\times p_{\overline{A}}(B)=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{2}{5}+\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{2}{15}+\dfrac{1}{6}=\dfrac{4}{30}+\dfrac{5}{30}=\dfrac{9}{30}=\dfrac{3}{10}=0,3.$

EXERCICE 2 **5 POINTS**

Dans un repère orthonormé $\left(\text{O}\,;\,\overrightarrow{\imath},\,\overrightarrow{\jmath}\right)$ du plan, on considère les points A $(2\,;\,-1)$, B$(0\,;\,3)$ et C$(3\,;\,1)$.

1. **a.** Avec $\overrightarrow{\text{AB}}\binom{-2}{4}$ et $\overrightarrow{\text{AC}}\binom{1}{2}$, on a
$\overrightarrow{\text{AB}}\cdot\overrightarrow{\text{AC}}=-2\times 1+4\times 2=-2+8=6.$

   b. $\left\|\overrightarrow{\text{AB}}\right\|^2=\overrightarrow{\text{AB}}\cdot\overrightarrow{\text{AB}}=4+16=20$, d'où $\left\|\overrightarrow{\text{AB}}\right\|=\sqrt{20}=\sqrt{4\times 5}=2\sqrt{5}$.
$\left\|\overrightarrow{\text{AC}}\right\|^2=\overrightarrow{\text{AC}}\cdot\overrightarrow{\text{AC}}=1+4=5$, d'où $\left\|\overrightarrow{\text{AC}}\right\|=\sqrt{5}$.

   c. On peut également écrire le produit scalaire :
$\overrightarrow{\text{AB}}\cdot\overrightarrow{\text{AC}}=\text{AB}\times\text{AC}\times\cos(\widehat{\text{BAC}})$, soit :
$6=2\sqrt{5}\times\sqrt{5}\cos(\widehat{\text{BAC}})$, d'où $\cos(\widehat{\text{BAC}})=\dfrac{6}{2\sqrt{5}\times\sqrt{5}}=\dfrac{6}{10}=\dfrac{3}{5}=0,6$ au degré près.
La calculatrice donne $\widehat{\text{BAC}}\approx 53,1$, soit 53° au degré près.

2. **a.** Une équation de la droite (AB) étant $y=ax+b$ alors on a le système :
$\left\{\begin{array}{lcl}-1&=&2a+b\\3&=&0\times a+b\end{array}\right.$, d'où $b=3$ et par différence $-4=2a$ ou $a=-2$.
Donc $M(x\,;\,y)\in(\text{AB})\iff y=-2x+3\iff 2x+y-3=0$.

   b. Si H$(x\,;\,y)$, on a $\overrightarrow{\text{CH}}\binom{x-3}{y-1}$ et ces coordonnées vérifient :
$\left\{\begin{array}{l}\text{H}\in(\text{AB})\\\overrightarrow{\text{CH}}\cdot\overrightarrow{\text{AB}}=0\end{array}\right.\iff\left\{\begin{array}{lcl}2x+y-3&=&0\\-2(x-3)+4(y-1)&=&0\end{array}\right.\iff\left\{\begin{array}{lcl}2x+y-3&=&0\\-2x+6+4y-4&=&0\end{array}\right.$
$\iff\left\{\begin{array}{lcl}2x+y-3&=&0\\-2x+4y+2&=&0\end{array}\right.$, d'où par somme $5y-1=0\iff y=\dfrac{1}{5}$ et en utilisant la première équation $2x+\dfrac{1}{5}-3=0\iff 2x=\dfrac{15}{5}-\dfrac{1}{5}=\dfrac{14}{5}\iff x=\dfrac{7}{5}$.
$\text{H}\left(\dfrac{1}{5}\,;\,\dfrac{7}{5}\right)$.

EXERCICE 3 **5 POINTS**

1. Baisser de 1 %, c'est multiplier par $1-\dfrac{1}{100}=1-0,01=0,99$.
   Donc $u_1=u_0\times 0,99=0,848\times 0,99=0,839\,52$, soit environ 83,95 %.
2. D'une année sur l'autre pendant 10 ans on passe donc du taux de l'année à celui de l'année suivante par produit par 0,99 ; on a donc pour tout naturel $0\leqslant n\leqslant 9$, $\quad u_{n+1}=0,99u_n$, égalité qui montre que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison 0,99 de premier terme $u_0=0,848$.
3. À la fin de l'exécution on obtient le nombre d'années au bout duquel le taux de scolarisation passera sous 80 %. (On aura $n=6$).
4. On sait que pour $0\leqslant n\leqslant 9$, $\;u_n=0,848\times 0,99^n$.
5. 2005 correspond à $n=10$, d'où $u_{10}=0,848\times 0,99^{10}\approx 0,766\,92$, soit environ 76,69 %.

EXERCICE 4 **5 POINTS**

$$f(x)=2x^3+2x^2-2x+1.$$

1. f fonction polynôme est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc sur $[-3\,;\,3]$ et sur cet intervalle :
   $f'(x)=6x^2+4x-2=2\left(3x^2+2x-1\right)$
2. $f'(x)$ a donc le signe du trinôme $3x^2+2x-1$. Celui-ci a une racine évidente -1 et comme le produit des racines est égal à $\dfrac{c}{a}=-\dfrac{1}{3}$, l'autre racine est égale à $\dfrac{1}{3}$.
   On sait que ce trinôme est positif sauf sur l'intervalle $\left[-1\,;\,\dfrac{1}{3}\right[$.
3. De la question précédente on déduit que
   - la fonction est croissante sur $[-3\,;\,-1[$ de $f(-3)=2\times(-27)+2\times(-3)^2-2\times(-3)+1=-54+18+6+1=-29$ à $f(-1)=-2+2+2+1=3$;
   - la fonction est décroissante sur $\left]-1\,;\,\dfrac{1}{3}\right[$ de $f(-1)=3$ à $f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{2}{27}+\frac{2}{9}-\frac{2}{3}+1=\frac{2+6-18+27}{27}=\frac{17}{27}\approx 0,63$;
   - que la fonction est croissante de $f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{17}{27}$ à $f(3)=54+18-6+1=67$.
4. **a.** On sait que :
   $M(x\,;\,y)\in\mathcal{T}\iff y-f(0)=f'(0)(x-0)$
   Avec $f(0)=1$ et $f'(0)=-2$, on obtient :
   $M(x\,;\,y)\in\mathcal{T}\iff y-1=-2x\iff y=-2x+1$.

   b. Un point de $\mathcal{T}$ appartient à la courbe $\mathcal{C}$ si ses coordonnées $(x\,;\,y)$ vérifient les deux équations :
   $\left\{\begin{array}{rcl} y&=&-2x+1\\ y&=&2x^3+2x^2-2x+1\end{array}\right. \Rightarrow -2x+1=2x^3+2x^2-2x+1\iff 2x^3+2x^2=0\iff$
   $2x^2(x+1)=0\iff\left\{\begin{array}{rcl} x&=&0\\ x+1&=&0\end{array}\right.\iff\left\{\begin{array}{rcl} x&=&0\\ x&=&-1\end{array}\right.$
   On retrouve le point A d'abscisse 0 et le point B$(-1\,;\,3)$.