∽ ÉPREUVES COMMUNES DE CONTRÔLE CONTINU n° 2 ∾
Corrigé du sujet 59 mai 2020

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES - CLASSE : Première Générale

EXERCICE 1 **5 points**

Question 1

Soit la suite arithmétique (u_n) de premier terme $u_0 = 2$ et de raison 0,9.
On sait que pour tout naturel $n,\ \ u_n = u_0 + nr = 2 + 0,9n$, donc en particulier $u_{50} = 2 + 50 \times 0,9 = 2 + 45 = 47$.

Question 2

Soit la suite géométrique (v_n) de premier terme $v_0 = 2$ et de raison 0,9. La somme des 37 premiers termes de la suite (v_n) est :
On sait que pour tout naturel $n,\ \ v_n = v_0 \times q^n = 2 \times 0,9^n$. Donc
$S_{36} = v_0 + v_1 + \ldots + v_{36} = 2 + 2 \times 0,9 + 2 \times 0,9^2 + \ldots + 2 \times 0,9^{36}$.
D'où $0,9S_{36} = 2 \times 0,9 + 2 \times 0,9^2 + \ldots + 2 \times 0,9^{36} + 2 \times 0,9^{37}$.
On en déduit par différence des deux lignes précédentes que :
$0,9S_{36} - S_{36} = 2 \times 0,9^{37} - 2$, d'où $-0,1S_{36} = 2\left(0,9^{37} - 1\right)$ et fina lement ;
$S_{36} = \dfrac{2\left(0,9^{37} - 1\right)}{-0,1} = 20 \times \left(1 - 0,9^{37}\right) = 2 \times \frac{1-0,9^{37}}{1-0,9}$.

Question 3
Le programme correct est le troisième.

Question 4

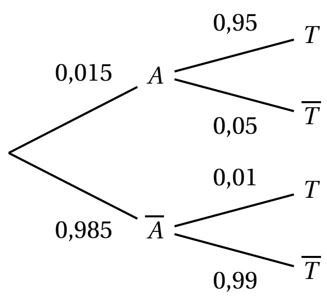
On a $x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}\ ;\ 0\right]$ et $\cos x = 0,8$ alors :
De $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ ou $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - 0,64 = 0,36$.
Comme $x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}\ ;\ 0\right]$, on sait que $\sin x < 0$, donc $\sin x = -0,6$.

Question 5

$\dfrac{13\pi}{4} = \dfrac{16\pi}{4} - \dfrac{3\pi}{4}$, donc le point associé au réel $\dfrac{13\pi}{4}$ est le même que celui qui est associé à $-\dfrac{3\pi}{4}$.

EXERCICE 2 **5 points**

1. On peut dresser un arbre de probabilités pondéré par les probabilités de chaque évènement :



   Il faut trouver $P\left(T \cap \overline{A}\right) = P\left(\overline{A} \cap T\right) = P\left(\overline{A}\right) \times P_{\overline{A}}(T) = 0,985 \times 0,01 = 0,00985$.

2. On a de même $P(A \cap T) = P(A) \times P_A(T) = 0,015 \times 0,95 = 0,01425$.

   D'après la loi des probabilités totales :

   $P(T) = P(A \cap T) + P\left(T \cap \overline{A}\right) = 0,01425 + 0,00985 = 0,0241$.

3. On a $P_T\left(\overline{A}\right) == \dfrac{0,985 \times 0,05}{0,0635} = \dfrac{0,00985}{0,0241} \approx 0,4087 \approx 0,409$ au millième près.

   La probabilité sachant qu'une personne ayant été testée positive ne soit pas malade est d'environ 0,409.

EXERCICE 3 **5 points**

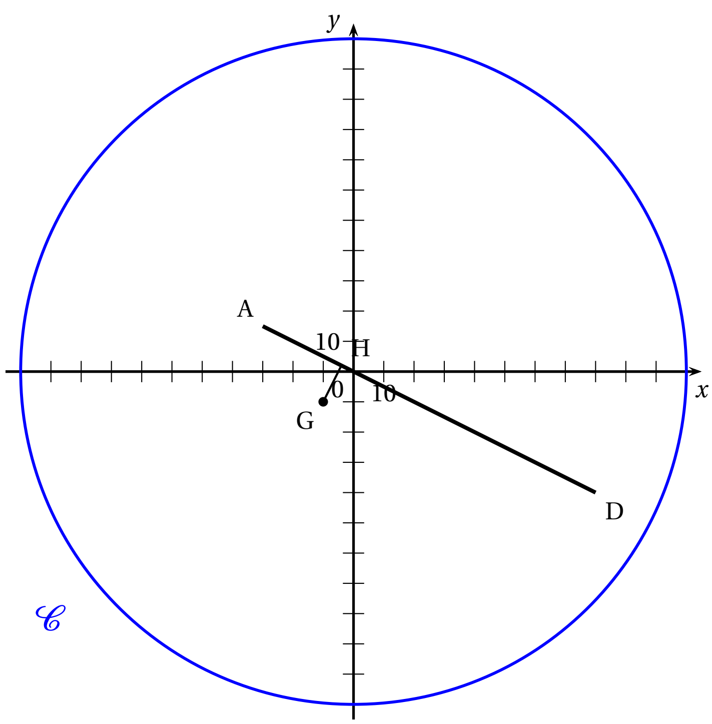
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \left(x^2 - 2,5x + 1\right)\text{e}^x$.

1. **a.** f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables sur cet intervalle :
$f'(x) = (2x - 2,5)\text{e}^x + \left(x^2 - 2,5x + 1\right)\text{e}^x = \text{e}^x\left(2x - 2,5 + x^2 - 2,5x + 1\right) = \text{e}^x\left(x^2 - 0,5x - 1,5\right)$
b. On sait que $\text{e}^x >$ quel que soit le réel x, donc $f'(x)$ a le signe du trinôme $x^2 - 0,5x - 1,5$.
On a $\Delta = 0,5^2 - 4 \times (-1,5) = 0,25 + 6 = 6,25 = (2,5)^2$. L'équation $x^2 - 0,5x - 1,5 = 0$ a donc deux racines :
$\dfrac{0,5 + 2,5}{2} = 1,5$ et $\dfrac{0,5 - 2,5}{2} = -1$.
On sait de plus que ce trinôme est positif sauf sur l'intervalle $]-1\,;\,1,5[$.
La fonction f est donc croissante sauf sur l'intervalle $]-1\,;\,1,5[$.

2. On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative dans un repère et $\mathscr{T}$ la tangente à $\mathscr{C}_f$ de la fonction f au point A d'abscisse 0.

a. On a $M(x\,;\,y) \in \mathscr{T} \iff y - f(0) = f'(0)(x - 0)$.
Avec $f(0) = 1 \times \text{e}^0 = 1$ et $f'(0) = -1,5 \times \text{e}^0 = -1,5$, on a donc :
$M(x\,;\,y) \in \mathscr{T} \iff y - 1 = -1,5(x - 0)$ ou encore $y = -1,5x + 1$.
b. Le point d'abscisse a appartenant à la fois à la courbe $\mathscr{C}_f$ et à la tangente $\mathscr{T}$, cette abscisse vérifie à la fois l'équation de f et celle de $\mathscr{T}$, soit :
$\left(a^2 - 2,5a + 1\right)\text{e}^a = -1,5a + 1$ ou $\left(a^2 - 2,5a + 1\right)\text{e}^a + 1,5a - 1 = 0$.
On peut entrer sur la calculatrice la fonction $x \longmapsto g(x) = \left(x^2 - 2,5x + 1\right)\text{e}^x + 1,5x - 1$ et essayer de chercher pour quelle valeur cette fonction s'annule (en dehors de 0). On a $g(1,7) \approx -0,42$ et $g(1,8) \approx 0,13$. Donc $1,7 < a <,8$.
$g(1,77) \approx --0,0599$ et $g(1,78) \approx 0,0002$, donc $1,77 < a <,78$.
Donc $a \approx 1,8$ au dixième près.

EXERCICE 4 **5 points**



1. Une allée centrale couverte a été construite afin de permettre aux automobilistes de rejoindre les magasins en cas d'intempéries. Elle est modélisée par la droite (AD) avec A$(-30;15)$ et D$(80;-40)$.

a. $M(x\,;\,y) \in \mathscr{C} \iff \mathrm{O}M^2 = 110 \iff (x-0)^2+(y-0)^2 = 110^2 \iff x^2+y^2 = 12\,100.$

b. On a $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\begin{pmatrix}-30\\15\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\mathrm{OD}}\begin{pmatrix}80\\-40\end{pmatrix}$: comme $\text{dét}\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\,;\,\overrightarrow{\mathrm{OD}}\right) = (-30)\times(-40)-15\times80 = 1\,200-1\,200 = 0$ les vecteurs sont colinéaires donc les points O, A et D sont alignés.

2. Camille qui vient de garer sa voiture en $G(-10\,;\,-10)$ sous une pluie battante, souhaite se mettre à l'abri sous cette allée centrale, le plus rapidement possible.

a. Avec $\overrightarrow{\mathrm{AG}}\begin{pmatrix}20\\-25\end{pmatrix}$, on a $\overrightarrow{\mathrm{AG}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AO}} = 20\times30+(-25)\times(-15) = 600-750 = -150$

b. L'équation réduite de la droite (AD) est $y = -\dfrac{1}{2}x$.

Soit H le projeté orthogonal de G sur la droite (AD). Quel que soit le point $M(x\,;\,y)$ de la droite (AD), le triangle GHM est rectangle en H et on a GH < GM (l'hypoténuse est le côté le plus grand) : le point H est donc le point de (AD) le plus proche de G.

Avec $\mathrm{H}\left(x\,;\,-\dfrac{1}{2}x\right)$, on a :

$\overrightarrow{\mathrm{GH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}} = 0 \iff (x+10)\times(-30)+\left(-\dfrac{1}{2}x+10\right)\times15 = 0 \iff -30x-300-7,5x+150 = 0 \iff$ $-150 = 37,5x \iff x = -\dfrac{150}{37,5} = -4.$

Le point de (AD) le plus proche de G est donc H(−4 ; 2) : ce n'est pas O