Rencontres avec le nombre d’or

Par Daniel Daviaud, professeur de maths, iufm La Rochelle.

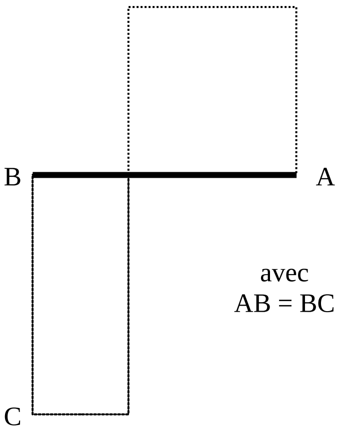
A l’occasion des journées APMEP d’octobre 2008 à La Rochelle, un groupe de 30 personnes a visité, mesuré et analysé trois portes de style Renaissance de la ville de La Rochelle dans le but de percer l’esthétique de leurs proportions. Ce document vise surtout à faciliter la compréhension des cas où le nombre d’or semble impliqué.
La littérature consacrée au nombre d’or est surabondante et inégale. Pour écrire ces pages je me suis contenté de feuilleter mes souvenirs et un vieux QUE SAIS-JE ? intitulé … Le nombre d’or.

I Dans les Eléments d’Euclide

Les passages suivants évoquent une manière particulière de partager un segment.

1) La proposition 11 du livre 2.

Problème : « Couper une droite donnée, de manière que le rectangle compris sous la droite entière et l’un des segments, soit égal au carré du segment restant. »
Ce qui signifie : Trouver un point d’un segment donné [AB] tel que le rectangle et le carré de la figure aient la même aire.



Euclide donne la solution suivante.
Le segment [AB] étant donné, on doit construire :

- -le carré ABCD
- -le milieu E de [AD]
- -le point F de [DA) tel que EF = EB
- -le carré AFGH tel que H appartient à [AB]
- -le rectangle HBCI.

Réaliser la construction :
…

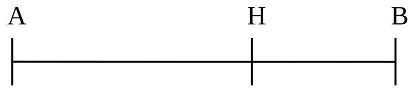
Euclide démontre ensuite que le rectangle DFGI et le carré ABCD ont la même aire. Par retrait du rectangle commun ADIH, il prouve alors que le rectangle HBCI et le carré AFGH ont la même aire. Il a ainsi justifié sa construction.

Détailler cette démonstration :
…

2) La définition 3 du livre 6.

Cette définition précise : « Une droite est dite coupée en extrême et moyenne raison, lorsque la droite entière est au plus grand segment comme le plus grand segment est au plus petit ».
Autrement dit, un segment [AB] est coupé en extrême et moyenne raison par un point H lorsque

$AB/AH = AH/HB$.



Cela signifie que $AH^2 = AB \times HB$ et donc on sait construire H d’après la proposition précédente.

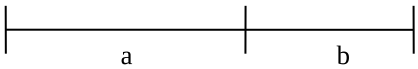
3) Plus loin encore.

Euclide rencontrera à nouveau ce type de partage dans l’étude des polygones et des polyèdres réguliers : pentagone étoilé, décagone, dodécaèdre et icosaèdre.
On constate qu’il traite froidement la question, et ne donne même pas de nom à ce que Léonard de Vinci nommera « sectia aurea » ou section dorée.

II La divine proportion : nombre d’or et naissance d’un mythe.

« La divine proportion » est un ouvrage du moine Luca Pacioli, paru à Venise en 1509.

1) Valeur exacte et notation du nombre d’or.

Figure : 

Il y a « divine proportion » lorsque $\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a}$ $\left(\frac{le\,grand}{le\,petit} = \frac{le\,tout}{le\,grand} \right)$.

Et la valeur commune de ces deux rapports est $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. C’est le nombre d’or. Valeur approchée : 1,618.

Démontrer ce résultat :
...

L’ouvrage de Luca Pacioli ne se limite pas aux aspects mathématiques du nombre d’or. Il aborde des considérations esthétiques et même mystiques, ce qui donnera naissance à un véritable mythe du nombre d’or.
Notation : le nombre d’or est noté **Φ**, par allusion au sculpteur Phidias, dit-on.

2) Construction rapide d’une section dorée.

La valeur de Φ étant connue ($\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$), on peut revisiter le partage d’un segment en extrême et moyenne raison et donner une construction plus élégante que celle d’Euclide (sans rien ôter à ses immenses mérites).
Etant donné un segment [AB], on peut construire un point C qui réalise une section dorée de la façon suivante.

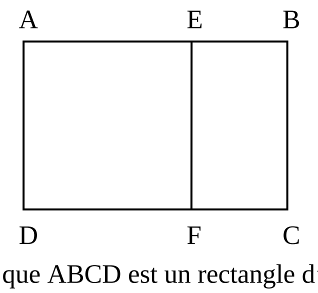
-Tracer un segment [BD] perpendiculaire à (AB) et de longueur AB/2.
-Construire le point E de [AD] tel que DE=DB.
-Construire le point C de [AB] tel que AC=AE.

Réaliser la construction et démontrer que : AB/AC = Φ :
...

III Le rectangle d’or et l’irrationalité du nombre d’or

1) Le rectangle d’or.

Dans un rectangle ABCD, on considère le carré ADFE.



On dit que ABCD est un rectangle d’or lorsque E réalise une section dorée de [AB].
On a alors *longueur/largeur* = AB/AE = Φ.
Dans ce cas, on peut prouver que le petit rectangle EBCF est d’or, lui aussi.

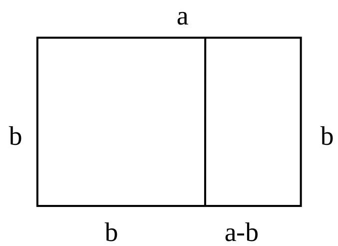
Démontrer cette affirmation :
...

2) Le nombre d’or est-il rationnel ou irrationnel ?

La réponse peut sembler évidente quand on sait que $\Phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, mais ignorons-le momentanément.

Raisonnons par l’absurde. Si Φ était rationnel, il existerait une fraction irréductible *a/b* égale à Φ.

En considérant le rectangle d’or de longueur *a* et de largeur *b*, on obtiendrait $\dfrac{a}{b} = \dfrac{b}{a-b}$.



Il existerait donc une fraction égale à *a/b* dont les termes seraient plus petits que *a* et *b*.
Ceci contredit l’irréductibilité de *a/b*. Donc Φ est irrationnel.
Cette démonstration était tout à fait à la portée des Grecs. On soupçonne même que Φ ait été le premier irrationnel découvert par les Grecs, avant $\sqrt{2}$.

3) La spirale dorée.

Elle s’obtient en traçant les diagonales de carrés inscrits dans des rectangles d’or emboîtés.

4) Construction d’un rectangle d’or.

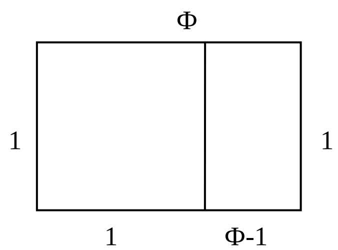
-Construire d’abord un carré ABCD.
-Prendre le milieu E de [AB].
-Placer F sur [AB) tel que EF =EC.
-Achever le rectangle DAFG : il est d’or.

Démontrer que DAFG est d’or :
...

IV Carré, inverse et puissances du nombre d’or

1) Formules.

Considérons un rectangle d’or de côtés 1 et Φ.



Le petit rectangle étant également d’or, on a $\dfrac{1}{\Phi-1} = \dfrac{\Phi}{1}$.

Cette égalité implique $\dfrac{1}{\Phi} = \Phi - 1$ par passage à l’inverse

Et $\Phi^2 - \Phi = 1$ par égalité des produits en croix, d’où $\Phi^2 = \Phi + 1$.

Ainsi : pour calculer le carré on ajoute 1 ; pour calculer l’inverse on soustrait 1.

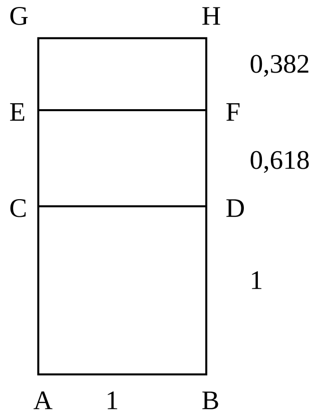
Conséquences : $\Phi^3 = 2\Phi + 1$; $\Phi^4 = 3\Phi + 2$; $\Phi^5 = 5\Phi + 3$ …

Démontrer les résultats ci-dessus. Démontrer aussi la superbe égalité $(\Phi+1)\times(\Phi-1) = \Phi$:
...

2) Exercices.

Premier exercice.

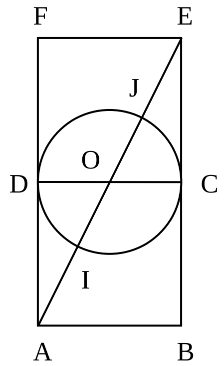
En mesurant la porte d'un édifice, on trouve les mesures suivantes en mètres et approchées à 1 mm près.



Trouver deux sections dorées et deux rectangles d'or dans cette figure.

Second exercice.

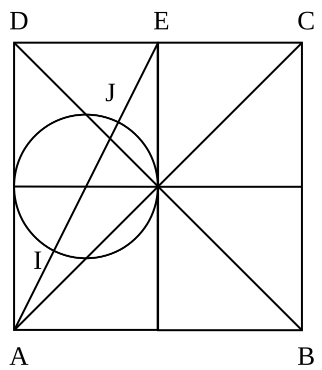
On considère la figure suivante où ABCD est un double carré.



Démontrer que I réalise une section dorée de [AJ].
…

Troisième exercice.

ABCD est un carré. Les points I et J sont ceux de l'exercice précédent.
Compléter (ou plutôt refaire) la figure en traçant la parallèle à (AB) passant par J.
Elle coupe les diagonales du carré ABCD en M et N.
Construire le projeté orthogonal P (resp. Q) de M (resp. N) sur (AB).
Démontrer que MNQP est un rectangle d'or.



…

V La suite de Fibonacci et le nombre d'or

1) La suite de Fibonacci.

Leonardo Fibonacci, mathématicien toscan (1180-1250 environ) a étudié la célèbre suite

1 1 2 3 5 8 13 21 34 55 89 …

dans laquelle, tout terme (hormis les deux premiers) est la somme des deux termes qui le précèdent.
Cette suite est supposée donner les nombres de couples de lapins que l'on obtient, mois après mois, en partant d'un couple de lapins et sachant que chaque couple produit, à partir de l'âge de deux mois, un nouveau couple de lapins tous les mois. Ce Fibonacci, quel pédagogue !

La formule générale donnant le n-ième terme de cette suite est $u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$.

Vérifier que cette formule donne effectivement :

n	*1*	*2*	*3*	*4*
u_n	*1*	*1*	*2*	*3*

(Mais attention, la démonstration générale n'est pas triviale).

…

On peut donc écrire $u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\Phi^n - \frac{1}{\sqrt{5}}(1-\Phi)^n$, ce qui montre que tous les termes de cette suite s'expriment en fonction du nombre d'or. Et que ladite suite risque de servir à bien d'autres choses qu'à dénombrer les petits lapins.

2) Approximations rationnelles du nombre d'or.

Si l'on s'intéresse aux quotients des termes successifs de la suite de Fibonacci, on obtient :

1/1=1 2/2=2 3/2=1,5 5/3 ≈1,666 8/5=1,6 13/8=1 ,625 21/13 ≈1,615 34/21 ≈1,619 55/34 ≈1,617 etc.

Il apparaît que ces quotients sont de plus en plus proches du nombre d'or.
Démontrer ce résultat par un calcul de limite à partir de la formule générale ci-dessus :

...

Il en résulte que ces quotients fournissent des approximations fractionnaires, donc rationnelles, du nombre d'or.
Et plus le couple de termes successifs est loin du départ, plus l'approximation est précise.

Dans les œuvres graphiques ou architecturales dont les proportions correspondent à ces quotients, il est légitime de se demander si le créateur de l'œuvre avait ou non l'intention de s'appuyer sur le nombre d'or.
La réponse pourrait bien être positive dans l'exemple du théâtre d'Epidaure (en Grèce) qui présente deux séries de gradins comptant respectivement 34 et 21 marches (total 55) et qui partagent ainsi l'auditorium en extrême et moyenne raison.
Mais chercher le nombre d'or en présence de rapports comme 3/2, 5/3 ou 8/5 paraît fort abusif car on ne pense pas forcément au nombre d'or quand on partage une longueur en 2, en 3 ou en 5.

VI Un premier triangle d'or : le triangle égyptien

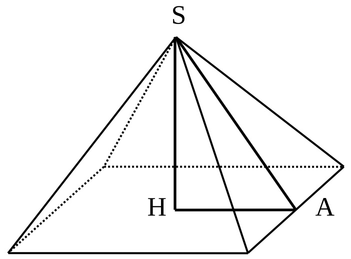
1) Quel est ce triangle ?

C'est un triangle rectangle dont les côtés sont en progression géométrique : par exemple *a, ax, ax²*.

Démontrer que $x = \sqrt{\Phi} \approx 1,272$ *:*

...

Par définition, un triangle égyptien sera un triangle (rectangle) de côtés a, $a\Phi$ et $a\Phi^2$.
On le qualifie d' « égyptien » car on le retrouve (c'est écrit dans les livres) dans la pyramide de Chéops.



Le triangle SHA est égyptien.

2) Une propriété de la pyramide de Chéops.

Cette propriété remarquable est citée par Hérodote qui l'aurait apprise de prêtres égyptiens.
L'aire d'une face latérale de la pyramide est égale au carré de la hauteur.

Démontrer cette propriété :

…

3) La proporción cordobesa.

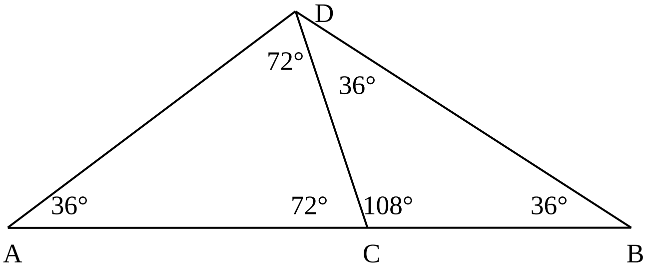
En Andalousie, on a identifié, dans la mosquée de Cordoue et ailleurs, un nombre « concurrent » ou « complémentaire » du nombre d'or : la proporción cordobesa, dite aussi « proportion humaine » en miroir de la « divine proportion ». Elle vaut $\sqrt{\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}} \approx 1,306$. C'est le quotient du rayon d'un cercle par le côté de l'octogone régulier inscrit.

Certains estiment retrouver ce nombre dans les grandes pyramide d'Egypte, à la place de $\sqrt{\Phi}$.
Alors 1,272 ou 1,306 ? That is the question.

VII Deux autres triangles d'or

1) Les triangles isocèles ayant un ou deux angle(s) de 36°.

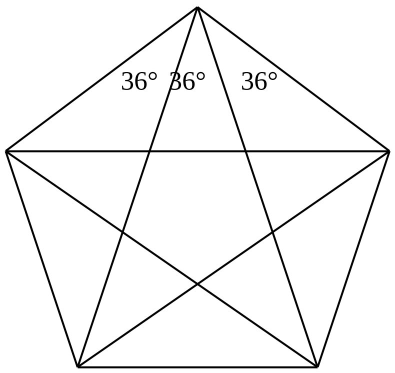
Il en existe deux : (36°,72°,72°) et (36°,36°,108°).
Examinons la figure suivante (fausse mais suffisante ici).

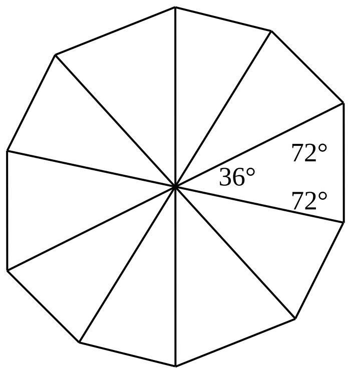


AB/AC = AB/AD car ACD est isocèle en A
= BD/BC car ABD et BDC sont semblables
= AD/BC car ABD est isocèle en D
= AC/BC car ACD est isocèle en A.
Donc C réalise une section dorée de [AB].
Conclusion : dans ces deux triangles, on a (grand côté)/(petit côté) = Φ.

2) Les polygones réguliers habités par ces triangles.

Comme le montrent les figures (très fausses) suivantes, les triangles d'or ci-dessus foisonnent dans le pentagone régulier étoilé et, de façon moins envahissante, dans le décagone régulier.





diagonale/côté = Φ

rayon/côté = Φ

Par voie de conséquence, on trouvera encore le nombre d'or dans le dodécaèdre régulier dont les douze faces sont des pentagones réguliers, mais aussi dans l'icosaèdre régulier dont les vingt faces triangulaires équilatérales sont groupées par cinq autour de chaque sommet, de sorte qu'on peut couper le solide en faisant apparaître des pentagones réguliers.
Ainsi le nombre d'or est « visible » dans toute œuvre contenant ces figures-là, mais l'auteur avait-il pour autant le dessein de souscrire à ce canon là.

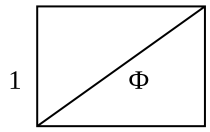
3) Construction d'un pentagone régulier, à la règle et au compas.

Redécouvrir ce grand classique :
…

VIII Autres rectangles d'or

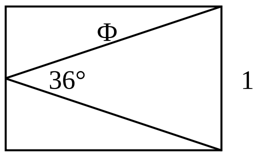
Certains « chercheurs d'or » n'en finissent pas de trouver des figures d'or, oubliant sans doute que tout ce qui brille n'est pas d'or.
Le véritable rectangle d'or est celui qui vérifie *longueur/largeur* = Φ, mais lui a trouvé de nombreux cousins.

a) *diagonale/largeur* = Φ



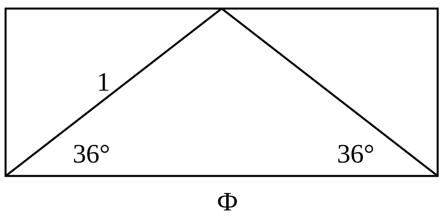
On reconnaît deux triangles égyptiens accolés par l'hypoténuse.

b) *« semi-diagonale»/largeur* = Φ



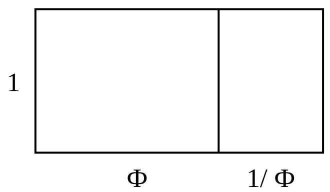
On reconnaît le rectangle contenant le triangle isocèle dont l'angle au sommet mesure 36°.

c) *longueur/«semi-diagonale»* = Φ



On reconnaît le rectangle contenant un triangle isocèle dont les angles à la base mesurent 36°.

d) rectangle obtenu en accolant deux « vrais » rectangles d'or



Il est temps d'arrêter cette énumération. Ce sera sans regret car le silence est d'or, lui aussi.