∽ ÉPREUVES COMMUNES DE CONTRÔLE CONTINU n° 2 ∾
Corrigé du sujet 38 – mai 2020

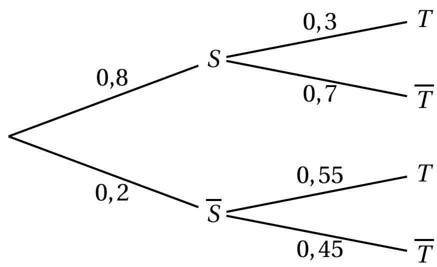
ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES - CLASSE : Première Générale

EXERCICE 1 — 5 POINTS

1. Le trinôme $-3(x-2)(x+1)$ a deux racines -1 et 2; son coefficient $a=-3<0$; on sait que celui-ci est négatif sauf entre les racines donc $S =]-1\ ;\ 2[$.
2. Quel que soit le réel x, $\cos(x+3\pi)=\cos(x+\pi)=-\cos(x)$.
3. $M(x\ ;\ y)\in(d) \iff \overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{v}=0 \iff 2(x-1)-3(y-2)=0 \iff 2x-3y+4=0 \iff 3y=2x+4 \iff y=\frac{2}{3}x+\frac{4}{3}$
4. On a $f'(x)=\dfrac{2x(x+1)-1\times x^2}{(x+1)^2}=\dfrac{2x^2+2x-x^2}{(x+1)^2}=\dfrac{x^2+2x}{(x+1)^2}$.
   Le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1 est : $f'(1)=\dfrac{1^2+2\times1}{(1+1)^2}=\dfrac{3}{4}$.
5. $x^2-2x+y^2+4y=4 \iff (x-1)^2-1^2+(y+2)^2-4=4 \iff (x-1)^2+(y+2)^2=9 \iff AM^2=3^2$: ceci montre que les points M appartiennent au cercle de centre $A(1\ ;\ -2)$ et de rayon 3.

EXERCICE 2 — 5 POINTS

1.



2. $p(S\cap T)=p(S)\times p_S(T)=0,8\times0,3=0,24$.
3. On a aussi $p\left(\overline{S}\cap T\right)=p\left(\overline{S}\right)\times p_{\overline{S}}(T)=0,2\times0,55=0,11$.
   D'après la loi des probabilités totales :
   $p(T)=p(S\cap T)+p\left(\overline{S}\cap T\right)=0,24+0,11=0,35$.
4. On calcule $p_T\left(\overline{S}\right)=\dfrac{p\left(T\cap\overline{S}\right)}{p(T)}=\dfrac{p\left(\overline{S}\cap T\right)}{p(T)}=\dfrac{0,11}{0,35}=\dfrac{11}{35}\approx0,314$, soit environ 0,31.
5. On a $p(S\cap T)=0,24$ et $p(S)\times p(T)=0,8\times0,35=0,28$.
   $p(S\cap T)\neq p(S)\times p(T)$: les évènements S et T ne sont pas indépendants.

EXERCICE 3 — 5 POINTS

1. Augmenter de 9 %, c'est multiplier par $1+\dfrac{9}{100}=1+0,09=1,09$, donc
   $d_2=d_1\times1,09=30\times1,09=32,7$; puis
   $d_3=d_2\times1,09=32,7\times1,09=35,643$.
2. On a donc quel que soit $n\geqslant1$, $d_{n+1}=1,09\times d_n$: ceci montre que la suite (d_n) est une suite géométrique de raison 1,09, de premier terme $u_1=30$.
3. On sait qu'alors que quel que soit $n\geqslant1$, $d_n=d_1\times1,09^{n-1}$.
4. distance(150) donnera le nombre de semaines pour arriver à un entrainement de 150 km. On obtiendra 20.

5. Il faut trouver :

$D = 30 + 30 \times 1,09 + 30 \times 1,09^2 + \ldots + 30 \times 1,09^{20}$ (1). Or

$1,09D = \quad 30 \times 1,09 + 30 \times 1,09^2 + \ldots + 30 \times 1,09^{20} + 30 \times 1,09^{21}$ (2).

Par différence (2) − (1), on obtient :

$0,09D = 30 \times 1,09^{21} - 30$, d'où $D = \dfrac{30 \times 1,09^{21} - 30}{0,09} \approx 1\,702,94$ (km).

EXERCICE 4 — 5 POINTS

1. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;2]$ par $f(x) = 8x - 2x^3$.

a. f est une fonction polynôme dérivable sur $\mathbb{R}$, donc sur $[0\,;2]$ et sur cet intervalle :
$f'(x) = 8 - 6x^2 = 2\left(4 - 3x^2\right)$.
Comme $2 > 0$, le signe de $f'(x)$ est celui de $4 - 3x^2$.

b. $4 - 3x^2$ est un trinôme dont les racines sont $-\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ et $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

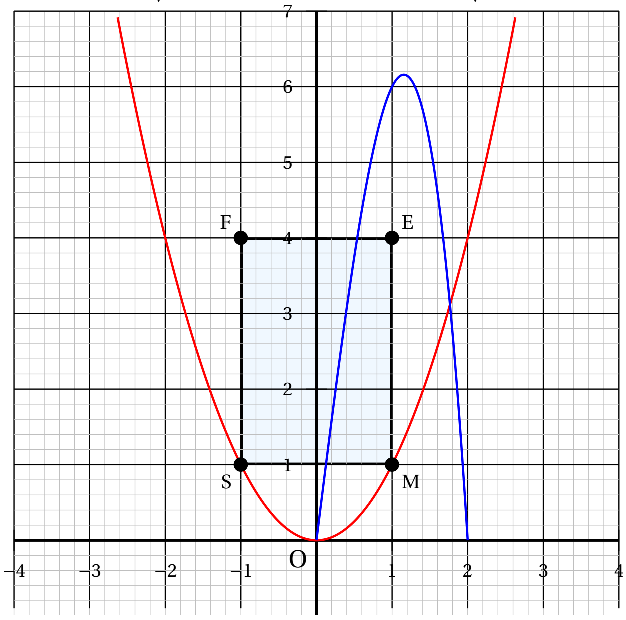
Comme le coefficient $a = -3 > 0$, on sait que la fonction est croissante sauf sur l'intervalle $\left]-\dfrac{2}{\sqrt{3}}\,;\,\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right[$ où elle est décroissante.

f a donc un maximum local en $x = -\dfrac{2}{\sqrt{3}}$, tel que $f\left(-\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right) = 8 \times \left(-\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right) - 2\left(-\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^3 = -\dfrac{16}{\sqrt{3}} + \dfrac{16}{3\sqrt{3}} = -\dfrac{48}{3\sqrt{3}} + \dfrac{16}{3\sqrt{3}} = -\dfrac{32}{3\sqrt{3}} \approx -6,16$.

f a un minimum local en $x = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$, tel que $f\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right) = 8 \times \left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right) - 2\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^3 = \dfrac{16}{\sqrt{3}} - \dfrac{16}{3\sqrt{3}} = \dfrac{48}{3\sqrt{3}} - \dfrac{16}{3\sqrt{3}} = \dfrac{32}{3\sqrt{3}} \approx 6,16$.

Comme on étudie la fonction f sur l'intervalle $[0\,;2]$, on a donc :

f est croissante sur $\left[0\,;\,\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right]$, puis décroissante sur $\left[\dfrac{2}{\sqrt{3}}\,;\,2\right]$.



2.

a.
- Pour $x = 1$ l'aire est égale à $2 \times (4 - 1) = 6$;
- Pour $x = 1,5$ l'aire est égale à $3 \times (4 - 2,25) = 5,25$: l'aire n'est donc pas constante.

On a $M(x\,;\,x^2)$, $S(-x\,;\,x^2)$, $E(x\,;\,4)$ et $F(-x\,;\,4)$. Si $x \in [0\,;\,2]$, donc $SM = 2x$ et $ME = 4 - x^2$.

b. On a $M(x\,;\,x^2)$, $S(-x\,;\,x^2)$, $E(x\,;\,4)$ et $F(-x\,;\,4)$. Si $x \in [0\,;\,2]$, donc $SM = 2x$ et $ME = 4 - x^2$.

Donc l'aire du rectangle $MSFE$, $\mathcal{A}(MSFE)$ est égale à :

$\mathcal{A}(MSFE) = 2x \times \left(4 - x^2\right) = 8x - 2x^3 = f(x)$

c. On a vu que sur l'intervalle $]0\,;\,2[$, f a un maximum égal à $f\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right) = \dfrac{32}{3\sqrt{3}} \approx 6,16$.