

∞ ÉPREUVES COMMUNES DE CONTRÔLE CONTINU n° 2 ∞
 Corrigé du sujet 52 – mai 2020

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES - CLASSE : Première Générale

EXERCICE 1 – QCM

5 points

Question 1

$$3 \times \frac{10^n}{2^{n+1}} = 3 \times \frac{10^n}{2^n \times 2} = 3 \times \left(\frac{10}{2}\right)^n \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \times 5^n.$$

(u_n) est donc une suite géométrique de premier terme $\frac{3}{2}$ (ou 1,5) et de raison 5.

Question 2

Avec $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CM} \begin{pmatrix} x+1 \\ y-1 \end{pmatrix}$,

$$M(x; y) \in \Delta \iff \overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \iff 4(x+1) + 3(y-1) = 0 \iff 4x+4+6y-3=0 \iff 4x+3y+1=0.$$

Question 3

$$2 \cos(x+\pi) + 1 = 0 \iff 2 \cos(x+\pi) = -1 \iff \cos(x+\pi) = -\frac{1}{2}.$$

Or on sait que $\cos \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$, on a donc

$$\cos(x+\pi) = \cos \frac{2\pi}{3}.$$

On a donc :

$$(x+\pi) = \frac{2\pi}{3} \text{ ou } (x+\pi) = -\frac{2\pi}{3}, \text{ soit}$$

$$x = -\frac{\pi}{3} \text{ ou } x = -\frac{5\pi}{3}.$$

La première solution n'appartient pas à l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$; c'est donc la seconde $\left(-\frac{5\pi}{3} + 2\pi = -\frac{5\pi}{3} + \frac{6\pi}{3} = \frac{\pi}{3}\right)$.

Question 4

Le dénominateur étant supérieur ou égal à 1, la fonction est dérivable et en la dérivant comme un quotient :

$$f'(x) = \frac{e^x(1+e^x) - e^x \times e^x}{(1+e^x)^2} = \frac{e^x}{(1+e^x)^2}$$

Question 5

$f(x)$ est un trinôme du second degré de coefficient principal $-4,5 < 0$; sa représentation graphique est une parabole dont la concavité est tournée vers le bas.

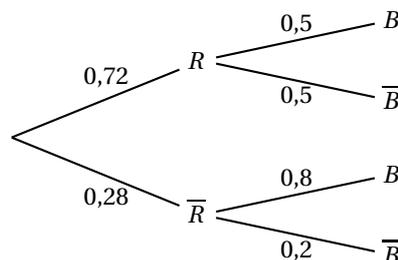
On voit que le maximum de f est obtenue pour $x = -2$ et qu'alors ce maximum est égal à 4,5. Les propositions A, B et D sont donc fausses.

On voit que $f(-5) = f(1) = 0$: donc -5 et 1 sont les racines du trinôme. On sait que ce trinôme est négatif sauf entre les racines; c'est bien ce qui est indiqué dans le tableau C.

EXERCICE 2

5 points

1. a. Dans l'énoncé la dernière indication signifie que $p(R \cap B) = 0,36$.
- b. Recopier et compléter le plus possible l'arbre de probabilité ci-dessous en traduisant uniquement les données de l'énoncé.



c. On a $p(\overline{R} \cap B) = p(\overline{R}) \times p_{\overline{R}}(B) = 0,28 \times 0,8 = 0,224$.

D'après la loi des probabilités totales :

$$p(B) = p(R \cap B) + p(\overline{R} \cap B) = 0,36 + 0,224 = 0,584.$$

2. On note X la variable aléatoire qui donne le prix d'un bouquet acheté par un client.

a. Recopier et compléter le tableau ci-dessous donnant, pour chaque valeur x_i de X , la probabilité de l'évènement $\{X = x_i\}$. Justifier.

x_i	25,50	23,50	11,60	10,50
$p(X = x_i)$	0,36	0,36	0,224	0,056

b. On a $E(X) = 0,36 \times 25,5 + 0,36 \times 23,5 + 0,224 \times 11,6 + 0,056 \times 10,5 = 20,8264 \approx 20,83$ (€).

EXERCICE 3

5 points

$$f(x) = 60x e^{-0,5x}.$$

1. f est un produit de fonctions dérivables sur \mathbb{R} , donc sur $[0; 10]$ et sur cet intervalle :

$$f'(x) = 60e^{-0,5x} + 60x \times (-0,5)e^{-0,5x} = e^{-0,5x}(60 - 30x) = -30(x-2)e^{-0,5x}.$$

2. Déterminer le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[0; 10]$. $f'(x) = 30(2-x)e^{-0,5x}$. On sait que quel que soit le réel x , $e^{-0,5x} > 0$, donc le signe de $f'(x)$ est celui de $2-x$:

- $2-x > 0 \iff 2 > x \iff x < 2$: sur $[0; 2]$, $f'(x) > 0$;
- $2-x < 0 \iff 2 < x \iff x > 2$: sur $[2; 10]$, $f'(x) < 0$;
- $2-x = 0 \iff 2 = x$: sur $[0; 2]$, $f'(2) = 0$.

3. D'après la question précédente f est croissante sur $[0; 2]$ de $f(0) = 0$ à $f(2) = 120e^{-1} \approx 44,1$, puis décroissante de $f(2) = 120e^{-1}$ à $f(10) = 600e^{-5} \approx 4,04$. D'où le tableau :

x	0	2	10	
$f'(x)$		+	0	-
f	0		$120e^{-1}$	
				$600e^{-5}$

4. On a vu que $f'(2) = 0$: le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de la fonction f est parallèle à l'axe des abscisses est horizontale.

5. On sait qu'une équation réduite de la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse 0 est :

$$y - f(0) = f'(0)(x - 1);$$

Avec $f(0) = 0$ et $f'(0) = -30(0-2)e^{-0,5 \times 0} = 60e^0 = 60 \times 1 = 60$. L'équation devient :

$$y = 60x.$$

EXERCICE 4

5 points

1. a. Augmenter de 1,52 %, c'est multiplier par $1 + \frac{1,52}{100} = 1 + 0,0152 = 1,0152$.

On a donc au 1^{er} janvier 2020 un loyer de :

$$u_1 = 650 \times 1,0152 = 659,88 \text{ (€)}.$$

b. On multiplie chaque le montant du loyer u_n par 1,0152, donc quel que soit $n \in \mathbb{N}$,

$u_{n+1} = 1,0152u_n$, ce qui montre que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison 1,0152, de premier terme $u_0 = 650$.

c. 2027 correspond à $n = 8$ et $u_8 = u_0 \times 0,0152^8 = 650 \times 0,0152^8 \approx 733,38$ (€).

2. a. somme(0) représente le total des loyers perçus en 2019 ($12 \times 650 = 7800$);

somme(1) représente le total des loyers perçus de 2019 à 2020;

b. 2027 correspond à $A = 8$.

On a : $\text{somme}(0) = 78\,000$

$\text{somme}(1) \approx 15\,178,56$

$\text{somme}(2) \approx 23\,757,48$ et

$\text{somme}(8) \approx 74\,623,04$.

Donc le total des loyers encaissés de 2022 à 2027 est :

$\text{somme}(8) - \text{somme}(2) \approx 74\,623,04 - 23\,757,48$ soit environ $50\,865,60$ (€) ou $50\,866$ € à l'euro près.