∽ Baccalauréat Première Métropole-La Réunion ∾
série générale e3c Corrigé du sujet n° 41 année 2020

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES - Première générale

Exercice 1 **5 points**

Question 1

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CB} = 4 + 15 = 19.$

Question 2

$CB^2 = \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CB} = 1 + 25 = 26$, donc $CB = \sqrt{26}$.

Question 3

Puisque H est le milieu de [AB], la droite (CH) est la médiane mais aussi la hauteur issue de C, donc les droites (CH) et (AB) sont perpendiculaires, donc les vecteurs $\overrightarrow{HB}$ et $\overrightarrow{HC}$ sont orthogonaux et leur produit scalaire est nul.

Question 4

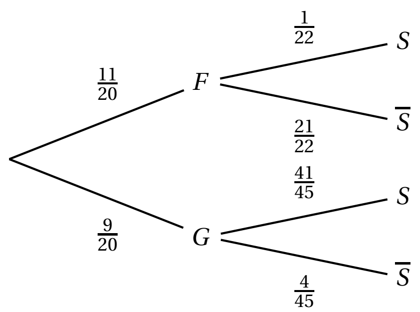
La fonction cos est paire, donc $\cos(-x) = \cos(x) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Question 5

L'équation peut s'écrire :
$x^2 - 2x + (y+3)^2 = 3$ ou $(x-1)^2 - 1 + (y+3)^2 = 3$ ou $(x-1)^2 + (y-(-3))^2 = 4$.
C'est donc l'équation du cercle de centre $(1\ ;\ -3)$ et de rayon 2.

Exercice 2 **5 points**

On peut dresser un arbre pondéré :



1. • $p(G) = 1 - p(F) = 1 - \dfrac{110}{110+90} = 1 - \dfrac{110}{200} = \dfrac{90}{200} = \dfrac{9}{20}$;
   • $p\left(G \cap \overline{S}\right) = p(G) \times p_G\left(\overline{S}\right) = \dfrac{9}{20} \times \dfrac{4}{45} = \dfrac{9 \times 4}{4 \times 5 \times 5 \times 9} = \dfrac{1}{25}$;
   • De même $p\left(F \cap \overline{S}\right) = p(F) \times p_F\left(\overline{S}\right) = \dfrac{11}{20} \times \dfrac{1}{22} = \dfrac{11 \times 1}{4 \times 5 \times 2 \times 11} = \dfrac{1}{40}$.
   D'après la loi des probabilités totales :
   $p\left(\overline{S}\right) = p\left(F \cap \overline{S}\right) + p\left(G \cap \overline{S}\right) = \dfrac{1}{40} + \dfrac{1}{25} = \dfrac{5}{200} + \dfrac{8}{200} = \dfrac{13}{200}$
2. On a $p_{\overline{S}}(G) = \dfrac{p\left(\overline{S} \cap G\right)}{p\left(\overline{S}\right)} = \dfrac{p\left(G \cap \overline{S}\right)}{p\left(\overline{S}\right)} = \dfrac{\frac{9}{20} \times \frac{4}{45}}{\frac{113}{200}} = \dfrac{\frac{1}{25}}{\frac{13}{200}} = \dfrac{8}{13}$.
3. On a $p(G \cap S) = 1 - p\left(G \cap \overline{S}\right) = 1 - \dfrac{1}{25} = \dfrac{24}{25}$ et
   $p(G) \times p(S) = \dfrac{9}{20} \times \dfrac{187}{200} = \dfrac{90}{187}$, donc :
   $p(G \cap S) \neq p(G) \times p(S)$: les évènements G et S ne sont pas indépendants.

Exercice 3 **5 points**

Partie A

1. On sait que quel que soit le naturel n, $u_n = u_0 \times q^n$
Donc $u_{19} = 82\,695 \times 0,999^{19} \approx 81\,137{,}9$.

2. $S = u_0 + u_1 + \ldots + u_{19}$ (1) . Donc
$0,999S = u_1 + \ldots + u_{19} + u_{20}$ (2). Par difference (1) − (2) on obtient :
$0,001S = u_0 - u_{20}$, d'où $S = 1\,000\,(u_0 - u_{20}) = 1\,000\left(82\,695 - 82\,695 \times 0,999^{20}\right) \approx 1\,638\,281{,}8$.

Partie B

Retrancher 0,1 %, c'est multiplier par $1 - \dfrac{0,1}{100} = 1 - 0,001 = 0,999$.
Le terme u_0 de la partie A est égal à la population (en milliers) le 1er janvier 2016.
La population en 2035 est donc en milliers le terme $u_{19} \approx 81\,138$ soit environ 81 138 000 habitants.

Partie C

1. population (2) va donner la population en 2017, soit 826 471 005 puis celle de 2018 soit $\approx 82\,647\,035$.

2. population (19) donne la population 19 ans après 2016 soit en 2035.
Donc au 1er janvier 2035, il y aura environ 82 243 175 habitants.

Exercice 4 **5 points**

$$f(x) = \frac{x^2 - 4x + 8}{x - 2}.$$

1. Sur l'intervalle $]-\infty\,;\,2[$, $f(x) = 0 \iff x^2 - 4x + 8 = 0$.
$\Delta = 16 - 4 \times 8 = 16 - 32 = -16 < 0$. L'équation n'a pas de solutions réelle dans $]-\infty\,;\,2[$.

2. **a.** Le dénominateur étant non nul, puisque $x < 2$, la fonction quotient est dérivable et
$f'(x) = \dfrac{(2x-4)(x-2) - \left(x^2 - 4x + 8\right)}{(x-2)^2} = \dfrac{2x^2 - 4x - 4x + 8 - x^2 + 4x - 8}{(x-2)^2} = \dfrac{x^2 - 4x}{(x-2)^2}$.

b. Le dénominateur étant positif, le signe de $f'(x)$ est celui de $x^2 - 4x = x(x-4)$.
Ce trinôme a pour racines 0 et 4 et on sait que ce trinôme est positif, sauf sur $]0\,;\,4[$.
Dans notre cas $f'(x)$ est positif sur $]-\infty\,;\,0[$ et négatif sur $]0\,;\,2[$.
La fonction f est donc croissante sur $]-\infty\,;\,0[$ et décroissante sur $]0\,;\,2[$.

3. On sait qu'une équation de D est : $y - f(1) = f'(1)(x-1)$.
Avec $f(1) = \dfrac{14+8}{1-2} = -3x + 3 - 5$ et $f'(1) = \dfrac{1-4}{(-1)^2} = -3$, l'équation devient :
$y + 5 = -3(x-1)$ ou $y = -3x + 3 - 5$ et enfin $y = -3x - 2$.

4. Voir ci-dessous.

Annexe