LA DIVISION A L'ÉCOLE ÉLÉMENTAIRE

Elem Math III

Publication de l'A.P.M.E.P.

(Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public)

N° 19

2ème édition

LA DIVISION
A L'ÉCOLE ÉLÉMENTAIRE

Elem Math III

Publication de l'A.P.M.E.P.

(Association des Professeurs de Mathématiques
de l'Enseignement Public)

N° 19

2ème édition

Ca devenait tellement rigolo qu'un jour on s'est assis avec un papier et un crayon, on a essayé de se rappeler comment on fait une division – ça nous a pris du temps – , on s'est un peu disputés sur la façon de dessiner la potence sans laquelle on ne peut "épeler" une division. Je veux dire: "... en 9 combien de fois quatre ; deux fois, je pose deux et il reste un ...". Après quelques heures imprégnées d'un arôme de craie et d'encre mordorée, on s'est retrouvés sur la belle table de notre beau salon de notre belle demeure d'Autheuil (Eure) avec un résultat qui, compte tenu de tous les "j'abaisse quatre, je retiens trois, etc ..." ... s'élevait à la somme de 2 650 anciens francs par cachet, comme on dit dans les agences de spectacle.

Simone SIGNORET,
"La nostalgie n'est plus ce qu'elle était".

AVANT - PROPOS

La division est un sujet réputé difficile.

Son enseignement s'étale sur plusieurs années: abordée dès l'école élémentaire, on la retrouve dans les programmes du premier cycle.

Les maîtres de l'école élémentaire reconnaissent qu'elle leur pose bien des problèmes. Les difficultés éprouvées par les enfants à son propos inquiètent certains parents. Les performances des élèves, tant à l'école élémentaire qu'au premier cycle, sont parfois décevantes, voire inquiétantes. Des enseignants, non seulement du premier cycle mais aussi du second cycle, s'étonnent des erreurs que commettent leurs élèves quand il s'agit de "faire des divisions".

Devant cet état de fait, la collection ELEM-MATH se devait de consacrer à la division au moins l'une de ses brochures.

Nous appuyant sur de nombreux travaux de didactique en cours, nous pensons qu'il est souhaitable de concevoir un enseignement des mathématiques essentiellement centré sur la résolution de problèmes. C'est dans cet esprit que nous présentons quelques réflexions sur la division euclidienne dans l'ensemble $\mathbb{N}$ des naturels.

Ainsi, outre des précisions sur ce qu'est la division euclidienne dans $\mathbb{N}$ (et, à ce propos, d'utiles compléments figurent dans les rubriques PARTAGES, DIVISION EUCLIDIENNE, DIVISION de MOTS II *). Nous espérons que le lecteur trouvera dans les pages qui suivent des éléments lui permettant de faire évoluer son enseignement dans le sens qu'il croit le plus favorable à l'intérêt des enfants.

+

+ +

Après QUELQUES QUESTIONS SUR LA PRATIQUE DE LA DIVISION attirant l'attention sur certaines difficultés liées à la technique de calcul habituelle, nous avons repris dans VERS LA DIVISION EUCLIDIENNE quelques problèmes scolaires traditionnels, pour montrer que leur résolution ne nécessite que le maniement correct de la soustraction.

A cette étape, l'utilisation de certains multiples du diviseur permet de réduire les calculs; c'est pourquoi nous avons suggéré quelques activités sur les MULTIPLES D'UN NATUREL.

---

* Brochure de l'A.P.M.E.P. ; voir page 62.

Les situations de départ se ramènent toutes à la recherche de deux naturels, quotient q et reste r, liés à deux naturels connus, dividende a et diviseur b, par les deux conditions:

$$a = (b \times q) + r \qquad \text{et} \qquad r < b$$

La définition de la division euclidienne ainsi précisée, nous montrons dans TECHNIQUES OPERATOIRES DE LA DIVISION EUCLIDIENNE quelques façons de perfectionner les moyens de calcul précédemment employés, afin de réduire les écritures auxiliaires. On constate alors que le gain réalisé en économie d'écriture l'est au prix de la complexité croissante des calculs à faire de tête. A l'issue de ce chapitre, on dispose de plusieurs techniques de calcul, plus ou moins raffinées, dont aucune ne peut prétendre être la technique universelle.

+

+ +

Nous nous sommes limités à la division euclidienne dans $\mathbb{N}$, excluant ainsi toute allusion aux nombres décimaux. Vouloir aborder la division dans l'ensemble $\mathbb{D}^+$ des décimaux positifs nous aurait entraînés à préciser pourquoi et comment introduire les décimaux; or, cela est un tout autre problème, même si les techniques de division, dans $\mathbb{N}$ d'une part, dans $\mathbb{D}^+$ d'autre part, se ressemblent.

+

+ +

Enfin, le lecteur nous permettra d'insister sur le fait que l'étude de la division commence actuellement au Cours Elémentaire et qu'elle se poursuit dans le premier cycle. Ainsi, il n'est pas sûr qu'elle doive déboucher dès le Cours Elémentaire deuxième année sur une technique en forme, ni même qu'au Cours Moyen deuxième année on doive construire "la technique traditionnelle". Par contre, il nous semble indispensable, dans l'intérêt des enfants, qu'une collaboration s'établisse, tant au niveau des méthodes qu'au niveau des contenus, entre les enseignants de l'école élémentaire et ceux du premier cycle.

SOMMAIRE

UNE COLLECTION DE L'A.P.M.E.P.
POUR L'ÉCOLE ÉLÉMENTAIRE

ELEM-MATH

ELEM-MATH I (56 pages)

regroupe quelques-uns des articles relatifs à l'Ecole Elémentaire parus dans le Bulletin de l'A.P.M.E.P.

Les divers sujets abordés sont directement utilisables dans la pratique quotidienne des classes. Voici le sommaire :

ROUQUAIROL (IREM de Paris) : Recherche dans l'enseignement élémentaire : code de navigation dans les chenaux.

LECOQ (E.N. de Caen) : Induction et récurrence.

P. LEGOUPIL (Instituteur, Valconville) : Recherche à partir d'un jeu télévisé dans une classe rurale à trois cours (CE2, CM1, CM2).

B. COLLIN (C.E.S. Saint Laurent de la Salanque) : Fonction sélective des exercices.

Travaux du Séminaire APMEP, Lyon, Septembre 1974 : Noyaux-thèmes dans l'enseignement élémentaire.

A. FOULIARD (Instituteur, Ecole Decroly, Saint-Mandé) : Pliages et modèles mathématiques (article reproduit de la revue *Activités Recherches Pédagogiques*).

M. CARMAGNOLE (CM2, Pierrefeu du Var) : Le précédent et le suivant.

Prix : 3 F (port compris : 4,50 F).

I. QUELQUES QUESTIONS A PROPOS DE LA PRATIQUE DE LA DIVISION

Nous allons détailler ci-dessous les différentes étapes ($E_1, E_2, \ldots$) d'une "division", ce qui nous permettra d'introduire au fur et à mesure des questions (Q_1, Q_2, ...) auxquelles le lecteur est invité à réfléchir.

Conformément à la pratique adoptée dans de nombreuses classes élémentaires, nous "poserons les soustractions" et nous supposerons que le calcul des produits partiels est effectué "de tête".

Soit à diviser 5 087 par 37.

$$(E_1) \quad \begin{array}{r|l} \hat{5}\,0\,8\,7 & \hat{3}\,7 \\ \hline & \end{array}$$

$$3 \times 1 < 5 < 3 \times 2$$

$$\begin{array}{r|l} 5\,0\,8\,7 & 3\,7 \\ \cline{2-2} 3\,7 & 1 \\ \cline{1-1} 1\,3 & \end{array}$$

(Q_1) Pouvez-vous donner par <u>simple lecture</u> de ce qui précède un ordre de grandeur du quotient ?

(Q_2) Trouvez le nombre de chiffres du quotient.
Comment avez-vous procédé ?

$$(E_2) \quad \begin{array}{r|l} 5\,0\,8\,7 & 3\,7 \\ \cline{2-2} 3\,7 & 1 \\ \cline{1-1} 1\,3\,8 & \end{array}$$

(Q_3) Pourquoi n'abaisse-t-on qu'un chiffre (le 8 de 5087)?

(E_3)

$$\begin{array}{l|l} 5\;0\;8\;7 & \overset{\frown}{3}\;7 \\ \cline{2-2} \underline{3\;7} & \;1 \\ \overset{\frown}{1\;3}\;8 & \end{array}$$

$3 \times 4 < 13 < 3 \times 5$

$$\begin{array}{l|l} 5\;0\;8\;7 & 3\;7 \\ \cline{2-2} \underline{3\;7} & 1\;4 \\ 1\;3\;8 & \\ \underline{1\;4\;8} & \end{array}$$

« 4, c'est trop fort ; on essaie 3 » :

$$\begin{array}{l|l} 5\;0\;8\;7 & 3\;7 \\ \cline{2-2} \underline{3\;7} & 1\;3 \\ 1\;3\;8 & \\ \underline{1\;1\;1} & \\ \;\;2\;7 & \end{array}$$

(Q_4) A la première étape : $\overset{\frown}{5}087 \,|\, \overset{\frown}{3}7$, on a utilisé le 5 (de 5087) et le 3 (de 37) pour obtenir le premier quotient partiel.

Pourquoi, arrivé à

$$\begin{array}{l|l} 5\;0\;8\;7 & \overset{\frown}{3}7 \\ \cline{2-2} \underline{3\;7} & 1 \\ \overset{\frown}{1\;3}\;8 & \end{array}$$

, n'a-t-on pas utilisé le 1 (de 138) et le 3 (de 37) ?

Pourquoi utilise-t-on le 13 (de 138) et le 3 (de 37) ?

Pouvez-vous énoncer une règle générale ?

(Q_5) En E_3 on a essayé 4 (qui s'est avéré trop fort) parce qu'on a remplacé 37 par 30. Instruit par cette déconvenue, on pourrait penser qu'il est préférable de remplacer 37 par 40.

Pouvez-vous énoncer une règle générale ?

(E_4)

$$\begin{array}{l|l} 5\;0\;8\;7 & \overset{\frown}{3}\;7 \\ \cline{2-2} \underline{3\;7} & 1\;3 \\ 1\;3\;8 & \\ \underline{1\;1\;1} & \\ \;\;\overset{\frown}{2\;7}\;7 & \end{array}$$

$3 \times 9 = 27$ et $4 \times 6 < 27 < 4 \times 7$

$9 \times 37 = 333$ — $6 \times 37 = 222$

« trop fort » — 6 pourrait convenir mais $277 - 222 = 55$, donc « 6 est trop faible ».

(Q_6) A quoi reconnaît-on que « 6 est trop faible » ?

$$\begin{array}{rrrr|l}
5 & 0 & 8 & 7 & \;37 \\ \cline{5-5}
3 & 7 & & & \;137 \\ \cline{1-2}
1 & 3 & 8 & & \\
1 & 1 & 1 & & \\ \cline{1-3}
& 2 & 7 & 7 & \\
& 2 & 5 & 9 & \\ \cline{2-4}
& & 1 & 8 &
\end{array}$$

(Q_7) Et maintenant, abaisse-t-on quelque chose ?
Quoi et pourquoi ?

(E_5)

$$\begin{array}{rrrrr|l}
5 & 0 & 8 & 7 & & \;37 \\ \cline{6-6}
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \;137 \\
& 2 & 7 & 7 & & \\
& 2 & 5 & 9 & & \\ \cline{2-4}
& & 1 & 8 & 0 &
\end{array}$$

$3 \times 6 = 18$ et $4 \times 4 < 18 < 4 \times 5$

$$\begin{array}{rrrrr|l}
5 & 0 & 8 & 7 & & \;37 \\ \cline{6-6}
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \;137{,}4 \\
& & 1 & 8 & 0 & \\
& & 1 & 4 & 8 & \\ \cline{3-5}
& & & 3 & 2 &
\end{array}$$

(Q_8) Que signifie la virgule ?

(Q_9) Ainsi engagé, le processus risque de durer longtemps ... S'il ne s'arrête pas de lui-même, à quel moment décide-t-on de s'arrêter ? Pourquoi ?

(Q_{10}) Aurait-on pu s'arrêter à la première étape :

$$\begin{array}{l|l} 5\;0\;8\;7 & 37 \\ \cline{2-2} \underline{3\;7} & 1 \\ 1\;3 & \end{array}$$

et prétendre néanmoins avoir "fait la division" ?

(Q_{11}) Peut-être avez-vous entendu dire que dans une division le reste est plus petit que le diviseur.
Mais alors, puisqu'à l'issue de la première étape le reste de la soustraction, 13, est plus petit que 37, on peut s'arrêter.
Qu'en pensez-vous ?

Et maintenant que vous avez répondu à ces questions, imaginez qu'elles vous sont posées par un enfant.

Que lui répondriez-vous ?

II. VERS LA DIVISION EUCLIDIENNE

C'est traditionnellement à partir de situations de partages que l'on introduit la division dans les classes élémentaires et la liaison entre ces deux thèmes est si étroite qu'on en vient souvent à prononcer des phrases telles que :

" diviser, c'est partager "

ou bien

" diviser 157 par 13, c'est chercher combien de fois 13 est contenu dans 157 ".

Visiblement de telles locutions cherchent à faire image. Elles évoquent une manipulation concrétisant le calcul qu'on vient ou qu'on se propose de traiter. En contrepartie, elles présentent des ambiguïtés qui risquent d'introduire artificiellement des difficultés, sinon des incompréhensions.

En ce qui concerne "diviser, c'est partager", de deux choses l'une :
- ou bien les deux verbes ont leur sens courant et la phrase ne fait que signaler leur synonymie dans la langue usuelle;
- ou bien cette locution cherche à donner au verbe <u>diviser</u> un sens arithmétique, mais alors elle est largement imprécise, car elle extrait chacun des deux verbes de son contexte.

La deuxième phrase présente un caractère un peu plus mathématique; néanmoins elle contient des termes vagues. Que signifient "<u>combien de fois</u>" et "<u>contenu dans</u>" ? L'étude de nombreux problèmes associés à des expressions analogues permettra de dégager que l'on recherche en fait parfois un nombre, parfois deux. L'examen ultérieur des relations qu'entretiennent ce ou ces nombres avec les données amènera à préciser le sens du verbe <u>diviser</u> dans son acception arithmétique.

Dans son sens arithmétique, <u>diviser</u> s'emploie dans des phrases telles que "diviser le naturel 157 par le naturel 13" et, par abréviation, "diviser 157 par 13", tandis que <u>partager</u>, qui est un mot de la langue courante, s'utilise dans des phrases telles que "partager 157 objets en 13 parts".

Certes, le sens de l'une renvoie à l'activité évoquée par l'autre, mais la locution que nous critiquons ne dit pas comment.

Par ailleurs, cette locution ne précise pas les conditions du partage et il s'en faut de beaucoup que tout partage puisse se décrire à l'aide de la division euclidienne.

I PARTAGES

Certaines situations de partage constituent effectivement de bons points de départ pour l'étude de la division.

I.-1 LES CONDITIONS DU PARTAGE

* 1ère situation

Pour déménager, une personne a emballé sa bibliothèque (842 livres pour être précis) dans 20 caisses, toutes semblables. Peut-on en déduire le nombre de livres par caisse ?

La réponse à cette question est évidemment négative, essentiellement parce que les livres n'ont pas tous le même format.

Préciser que les livres ont le même format et la même épaisseur revient à dire que, vis-à-vis de l'emballage, on ne distingue pas un livre d'un autre (cas d'un imprimeur qui expédie des exemplaires d'un même ouvrage). Dans ce cas, effectivement, diviser 842 par 20 donne une information intéressante.

* 2ème situation

A propos de "l'intéressement" des travailleurs aux bénéfices de l'entreprise se pose le problème suivant : partager une somme de S francs entre les membres de l'entreprise. Comment le comptable s'y prend-il ?

De deux choses l'une :

- ou bien tous les membres de l'entreprise doivent recevoir la même somme;
- ou bien on estime que le directeur doit recevoir plus qu'un cadre supérieur, un cadre supérieur plus qu'un cadre moyen, etc... et on précise les taux respectifs de chaque catégorie.

Dans la première éventualité, il suffit de diviser le nombre S par le nombre de personnes pour connaître la somme qui revient à chacun (et il restera en général un reliquat).

La seconde éventualité est plus complexe, et quand bien même une ou plusieurs divisions interviennent dans les calculs du comptable, elles ne résolvent pas à elles seules le problème.

En fait, les partages qui conduisent simplement à la division euclidienne sont les partages équitables.

* Le thème des partages est d'une grande richesse du fait des conditions particulières que l'on peut imposer aux objets et aux parts et que l'on retrouve dans un très grand nombre de situations familières, tant aux enfants qu'aux adultes. Le lecteur intéressé consultera la rubrique PARTAGES dans MOTS (tome 2) où il trouvera une analyse plus détaillée ; les partages utilisables comme introduction de la division euclidienne doivent respecter les conditions suivantes :

- objets indiscernables
- parts indiscernables
- parts d'égal effectif
- reliquat minimum.

I.-2 EXEMPLES

I-2-1

Jean, sans doute pour se faire un peu d'argent de poche, s'est engagé à emballer des oeufs chez un commerçant. Il y a 250 oeufs à emballer par boîtes de 6 et le commerçant, n'ayant que 50 boîtes de 6, lui demande si c'est suffisant.

Cette question contraint Jean à prévoir. S'il a quelques rudiments d'arithmétique, il pensera : "50 boîtes à raison de 6 oeufs par boîte permettent d'emballer (50×6) oeufs, c'est-à-dire 300 oeufs et, par conséquent, il y a bien assez de boîtes".

On peut imaginer que, dans ce cas, le commerçant proposera de n'en apporter que 40 si Jean estime que c'est suffisant.

Derechef, Jean est contraint de reprendre le raisonnement précédent, à savoir : "(6×40) oeufs, ça fait 240 oeufs, donc 40 boîtes ne suffisent pas ; il s'en faut de 10 oeufs". Mais maintenant Jean est en mesure d'affirmer qu'on pourra mettre 41 boîtes en vente et qu'il restera 4 oeufs.

Notons que, sur le plan du réalisme, cette anecdote imaginaire souffre de deux inconvénients : d'une part les oeufs sont, de nos jours, triés et emballés à la machine, d'autre part il aurait été raisonnable de prévoir un certain pourcentage de casse (ce qui aurait sensiblement modifié le problème).

I-2-2

Des invités offrent aux trois enfants de leurs hôtes une boîte de pâtes de fruits. Cette boîte contient deux plateaux sur lesquels les friandises sont réparties en 7 colonnes de 5. Les enfants, qui n'émettent aucun souhait quant aux couleurs, décident de se partager équitablement le contenu de la boîte. Combien de pâtes de fruits chaque enfant recevra-t-il ?

Il est fort peu réaliste d'imaginer que les enfants vont, avant le partage effectif, se lancer dans des calculs pour prévoir la part de chacun. Il est probable qu'ils vont s'engager dans des distributions successives respectant à chaque étape la clause d'équité. Ainsi, par exemple, ils commenceront par prendre 4 pâtes de fruits chacun, puis 5, puis 10, etc... A chaque étape, ce qui reste dans la boîte a diminué et la distribution s'arrêtera quand il n'y aura plus qu'une pâte de fruits. Il restera pour chaque enfant à compter ses pâtes de fruits, ce qui confirmera ou non l'équité du partage, et à décider du sort de la dernière friandise.

I-2-3

En prévision de la fête annuelle de l'école, trois enfants se sont chargés de se procurer des bonbons. L'un en a apporté 146, le second 219, le troisième 167. Ils décident de mettre ces bonbons par 10 dans des sachets qui doivent être fabriqués par une autre équipe, laquelle souhaite vivement savoir combien il en faut.

Après réflexion, le premier enfant réclame 14 sachets, le second 21 et le troisième 16. Les fabricants de sachets décident donc de réaliser les 51 sachets demandés; ont-ils raison ?

Ils peuvent toujours fabriquer leurs 51 sachets,mais ce ne sera pas suffisant.Chacun des trois enfants n'aura pas besoin de plus de sachets qu'il n'en a réclamé, mais en rassemblant les bonbons qui leur resteront, soit 22 bonbons, il y aura encore 2 sachets à remplir ... et 2 bonbons à se partager.

I-3 COMMENTAIRES

I-3-1

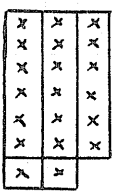
Les anecdotes précédentes pourraient donner lieu à des manipulations mais, dans une classe, il ne sera pas toujours possible d'utiliser les objets évoqués (cf I-2-1). Il faudra donc recourir à l'imaginaire et faire "comme si".

De plus,dans la vie courante,il est assez rare qu'un partage satisfasse aux conditions précisées en fin de I-1 et conduise à la division. Il ne faut donc pas se faire trop d'illusions sur le concret de ces situations qui apparaissent plutôt comme des anecdotes qui peuvent être mises en scène ; mais un réaliste impénitent y sentira presque toujours l'artifice.

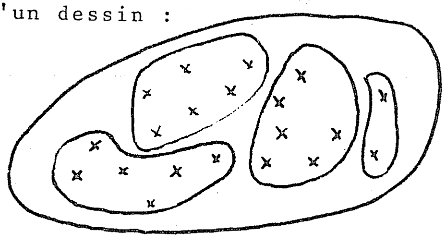
I-3-2

D'aucuns s'étonneront peut-être du fait que les nombres qui interviennent dans les trois exemples précédents soient "assez grands". Une certaine tradition scolaire veut que l'on aborde la division par des situations du type : 3 écureuils se partagent équitablement 20 noisettes.

Le choix de nombres aussi petits répond au louable souhait de faire manipuler, encore que paradoxalement on se contente bien souvent d'un dessin :



ou



Mais choisir des nombres petits présente l'inconvénient de masquer le rôle central joué par les multiples du diviseur dans des encadrements successifs du dividende.

I-3-3

Si dans des situations analogues à celles qui sont présentées ci-dessus le premier souci est de répondre aux questions posées, on ne devrait pas omettre de dégager les moyens qu'on a utilisés pour y parvenir.

Voici, à titre de suggestion, des exemples de tableaux présentant brièvement et clairement les calculs qui permettront de conclure :

Pour l'exemple I-2-1 :

Nombre de boîtes	Nombre d'oeufs		
50	50x6 = 300	trop grand	
40	40x6 = 240	trop petit	
41	240+6 = 246	trop petit	250 = 246 + 4
42	246+6 = 252	trop grand	250 = (41x6)+ 4

et pour l'exemple I-2-2 :

	Parts du 1er	Parts du 2d	Parts du 3e	Reliquat
1e distribution	4	4	4	70 -(3x4) = 58
5				
2e distribution	9	9	9	58 -(3x5) = 43 70 -(3x9) = 43
10				
3e distribution	19	19	19	43 -(3x10) = 13 70 -(3x19) = 13
2				
4e distribution	21	21	21	13 -(3x2) = 7 70 -(3x21) = 7
2				
5e distribution	23	23	23	7 -(3x2) = 1 70 -(3x23) = 1

I-3-4

L'étude de la division à l'école élémentaire se réduit trop souvent à la mise en place d'une technique opératoire et les situations concrètes utilisées servent tant bien que mal et uniquement à justifier les différentes étapes du calcul.

Il ne faut alors pas s'étonner que les élèves butent souvent sur la question suivante : dans ce problème, faut-il "faire une division" ? C'est la difficulté que les enseignants désignent sous le nom de "sens de la division".

On croit que la donnée d'une liste de mots-clefs (on "fait une division" quand on lit les mots : *partage, division, répartition, distribution,* etc...) suffit à régler la question. Vu la diversité des situations ainsi évoquées, une description aussi sommaire ne peut que manquer son objectif.

I-3-5

Ce qui précède met en évidence deux composantes de l'apprentissage. L'une consiste à analyser des situations plus ou moins concrètes dans lesquelles, deux naturels a et b étant connus, il s'agit de trouver deux naturels q et r satisfaisant aux deux conditions :

$$a = (b \times q) + r \quad \underline{\text{et}} \quad r < b \quad (*)$$

(Bien sûr, ces conditions sont exprimées dans un langage adapté aux enfants et à la situation étudiée).

L'autre composante consiste à inventer des moyens efficaces et si possible presque automatiques pour trouver q et r (voir à ce propos page 33 TECHNIQUES OPERATOIRES de la DIVISION EUCLIDIENNE).

Cette distinction héritée du discours de "pédagogie spéciale" induit encore trop souvent une pratique de l'enseignement qui sépare ces deux composantes.

Au contraire, on évite les difficultés signalées en I-3-4 en articulant l'une sur l'autre ces deux composantes dans la pratique de l'apprentissage.

I-3-6

Il n'est pas nécessaire de bien maîtriser la multiplication pour aborder des situations de division.

Dans l'exemple I-2-2, l'addition et la soustraction suffisent.

Dans l'exemple I-2-3, il suffit de connaître les règles d'écriture des naturels pour demander 14, 21 et 16 sachets (146 objets peuvent effectivement être répartis en 14 dizaines d'objets et 6 objets).

(*) par définition même de la division euclidienne (voir: Techniques Opératoires de la division euclidienne).

II LE PIQUET A CHEVAL

Voici un extrait du Dictionnaire des Jeux (Tchou, éditeur). "On convient d'un nombre à atteindre : cent par exemple. Chacun des joueurs à son tour énonce un nombre choisi dans un domaine fixé par avance, par exemple entre un et neuf. On additionne à mesure les nombres énoncés. D'où un dialogue tel que : " huit; et cinq, treize; et neuf, vingt-deux; et sept, vingt-neuf; et cinq, trente-quatre" et ainsi de suite. Le premier qui dira cent aura gagné.

Le choix du nombre final gagnant, ainsi que le choix des nombres qu'il est permis d'ajouter à chaque coup, est tout à fait libre : il faut seulement qu'il soit convenu d'avance" (*)

Nous pouvons imaginer les réflexions d'un joueur attentif à gagner. "Si mon adversaire atteint 99 ou 98 ou... 91, je gagne à coup sûr ; pour cela il suffit qu'à un certain moment j'annonce 90, ce qui le contraint à dire 91 ou 92 ou ... 99.

Donc, si j'annonce 90, j'ai la certitude de pouvoir gagner.

Pour les mêmes raisons, si mon adversaire atteint 89, ou 88, ou ... , ou 81, je pourrai annoncer 90 et pour cela il suffit que j'annonce 80. Si j'annonce 80, j'ai la certitude de pouvoir gagner".

Voici un autre exemple : le nombre à atteindre est 123 et l'on choisit à chaque coup un naturel entre 1 et 6, (1 et 6 compris). Pour les mêmes raisons que ci-dessus on voit que 116, 109, 102, 95, etc... assurent la victoire à un joueur adroit.

Le schéma ci-dessous montre comment obtenir ces naturels :

$123 \xrightarrow{7} 116 \xrightarrow{7} 109 \quad \ldots\ldots\ldots \quad 39 \xrightarrow{7} 32 \quad \ldots \quad 11 \xrightarrow{7} 4$

En d'autres termes, les naturels de cette liste sont de la forme $123-7n$ où n désigne un naturel. De plus, le plus petit d'entre eux est évidemment plus petit que 7; c'est 4, et on peut écrire : $4 = 123 - (7 \times 17)$; on est donc bien dans une situation de division euclidienne.

(*) Une analyse de ce jeu figure déjà dans les Problèmes plaisants et délectables qui se font par les nombres (1612) de Claude Gaspard Bachet, sieur de Méziriac.

Le lecteur intéressé par une mise en oeuvre pédagogique de ce jeu consultera en annexe l'article de Guy Brousseau (Division euclidienne aux cours élémentaire et moyen) et la fiche RTS intitulée "Qui dira vingt ?".

III SITUATIONS CONCRETES

Evoquons pour mémoire quelques-unes de ces situations tant utilisées par l'école pour introduire la division, mais pas toujours si concrètes qu'on s'accorde à le dire.

III-1

Un particulier vient de recevoir quatre cubitainers de vin et la facture jointe lui indique 112 litres. Pour les embouteiller, il dispose de 132 bouteilles de 75 cl. Est-ce suffisant ? Si non, combien doit-il s'en procurer ?

Avant d'aborder la résolution de ce problème, on préfère exprimer les volumes avec la même unité : soit le litre, soit le centilitre, soit la bouteille, soit le quart de litre.

1er choix : l'unité est le centilitre

On doit embouteiller 11200 centilitres. Les bouteilles disponibles permettent d'en embouteiller 132×75, soit 9900; par conséquent il manque des bouteilles.

Le problème se ramène donc à rechercher le nombre de bouteilles nécessaires pour embouteiller (11200 - 9900) c'est-à-dire 1300 centilitres. Or $75 \times 10 = 750$ et $75 \times 20 = 1500$; la personne en question peut alors décider de se procurer 20 bouteilles en prévoyant que quelques-unes, mais peu, seront inutilisées (mieux vaut tenir que courir, comme on dit).

Si elle veut être tout à fait précise, le tableau suivant :

2	10	20	18	17
150	750	1500	1350	1275

lui permet de fixer à 18 le nombre de bouteilles à acheter.

2e choix : l'unité de volume est la bouteille

Puisqu'un litre, c'est une bouteille et un tiers, 112 litres représentent $112 \times \left(1 + \frac{1}{3}\right)$, c'est-à-dire$\left(112+37+\frac{1}{3}\right)$

soit 149 bouteilles et un tiers. Il faut donc disposer de 150 bouteilles et il en manque (150 - 132), soit 18.

Dans le premier raisonnement, on aurait pu, par automatisme, diviser 1300 par 75, c'est-à-dire appliquer la technique opératoire traditionnelle pour obtenir 17 comme quotient et 25 pour reste. Encore aurait-il fallu se souvenir que cette technique fournit un quotient <u>par défaut</u> pour conclure à l'achat de 18 bouteilles. En fait, on souhaite seulement disposer d'un multiple de 75 supérieur à 1300 et assez proche de 1300.

Dans le second choix, il s'agit de prendre le tiers de 112 ou mieux de trouver deux multiples consécutifs de 3 qui encadrent 112; mais, là encore, l'utilisation de propriétés convenables évoquées par le tableau suivant :

30	40	39	38	37
90	120	117	114	111

conduit à des calculs qui, pour le débutant, sont plus simples et au moins aussi rapides que ceux de la technique habituelle de division.

D'un autre point de vue, l'expérience montre qu'il n'y a sans doute pas exactement 112 litres de vin livrés, que dans une bouteille on ne met pas exactement 75 centilitres, qu'au cours du remplissage il y a de la perte, qu'on ne vide pas tout à fait les récipients à cause du fond (*) de sorte qu'on souhaite une estimation raisonnable du nombre de bouteilles à acheter. En quelque sorte, la technique usuelle de division fournit un résultat trop précis dans ce type de situation.

<u>III-2</u>

On désire carreler une cuisine de 2,80 mètres sur 4 mètres avec des carreaux de 10×20 (en centimètres, cela s'entend); combien faut-il de carreaux ?

<u>Une solution scolaire</u>

Outre un petit travail sur les unités, on veut à l'aide de ce texte donner aux élèves l'occasion de "faire une division".

(*) Sans compter que, ce vin, il faut bien le goûter...

Il s'agit donc de diviser la surface de la cuisine exprimée en décimètres carrés, soit 1120, par la surface d'un carreau, elle-même exprimée en décimètres carrés, soit 2. Le quotient de 1120 par 2 est 560 (la moitié de 1000 est 500 et la moitié de 120 est 60). Il faut donc 560 carreaux.

Un peu de réalisme

Il est raisonnable de penser que le fabricant livre ses carreaux dans des emballages, disons par colis de 50 (parce que 50 carreaux convrent 1 m^2).

Tenant compte de cette information et de la surface à couvrir, soit 11,20m^2, reste à savoir si on peut acheter des carreaux au détail.

Si non, il faut acheter 12 boîtes, soit 600 carreaux et il en restera (on verra combien une fois le travail terminé).

Si oui, il faudra acheter 11 boîtes et 10 carreaux puisque 0,20m^2 c'est le cinquième d'un mètre carré et que le cinquième de 50 est 10.

A noter qu'on n'a tenu compte ici

- ni de la casse éventuelle
- ni de la superficie des joints.

Qu'en pensent les professionnels ?

III-3

Le lecteur commettrait un contresens si, à partir de ce qui précède, il nous prêtait l'idée qu'il faut dissocier l'étude de la division de l'étude de situations concrètes.

En fait, nous sommes guidés par deux idées directrices.

Tout d'abord les situations utilisables pour introduire la division euclicienne doivent satisfaire à des conditions précises qu'on ne trouve pas toujours réunies dans les exemples concrets, authentiques ou imaginés. Les rectifier dans le sens convenable introduit inévitablement un aspect artificiel. A tout prendre, certains sont alors en droit de choisir des situations spécialement construites en vue du but qu'ils poursuivent (par exemple le Piquet à cheval).

Mais, par ailleurs, des situations tirées de la vie courante, professionnelle par exemple, donnent matière à des analyses et à des raisonnements, parfois même à des enquêtes, dont on ne peut nier l'intérêt. Nous souhaiterions qu'on ne leur otât point ce qui en fait le caractère concret, vécu, authentique, mais parfois complexe. Il s'agirait alors de rester au plus près de la pratique en s'informant sans idée préconçue sur la façon dont les <u>non-enseignants</u> les analysent et les traitent.

<u>Deux exemples</u> :

1) Compte tenu de la diversité des modèles vendus, un marchand de carrelages ne divise pas la superficie à carreler par la surface d'un carreau. Son fournisseur lui transmet pour chaque modèle des tableaux qui mettent en regard "superficie" et "quantité".

2) Un vendeur de voitures, quand on lui demande le montant des mensualités à régler pour tel modèle, ne fait pas de calculs; il consulte, lui aussi, des tableaux de nombres.

Il serait intéressant de se procurer de tels tableaux, d'examiner comment on les utilise, de chercher comment ils ont été réalisés.

Enfin, s'intéresser à d'authentiques situations de la vie courante permettrait de se rendre compte qu'on n'y manipule en permanence que des <u>estimations</u>.

Il faut savoir les maîtriser, mais c'est une autre histoire (voir MOTS IV: Approximations).

III. MULTIPLES D'UN NATUREL

I.- Une propriété célèbre

I.1 Examinons la "table de neuf" :

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
9 n	9	18	27	36	45	54	63	72	81

On sait que pour chacun des naturels de la seconde ligne la "somme des chiffres" est égale à 9.

On peut même aller un peu au-delà :

- les chiffres des unités décroissent de 9 à 1

  tandis que

- les chiffres des dizaines croissent de 0 à 8

Lorsqu'on le sait ... cela se voit ; mais est-ce si évident que cela ? Avant de répondre à cette question, le lecteur regardera les tables de huit, de sept, ..., de onze, de douze, etc ....

Mais revenons à la table de neuf ;on peut rendre visibles, au sens propre, les remarques qui précèdent, à l'aide des dessins suivants :

chiffre des unités de 9n

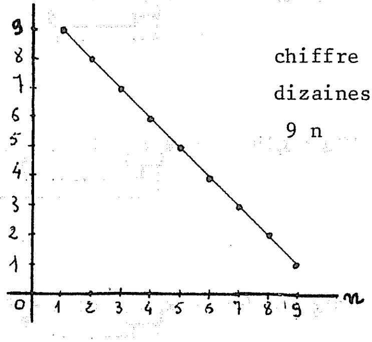


figure I

chiffre des dizaines de 9 n

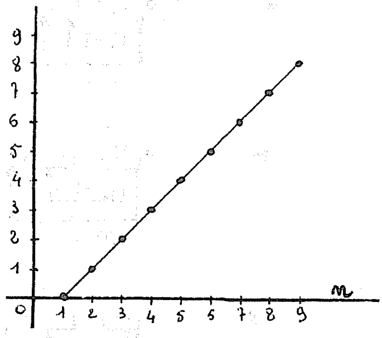


figure II

On peut aussi donner une représentation plus globale de ces résultats en portant pour chaque multiple :

(horizontalement) - en abscisse le chiffre des dizaines

(verticalement) - en ordonnée le chiffre des unités :

chiffre des unités de 9 n.

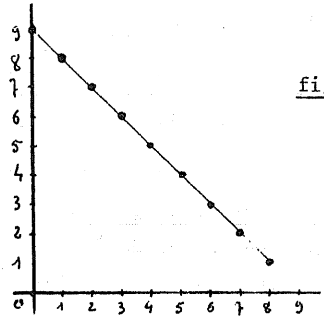


figure III

chiffre des dizaines de 9 n.

Il est intéressant d'étendre la liste des multiples de 9 et chacun des dessins précédents jusqu'à 50 x 9 par exemple.

Sur les dessins II et III, on remplacera "chiffre des dizaines" par "nombre de dizaines" (exemple:pour 189, le chiffre des unités est 9, le chiffre des dizaines est 8, le nombre de dizaines est 18).

Quelles constatations peut-on faire sur chacun des trois graphiques ?

I.-2- Voici un "truc" simple permettant d'écrire les premiers multiples de 9 jusqu'à 29 x 9.

* $9 \times 7 = 6\ 3$; si $0 \leqslant n \leqslant 9$: $9 \times n = 10(n-1)+(10-n)$

7-1

10-7

* $9 \times 15 = 1\ 3\ 5$; si $10 \leqslant n \leqslant 19$: $9 \times n = 10(n-2)+(20-n)$

15-2

20-15

* $9 \times 22 = 1\ 9\ 8$; si $20 \leqslant n \leqslant 29$: $9 \times n = 10(n-3)+(30-n)$

22-3

30-22

Continuez. Ce "truc" est-il général ?

I. 3 Un sujet de méditation: (*)

En contemplant la table de 9, on peut apercevoir une sorte de symétrie. Ainsi 45 et 54 s'écrivent avec les mêmes chiffres mais dans l'ordre inverse; il en va de même pour 36 et 63, puis pour 27 et 72:

3	4	5	6	7	8
27	36	45	54	63	72

Associons donc les naturels de 1 à 10 de la façon suivante:

{1 ; 10} {2 ; 9} {3 ; 8} {4 ; 7} {5 ; 6}

On constate que, pour chacune de ces paires, la somme des deux éléments est 11. On peut se demander si cette propriété est générale.

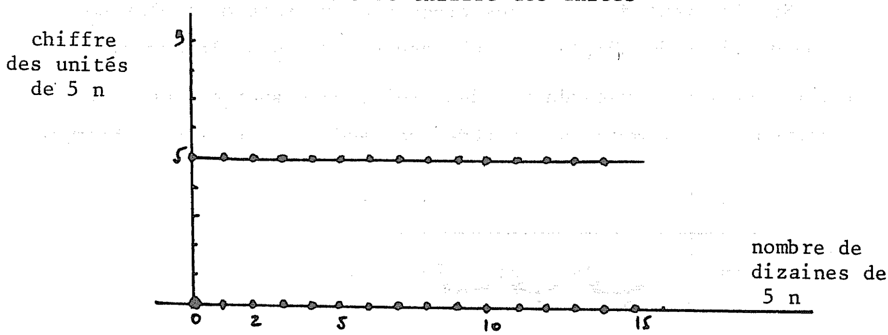
Appelons "naturels associés" deux naturels dont les produits par 9 s'écrivent avec les mêmes chiffres mais dans l'ordre inverse. Par exemple, l'associé de 23 est 78 car $23 \times 9 = 207$ et $702 = 9 \times 78$. La somme de ces deux associés est 101 .

Faites des calculs analogues en partant de naturels de deux chiffres.

II.- DU BON USAGE DES REPRESENTATIONS GRAPHIQUES.

II.1 Ecrivez la table de 5 depuis 0($0 \times 5 = 0$) jusqu'à 150 ($30 \times 5 = 150$). Puis représentez les multiples de 5 en portant :

- en abscisse le nombre de dizaines
- en ordonnée le chiffre des unités



Une constatation évidente porte sur le chiffre des unités (soit 0, soit 5).

(*) Sur une idée trouvée dans POINTS DE DEPART, par BANWELL, SAUNDERS et TAHTA (Ed. CEDIC).

Qu'en est-il pour le nombre de dizaines ?

Voici une suggestion :

5 x 6 = 3 0   : 2   6 est pair

5 x 7 = 3 5   : 2   7 est impair

Cela semble raisonnable. Tentons un essai (à titre de test) :

Soit à calculer 5 x 73.

- "moitié" de 73 : 36
- 73 est impair : 5

$\Big\}$ 365

Effectivement 5 x 73 = 365

Ce procédé est-il général ?

II.2 Reprenez les idées précédentes à propos

- de la table de 2
- d'autres tables (de 4, de 8, puis de 3, de 9, puis de 6, de 7).

Dressez le bilan des résultats obtenus.

III. NAÏF MAIS CONSEQUENT

Dans les travaux qui précèdent, la phase la plus fastidieuse consiste à écrire une liste assez longue de multiples d'un naturel (afin d'avoir un matériau suffisant pour exercer sa sagacité).

Si l'on veut disposer des cinquante premiers multiples de 7 (ou de 13 ou de 19), les calculs nécessaires sont lassants.

III.1 Mais en y regardant à deux fois, on s'aperçoit qu'il est souvent plus commode de procéder par addition répétée. Exemples :

n	1	2	3	4	......
7n	7	14	21	28	......
	+7	+7	+7		

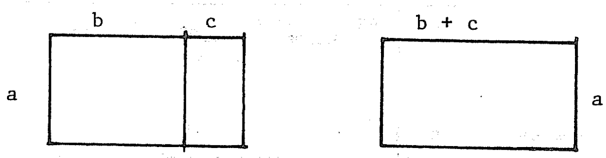
ou encore, si l'on sait que $7 \times 12 = 84$:

n	12	13	14	15	.....
7n	84	91	98	105	.....
	+7	+7	+7		

On utilise dans cette procédure la propriété suivante :

$$7 \times 13 = 7 \times (12 + 1)$$
$$7 \times (12 + 1) = (7 \times 12) + (7 \times 1)$$
$$(7 \times 12) + (7 \times 1) = 84 + 7$$

et cela n'est qu'un cas particulier d'une propriété fondamentale que traduisent le schéma et l'égalité ci-dessous :



$$(a \times b) + (a \times c) = a \times (b + c)$$

(Pour plus de précisions sur cette propriété, voir ELEM-MATH II)

Il résulte de ce qui précède que :

La somme de deux multiples de a est un multiple de a

Les savants utilisent une expression très condensée qui fait image : <u>l'ensemble des multiples de a est fermé</u> pour l'addition ("fermé", cela dit bien ... ce qu'on veut dire).

III.2 Si l'addition est bien acceptée par les multiples d'un naturel, il n'y a pas de raison pour que sa commère la soustraction soit rejetée ...

Effectivement :

L'écart entre deux multiples de a est un multiple de a

On peut aller jusqu'à dire que l'ensemble des multiples de a est fermé pour la soustraction.

Cette propriété est parfois intéressante; par exemple, soit à calculer 17 × 48. Plusieurs façons de s'y prendre sont disponibles :

* "faire la multiplication" (utiliser l'algorithme classique ... si on le maîtrise) : 17 × 48 = 816

* partir de 10 × 48 :

n	10	11	12	
48n	480	528	576	etc ...
	+ 48	+ 48		

* partir de 17 × 40 :

n	40	41	
17n	680	697	etc ...
	+ 17	+ 17	

* partir de 20 × 48 :

n	20	19	...
48n	960	912	...
	– 48	– 48	

* partir de 17 × 50 :

n	50	49	48
17n	850	833	816
	– 17	– 17	

Ainsi le dernier moyen est ici le plus rapide.

Mais n'utiliser qu'un moyen c'est se priver d'une possibilité de contrôler le résultat.

III.3 Voici une autre propriété :

> le produit d'un multiple de a par un naturel
> est
> un multiple de a

C'est ce qu'on utiliserait pour reconnaître si 5 100 est un multiple de 17 :

5 100 est un multiple de 51 , qui lui-même est un multiple de 17 ; donc 5 100 est un multiple de 17 .

IV.- SAVOIR RECONNAITRE SI UN NATUREL EST MULTIPLE D'UN AUTRE

Les activités suggérées en II permettent de constater que les multiples de 5 se terminent par 0 ou par 5 et réciproquement.

Il est clair que 1020 est un multiple de 5 et que 92 n'en est pas un.

On obtient des remarques analogues et bien connues pour 2 et pour 10.

Mais pour 3 ou pour 7 ... c'est moins clair.

IV.I.- Une idée toute simple

Question : 1387 est-il un multiple de 3 ?

D'après III.2, soustrayons de 1387 un multiple de 3 ;

1200 s'impose : $1387 \xrightarrow[-\ 1200]{} 187$

et continuons : $1387 \xrightarrow[-\ 1200]{} 187 \xrightarrow[-180]{} 7 \xrightarrow[-6]{} 1$

ainsi $1387 = 1386 + 1$

et 1387 n'est pas un multiple de 3.

IV.2.- La même idée légèrement améliorée

$$1387 = (138 \times 10) + 7$$

$$1387 = 138 \times (9 + 1) + 7$$

$$1387 = (138 \times 9) + 138 + 7$$

138×9 étant un multiple de 3, on est ramené à examiner 145 à qui on peut appliquer la même idée:

$$145 = (14 \times 10) + 5$$

$$145 = 14 \times (9 + 1) + 5$$

$$145 = 14 \times 9 + 14 + 5$$

ce qui nous ramène à 19.

Or $19 = 10 + 9$

$19 = (9 + 1) + 9$. Ce qui montre que 1387 n'est pas un multiple de 3.

Pour les amateurs d'algorithmes bien disposés, on peut alors proposer la disposition suivante :

$$
\begin{array}{l}
1\ 3\ 8\ \cancel{7} \\
\quad\ \ 7 \\
\hline
1\ 4\ \cancel{5} \\
\quad 5 \\
\hline
1\ \cancel{9} \\
9 \\
\hline
1\ \cancel{0} \\
0 \\
\hline
1
\end{array}
$$

1 , comme 1387, n'est pas un multiple de 3.

IV.3.- Le critère usuel de divisibilité par 3 porte sur la "somme des chiffres".

1387 a pour somme des chiffres 19

19 a " " " " 10

10 a " " " " 1

1 , comme 1387 , n'est pas un multiple de 3.

C'est efficace et plus rapide que la méthode utilisée en IV.2 . Ces deux méthodes ne sont que deux façons de présenter les calculs suivants :

$$1387 = 1000 + (3 \times 100) + (8 \times 10) + 7$$

et
$$\left.\begin{array}{rcl} 1000 & = & 999 + 1 \\ 100 & = & 99 + 1 \\ 10 & = & 9 + 1 \end{array}\right\} \text{ et } 999;\ 99;\ 9 \text{ sont des multiples de } 3.$$

d'où : $1\,387 = \big(999 + (3 \times 99) + (8 \times 9)\big) + (1 + 3 + 8 + 7)$

A partir de là, tout le monde voit la règle.

V.– A VOUS DE JOUER

Adaptez le paragraphe IV aux multiples de 9, et retrouvez ainsi le moyen bien connu de reconnaître si un naturel est un multiple de 9.

De même essayez de trouver un moyen de reconnaître si un naturel est multiple de 11 (en reprenant la méthode de IV.3 et en notant que $10 = 11 - 1$, que $100 = 99 + 1$, c'est-à-dire $100 = (9 \times 11) + 1$, que $1000 = 1001 - 1$, c'est à dire $1000 = (91 \times 11) - 1$, etc ...)

Etudiez le même problème pour les multiples de 4. Pensez que $100 = 4 \times 25$ et que tout naturel n peut s'écrire sous la forme $n = 100\,a + b$ où a est un naturel et b un naturel plus petit que 100 (exemple: $387\,536 = (3\,875 \times 100) + 36$).

Une remarque :

Pour reconnaître si 12 536 est un multiple de 8, on peut commencer par utiliser le fait que $1000 = 8 \times 125$. Par conséquent :

- ou bien 12 536 et 536 sont tous deux multiples de 8
- ou bien 12 536 et 536 ne le sont ni l'un ni l'autre

C'est d'ailleurs ce qu'affirme le critère bien connu. L'ennui, c'est que le sus-dit critère ne donne pas le moyen de savoir si un naturel de trois chiffres est ou non multiple de 8 (sauf à le diviser par 8, mais est-ce bien nécessaire ?)

Voici une amélioration basée sur le fait que :

$10 = 8 + 2$ et $100 = 96 + 4$ (c'est à dire $(8 \times 12) + 4$)

$$536 = (5 \times 100) + (3 \times 10) + 6$$
$$(5 \times 4) + (3 \times 2) + 6 = 32$$
$$32 = (3 \times 10) + 2$$
$$(3 \times 2) + 2 = 8$$

et puisque 8 est un multiple de 8, 536 l'est.

De façon plus schématique :

$\cancel{1}\ \cancel{2}$ 5 3 6
20 + 6 + 6 = 3 2
6 + 2 = 8

ou plus succinctement $\cancel{1}\ \cancel{2}$ 5 3 6
3 2
8

Autre remarque :

Les procédés signalés aux paragraphes IV et V permettent non seulement de reconnaître si un naturel est un multiple de 3, 9, 11, 4 ou 8, mais de prévoir quel sera le reste de la division euclidienne de ce naturel par les diviseurs 3, 9, 11, 4 ou 8.

VI.- A MEDITER

D'aucuns prétendent qu'il n'existe pas de critère de divisibilité par 7. Voici qui va les détromper: pour savoir si 12 536 est un multiple de 7, procédez comme suit:

1 2 5 3 ~~6~~ doubler
1 2
soustraire
----
1 2 4 ~~1~~ doubler
2
soustraire
----
1 2 ~~2~~ doubler
4
soustraire

8

8 n'étant pas un multiple de 7,

12 536 ne l'est pas non plus.

Curieux, n'est-il pas vrai ?

Ce précédé est général et vous aurez à coeur de le justifier.

IV. TECHNIQUES OPERATOIRES DE LA DIVISION EUCLIDIENNE

I RAPPEL

Soit à diviser 89 par 7. Le quotient est 12 et le reste est 5. Ces quatre naturels sont liés par les deux conditions :

$$89 = (7 \times 12) + 5 \qquad \text{et} \qquad 5 < 7$$

Plus généralement, étant donnés

- un naturel a
- un naturel b différent de zéro,

diviser (euclidiennement) a par b, c'est trouver deux naturels q et r tels que $a = (b \times q) + r$ et $r < b$ (C_1)

Remarque : Selon le choix de a, r est l'un des naturels suivants :

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \dots\ ,\ (b-2),(b-1)$$

Dire que $r = 0$, c'est dire que a est un multiple de b.

Les deux conditions (C_1) peuvent être remplacées par les deux conditions suivantes :

$$a \geqslant b \times q \qquad \text{et} \qquad a < b \times (q+1)$$

ce qui s'écrit usuellement

$$bq \leqslant a < b(q+1) \qquad (C_2)$$

En définitive, diviser (euclidiennement) a par b revient à chercher les deux multiples de b les plus proches de a, le plus petit des deux pouvant éventuellement être égal à a.

II EXEMPLES

II-1 Trouver q et r sachant que a = 4837 et b = 17

Voici comment on pourrait résoudre ce problème en ne se guidant que sur les conditions rappelées en I.

Tout d'abord on peut chercher à utiliser des multiples de 17 qui, en système décimal, s'écrivent sans calcul. On pense à 1700 et à 17 000 ; en d'autres termes :

$$1700 < 4837 < 17\,000$$

Un tel encadrement, très facile à obtenir, donne le nombre des chiffres du quotient ; ici par exemple le quotient est compris entre 100 et 1000, donc il a 3 chiffres.

Il s'agit maintenant d'affiner ce premier encadrement en faisant intervenir des multiples de 17 compris entre 1700 et 17 000. On pourrait penser à 17×500, mais puisque 4837 est visiblement plus proche de 1700 que de 17000 on peut estimer que 17×500 est encore trop grand et donc essayer 17×300 (c'est-à-dire 5100); d'où :

$$1700 < 4837 < 5100$$

et 4837 est plus proche de 5100 que de 1700.

Pour continuer à affiner l'encadrement, on va maintenant se guider sur l'écart entre 4837 et 5100 :

$$5100 = 4837 + 263$$

Ainsi qu'on l'a fait plus haut pour 4837, on peut encadrer 263 par 170 et 1700:

$$170 < 263 < 1700$$

et, puisque 263 est plus proche de 170 que de 1700, écrire

$$263 = 170 + 93$$

Examinant 93, on peut l'estimer voisin de la moitié de 170, c'est-à-dire 85, d'où :

$93 = 85 + 8$ c'est-à-dire $93 = (17 \times 5) + 8$

et 8 est évidemment encadré par deux multiples <u>consécutifs</u> de 17 : $17 \times 0 < 8 < 17 \times 1$

Résumons les calculs qui précèdent :

$93 = (17 \times 5) + 8$

d'où $263 = (17 \times 10) + (17 \times 5) + 8$

$263 = (17 \times 15) + 8$

$17 \times 300 = 4837 + (17 \times 15) + 8$

$17 \times 285 = 4837 + 8$

Les deux multiples de 17 les plus proches de 4837 sont donc :

$$17 \times 284 \quad \text{et} \quad 17 \times 285$$

Ce qu'on peut exprimer sous la forme:

$$4837 = (17 \times 284) + 9 \quad \text{et} \quad 9 < 17$$

<u>II-2</u> <u>Trouver q et r sachant que a = 1589 et b = 13</u>

Parmi les multiples de 13 qui s'écrivent facilement, outre 130, 1300, 13 000, ... il y a 26 et 39 et par conséquent 260, 390, 2600, etc...

On peut donc ici partir sur un encadrement généreux:

$$1300 < 1589 < 13\ 000$$

ou sur un encadrement plus étroit :

$$1300 < 1589 < 2600$$

Dans l'un et l'autre cas, le multiple de 13 qui est le plus proche de 1589 est 1300 ; on est donc amené à écrire :

$$1589 = (13 \times 100) + 289$$

289 étant plus proche de 260 que de 390, on écrit

$$289 = (13 \times 20) + 29$$

Ce qui nous donne: $1589 = (13 \times 120) + 29$

et de même $29 = (2 \times 13) + 3$

soit en définitive $1589 = (13 \times 122) + 3$

Puisque $3 < 13$, les deux naturels cherchés sont 122 et 3.

III COMMENTAIRES

III-1

Dans l'un et l'autre des exemples traités ci-dessus, nous avons feint d'ignorer qu'il existe des moyens plus ou moins perfectionnés (techniques de calcul, tables, etc...) pour calculer q et r.

Nous n'avions comme guide que l'idée suivante : écrire a sous forme d'une somme de deux naturels, l'un étant multiple de b, l'autre étant plus petit que b.

Pour certains choix de a et de b on serait en mesure de résoudre le problème du premier coup (par exemple pour a = 1302 et b = 13), mais en général ce n'est pas possible. C'est pourquoi on recherche d'abord un encadrement facile à obtenir, même s'il est grossier, que l'on affine ensuite de proche en proche.

Cette démarche réclame de l'initiative, de l'imagination, de la ténacité et met en oeuvre certains acquis antérieurs. Pour des choix différents de a et de b des variantes peuvent intervenir. C'est ainsi qu'en II-1, les produits de 17 par 10, 100 et 1000 ont été utilisés en priorité, alors qu'en II-2, ce sont les produits de 13 par 2,3, 20, 30, 200.

III-2

Des calculs analogues à ceux de II reviennent souvent. On est donc amené à s'interroger sur la façon dont on les traite dans chaque cas. En particulier, on cherchera à dégager les idées et les enchaînements communs aux solutions de plusieurs problèmes et, ce faisant, on estompera les variantes propres à des choix particuliers de a et de b. En d'autres termes on tentera d'élaborer un canevas de calcul utilisable quels que soient les naturels a et b.

Il s'agit donc maintenant d'examiner comment, à partir de la résolution de problèmes tels que II-1 et II-2, on peut élaborer une technique opératoire (on dit parfois un algorithme) c'est-à-dire une procédure qui satisfasse aux conditions suivantes :

- ne pas tenir compte des particularités éventuelles de a et de b;
- être constituée d'un nombre fini de règles à appliquer dans un ordre déterminé et permettant d'obtenir en un nombre fini d'étapes le résultat souhaité.

Une telle procédure, par son caractère quasi automatique, libérera de toute initiative, mais on se gardera d'en devenir l'esclave. Ce sera un outil commode, parfois utile voire indispensable, parfois inutile voire pernicieux.

Par ailleurs, il n'y a évidemment aucune raison pour qu'une telle procédure soit unique. Si l'on en construit plusieurs, il s'imposera de les comparer, du double point de vue de l'efficacité et de la simplicité.

IV SYSTEMATISATION

La pratique de calculs analogues à ceux de II conduit à constater que :

1°) l'important est de disposer de quelques multiples de b;

2°) on peut se contenter de choisir ces multiples parmi ceux qui sont inférieurs à a.

Le principe du calcul consiste alors à retrancher à partir de a, et de proche en proche, des multiples de b.

Voici quelques exemples.

IV-1

Choisissons d'écrire les produits de b par 1, 2, 3,... 8, 9, 10, 20, 30,... 100, 200, ... qui ne dépassent pas a.

Nous les appellerons dans ce qui suit les <u>multiples utiles</u> (*) de b. En ce qui concerne les produits par 1, 2, 3, ..., 9, on peut simplifier les calculs en utilisant des propriétés convenables (voir MULTIPLES d'un NATUREL). Ayant écrit ces premiers multiples, il est facile d'écrire les produits de b par 20, 30, etc...

<u>1er exemple</u> : <u>a = 1543</u> <u>b = 7</u>

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	0	7	14	21	28	35	42	49	56	63
(L_1)		70	140	210	280	350	420	490	560	630
		700	1400							

<u>2ème exemple</u> : <u>a = 1570</u> <u>b = 17</u>

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	0	17	34	51	68	85	102	119	136	153
(L_2)		170	340	510	680	850	1020	1190	1360	1530

<u>3ème exemple</u> : <u>a = 1589</u> <u>b = 13</u>

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	0	13	26	39	52	65	78	91	104	117
(L_3)		130	260	390	520	650	780	910	1040	1170
		1300								

(*) On pourrait choisir d'autres multiples de b, par exemple :
- utiliser b, 2b, 4b, 8b et leurs produits par des puissances de 10. Ou bien
- utiliser b, 2b, 4b, 8b, 16b, 32b, ... (on double à chaque fois)

Nous avons choisi d'appeler <u>utiles</u> ceux dont l'emploi nous permet d'espérer que l'on va obtenir successivement chacun des chiffres du quotient.

4ème exemple : a = 4837 b = 17

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
(L_4)	0	17	34	51	68	85	102	119	136	153
		170	340	510	680	850	1020	1190	1360	1530
		1700	3400							

5ème exemple : a = 5087 b = 37

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
(L_5)	0	37	74	111	148	185	222	259	296	333
		370	740	1110	1480	1850	2220	2590	2960	3330
		3700								

Remarque : Tous les tableaux précédents ont la même première ligne : 0, 1, 2, 3, ..., 8, 9.

Elle n'est pas indispensable pour calculer les multiples utiles puisqu'on peut procéder par addition réitérée (voir MULTIPLES d'un NATUREL) ; par contre, elle sera indispensable pour calculer le quotient.

Ainsi, dans le 5ème exemple, il ne suffit pas de savoir que 259 est un multiple de 37; il faut encore savoir que 259 est le produit de 37 par 7 : en effet, c'est 7 qui interviendra dans le quotient définitif.

IV-2

Maintenant qu'on dispose des multiples utiles dans chaque cas, procédons aux soustractions. Voici pour deux exemples le détail des calculs.

1er exemple a = 1543 b = 7

- Lire dans (L_1) le plus grand naturel : 1400
  $1543 = 1400 + 143$
- constater que $143 > 7$; d'où :
- lire dans (L_1) le plus grand naturel inférieur à 143 :
  $1543 = 1400 + 140 + 3$
- constater que $3 < 7$ (fin de l'utilisation de (L_1))
- en résumé : $1543 = 1400 + 140 + 3$

d'où $1543 = (7 \times 200) + (7 \times 20) + 3.$

Soit $1543 = (7 \times 220) + 3$

Par conséquent $q = 220$ et $r = 3$

<u>3ème exemple</u> . <u>a = 1589</u> <u>b = 13</u>

- lire dans (L_3) le plus grand naturel : 1300
  $1589 = 1300 + 289$
- constater que $289 > 13$; d'où :
- lire dans (L_3) le plus grand naturel inférieur à 289.
  $1589 = 1300 + 260 + 29$
- constater que $29 > 13$; d'où :
- lire dans (L_3) le plus grand naturel inférieur à 29.
  $1589 = 1300 + 260 + 26 + 3$
- constater que $3 < 13$ (fin de l'utilisation de (L_3))
- en résumé : $1589 = 1300 + 260 + 26 + 3$
  d'où $1589 = (13 \times 100) + (13 \times 20) + (13 \times 2) + 3$
  soit $1589 = (13 \times 122) + 3$
  Par conséquent $q = 122$ et $r = 3$

<u>IV-3</u>

Reprenons maintenant les exemples de IV-1 mais en présentant les calculs de façon plus condensée.

<u>1er exemple</u> <u>a = 1543</u> <u>b = 7</u>

	1543		
Lecture de L_1	1400	200	
	143		$143 < 7$? réponse non
Lecture de L_1	140	20	
	3	220	$3 < 7$ oui
	r = 3	q = 220	

<u>2ème exemple</u> <u>a = 1570</u> <u>b = 17</u>

	1570		
Lecture de L_2	1530	90	
	40		$40 < 17$ non
Lecture de L_2	34	2	
	6	92	$6 < 17$ oui
	r = 6	q = 92	

3ème exemple a = 1589 b = 13

	1589			
Lecture de L_3	1300	100		
	289		289 < 13	non
Lecture de L_3	260	20		
	29		29 < 13	non
Lecture de L_3	26	2		
	3	122		
	r = 3	q = 122		

4ème exemple a = 4837 b = 17

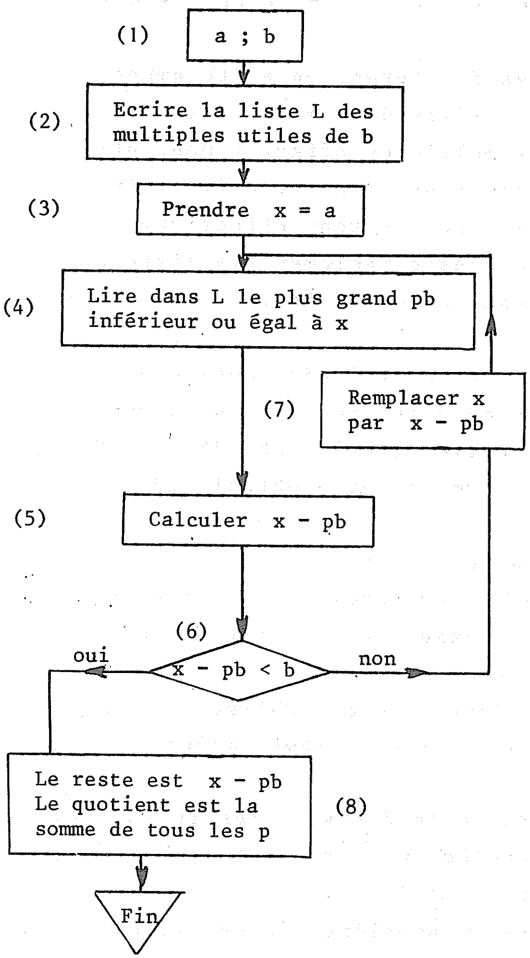
	4837			
Lecture de L_4	3400	200		
	1437		1437 < 17	non
Lecture de L_4	1360	80		
	77		77 < 17	non
Lecture de L_4	68	4		
	9	284	9 < 17	oui
	r = 9	q = 284		

5ème exemple a = 5087 b = 37

	5087			
Lecture de L_5	3700	100		
	1387		1387 < 37	non
Lecture de L_5	1110	30		
	277		277 < 37	non
Lecture de L_5	259	7		
	18	137	18 < 37	oui
	r = 18	q = 137		

V REDUCTION DES ECRITURES

La procédure utilisée dans ce qui précède est résumée par le schéma suivant :



Voici, sur un exemple, à quoi correspondent les 8 cases du schéma ci-contre :

(1) a = 1543 ; b = 7

(2) Voir L_1 page 5

(3) on prend 1543

(4) on lit 1400 dans L_1

(5) 1543 − 1400 = 143

(6) Est-ce que 143 < 7 ? réponse : non

(7) on prend 143

(4) on lit 140 dans L_1

(5) 143 − 140 = 3

(6) 3 < 7 : oui

(8) r = 3

q = 200 + 20 ; q = 220. FIN

Note : dans la case (4), n'importe quel nombre de L inférieur ou égal à x peut être utilisé, mais choisir le plus grand donne le calcul le plus court.

En principe, on pourrait obtenir le quotient et le reste sans écrire aucun multiple de b ; il suffirait de soustraire b de proche en proche. En fait, ce procédé n'est applicable que dans les cas où a et b sont très proches l'un de l'autre :

$\begin{cases} a = 20 \\ b = 7 \end{cases}$ $\quad 20 \xrightarrow{7} 13 \xrightarrow{7} 6 \quad$ r = 6 q = 2

$\begin{cases} a = 432 \\ b = 140 \end{cases}$ $\quad 452 \xrightarrow{140} 312 \xrightarrow{140} 172 \xrightarrow{140} 32 \quad$ r = 32 q = 3

Dans le plus grand nombre des cas, ce procédé conduit à des calculs très longs.

Dans le but de réduire les écritures, on a été amené à écrire la liste des multiples utiles de b mais cette liste reste assez longue. De plus, les multiples effectivement utilisés dans le calcul sont peu nombreux : un par chiffre du quotient. Prévoir quels multiples de b seront effectivement utilisés permettrait de réduire considérablement la liste à écrire ; malheureusement ce n'est qu'une fois le calcul terminé qu'on sait lesquels ont servi.

Devant ce problème, il y a deux attitudes possibles :

- écrire d'avance les multiples de b qui permettront d'obtenir à vue tous les multiples utiles (écrire 2b, 3b, ... 9b, qui, par l'adjonction de zéros, permettront d'obtenir 20b, 30b, ... 200b, 2000b, ...).(*)
- ne rien écrire d'avance et faire les calculs au fur et à mesure des besoins supposés. Deux variantes sont courantes :
  a) conserver la trace de chaque calcul fait, ce qui permet leur réutilisation ultérieure.
  b) ne pas écrire les produits, ce qui oblige éventuellement à faire plusieurs fois le même calcul.

TECHNIQUES OPERATOIRES

Une technique opératoire de la division résulte de la manière dont on a résolu le problème précédent et de la disposition pratique adoptée pour les calculs.

Le problème du choix est un problème d'économie de temps, de moyens et de fatigue, compte tenu des connaissances et des capacités du calculateur.

Un calculateur dont les connaissances sur la multiplication sont peu sûres ou lentement mobilisables, et c'est le cas d'un élève débutant, a tout intérêt à éviter de recommencer plusieurs fois le même calcul de produit (ce qui est pour lui un travail inutile et pénible). Le temps consacré à

(*) Une variante consiste à utiliser la liste 2b, 4b et 8b, qui est plus courte et facilement calculable par addition, mais qui ne permet pas de trouver d'un seul coup chaque chiffre du quotient.

l'écriture ne ralentit pas son action qui est commandée par le temps du calcul mental ; de plus c'est pour lui la seule méthode fiable.

Un calculateur à l'aise dans le calcul des produits mettra sans doute moins de temps à calculer les produits qu'à les écrire. Son intérêt, tant qu'il n'est pas fatigué, est d'écrire le moins possible; mais il prend le risque, s'il se trompe, de devoir tout recommencer (les sondages montrent que très peu de personnes sont dans ce cas ou le restent durant toute leur vie).

Il va de soi que personne n'est astreint à utiliser toujours la même technique, mais que, selon le degré de fatigue ou le gain en habileté, chacun pourra utiliser une technique économisant plus ou moins d'écritures.

VI DISPOSITION DES CALCULS

On trouve en IV-3 une présentation condensée des calculs. La pratique aidant, on pourrait encore abréger, par exemple ainsi :

$a = 4837 \qquad b = 17$

$$
\begin{array}{rr}
4837 & \\
3400 & 200 \\
\hline
1437 & \\
1360 & 80 \\
\hline
77 & \\
68 & 4 \\
\hline
9 & 284
\end{array}
$$

La tradition française nous a légué la disposition :

$$
\begin{array}{r|l}
4837 & 17 \\
\cline{2-2}
143 & 2\cancel{9}\cancel{5} \\
\cancel{0} & 84 \\
77 & \\
\cancel{2} & \\
9 &
\end{array}
$$

Cette procédure de calcul, d'un indéniable raffinement, présente des difficultés d'ordres différents :

- pour la première fois, on utilise des estimations par excès des chiffres du quotient (c'est pourquoi 9 et 5 ont été rayés);

- il est nécessaire d'avoir un très bon entraînement aux calculs de produits et de différences ; sinon on risque de perdre de vue les différentes étapes du calcul;

- après détermination d'un chiffre du quotient intervient une opération qui n'est ni la multiplication, ni la soustraction, mais en quelque sorte une opération hybride.

Examinons ce dernier point à propos du dernier chiffre du quotient. En principe, il s'agit de calculer 77-(4×17). Ce calcul se traite normalement en deux étapes :

4 × 17 = 68 puis 77 - 68 = 9

Dans la procédure traditionnelle, voici comment on s'y prend : à partir de 4 × 7 = 28, on décompose 77 en 40 + 37 et on calcule 37 - 28, soit 9. On écrit 9 et l'on retient le 3 de 37. On revient alors à 4, on calcule 4 × 1, à quoi on ajoute le 3 précédemment retenu, on obtient 7 que l'on retranche du chiffre des dizaines de 77.

Cette description permet de se rendre compte qu'on a mis en oeuvre une opération mixte qui entremêle chiffre par chiffre le calcul d'un produit et celui d'une différence en conjuguant des retenues <u>inhabituelles</u> introduites au cours de ces deux calculs.

En effet :

- dans le calcul de 4 × 17, la retenue serait 2 alors qu'ici on utilise globalement **28** et qu'on n'achève pas le calcul du produit;

- dans le calcul de 37 - 29, la retenue serait 1 alors qu'ici on retient le 3 de 37 et l'on achève le calcul de 4 × 17 en utilisant ce 3.

En définitive, cette disposition traditionnelle des calculs est très abrégée et réalise une certaine économie d'écriture, mais en contrepartie, elle exige du calculateur une concentration d'esprit, une résistance à la fatigue, une robustesse de la mémoire, voire une virtuosité hors de portée d'un débutant. C'est pourquoi bien des enseignants de l'école élémentaire détaillent actuellement ce calcul de la façon suivante :

4837	17
34	2~~9~~~~5~~
143	84
~~153~~	
136	
77	
~~85~~	
68	
9	

Voici une autre disposition utilisée dans certains pays (Etats-Unis, Suède, etc...) :

84
2~~9~~~~5~~
17) 4837
143
~~0~~
77
~~2~~
9

et, probablement, sous forme plus détaillée pour de jeunes enfants :

84
2~~9~~~~5~~
17) 4837
3400
1437
~~1530~~
1360
77
~~85~~
68
9

ou

4
~~5~~
80
~~90~~
200
17) 4837
3400
1437
~~1530~~
1360
77
~~85~~
68
9

Cette disposition offre au moins deux avantages :
- dès le début, on connaît le nombre des chiffres du quotient et ,par conséquent, une estimation du quotient.
- elle s'adapte bien aux cas où on utilise des écritures à virgule.

Par contre, comme dans la disposition française traditionnelle, on est fréquemment amené à rayer certains chiffres (dans l'exemple précédent, 9 et 5 au quotient, 0 et 2 aux restes partiels). Ces ratures s'expliquent par le fait que dans la technique habituelle on ne commence pas par dresser la liste des multiples utiles du diviseur (voir les calculs proposés en IV-3), mais qu'on essaie de trouver les différents chiffres du quotient par une procédure d'estimation qui ne donne pas toujours d'emblée le chiffre convenable.

A notre avis, toute technique, toute disposition adoptée par le calculateur, élève ou adulte, si éloignées soient-elles de la tradition, doit être acceptée, du moment que les résultats sont bons et que le calculateur comprend ce qu'il fait. Si un élève, ayant à calculer le quotient de 154 par 10, éprouve le besoin de poser $\begin{array}{r|l} 154 & 10 \\ \hline \end{array}$ et éventuellement d'appliquer un rituel totalement inutile dans ce cas, on peut penser qu'il ne comprend pas ce qu'il fait.

De façon générale, il est vivement souhaitable que le calculateur dispose de plusieurs techniques de calcul, aussi bien pour la division que pour d'autres opérations. Il lui incombe de choisir, dans chaque cas particulier, telle ou telle technique en fonction des caractéristiques du calcul à traiter et de son état du moment (habileté, fatigue, etc...)

VII ORDINOGRAMMES

Les techniques habituelles de division se distinguent les unes des autres suivant que :

1°) On écrit au préalable une liste de multiples du diviseur (on a alors le choix entre plusieurs listes, voir note p.42)

ou bien

on ne se donne pas au préalable de multiples du diviseur (on devra alors utiliser une procédure d'estimation pour chaque chiffre du quotient).

2°) A chaque étape du calcul on "pose les soustractions"

ou bien

on "ne pose aucune soustraction".

Ainsi on peut répartir les techniques de division en 4 types. Dans une perspective pédagogique, il est indispensable de comparer les complexités de ces 4 types, afin de ne pas présenter trop tôt à des enfants une technique trop complexe.

Dans ce but, nous présentons ci-dessous les ordinogrammes de cinq techniques. Ils présentent sous forme de schémas fléchés les différentes tâches élémentaires qu'il faut enchaîner pour traiter le calcul d'un quotient et d'un reste (en d'autres termes, l'ordinogramme d'une technique de calcul n'est rien d'autre qu'une présentation condensée de cette technique, adaptée à tous les cas possibles et éliminant tout recours à la réflexion).

Le lecteur trouvera :

- L'ordinogramme (0) de la technique par soustractions successives : on soustrait systématiquement le diviseur et on décompte les soustractions.
- L'ordinogramme (1) de la technique usuelle par estimation avec opération hybride de "multiplication-soustraction".
- L'ordinogramme (2) de la technique par estimation en posant les soustractions.
- L'ordinogramme (3) de la technique utilisant une table de multiples du diviseur.
- L'ordinogramme (4) de la technique utilisant une table de 3 doubles successifs à partir du diviseur.

En regard de chaque ordinogramme figure un exemple de calcul traité en suivant pas à pas les instructions. Celles-ci ont été placées dans des cases numérotées de façon que le lecteur puisse suivre plus facilement le déroulement du calcul. Les instructions élémentaires choisies ici ne sont pas celles que peuvent exécuter directement les machines programmables ; à cela près, ces ordinogrammes sont analogues à ceux que réalisent les analystes-programmeurs avant de faire un programme.

Les cases rectangulaires contiennent les instructions.

Les cases losanges déterminent une bifurcation ; le losange a valeur de point d'interrogation ; selon les données, la réponse à la question posée est <u>oui</u> ou <u>non</u> ; la suite du parcours dépend de cette réponse.

Dans chaque programme, il se peut qu'en suivant les flèches on revienne à une case déjà rencontrée : on vient de parcourir une boucle. Cela ne veut pas dire qu'on va refaire exactement les mêmes calculs, mais qu'on va appliquer les mêmes instructions à de nouveaux nombres ; les lettres utilisées changent de valeur pour le nouveau parcours (par exemple le nouveau reste partiel est obtenu en abaissant un chiffre, le nombre de soustractions déjà faites augmente de 1, etc...).

Pour chaque boucle, il y a, avant la première instruction de calcul, une instruction qui précise comment se font ces changements de valeur ; ces instructions sont écrites dans un double cadre.

<u>NOTATIONS</u> : Dans tous les ordinogrammes nous avons noté :

A le dividende et B le diviseur

n est le nombre des chiffres de A ; a_1, a_2, ..., a_n sont ses chiffres et $\overline{a_1 a_2 \ldots a_n}$ est l'écriture chiffrée de A.

p est le nombre des chiffres de B ; b_1, b_2, ..., b_p sont ses chiffres et $\overline{b_1 b_2 \ldots b_p}$ est l'écriture chiffrée de B.

Pour un calcul donné, A, B, n, p, a_1, a_2, ..., a_n, b_1, b_2, ..., b_p sont fixés au début une fois pour toutes. Dans tous les exemples nous avons choisi :

A = 5082 ; n = 4 , $a_1 = 5$, $a_2 = 0$, $a_3 = 8$, $a_4 = 2$.

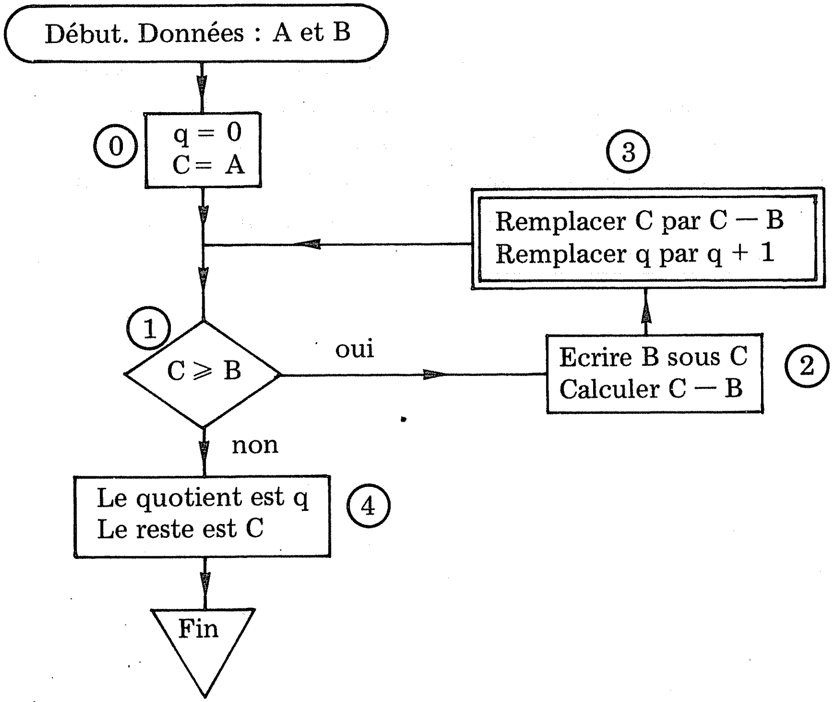
B = 17 ; p = 2 , $b_1 = 1$, $b_2 = 7$.

Dans tous les ordinogrammes, à chaque entrée de boucle C désigne le reste partiel, m le nombre de ses chiffres, $\overline{c_1 \; c_2 \; \cdots \; c_m}$ l'écriture chiffrée de C .

c, m, c_1, c_2, ... , c_m peuvent changer de valeur non seulement d'un ordinogramme à l'autre, mais aussi à l'intérieur d'un ordinogramme, à chaque tour de boucle.

Il n'est pas indispensable, en première lecture, tout au moins, d'entrer dans tous les détails des pages qui suivent ; néanmoins nous recommandons au lecteur de lire au moins le bref commentaire qui accompagne chaque ordinogramme.

ORDINOGRAMME N° 0
(technique par "soustractions successives")



Commentaire. On ne peut pas faire plus simple.
Mais les calculs risquent d'être d'une longueur rédhibitoire.

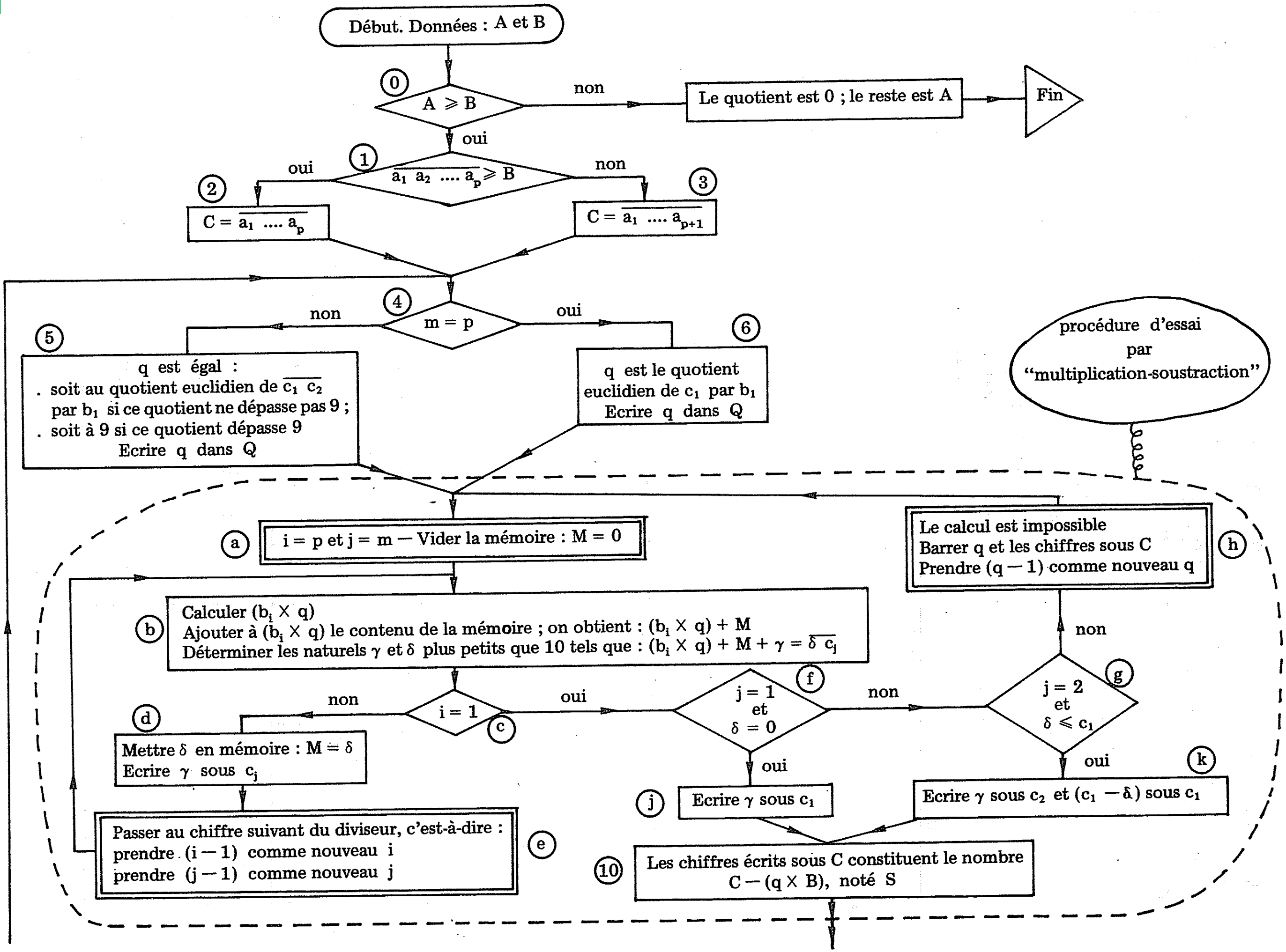
Exemple. Données : A = 5082 ; B = 17

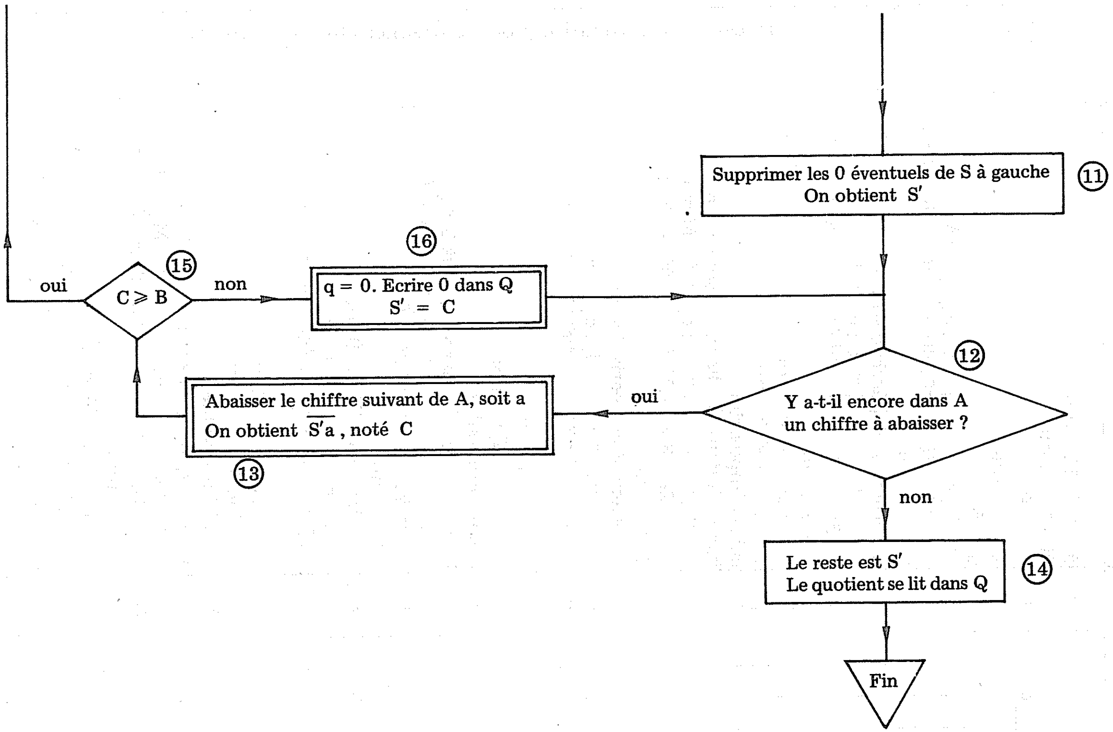
Analyse de la disposition									N° de la case	Réponses à la question. Exécution des instructions
					Q					
	5	0	8	2			0		0	q = 0 ; C = 5082
									1	5082 ⩾ 17 : oui
			1	7					2	5082 − 17 = 5065
	5	0	6	5			1		3	C = 5065 ; q = 1
									1	5065 ⩾ 17 : oui
			1	7					2	5065 − 17 = 5048
	5	0	4	8						

environ 880 lignes plus bas :

			5	0	2	9	6		3	C = 50 ; q = 296
									1	50 ⩾ 17 : oui
			1	7					2	50 − 17 = 33
			3	3	2	9	7		3	C = 33 ; q = 297
									1	33 ⩾ 17 : oui
			1	7					2	33 − 17 : 16
			1	6	2	9	8		3	C = 16 ; q = 298
									1	16 ⩽ 17 : non
									4	le quotient est 298 ; le reste est 16 Fin

ORDINOGRAMME N° 1 (technique usuelle)





Commentaire *Effrayant !*
11 *variables* : C, m, q, i, j, M, γ, δ, S, S′ et a
Et pourtant, c'est une description fidèle de ce qu'on enseigne traditionnellement à l'école élémentaire...

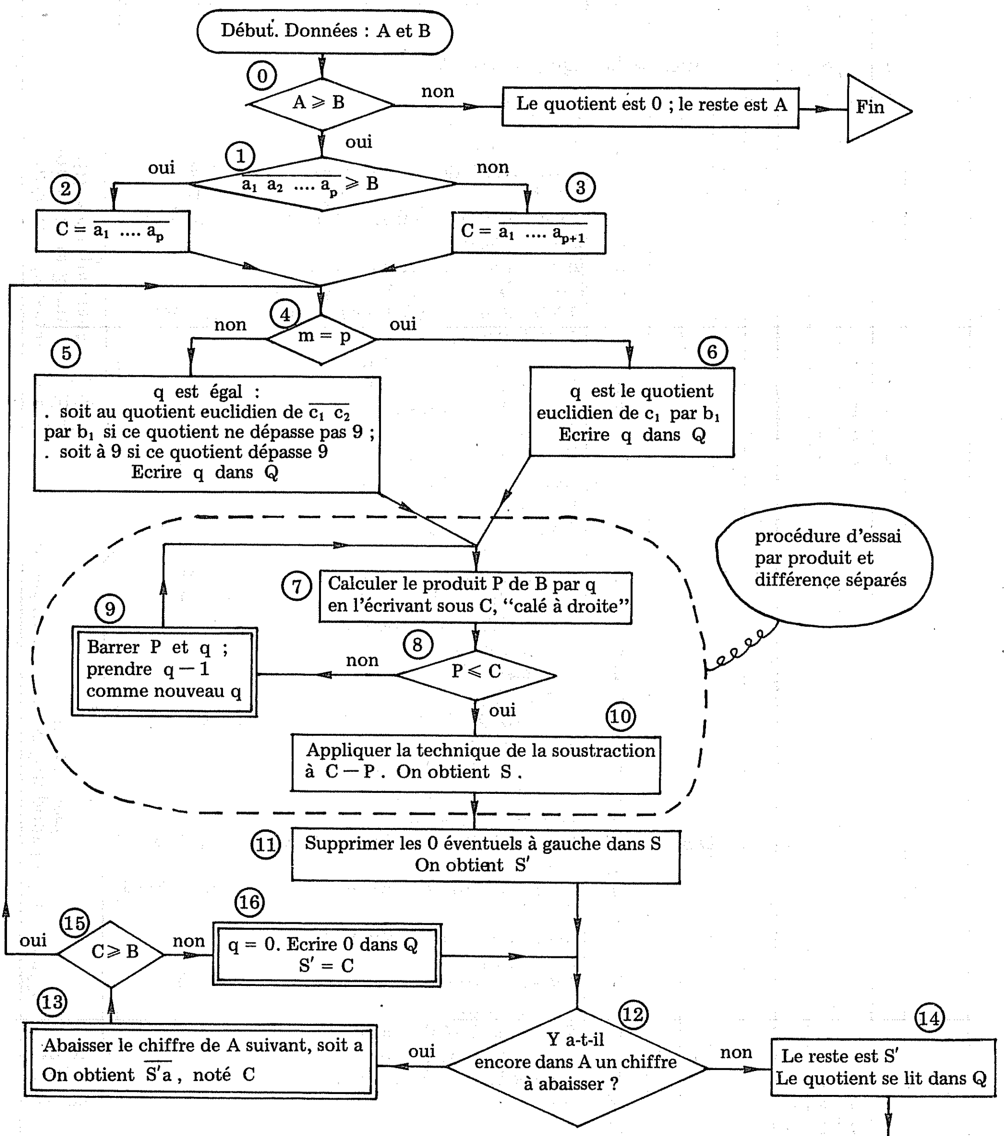
Exemple. Données : $A = 5082$ ($n = 4$) ; $B = 17$ ($p = 2$)

Analyse de la disposition					N° de la case	Réponses aux questions Exécution des instructions	
5	0	8	2		0	$5082 \geqslant 17$: oui	
					1	$50 \geqslant 17$: oui	
5	0			Q	2	$C = 50$	
					4	$2 = 2$: oui	procédure d'estimation pour le premier chiffre du quotient
				5	6	$q = 5$	
					a	$i = 2$; $b_2 = 7$; $j = 2$; $c_2 = 0$; $M = 0$	
					b	$7 \times 5 = 35$; $35 + 0 = 35$; $35 + 5 = 40$; $\gamma = 5$ et $\delta = 4$	
					c	$2 = 1$: non	
	5				d	je retiens 4 et j'écris 5 sous 0	
					e	$i = 1$; $b_1 = 1$; $j = 1$; $c_1 = 5$	
					b	$1 \times 5 = 5$; $5 + 4 = 9$; $9 + 6 = 15$; $\gamma = 6$ et $\delta = 1$	
					c	$1 = 1$: oui	
					f	$1 = 1$ et $1 = 0$: non	
					g	$1 = 2$ et $1 \leqslant 5$: non	
					h	calcul impossible	
	~~5~~			~~5~~ 4		barrer 5 dans Q ; barrer 5 sous 0 ; $q = 4$	
					a	$i = 2$; $b_2 = 7$; $j = 2$; $c_2 = 0$; $M = 0$	
					b	$7 \times 4 = 28$; $28 + 0 = 28$; $28 + 2 = 30$; $\gamma = 2$ et $\delta = 3$	
					c	$2 = 1$: non	
	2				d	je retiens 3 et j'écris 2 sous 0	
					e	$i = 1$; $b_1 = 1$; $j = 1$; $c_1 = 5$	
					b	$1 \times 4 = 4$; $4 + 3 = 7$; $7 + 8 = 15$; $\gamma = 8$ et $\delta = 1$	
					c	$1 = 1$: oui	
					f	$1 = 1$ et $1 = 0$: non	
					g	$1 = 2$ et $1 \leqslant 5$: non	
					h	calcul impossible	
	~~2~~			~~4~~ 3		barrer 4 dans Q ; barrer 2 sous 0 ; $q = 3$	
					a	$i = 2$; $b_2 = 7$; $j = 2$; $c_2 = 0$; $M = 0$	
					b	$7 \times 3 = 21$; $21 + 0 = 21$; $21 + 9 = 30$; $\gamma = 9$ et $\delta = 3$	
					c	$2 = 1$: non	
	9				d	je retiens 3 et j'écris 9 sous 0	
					e	$i = 1$; $b_1 = 1$; $j = 1$; $c_1 = 5$	
					b	$1 \times 3 = 3$; $3 + 3 = 6$; $6 + 9 = 15$; $\gamma = 9$ et $\delta = 1$	
					c	$1 = 1$: oui	
					f	$1 = 1$ et $1 = 0$: non	
					g	$1 = 2$ et $1 \leqslant 5$: non	
					h	calcul impossible	
	~~9~~			~~3~~ 2		barrer 3 dans Q ; barrer 9 sous 0 ; $q = 2$	
					a	$i = 2$; $b_2 = 7$; $j = 2$; $c_2 = 0$; $M_2 = 0$	
					b	$7 \times 2 = 14$; $14 + 0 = 14$; $14 + 6 = 20$; $\gamma = 6$ et $\delta = 2$	
					c	$2 = 1$: non	
	6				d	je retiens 2 et j'écris 6 sous 0	
					e	$i = 1$; $b_1 = 1$; $j = 1$; $c_1 = 5$	
					b	$1 \times 2 = 2$; $2 + 2 = 4$; $4 + 1 = 5$; $\gamma = 1$ et $\delta = 0$	
					c	$1 = 1$: oui	
					f	$1 = 1$ et $0 = 0$: oui	Le 1er
1					j	j'écris 1 sous 5	chiffre
1	6				10	$S = 16$	est 2
1	6				11	$S' = 16$	
					12	oui ; le chiffre suivant est 8	

(à suivre)

Analyse de la disposition							Nº de la case	Réponses aux questions. Exécution des instructions.	
				Q					
5	0	8	2	2				(Rappel de la page précédente)	
1	6	8					13	$C = 168$	
							15	$168 \geqslant 17$: oui	
							4	$3 = 2$: non	
				2	9		5	le quotient de 16 par 1 est 16 ; $q = 9$	
							a	$i = 2$; $b_2 = 7$; $j = 3$; $c_3 = 8$; $M = 0$	procédure d'estimation pour le 2ème chiffre du quotient
							b	$7 \times 9 = 63 ; 63 + 0 = 63 ; 63 + 5 = 68 ; \gamma = 5$ et $\delta = 6$	
							c	$2 = 1$: non	
		5					d	je retiens 6 et j'écris 5 sous 8	
							e	$i = 1$; $b_1 = 1$; $j = 2$; $c_2 = 6$	
							b	$1 \times 9 = 9 ; 9 + 6 = 15 ; 15 + 1 = 16 ; \gamma = 1$ et $\delta = 1$	
							c	$1 = 1$: oui	
							f	$2 = 1$ et $1 = 0$: non	
							g	$2 = 2$ et $1 \leqslant 1$: oui	Le 2e chiffre est 9
0	1						k	j'écris 1 sous 6 et 0 sous 1	
0	1	5					10	$S = 015$	
~~0~~	1	5					11	$S' = 15$	
							12	oui ; le chiffre suivant est 2	
	1	5	2				13	$C = 152$	
							15	$152 \geqslant 17$: oui	
							4	$3 = 2$: non	
				2	9	9	5	le quotient de 15 par 1 est 15 ; $q = 9$	
							a	$i = 2$; $b_2 = 7$; $j = 3$; $c_3 = 2$; $M = 0$	
							b	$7 \times 9 = 63 ; 63 + 0 = 63 ; 63 + 9 = 72 ; \gamma = 9$ et $\delta = 7$	procédure d'estimation pour le 3ème chiffre du quotient
							c	$2 = 1$: non	
			9				d	je retiens 7 et j'écris 9 sous 2	
							e	$i = 1$; $b_1 = 1$; $j = 2$; $c_2 = 5$	
							b	$1 \times 9 = 9 ; 9 + 7 = 16 ; 16 + 9 = 25 ; \gamma = 9$ et $\delta = 2$	
							c	$1 = 1$: oui	
							f	$2 = 1$ et $2 = 0$: non	
							g	$2 = 2$ et $2 \leqslant 1$: non	
							h	calcul impossible	
			~~9~~	2	9	~~9~~ 8		barrer 9 dans Q ; barrer 9 sous 2 ; $q = 8$	
							a	$i = 2$; $b_2 = 7$; $j = 3$; $c_3 = 2$; $M = 0$	
							b	$7 \times 8 = 56 ; 56 + 0 = 56 ; 56 + 6 = 62 ; \gamma = 6$ et $\delta = 6$	
							c	$2 = 1$: non	
			6				d	je retiens 6 et j'écris 6 sous 2	
							e	$i = 1$; $b_1 = 1$; $j = 2$; $c_2 = 5$	
							b	$1 \times 8 = 8 ; 8 + 6 = 14 ; 14 + 1 = 15 ; \gamma = 1$ et $\delta = 1$	
							c	$1 = 1$: oui	
							f	$2 = 1$ et $1 = 0$: non	
							g	$2 = 2$ et $1 \leqslant 1$: oui	Le 3e chiffre est 8
	0	1					k	j'écris 1 sous 5 et 0 sous 1	
	0	1	6				10	$S = 016$	
	~~0~~	1	6				11	$S' = 16$	
							12	non	
							14	le reste est 16 ; le quotient est 298	
								Fin	

ORDINOGRAMME N° 2 (technique usuelle, mais en "posant les soustractions")



Commentaire *En "posant les soustractions", on a 4 variables de moins que dans l'ordinogramme n° 1. Il reste 7 variables à maîtriser :*
C, m, q, P, S, S', a

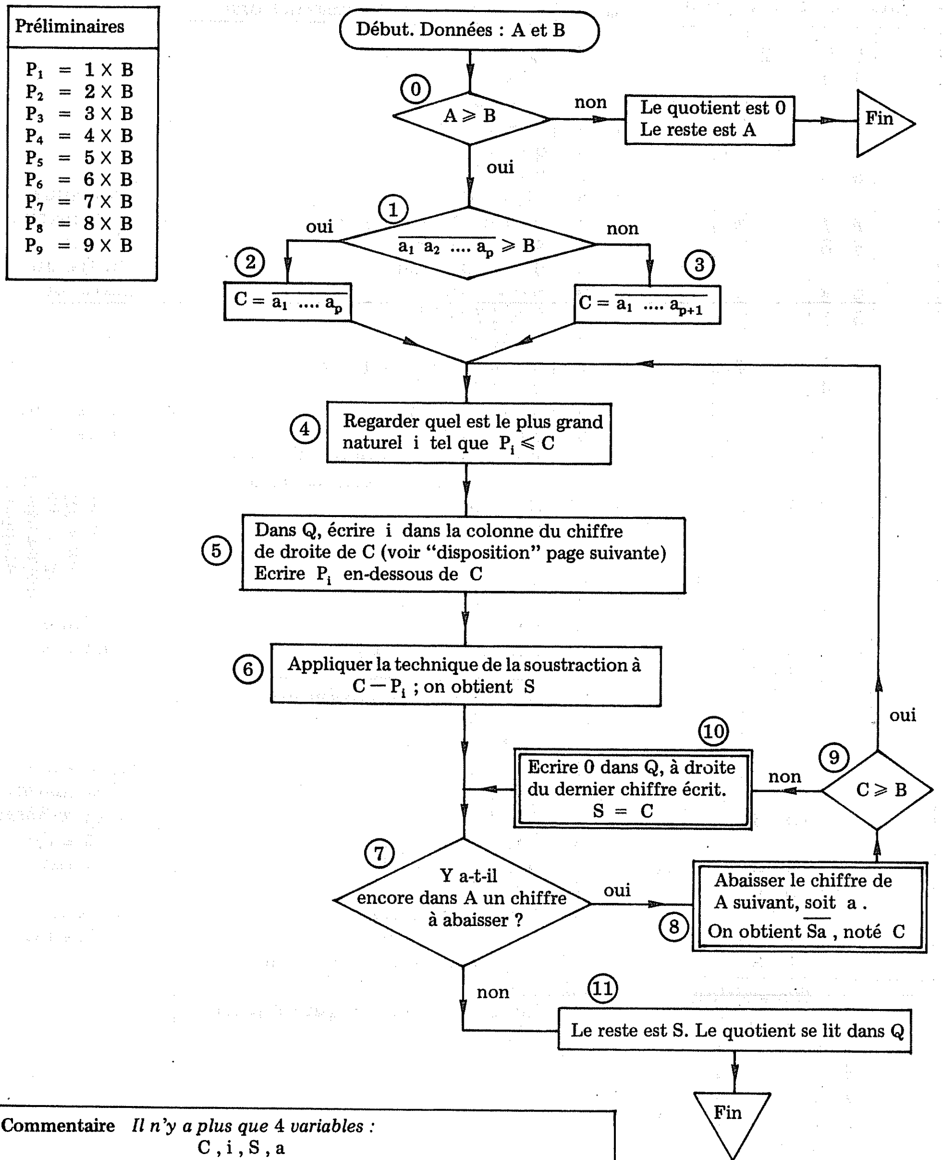
Exemple. Données : A = 5082 (n = 4) ; B = 17 (p = 2)

Analyse de la disposition		N° de la case	Réponses aux questions Exécution des instructions	
5 0 8 2		0	5082 ⩾ 17 : oui	
5 0		1	50 ⩾ 17 : oui	
	Q	2	C = 50	
		4	2 = 2 : oui	
	5	6	q = 5	
8 5		7	5 × 17 = 85	
		8	85 ⩽ 50 : non	procédure d'estimation pour le 1er chiffre du quotient
~~8~~ ~~5~~	~~5~~ 4	9	Barrer 85 et 5 ; q = 4	
6 8		7	4 × 17 = 68	
		8	68 ⩽ 50 : non	
~~6~~ ~~8~~	~~4~~ 3	9	Barrer 68 et 4 ; q = 3	
5 1		7	3 × 17 = 51	
		8	51 ⩽ 50 : non	
~~5~~ ~~1~~	~~3~~ 2	9	Barrer 51 et 3 ; q = 2	
3 4		7	2 × 17 = 34	
		8	34 ⩽ 50 : oui	Le 1er chiffre est 2
1 6		10	50 − 34 = 16	
1 6		11	Pas de 0 à supprimer. S′ = 16	
		12	Oui ; le chiffre suivant est 8	procédure d'estimation pour le 2ème chiffre du quotient
1 6 8		13	C = 168	
		15	168 ⩾ 17 : oui	
		4	3 = 2 : non	
	2 9	5	q = 9	
1 5 3		7	9 × 17 = 153	
		8	153 ⩽ 168 : oui	Le 2ème chiffre est 9
0 1 5		10	168 − 153 = 015	
1 5		11	Un 0 à supprimer. S′ = 15	
		12	Oui ; le chiffre suivant est 2	
1 5 2		13	C = 152	
		15	152 ⩾ 17 : oui	
		4	3 = 2 : non	procédure d'estimation pour le 3ème chiffre du quotient
	2 9 9	5	q = 9	
1 5 3		7	9 × 17 = 153	
		8	153 ⩽ 152 : non	
~~1~~ ~~5~~ ~~3~~	2 9 ~~9~~ 8	9	Barrer 153 et 9 ; q = 8	
1 3 6	2 9 8	7	8 × 17 = 136	
		8	136 ⩽ 152 : oui	Le 3ème chiffre est 8
0 1 6		10	152 − 136 = 016	
1 6		11	Un 0 à supprimer. S′ = 16	
		12	Non	
		14	Le reste est 16 ; le quotient est 298	
			Fin	

Disposition

5 0 8 2	1 7
~~8~~ ~~5~~	~~5~~
~~6~~ ~~8~~	~~4~~
~~5~~ ~~1~~	~~3~~
~~3~~ ~~4~~	2 9 ~~9~~
1 6 8	8
1 5 3	
~~0~~ 1 5 2	
~~1~~ ~~5~~ ~~3~~	
1 3 6	
1 6	

ORDINOGRAMME N° 3 (technique utilisant une table de multiples du diviseur)



Commentaire *Il n'y a plus que 4 variables :*
C , i , S , a
Enfin une technique raisonnable !

Exemple. Données : A = 5082 ; B = 17

Préliminaires : Calcul des 9 premiers multiples non nuls de B

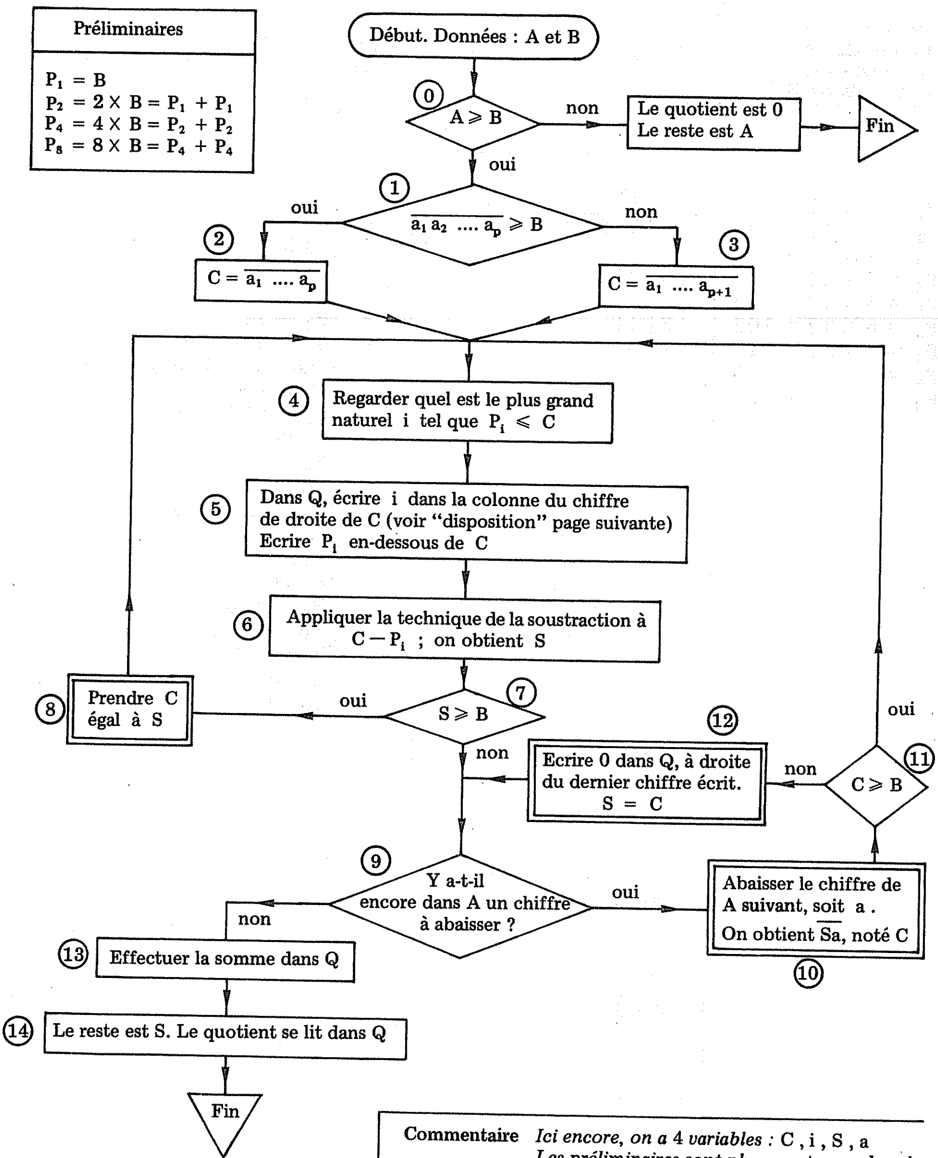
$P_1 = 1 \times 17 = 17$
$P_2 = 2 \times 17 = 34$
$P_3 = 3 \times 17 = 51$
$P_4 = 4 \times 17 = 68$
$P_5 = 5 \times 17 = 85$
$P_6 = 6 \times 17 = 102$
$P_7 = 7 \times 17 = 119$
$P_8 = 8 \times 17 = 136$
$P_9 = 9 \times 17 = 153$

Analyse de la disposition	N° de la case	Réponses aux questions Exécution des instructions
2 9 8 Q		
5 0 8 2	0	5082 ⩾ 17 : oui
	1	50 ⩾ 17 : oui
5 0	2	C = 50
	4	i = 2
3 4	5	P_2 = 34
1 6	6	50 − 34 = 16
	7	Oui ; le chiffre suivant est 8
1 6 8	8	C = 168
	9	168 ⩾ 17 : oui
	4	i = 9
1 5 3	5	P_9 = 153
1 5	6	168 − 153 = 15
	7	Oui ; le chiffre suivant est 2
1 5 2	8	C = 152
	9	152 ⩾ 17 : oui
	4	i = 8
1 3 6	5	P_8 = 136
1 6	6	152 − 136 = 16
	7	Non
	11	Le reste est 16 ; le quotient est 298

Disposition

```
    2 9 8
  -------
  5 0 8 2
  3 4
  1 6 8
  1 5 3
    1 5 2
    1 3 6
      1 6
```

ORDINOGRAMME N° 4 (technique utilisant 3 doubles successifs à partir du diviseur)



Commentaire *Ici encore, on a 4 variables :* C , i , S , a
Les préliminaires sont plus courts que dans la technique n° 3, mais les écritures risquent d'être un peu plus longues.

Exemple. Données : A = 5082 ; B = 17

Préliminaires : Calcul des 3 doubles successifs
$P_1 = 17$
$P_2 = 17+17 = 34$
$P_4 = 34+34 = 68$
$P_8 = 68+68 = 136$

```
      Q
    2 9 8
 
      1
    2 8 8
```

Analyse de la disposition	N° de la case	Réponses aux questions Exécution des instructions
5 0 8 2	0	5082 ⩾ 17 : oui
	1	50 ⩾ 17 : oui
5 0	2	C = 50
	4	i = 2
3 4	5	$P_2 = 34$
1 6	6	50 − 34 = 16
	7	16 ⩾ 17 : non
	9	Oui ; le chiffre suivant est 8
1 6 8	10	C = 168
	11	168 ⩾ 17 : oui
	4	i = 8
1 3 6	5	$P_8 = 136$
3 2	6	168 − 136 = 32
	7	32 ⩾ 17 : oui
3 2	8	C = 32
	4	i = 1
1 7	5	$P_1 = 17$
1 5	6	32 − 17 = 15
	7	15 ⩾ 17 : non
	9	Oui ; le chiffre suivant est 2
1 5 2	10	C = 152
	11	152 ⩾ 17 : oui
	4	i = 8
1 3 6	5	$P_8 = 136$
1 6	6	152 − 136 = 16
	7	16 ⩾ 17 : non
	9	Non
	13	288 + 10 = 298
	14	Le reste est 16 ; le quotient est 298

Disposition

```
    2 9 8
 ----------
      1
    2 8 8
 ----------
  5 0 8 2
  3 4
  1 6 8
  1 3 6
    3 2
    1 7
    1 5 2
    1 3 6
      1 6
```

la collection MOTS

L'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public a entrepris de publier une série de brochures, intitulées MOTS, contenant des réflexions sur quelques mots-clés utilisés en mathématique à l'Ecole Elémentaire :

égalité ; exemple et contre-exemple ; couple ; relation binaire ; nombre naturel ; entiers et rationnels ; nombre décimal, nombre à virgule ; fraction ; ensembles de nombres (Mots I, brochure 1974) ;

représentations graphiques ; application, fonction, bijection ; partition équivalence ; partages ; divisibilité ; division euclidienne ; division (Mots II, brochure 1975) ;

numération ; opération et loi de composition ; propriétés des lois de composition ; congruences ; ordre ; préordre ; propriétés des relations binaires dans un ensemble ; dictionnaires, naturels, décimaux et ordres (Mots III, brochure 1976).

Chaque rubrique est détachable ; les feuilles, de format 15 X 21, sont perforées.

MOTS est une oeuvre collective ; l'équipe de rédaction, bénévole, constituée d'instituteurs, IDEN, professeurs (d'Ecole Normale, du Second Degré, du Supérieur) soumet ses projets à de nombreux instituteurs ; leurs avis lui sont précieux, surtout quand ils émanent de bacheliers littéraires qui n'ont pas eu l'occasion d'activité mathématique depuis leur sortie du lycée ou de l'école normale.

Sans être un manuel de mathématique, ni un lexique, MOTS permet au lecteur, à propos du vocabulaire rencontré dans les manuels scolaires ou les documents de formation permanente, de faire le point sur son évolution, sur les concepts et les idées qui s'y rattachent, et sur les notations utilisées.

Ces brochures, qui s'adressent aux enseignants, non aux élèves, sont vendues par l'APMEP aux prix suivants :

MOTS I	: **100 pages**	- **6 F**	**(avec port**	: **9 F)**
MOTS II	: **108 pages**	- **6 F**	**(avec port**	: **9 F)**
MOTS III	: **136 pages**	- **6 F**	**(avec port**	: **9 F)**
MOTS IV	: **152 pages**	- **7 F**	**(avec port**	: **11 F)**

V. SUPPLEMENT A LA DIVISION EUCLIDIENNE

1.- Les shadoks sont des êtres si étranges que lorsqu'ils comptent quatre objets, ils pondent un oeuf.

Un beau jour, un shadok fut placé devant un tas d'oeufs de shadoks avec pour mission de les compter. Prévoyant qu'il aurait du mal à distinguer les oeufs du tas de ceux qu'il allait pondre, il demanda à l'un de ses amis de mettre ces derniers de côté.

Et le travail commença.

Le premier shadok compta 325 oeufs. Combien son aide mit-il d'oeufs de côté ?

Si le premier shadok n'avait pas eu d'ami complaisant, quel nombre aurait-il trouvé ? A partir de ce nombre, comment s'y serait-il pris pour connaître l'effectif du tas initial ?

2.- Quelques calculs à trous :

```
7 . 7 |  . 7        1 . 3 . 5 | 6 .         8 1 . | 58
  7 . |-----          5 6 .   |-----        . . . |----
      |  7              . 8 . | 1 8 .           . | . .
                          . . |
```

```
. 2 . 5 . | 325          5 2 9 5 6 5 |
. . .     |-----           2 4 6 6   |--------
-----     | 1 . .            2 2 2 5 |
. 0 . .   |                    5 4 2 |
. 9 . .   |
-------   |
    . 5 . |
    . 5 . |
    ----- |
        0 |
```

3.- Variantes du Piquet à cheval :

<u>3-1</u> celui qui dit 100 a perdu

<u>3-2</u> on ne peut utiliser que 3 et 5 à chaque coup.

4.- On désire carreler une cuisine de 2,80 m sur 4 m avec des tomettes de 6 cm de côté. Combien en faut-il ? (une tomette à la forme d'un hexagone régulier).

5.- La somme de deux naturels est 2096. Quand on divise l'un par l'autre, le quotient est 5 et le reste est 206. Trouver les deux naturels. Même question mais en remplaçant 2096 par 1406.

6.- Voici un naturel : 256 . En permutant ses chiffres, on peut écrire cinq autres naturels : 526 , 265 , etc...
Divisez la somme des six naturels ainsi écrits par la somme (2 + 5 + 6). N'est-ce pas curieux ?
Etudiez d'autres exemples. La même constatation vaut-elle pour n'importe quel naturel de trois chiffres ?
Examinez un problème analogue mais en partant d'un naturel de deux chiffres, ou de quatre chiffres, ou de cinq chiffres, etc...
Essayez de formuler des résultats généraux.

7.- Je crois me souvenir d'une "division" dont j'ai oublié le détail, mais le dividende était plus petit que 300, le quotient était 82 et le reste 47. Quels pouvaient bien être le dividende et le diviseur ?

8.- Il existe des nombres curieux :

quand	on	les divise	par	2,	il	reste	1.
"	"	"	"	3,	"	"	2.
"	"	"	"	4,	"	"	3.
"	"	"	"	5,	"	"	4.

9.- Y a-t-il des naturels qui, divisés par 37, donnent un quotient égal au reste ?

10.- Ecrivez un naturel de six chiffres de la forme $\overline{abcabc}$, par exemple 123123 ou bien 224 224, etc...
Divisez-le par 11, le quotient obtenu par 7 et le deuxième quotient par 13.
Curieux résultat ; est-ce général ?

11.- Quel est le naturel qui, divisé par 23, donne 1 pour reste et qui, divisé par 17, donne le même quotient et 13 pour reste ?

12.- Un enfant ayant à diviser 212 par 17 a proposé la méthode suivante : 212 = 170 + 42, et 170 divisé par 17 donne 10 et 42 divisé par 17 donne 2, donc 212 divisé par 17 donne 12 pour quotient.

Comment auriez-vous réagi ?

13.- Dans une division on augmente le dividende de 52, le diviseur de 4, quotient et reste ne changent pas. Pouvez-vous trouver dividende et diviseur ? (La formulation de cet exercice est incorrecte. Essayez de le rédiger de façon à la fois simple et correcte).

14.- Dans une division dont le diviseur est fixé, de combien peut-on augmenter le dividende sans changer le quotient ? Dans une division dont le dividende est fixé, de combien peut-on augmenter le diviseur sans changer le quotient ?

15.- Est-il vrai que dans toute division le reste est plus petit que la moitié du dividende ?

16.- Dans une usine où l'on fabrique des pièces pour machines, on obtient une pièce à partir d'un lingot de plomb. Les copeaux et déchets récupérés au cours du façonnage de 6 pièces peuvent être refondus en un lingot. Avec 36 lingots, combien de pièces peut-on façonner ?

17.- Sachant que 10 238 000 = (4357 × 2349) + 3407, quel est le quotient de 10 238 000 par 4357 et celui de 10 238 000 par 2 349 ?

18.- Le quotient de 2 naturels est 6 et le reste est 47. La somme des 2 naturels et du reste est 591. Quels sont les deux naturels ?

19.- Le quotient de 2 naturels est 4 et le reste est 15. La somme des 2 naturels, du quotient et du reste est 124. Quels sont les deux naturels ?

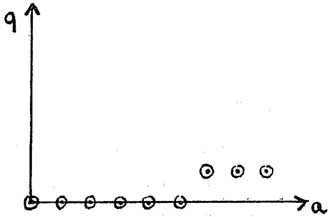
20.- Pourriez-vous expliquer pourquoi, en divisant par la somme de ses chiffres n'importe quel naturel écrit avec les trois mêmes chiffres (par exemple 777), on obtient le même quotient ?
Examinez le cas des naturels du type $\overline{aa}$, $\overline{aaaa}$, etc...

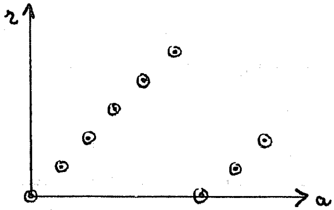
21.- Parmi les naturels inférieurs à 200, trouver ceux qui sont susceptibles d'être le dividende d'une division dont le quotient est 4 et le reste 35 ?

22.- Trouver diviseur et quotient, sachant que le dividende est 537 et le reste . 7.

23.- Diviser tous les naturels de 0 à 50 par 6. Noter quotients et restes.

Représenter graphiquement les résultats obtenus:





Recommencez en remplaçant 6 par d'autres naturels.

Ce travail ne pourrait-il pas fournir l'occasion d'un affichage en classe ?

24.- Trouver deux naturels qui, écrits à la place du rond et du carré, donnent une égalité vraie : 540 = (12 x ●)+ ■

Voici deux possibilités : $540 = (12 \times 20) + 300$

$540 = (12 \times 25) + 240$

Trouver toutes les autres.

25.- Voici un tableau où l'on a écrit dans l'ordre les premiers naturels en allant à la ligne tous les quatre naturels.

0	1	2	3
4	5	6	7
8	9	10	11
12	13		

Continuez à remplir ce tableau, ligne par ligne, jusqu'à 30.

Pouvez-vous maintenant remplir ce tableau, colonne par colonne, jusqu'à 60.

Dressez d'autres tableaux analogues à celui-ci.

Quel lien y a-t-il entre ces activités et la division euclidienne ?

26.- Un enfant, se souvenant que pour multiplier par 6 on peut multiplier par 2, puis par 3, entreprend de traiter de la même façon certaines divisions.

Voici par exemple comment il divise 1439

par 6 :

```
1439 | 2
   1 | 719 | 3
         2 | 239
```

; ou par 8 :

```
1439 | 2
   1 | 719 | 2
         1 | 359 | 2
               1 | 179
```

Qu'en pensez-vous ?

27.- Voici une anecdote authentique :

17195	32
15	537
21	
10	
119	
9	
29	
6	
235	
21	
25	
14	
11	

Nous sommes en 6e. Les élèves doivent diviser 17 195 par 32.

Une fillette s'y prend de la façon suivante :

- en 17 combien de fois 3, 5

5 fois 3, 15 ; 17 moins 15, 2 et j'abaisse le 1

5 fois 2, 10 ; 21 moins 10, 11 et j'abaisse le 9.

- En 11 combien de fois 3, 3

3 fois 3, 9 ; 11 moins 9, 2 et j'abaisse le 9.

3 fois 2, 6 ; 29 moins 6, 23 et j'abaisse le 5.

- en 23 combien de fois 3, etc...

L'enseignant, voyant ce manège, s'est fâché et sous le prétexte que cette fillette ne savait pas "faire des divisions" l'a renvoyée chez son ancienne maîtresse de CM_2 pour que celle-ci lui apprenne à "faire des divisions".

Et pourtant 537 et 11 sont bien le quotient et le reste cherchés ; qu'en pensez-vous ?

28.- Demandez à l'un de vos amis de choisir un naturel compris entre 6 et 60.

Demandez-lui de le diviser d'abord par 3, puis de le diviser par 4, et enfin par 5 et de vous communiquer les restes de ces trois divisions. A partir de ces seuls restes, vous pouvez découvrir le naturel qu'il a choisi.

Voici comment : désignons par r_3 , r_4 et r_5 les trois restes ; calculez $40\ r_3 + 45\ r_4 + 36\ r_5$.

Si vous obtenez zéro, le naturel choisi est 60.

Sinon, divisez par 60; le reste est le naturel choisi.

Essayez de vous convaincre de l'infaillibilité de ce tour.

Essayez de modifier ce tour, afin de pouvoir deviner un naturel compris entre 7 et 100, les diviseurs initiaux étant 3, 5 et 7.

29.- Trouver un naturel de 4 chiffres qui, divisé par 151, donne 14 pour reste et qui, divisé par 152, donne 1 pour reste.

ELEM-MATH. II (56 pages) :

LA MULTIPLICATION DES NATURELS A L'ÉCOLE ÉLÉMENTAIRE

Jusqu'en 1969, voici comment les programmes de l'école primaire évoquaient la multiplication :

— au cours préparatoire : "*multiplication par 2 et 5*"

— au cours élémentaire : "*table de multiplication. Usage et pratique de la multiplication ... dans des problèmes simples empruntés à la vie courante*".

Les instructions limitaient ensuite le contenu de l'étude. Tout d'abord : "*l'apprentissage de la table de multiplication est un des objets du cours élémentaire*" ; ensuite, elles indiquaient une progression pour l'acquisition de la technique opératoire.

Ce point de vue excessivement pragmatique était justifié par une savoureuse définition : "*en fait, dans les cas les plus fréquents, la multiplication est une convention commerciale*".

Les programmes et commentaires du 2-1-70 n'imposent plus cette orientation (liaison directe avec la pratique commerciale et réduction de la multiplication à une simple technique opératoire). Au contraire ils permettent de présenter aux enfants des activités variées contribuant à une meilleure connaissance de cette opération mathématique fondamentale.

C'est dans cette perspective que ce livret rassemble des idées et des suggestions centrées sur la multiplication des naturels. Y voir une éventuelle progression pour telle ou telle classe ou des modèles de leçons serait un contresens. L'idée directrice est plutôt celle d'une mathématique vivante élaborée à partir d'expériences diverses. En osant une comparaison géographique, disons que c'est un essai de description du paysage multiplicatif du CE à la classe de sixième.

Les idées présentées dans ce livret ne sont pas originales. Elles sont le fruit de la réflexion qui s'est développée dans les Ecoles Normales depuis quelques années et des échanges réalisés à l'occasion des nombreuses rencontres organisées tant par l'A.P.M. que par les I.R.E.M. Elles ont été, à coup sûr, influencées par les travaux de recherche mis en oeuvre dans les I.R.E.M. en particulier ceux de Guy Brousseau et de son équipe de l'I.R.E.M. de Bordeaux. Si ce fascicule a quelque intérêt le mérite leur en revient.

Prix : 3 F (port compris : 4,50 F).

ANNEXE I : CONSIDERATIONS PEDAGOGIQUES

Sur la division, les programmes et commentaires de 1970 sont peu explicites.

Dans le programme de CE on lit :

"Quotient exact.
Division avec reste : quotient entier.
Pratique de la division par un nombre d'un chiffre."

Dans le programme de CM :

"Opérations et leurs propriétés ; suites d'opérations ; pratique des opérations ; preuve par 9 des opérations ; calcul mental".

Les commentaires distinguent :

1°) <u>division exacte</u> : opération inverse de la multiplication dans le cas où elle est possible; mais ils n'envisagent pas de technique. Si l'on se réfère à la taille des nombres cités en exemple, il s'agit d'explorer autrement les connaissances du répertoire multiplicatif à l'aide du signe": "(l'écriture a:b n'a de sens que si a est un multiple de b; elle désigne alors le nombre c tel que a = b × c).

2°) <u>division euclidienne</u> : les commentaires appellent "quotient entier" ce que nous avons appelé "quotient euclidien" mais invitent à n'utiliser aucune locution.

Au sujet des techniques opératoires en général, les commentaires disent simplement : *"elles seront d'autant mieux acquises que les enfants, au lieu de les apprendre de façon purement mécanique, les auront découvertes par eux-mêmes comme synthèses d'expériences effectivement réalisées, nombreuses et variées".*

Depuis 1970, des recherches ont permis de préciser ce que les commentaires, prudents, n'avaient pas explicité. Voici rapidement quelques suggestions :

La construction progressive d'une technique de division ne se justifie vraiment que parce que la systématisation des calculs permet une économie de réflexion et un gain de temps dans la recherche de la solution d'un problème.

Cela veut dire que la technique opératoire n'est ni un préalable à la résolution de problèmes, ni un but en soi, mais est la conséquence des remarques faites et des améliorations apportées dans l'étude de toute une série de situations "de division" suivant en gros la progression du chapitre

Vers la division euclidienne.

On est ainsi conduit à faire travailler les enfants sur des situations dont nous donnons quelques exemples ci-dessous.

1er exemple (CE) Jacques dispose de 30F et va à la fête. Il commence par regarder les prix pour son goûter: il voit des gaufres à 4F, des madeleines à 1F, des croissants à 1,50F. Un manège l'intéresse : le tour, 3F ; 4 tours pour 10F. Que peut-il décider ?

Commentaire : Dans un tel problème, dont le texte a été rédigé à la suite d'une enquête des enfants, chaque élève peut se mettre à la place de Jacques et selon ses préférences choisir d'abord son goûter ou d'abord le nombre de tours de manège. Dans tous les cas, il procède par soustractions successives, ou par multiplications (éventuellement additions répétées) suivies de soustractions.

Ce sont déjà les deux idées fondamentales de la division qui sont ici mises en jeu. Mais une telle situation est très riche et a occupé les enfants pendant plusieurs séances, donnant aussi l'occasion d'utiliser des graphiques.

2ème exemple (CM) Pour faire un kilo de vacherin (fromage de Savoie) il faut 18 litres de lait. Remplissez le tableau ci-dessous :

Nombre de kilos de vacherin	Nombre de litres de lait	V	L	V	L
1		10		100	
2		20		200	
3		30		300	
4		40		400	
5		50		500	
6		60		600	
7		70		700	
8		80		800	
9		90		900	

A l'aide de ce tableau, répondez aux questions suivantes :

- Combien de litres de lait sont nécessaires à la fabrication de 835 kilos de vacherin ?
- La coopérative reçoit 15 730 litres de lait; combien de kilos de vacherin peut-elle mettre en fabrication ?
- S'il y a trop de lait, on met le reste au réfrigérateur ; on a ainsi un stock qu'on peut utiliser les jours où il n'y a pas assez de lait. Voici ce qu'on relève sur les registres de la coopérative pendant trois jours consécutifs :

	entrée de lait (en litres)	kilos de vacherin mis en fabrication
1er jour	18 000	1 200
2e jour	16 000	600
3e jour	15 000	900

Expliquez ce qui s'est passé.

Commentaire : Là aussi la situation est un thème de travail pour plusieurs séances ; il a été exploité dans une classe de neige qui avait fait une enquête. Il existe certainement dans l'environnement de chaque classe des situations conduisant à une réflexion et à des calculs du même type.

Ensuite, d'autres situations permettront de constater qu'il est possible de se débrouiller en ne calculant au départ que les nombres du 1er tiers du tableau (les deux colonnes de gauche).

On peut alors s'attaquer à la question de la disposition : comment disposer les calculs pour, d'une part éviter les erreurs, et d'autre part, simplifier les écritures ? On constate que certains enfants éprouvent le besoin de conserver pendant longtemps les zéros à droite dans les quotients partiels, les produits partiels et les restes partiels, pour deux raisons essentielles :

a) la signification de chaque opération est ainsi conservée dans les écritures;

b) pour des nombres assez grands, les risques d'erreur de colonne sont diminués.

Remarque.

La mise en œuvre d'une stratégie conduisant à une technique opératoire ne se justifie que pour des diviseurs assez grands; en particulier, il nous semble illusoire de vouloir commencer par installer une technique propre au cas où le diviseur est plus petit que 10.

ANNEXE II

atelier de pédagogie

activités mathématiques

maîtres du cycle élémentaire
mercredi 13 décembre 1972 ; 10 h - 10 h 30
vendredi 15 décembre 1972 ; 18 h - 18 h 30 (deuxième diffusion)

TÉLÉVISION

DIVISION AVEC RESTE

Cette émission a été tournée dans une classe de cours moyen (*) les 15 et 16 novembre 1971.

I. - Comment se situe l'exercice proposé

Les exercices proposés aux enfants constituent une étape dans l'étude de la vision euclidienne, ou division avec reste, dans l'ensemble N des nombres naturels.

Etant donné un nombre naturel non nul b, on peut considérer la suite de ses multiples.

0×b 1×b 2×b 3×b .... 9×b (9+1)×b (9+2)×b.......

Si l'on considère un nombre naturel a, il appartient à un intervalle unique de la forme :

$$[n \times b, (n+1) \times b]$$

Déterminer cet intervalle unique, ou déterminer le quotient n, c'est effectuer la division euclidienne de a par b.

En même temps, le nombre $a - nb$ est lui aussi déterminé. Il est le reste r de la division euclidienne de a par b.

Les relations qui existent entre ces nombres naturels peuvent s'exprimer ou bien par la double inégalité :

$n \times b \leqslant a < (n+1) \times b$

ou bien par le système :

$r < b. \quad a = nxb + r$

(*) Il s'agit de la classe de Mme MARI, directrice de l'école annexe de l'Ecole Normale de Saint-Germain-en-Laye.

Ceci constitue un rappel de la définition de la division euclidienne dans $\mathbb{N}$; examinons sur un exemple quelle technique opératoire permet de déterminer n et du même coup r, connaissant a et b.

Soit l'opération effectuée

$$\begin{array}{r|l} 2\,800 & 57 \\ \cline{2-2} 520 & 49 \\ 07 & \end{array}$$

Explicitons les calculs

$$\begin{array}{r} 2\,800 \\ -\,2\,280 \\ \hline 520 \end{array} \qquad 2\,280 = 40 \times 57$$

$$\begin{array}{r} 520 \\ -\;\;513 \\ \hline 07 \end{array} \qquad 513 = 9 \times 57$$

La colonne de gauche de l'opération effectuée est très elliptique. Peu de traces écrites sont conservées des calculs effectués. Une telle concision n'est guère souhaitable pour un apprentissage. La disposition que nous utilisons en classe est à peu près la suivante (*) :

$$\begin{array}{rr} & 2\,800 \\ 40 \times 57 & = 2\,280 \\ \hline & 520 \\ 9 \times 57 & = \;\;513 \\ \hline & 07 \end{array}$$

(*) Nous ne faisons qu'utiliser ici les suggestions de notre collègue, M. DUMONT, professeur au lycée d'Hennemont à Saint-Germain-en-Laye et chargé de recherches à l'I. N. R. D. P.

Nous récapitulons alors ainsi :

$2\,800 = \boxed{49 \times 57} + 7$

$7 < 57$

La colonne de droite ne sert qu'à noter les résultats. Il est possible de l'introduire dans un second temps.

2 800	57
2 280	49
520	
513	
07	

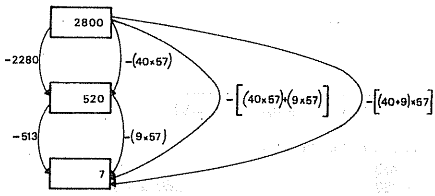
Analysons, dans deux langages différents, le passage des calculs effectués à la récapitulation.

$[2\,800 - (40 \times 57)] - (9 \times 57) = 7$ 1

$2\,800 - [(40 \times 57) + (9 \times 57)] = 7$ 2

$2\,800 - [(40 + 9) \times 57] = 7$ 3

ou encore



1' 2' 3'

Le passage de 2 à 3 et celui de 2' à 3' reposent tous deux sur la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition.

Le passage de 1 à 2 repose sur la « règle » : « *Pour retrancher la somme de deux nombres, etc...* » Il s'agit de « retrancher un nombre », autrement dit de l'action d'un opérateur à retrancher.

Le deuxième langage employé est alors plus proche des propriétés utilisées. Pour passer de 1' à 2', il suffit de composer deux opérateurs à retrancher.

Nous venons d'analyser une opération effectuée. Quelles peuvent être les étapes de l'apprentissage de cette technique ?

1re étape : les enfants enlèvent, en cherchant des raccourcis plus ou moins habiles, suivant leur familiarité avec les multiples du nombre diviseur et selon le problème proposé.

Par exemple, s'il s'agit de diviser 185 par 13 :

$185 \xrightarrow{-13} 172 \xrightarrow{-13} 159 \ldots\ldots\ldots\ldots 29 \xrightarrow{-13} 16 \xrightarrow{-13} 3 \qquad 3 < 13$

ou s'il s'agit de diviser 1 850 par 12 :

$1850 \xrightarrow{-1200} 650 \xrightarrow{-240} 410 \xrightarrow{-240} 170 \xrightarrow{-120} 50 \xrightarrow{-48} 2 \qquad 2 < 12$

En même temps, ils prennent conscience que certains multiples sont toujours faciles à déterminer.

$185 \xrightarrow{-130} 55 \xrightarrow{-13} 42 \xrightarrow{-13} 29 \xrightarrow{-13} 16 \xrightarrow{-13} 3 \qquad 3 < 13$

$2750 \xrightarrow{-1300} 1450 \xrightarrow{-1300} 150 \xrightarrow{-130} 20 \xrightarrow{-13} 7 \qquad 7 < 13$

Dans tous ces cas, il faut être capable de traduire dans différentes écritures, le même opérateur. Les enfants ont rencontré des difficultés pour écrire

$\xrightarrow[-(100 \times 13)]{}$ au lieu de $\xrightarrow[-1300]{}$

Il nous semble — la lecture de l'article de Madame ROBERT (*) nous a beaucoup aidés à clarifier les choses — que la difficulté provienne de l'intervention du signe d'une loi de composition interne, ici, $\times$, dans l'écriture d'un opérateur

(*) Il s'agit de l'article « **Mathématiques à l'école élémentaire** » écrit par Mme ROBERT, et paru dans le bulletin n° 277 janvier-février 1971.
Bulletin de l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'enseignement public, 29, rue d'Ulm, Paris-5e.

Il ne suffit peut-être pas de proposer aux enfants des exercices où ils rencontrent cette difficulté. Par exemple, on peut leur demander de compléter :

$- \boxed{2\times4}$	
12	.....
.....	6
9	.....
15	.....

$+ \boxed{5-3}$	
.....	4
.....	3
7	.....
8	.....

$- \boxed{10-3}$	
8	.....
10	.....
.....	2
.....	4

Il faudrait modifier, au moins pour l'apprentissage, la notation des opérateurs. Il serait souhaitable de réserver les signes —, +, × : pour indiquer les lois de composition interne correspondantes et d'adopter d'autres notations pour les opérateurs.

Par exemple, les exercices précédents pourraient s'écrire :

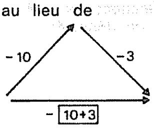
$\boxed{2\times4}$	
12	.....
.....	6
9	.....
15	.....

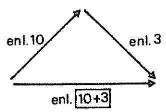
$\boxed{5-3}$	
.....	4
.....	3
7	......
8	.....

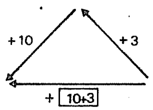
$\boxed{10-3}$	
8	.....
10	.....
.....	2
.....	4

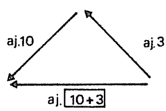
Ceci permettrait d'ailleurs d'exprimer sans ambiguïté comment se composent deux opérateurs.

au lieu de on écrirait









2e étape : les enfants s'habituent à enlever les groupements « économiques » de la technique opératoire pour diviser par exemple 185 par 13.

$$185 \xrightarrow[-\boxed{10\times13}]{-130} 55 \xrightarrow[-\boxed{4\times13}]{-52} 3 \qquad 3<13$$

$$2750 \xrightarrow[-\boxed{200\times13}]{-2600} 150 \xrightarrow[-\boxed{10\times13}]{-130} 20 \xrightarrow[-\boxed{1\times13}]{-13} 7 \qquad 7<13$$

C'est le but poursuivi lors du tournage en classe.

3e étape : les enfants apprennent à deviner chacun des chiffres significatifs du quotient.

Il intervient alors un tâtonnement.

Ainsi pour diviser 2 800 par 57, un grand nombre de personnes « essaieront » 5 comme chiffre des dizaines avant d'adopter 4.

II. - En quoi consiste l'exercice proposé

Nous faisons construire aux enfants un outil qu'ils pourront ensuite utiliser pour effectuer une division.

Le cadre des différents exercices est le suivant :

« *Un grossiste vend des robes 47 F pièce* ».

Construction de l'outil.

1. *Une caissière dispose de la table suivante :*

1	47
2	94
3	141
4	188
5	
6	
7	
8	
9	

Les enfants vérifient que 94 F est le prix de 2 robes, 141 F le prix de 3 robes, 188 F le prix de 4 robes. Puis ils complètent la table.

2. *Les procédés de calcul sont divers :*

$$2 \times 47 = 2 \times (40+7)$$
$$= 80 + 14$$

$$3 \times 47 = 3 \times (50-3)$$
$$= 150 - 9$$

Ce procédé a été proposé après que Pascale ait dit : « *Le prix de trois robes est à peu près 150 F* ».

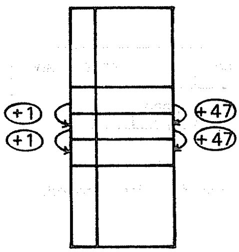
$$3 \times 47 = 94 + 47$$
$$= (94+7) + 40$$

$$3 \times 47 = 188 - 47$$

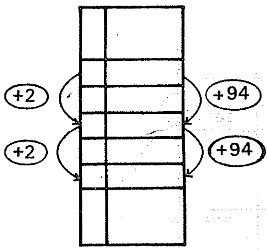
Nous retrouvons très fréquemment l'utilisation de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition.

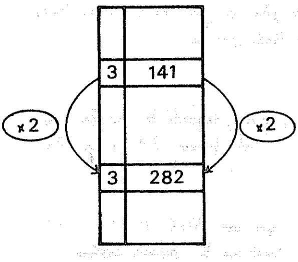
L'ordre des vérifications peut être arbitraire, les procédés employés en dépendent.

3. *Pour compléter la table*, les enfants utilisent les propriétés de l'application linéaire, autrement dit de la proportionnalité.

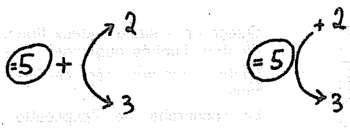


avec des variantes.



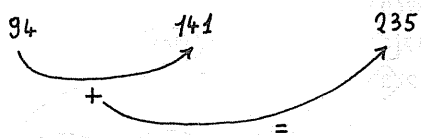


Les enfants essaient d'exprimer cette propriété graphiquement.



Dans un cas, l'addition porte sur la paire 2 3, dans l'autre elle porte sur le couple (2, 3).

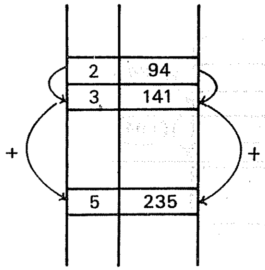
Une autre tentative, plus intéressante



2	94
3	141
5	235

« Comme 5 est la somme de 3 et de 2, le prix de 5 robes est la somme du prix de 3 robes et du prix de 2 robes. » « L'image de la somme de deux nombres par une application linéaire est la somme des images de ces deux nombres. »

La première flèche indique le couple (94, 141). La deuxième flèche indique la correspondance entre le couple (94, 141), et son image par l'addition.



Cette recherche illustre les difficultés de représenter graphiquement une loi de composition interne.

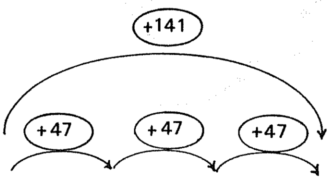
4. *L'observation de la table complète provoque une remarque tout à fait inattendue.*

4 7
9 4
14 1
18 8
23 5
28 2
32 9
37 6
42 3

Quand on « saute » deux lignes, le nombre d'unités augmente de 1.

Cette remarque est vérifiée par tous.

La recherche de l'explication ne sera pas suivie par tous et devra être reprise ultérieurement. Il suffira de chercher quel opérateur agit d'une ligne à la troisième.



Première utilisation de l'outil.

1. *Compléter le tableau suivant :*

nombre de robes	80	50		4000	300
prix des robes en F.			2820		

Les enfants expliquent par écrit leur procédé de façons maladroites.

"J'ai enlevé les zéros et j'ai cherché dans l'autre tableau et j'ai multiplié par dix."

"Pour trouver 80, j'ai regardé le nombre de robes du 1er tableau 8, cela faisait 376 et je l'ai multiplié par 10"

"Pour 80, 50, 60 qui sont 10 × 8, 10 × 5, 10 × 6, alors que 8, 5 et 6 sont sur le premier tableau.
8 robes = 376   80 robes = 3760 alors j'écris un ou des zéros à la droite du nombre et je trouve le bon résultat sans faire d'opérations sur la feuille."

Un autre écrit :

• 8 × 47 = 376 $\downarrow \times 10$ 3760   5 × 47 = 235 $\downarrow \times 10$ 2350   etc...

2. *Quel est à peu près le prix de 57 robes ?*

Plusieurs enfants ne répondent pas à la question posée, mais déterminent le prix exact.

Voici les explications écrites de l'un d'entre eux.

"Je me suis aidée de mon tableau.
je regarde à la case 5 et trouve : $235 \xrightarrow{\times 10} 2350$
je regarde à la case 7 et trouve : 329 + 2350 = 2679"

Les autres déterminent correctement une valeur approchée ou un encadrement, mais ont du mal à formuler le résultat par écrit.

57 < 60   60 = 2820 F
Il devra payer dans les environs de 2600 F"

2820 F car 57 < 60 et 60 robes coûtent 2820 F"

le prix de 57 robes
est entre ces deux nombres
2350 ← - - - - - - - - - - - → 2820

2350 < 57 robes < 2820
50 " robes   60 " robes

Cette dernière proposition est discutée par toute la classe ; un enfant corrige ainsi :

$$2350 < 47 \times 57 < 2820.$$

Utilisation de l'outil pour la division avec reste.

Un grand magasin dispose de 2 000 F pour acheter des robes. Combien de robes pourront être achetées, par l'employé chargé de l'achat, s'il en demande le plus possible ?

Peu d'enfants se servent de la table de multiples pour résoudre cet exercice. Par contre, tous s'en serviront pour résoudre des exercices analogues proposés les jours suivants.

Voici quelques travaux recopiés.

2 000
-470 → 1 530 -(10 × 47)
-940 → 5 90 -(20 × 47)
-470 → 1 20 -(10 × 47)
-94 → 26 -(2 × 47)
-1974   -(42 × 47)

Il a deux mille francs, il peut acheter 42 robes à 47 F.

2000
-470 → 1530 -(10 × 47)
-470 → 1060 -(10 × 47)
-470 → 590 -(10 × 47)
-470 → 120 -(10 × 47)
-94 → 26 -(10 × 47)
-(42 × 47)

2000
-1880 → 120 -(40 × 47)
-94 → 26 -(2 × 47)
-(42 × 47)

Il peut acheter 42 robes et il lui reste 26 F.

Ce dernier élève a amélioré son travail en utilisant la table.

Voici le travail d'une élève qui ne s'est pas servi de la table mais qui a cherché par tâtonnement une solution satisfaisante.

~~47 × 50 = 2350~~   47 × 40 = 1880   ~~47 × 3 = 141~~   47 × 2 = 94

2 000
−1880 −(40 × 47)
120 −(42 × 47)
−94 −(2 × 47)
26

Un autre travail analogue :

~~47 × 5 = 235~~

47
47
94
94
188

47
× 3
141

2 000
−1880 −(40 × 47)
120 −(42 × 47)
−94 −(2 × 47)
26

L'employé pourra acheter 42 robes et il restera 26 F.

Un autre travail, bien moins concis, mais manifestant une autre approche.

423 (9 robes)
+ 423 (9 robes)
846 (18 robes

846 (18 robes)
+ 846 (18 robes)
1692 (36 robes)

~~1692 (36 robes)~~
~~+ 846 (18 robes)~~
~~2538~~

~~1692 (36 robes)~~
~~+ 423~~
~~115~~

2000
− 1692
308

1692 (36 robes)
+ 282
1974

Il peut acheter 42 robes.

Carine

Dans un premier temps, Carine procède par additions. Puis elle se rend compte qu'un grand nombre d'essais sera nécessaire.

Elle utilise alors la soustraction pour évaluer l'écart restant à combler. Elle utilise ensuite la table pour choisir 282.

Un dernier exercice est proposé aux enfants :

Avec 10 000 F peut-on acheter plus de 10 robes,... plus de 100 robes,... plus de 1 000 robes ? etc.

Un tel exercice prépare la détermination du nombre de chiffres du quotient et sera repris pour être mené à son terme.

III. - Conclusion

Nous avons voulu, pour le tournage, proposer aux enfants toute une suite d'exercices.

Il aurait été possible et peut-être souhaitable d'introduire, avant l'utilisation de l'outil pour la division avec reste, de nombreux exercices où l'on cherche seulement un encadrement du quotient.

Par exemple :

« Avec 2 000 F peut-on acheter plus de 10 robes, plus de 100 robes, plus de 20 robes, plus de 30 robes, plus de 40 robes, plus de 50 robes ? »

Cette suite d'exercices, enrichie, contribuerait ainsi à développer le sens de l'ordre de grandeur d'un résultat, sens trop souvent délaissé dans notre enseignement.

Fiche établie par Chantal Cranney, professeur à l'E. N. F. de Saint-Germain-en-Laye.

ANNEXE III

atelier de pédagogie

maitres du cycle élémentaire
mercredi 28 mars 1973 ; 10 h - 10 h 30
vendredi 30 mars 1973 ; 18 h - 18 h 30 (deuxième diffusion)

TÉLÉVISION

activités mathématiques

QUI DIRA VINGT ?

Cette émission a été enregistrée au mois de janvier 1973 dans un C. M. 1 de vingt-cinq élèves de Talence (Gironde)*.

Le but de cette leçon était d'introduire une révision de la division (dans des circonstances où le « sens de l'opération » n'était pas conforme aux apprentissages antérieurs) et de favoriser la découverte et la démonstration, par les enfants, d'une suite de théorèmes.

I. Le jeu.

Il s'agit, pour chacun des adversaires, de réussir à dire « 20 » en ajoutant 1 ou 2 au nombre dit par l'autre ; l'un commence, dit 1 ou 2 (exemple : 1), l'autre continue, ajoute 1 ou 2 à ce nombre (2 par exemple) et dit « 3 » ; à son tour le premier ajoute 1 ou 2 (1 par exemple), il dit 4, etc.

II. Déroulement de la leçon.

1. *La maîtresse explique la règle* du jeu et commence une partie au tableau contre un enfant, puis cède sa place à un autre enfant.

2. *Jeu à 1 contre 1*. Les enfants jouent par groupes de 2, plusieurs parties. Ils marquent sur une feuille de part et d'autre d'un trait, les nombres choisis. Cette phase doit comprendre environ 4 parties et durer au plus dix minutes).

Remarque : au cours de cette phase, les enfants appliquent la règle.

Certains, sans en avoir bien conscience, se rendent compte que répondre au hasard n'est pas la meilleure stratégie : ils éprouvent les contraintes du jeu au niveau de l'action et des décisions immédiates et se donnent une suite d'exemples. Certains découvrent implicitement un avantage à dire 17.

3. *Jeu à 1 équipe contre 1 équipe* (6 à 8 parties, 15 à 20 mn).

Les enfants sont partagés en deux équipes. Dans chacune, la maîtresse désigne un champion pour chaque partie en l'appelant par une lettre, comme au jeu du béret. Chaque élève pourra être appelé à défendre son équipe au tableau dans une partie que tout le monde verra ; s'il gagne, il apportera un point à son équipe.

Les enfants se rendent très vite compte de la nécessité de se concerter et de discuter à l'intérieur de chaque équipe pour se communiquer des stratégies. Les premières apparaissent dès la première partie : « il faut dire 17 »...

4. *Jeu de la découverte* (20 à 25 mn).

La maîtresse demande alors aux enfants d'énoncer des propositions. Ce sont les découvertes qu'ils ont faites et qui leur ont permis, de gagner. Ces découvertes énoncées, alternativement par l'équipe A puis par l'équipe B, sont inscrites sur le tableau par la maîtresse (suivant la disposition ci-dessous) et vérifiées aussitôt par l'autre équipe. A ce moment-là, elles seront acceptées ou rejetées. Si elles sont acceptées, elles seront conservées sur le tableau.

Découvertes proposées		Score	
Equipe B	Equipe A	A	B

Pour chaque proposition énoncée, l'enfant devra venir prouver à un adversaire qu'elle est vraie ou fausse, soit en jouant, soit par une preuve intellectuelle.

(*) Il s'agit de l'école Jules-Michelet, Ecole d'observation de l'Institut de recherche sur l'enseignement des mathématiques de Bordeaux.

Pour donner plus d'intérêt au jeu, on peut adopter la règle suivante :

— Toute proposition énoncée et acceptée par la classe vaut 1 point ;

— Toute proposition prouvée fausse donne 3 points à l'équipe qui a prouvé qu'elle l'était.

Remarque : si le jeu de la découverte stagne (les enfants ne trouvent plus de propositions à énoncer), on rejoue à « *qui dira vingt ?* ».

Observations : très vite, les propositions ont été faites :

— Si j'écris 17, je suis sûr de gagner ;

— Si j'écris 14, je suis sûr aussi de gagner.

Puis les découvertes ont été beaucoup moins importantes :

Exemple : si je dis 16, l'autre peut dire 17 et il gagne.

Si je dis 18, je perds, etc.

Alors, on a arrêté le jeu de la découverte et repris celui du béret. Au bout de deux parties, les enfants ont découvert qu'en disant 11, puis 14, puis 17, ils gagnaient. Discussion très serrée à propros de 5 : un enfant qui avait écrit 5 au cours du premier jeu à 2, avait perdu. Un autre enfant lui montre que s'il sait jouer, il doit gagner en disant 5. S'il ne sait pas jouer, il est évident qu'il peut perdre. Ces preuves sont toujours apportées en rejouant (à partir de 5 par exemple). Les enfants, au bout d'une heure, ont découvert que, pour gagner, il fallait dire 2, 5, 8, 11, 14, 17.

III. Remarques.

1. *Les stratégies et découvertes* sont utilisées implicitement *avant* d'être formulées, pour répondre aux nécessités d'une action en cours. Exemple : la suite : 5, 8, 11, 14, 17 apparait avec une fréquence élevée bien *avant* que les élèves n'aient formulé la nécessité de « jouer 14 ».

2. *La formulation* intervient *après* la conviction et avant la preuve, pour répondre aux nécessités d'une action requérant sa communication. Plusieurs formulations précèdent la *preuve* et s'appuient à la fois sur l'efficacité et sur la rationalité.

3. *Les théorèmes établis* ne servent pas tout d'abord à s'étayer les uns les autres, leur articulation n'est découverte qu'à la fin. Le même théorème est redécouvert plusieurs fois, même par un même enfant.

4. *Ce sont les enfants* qui perdent une partie qui veulent le plus expliquer leur échec, ou les conditions de la réussite.

5. *La démonstration* atteint sa valeur mathématique lorsqu'elle a été éprouvée comme moyen de convaincre et comme obligation d'être convaincu. Ce qui ne peut se faire qu'entre « égaux », entre enfants. Le maître doit renvoyer les questions aux équipes.

6. *L'explication* doit être nécessaire, techniquement et sociologiquement ; si le résultat est évident ou — comme ici au début — accepté par tous, on n'obtient qu'une recette.

IV. Suite de la leçon.

1° *Qui dira 25 ? 29 ? 30 ?* (sans changer le pas).

a) *Qui dira 25 ?*

Les enfants reprennent le jeu 2 par 2 (comme pour la course à 20) en notant chaque fois, dans 2 colonnes, les nombres qu'ils énoncent.

Cinq minutes après le commencement de la partie à 2, la majorité des enfants a demandé que l'on arrête le jeu à 2 parce qu'ils avaient trouvé « le truc ».

Un élève a énoncé :

« *il suffit de mettre 1 et après, d'aller de 3 en 3* ».

Après une phase de vérification, toute la classe a accepté la proposition.

b) *Qui dira 29 ?*

On a procédé de la même manière que pour la course à 25.

Après deux parties de jeu à 2, un élève a énoncé : « *au lieu de commencer par 1, il faut commencer par 2 et aller de 3 en 3* ».

Vérification par la classe. Proposition acceptée.

c) *Qui dira 30 ?*

Même déroulement que précédemment. Les enfants ont trouvé très vite qu'il fallait laisser commencer l'adversaire pour gagner et mettre ensuite 3.

Remarque : la liste des nombres qu'il faut dire dans les courses à 20, à 25, à 29 pour gagner, a été laissée sur le tableau.

On avait alors :

Qui dira 20 : 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20 ;
Qui dira 25 : 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25 ;
Qui dira 29 : 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29 ;
Qui dira 30 : 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30.

Les enfants ont remarqué que la liste des nombres de la course à 20 était la même que celle de la course à 29. Ils ont déduit aussitôt que ce serait la même pour la course à 26, 23, 20, etc.

2° Même jeu : course à 30, 35, 40, etc. (en changeant le pas).

Il s'agit de trouver avant l'adversaire par quel nombre il faut commencer. Les enfants le cherchent par soustractions successives du « pas ». Ainsi, le jeu « *qui dira 428 ?* » avec un pas de 27 doit être commencé par 23 (on soustrait pour cela 15 fois 27 de 428). 15 est le quotient et 23 le reste de la division de 428 par 27.

C'est en raccourcissant cette longue suite de soustractions grâce à diverses découvertes (en particulier la possibilité de soustraire d'un coup 10, 100, 1 000 fois le pas) que l'enfant réinvente la division.

V. La division - Disposition des calculs.

Soit à effectuer la division 961 093 : 563. Le dividende est disposé d'abord comme l'indique la figure 1 (sous le poteau de rugby).

563	961093	(fig. 1)

Le quotient sera disposé entre les poteaux au-dessus de la barre, les restes successifs sous le dividende ; les multiplications auxiliaires se feront à gauche des poteaux. La partie droite sera utilisée pour les divisions dans les décimaux. On soustrait du dividende un multiple du diviseur aussi grand que possible et « le plus à gauche possible » (mais ce n'est pas obligatoire au début de l'apprentissage). Le résultat, reste intermédiaire, s'écrit au-dessous du dividende (fig. 2).

	1	
563	961093 563000	(fig. 2)
	398093	

Le chiffre du quotient est placé au-dessus du chiffre des unités du multiple que l'on soustrait (ici 1 au-dessous du 3, unité de mille). On peut voir dès maintenant que le quotient aura 4 chiffres.

On tente de la même manière de trouver un multiple de 100 et du diviseur, inférieur au premier reste intermédiaire, le plus grand si possible. On le calcule à gauche en s'y prenant à plusieurs fois s'il le faut (fig. 3).

	17
563 563 × 6 = 3 378	961093 563000
563 × 7 = 3 941 563 × 8 = 4 504	398093 394100
	003993

Le chiffre correspondant du quotient, 7, se place au-dessus du chiffre des unités de 3 941.

Et ainsi de suite...

Le même produit partiel peut servir plusieurs fois (fig. 4).

	177
563 563 × 6 = 3 378	961093 563000
563 × 7 = 3 941 563 × 8 = 4 504	398093 394100
	003993 3941
	000052

On met un zéro dans les colonnes du quotient où aucun chiffre n'apparait.

Le quotient est 1 707 et le reste 52.

Si on ne trouve pas du premier coup le plus grand multiple, on peut trouver des quotients partiels dont on fait la somme (fig. 5).

	1707
563 563 × 6 = 3 378	1 1 16 6
	961093 563000
	398093 337800
	060293 56300
	03993 3378
	0615 563
	052

Cette disposition présente certains avantages :

— Les calculs intermédiaires figurent explicitement et la détection des erreurs est plus facile ;

— Les produits partiels ne sont calculés qu'une fois ;

— Les zéros intercalés causent moins d'erreurs ;

— Le nombre de chiffres du quotient est inscrit dans la disposition dès le départ ;

— Les tâtonnements légitimes ne donnent lieu à aucune rature traumatisante ;

— L'apprentissage est plus souple : en effet, la technique optimum peut être obtenue progressivement sans mécanisation.

Une disposition analogue est adoptée dans d'autres pays européens (les Pays-Bas, par exemple).

On trouvera dans la brochure éditée par l'A. P. M. E.P. (29, rue d'Ulm, 75230 Paris, Cédex 05) : *Mathématique à l'école élémentaire*, des compléments sur les processus de mathématisation et des exemples de leçons pris à d'autres niveaux.

Fiche établie par Guy Brousseau.

atelier de pédagogie

activités mathématiques

maîtres du cycle élémentaire

mercredi 27 février 1974 ; 10 h - 10 h 30

vendredi 1er mars 1974 ; 17 h 50 - 18 h 20 (deuxième diffusion)

TÉLÉVISION

ALGORITHME DE LA DIVISION

Cette émission a été enregistrée les 11 et 13 décembre 1973, dans un C. M. 1 de vingt et un élèves. Ces leçons font partie d'une suite de leçons qui a pour objet d'amener les enfants à construire par eux-mêmes un algorithme pour la division euclidienne, c'est-à-dire un procédé de calcul du quotient et du reste, valable pour n'importe quel dividende et n'importe quel diviseur.

Nous avons voulu obtenir cette construction comme résultat d'une activité mathématique et non comme résultat d'un apprentissage.

Leçons précédentes :

Les leçons d'introduction, qui favorisaient la découverte et la démonstration d'une suite de théorèmes, ont été décrites dans l'émission « **qui dira vingt** » et dans sa fiche d'accompagnement.

Dans ces conditions, où le sens de l'opération n'était pas conforme aux apprentissages antérieurs, on y voit les enfants établir les résultats suivants :

1re LEÇON

Pour pouvoir dire 20 (en ajoutant 1 ou 2 à ce que dit la partenaire) il faut dire successivement 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20.

2e LEÇON

« Qui dira 25, 29, 30 ? » Les enfants classent tous les nombres suivant la manière dont il faut commencer la partie (ce sont les 3 classes suivant le reste de la division par 3 : 0, 1, 2 ou classe résiduelle modulo 3).

3e LEÇON

Dans la course à 47 (en ajoutant 1, 2, 3, 4) les enfants construisent les classes de nombres, suivant leur reste par la division par 5.

4e LEÇON

Course à 58 (en ajoutant 1, 2, 3, 4 : « pas » de 5 ; puis en ajoutant 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 : « pas » de 9. Les enfants possèdent alors une méthode lente mais générale pour calculer le nombre de départ de la course, c'est-à-dire le reste de la division. Cette méthode consiste à soustraire du but (dividende), le « pas » (diviseur) successivement autant de fois qu'il est nécessaire.

Exemple : pour atteindre 428 avec un « pas » de 27 (en ajoutant 1, 2, 3, 4, 5...) on doit commencer par 23. On le trouve en soustrayant 15 fois 27 de 428.

Séquences filmées

Les séquences qui figurent dans l'émission ont été extraites des 5e, 6e et 7e leçons de la suite.

Les enfants vont voir dans différents cas où l'on cherche un reste ou un quotient, qu'il faut faire une longue suite de soustractions ; ils vont inventer une méthode plus rapide pour les effectuer.

5e LEÇON

Recherche du quotient, découverte des petits groupements.

A - La classe est partagée en 5 équipes : 4 vont calculer pour prévoir le quotient que la 5e va trouver par manipulation. Cette équipe dispose de plusieurs feuilles quadrillées comportant au total 2 664 carreaux. Elle doit constituer par collage et découpage un panneau de 21 carreaux par rangée. Elle comptera combien de rangées complètes elle a pu faire.

B - Déroulement de la leçon :

1 - La maitresse expose la situation.

2 - Les enfants travaillent. Chaque équipe ne doit afficher ses prévisions que lorsque tous ses membres sont d'accord.

3 - Comparaison des prévisions avec les résultats de l'équipe 1.

4 - Comparaison des méthodes de calcul employées pour les prévisions. Les enfants déclarent meilleure et plus facile la méthode suivante.

Répertoire	Carreaux	Rangées
$21 \times 100 = 2\,100$	2 664	
$21 \times 10 = 210$	— 2 100	100
	0 564	
	— 210	— 10
	354	
	— 210	— 10
	154	
	— 105	— 5
	39	
	— 21	— 1
	18	126

C - Remarques

1 - Les décisions sont prises en équipe, mais chaque enfant recherche individuellement le résultat avant d'en discuter avec ses camarades.

2 - La nécessité d'enlever d'un seul coup plusieurs fois 21 est apparue d'emblée dans toutes les équipes. Ces groupements varient d'une équipe à l'autre : 2 équipes ont regroupé en multipliant le diviseur par une puissance de 2 sans qu'on sache pourquoi, 2 équipes ont utilisé la multiplication par 100.

Le mot répertoire a été emprunté à un vocabulaire bien connu dans cette classe pour désigner des égalités familières sues par cœur, utilisées dans un calcul ou dans un raisonnement.

3 - La maitresse se garde bien, malgré le choix d'une méthode par les élèves, de déclarer qu'elle est meilleure et de demander aux enfants de l'appliquer. La pluralité des pratiques est acceptée, l'expérience seule devant faire abandonner les moins bonnes.

6ᵉ LEÇON

Recherches de procédés plus efficaces pour trouver le quotient.

A - La maitresse dit : « *Pensez-vous que les méthodes que vous avez inventées, hier, sont bonnes pour de grands nombres ? On va voir, proposez de grands nombres...*

Vous avez donc un immense panneau avec 588 654 801 carreaux que nous allons mettre par rangées de 831 431 carreaux... »

La situation proposée est la même que la veille mais les nombres sont beaucoup plus grands et il n'est pas question de faire une vérification expérimentale.

Les nombres ont été choisis grands de façon à rendre « plus payantes » les stratégies économiques, mais en contrepartie, on a fourni aux enfants des résultats de calculs auxiliaires pour favoriser le recours à des produits du diviseur par la plus grande puissance de 10 et par le plus grand entier inférieur à 10 possibles. Habituellement, le répertoire est demandé et proposé par les enfants.

B - Déroulement de la leçon

1 - La maitresse expose la situation : « *Vous allez chercher le nombre de rangées de la manière la plus sûre, la plus simple et la plus courte* ».

2 - Les enfants cherchent individuellement à l'intérieur des équipes, discutent leurs méthodes, affichent au tableau leur résultat.

3 - Comparaison des résultats, correction des erreurs.

4 - Comparaison des méthodes. Les enfants comparent les méthodes en comptant le nombre de « coups », c'est-à-dire le nombre de multiplications tentées suivies ou non d'une soustraction.

C - Remarques

1 - Tout le monde n'applique pas du premier coup la méthode jugée bonne la veille.

2 - La nécessité de grouper par plus de 100 apparait, malgré une mauvaise disposition naturelle, le répertoire (les enfants auraient dû l'avoir sous les yeux) est de plus en plus utilisé et cela incite les enfants à chercher le nombre « le plus proche ».

3 - La pratique la plus efficace apparait dans la phase de discussion, mais n'est pas érigée en méthode.

4 - Dans ce processus, il faut éviter que les progrès dépendent trop des remarques formulées par quelques enfants sur les stratégies et que l'application de la règle convenue prenne le pas sur l'expérience personnelle. Il faut que les enfants calculent suffisamment sans toutefois qu'ils puissent ériger en mécanisme leur pratique momentanée.

7ᵉ LEÇON

Formulation d'une méthode générale du calcul de la division.

A - C'est un jeu. Il s'agit de prévoir avant de faire une division donnée (18 130 carreaux, 53 par rangée) en combien de « coups » au plus on trouvera le quotient (ou le reste).

Gagnent tous ceux qui ont effectué l'opération dans le nombre de coups prévus. Le champion étant celui qui l'a effectuée dans le moins de « coups » possibles.

B - Déroulement de la leçon

1 - La maîtresse explique les règles du jeu.
2 - Les paris s'engagent.
3 - Les enfants calculent.
4 - Comparaison des résultats de chaque équipe, avec le pari lancé au début du jeu.
5 - Discussion sur les méthodes de calcul et l'ordre de grandeur du quotient.

Résultats du jeu

	coups prévus	**coups réalisés**	
équipe 1 ..	3	3	équipe gagnante
équipe 2 ..	4	3	a amélioré son pari
équipe 3 ..	3	—	n'a pas trouvé le résultat
équipe 4 ..	4	3	a amélioré son pari
équipe 5 ..	3	4	n'a pas tenu son pari

C - Remarques

1 - Les enfants ont d'abord proposé « le nombre de coups » par référence à ce qu'ils avaient fait dans les leçons précédentes. C'est seulement dans la leçon suivante qu'ils sauront évaluer le nombre de chiffres du quotient et par conséquent son ordre de grandeur. Dans des conditions normales, ces résultats auraient pu être obtenus au cours de cette 7ᵉ leçon qui s'est déroulée, pour des raisons techniques, dans la même journée que la 6ᵉ.

2 - Dans leurs calculs, les enfants n'appliquent pas de techniques clairement formulées et sont conduits à se reposer à chaque « coup » la question : « *combien de fois puis-je enlever le diviseur ?* ». Certains, après avoir appliqué implicitement la bonne méthode pour de grands nombres, régressent pour la recherche des unités du quotient à la méthode primitive de soustractions successives du diviseur.

Suite de ces activités :

8ᵉ LEÇON

Ordre de grandeur du quotient : nombre de chiffres. La méthode de calcul la plus efficace devient de plus en plus familière.

9ᵉ ET DERNIERE LEÇON

Disposition des calculs. Les enfants disposent l'addition des parties du quotient trouvées successivement au-dessus du dividende.

Disposition à la 7ᵉ leçon

53 × 300 = 15 900	18 130 — 15 900	300
53 × 40 = 2 120	2 230 — 2 120	+ 40
53 × 2 = 106	110 — 106	+ 2
	4	342

Disposition de la 9ᵉ leçon

	342 2 40 300	addition
53 × 300 = 15 900	18 130 – 15 900	
53 × 40 = 2 120	2 230 – 2 120	
53 × 2 = 106	110 – 106	
	4	

En résumé, pour effectuer une division les enfants procèdent de la manière suivante : *cf.* fiche d'accompagnement de l'émission : « **Qui dira vingt ?** ».

La division - Disposition des calculs

Soit à effectuer la division 961 093 : 563. Le dividende est disposé d'abord comme l'indique la figure 1 (sous le poteau de rugby).

563	961 093	**(fig. 1)**

Le quotient sera disposé entre les poteaux au-dessus de la barre, les restes successifs sous le dividende ; les multiplications auxiliaires se feront à gauche des poteaux. La partie droite sera utilisée pour les divisions dans les décimaux. On soustrait du dividende un multiple du diviseur aussi grand que possible et « le plus à gauche possible » (mais ce n'est pas obligatoire au début de l'apprentissage). Le résultat, reste intermédiaire, s'écrit au-dessous du dividende (fig. 2).

563

1
961 093 -563 000
398 093

(fig. 2)

Le chiffre du quotient est placé au-dessus du chiffre des unités du multiple que l'on soustrait (ici 1 au-dessous du 3, unité de mille). On peut voir dès maintenant que le quotient aura 4 chiffres.

On tente de la même manière de trouver un multiple de 100 et du diviseur, inférieur au premier reste intermédiaire, le plus grand si possible. On le calcule à gauche en s'y prenant à plusieurs fois s'il le faut (fig. 3).

Cette disposition présente certains avantages :

— Les calculs intermédiaires figurent explicitement et la détection des erreurs est plus facile ;

— Les produits partiels ne sont calculés qu'une fois ;

— Les zéros intercalés causent moins d'erreurs ;

— Le nombre de chiffres du quotient est inscrit dans la disposition dès le départ ;

— Les tâtonnements légitimes ne donnent lieu à aucune rature traumatisante ;

563
$563 \times 6 = 3\,378$
$563 \times 7 = 3\,941$
$563 \times 8 = 4\,504$

(fig. 3)

17
961 093 -563 000
398 093 -394 100
003 993

Le chiffre correspondant du quotient 7, se place au-dessus du chiffre des unités de 3 941.

Et ainsi de suite...

Le même produit partiel peut servir plusieurs fois (fig. 4).

563
$563 \times 6 = 3\,378$
$563 \times 7 = 3\,941$
$563 \times 8 = 4\,504$

1 707
961 093 -563 000
398 093 -394 100
003 993 - 3 941
000 052

On met un zéro dans les colonnes du quotient où aucun chiffre n'apparaît.

Le quotient est 1 707 et le reste 52.

Si on ne trouve pas du premier coup le plus grand multiple, on peut trouver des quotients partiels dont on fait la somme (fig. 5).

563
$563 \times 6 = 3\,378$

1 707
1 1 1 6 6
961 093 -563 000
398 093 -337 800
060 293 - 56 300
03 993 - 3 378
0 615 - 563
052

— L'apprentissage est plus souple : en effet, la technique optimum peut être obtenue progressivement sans mécanisation.

Une disposition analogue est adoptée dans d'autres pays européens (les Pays-Bas, par exemple).

On trouvera dans la brochure éditée par l'A. P. M. E. P. (29, rue d'Ulm, 75230 Paris, Cédex 05) : *Mathématique à l'école élémentaire*, des compléments sur les processus de mathématisation et des exemples de leçons pris à d'autres niveaux.

Fiche établie par Eliette Faucon et Guy Brousseau

ANNEXE IV

Division euclidienne aux Cours Elémentaire et Cours Moyen

par G. BROUSSEAU

1 — BUTS DE LA SERIE DE LECONS

Nous voulons que les enfants élaborent progressivement un algorithme de la division euclidienne grâce à une série de réflexions et de découvertes, suivant le processus de mathématisation que nous utilisons habituellement.(1)

Ces découvertes doivent surgir à l'occasion de jeux de stratégie dans lesquels elles sont utiles : "la course à n".

Elles doivent être formulées et utilisées comme des théorèmes au cours d'un "jeu de la découverte" permanent.

Nous allons exposer en détail l'utilisation pédagogique de ces deux jeux.

La reconnaissance de situations *isomorphes* dans lesquelles l'algorithme élaboré est utilisable — ce que les maîtres appellent le

(1) Voir : "Processus de Mathématisation" dans le cinquième chapitre.

sens de la division — ne sera pas évoquée ici, mais elle doit évidemment être étudiée.

Les jeux ne supposent aucune technique mathématique préalable sinon celles du C.P. sur les naturels et sur l'addition.

2 — JEU DE LA COURSE A n

Règle du jeu

Soit n et p deux naturels donnés. p est plus petit que n.
Deux adversaires, A_1 et A_2, sont en présence.

A_1 dit un naturel inférieur à p, soit α_1.

A_2 dit un naturel α_2 obtenu en ajoutant à α_1 un naturel inférieur à p ;

A_1 dit un naturel α_3 obtenu en ajoutant à α_2 un naturel inférieur à p ;
etc...
Celui des deux adversaires qui peut dire n est déclaré gagnant.

3 — 1ère LECON

n = 20 ; p = 3, course à 20

1ère Phase : Compréhension de la règle du jeu (groupes de deux).

On pourra présenter ce jeu de deux manières :

Méthode visuelle : On étale 20 allumettes. Les adversaires prennent à tour de rôle *une* ou *deux* allumettes, au choix. Celui qui peut ramasser le dernier paquet d'allumettes, ou la dernière allumette, a gagné.

Méthode orale : On suit la règle du jeu de la course à n exposée ci-dessus : chaque adversaire ajoute 1 ou 2 au naturel énoncé précédemment. Celui qui dit 20 a gagné.

On peut utiliser l'une ou l'autre méthode, ou les deux successivement, au choix. Si on utilise les deux, il importe que les enfants découvrent l'isomorphisme entre les deux jeux. Dans tous les cas, on fera écrire les parties faites, de manière à pouvoir procéder ensuite à des comparaisons, dont les enfants pourront déduire des découvertes.

2ème Phase : Adoption d'une découverte

4 — OBSERVATION DE LA CLASSE : Classe de Mme Giverso (CE_1; CE_2)

Méthode de présentation du jeu

La méthode orale a été choisie. L'institutrice a expliqué qu'il fallait ajouter un naturel inférieur à 3, c'est-à-dire 1 ou 2, au naturel énoncé précédemment par l'adversaire.

Difficulté de départ : Un certain nombre d'enfants écrivaient des suites telles que celles-ci : 1, 2, 2, 1, 2, 1, 1...

Jeu de la découverte : Après un certain nombre de parties, les enfants ayant gagné au moins quatre fois ont essayé d'expliquer comment il fallait s'y prendre.

Les recettes suivantes ont été données :

(1) "j'ajoute toujours 2, et je gagne"

(2) "Celle qui commence la première gagne"
"celle qui commence la première perd"

(3) "Ca n'a pas d'importance par quoi on commence ; c'est important de partir de 16 ; l'autre a dit 16 ; je ne veux pas qu'elle gagne, alors je dis 17 ; alors, elle dira 18 ou 19 et je pourrai dire 20".

On assiste alors à une discussion entre les auteurs des idées (1) et (3) ; la première est convaincue de son erreur comme suit, par la troisième : "Si je dis 16, en ajoutant 2 tu diras 18, et tu perdras". Mais elle émet la réserve suivante : "si je mets 18 et si ma camarade ne comprend pas, elle dit 19 et je gagne".

On assiste ici à la naissance de l'idée qu'on ne peut établir une loi que si l'adversaire sait jouer. Les idées numéro (2) ont été immédiatement rejetées par l'ensemble de la classe.

Vérification des idées (1) et (3) : On reprend le jeu et on est amené à découvrir le théorème : celle qui dit 17 gagne.

Les enfants reprennent ensuite le jeu à 20. Puis on fait une deuxième pause pour juger des deux énoncés suivants :

(4) "*Il ne faut jamais dire 16*"

"Si, rétorque une enfant ; j'ai mis 16 ; l'autre a mis 18 et j'ai mis 20".

Une élève lui répond : "l'autre aurait pu mettre 17 et tu aurais perdu".

C'est-à-dire que si l'autre sait jouer, alors 16 est perdant.

(5) "Je compte de 2 en 2 jusqu'à 10, puis je dis 11, 14, 17" ; l'auteur est invité à venir écrire la suite des naturels au tableau. Elle joue en deuxième position (naturels soulignés).

$$2 - \underline{4} - 6 - \underline{8} - 10 - \underline{11} - 13 - \underline{14} - 15 - \underline{17}$$

Comentaire des élèves :

L'auteur : "Si mon amie met 13, je mets 14, comme ça j'arrive à 17".

Une deuxième enfant : "celui qui met 14, ça lui porte bonheur".

Une troisième : "14 est gagnant".

5 — *REMARQUES SUR LE PROCESSUS DE MATHEMATISATION*

Le théorème "celui qui dit 17, s'il sait jouer, ne peut pas perdre" est souvent découvert suivant le processus de mathématisation déjà évoqué.

a) — *Action.* Au cours de l'action, après une phase où l'enfant répond à "17" par "18", ou par "19", et constate qu'il perd, vient une phase où à 17 l'enfant ne répond pas. Ceci marque qu'il se reconnaît perdant dans tous les cas ; il ne se résigne pas à dire l'un des deux naturels — perdants — qu'il a le droit d'annoncer. Mais le théorème est implicite en ce sens qu'il est effectivement utilisé, dans les bonnes situations, pour effectuer des déductions correctes, mais il n'est pas formulé.

b) — *Communication.* Il faut une motivation d'un autre type pour obtenir l'explicitation du théorème : par exemple la communication, dans le jeu de la course à n, entre membres d'une même équipe :

L'autre équipe a dit 15 ; "dis 17, dis 17 et on a gagné"
(si nous disons 17 nous avons gagné).

Mais cette formulation, dans le jeu de la recherche d'une stratégie, est généralement reçue par le destinataire comme une simple information, une proposition, parmi d'autres, elle peut être vraie ou fausse.

c) — *Controverse.* Il faut encore une autre motivation pour que cette formulation prenne une valeur de théorème. Ici le maître propose le jeu de la découverte : "Qui peut dire une proposition certainement vraie ? "... Si les élèves sont peu habitués, le maître donne l'exemple.

— "Celui qui dit 20 gagne"

— C'est vrai, mais c'est la règle...

— "A vous"

Ici la phrase émise par l'enfant sera une assertion : il s'engage sur la véracité de ce qu'il dit.

— "Celui qui dit 17 gagne" *et ce n'est pas la constatation statistique "chaque fois que quelqu'un peut dire 17 il gagne" qui doit convaincre*, c'est la preuve que, si le premier dit 17, quoi que fasse l'autre, le premier peut gagner.

Cette qualité de preuve ne surgira pas de l'action, ni de l'information.

6 — 2ème LECON. REITERATION — RECURRENCE

PHASE INDIVIDUELLE

But : Généraliser les découvertes qui n'ont été acquises précédemment que par quelques enfants.

La classe est divisée en deux équipes : les bleus et les rouges

Chaque équipe comportera trois conseillers et neuf concurrents. Les conseillers par exemple sont les trois élèves qui gagnent le plus de courses à 20.

Les exécutants jouent ensuite individuellement à la course à 20 (bleus contre rouges). Les perdants peuvent se faire conseiller par des membres de leur équipe. Inversement, les exécutants peuvent aussi faire part aux conseillers de découvertes qu'ils pensent avoir faites en jouant.

On constate qu'une bonne partie des élèves joue la suite 8 — 11 — 14 — 17 — 20.

PHASE COLLECTIVE

On demande qui sait comment il faut faire pour gagner.

1ère proposition :

— "Si on dit 14, on peut dire 17 et on gagne".

Objection : "Je ne veux pas le croire, car j'ai mis 14 et l'autre a gagné".

Pour preuve, l'élève montre le jeu écrit dont elle parle. On l'écrit au tableau : <u>14</u> — 15 — <u>16</u>

Commentaire de la classe : elle a perdu parce qu'elle aurait dû mettre 17 qui est gagnant, au lieu de 16 qui est perdant.

Autres propositions :

— On compte de deux en deux jusqu'à 8, puis on dit 11 — 14 — 17 — 20

— On met 2 — 5 — 8 — 11 — 14 — 17 — 20 ;

— Si l'adversaire dit 2, on dit 4, comme ça on peut arriver à 8 ;

— Pour gagner, il vaut mieux commencer par 1 ;

— Si on arrive à 10, on a gagné ;

— Si on commence par deux, on gagne.

Conclusion : L'ensemble de la classe n'arrive pas à décider lesquelles de ces propositions donnent des méthodes sûres pour gagner. Au cours d'une troisième leçon, on devra donc organiser à nouveau le même jeu, pour en arriver à la découverte de l'algorithme correct.

7 — 3ème LECON

Les idées suivantes ont été émises et vérifiées :

— L'important est d'arriver à 5.

— Si l'autre commence par 1, je mets 2, comme ça elle ne pourra pas dire 5 ; car il y a 3 entre 2 et 5.

— Si on commence par 2, on est sûr d'arriver à 5.

Conclusion finale : Si on dit 2 — 5 — 8 — 11 — 14 — 17 — 20, on gagne à coup sûr. On n'a pas besoin de faire attention à ce que dit l'autre.

8 — Cette constatation achève une première étape pour l'étude de la division.

La deuxième étape va consister à mettre en évidence les rôles de p, de n, surtout celui de r, le premier naturel qu'il faut jouer, et éventuellement de q, le nombre de coups joués.

La troisième aboutira à l'institution d'un algorithme pratique pour trouver r ou q quand on connaît p et n.

9 — 2ème ETAPE :

n assez grand ; p choisi de façon que pour arriver à n de p en p, le nombre de sauts soit assez faible.

BUT DE LA LECON :

Transport des algorithmes découverts dans le cas précédent. Découverte du rôle de p.

Remarque : On peut donner la règle du jeu de deux façons différentes :

1°) — Ajouter à chaque coup un naturel inférieur à p ;

2°) — Ajouter un naturel au plus égal à p — 1.

La deuxième manière introduit une difficulté supplémentaire : on n'attire pas l'attention des enfants sur le rôle joué par p.

Si une erreur est faite, les enfants doivent en chercher la cause qui peut être :

— une erreur de calcul ;
— une erreur dans l'algorithme utilisé ;
— une erreur sur la valeur de p.

Il semble qu'une telle recherche doive introduire une certaine confusion. C'est pourquoi il paraît souhaitable d'éliminer certaines causes d'erreur :

— l'utilisation de la machine à additionner évitera les erreurs de calcul ;

— la formulation de la règle du jeu qui donne p évitera des erreurs sur la valeur de p ;

— on pourra faciliter la recherche de l'algorithme de diverses façons, en mettant en évidence ce qui est important dans le jeu à 20 comme dans le jeu à n.

10 — 3ème ETAPE :

p fixe ; n variable (nous prendrons ici p = 5).

Phase collective :

On suppose que les enfants ont compris que, dans le jeu de la course à n, il fallait trouver une "suite gagnante". On sait donc ce qu'il faut trouver. L'objet de cette leçon est d'améliorer autant que possible la *méthode de calcul.*

On espère que les enfants découvriront que, pour n fixé, non multiple de p, le premier joueur gagne s'il commence par un naturel bien déterminé, inférieur à 5, et que toutes les autres solutions sont perdantes. Au contraire, si n est multiple de 5, le premier joueur perd si le second énonce les multiples de 5.

On espère un perfectionnement de la méthode de recherche du nombre initial.

JEU : La classe est divisée en deux équipes. Chaque équipe comprend un centre de calcul et un groupe d'organisateurs, qui ne peuvent communiquer que par messages : les organisateurs d'une équipe rédigent les programmes des calculs à effectuer par les calculateurs de l'autre équipe.

On change n à chaque coup ; p reste fixe. On demande de trouver la suite gagnante le plus rapidement possible.

Chaque équipe peut gagner de deux manières :

— par ses organisateurs, si leur message était correct (compris et exécuté par les calculateurs de l'autre équipe),

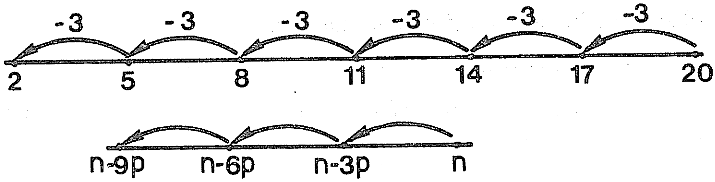
— par ses calculateurs, si ces derniers peuvent prouver que le message reçu était inefficace (soit erroné, soit incomplet).

Concrétisation à l'aide d'allumettes, groupées par 3 dans le jeu à 20, par p dans le jeu à n.

Concrétisation graphique (représentant la suite des naturels à dire si on veut gagner à coup sûr).

jeu à 20

jeu à n



Remarque : On peut faire plusieurs exemples consécutifs. L'important est que les enfants aient trouvé une méthode pour obtenir la suite gagnante (on pourra prendre p = 5).

OBSERVATION DE LA CLASSE :

1er exemple : n = 33 ; p = 5

La classe est divisée en deux équipes, réparties en sous-groupes de trois.

On organise un concours pour trouver la manière de gagner. Le pas a été donné dans la consigne (ajouter au naturel dit par l'adversaire un naturel inférieur à 5 ; celle qui dit 33 a gagné).

DECOUVERTES IMPORTANTES

1º) — Très rapidement : "28 est gagnant" est découvert et adopté par la classe.

2º) — "Si 28 gagne alors 25 gagne".
Objection : 25 n'est pas bon car le suivant peut dire 28

3º) — "26 perd".
"23 gagne".

4º) — "Il faut arriver à 18, comme ça on est sûr d'arriver à 23, et on pourra dire 28".

Un seul élève donne la suite gagnante. Une comparaison collective de la course à 20 par 3 et de la course à 33 attire leur attention sur l'importance de ce qu'elles appellent "l'écart" : 3 dans la course à 20, 5 dans la course à 33. Mais la classe n'a pas encore généralisé correctement la méthode, ce qui amène l'institutrice à proposer d'autres exemples.

2ème exemple : n = 56 ; p = 6

Le pas n'est plus donné. La consigne est d'ajouter un naturel au plus égal à 6.

Après quelques découvertes incorrectes, vite rejetées par l'ensemble de la classe, on obtient l'énoncé suivant :

"à partir de 56, il faut toujours soustraire 6 et on est sûr de gagner".

On vérifie l'exactitude de cette découverte.

Conclusion d'un élève : "Quand on respecte un naturel, c'est celui-là qu'il faut toujours soustraire".

3ème exemple : n = 48 ; p = 7

La classe obtient très rapidement la suite gagnante dès qu'un élève a remarqué :

"pour trouver l'écart, si on a le droit d'ajouter 1, 2, 3, 4, 5 ou 6, on ajoute 1 à 6. Puis on retranche toujours 7".

— Proposition de la course à n (n grand).
(On peut laisser les enfants choisir n et p dans des créneaux raisonnables (12 p < n < 30 p)), n non multiple de p.

TRAVAIL A L'AIDE DE MACHINES

I — *Introduction par le maître*

— Présentation des avantages de la machine : "elle calcule, vous n'avez plus qu'à réfléchir" (exemples d'additions, soustractions).

— Proposition de la course à n (n grand).
(On peut laisser les enfants choisir n et p dans des créneaux raisonnables (12 p < n < 30 p)).
n non multiple de p.

II — *Objectif*

Concours pour savoir ce qu'il faut faire pour trouver le premier naturel de la suite gagnante. Un enfant de chaque groupe travaille à la machine. Les autres vérifient à la main.

Le groupe gagnant est celui qui trouve le premier la méthode correcte. Une fois un naturel avancé il faut donc une vérification.

Vérification : Le naturel annoncé est-il le bon ?
Un représentant du groupe qui annonce ce naturel joue contre un autre élève devant toute la classe.

Le groupe est alors déclaré gagnant ou perdant.

Conclusion : Le maître fait exprimer le procédé suivi.

III — *Concours par groupe de quatre*

Objectif : trouver r le plus vite possible. 4 jeux consécutifs.
p est fixé, le maître donne successivement 4 valeurs pour n.

Vérification : voir ci-dessus.

IV — *Raccourcissements de procédures*

Toujours concours : n plus grand. "Chercher des astuces permettant de trouver plus vite le premier naturel de la suite gagnante". "Ce seront des découvertes".

11. *APPLICATIONS POSSIBLES*

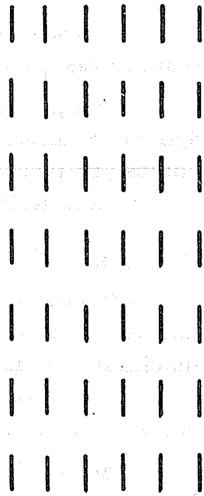
1°) *Tables de multiplication*

a) *Cas où n est multiple de p :* Une méthode rapide pour trouver la suite gagnante est de connaître la table de multiplication par p.

Ce jeu semble être une bonne motivation pour apprendre ou pour réviser la table de multiplication.

S'il s'agit de les apprendre, il peut être utile de concrétiser le jeu au moyen d'allumettes :

Exemple : n = 42 ; p = 6



On fait des rangées de 6 allumettes.
On constate qu'on peut les ranger dans un tableau de 7 lignes et 6 colonnes.
Donc : $42 = 7 \times 6$
Pour gagner, il faut ramasser toutes les allumettes qui restent dans une ligne entamée.
Quand une ligne a disparu, le nombre d'allumettes qui reste correspond au naturel qui précède 42 dans la suite gagnante.
C'est 36. C'est aussi 6×6.

b) *Cas où n n'est pas multiple de p*

La disposition des allumettes en rangées de p concrétise le fait que, pour trouver la suite gagnante, on peut savoir par quel naturel commencer en retranchant de n le plus grand multiple de p possible (en substance, les enfants cherchent le reste de la division de n par p).

2°) *Caractères de divisibilité (on prendra n multiple de p).*

Exemples :

a) p = 25

la suite gagnante se trouve plus aisément si on remarque que les multiples de 25 sont les naturels qui se terminent par 00, 25, 50, 75.

b) p = 9

les multiples de 9 sont les naturels dont la somme des chiffres est multiple de 9.

c) p = 4

les multiples de 4 sont les naturels dont les deux derniers chiffres forment un nombre multiple de 4.

Pour amener la découverte de ces propriétés, on peut poser des questions comme celle-ci :

p = 9 ; n = 900

32 fait-il partie de la suite gagnante ?
puis 36, puis 90, puis 279, puis 301, puis 132.

Pour les petits naturels, l'enfant peut trouver aisément grâce aux tables. Pour les grands naturels, on peut faire un concours de vitesse qui incitera les enfants à trouver un "truc" pour pouvoir répondre rapidement.

12. *4ème ETAPE : n et p grands*

Même schéma que dans la troisième leçon.
La recherche de la suite gagnante se fera à la machine à calculer.

13. *5ème ETAPE : quotient de n par p*

n et p étant donnés, les enfants doivent découvrir combien de naturels le gagnant a écrit s'il a toujours bien joué. Cette leçon peut se faire d'abord à la main, puis à la machine.

14. *6ème ETAPE : problèmes de division*

Trouver des problèmes où les enfants peuvent reconnaître le schéma de la course à n et savoir qu'il s'agit d'un problème de division.

15. *REMARQUES PEDAGOGIQUES ET PSYCHOLOGIQUES*

Pour tous les enfants — après l'explicitation du premier théorème "qui dit 17 peut gagner" — la difficulté consiste à réitérer le raisonnement pour trouver les naturels 14, 11... à dire pour gagner contre toute défense. Les premiers pas faits, très peu d'enfants de 7 - 9 ans arrivent à réitérer d'eux-mêmes et à obtenir 8, puis 5, puis 2. Nous disons que ceux-ci dominent le processus de la récurrence finie. La plupart au contraire éprouvent de plus en plus de résistance à réitérer le raisonnement : d'abord ils savent de moins en moins bien répéter le démonstration "si je mets 8, il ne peut mettre que 9 ou 10; s'il met 9, j'ajoute 2 et je dis 11, s'il met 10 j'ajoute 1 et je dis 11 aussi, si je mets 11 je peux mettre 14, puis 17, puis 20".

Comme si cette suite de propositions perdait de son sens par l'effet d'une certaine fatigue du cerveau ou comme si la mémoire s'embrouillait à vouloir se substituer à la compréhension de la situation : certains enfants au contraire se conduisent comme si le raisonnement luttait contre un autre modèle :

"à la fin il faut choisir le bon naturel mais avant 11 ou avant 8 on peut faire ce qu'on veut... Avant 5 ça n'a pas d'importance tout de même ! ". Ces enfants ne dominent pas le processus de récurrence finie.

Enfin les enfants sont de moins en moins sûrs de la véracité des théorèmes énoncés et des conclusions obtenues. Non seulement ceux-ci ne dominent pas le processus de récurrence, mais encore la notion même de déduction leur échappe encore : la vérité démontrée n'a pas pour eux la même valeur que la vérité constatée et dépend de la longueur du raisonnement.

Je ne suis pas sûr qu'il ne s'agisse que d'un retard dans le développement de la pensée logique de l'enfant, et qu'il suffise d'attendre que la nature fasse son oeuvre, car beaucoup d'adultes éprouvent le même genre de difficultés. Il est toutefois évident que les explications du maître sont impuissantes à corriger ce défaut : une déduction ne peut convaincre qu'un interlocuteur capable de déduire. Il serait au contraire extrêmement dangereux que l'enfant accepte la déduction par sympathie pour le maître, par bonne volonté, à la suite d'une comparaison adroite, par habitude, ou à la suite d'un apprentissage. Il faudra faire jouer à nouveau l'enfant contre un autre qui connaît la suite gagnante, il pourra obtenir alors la conviction que le théorème est vrai, sémantiquement vrai.

Dans les autres exemples de courses le même raisonnement sera employé, de nouvelles occasions seront données à l'enfant de comparer la valeur des conclusions obtenues par des déductions avec celles qu'on peut obtenir par la pratique, le sens,...

Il faudra toutefois aussi qu'il apprenne à distinguer les déductions logiques des conjectures et associations d'idées, pour lesquelles on emploie les mêmes mots du langage courant (donc, parce que, car, alors...).

L'étude traditionnelle de la division ne s'arrête évidemment pas à ces difficultés car elle vise la connaissance de l'algorithme, — ce qui n'exige pas la compréhension — ; et le sens des occasions où il y a lieu d'employer l'algorithme — appelé sens de la division —. Ce choix est peut être critiquable mais il est possible que nous devions conserver provisoirement pour l'acquisition de l'algorithme un apprentissage au sens strict.

La course à n et les leçons qui la suivent tendent à remplacer toutes les soi-disant explications et justifications, qui alourdissent, sans le rendre plus efficace, l'apprentissage de la division.

Ces explications consistent à résoudre l'algorithme en une suite d'évidences, mais évident veut dire ici familier, évident au maître, sémantiquement évident et non pas logiquement évident. L'inefficacité voire la nocivité de ces fausses explications est facile à démontrer.