... ces problèmes qui font les mathématiques...

La duplication du cube :

— un problème
— des solutions à base de géométrie (configurations, trigonométrie, coordonnées, transformations) et d'analyse (suites, fonctions,...)

Jean Aymes

"...on a utilisé certains résultats de la théorie des idéaux pour prouver l'impossibilité de cas particuliers du dernier problème de Fermat... (Historiquement, les choses se sont passées dans l'autre sens : la théorie des idéaux s'est développée à propos d'une tentation de démonstration du dernier théorème de Fermat.)"

Philip J. DAVIS et Reuben HERSH
L'Univers Mathématique
traduit et adapté par Lucien CHAMBADAL

Les mathématiques évoluent par la résolution de problèmes. Nous présentons ici quelques façons d'en résoudre un... très vieux... : comment transformer un cube en un autre de volume double ?

Ce problème fut probablement abordé au moins dès le V[e] siècle avant J.C. : connu sous le nom de "duplication du cube", c'est l'un des plus célèbres problèmes de l'Antiquité.

Il revient à la recherche de $\sqrt[3]{2}$: aujourd'hui toute calculatrice nous en donne une bonne valeur approchée, nous ne nous rendons même plus compte des efforts faits à son propos. Le statut du problème était tout différent à l'origine : les Anciens séparaient assez radicalement l'arithmétique et la géométrie. A l'origine, la duplication du cube est un problème de géométrie... ceci ne fait qu'illustrer le principal obstacle épistémologique rencontré par les mathématiciens grecs du V^e siècle avant J.C. : l'impossibilité de concevoir sous une forme abstraite la notion de nombre réel.

Il faudra des siècles pour que le statut numérique du problème soit mis en évidence, d'abord sans doute à travers les travaux des Hindous.

Nous allons présenter quelques processus de résolution du problème : en reprenant d'abord quelques-unes des solutions historiques, puis en ayant un peu recours aux outils de l'analyse.

Le problème sera-t-il résolu ?

Un problème... solide !

L'exigence des Grecs pour des constructions à la règle et au compas imprègne l'ensemble de leur géométrie ; mais l'apparition de problèmes qu'ils n'arrivaient pas à résoudre ainsi a provoqué de fécondes recherches. Selon leur terminologie [voir PAPPUS, La Collection], ils distinguaient les problèmes "plans" que l'on peut résoudre avec règle et compas, les problèmes "solides" qui peuvent être résolus par les coniques et les problèmes "grammiques" qu'on ne peut résoudre ni par droite et cercle, ni par coniques. Quand nous parlons ici d'impossibilité, il ne s'agit ici que d'une conjecture...

$\sqrt{2}$ est constructible à la règle et au compas (c'est la duplication du carré), de même la moyenne géométrique de deux nombres a et b (x tel que $\frac{a}{x} = \frac{x}{b}$, c'est-à-dire $x = \sqrt{ab}$ dans la notation moderne) :

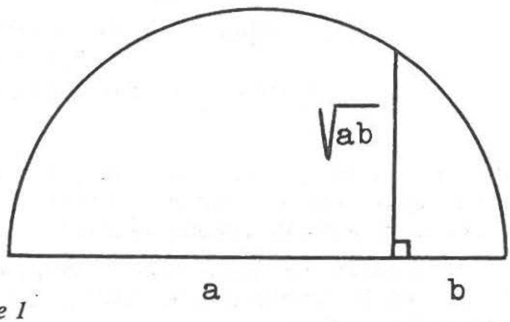


figure 1

Vers le Ve siècle avant J.C., le mathématicien pythagoricien, HIPPOCRATE de CHIO, établit que le problème de la duplication du cube se ramène à un problème d'insertion de deux "moyennes proportionnelles" entre deux longueurs données : en notation moderne il suffit de déterminer x et y tels que : $\frac{a}{x}=\frac{x}{y}=\frac{y}{2a}$ pour obtenir $x=a\sqrt[3]{2}$; maintenant nous dirions que a ; $a\sqrt[3]{2}$; $a(\sqrt[3]{2})^2$; $2a$ sont les premiers termes d'une suite géométrique.

Un demi siècle plus tard, MENECHME utilise ce point de vue pour donner une solution : dans le langage actuel, elle correspond à l'intersection de deux paraboles d'équations :

$$x^2=ay \quad \text{et} \quad y^2=2ax$$

Ces paraboles se rencontrent en leur sommet commun O et au point d'abscisse $a.\sqrt[3]{2}$.

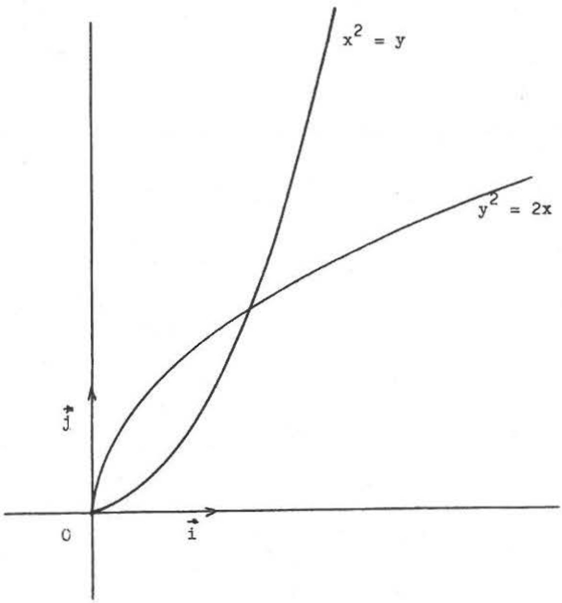


figure 2

L'intuition de la nature "solide" du problème ne fait que se renforcer, il faudra attendre 1837 pour que l'inconstructibilité de $\sqrt[3]{2}$ par règle et compas, soit prouvée par WANTZEL ; mais c'est une autre histoire... longue histoire que celle de la résolution des équations algébriques !

MORCEAUX CHOISIS D'UNE RECHERCHE DEUX FOIS MILLÉNAIRE

Nous allons commencer par présenter quelques-unes des principales réponses de divers mathématiciens au cours de l'histoire... nous exhumerons de "vieilles choses"... mais ce sont nos racines... Sans chercher à respecter la lettre des processus employés, nous avons cherché à présenter les idées sous la forme d'activités destinées à susciter un peu de recherche chez les élèves.

1. La solution de Platon

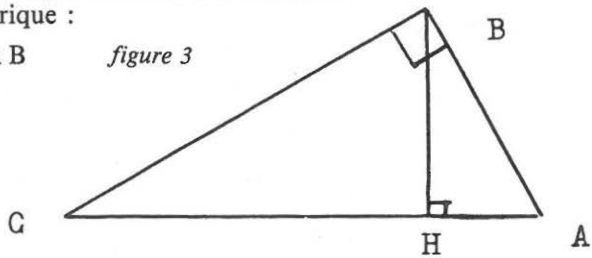
Elle repose sur une façon bien connue de déterminer trois nombres en progression géométrique :

Avec ABC rectangle en B et H projeté de B (figure 3)

$$\frac{HB}{HA} = \frac{HC}{HB}$$

ne fait pas de doute.

figure 3



Voici alors, un peu transposée, la solution de PLATON :

OA = a
OD = 2a

Ces deux segments sont perpendiculaires.

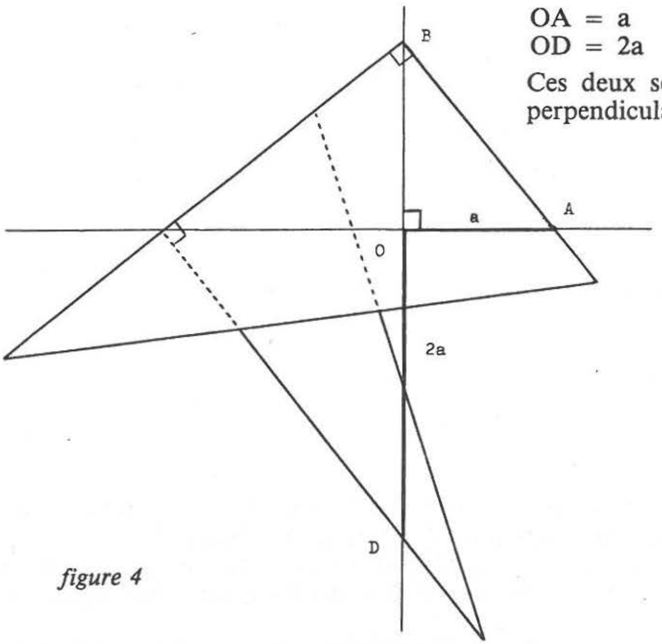


figure 4

Faire jouer deux équerres en papier calque pour réaliser la construction de B tel que $OB = \sqrt[3]{2}.a$.

2. Une solution due à Apollonius et Philon de Byzance

Avec $OA = a$, $OB = 2a$, ces deux segments perpendiculaires puis C de sorte que OACB soit un rectangle dont le centre est I.

APOLLONIUS considère le cercle de centre I coupant (OA) et (OB) en D et E de sorte que C,D,E soient alignés (figure 5).

Il affirme alors que BE et AD sont les moyennes proportionnelles cherchées (la méthode vaut pour l'insertion de deux moyennes).

On observera qu'il y a trois triangles rectangles ayant mêmes angles : ADC , BCE et ODE. L'égalité $ID = IE$ permet d'obtenir $\frac{BE}{AD} = \frac{OD}{OE}$.

D'où : $$\frac{OA}{BE} = \frac{BE}{AD} = \frac{AD}{OB}$$

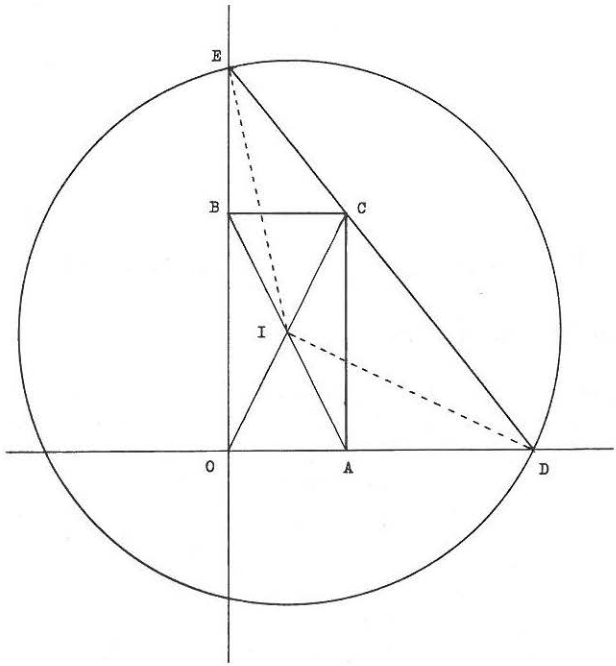


figure 5

Remarquer le lien avec la solution de PLATON en examinant la position des autres points d'intersection du cercle avec (OA) et (OB).

PHILON de BYZANCE a proposé une amélioration de la détermination des points D et E en envisageant l'intersection de la droite (DCE) avec le cercle circonscrit au rectangle (figure 6).

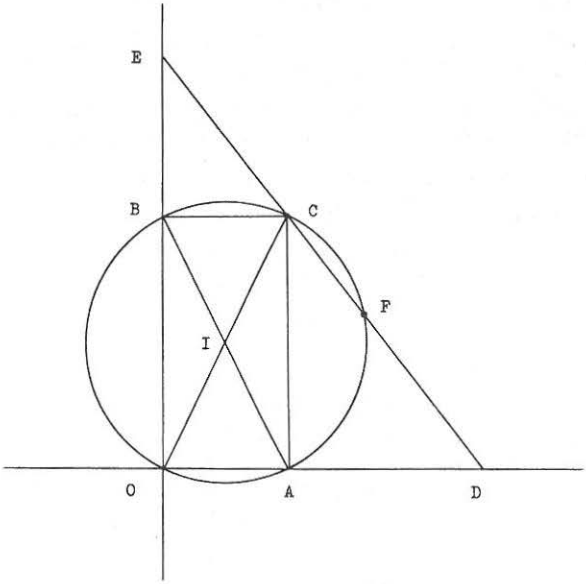


figure 6

Il suffit que la droite (DCE) soit choisie de façon que CE = DF.

3. La solution de Huyghens

Pour construire un cube de côté double de celui de côté OA = a , on trace le demi cercle de rayon OA, on prend la corde AD = OA, on trace (CD), on mène par A une corde AE qui coupe (CD) en F et le demi cercle en E, de telle sorte que CE = FD (figure 7).

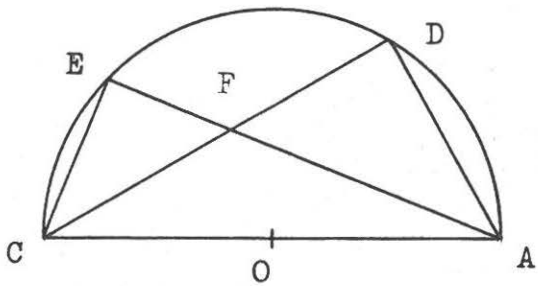


figure 7

Alors AF sera le côté du cercle cherché : $a\sqrt[3]{2}$. On peut l'établir par exemple comme suit :

— on pose $AF = x$, en convenant que $OA = 1$;
— les triangles rectangles CEF et ADF ont mêmes angles, ce qui permet d'en déterminer les côtés en fonction de x ;
— le théorème de Pythagore appliqué à ADF permet de conclure.

Remarquons au passage que l'angle $\widehat{DAF}$ a pour cosinus

$$\frac{1}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{4}}{2} ,$$

il s'en faut de moins de un dixième de degré que $\widehat{COE}$ ne mesure 45° (on le voit avec la calculatrice), ce qui, comme l'avait remarqué HUYGHENS fournit un procédé d'approximation de $\sqrt[3]{2}$ dont on peut choisir de se satisfaire :

Placer D tel que $\widehat{AOD}$ mesure 60°.
Placer E′ tel que $\widehat{COE'}$ mesure 45°.
(CD) et (AE′) se coupent en F′ (figure 8).

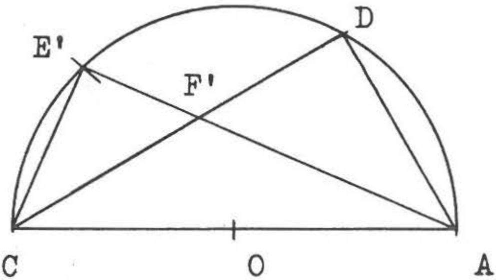


figure 8

AF′ est une bonne approximation de $\sqrt[3]{2}$:
— l'angle $\widehat{DAF'}$ mesure 37,5°, c'est-à-dire $\frac{45° + 30°}{2}$
— on calcule $\sin^2 37{,}5°$: $\frac{4+\sqrt{2}-\sqrt{6}}{8}$
— en posant $x' = AF'$, dans le triangle rectangle ADF′ , on peut exprimer x'.

Cette construction approchée est possible à la règle et au compas ! Et pour $\sqrt[3]{2}$ il s'en faut de peu !

4. La solution de Nicomède

On commence comme pour la solution d'APOLLONIUS, OACB rectangle ; $OA = a$; $OB = 2a$.

On trace la médiatrice de [OA], on place le milieu F de [OB], puis G sur la médiatrice tel que $OG = OF$, la droite (CF) coupe la droite (OA) en H, par A on trace la parallèle à (HG).

En traçant par G une droite coupant cette parallèle en K et la droite (OA) en L, de sorte que $KL = OF$ (= OA) ; avec (CL) coupant (OB) en M : BM et AL sont les moyennes proportionnelles cherchées (figure 9).

Ayant convenu que $a=1$, ce qui n'altère pas la preuve, on justifiera en observant la configuration des points L, A, H, K, G puis celle des points G, E, L :

— en posant $AL=x$, on peut exprimer GL en fonction de x ;
— l'énoncé de THALÈS pour L, A, H, K, G permet d'aboutir.

OA = a
OB = 2a

Ces deux segments sont perpendiculaires.

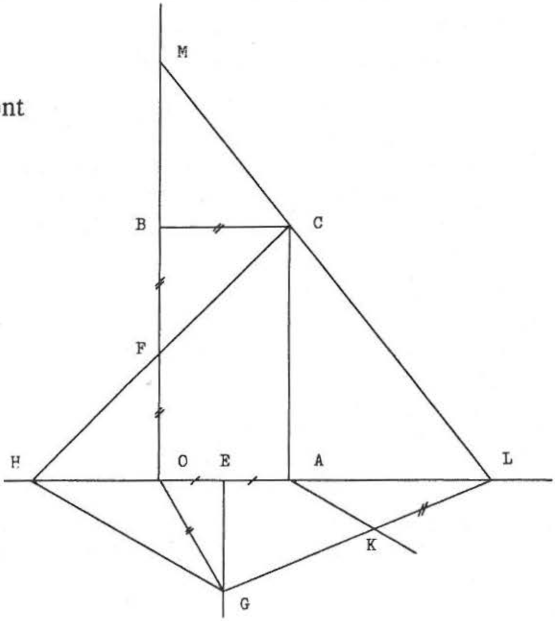


figure 9

Mais l'intérêt de cette solution ne consiste pas seulement en cela, pour tracer la droite (GKL), NICOMÈDE propose de s'intéresser à l'ensemble des points L lorsque K décrit la droite parallèle à (GH) par A, de sorte que KL ait une valeur constante sur (GK).

K décrit la parallèle à (GH)

KL = OA

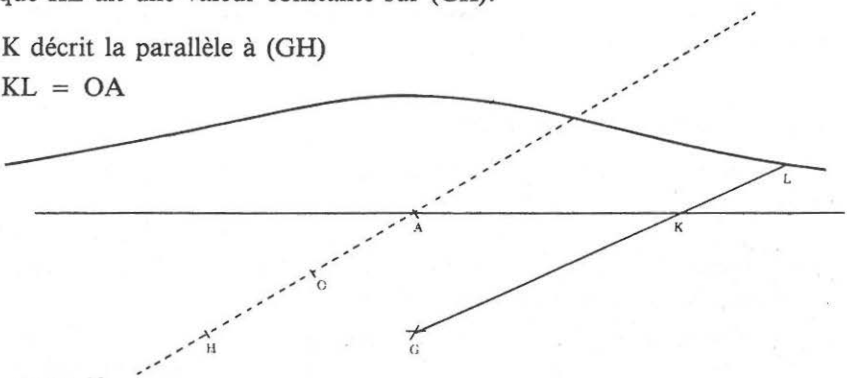


figure 10

Cet ensemble dont on peut obtenir autant de points que l'on veut par construction à la règle et au compas est appelé conchoïde de la droite (OA) (figure 10).

La duplication du cube est donc possible par intersection de conchoïde et de droite. On peut résoudre de même le problème de l'insertion de deux moyennes proportionnelles.

Elargissant un peu le champ des outils permis pour le tracé des figures de géométrie, NICOMÈDE propose un appareil traceur de sa conchoïde :

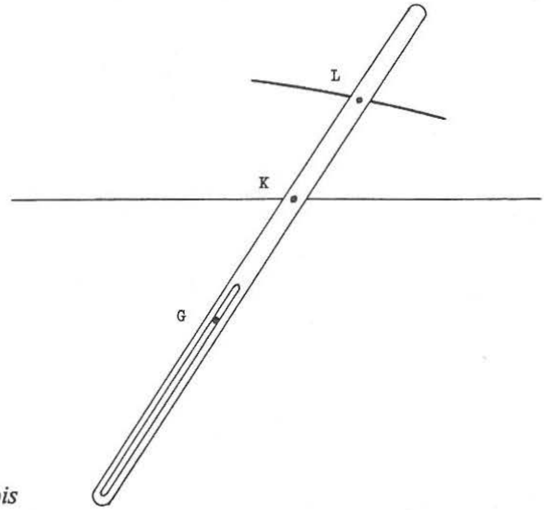


figure 10bis

Une règle munie d'une glissière pivote autour d'un pivot fixe en G. K décrit la droite, en L un traceur permet de tracer la courbe (figure 10bis) avec KL fixé.

On envisage maintenant la conchoïde comme ensemble des points L, auquel on adjoint l'ensemble des points L′ symétriques de L par rapport à K (figure 10ter).

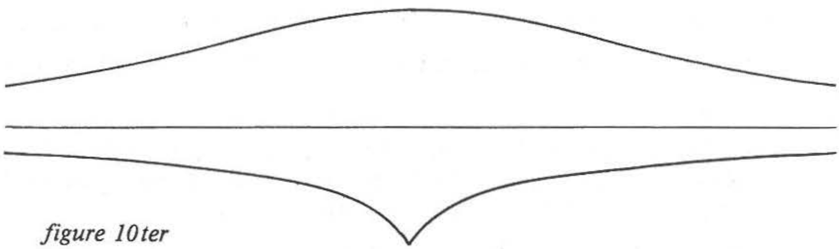


figure 10ter

L'étude de cette courbe est approfondie au XVIIe siècle : ses tangentes (Fermat, Descartes, Roberval), ses points d'inflexion (Huygens, Sluse).

5. La solution de Dioclès

On recommence avec $OA = a$, $OB = 2a$ sur deux perpendiculaires. On trace le cercle de diamètre [OA] et la tangente en A à ce cercle. En plaçant une droite passant par O recoupant le cercle en N, coupant (AB) en M et la tangente en P, de sorte que $ON = MP$.
On a $AP = a\sqrt[3]{2}$ (figure 11).

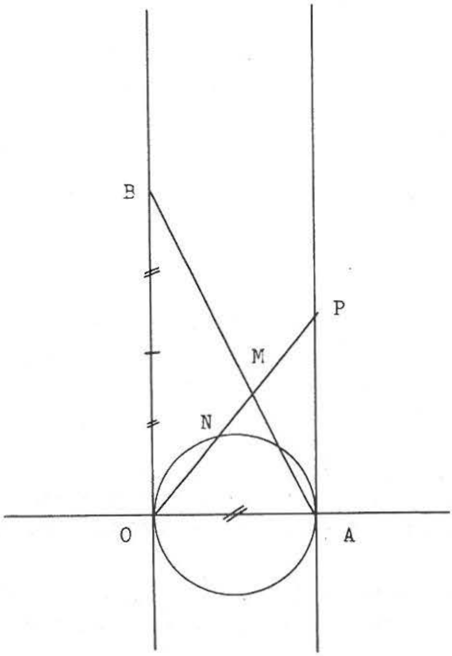


figure 11

Bien que DIOCLÈS n'ait pu le faire, on fera une preuve par la géométrie analytique... Avec le repère $(O\ ;\ \overrightarrow{OA}\ ;\ \frac{1}{2}\overrightarrow{OB})$, en posant m pour l'ordonnée de P, déterminer les coordonnées de N, M, P et terminer.

Mais comme NICOMÈDE, DIOCLÈS interprète cette solution comme l'intersection de deux courbes : la droite (AB) et l'ensemble des points N lorsque P, décrivant la tangente, $ON = MP$ est respectée.

Cette courbe est la cissoïde de DIOCLÈS dont on peut construire autant de points que l'on veut à la règle et au compas (figure 12).

On peut résoudre de même l'insertion de deux moyennes proportionnelles.

P décrit la tangente
OM = NP
M décrit la cissoïde.

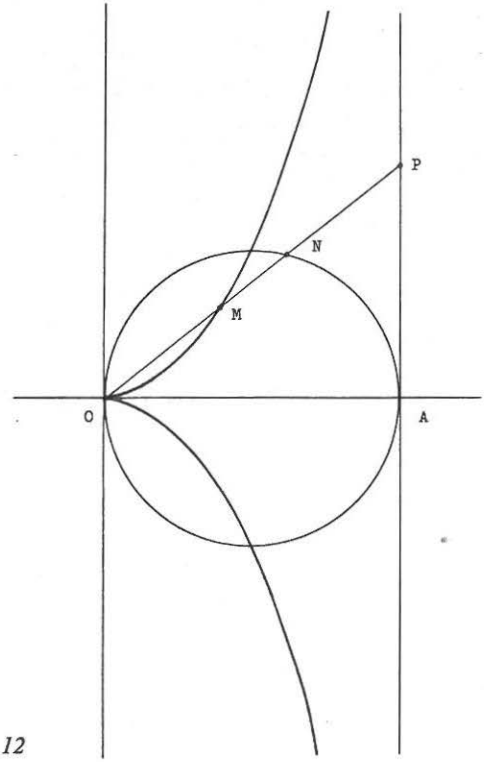


figure 12

Cette courbe est encore de celles que l'on peut tracer avec un appareil : c'est NEWTON qui en imagina un. Pour le mettre en évidence, nous allons résoudre un petit exercice de géométrie.

Reprenons la configuration de définition de la cissoïde (figure 12bis) :

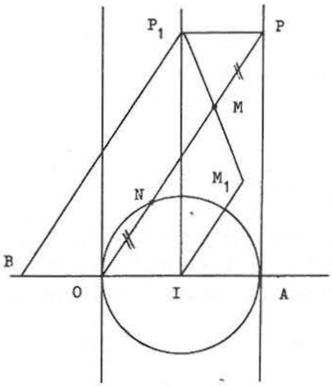


figure 12bis

Soit P_1 le projeté de P sur la médiatrice de [OA], par utilisation d'une symétrie centrale bien choisie, justifier $P_1M = NI = OI$.

Soit M_1 l'intersection de (MP_1) et de la parallèle à (OP) par I puis B l'intersection de (OA) et de la parallèle à (OP) par P_1, mettre en évidence une des isométries transformant O,B en M,P_1 respectivement.

Etudier l'image par cette isométrie du triangle BIP_1, en tirer une conséquence pour le triangle BM_1P_1 lorsque P varie sur la tangente.

Voici alors, l'appareil de NEWTON pour tracer la cissoïde de DIOCLÈS :

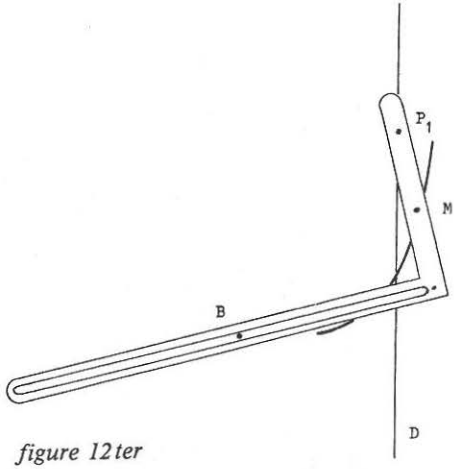


figure 12ter

Une équerre rigide dont un côté porte une glissière coulissant sur un pivot fixe B, l'autre côté a son extrémité qui décrit une droite fixe D, un traceur en M, milieu du côté, décrit la courbe. On doit respecter

$MP_1 = \frac{1}{2}d$ (B,D) (figure 12ter).

C'est presque... un compas !

6. La géométrie de Descartes

En 1637 paraît la première édition de "La Géométrie" de René DESCARTES : reprenant les problèmes des Anciens, DESCARTES, en amorçant une classification des courbes, va fonder la géométrie analytique.

Le problème qui nous occupe y est abordé plusieurs fois.

D'abord à travers la situation servant de cadre à la classification des courbes :

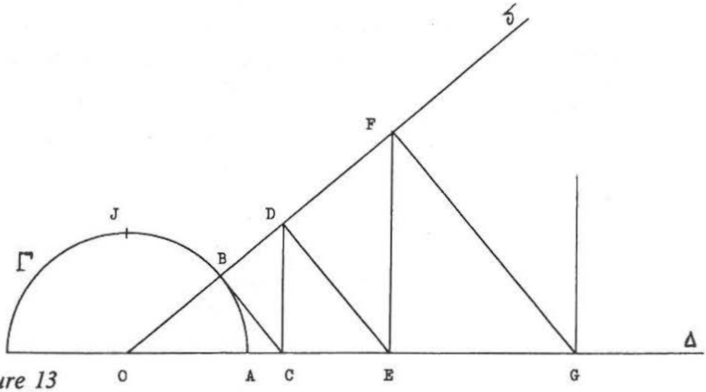


figure 13

Une droite $\triangle$ est diamètre fixe d'un cercle fixe Γ de centre O. Une droite variable δ passe par 0 et coupe Γ en B, la perpendiculaire en B à δ coupe $\triangle$ en C, la perpendiculaire en C à $\triangle$ coupe δ en D... et de même pour définir E sur $\triangle$, F sur δ, G sur $\triangle$, ... etc.

On a aisément :

$$\frac{OB}{OC} = \frac{OC}{OD} = \frac{OD}{OE} = \frac{OE}{OF}$$

Déterminer dans le repère (O, $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OJ}$) une équation cartésienne (sic !) de l'ensemble des points D et proposer une fois cette courbe tracée une résolution du problème.

Remarquons :

1) qu'un jeu de trois équerres ferait un appareil résolvant le problème...

avec OE = 2 OA

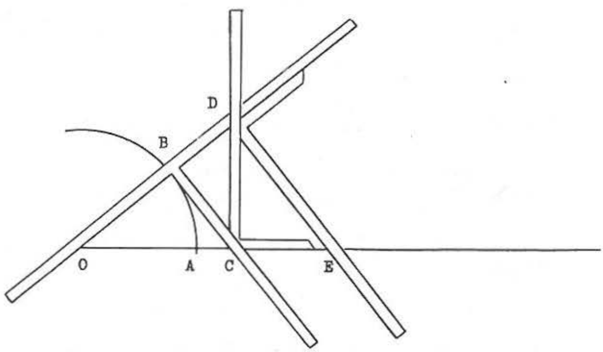
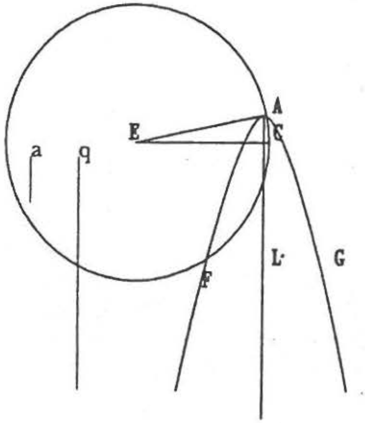


figure 14

2) qu'on peut résoudre de façon analogue le problème de l'insertion de trois, quatre, etc... moyennes proportionnelles.

Ensuite, DESCARTES résout des problèmes de constructions géométriques dans lesquels les longueurs inconnues satisfont à des équations du 3[e] degré et de degré plus élevé : il s'agit d'un véritable exposé de la théorie des équations. Il montre comment résoudre toute équation de degré 3 ou 4 par l'intersection d'un cercle et d'une parabole.

Citons la résolution du problème de la duplication du cube [15] :



Si on veut donc, suivant cette règle, trouver deux moyennes proportionnelles entre a et q, chacun sait que posant z pour l'une, comme a est à z, ainsi z à $\frac{zz}{a}$, et $\frac{zz}{a}$ à $\frac{z^3}{aa}$; de façon qu'il y ait équation entre q et $\frac{z^3}{aa}$, c'est-à-dire $z^3 \propto * * aaq$. Et la parabole FAG étant décrite avec la partie de son essieu AC qui est $\frac{1}{2}$ a à la moitié du côté droit ; il faut du point C élever la perpendiculaire CE égale à $\frac{1}{2}$ q, et du centre E, par A décrivant le cercle AF, on trouve FL, et LA pour les deux moyennes cherchées. "

L'invention de deux moyennes proportionnelles.

Dans les notations et le langage de l'époque :

— $z^3 \propto **aaq$ signifie $z^3 = a^2q$

— l'essieu de la parabole est son axe focal.

On pourra retrouver ainsi une parabole et un cercle résolvant le problème.

(1) La figure fait aussi partie de l'ouvrage cité.

7. Par origami*... ça vaut le détour ! Ça ne fait qu'un pli

On pourra lire dans "L'Ouvert" n° 42 [16], la belle résolution du problème par pliage due à Jacques JUSTIN.

Il y montre que toute équation du troisième degré peut être résolue par pliage...

Voici le procédé pour la duplication du cube.

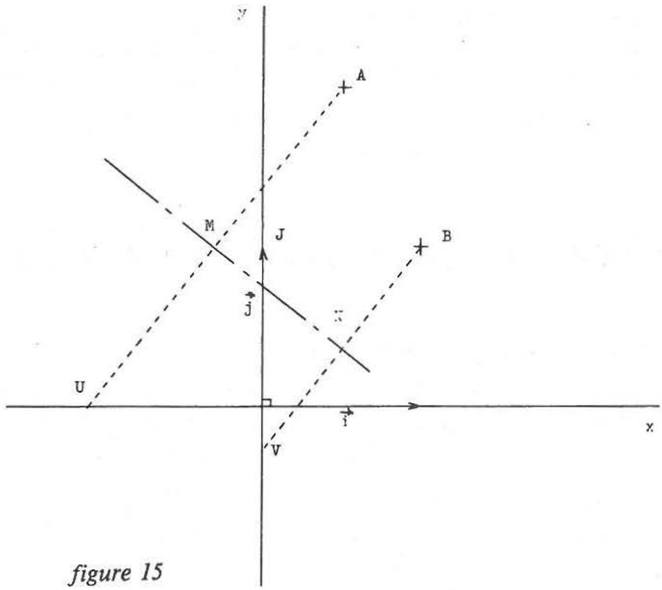


figure 15

Dans le repère $(O; \vec{i}\,; \vec{j})$, A et B ont pour coordonnées respectives $(1;1)$ et $(\frac{1}{2};2)$.

On plie de sorte que A vienne sur Ox en U et B sur Oy en V. Prenant t comme pente commune de (AU) et (BV), Jacques Justin montre, en imposant à (MN) d'avoir pour pente $-\frac{1}{t}$, que $t^3=2$. C'est-à-dire $VJ=\sqrt[3]{2}$.

Le problème de la duplication du cube fait partie de ceux qui ont joué un rôle fondamental dans l'évolution de diverses notions mathématiques :

• *statut des nombres* : si aujourd'hui on conçoit le problème presqu'exclusivement comme la résolution de l'équation $x^3=2$, il n'en fut pas de même à l'origine, on a pu le voir ;

* pliage du papier.

• *statut et étude des courbes* : la classification des Grecs (cercles et droites, coniques, autres) repose sur l'exigence de constructibilité règle et compas et repose sur la facilité avec laquelle on peut la décrire, notamment à partir d'appareils. La résolution des problèmes fait découvrir de nouvelles courbes : d'abord mises à part du fait de la nature de leur description par règle et compas, mais la mise à jour d'appareils pour les tracer introduit un doute quant à leur exclusion.

Ces courbes deviennent à leur tour sujet de nouveaux problèmes...

• *résolution des équations* : résolution des équations du troisième degré et du quatrième degré, progression de l'indépendance de l'algèbre vis-à-vis de la géométrie, caractérisation des équations résolubles au XIXe siècle...

Nous allons aborder maintenant quelques aspects d'une réponse par approximation au moyen de suites.

BEAUCOUP DE FAÇONS DE S'EN APPROCHER

1. L'apport des graphiques

$\sqrt[3]{2}$ est l'unique réel ℓ tel que $\ell^3 = 2$; il peut être interprété comme abscisse de l'intersection de deux courbes. Ici on peut, par exemple, penser à :

$C_1 : y = x^3$ et $C_2 : y = 2$

ou à : $C_1 : y = x^3 - 2$ et $C_2 : y = 0$

ou à : $C_1 : y = x^2$ et $C_2 : y = \frac{2}{x}$

Rechercher au moins trois autres possibilités.

Adopter une des possibilités et représenter les courbes correspondantes à échelle convenable. En déduire un encadrement de ℓ par des décimaux d'ordre 2.

2. Méthode d'interpolation linéaire

Appliquée ici sous trois formes possibles, elle consiste à remplacer une fonction par une fonction affine dont on pense qu'elle l'estime bien.

a) *Interpolation par des cordes* (méthode des sécantes)

Représenter dans le plan de repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité 1 cm) la fonction $x \to x^3 - 2$ restreinte à $[0;2]$. Noter A le point de coordonnées $(1;-1)$ et B celui de coordonnées $(2;6)$.

Quelle est l'abscisse X_1 du point d'intersection de la corde (AB) avec $x'x$?

Remplacer A par A_1 (X_1 ; X_1^3-2) pour en déduire l'abscisse X_2 du point d'intersection de (A_1 B) et $x'x$.

Plus généralement, si X est une approximation par défaut de $\sqrt[3]{2}$, en déduire, selon le processus ci-dessus, une approximation X' (donner X' en fonction de X).

Noter les approximations successives obtenues (la première étant 1 par exemple), observer le nombre d'étapes nécessaires pour constater une stabilisation sur la calculatrice.

Reprendre la même démarche pour la fonction

$$x \to \frac{2}{x^3} - 1 \ ;$$

comparer les résultats fournis par la calculatrice.

b) *Interpolation par des sécantes parallèles* (ajustement linéaire)

Présentée pour la courbe d'équation $y=x^3-2$, avec les notations du a), la corde (AB) a pour coefficient directeur 7 et coupe $x'x$, on l'a vu, au point d'abscisse $\frac{8}{7}$ notée ici Y_1.

Avec le point I_1 (Y_1 ; Y_1^3-2) on utilise la droite passant par I_1 de coefficient directeur 7 (qui ne varie donc pas).

Faire une représentation graphique sur l'intervalle [1;1,5], unité 10cm. Quelle est l'abscisse Y_2 de l'intersection de la sécante avec $x'x$?

Plus généralement, Y étant une valeur approchée par défaut de $\sqrt[3]{2}$, en déduire, selon cette démarche, une nouvelle valeur approchée Y' en fonction de Y.

Noter les approximations successives obtenues à la calculatrice en partant successivement de la valeur initiale 1,25, puis de la valeur initiale 1,26.

Remettre en question le choix du coefficient directeur 7 : essayer 5 et rechercher les approximations obtenues.

Essayer de proposer un meilleur choix encore.

Reprendre l'ensemble de la méthode pour la fonction

$$x \to \frac{2}{x^3} - 1$$

avec C(1;1) D(2; $-\frac{3}{4}$) comme points de départ.

Observer les résultats sur calculatrice.

c) *Interpolation par des tangentes : méthode de Newton*

• Avec $x \to x^3 - 2$, pour $Z > \sqrt[3]{2}$ la tangente en $J(Z;Z^3-2)$ coupe $x'x$ au point d'abscisse

$$Z' = \frac{2}{3}\left(Z + \frac{1}{Z^2}\right).$$

Le démontrer.

Observer les approximations obtenues par ce processus en partant de la valeur initiale 1,26.

C'est dès le Ve siècle, chez les Hindous, que l'on voit apparaître cet algorithme sous la forme de l'amélioration de l'approximation entière de la racine cubique.

• Avec $x \to \frac{2}{x^3} - 1$, pour $Z < \sqrt[3]{2}$, on tire de façon semblable

$$Z' = \frac{4}{3} Z - \frac{Z^4}{6}.$$

Observer les approximations obtenues par ce processus en partant de la valeur initiale 1,25.

3. Pour aller un peu plus loin...

Les diverses méthodes présentées ont en commun d'itérer un réel initial déjà relativement proche de $\sqrt[3]{2}$ par une fonction adaptée ; on a vu successivement :

$$x \to \frac{4x^2+2x+2}{x^2+4x+2}$$

$$x \to \frac{x^3+2x^2+2x+2}{2(x^2+x+1)}$$

$$x \to \frac{-x^3+7x+2}{7}$$

$$x \to \frac{-x^3+5x+2}{5}$$

$$x \to \frac{7x^4-4x^3+8}{7x^3}$$

$$x \to \frac{2}{3}\left(x + \frac{1}{x^2}\right)$$

$$x \to \frac{4}{3}x - \frac{x^4}{6}$$

Dans des manuscrits anonymes du XV[e] siècle et chez TARTAGLIA on trouve une façon d'améliorer l'approximation entière de la racine cubique qui contient en germe l'utilisation de :

$$x \to x + \frac{2-x^3}{3x^3+3x}$$

LÉONARD de PISE, à partir de l'interpolation linéaire entre les nombres entiers, utilise l'approximation qui correspond à

$$x \to x + \frac{2-x^3}{3x^2+3x+1}$$

Dans chaque cas, $\sqrt[3]{2}$ apparaît comme solution de $\ell = F(\ell)$ pour une fonction F adaptée : ceci élargit le cadre de la réponse à 1. et permet d'ouvrir la voie à d'autres.

4. Méthodes itératives

Les observations précédentes conduisent à une recherche d'équations équivalentes à $\ell^3 = 2$ s'écrivant sous la forme : $\ell = F(\ell)$; ce pour envisager une itération par la fonction F.

On peut, par exemple, penser à $\ell = \frac{2}{\ell^2}$, ainsi qu'à $\ell = \sqrt{\frac{2}{\ell}}$.

Expérimenter le premier cas à la calculatrice... et constater que le choix doit être plus réfléchi.

Avec le deuxième, observer les résultats obtenus à la calculatrice.

On pourra, en démontrant que $x \to \frac{2}{x^2}$ et $x \to \sqrt{\frac{2}{x}}$ (de $\mathbf{R}^{+*}$ dans $\mathbf{R}^{+*}$) sont réciproques, comparer les deux processus :

pour x proche de $\sqrt[3]{2}$, $\frac{2}{x^2}$ est-il plus près de $\sqrt[3]{\ }$ que x ne l'est ?

$\sqrt{\frac{2}{x}}$ est-il plus près de $\sqrt[3]{2}$ que x ne l'est ?

Il y a donc lieu de rechercher des fonctions qui réduisent au maximum les écarts autour de $\sqrt[3]{2}$: c'est-à-dire des fonctions pour lesquelles

$$\frac{F(x)-F(y)}{x-y}$$

est aussi proche de 0 que possible lorsque x et y varient distincts dans un intervalle contenant $\sqrt[3]{2}$ (pour fixer les idées [1,25 ; 1,26]), en tout cas ne sortant pas de $]-1 ; 1[$.

Ainsi, pour $F : x \to \sqrt{\frac{2}{x}}$: vérifier que

$$\frac{F(x)-F(y)}{x-y} = -\frac{2}{xy\left[\sqrt{\frac{2}{x}}+\sqrt{\frac{2}{y}}\right]}$$

en déduire que pour x, y choisis distincts dans [1,25 ; 1,26]

$$\frac{F(x)-F(y)}{x-y} \leqslant 0{,}51$$

Il en résulte que lorsque T est déjà proche de $\sqrt[3]{2}$ (c'est-à-dire, ici, au moins dans [1,25 ; 1,26],

$$|F(T)-\sqrt[3]{2}| \leqslant 0{,}51\ |T-\sqrt[3]{2}|$$

Combien d'itérations suffiront pour approcher $\sqrt[3]{2}$ à 10^{-10} près en partant de la valeur initiale 1,26 ?

Comment peut-on améliorer la rapidité du processus d'approximation ?

Il ne suffira pas de modifier la valeur initiale, il faut aussi pouvoir agir sur le taux : dans le cas présent, le nombre dérivé de F en $\sqrt[3]{2}$ donne une information sur les espoirs d'encadrement de ce taux ; pourquoi ?

Adoptons maintenant $F : x \to \frac{-x^3+5x+2}{5}$, estimer $F'(\sqrt[3]{2})$ et majorer

$$\frac{F(x)-F(y)}{x-y} \text{ sur } [1{,}25 ; 1{,}26] .$$

Combien d'itérations suffiront pour approcher $\sqrt[3]{2}$ à 10^{-10} près en partant de la valeur initiale 1,26 ?

Reprendre avec $F : x \to \frac{2}{3}\left(x+\frac{1}{x^2}\right)$.

5. Accélération d'un processus itératif

Avec $F\ x \to \sqrt{\sqrt{2x}}$, vérifier que $x^3=2$ équivaut à $X=\sqrt{\sqrt{2x}}$ [ceci sur $\mathbf{R}^+$]. Déterminer $F'(\sqrt[3]{2})$.

En déduire que le processus d'itération par $x \to \sqrt{\sqrt{2x}}$ n'est pas très rapide (2).

k étant un réel, $x=\sqrt{\sqrt{2x}}$ est équivalente à $(k+1)x=kx+\sqrt{\sqrt{2x}}$ ou encore à

$$x = \frac{k}{k+1}\,x+\frac{1}{k+1}\,\sqrt{\sqrt{2x}} = G(x) .$$

Déterminer k pour que $G'(\sqrt[3]{2})=0$.

En déduire une fonction permettant un assez bon processus d'itération pour approximer $\sqrt[3]{2}$.

---

(2) On pourra interpréter ce processus à partir de la solution de MENECHME et observer que les valeurs approchées successives sont constructibles à la règle ou au compas...

Bibliographie

[1] Pierre DREDON et Jean ITARD : *Mathématiques et Mathématiciens.* Editions Magnard.

[2] Jean-Claude CARREGA : *Théorie des corps - la règle et le compas.* Editions Hermann.

[3] Jean DHOMBRES : *Nombre, mesure et continu.* Editions Cedic/Nathan.

[4] Jean ITARD : *Essais d'histoire des Mathématiques.* Librairie Albert Blanchard.

[5] Jean-Paul COLETTE : *Histoire des Mathématiques* (2 volumes). Editions du Renouveau Pédagogique (Québec).

[6] Revue du Palais de la Découverte : *Courbes mathématiques.* N° spécial 8, juillet 1976.

[7] Arthur ENGEL : *Mathématiques du point de vue algorithmique* (trad. Daniel Reisz). Editions Cedic.

[8] Jean-Louis OVAERT, Jean-Luc VERLEY : *Analyse,* volume 1. Editions Cedic/Nathan.

[9] Revue PLOT (éditée par la Régionale d'Orléans-Tours de l'A.P.M.E.P.), Supplément n° 2 (traceurs de courbes).

[10] Amy DAHAN-DALMEDICO, Jeanne PEIFFER : *Routes et dédales.* Editions du Seuil, 1982.

[11] Félix KLEIN : *Famous Problems of Elementary Geometry.* New York, Editions Dover, 1956.

[12] Bulletin inter-IREM n° 20 : *Enseignement de l'Analyse.*

[13] IREM de Toulouse : *Equations du troisième degré* (1980). *Equations du quatrième degré* (1982).

[14] IREM de Marseille : *Analyse 1* (1978).

[15] René DESCARTES : *La Géométrie.* Editions de l'AREFPPI.

[16] *L'ouvert* : Journal de l'A.P.M.E.P. d'Alsace et de l'IREM de Strasbourg n° 42, mars 1986.