AIDES PÉDAGOGIQUES POUR LE COURS ÉLÉMENTAIRE

Elem Math V

Publication de l'A.P.M.E.P.

(Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public)

N° 29

AIDES PÉDAGOGIQUES
POUR
LE COURS
ÉLÉMENTAIRE

Elem Math V
Publication de l'A.P.M.E.P.

(Association des Professeurs de Mathématiques
de l'Enseignement Public)
N° 29

SOMMAIRE

AVANT-PROPOS

*Cette brochure "Aides pédagogiques pour le C.E." est une oeuvre collective d'enseignants de l'Ecole Elémentaire, d'Ecole Normale et de l'Enseignement Supérieur travaillant dans des équipes de recherche sur l'enseignement élémentaire de divers I.R.E.M *.*

Comme la brochure "Aides pédagogiques pour le C.P.", elle a pour ambition de rendre service aux enseignants et aux responsables de l'Enseignement Elémentaire dans l'application des nouveaux textes en vigueur (Arrêtés du 7/7/1978).

Certaines activités présentées, notamment dans le domaine numérique, sont à la charnière du C.P. et du C.E. Contrairement à ce qui était annoncé dans Elem-Math IV, elles n'ont pas été disjointes et placées en annexe afin de ne pas rompre l'unité des rubriques.

Il nous a semblé important de mettre en évidence dans cet avant-propos les quelques réflexions qui suivent, car elles servent de toile de fond aux différentes activités proposées.

L'enseignement mathématique à l'Ecole Elémentaire, au-delà de son utilité sociale et professionnelle, doit avoir pour rôle essentiel de participer au développement intellectuel de tous les enfants. La fonction première de l'intelligence consiste à se poser des questions sur l'environnement, à construire des réponses à ces questions et à évaluer les résultats obtenus au regard des interrogations initiales. La formation de l'intelligence se réalise dans un processus complexe où l'activité de l'enfant dans son environnement, son entraînement à inventer des structures qui rendent compte de son expérience, et l'organisation de ces structures en systèmes de plus en plus complexes jouent un rôle primordial. Cela a deux types de conséquences en ce qui concerne l'enseignement des mathématiques :

1. Sur l'ordre de priorité des processus mentaux à favoriser, il importe :

– d'amener l'élève à former les notions et à découvrir lui-même les relations et les propriétés mathématiques, plutôt que de lui imposer une pensée mathématique toute faite ;

– de privilégier l'acquisition des notions et des processus opératoires ;

– de ne confier à l'automatisme que des notions assimilées ;

– et enfin de refuser l'utilisation imposée d'un langage formel apporté de l'extérieur.

2. Sur la conception de l'activité mathématique, il importe :

– d'accorder une grande place à l'investigation par tâtonnement des questions à étudier ;

– de considérer de façon constructive les "erreurs" des élèves, et d'y déceler la manifestation d'une pensée en évolution ;

---

* *I.R.E.M. : Instituts de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques.*

– surtout d'apprendre aux élèves à poser des problèmes, rechercher des données, les exploiter, expliciter les démarches suivies, apprécier les résultats obtenus et valider démarches et résultats.

Le premier chapitre de cette brochure traite du rôle des problèmes dans l'enseignement des mathématiques ; il présente en particulier des chroniques d'activités en classe pour lesquelles des commentaires tentent de mettre en évidence les principes d'organisation.

Les deux autres chapitres portent respectivement sur le domaine numérique et sur la géométrie et la mesure. Le lecteur y trouvera, selon les paragraphes, des commentaires du texte officiel, des schémas d'activités suivies sur une notion, des exemples d'activités en classe avec discussion des conditions didactiques de leur réalisation, quelques points de départ pour d'autres activités.

La brochure se termine par une liste de références bibliographiques.

Toutes remarques, suggestions et questions seront les bienvenues et doivent être adressées à :

C O P I R E L E M *
I.R.E.M. de Paris-Sud
Université Paris VII
2, place Jussieu - 75005 PARIS

Ont participé à la rédaction de cette brochure :

M. ARTIGUE (Paris), A. AUTEBERT (Orléans), J. BOET (Paris), G. BUISSON (Rouen), J. CARRIER (Lyon), F. COLMEZ (Paris), R. CREPIN (Limoges), J.M. DIDRY (Nancy), R. DOUADY (Paris), M. EBERHARD (Grenoble), M. LAISNE (Lille), J. LECOQ (Caen), R. LEYROLLE (Clermont-Ferrand), R. MAURIN (Clermont-Ferrand), J.M. MUNIER (Reims), J. PAINCHAULT (Grenoble), N. PORCEL (Besançon), J. ROBINET (Paris), J. ROUGIER (Limoges), G. SAGUERRE (Rennes) et l'équipe de MOTS.

* *COPIRELEM : COmmission Permanente des IRem pour l'enseignement ELEMentaire*

CHAPITRE 1
LES PROBLEMES

A. GENERALITES

I. Les situations problèmes

Il est communément admis que :

- les exercices d'entraînement et de mémorisation sont nécessaires en mathématiques comme dans les autres matières ;
- l'utilisation d'un langage mathématique adapté et précis est une condition de progrès dans l'apprentissage.

On ne saurait cependant trop insister sur l'idée que faire des mathématiques, c'est avant tout résoudre des problèmes et que l'apprentissage des mathématiques réside pour l'essentiel dans cette activité.

I.1. **Il y a problème** si, connaissant un certain nombre d'informations concernant une situation, on veut obtenir, à partir de ce donné, des connaissances qui en sont des conséquences non-immédiates ; bien souvent l'explicitation et la formulation des questions font elles-mêmes partie du problème.

Les informations peuvent être transmises sous la forme classique d'énoncés rédigés, ou sous la forme de documents bruts (livret de Caisse d'Epargne, par exemple). Elles peuvent intervenir pour l'analyse ou la réalisation d'un objet technique (réalisation de maquette par exemple).

Les situations étudiées peuvent avoir des origines très diverses :

— la classe avec sa vie propre, ses relations avec le quartier, la ville, d'autres classes (correspondance, échanges), d'autres milieux de vie ;

— les jeux pratiqués par l'enfant (marelle, sept familles ...) ;

— les activités sur la mesure (longueur, valeur marchande, masse, durée ...) ;

— l'activité mathématique elle-même (recherche d'une procédure de calcul, d'une construction géométrique,...)

I.2. **Résoudre un problème**, c'est imaginer et explorer un chemin pour atteindre un but qui n'est pas directement accessible. La résolution de problèmes est une tâche qui peut être l'occasion d'appliquer des méthodes déjà connues, mais ne saurait se réduire à cela. Elle nécessite l'analyse des informations données, la mobilisation des savoirs antérieurement acquis, en vue d'établir des similitudes partielles avec des situations déjà explorées, de construire des schémas susceptibles de mettre en évidence des relations mathématiques décrivant la situation proposée ; on peut alors transférer le questionnement à ces descriptions (appelées parfois "modèles mathématiques" de la situation), puis, en faisant fonctionner ces relations et leurs propriétés, en déduire les renseignements recherchés, et éventuellement se poser de nouvelles questions.

I.3. La construction de modèles convenables se réalise au cours d'un processus complexe, marqué par une adaptation progressive des moyens mis en oeuvre au problème posé. C'est dans cette recherche que doit se développer la capacité d'organiser les essais successifs et de savoir utiliser les renseignements fournis par chaque essai, fructueux ou infructueux, pour diriger l'essai suivant.

Il se peut qu'un tel processus échoue, ou qu'il ne conduise à un moment donné qu'à des résultats partiels ou approximatifs. Loin d'être un échec sur le plan pédagogique, une telle éventualité peut se révéler riche de développements ultérieurs. Les recherches faites sont alors une motivation pour un développement de nouvelles phases d'apprentissage comme, par exemple, la recherche d'une meilleure approximation.

II. Usages du problème

Au sein même de l'apprentissage mathématique, on peut distinguer plusieurs usages du problème :

II.1. Application : ce genre de problème est bien connu, puisqu'il a constitué l'essentiel de l'enseignement "traditionnel". Cet usage du problème peut correspondre à plusieurs objectifs pédagogiques : entraînement, renforcement de connaissances, mémorisation de résultats, évaluation ...

II.2. Elaboration d'outils nouveaux : chaque outil mathématique peut se construire et trouver sa signification à travers l'exploitation d'une ou plusieurs situations. Ainsi la construction d'un algorithme de calcul répond au problème de la recherche de procédés rapides et sûrs permettant la réalisation de calculs jusque-là irréalisables. Ou encore, la notion de "produit" de deux naturels permet de traiter une classe de situations jusque-là inextricables, ou même difficilement envisageables.

Il se peut que ces outils nouveaux s'intègrent aux anciens sans difficulté ; sinon, leur création provoquera une réorganisation du savoir pour en rétablir la cohérence.

II.3. Extension du champ de fonctionnement d'un outil mathématique : certaines classes de problèmes peuvent constituer un champ d'application nouveau pour des concepts et des structures mathématiques déjà abordés sous d'autres aspects. C'est ainsi que l'usage des naturels, dans les questions liées à la mesure des grandeurs (masse, longueur, valeur marchande), étend leur fonctionnement à des domaines apparemment éloignés de ceux auxquels ils étaient attachés (dénombrement de collections d'objets).

II.4. Mise en relation de domaines différents, comme par exemple les domaines physique ou géométrique et celui des activités numériques, ce qui conduira à établir des interactions entre les outils (concepts, langage, techniques) propres à ces domaines. Ainsi, pour résoudre le problème du découpage d'un carré en *n* carrés, il est nécessaire, en plus d'une recherche géométrique, de faire appel à des concepts numériques (multiples, nombres carrés, ...) et à des modes de raisonnement (généralisation, récurrence) importants pour la formation de l'esprit. (Voir ch. 3, E, Cubes et carrés, VI, page 131).

III. Rédaction

La présentation des résultats fait partie intégrante de l'activité de résolution de problèmes.

III.1. • La disposition en deux colonnes, solution d'un côté, opérations de l'autre, présente l'inconvénient majeur de tous les stéréotypes : elle stérilise la pensée. De plus, cette disposition n'est adaptée qu'à des problèmes du genre exercice d'application ne comportant que des questions d'un type standard. Elle est souvent considérée comme une occasion d'exiger des élèves du soin dans la présentation.

• L'utilisation de fiches polycopiées, préparées par le maître, est sans doute plus souple, mais les élèves ont seulement à les compléter ; cela ne leur laisse pas davantage d'initiative que la disposition en deux colonnes.

Ces deux types de présentation peuvent servir au contrôle du travail des élèves.

III.2. Cependant la rédaction et, plus généralement, la présentation des résultats devraient également remplir d'autres fonctions.

• En cours d'activité, le plus souvent, les documents écrits préparés par les élèves, seuls ou en équipes, de même que les écritures au tableau, ne comportent pas beaucoup de mots et de phrases, car ils sont destinés à être commentés oralement ou à alimenter la discussion collective.

• A certains moments, au contraire, c'est à travers de longues périphrases que les enfants élaborent de nouveaux concepts avant de réussir, poussés par la nécessité de la communication et de l'utilisation, à constuire un langage concis et fonctionnel. C'est en particulier en organisant les échanges entre élèves de messages écrits que le maître peut favoriser cette évolution (cf. D. Sur le thème du rectangle).

• En fin d'activité, il est souhaitable de procéder à un compte rendu de celle-ci, par exemple en construisant un texte commun à la classe à partir de phrases proposées par les élèves. Une telle rédaction collective a un double objectif :

— en mathématiques d'une part : obliger les élèves à réfléchir sur la signification de leur travail antérieur et structurer ainsi les connaissances acquises ou mises en oeuvre ;

— en français d'autre part : obtenir une formulation claire et précise.

IV. Présentation de la suite du chapitre

- La rubrique B est une *analyse critique d'un énoncé de problème.*

Les énoncés classiques, qui peuvent parfois être utilisés comme tests, jouent un rôle très réduit dans l'apprentissage. Nous avons choisi un énoncé qui, malgré sa formulation générale, est moins ouvert qu'il n'y paraît.

L'analyse que nous en faisons nous amène à le transformer ; le nouvel énoncé doit conduire les élèves à chercher un modèle mathématique rendant compte de la situation concrète de départ et la dépassant.

- Les rubriques C et D sont des *chroniques commentées d'activités de classe.*

A propos de situations particulières, nous nous proposons de mettre en relief des paramètres mathématiques et didactiques (ceux auxquels nous avons pensé !) sur lesquels le maître peut agir en vue d'en orienter l'exploitation.

Nous verrons comment la façon de poser un problème et la prise en compte des questions, remarques, résultats partiels, ... des enfants, en permettant au maître d'orienter la recherche, engendrent ou non de nouveaux problèmes, ouvrent ou ferment la situation.

La deuxième chronique est à cet égard particulièrement significative : le même thème mathématique est envisagé dans deux classes selon des démarches propres à chacune ; les notions abordées et les aboutissements sont souvent différents.

B. ANALYSE CRITIQUE D'UN ENONCE DE PROBLEME

I. Enoncé

Je n'ai dans mon porte-monnaie que des pièces de 20 centimes et de 50 centimes. Puis-je payer un objet de n'importe quel prix ?

Quelles sommes peut-on former avec 1, 2, ... 10 pièces de 20 centimes et 1, 2, ... 5 pièces de 50 centimes ?

Donne les résultats dans un tableau que l'on puisse utiliser facilement.

Quelles sont toutes les façons de payer un objet de 2,60 F ?

II. Ce qu'implique cette formulation de l'énoncé

La somme d'argent contenue dans le porte-monnaie n'est pas très grande. Si elle semble a priori indéterminée, il ne faut pas compter sur cette situation pour inciter les élèves à travailler sur de grands nombres.

Bien que cela ne soit pas précisé, il est implicite que, pour le problème, on ne rend pas la monnaie. Cette situation, qui se veut concrète, est donc en contradiction avec ce qui se passe réellement dans la vie quotidienne. Cela aura pour conséquence que l'on envisagera seulement des additions. Les soustractions sont exclues d'emblée, et cette idée est renforcée par la suggestion du tableau qui ne permettra d'écrire que des sommes (il n'est guère envisageable de prolonger ce tableau "à gauche et en bas" pour introduire des écritures soustractives).

Tel qu'il est rédigé, ce problème est du type application de découvertes, d'apprentissages antérieurs :

Donne les résultats dans un tableau sous-entend que l'on impose un mode de représentation que l'on a déjà vu par ailleurs.

D'autre part, cette phrase induit un comportement bien connu des enfants, excluant du même coup toute phase de tâtonnement par rapport à la méthode. Cela appauvrit considérablement l'exploitation possible, et ferme donc la situation.

III. Exploitation du contexte

Un problème peut suggérer une démarche de généralisation, ou ne permettre au contraire une telle démarche que dans le cas où les élèves auraient déjà eu auparavant l'occasion de généraliser.

L'énoncé précédent ne semble pas inciter les élèves à cette généralisation.

C'est là qu'intervient alors le comportement du maître qui va pousser à rechercher "autre chose", au-delà du texte, ou au contraire se contenter d'obtenir les réponses aux questions posées dans le texte.

Comment enrichir la situation en transformant l'énoncé précédent :

— un autre "habillage" pour un même modèle.

On peut permettre des soustractions en ne travaillant plus avec des pièces de monnaie, mais avec des masses à peser, en n'utilisant par exemple que des masses marquées de 20 g et de 50 g.

— un même "habillage" en modifiant l'énoncé.

Ne pas suggérer l'utilisation d'un tableau.
Ne pas limiter la taille des nombres par un porte-monnaie au contenu assez limité, mais parler de caissier, de banquier...

IV. Comment enrichir la situation

IV.1. Exemples de reformulation

a) *Dans mon porte-monnaie, je constate qu'il n'y a que deux sortes de pièces.*

Pistes de recherche :

Quelles peuvent être ces pièces ? Selon les cas, quelles sommes peut-on atteindre ou ne pas atteindre ?

b) *En supposant qu'il n'y ait en circulation que deux sortes de pièces, quelles sont les sommes que l'on peut payer ? (On peut bien sûr rendre la monnaie !). Y a-t-il beaucoup de manières de le faire ?*

Remarques :

— Les sommes étant illimitées, il est possible de travailler sur de grands nombres.

— Les soustractions sont rendues possibles.

Pistes de recherche :

— Quels sont les deux types de pièces qui permettent d'atteindre le plus de sommes possibles ?

— Pourquoi ne se contente-t-on pas en France de pièces de 1 c qui permettraient de tout payer ?

— Quelles sont les pièces en circulation les plus nombreuses ? Y a-t-il une raison à cela ?

IV.2. Autre type d'activités

Organiser dans la classe une simulation d'achats, plusieurs équipes ayant à faire les mêmes transactions avec des compositions de caisse différentes (dans chaque équipe, il manque certaines catégories de pièces). On débouche alors sur le problème suivant : *Est-il possible d'obtenir n'importe quel nombre par addition ou soustraction de quelques nombres ?*

C. JEU DE CIBLE

Chronique et analyse d'activités de classe

I. Présentation des activités

I.1. Intentions

Les principaux intérêts de ces activités pour les enfants sont :

— Faire des groupements et des décompositions (numération)
— Additionner plusieurs nombres et utiliser des propriétés de l'addition pour étendre le domaine des nombres maîtrisés.
— Aborder d'un certain point de vue la multiplication, la division euclidienne.
— Communiquer entre équipes.
— S'organiser et élaborer une stratégie.
— Développer son adresse physique.

1.2. La situation et les principaux paramètres sur lesquels portent les choix du maître

1.2.1. Le Jeu

Il s'agit de lancer une balle dans une cible dessinée sur le sol. Les enfants jouent , individuellement ou par équipes, un nombre de coups décidé à l'avance. Diverses règles du jeu sont possibles.

I.2.2. Paramètres de la situation

Selon l'âge des enfants et le type de groupements qu'on aimerait les voir faire, on peut faire varier :

— le nombre des cercles de la cible,
— les points de chaque zone,
— le nombre d'équipiers,
— le nombre de coups pour chacun,
— le nombre de parties.

I.2.3. Choix de la cible

L'expérience nous amène à souligner qu'il est important que tous les points puissent être marqués, c'est-à-dire que toutes les zones de la cible puissent être atteintes avec autant de chances a priori ; c'est le cas par exemple si la cible est dessinée sur le sol, ou matérialisée par des cerceaux.

Choix du nombre de points : en C.P., nous avons pris des nombres assez petits de manière à exploiter le domaine opératoire des enfants et à l'étendre progressivement en augmentant le nombre de coups à jouer.

Nous avons joué avec 3 - 6 - 9 et 2 - 5 - 10.

Le choix de 3-6-9 favorise les groupements d'une manière générale et plus particulièrement les groupements par 9 : on rencontre effectivement beaucoup de manières d'obtenir des 9 (3+6, 3+3+3, 6+6 = 9+3).

Le choix de 2 - 5 - 10 favorise la base *dix*. La cible 2 - 5 - 10 a été exploitée dans une classe où beaucoup d'enfants utilisaient les nombres à 2 chiffres et les écrivaient sans avoir fait de groupements et donc sans comprendre l'écriture des nombres. Mais il est pauvre du point de vue groupements (on n'a guère rencontré que 5+5, d'autant plus que la cible avait été réalisée de telle sorte qu'il était pratiquement impossible de faire un 2).

Au C.E.1 (mois de mai) nous avons repris cette situation avec 25 - 50 - 75 - 100 de manière à manipuler des nombres assez grands.

Cette situation a permis de développer et de renforcer les méthodes de calcul rapide (plus particulièrement multiplication) et de les étendre à des nombres de l'ordre de 1 000 ou 2 000.

1.2.4. Règles du jeu. Voici celles qui ont été utilisées.

● **Première règle du jeu** : celui qui a le plus de points gagne.

On a joué dans deux C.P. avec des variantes :

— Cible 3 - 6 - 9 ; jeu individuel ; 3 lancers chacun (en mai).
— Cible 2 - 5 - 10 ; jeu individuel ; 3 lancers chacun (en mars).
— Cible 3 - 6 - 9 ; jeu par équipes de 4 avec 3 lancers chacun ;
  1) une partie
  2) deux manches et classement général.

● **Deuxième règle du jeu** : l'équipe qui atteint un nombre donné de points ou s'en approche le plus gagne.

— Cible 3 - 6 - 9 ; équipes de 4 ; 1 lancer chacun ; 18 points.
— Cible 3 - 6 - 9 ; équipes de 3 ; 2 lancers chacun ; 27 points.
— Cible 3 - 6 - 9 ; équipes de 4 ; 3 lancers chacun ; 50 points.

II. Chroniques commentées

II.1 Jeu individuel

Règle : chaque enfant effectue 3 lancers. Cible 3 - 6 - 9.

Cette consigne ferme de façon délibérée une possibilité de travail avec un nombre de lancers et un nombre de points indéterminés.

Dans un premier temps, la maîtresse explique la règle du jeu et les enfants jouent avec enthousiasme.

Au moment de savoir qui a gagné, certains enfants ne se souviennent plus de leur score. Ils découvrent alors la nécessité de s'organiser et d'avoir des traces écrites du jeu. Cela fait l'objet d'une discussion collective au cours de laquelle sont validés certains des moyens proposés.

Il nous semble important que, dans un premier temps, les enfants jouent effectivement sans se préoccuper de l'exploitation qui peut en être faite en classe.
Dans un deuxième temps, on leur demande de décrire et commenter leur jeu, et c'est en voulant répondre aux questions qu'ils se posent qu'ils sont amenés à s'organiser et à prévoir.

II.2. Jeu par équipes et étude des scores

II.2.1. Organisation du jeu

Cible 3 - 6 - 9 ; équipes de 4 ; 3 lancers par équipe

Les conditions imposées ici limitent le champ d'investigation des nombres.
Les informations à retenir sont suffisamment abondantes pour qu'ils éprouvent le besoin de les noter.
Comme ils ont déjà utilisé des tableaux à double entrée dans d'autres situations, chaque équipe en prépare un avant de jouer.
Dans cette phase, il y a réinvestissement d'un outil déjà connu.

Exemples : Scores réalisés par trois équipes sur les sept.

Olivia	0	0	0
Christophe	0	0	0
Marc	0	0	0
Yannick	0	3	3

Kamel	6	9	0
Gilles	3	6	9
Virginie	3	0	3

Bastien	9	9	6
Patrick	6	6	9
Louison	0	0	0
Frédéric	3	3	6

II.2.2. Exploitation des tableaux de résultats

a) Les questions

Après le jeu, la maîtresse recopie au tableau les résultats que lui dicte chaque équipe, puis demande aux élèves quelles *questions* se poser.

Voici quelques propositions de recherche :

— L'équipe gagnante.
— L'équipe perdante.
— Les équipes ex-aequo.
— Les enfants qui ont marqué le même nombre de points dans une même équipe ou dans des équipes différentes.
— Les enfants qui ont fait trois fois la même chose.
— Le gagnant ou le perdant à l'intérieur de chaque équipe.
— Le gagnant ou le perdant pour toute la classe.

Les propositions des enfants conduisent à un travail dans le domaine numérique ; essentiellement, comparaison de nombres écrits sous différentes formes.

Pour que les discussions puissent être fructueuses, l'organisation choisie pour l'exploitation des résultats a une grande importance. Si les enfants avaient eu à remplir des tableaux tout préparés comportant une colonne supplémentaire destinée à recevoir le total, ils n'auraient plus eu qu'à faire des additions et la situation aurait été considérablement appauvrie : on aurait perdu l'activité de recherche d'autres moyens de répondre à la question, en particulier par groupement ou compensation.

La réflexion de Bastien :

"De 0 à 3, il faut rajouter 3, de 3 à 6, il faut rajouter 3, c'est toujours +3, tu n'as pas fait cela par hasard".

permettrait de déboucher sur les relations numériques du type $n \longmapsto n+a$. A ce moment du travail, une telle étude serait prématurée.

b) Les réponses. On peut distinguer plusieurs étapes :

- Proposition de traitement de l'information. Transformation des écritures.

Hélène : "On peut compter les points de chaque équipe".

- Affirmations sur un mode intuitif sans validation.

Eric : "Je sais qui a perdu, c'est l'équipe d'Olivia" (*cf. tableau*) "elle a beaucoup de zéros et après il n'y a que des 3, et c'est le plus petit".

— Celui qui a le plus de zéros a perdu.
— Grégoire : "Celle qui a le plus de 9 a gagné".

- Procédure de validation d'une affirmation. Traitement des données

— Gilles : "C'est pas forcé, avec 6 et 3 on fait 9".
— "On peut faire 9 rien qu'avec des 3".

- Calcul

Toute la classe étudie les résultats de l'équipe d'Hélène, et Gilles ajoute : "Quand on a 6 et 6, on enlève un 3 d'un 6, on le met avec l'autre 6 et ça fait 9".

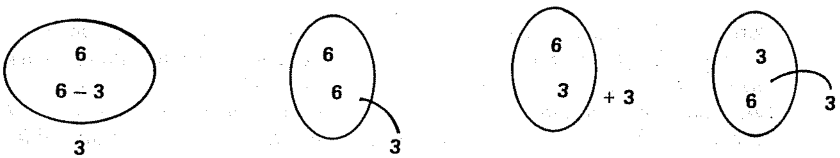
Pour pouvoir écrire les points de cette équipe, les élèves éprouvent le besoin d'utiliser un signe pour "paquet". Cette situation pourrait être exploitée dans le cadre de l'introduction de l'écriture multiplicative.

Bastien écrit : (3 p 9) + 9 ; un autre : (3 □ 9) + 3 . La classe adoptera la deuxième écriture.

Un membre de chaque équipe vient au tableau compter le nombre de paquets de 9 de l'équipe.

La décomposition du 6 + 6 en 9 + 3 présente des difficultés pour certains.
La remarque de Gilles à ce propos n'a pas beaucoup aidé les autres : chacun doit faire sa propre démarche.

Pour se convaincre, ils proposent plusieurs écritures :



La difficulté à transformer 6 + 6 en 9 + 3 semble accrue par la complexité du contexte.

Finalement tous les résultats sont écrits sous la forme :

6 (équipe d'Olivia) ; (4 □ 9) + 3 (équipe de Kamel) ; (6 □ 9) + 3 (équipe de Bastien).

- Cela va permettre un travail sur la reconnaissance de différentes écritures d'un même nombre.

Sur ces écritures, les élèves comparent les différents résultats puis cherchent combien chaque équipe a de plus que la suivante ; pour noter leurs conclusions, ils sont amenés à désigner le score de chaque équipe : ils choisissent l'initiale du mot français désignant le nombre de paquets de l'équipe (il se trouve que les équipes avaient des nombres de paquets différents).

Exemple : S (initial de *six*) pour (6 □ 9) + 3 .

Ces lettres désignent bien des nombres puisque les élèves les comparent, les retranchent et les insèrent dans des écritures comme

$$S = Q + (2 \square 3)$$

Pour les calculs de différence, ils traitent séparément les nombres de paquets de 9 et les restes.

Cela ne fait intervenir que des petits nombres, qui leur sont familiers. Ils ont cependant rencontré le problème des retenues. Par exemple, pour calculer la différence entre (4 □ 9) et (1 □ 9) + 3, ils prélèvent un paquet de 9 sur les 4, puis 3 points sur un deuxième paquet.

II.2.3. Calcul des scores

Les élèves ne savent toujours pas combien de points a réalisé chaque équipe. Ils veulent le savoir.

Ce qui suit engage un travail sur la numération.

- *Réinvestissement de l'outil "groupements", et "écriture d'un nombre sous forme d'une somme". Même si certains élèves ne connaissent pas le "nom" du nombre 45, ils utilisent l'écriture 45 en la lisant* quatre paquets de dix plus cinq.
- *Premier pas vers l'élaboration de techniques d'addition et de soustraction avec ou sans retenue.*

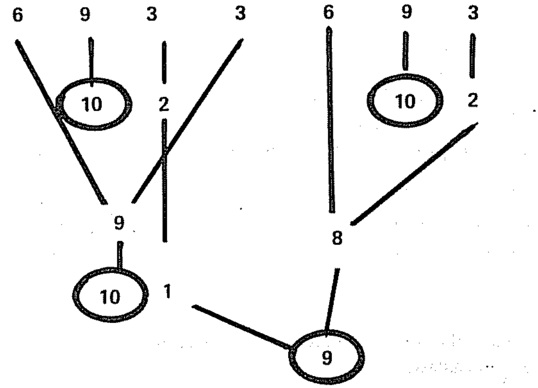
Les élèves comptent le nombre de points qu'il y a dans un paquet de 9, deux paquets de 9 ...

Ils proposent plusieurs moyens :

a. Le calcul $9 + 9 = 18$ fait déjà partie du répertoire ; ensuite :

$$18 + 9 = (18 + 2) + 7 = 20 + 7 = 27$$

Ce calcul se fait mentalement : d'une part les enfants disposent d'un certain répertoire qu'ils étendent au fur et à mesure de leur pratique, en particulier pour les doubles ; d'autre part, ils ont l'habitude de faire des groupements de 10 pour calculer, quitte à prélever sur un nombre le complément à 10 d'un autre nombre.
Dans une autre classe, des enfants qui notaient les scores de leur équipe par une suite de nombres ont réalisé des paquets de 10 à partir de paquets de 9 en prélevant une unité "ailleurs", autant que nécessaire.



b. La représentation des paquets de 9 par des réglettes découpées dans du papier quadrillé (1 carreau pour 1 point) et le décompte des carreaux de ces réglettes :

une réglette de 9 carreaux pour 1 □ 9 ;
deux réglettes de 9 carreaux mises bout à bout pour 2 □ 9 , etc.

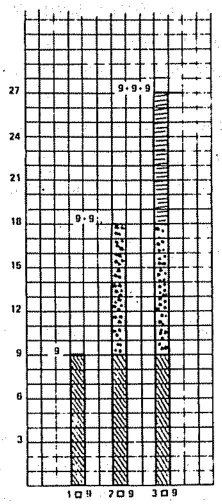
Ces réglettes ont été utilisées de deux manières :

● d'une part, suivant l'idée des enfants, en groupant les carreaux par 10 ("C'est facile, 9 c'est presque 10").

Cela a surtout permis de visualiser le calcul précédent et ainsi de le justifier pour certains enfants qui ne pensaient pas encore à décomposer les nombres pour grouper autrement.

● d'autre part, selon une suggestion de la maîtresse, en collant ces réglettes sur une feuille de papier quadrillé (le même que celui dans lequel ont été découpées les bandes) en les appuyant sur un axe horizontal et en lisant le nombre de points correspondant à chaque baguette sur un axe vertical numéroté convenablement.

Certains enfants écrivent les nombres de 3 en 3 (cf. la figure ci-contre) en expliquant que, dans leur jeu, on ne peut faire que des 3.



Notons que les enfants ont déjà utilisé des quadrillages gradués pour repérer deux séries de renseignements. Ici les deux variables sont le nombre de paquets de 9 et le nombre de points correspondant. Ce mode de représentation sera exploité par la suite pour l'étude de fonctions.

Les enfants prennent conscience de l'intérêt de cette présentation. ("C'est facile, on n'a pas besoin de calculer")

Un graphique collectif est dessiné sur une grande feuille quadrillée affichée au tableau.

c. Un autre moyen de calcul apparaît quand la maîtresse demande de noter sur le graphique le nombre des points obtenus par chaque équipe :

"Pour ajouter 9, on ajoute 10 et on prend celui d'avant"

Il semble que beaucoup d'enfants aient pris conscience,à ce moment-là seulement, des relations entre paquets de 9 et paquets de 10.

II.2.4 Nouvelle partie

L'enthousiasme des enfants et l'envie de faire mieux ont nécessité cette deuxième manche.

Les enfants rejouent, puis font un classement général. Les scores sont notés en ajoutant des indices aux lettres déjà choisies (par exemple, pour l'équipe de Bastien : on note S à la première manche, S_1 à la deuxième, et S_2 au classement général).

Ce n'est pas la première fois que l'on constate, chez ces enfants, un souci de cohérence dans le choix des notations.

Pour la deuxième manche, comme pour la première, ils écrivent les résultats sous forme de paquets de 9 ; avec ces écritures, ils comparent les résultats des deux manches pour une même équipe, et d'une équipe à l'autre ; enfin, ils calculent toutes les différences d'une équipe à l'autre, au cours d'une même manche.

Le problème du groupement de second ordre s'est posé pour les totaux, car certains dépassaient la centaine.

Tous ces résultats sont transcrits, trouvés ou retrouvés sur graphique. Quelques remarques des enfants :

— il y a des équipes ex-aequo qui n'étaient ex-aequo à aucune manche
— l'équipe gagnante à la 1ère manche n'est pas sûre de gagner au total
— celui qui a le plus de points n'est peut-être dans aucune équipe gagnante.

Au cours des différentes phases du jeu, le domaine des nombres connus des enfants, et plus particulièrement ceux sur lesquels ils savent calculer, s'est considérablement étendu. Dans la phase qui suit, la maîtresse cherche à tester les acquisitions des enfants.

II.2.5. Comparaison avec les résultats d'une autre classe

La maîtresse présente aux enfants les scores imaginaires d'une classe voisine ; le total de chaque équipe est communiqué en écriture décimale. Pour comparer ces résultats à leurs propres scores, les enfants utilisent deux méthodes différentes.

a. Certains cherchent le nombre de paquets de 9 réalisés dans chacun des scores.

Pour cela, ils se servent en général du graphique. Les résultats ainsi trouvés sont vérifiés par le calcul.

Ces enfants restent attachés à une stratégie déjà éprouvée, malgré les difficultés qu'elle engendre dans cette nouvelle situation.

b. D'autres exploitent directement les écritures données, ce qui est techniquement beaucoup plus simple.

La façon dont les scores imaginaires ont été communiqués aux élèves (scores globaux, écritures décimales), provoque une confrontation fructueuse des deux méthodes. Cela n'aurait probablement pas été le cas si l'on avait transmis le tableau des scores partiels.

II.3 Jeu par équipe en vue de réaliser un score fixé à l'avance.

II.3.1. Faire 18 points

a) Règle du jeu : 4 joueurs par équipe ; 1 lancer chacun ; l'équipe qui marque $\boxed{18}$ gagne.

Nous avions choisi un jeu à 18 (et non pas un nombre plus grand) pour que la recherche d'une stratégie adaptée à ce nouveau problème ne soit pas gênée par des difficultés de calcul.

b) Prévisions de jeu :

Avant le jeu, les enfants prévoient des manières de réaliser 18.

Les enfants ont tout de suite vu les relations entre 9 et 18, entre 3, 6, 9 et 18, ce qui leur a permis de prévoir des scores.

Exemple de prévisions :

9 9 0 0
9 3 3 3
9 6 3 0

c) Les réalisations :

Equipe de Bastien	9 9 0 0
Equipe de Grégoire	6 9 3 0
Equipe d'Olivia	6 0 0 9
Equipe d'Isabelle	6 3 6 6
Equipe de Gilles	6 3 3 0
Equipe de Mathieu	3 0 6 6
Equipe de Kamel	9 6 3 0

Les deux premiers joueurs cherchent à réaliser 9, les 2 autres joueurs ajustent pour réaliser 18.

Equipe Bastien : pour nous, ça a été facile, les 2 derniers ont fait exprès de faire 0.

Equipe Grégoire : après Grégoire et Coralie, on a réfléchi, il manquait 3. Eric a fait 3 et Hélène a fait exprès de faire 0.

Equipe Isabelle : je devais faire 3, j'ai fait 6, alors on a 21. On a perdu.

La maladresse semble avoir empêché certaines équipes de réaliser le contrat. C'est ce que les enfants expliquent au cours de la discussion collective qui suit le jeu. En tout cas, cette discussion permet à tous de prendre conscience d'une stratégie gagnante comme le prouve leur comportement au cours d'une deuxième partie.

Dans l'élaboration de la stratégie, l'habileté est prise en compte comme paramètre déterminant : les enfants établissent un ordre sur les joueurs en fonction de l'habileté.

II.3.2. Faire 27 points

Dans un autre C.P. où le nombre à atteindre était 27 en 6 coups, les enfants ont repéré tout de suite que 27, c'était 3 paquets de 9 et ont essayé de réaliser des 9, éventuellement en faisant des "6 et 3". Mais les enfants d'une équipe ont été déroutés par la réalisation de quatre 6, ce qui sortait de leurs prévisions ; ils ont continué à jouer et ont fait encore deux 6.

On peut penser que ces enfants ne calculaient pas assez bien de tête pour totaliser les quatre 6 et comparer à 27 et qu'ils ne maîtrisaient pas assez bien la transformation de 6 + 6 en 9 + 3 pour retrouver leurs paquets de 9 et prévoir le dernier coup.

II.3.3. Faire 50 points

Cible 3 -- 6 — 9 ; les enfants sont par équipes de 4 ; 3 lancers chacun. L'équipe qui a 50 a gagné.

La maîtresse, par le choix de cette règle (score élevé et impossible à atteindre), oriente la recherche vers les questions d'écart et d'approximation.

Les enfants jouent et dépassent presque tous largement 50.

Exemples de scores :

Equipe de Franck :	Equipe de Mathieu :	Equipe de Bastien :
9 6 6 6	3 9 3 3	3 6 6 9
6 6 9 0	6 9 3 3	0 9 6 6
6 6 6 9	6 3 3 0	6 0 0 3

Il semble que les enfants n'aient pas transposé à 50 la stratégie élaborée pour 18 ; 50 leur a paru un grand nombre et ils ont cherché à faire beaucoup de points.

Au cours d'une séance collective, les élèves calculent le score de chaque équipe, ligne par ligne. Quand la classe a fini le calcul des deux premières lignes (27 et 21) de l'équipe de Franck, la maîtresse demande à cette équipe :

— Qu'avez-vous fait après avoir lancé deux fois ? Saviez-vous combien il vous manquait ?
— Non.
— Vous étiez-vous donné une consigne ?
— Non ... Faire des 9".

A ce moment les autres enfants de la classe réagissent : "Il fallait chercher combien il leur manquait, il fallait compter : 27 + 21 = 48".

La maîtresse : "Combien il fallait ?"

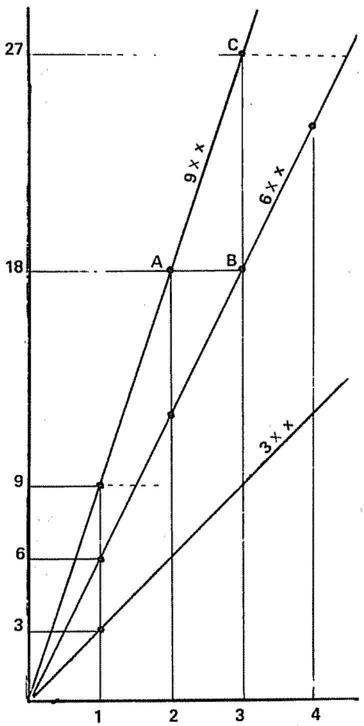
Les enfants : "2, mais on ne pouvait pas, le mieux, c'était de faire 3".

Il est clair que l'équipe de Franck n'avait encore aucune stratégie au moment de la discussion, mais qu'un certain nombre d'enfants de la classe avait commencé à en avoir l'idée au cours du calcul.

Et c'est au cours de la discussion et du calcul des résultats de chaque équipe que les enfants prennent peu à peu conscience de l'existence d'une stratégie leur permettant de se rapprocher au mieux de 50

A partir de scores effectivement réalisés (51, 18, 45), ils en imaginent d'autres qu'ils pourraient réaliser (36, 39, 48), par addition de 2 nombres atteints, ou d'un nombre atteint et d'un multiple de 3, et ils se persuadent qu'ils ne peuvent pas réaliser un nombre de points qui diffère de 1 ou 2 d'un nombre qu'on peut atteindre.

II.3.4. Par la suite, les élèves ont étudié les scores possibles et impossibles avec la cible 3,6,9. Pour cela, ils se sont servi des représentations graphiques des multiples de 3, 6 et 9 jusqu'à 60 environ.



Les graphiques ont suscité des remarques sur :

- les multiples de 9 et les multiples de 6 ;
- les multiples de 9 et les multiples de 3. etc.

Ainsi, pour 18, le point A (voir figure) de l'alignement $y = 9 \times x$ montre que 18 est un multiple de 9 ; en suivant l'horizontale passant par A, on rencontre B sur l'alignement $y = 6 \times x$ qui montre que 18 est aussi un multiple de 6.

Par contre, pour 27, l'horizontale qui passe par C ne rencontre pas de points de l'alignement $y = 6 \times x$.

D. SUR LE THEME DU RECTANGLE

Voici deux séries d'activités menées dans deux classes de C.E. différentes. Pour une classe comme pour l'autre, le thème central a été *"le rectangle"*.

I. Chronique commentée de la classe A

Les élèves de ce C.E. veulent réaliser un plan de classe et décident que LA CLASSE SERA REPRESENTEE PAR UN RECTANGLE.

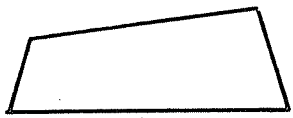
I.1. Vers une définition et une bonne connaissance du rectangle.

Tout au long de cette phase, la maîtresse va pousser les élèves à expliciter leurs intuitions, et à préciser ce qu'est un rectangle (comment il se différencie d'un quadrilatère quelconque, d'un parallélogramme en général, ...) par un ajustement progressif.

La maîtresse : Comment est un rectangle ?

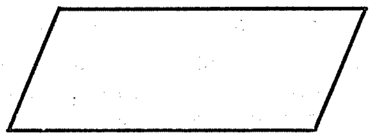
Elèves — Un rectangle, ça a deux grands côtés et deux petits côtés.

Dessin de la maîtresse :



Elèves — Les deux grands côtés ont la même longueur, et les deux petits aussi.

Nouveau dessin de la maîtresse :



Elèves — Ca, c'est un rectangle déformé. Il faut que les côtés soient "comme ça" (geste à l'appui).

On construit alors un parallélogramme en meccano ; il peut se déformer. On repère le passage à la forme rectangle que l'on cherche à caractériser.

Un élève se souvient :

— C'est des angles droits.

L'année précédente, les élèves avaient fabriqué des équerres en papier, et abordé ainsi les notions d'angle droit et de droites perpendiculaires.

Les élèves sont alors amenés à formuler leurs découvertes et à valider cette formulation ; ils transmettent à la classe voisine (C.M.) le message suivant :

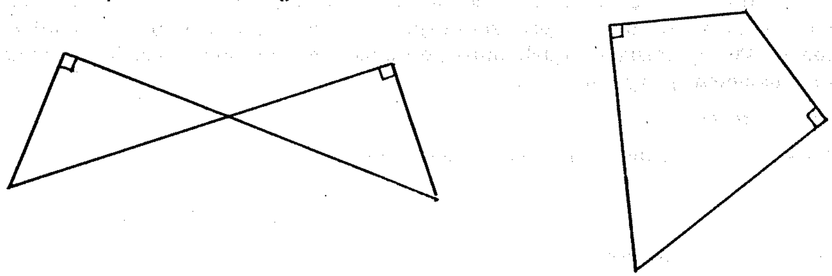
"Construire un quadrilatère qui a deux grands côtés de même longueur, deux petits côtés de même longueur, et quatre angles droits".

La classe voisine rapporte un dessin effectué à la règle graduée et à l'équerre, accompagné du message suivant :

"On a obtenu un rectangle.
On a tracé un segment de 10 cm ; à un bout, on a tracé un angle droit.
On a mesuré le petit côté (5 cm)".

Les délégués affirment de plus que le seul moyen de tracer des côtés de la même longueur était de tracer trois autres angles droits.

Cette remarque est utilisée par les élèves du C.E. pour construire un rectangle. Elle est efficace. Les figures suivantes comportent deux paires de côtés de même longueur et seulement deux angles droits et elles sont conformes au message :



Il n'est donc pas nécessaire de tracer trois autres angles droits pour tracer des côtés de la même longueur. Cependant, l'affirmation des élèves devient vraie si l'on se restreint aux parallélogrammes. Cette restriction est implicite pour les élèves des deux classes.

I.2. Exploitation de la règle graduée

C'est la première fois cette année que la règle graduée est utilisée comme instrument de mesure. A la suite des difficultés rencontrées par les enfants, une séance est consacrée à son maniement.

Comment tracer un segment mesurant 5 cm ?

— Pour les graduations, on compte entre zéro et cinq.
— Moi, j'ai compté entre dix et quinze.

D'autres idées viennent alors :

— Entre onze et seize.
— Entre huit et treize.

Les élèves justifient la conservation des écarts par translation en donnant les écritures additives correspondantes. La séance suivante est consacrée à la comparaison d'écritures additives et au calcul mental :

$6 + 5 = 11$
$16 + 5 = 21$
$26 + 5 = 31$

puis oralement

$36 + 5 = ?$
$76 + 5 = ?$
$\vdots$
$106 + 5 = ?$

I.3. Approche de la notion d'échelle.

On retourne au plan de la classe :
Sur un grand carton, les élèves dessinent deux demi-droites perpendiculaires, de même origine.

I.3.1. Mais quelles longueurs choisir pour les côtés du rectangle ?

— Des rectangles peuvent avoir plusieurs formes, ils peuvent être larges ou étroits.

— On ne représente pas la classe en vraie grandeur.

Après bien des hésitations, les enfants découpent une bande de carton et décident que "1 mètre sera représenté par cette bande" (elle mesure 9 cm, mais ils ne le savent pas).

Le contour de la classe est alors réalisé grâce à l'utilisation de la bande de carton.

Pour faciliter la représentation, on arrondit les mesures : 6,43 mètres est arrondi à 6 mètres et 1 demi-mètre.
Il faut ensuite représenter le mobilier.

Oubliant que la bande de carton est là pour *représenter* les longueurs "à bonne échelle", les élèves l'utilisent pour *mesurer* le mobilier. Ils trouvent alors de très grands nombres.

La maîtresse laisse faire.

— Les meubles ne pourront pas tenir sur le plan !

Très vite, quelques enfants réalisent que la bande de carton *représente* un mètre sur le plan. On reprend les mesures du mobilier avec le mètre, mais il faut trouver un moyen de représenter des "morceaux de mètres".

I.3.2. Approche de quelques fractions.

Pour représenter un demi-mètre, on a décidé d'utiliser une moitié de bande. Mais cela ne résout pas tout :

— Comment représenter 75 cm ?
— 75 cm, c'est la moitié d'un mètre, plus la moitié de la moitié.
— Trois quarts !
— Qu'est-ce que ça veut dire ?

On reprend la bande de carton : pour représenter des moitiés de mètre et des quarts de mètre, il faut fabriquer une bande analogue que l'on coupe au milieu. On partage encore "en deux" un des morceaux ainsi obtenus.

Il est alors possible de représenter un demi-mètre, un quart de mètre, trois quarts de mètre.

I.4. Tableau de correspondance. Multiples de neuf.

Afin de faciliter les reports de longueurs, d'autres bandes ont été réalisées dans des cartons de couleurs différentes, en utilisant comme étalons les "morceaux de bandes" découpés précédemment. On obtient un tableau de correspondances.

un mètre . . . . une bande rouge, notée (r)
un demi-mètre . . . . une bande jaune, notée (j)
un quart de mètre . . . . une bande bleue, notée (b)

Puis la bande rouge est mesurée : on trouve 9 cm. Les élèves décident alors de dresser le tableau suivant :

Vraie longueur en mètres	1	un demi	2	3	...	1 et un demi	2 et un demi	...
Bandes	1 r	1 j	2 r	3 r	...	1 r et 1 j	2 r et 1 j	...
Longueur sur le plan, en cm	9	4 et un demi	18	27	...	13 et un demi	22 et un demi	...

Par l'observation de la dernière ligne, la classe constate que "pour passer d'une colonne à la suivante, on ajoute 9 à chaque fois".

Les élèves comptent alors de 9 en 9. On écrit au tableau :

9
18
27
.
.
.

puis on observe :

— pour les dizaines, c'est 0, 1, 2, ..., pour les unités, c'est 9, 8, 7, ...

On utilise alors cette remarque pour faire un peu de calcul mental. Un enfant explique :

— Ajouter 9, c'est ajouter 10 et retrancher 1.

I.5. Prolongements

Après la réalisation définitive du plan de la classe, d'autres tableaux de correspondance sont encore construits, ce qui amène à parler de nombres pairs et de nombres impairs, à travailler sur des ensembles de multiples d'un nombre, sur des opérateurs multiplicatifs ...

I.5.1. Représentation graphique :

En particulier, un travail fructueux a pour point de départ l'étude des bandes de couleur construites précédemment : il s'agit de représenter graphiquement la correspondance entre le nombre de bandes d'une couleur donnée et la longueur totale de ces bandes mises bout à bout. Ainsi, par exemple, l'abscisse d'un point est le nombre de bandes rouges, son ordonnée, le nombre correspondant de centimètres :

A(4 ; 36) ; B(5 ; 45) ; C(2 ; 18) . . .

A l'aide de la règle, on constate que tous ces points sont alignés. Cette propriété est alors matérialisée en traçant, au crayon, la droite passant par ces points.

I.5.2. Des exercices de lecture sont faits à l'aide des ces droites. Ce type de représentation graphique est utilisé pour résoudre quelques problèmes relevant du modèle multiplicatif par le tracé des "droites de multiplication", représentatives de fonctions telles que :

$$D_5 : x \longmapsto 5 \times x \text{ , } D_9 : x \longmapsto 9 \times x \text{ , } \ldots$$

II. Chronique commentée de la classe B

II.1 Construire un rectangle

Au moment où l'on propose cette activité, les enfants ont eu de nombreuses occasions de manipuler des rectangles. Ils ont déjà éprouvé le besoin de disposer d'une même unité de longueur pour transmettre des dimensions.

Consigne :

"Construire un rectangle sur une feuille blanche. Envoyer un message sans dessin à un camarade, pour qu'il reproduise le même rectangle en se servant d'un crayon et d'une règle graduée".

Les enfants utilisent et formulent très vite l'égalité des mesures des côtés opposés. Pour construire un angle droit, soit ils dessinent ses côtés parallèlement aux bords de la feuille, soit ils utilisent un coin droit de la règle.

Exemples de messages :

— Les dimensions de mon rectangle sont 5 et 8.
— La mesure verticale est 5 cm 2 mm,
la mesure horizontale est 10 cm 5 mm.
— (3,8) et (2,11).

Ce dernier message n'est pas compris ; le récepteur demande : "Est-ce que je dessine deux rectangles ?" L'émetteur répond : "Tu pars de 3 sur la règle, tu vas jusqu'à 8 pour la mesure verticale" (de même pour l'autre couple).

Le souci de cet élève était de donner la place du rectangle dans la feuille mais d'autres messages du même type n'avaient pas cette justification. Ils donnent l'occasion de préciser la consigne : la position du rectangle dans la feuille n'a pas d'importance, seules comptent la forme et la taille.

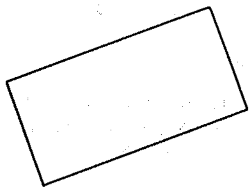
La règle graduée intervient dans les deux classes. Dans les deux classes, cela amène à formuler le fait que les écarts sont invariants par translation. Il semble donc qu'indépendamment du contexte de départ, et dès qu'il y a utilisation de la règle graduée, des questions relatives à la soustraction et aux écarts se posent. C'est à chaque enseignant d'exploiter la situation (Cf. Chapitre 2, C ; la soustraction).

Le travail reprend ; on peut constater que le contenu des messages est purement numérique. Les élèves interprètent de façon restrictive la consigne :

"Parmi les rectangles que je pourrais dessiner, lequel choisir ?". Cela se traduit dans leurs messages par la simple transmission des dimensions, sans la moindre description géométrique.

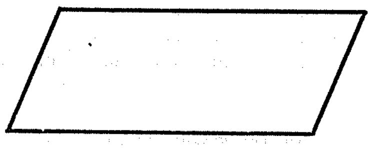
La discussion collective porte sur la pertinence, la clarté et la concision du message, et sur la possibilité pour ce message d'être compris par quelqu'un d'extérieur à la classe.

La maîtresse soulève la question de la nécessité (ou non) d'un côté vertical et d'un côté horizontal ; pour cela, elle dessine au tableau un rectangle "penché" :



Les élèves fournissent deux arguments dans leurs réponses : "Il est bon ; si tu le penches, c'est droit". "Les côtés opposés ont même longueur".

En réponse à ce dernier, la maîtresse dessine un parallélogramme :



Réponse : "Non, ce n'est pas un rectangle ; les côtés ne sont pas droits". Nouvel argument d'un enfant : "Dans le rectangle, il y a un miroir, le côté d'en haut se reflète sur celui d'en bas ; pas sur l'autre figure. Si tu plies, ça ne vient pas l'un sur l'autre". Un autre enfant renforce l'argument : "Il y a un autre miroir. Il passe par les milieux".

Ces enfants font référence à des activités antérieures ; d'autres enfants ayant compris cette référence expriment à leur tour les mêmes idées en utilisant les termes "symétrie" et "côtés symétriques".

II.2. Utilisation de la symétrie

L'orientation de cette séquence n'a été déterminée qu'après la réalisation de la première, pour tenir compte des arguments de symétrie avancés par certains enfants.

La maîtresse propose de construire un rectangle sur une feuille de papier blanc à bords déchirés, arrondis irrégulièrement.

"Vérifier qu'on a bien construit un rectangle, puis envoyer un message à un camarade pour qu'il reproduise le même rectangle".

II.2.1. Procédures de construction

Les enfants utilisent trois procédures différentes.

a) Utilisation de la symétrie

- Première méthode : tracé d'un trait ; glissement de la règle graduée maintenue parallèle au trait ; tracé d'un deuxième trait ; rectangle terminé "à l'oeil" ; pliage mettant en coïncidence les deux premiers traits dessinés ; ajustement.

La symétrie est utilisée ici comme moyen de vérification.

- Deuxième méthode : tracé d'un trait (fig. 1) ; pliage de manière à faire coïncider les deux extrémités du trait, ce qui permet de tracer un axe de symétrie (fig. 2) ; nouveau pliage de façon à faire coïncider deux parties de cet axe de symétrie, et pointage de deux nouveaux sommets par transparence (fig. 3) ; tracé des autres côtés (fig. 4).

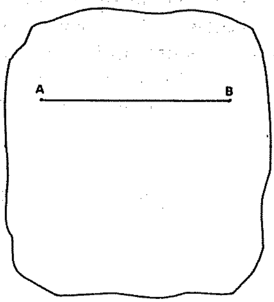


figure 1

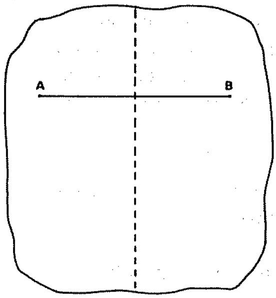


figure 2

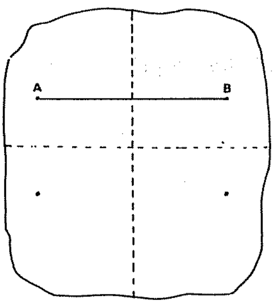


figure 3

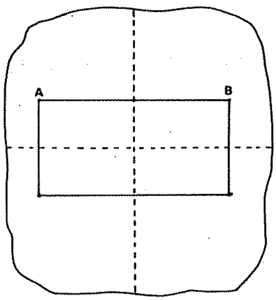


figure 4

b) Adaptation de la méthode habituelle.

Le morceau de papier est replacé dans un grand rectangle : la table ; le rectangle est construit — à vue d'oeil — par parallélisme aux bords de la table.

c) Utilisation de l'angle droit.

Un coin droit de la règle graduée permet de dessiner deux côtés ; le dessin est terminé par pliage.

II.2.2. Vérification. Peu d'enfants ont utilisé la référence à la symétrie. Dans tous les cas, ils ont vérifié l'égalité des mesures des côtés opposés, et ont éventuellement ajusté en réutilisant le moyen (coin droit ou axe de symétrie selon le cas) dont ils s'étaient servi à la construction.

II.2.3. Messages :

Comme dans la première séquence, les messages ont comporté essentiellement les dimensions des rectangles.

La maîtresse a alors introduit la contrainte suivante : écrire un message en supposant que le camarade ne sait pas ce qu'est un rectangle. "Vous devez dire tout ce que vous avez fait pour construire votre rectangle".

La rédaction des nouveaux messages a posé des problèmes à tous. Ceux qui font référence au pliage paraissent plus à l'aise (mais ce sont aussi ceux qui s'expriment avec le plus d'aisance d'une manière habituelle).

Plusieurs enfants redemandent du papier, et dessinent leur rectangle en utilisant les symétries par pliage. Les messages qu'ils écrivent alors sont en général soit mal formulés, soit mal décodés. Les demandes successives de précision de la part du récepteur leur permettent d'aboutir à une formulation orale de leur construction ; ils ne sont pas capables d'écrire cette formulation.

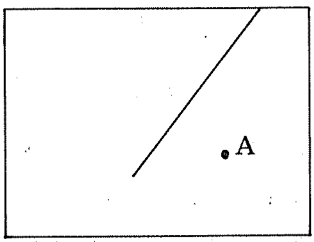
II.2.4. Bilan en séance collective :

Chaque enfant décrit brièvement sa construction. La référence à la symétrie est massive.

II.3. Importance de la symétrie

L'organisation de cette séquence n'a été prévue qu'après le déroulement de la séquence précédente, dans le but d'évaluer l'importance accordée par les élèves à la notion de symétrie dans la caractérisation des rectangles.

II.3.1. On distribue aux élèves une feuille polycopiée sur laquelle sont placés une droite et un point A.



Consigne :

Construire un rectangle admettant la droite comme axe de symétrie, et le point A comme sommet.

Envoyer un message à un camarade pour qu'il reproduise le même rectangle.

Les élèves placent rapidement par pliage le symétrique A_1 du point A par rapport à la droite, puis se posent le problème du choix d'un autre sommet.

II.3.2. Deux méthodes de construction sont utilisées :

- On place B tel que AB soit parallèle à la droite (cela par glissement de la règle (Cf. première séquence).

- On choisit un autre axe de symétrie (par un deuxième pliage qui laisse globalement invariant le premier axe).

II.3.3. Collectivement, l'analyse de la première méthode de construction fait prendre conscience de la position des axes par rapport aux côtés, et celle de la deuxième méthode, de l'existence des deux symétries axiales du rectangle.

La maîtresse pose une question : "Y a-t-il un ou plusieurs rectangles solutions ?". Les élèves peuvent y répondre grâce à leurs dessins, ce qu'ils font effectivement en superposant les rectangles. La superposition fait apparaître un seule dimension commune ; les enfants prennent alors conscience de l'arbitraire du deuxième pliage.

Cette dernière discussion ne s'est référée qu'à la deuxième méthode de construction. La classe ayant ainsi obtenu des résultats intéressants, la maîtresse, au vu du temps passé, a jugé bon de ne pas relancer la discussion sur la première méthode.

II.3.4. Pour décrire plus complètement la situation, des élèves proposent de mesurer cette dimension commune. Certains mesurent à la règle la distance AA_1 ; d'autres doublent la distance du point A à l'axe — distance qu'ils formulent en terme de "plus court chemin" —. La notion de perpendiculaire est alors explicitée.

II.3.5. Par la suite, les enfants construisent des angles droits par double pliage. En outre, ils superposent les quatre sommets d'un rectangle en pliant deux fois, ou, suivant une démarche inverse, construisent un rectangle en piquant avec une aiguille après double pliage, pour obtenir les quatre sommets.

III. Bilan

Le problème posé au départ et le contexte dans lequel il s'inscrit orientent la démarche et les notions abordées.

- Pour la classe A, la volonté de construire un rectangle "de même forme que la classe" amène les élèves, par l'utilisation d'une échelle, à un travail essentiellement numérique. Cependant, en début d'activité, la question de la maîtresse "Qu'est-ce qu'un rectangle ?" les a conduits à une analyse géométrique de cette figure.

- Pour la classe B, la modification des contraintes sur le message permet d'orienter l'activité vers le domaine géométrique alors que d'emblée les enfants s'étaient placés dans le domaine numérique.

la collection MOTS

L'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public a entrepris de publier une série de brochures, intitulées MOTS, contenant des réflexions sur quelques mots-clés utilisés en mathématique à l'Ecole Elémentaire :

égalité ; exemple et contre-exemple ; couple ; relation binaire ; nombre naturel ; entiers et rationnels ; nombre décimal, nombre à virgule ; fraction ; ensembles de nombres (Mots I, brochure 1974) ;

représentations graphiques ; application, fonction, bijection ; partition équivalence ; partages ; divisibilité ; division euclidienne ; division (Mots II, brochure 1975) ;

numération ; opération et loi de composition ; propriétés des lois de composition ; congruences ; ordre ; préordre ; propriétés des relations binaires dans un ensemble ; dictionnaires, naturels, décimaux et ordres (Mots III, brochure 1976).

Chaque rubrique est détachable ; les feuilles, de format 15 X 21, sont perforées.

MOTS est une oeuvre collective ; l'équipe de rédaction, bénévole, constituée d'instituteurs, IDEN, professeurs (d'Ecole Normale, du Second Degré, du Supérieur) soumet ses projets à de nombreux instituteurs ; leurs avis lui sont précieux, surtout quand ils émanent de bacheliers littéraires qui n'ont pas eu l'occasion d'activité mathématique depuis leur sortie du lycée ou de l'école normale.

Sans être un manuel de mathématique, ni un lexique, MOTS permet au lecteur, à propos du vocabulaire rencontré dans les manuels scolaires ou les documents de formation permanente, de faire le point sur son évolution, sur les concepts et les idées qui s'y rattachent, et sur les notations utilisées.

Ces brochures, qui s'adressent aux enseignants, non aux élèves, sont vendues par l'APMEP aux prix suivants :

MOTS I	: 100 pages	- 6 F	(avec port : 9 F)
MOTS II	: 108 pages	- 6 F	(avec port : 9 F)
MOTS III	: 136 pages	- 6 F	(avec port : 9 F)
MOTS IV	: 152 pages	- 7 F	(avec port : 11 F)

CHAPITRE 2

ACTIVITES NUMERIQUES

Dans la première partie de ce chapitre, nous présentons quelques remarques inspirées par la lecture des textes en vigueur (Arrêté du 7-7-1978).

Dans les parties suivantes, nous présentons plus longuement des canevas d'activité issus de travaux expérimentaux menés dans les classes.

Plan du chapitre

A. COMMENTAIRES SUR LES INSTRUCTIONS DU 7-7-1978

I. Numération

I.1. *"Maîtriser l'usage et le mode de fonctionnement de la numération écrite"*, c'est être capable de travailler à partir de l'écriture des nombres sans être obligé de recourir à des manipulations ou à des représentations. A la fin du C.P., les enfants commencent à maîtriser certains nombres. Cette maîtrise leur permet, par exemple, de composer des sommes ou de les réduire en n'utilisant que les écritures lorsque les nombres figurant dans ces sommes sont suffisamment petits. Mais si ces nombres sont plus grands ou si les sommes comportent plus de termes, ils ne peuvent y parvenir sans recourir à des manipulations ou à des représentations.

Il importe qu'au début du C.E.1, le maître réactive et consolide les connaissances du C.P. sur ces "petits" nombres par l'étude de situations variées (voir jeux de cible* ; déplacement d'un train de gare en gare, les gares étant numérotées** ; calcul mental***).

Ensuite, les activités proposées au C.E.1 vont viser à étendre le champ des nombres que l'enfant saura utiliser sans recours à une manipulation ou à

* page 12
** page 71
*** page 77

une représentation. L'expérience montre que les enfants ne vont pas automatiquement étendre aux nombres plus grands les propriétés des nombres plus petits ; il en va de même pour les techniques et les savoir-faire qu'ils avaient acquis sur les nombres. Il leur faudra refaire (en accéléré, certes) une démarche analogue à celle du C.P. Dans ce but, on leur fera coder, comparer des collections importantes d'objets (plusieurs centaines), fabriquer des collections ayant un nombre d'objets donné ... Comme au C.P., il ne faudra pas omettre de faire traduire les diverses activités par des écritures et, inversement, de faire passer des écritures et transformations d'écritures aux collections correspondantes.

Programmes et instructions ne préconisent ni n'interdisent l'utilisation de bases autres que *dix*. Cependant, il va de soi que l'étude d'un système de numération de base autre que *dix* n'offre aucun intérêt si elle n'a pas de raison précise. On peut les utiliser en particulier pour :

— mettre en évidence la nécessité de réitérer le processus de groupement ;

— travailler sur des écritures à plusieurs chiffres à partir de manipulations d'un nombre réduit d'objets (tout en n'oubliant pas qu'un tel travail ne permet pas d'étendre le champ des nombres déjà connus, même si leur écriture comprend plus de chiffres).

I.2. Comparaison des nombres

Au C.P., les enfants ont pris conscience de l'existence d'un ordre sur un certain domaine de nombres. Suivant la taille de ces nombres, ils les comparent soit en utilisant leurs écritures et la suite des nombres (la comptine), soit, pour les nombres plus grands, en revenant à la comparaison paquet à paquet.

Il s'agit au C.E. d'aller au-delà : d'une part, pouvoir comparer des nombres plus grands, et, d'autre part, arriver à le faire uniquement sur les écritures dans un système de numération donné.

Les procédures de comparaison sont mises en oeuvre progressivement, au cours d'activités conduisant au codage et au décodage des nombres que l'on souhaite ordonner. Elles sont motivées par un souci d'économie (elles permettent d'éviter le recours à la manipulation).

De nombreux exemples peuvent être utilisés pour amener les enfants à visualiser la succession des nombres naturels : représentation d'une corde à noeuds (les noeuds étant régulièrement espacés ou non), de files d'élèves, de bornes jalonnant une route, ruban de nombres....

I.3. Numération orale

Sans vouloir expliciter complètement les règles de la numération orale, il semble intéressant d'en faire percevoir et utiliser progressivement certaines. On pourra, par exemple, se contenter au début du C.E.1 des aspects additifs (dix-sept : $10 + 7$; quarante-trois : $40 + 3$; soixante-dix-neuf : $60 + 10 + 9$) puis, en fin de C.E.1 ou en C.E.2, introduire les aspects multiplicatifs (quatre-vingts : 4×20 ; trois cents : 3×100) puis la combinaison des deux aspects (quatre-vingt-treize : $(4 \times 20) + 13$, trois-cent-dix-sept : $(3 \times 100) + 10 + 7$).

II. Ecritures additives, multiplicatives et soustractives

II.1. Ecritures multiplicatives

Les instructions pédagogiques semblent préconiser l'introduction du signe "X" dans le cas de grilles rectangulaires. Une telle introduction est détaillée dans l'annexe "Multiplication".

II.2. Ecritures soustractives

Les instructions pédagogiques semblent laisser le choix pour l'introduction du signe " - " entre le cas d'un ensemble complémentaire et celui de l'écart entre deux nombres. Les autres types de situations soustractives ne sont pas mentionnés. Le lecteur trouvera dans C : "La soustraction" des informations complémentaires et une brève analyse des difficultés posées par l'enseignement de la soustraction.

II.3. Ecritures exponentielles

Il nous semble inutile, voire néfaste, d'introduire des notations nouvelles si elles ne correspondent pas à un besoin réel. Or, la taille des nombres habituellement utilisés au C.E. ne justifie pas l'introduction d'une notation exponentielle pour les puissances. C'est plutôt au C.M. que cette notation pourrait être introduite lorsque l'on manipule de grands nombres (supérieurs au million), par exemple à propos de distances astronomiques.

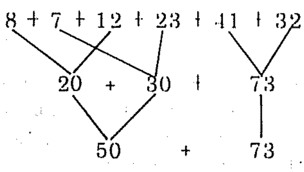
II.4. Transformations d'écritures

Il sera effectivement intéressant de visualiser, au moyen de représentations et de schémas divers, les transformations sur les écritures. Par exemple la succession de transformations conduisant aux égalités suivantes :

$$8 + 7 + 12 + 23 + 41 + 32 = 20 + 30 + 73$$

$$20 + 30 + 73 = 50 + 73$$

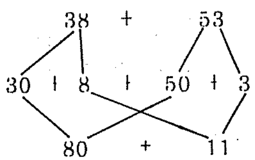
peut être visualisée au moyen d'un arbre de calcul :



De même pour :

$$38 + 53 = 30 + 8 + 50 + 3$$

$$30 + 8 + 50 + 3 = 80 + 11$$



Mais une telle représentation semble moins adaptée à la succession de transformations conduisant aux égalités suivantes :

$$
\begin{aligned}
123 - 78 &= 125 - 80 \\
125 - 80 &= 145 - 100 \\
145 - 100 &= 45
\end{aligned}
$$

Ici, le fait important dans les transformations est que l'on ajoute ou retranche le même nombre aux deux termes de la différence. Et cela sera mieux visualisé par le schéma suivant :

$$
\begin{array}{rcccl}
 & 123 & - & 78 & \\
\text{aj } 2 & \downarrow & & \downarrow & \text{aj } 2 \\
 & 125 & - & 80 & \\
\text{aj } 20 & \downarrow & & \downarrow & \text{aj } 20 \\
 & 145 & - & 100 & \\
\text{r } 100 & \downarrow & & \downarrow & \text{r } 100 \\
 & 45 & & 0 &
\end{array}
$$

Mais ce n'est pas cette visualisation, si commode soit-elle, qui convaincra les élèves du fait que, par ce type de transformations, la différence n'est pas modifiée. Cette propriété très importante de la soustraction est d'un apprentissage difficile et ce n'est pas parce qu'elle sera mise en évidence dans une situation ou sur le plan purement formel qu'elle sera réinvestie automatiquement par les élèves dans d'autres situations.

Ces exercices de transformations et de comparaisons d'écritures peuvent intervenir dans l'étude de situations variées, et il ne serait pas souhaitable qu'ils soient présentés uniquement de manière formelle.

Voici trois exemples de situations ; il en existe d'autres et, dans chacun de ces exemples, les activités sont susceptibles de multiples variantes :

II.4.1. Jeux de cibles :

Une cible est dessinée sur le sol. Des nombres sont affectés aux différentes zones. Les enfants jouent par équipes puis comparent les scores qu'ils ont réalisés. Ils peuvent aussi comparer les résultats des différentes équipes, les classer, chercher à obtenir ou approcher un total donné à l'avance... (Voir ch. 1, C, page 12).

II.4.2. Jeu des envahisseurs :

Les enfants jouent par équipes ou l'un contre l'autre. Chaque équipe reçoit ou choisit 5 nombres et cherche à obtenir, en les combinant à l'aide d'opérations, le plus possible de nombres nouveaux. (Prolongement possible : comment choisir ces 5 nombres pour obtenir une suite de naturels comportant le moins de trous possible)

Bibliographie : Cahiers élémentaires nos 10 et 12 ; I.R.E.M. de Bordeaux.

II.4.3. Le compte est bon :

Un nombre est donné. En combinant des nombres parmi les 7 que le maître propose, à l'aide d'opérations, les enfants cherchent à obtenir ou à approcher le plus possible le nombre donné.

Bibliographie : "Recherche à partir d'un jeu télévisé". Elem-Math 1, brochure de l'A.P.M.E.P.

II.5. Répertoire multiplicatif.

On trouve dans les Instructions complémentaires :

« $0 \times 1 = 0$; $0 \times 3 = 0$; $0 \times 8 = 0$;......
$0 + 3 = 3$; $0 + 4 = 4$; $0 + 5 = 5$;......
$1 \times 2 = 2$; $1 \times 3 = 3$; $1 \times 8 = 8$;......
(Rôles remarquables du 0 et du 1). »

Dans les égalités proposées, le "0" et le "1" occupent toujours la première place ; elles sont, de plus, toujours écrites dans le même sens. Ces exemples auraient pu être présentés de manière plus variée ; exemple :

$0 \times 1 = 0$	$1 \times 0 = 0$
$0 + 3 = 3$	$4 = 4 + 0$
$1 \times 2 = 2$	$3 \times 1 = 3$

Mais ces remarques ne sont pas fondamentales. Les phrases suivantes appellent davantage de commentaires.

Dès l'obtention des premières égalités, un effort de mémorisation sera demandé aux enfants. Il est essentiel qu'ils parviennent à mémoriser rapidement et sûrement les résultats figurant dans les différentes tables de Pythagore.

Ce passage des Instructions semble encourager les maîtres à obliger les enfants à mémoriser systématiquement et mécaniquement "les tables de multiplication", et ce dès le début de l'introduction de la multiplication. On peut se demander quels seront le profit et le coût en temps de ces activités. Il nous semble important que, dans un premier temps, indépendamment de toute obligation de mémorisation, l'enfant élabore des méthodes artisanales lui permettant de retrouver rapidement les produits de nombres petits. Cela en utilisant les propriétés de l'addition, de la soustraction et de la multiplication.

Par exemple :

— à partir de "$3 \times 6 = 18$", il calculera "$6 \times 6 = 2 \times 18$".

— "6×10", c'est 6 paquets de 10, donc 60, d'où "6×9" c'est "$60 - 6$", soit 54.

On peut très bien organiser des activités de calcul rapide sur l'ardoise au cours desquelles les enfants qui ont trouvé un ou plusieurs moyens pour calculer un produit fournissent à ceux qui ont des difficultés des renseignements judicieusement choisis. Par exemple :

pour 6×8, un renseignement pourrait être "$8 \times 5 = 40$"
ou "$6 \times 4 = 24$"

pour 6×10, "c'est 6 paquets de 10".

Et ce n'est que lorsque les enfants auront d'eux-mêmes enrichi leur répertoire au cours des nombreux calculs effectués et qu'ils maîtriseront suffisamment bien ces techniques artisanales leur permettant de retrouver les produits des petits nombres, que l'on pourra envisager raisonnablement une mémorisation plus systématique de ces résultats.

III. Techniques opératoires

Les principales techniques de soustraction sont exposées plus loin * ; de même, la technique de multiplication liée aux grilles rectangulaires est détaillée ci-dessous. Cependant, il existe de nombreuses autres techniques opératoires. Nous en mentionnons quelques-unes, à titre de curiosité, dans H : D'autres techniques opératoires. Le lecteur intéressé pourra se référer à la bibliographie figurant à la fin de la brochure.

IV. Relations numériques

Le choix fait dans les Instructions de se restreindre, en C.E., uniquement aux propriétés des relations numériques liées à l'ordre et aux écarts nous paraît trop limitatif et non justifié. Il nous paraît souhaitable de laisser les enfants manipuler également les propriétés de linéarité en se gardant bien, évidemment, d'en exiger une formulation.

Le choix cité semble motivé par l'importance des propriétés liées aux écarts pour l'étude de la soustraction ; mais cette importance, qui est réelle, ne justifie pas une telle restriction.

Le lecteur trouvera dans G : Relations numériques** quelques situations conduisant à l'étude de relations numériques.

* Voir page 63
** Voir page 95

B. LA MULTIPLICATION

I. Considérations générales

L'enseignement de la multiplication ne se réduit pas à l'introduction du signe "X" dans une situation précise et à l'apprentissage d'une technique opératoire. La démarche suivie dans la plupart des manuels se présente de façon linéaire :

— Introduction du signe "X".

— Apprentissage d'une technique opératoire et en même temps mémorisation du répertoire habituel (tables de multiplication).

— Application du savoir-faire acquis à des situations de dénombrement (tableaux à double entrée), de proportionnalité, etc.

Nous pensons que toute construction se fait plutôt par aller et retour successifs entre les situations et les savoir-faire techniques ; une technique opératoire est, à un moment donné, le fruit d'un équilibre entre un répertoire de résultats et une certaine expérience. Cette technique évolue avec le répertoire (mémorisé ou affiché au tableau) et les compétences en calcul et en numération de l'enfant pour aboutir à une forme stable la plus économique possible.

Si, comme une lecture hâtive des Instructions complémentaires paraît le préconiser, on se lance trop tôt dans l'apprentissage d'une technique opératoire, la construction du concept de multiplication se fera mal ; la tentation sera grande pour l'enfant de se réfugier dans un apprentissage par conditionnement, d'autant plus sécurisant pour lui qu'il répond au désir de performance du maître. Dans ces conditions, les propriétés qui ont servi à la justification de la technique apparaîtront comme tout à fait accessoires. La technique deviendra le seul moyen d'appréhender la multiplication (on voit parfois des enfants du C.M. obligés de poser la multiplication pour calculer 240 X 20). Nous pensons que le fait de demander aux enfants de calculer un grand nombre de produits avant de connaître une technique opératoire élaborée leur permet de progresser plus rapidement dans l'apprentissage de la technique, et de conserver dans l'étude des situations une souplesse qui leur permet d'adapter, à chaque situation particulière, écritures et calculs.

II. Introduction de la multiplication

II.1. La multiplication peut être introduite dans deux types de situations :

— L'étude de la correspondance entre le nombre de bonbons et le prix de ces bonbons fait intervenir l'addition de façon répétée : on aura à payer n fois a francs :

$$a \times n = \underbrace{a + a + \ldots\ldots + a}_{n \text{ fois}}$$

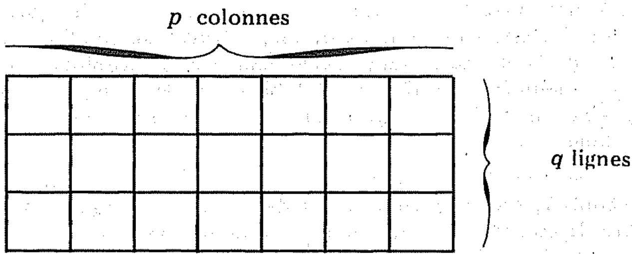
— Le dénombrement des couples que l'on peut obtenir en lançant successivement deux dés :

1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6
2.1	2.2	2.3	2.4	2.5	2.6
3.1	3.2	3.3	3.4	3.5	3.6
4.1	4.2	4.3	4.4	4.5	4.6
5.1	5.2	5.3	5.4	5.5	5.6
6.1	6.2	6.3	6.4	6.5	6.6

6 lignes

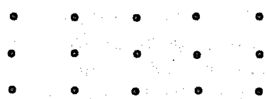
6 colonnes

ou le calcul du nombre de cases d'une grille en fonction du nombre de lignes et du nombre de colonnes :



font jouer le même rôle aux deux nombres donnés (6×6 dans le premier cas ; $p \times q$ dans le second).

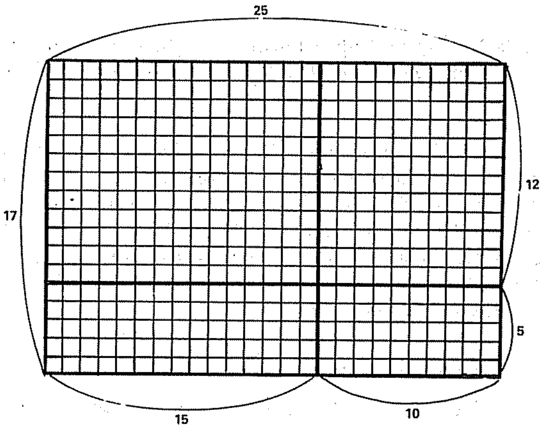
Nota : Au lieu de grilles, on peut utiliser des ensembles de points tels que



obtenus par découpage dans du papier pointé ou par dessin.

II.2. Nous allons essayer d'expliquer pourquoi il nous paraît important que l'introduction du signe $\times$ soit liée aux situations du deuxième type.

- Dans $n \times p$, n et p sont des nombres qui ont exactement le même statut.
- La commutativité est une conséquence immédiate de la définition (comme disent les enfants : "Qu'une grille soit debout ou couchée, elle a toujours le même nombre de cases").
- La distributivité de la multiplication sur l'addition correspond au partage de la grille en grilles partielles, par exemple en quatre parties par un trait vertical et un trait horizontal :



$$17 \times 25 = (5 + 12) \times (15 + 10)$$
$$= (5 \times 15) + (5 \times 10) + (12 \times 15) + (12 \times 10)$$

C'est la base de l'apprentissage de la technique opératoire qui est ainsi visualisée.

- Au contraire, se contenter d'introduire le signe "X" dans le cas de l'addition répétée entraîne les inconvénients suivants :

— Les deux nombres ne jouent pas le même rôle dans $a \times n$; on parle de bonbons et de francs. Seules des expériences nombreuses pourront convaincre les enfants de la commutativité et on peut se demander quel sera le champ de validité d'une telle conviction.

— Si la distributivité à droite est aisément perçue :

$$23 \times 13 = (23 \times 10) + (23 \times 3)$$

il n'en va pas de même de la distributivité à gauche ; il est en particulier difficile de montrer que

$$n \times 0 = 0 \quad \text{et} \quad n \times 1 = n$$

alors que

$$0 \times n = 0 \quad \text{et} \quad 1 \times n = n$$

sont des conséquences immédiates de la définition. Ce qui contribue encore à masquer la commutativité.

— Enfin, l'addition répétée ne peut s'étendre aux décimaux ; en effet, "1,3 fois 2,87" n'a pas de sens.

Remarque 1

Les deux types de situations ne sont pas fondamentalement différents si l'on "oublie" certaines caractéristiques des objets considérés ; toute situation conduisant à une addition répétée peut se représenter sur une grille rectangulaire et réciproquement.

Remarque 2

Rattacher la multiplication à l'étude de grilles ne suppose pas que l'on fasse une étude exhaustive préalable du produit cartésien et de ses propriétés.

Remarque 3

Il est préférable de lire le signe "X" *multiplié par* plutôt que *fois*, car le vocable *multiplié par* est nouveau pour l'enfant du C.E. alors que *fois* a déjà un sens lié aux situations du premier type (sans compter d'autres acceptions). Dans les situations de dénombrement conduisant à la construction de tableaux rectangulaires, il est important de constater que le nombre de cases du tableau ne dépend que du nombre de lignes et du nombre de colonnes ; il faut en quelque sorte oublier son contenu.

III. Premiers calculs de produits

Nous allons décrire quelques activités qui ont été proposées à des enfants après l'introduction du signe "X" et qui visent à assurer la signification de la multiplication dans le contexte où elle a été introduite (tableaux rectangulaires).

III.1. On distribue aux enfants du papier quadrillé ou du papier pointé ; on leur demande de construire des grilles rectangulaires puis d'écrire sous différentes formes le nombre de cases ou de points de chaque grille, chaque écriture reflétant un procédé de dénombrement. Pour une grille de 3 lignes et 5 colonnes, on obtient des écritures variées :

$$3 \times 5 \quad , \quad 5 \times 3 \quad , \quad 5+5+5 \quad , \quad 3+3+3+3+3 \quad ,$$

mais aussi

$$10+5 \quad , \quad 5+10 \quad , \quad 9+6 \quad .$$

III.2. On peut aussi demander aux enfants de poser un jeton dans chaque case (ou sur chaque point) de chaque grille puis de classer les grilles selon le nombre de jetons utilisés.

III.3. De même, on peut donner à chaque enfant un certain nombre de jetons (72 par exemple) et une feuille de papier quadrillé. La consigne est de disposer les jetons de toutes les façons possibles en grilles rectangulaires.

Ensuite les enfants choisissent eux-mêmes le nombre de jetons à utiliser et ils sont très étonnés de s'apercevoir que pour certains nombres il y a beaucoup de rectangles et que pour d'autres il y en a très peu. Il n'est bien entendu pas question de faire à cette occasion une théorie de la divisibilité et de la décomposition en facteurs premiers.

III.4. On peut aussi proposer des situations simples :

— "Dans un zoo, il y a 6 lionnes ; chacune vient d'avoir 4 bébés".

— "Dans un wagon, il y a 10 compartiments. En première classe il y a 6 personnes par compartiment, en deuxième classe il y en a 8".

— "J'ai 21 fleurs et 3 vases ; je veux mettre le même nombre de fleurs dans chaque vase".

Pour chacune, les enfants décident de ce qu'ils vont chercher et représentent la situation, généralement, soit en faisant un tableau, soit en dessinant des paquets de croix. Suivant la représentation choisie, ils écrivent des sommes ou des produits, parfois les deux. Les différentes représentations et écritures sont étudiées collectivement.

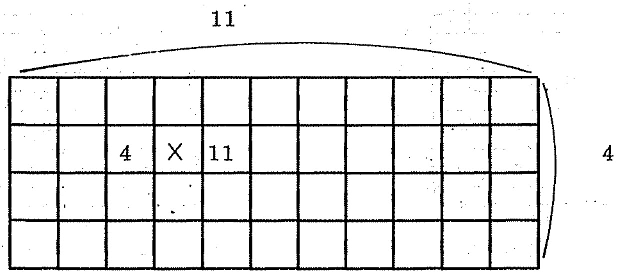
IV. Technique : exemple d'une progression possible

On utilise, pour élaborer une technique, des grilles ou des alignements de points :

IV.1. Première phase :

On fournit aux enfants des grilles de différentes tailles et on leur demande de trouver le nombre de cases de chaque grille.

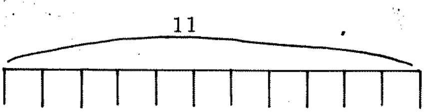
Si l'introduction du signe "X" a été faite sur des tableaux rectangulaires, il est normal que les enfants donnent $n \times p$ comme nombre de cases de la grille avant de les compter effectivement.



Les deux moyens les plus couramment utilisés par les enfants sont : soit de dénombrer les cases une par une, soit d'utiliser l'addition répétée : $11 + 11 + 11 + 11 = 44$. Les différents moyens sont confrontés à chaque occasion.

Toutes les grilles peuvent être affichées pour que tous les enfants se persuadent que le nombre de cases des grilles ne dépend que de leur nombre de lignes et de leur nombre de colonnes.

Il est important d'indiquer sur le tableau :



L'"accolade" permet aux enfants de ne pas oublier qu'il y a 11 colonnes. Il est préférable qu'ils utilisent des accolades pendant assez longtemps.

Cette phase très libre permet, entre autres activités, de commencer à se constituer un répertoire. Les résultats trouvés par les enfants sont affichés sur un panneau réservé à cet effet.

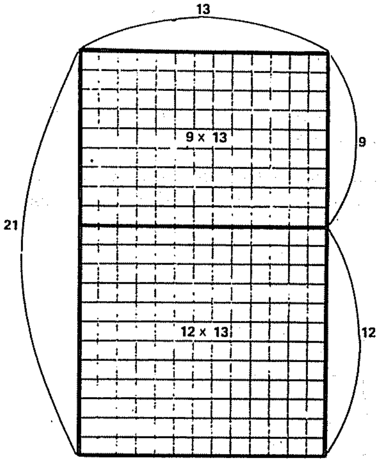
A la fin de cette phase, les enfants ont déjà une bonne connaissance de la commutativité de la multiplication et disposent d'un début de répertoire.

IV.2. Deuxième phase :

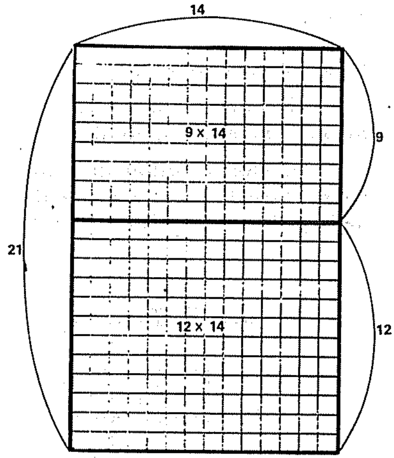
On peut pour cette phase grouper les enfants en équipes de quatre. A chaque enfant, on donne une grille dont il doit dénombrer les cases. Par exemple, les grilles d'une équipe ont pour nombres respectifs de cases : 14×9, 13×9, 14×12 et 13×12.

Quand les enfants ont dénombré leur propre grille, on leur demande de trouver d'autres produits en assemblant leurs grilles.

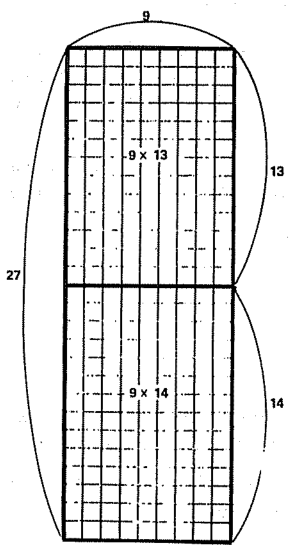
Ils peuvent trouver :



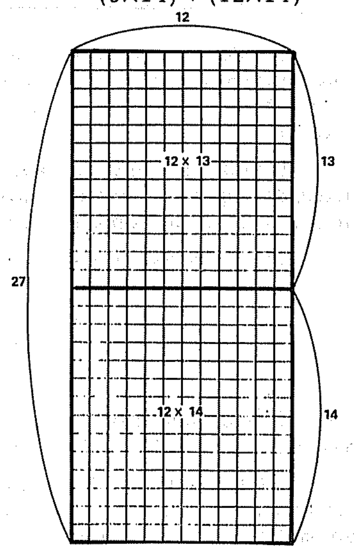
$21 \times 13 =$
$(9 \times 13) + (12 \times 13)$



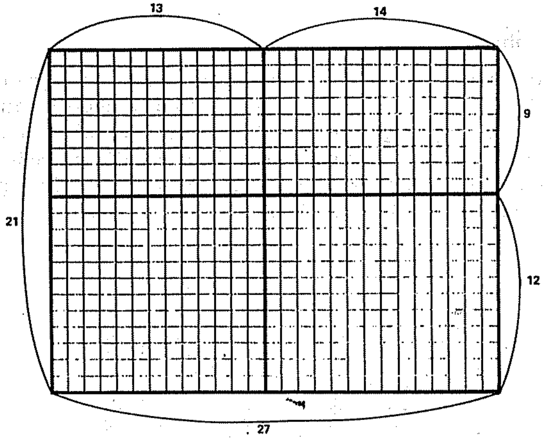
$21 \times 14 =$
$(9 \times 14) + (12 \times 14)$



$9 \times 27 =$
$(9 \times 13) + (9 \times 14)$



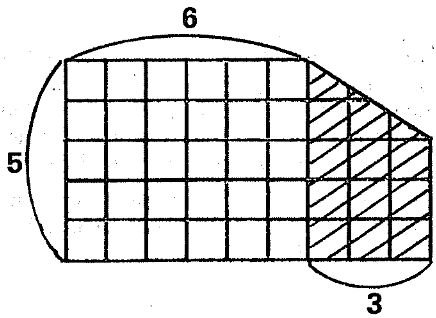
$12 \times 27 =$
$(12 \times 13) + (12 \times 14)$



$$27 \times 21 = (14 \times 9) + (13 \times 9) + (14 \times 12) + (13 \times 12)$$

Les enfants vont ensuite exposer leurs résultats au tableau. Ils ont besoin de représenter ce qu'ils ont fait. La nécessité des accolades est ici évidente. Les enfants, grâce à elles, ne perdent pas de vue la signification des nombres écrits sur le côté.

Parallèlement, pour accroître leur connaissance des grilles, on peut aussi leur donner des grilles dont les coins sont repliés. Ils doivent dénombrer les cases sans déplier le coin.



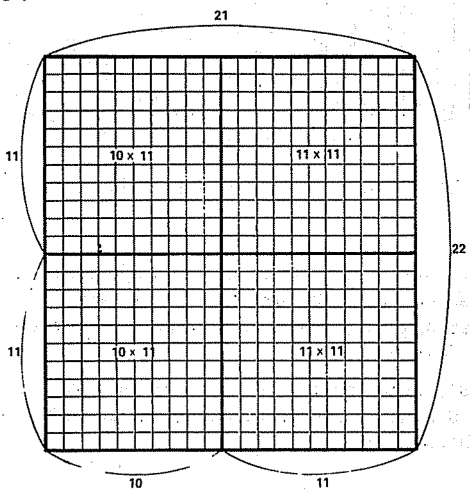
Pour résoudre le problème, ils sont généralement conduits à décomposer la grille en deux sous-grilles, ce qui pourra leur donner l'idée de le faire ultérieurement pour simplifier leurs calculs. D'autre part, ils doivent prendre conscience que les deux côtés opposés d'un rectangle ont même dimension. Pour trouver le nombre de cases cachées, ils doivent dire que le nombre de cases du rectangle hachuré est 5×3 .

Cette deuxième phase permet d'agrandir encore le répertoire des enfants et de leur faire manipuler la distributivité de la multiplication sur l'addition.

IV.3. Troisième phase

On va maintenant donner aux enfants de très grandes grilles : 21×22, 19×21, 17×22, etc, Dénombrer les cases une par une est à coup sûr voué à l'échec ; les additions répétées vont être longues et compliquées ; il faut donc que les enfants trouvent d'autres méthodes. Les activités précédentes vont les amener à découper en sous-grilles pour se ramener à des grilles plus simples, ou utiliser des sous-grilles dont on connaît déjà le nombre de cases (répertoire).

Par exemple :



d'où $$22 \times 21 = (10 \times 11) + (10 \times 11) + (11 \times 11) + (11 \times 11)$$

Les enfants viennent ensuite au tableau expliquer leurs découpages. Ils doivent être soigneux dans leur représentation, pour que personne n'oublie la signification des nombres écrits autour des grilles et dans celles-ci.

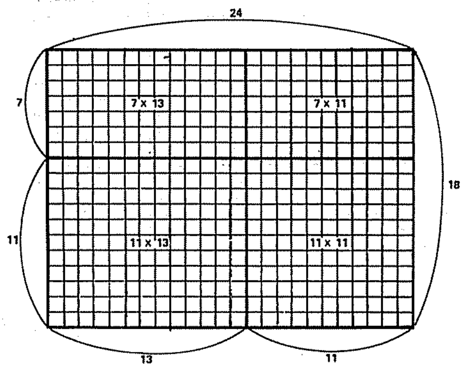
Cette phase doit être assez longue, pour que les enfants fassent chacun un grand nombre de découpages. L'expérience venant, ils choisissent les découpages qui simplifient le calcul.

IV.4. Quatrième phase

Dans cette phase, les enfants auront toujours à découper des grilles, mais cette fois-ci le découpage leur sera plus ou moins imposé.

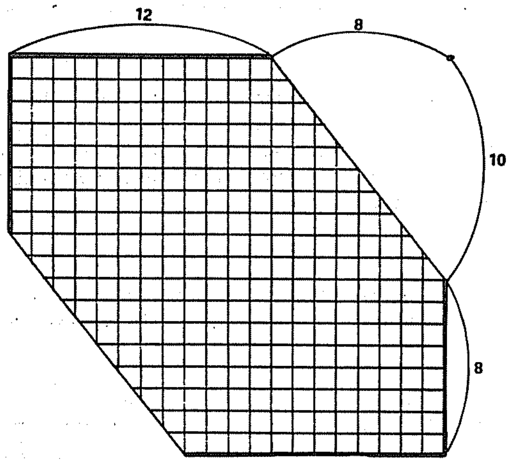
Par exemple, les enfants ont à calculer le nombre 24×18 ; ils doivent le calculer en utilisant les résultats suivants :

$7 \times 12 = 84$	$13 \times 11 = 141$	$13 \times 13 = 169$	$13 \times 15 = 195$
$11 \times 7 = 77$	$7 \times 15 = 105$	$13 \times 7 = 91$	$12 \times 12 = 144$
$12 \times 11 = 132$			



$$18 \times 24 = (11 \times 11) + (7 \times 11) + (7 \times 13) + (11 \times 13)$$

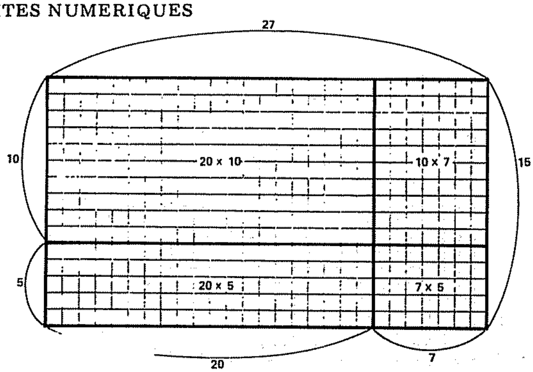
Ou encore on donne des grilles dont les coins sont cachés :



Le nombre de cases de cette grille lorsque l'on déplie les coins est :

$$(12 \times 8) + (8 \times 10) + (8 \times 8) + (12 \times 10) = 20 \times 18$$

Au début, on ne privilégie aucun découpage particulier ; puis, quand les enfants ont découvert qu'il est beaucoup plus facile de découper en faisant apparaître des bandes de 10 carreaux, les répertoires ou les coins cachés sont choisis de façon à favoriser les découpages en sous-grilles dont au moins l'une des dimensions est 10.



$27 \times 15 = (20 \times 10) + (10 \times 7) + (20 \times 5) + (7 \times 5)$

Remarque 1

La généralisation du découpage par bandes de 10 ou d'un multiple de 10, de 100 ou d'un multiple de 100, etc. ne va pas de soi ; elle supposerait que les règles de la numération soient suffisamment maîtrisées. Il faudrait en effet pouvoir interpréter, par exemple, 3591 comme l'abréviation de $(3 \times 1000) + (5 \times 100) + (9 \times 10) + 1$.

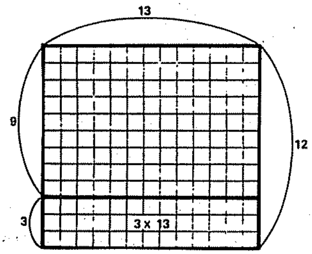
Les activités proposées, au contraire, permettent aux enfants d'étendre simultanément leurs connaissances en numération et en multiplication sans nécessiter la maîtrise préalable du fonctionnement de la numération.

Remarque 2

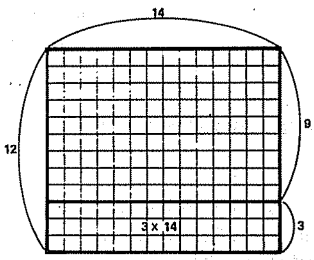
Il ne faut pas omettre d'entretenir le répertoire. Plus le répertoire est riche et plus l'algorithme de calcul utilisé par les enfants peut être raccourci. Assez rapidement, il devient nécessaire de supprimer les répétitions et de comparer entre eux les résultats enregistrés, bref, d'organiser le répertoire pour pouvoir l'utiliser commodément.

Remarque 3

On peut obtenir des résultats nouveaux, non seulement en assemblant des grilles, mais aussi en les superposant. Voici un exemple qui utilise les grilles 9×13 , 12×13 , 9×14 et 12×14 .



$3 \times 13 = (12 - 9) \times 13$
$3 \times 13 = (12 \times 13) - (9 \times 13)$

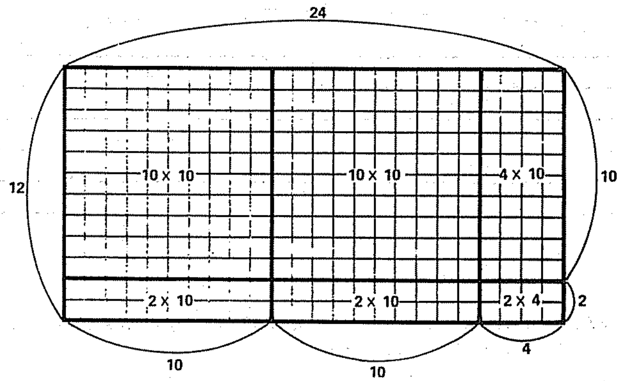


De même :
$3 \times 14 = (12 \times 14) - (9 \times 14)$

IV.5. Cinquième phase

À la fin de la quatrième phase, les enfants savent découper la grille de façon à utiliser des résultats connus (par exemple : $7 \times 10 = 70$, $10 \times 10 = 100$, $100 \times 10 = 1000$). Les grilles sont encore exactement quadrillées à l'échelle.

Par exemple :



Ainsi :

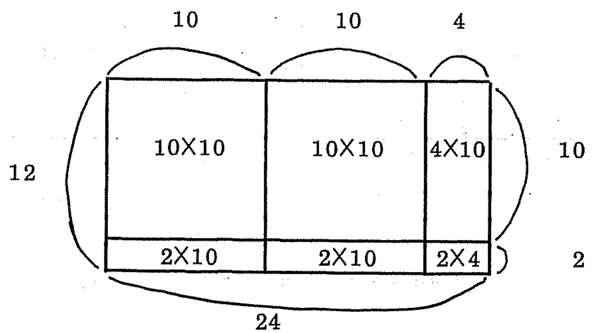
$$24 \times 12 = (10\times10) + (10\times10) + (4\times10) + (2\times10) + (2\times10) + (2\times4)$$

2×4 est dans le répertoire ; 2×10 est vu comme 2 paquets de dix, donc $2 \times 10 = 20$; 10×10 est vu comme 10 paquets de dix.

La cinquième phase va viser deux buts :

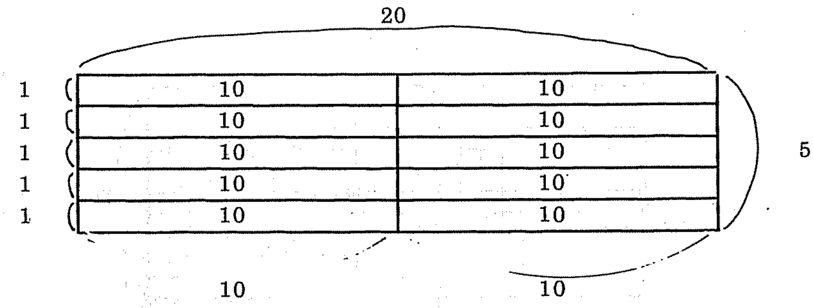
— l'utilisation de rectangles non quadrillés ;
— le calcul du nombre de cases de grilles telles que 9×60, 80×90, 8×800, etc.

Pendant toute la première partie de la cinquième phase, les enfants reprennent les mêmes activités qu'aux phases précédentes mais en utilisant des rectangles non quadrillés, par exemple :

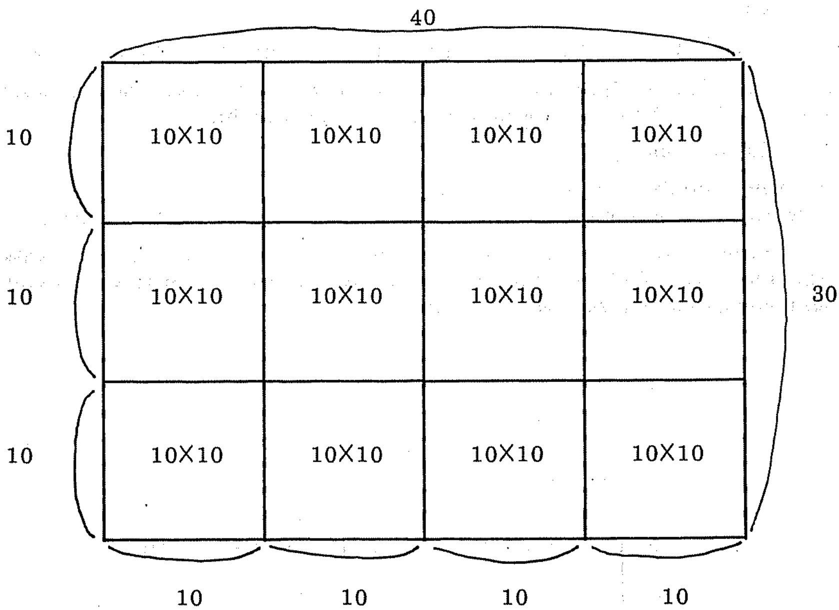


Ensuite, les enfants ont à dénombrer les cases de grilles du type 5×20, 9×60, 8×40, 7×70, etc. en utilisant seulement le répertoire : $5 \times 2 = 10$ ou $9 \times 6 = 54$ ou $8 \times 4 = 32$ ou $7 \times 7 = 49$, etc.

Ainsi, pour 5×20, le dessin ci-dessous met en évidence (5×2) bandes de 10 cases, soit 100 cases.



Les enfants ont de la même façon à dénombrer les cases de grilles du type 30×40, 90×60, 80×40, etc. ; à l'aide du répertoire, $3 \times 4 = 12$ ou $9 \times 6 = 54$ ou $8 \times 4 = 32$, etc.



Chaque carré est composé de 10 bandes de 10 cases, donc 10 dizaines, donc 100 cases ; et il y a $3 \times 4 = 12$ carrés ; donc 30×40 c'est 12 centaines ; donc

$$30 \times 40 = 1200$$

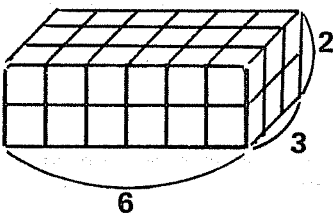
On peut ensuite donner ce même genre d'exercices avec des grilles du type 8 X 800 ou 70 X 900, etc.

Cette phase délicate nécessite des manipulations qui deviennent vite fastidieuses. Elle a pour objectif essentiel la mise en oeuvre de l'associativité de la multiplication dans les cas particuliers où un ou plusieurs facteurs sont des puissances de 10.

80 X 60 = (8 X 10) X (6 X 10)	80 X 60 = 48 X 100
8 X 800 = 8 X (8 X 100)	8 X 800 = 64 X 100
80 X 60 = (8 X 6) X (10 X 10)	80 X 60 = 4800
8 X 800 = (8 X 8) X 100	8 X 800 = 6400

Pour faciliter cette découverte, on peut proposer aux enfants des exercices des types suivants :

— Faire construire des pavés à l'aide de petits cubes ; faire prévoir le nombre de petits cubes nécessaire à la réalisation d'un pavé donné ; faire calculer le nombre de morceaux contenus dans un paquet de sucre, etc.



Plusieurs calculs sont possibles :

(6 X 3) X 2 = 36

6 X (3 X 2) = 36 , etc.

— Pour décorer une salle, j'achète 5 bottes de fleurs. Chaque botte est composée de 7 bouquets de 10 oeillets. Chaque oeillet coûte 2 francs.

Si différents calculs sont proposés par les élèves, leur comparaison conduit à des égalités du type :

(5 X 7) X 10 = 5 X (7 X 10)

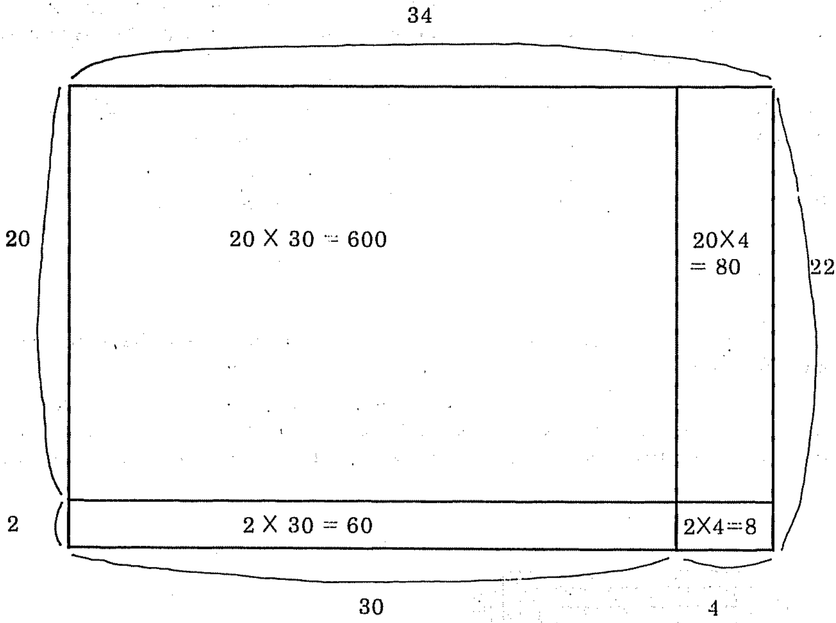
selon que l'on a calculé d'abord le nombre de bouquets, ou d'abord le nombre d'oeillets par botte.

Remarque

Tout au long de l'étude du dénombrement des cases (ou des points) d'une grille, il est indispensable de donner aux élèves l'occasion d'utiliser leur savoir-faire comme technique de calcul pour étudier des situations anecdotiques, vécues ou imaginaires, faisant intervenir la multiplication.

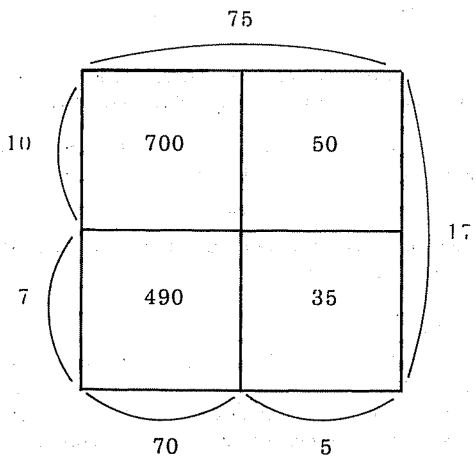
IV.6. Sixième phase

A la fin de la cinquième phase, les enfants en sont au stade suivant : s'ils doivent calculer 34×22, ils dessinent :



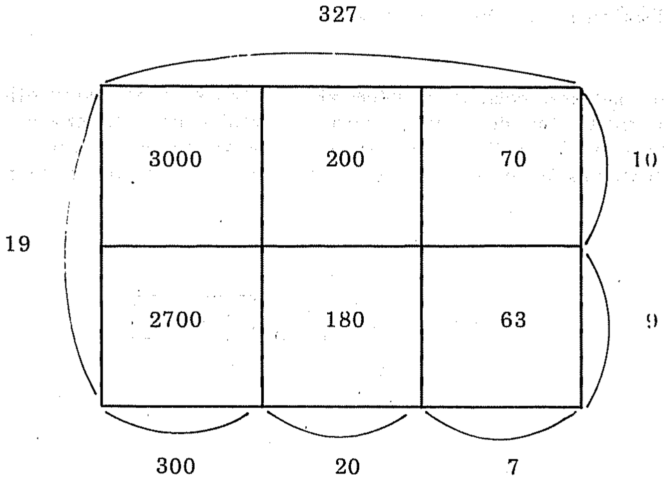
$$600 + 60 + 80 + 8 = 748$$

Très vite les enfants trouvent lassant de respecter les proportions et petit à petit ils en arrivent aux schémas suivants :



$75 \times 17 = 700 + 490 + 50 + 35$

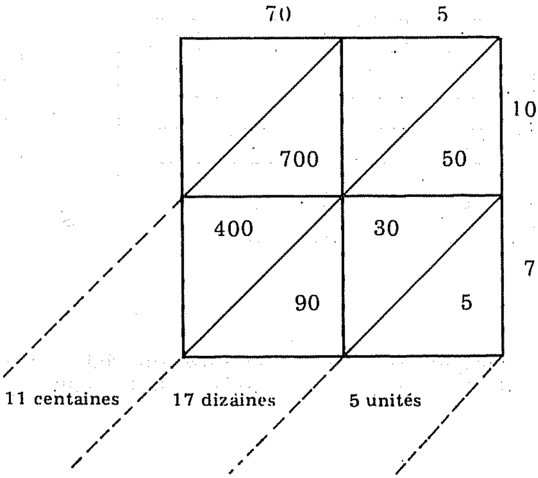
$75 \times 17 = 1275$



$$327 \times 19 = 3000+2700+200+180+70+63$$

$$327 \times 19 = 6213$$

On peut réduire les écritures en organisant le schéma de la façon suivante :



d'où $75 \times 17 = 1275$

en utilisant la technique habituelle d'addition, mais le long des diagonales.

IV.7. Utilisation de cartons de couleurs

Pour visualiser cela, il est nécessaire de suggérer une convention aux enfants. Lorsque l'on écrit un nombre, on utilise par exemple un carton marron pour les dix mille, un carton vert pour les milliers, un carton rouge pour les centaines, un carton bleu pour les dizaines, un carton jaune pour les unités.

3 4 8 7 se code	$\boxed{3}$	$\boxed{4}$	$\boxed{8}$	$\boxed{7}$
	V	R	B	J

On code ainsi tous les nombres intervenant dans un calcul :

$\boxed{4}$	$\boxed{8}$	$\boxed{7}$
R	B	J

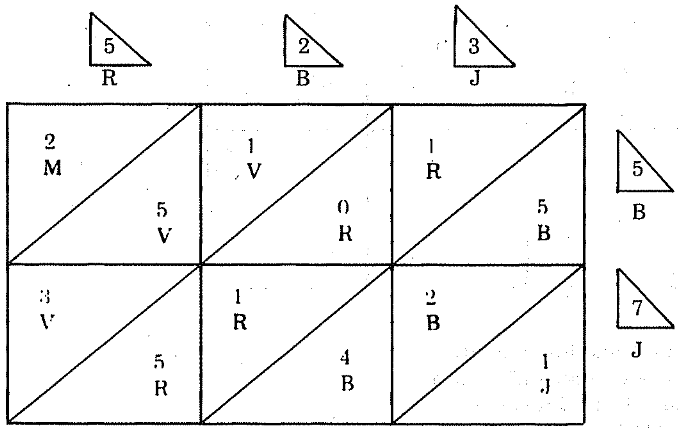
$\boxed{1}$ $\boxed{2}$ M V	$\boxed{2}$ $\boxed{4}$ V R	$\boxed{2}$ $\boxed{1}$ R B	$\boxed{3}$ B
$\boxed{2}$ $\boxed{8}$ V R	$\boxed{5}$ $\boxed{6}$ R B	$\boxed{4}$ $\boxed{9}$ B J	$\boxed{7}$ J

Les enfants savent que pour faire une addition, on additionne ensemble les unités, puis les dizaines, puis les centaines, puis les milliers, etc. On obtient :

$\boxed{1}$	$\boxed{6}$	$\boxed{19}$	$\boxed{11}$	$\boxed{9}$
M	V	R	B	J

ensuite on fait les reports habituels pour obtenir 18 019.

Si, au lieu de carrés, le maître fournit alors des triangles de couleur pour écrire les nombres dans la grille, l'addition en diagonale est visualisée par des bandes de couleurs :



On retrouve la technique habituelle de l'addition, les colonnes étant en diagonales. Les couleurs permettent de visualiser les diagonales et de supprimer sans risque les zéros.

Remarque

On pourrait avoir l'espoir qu'en faisant de nombreuses fois les additions avec les zéros les enfants découvriraient "l'addition en diagonale" ; en fait il n'en est rien.

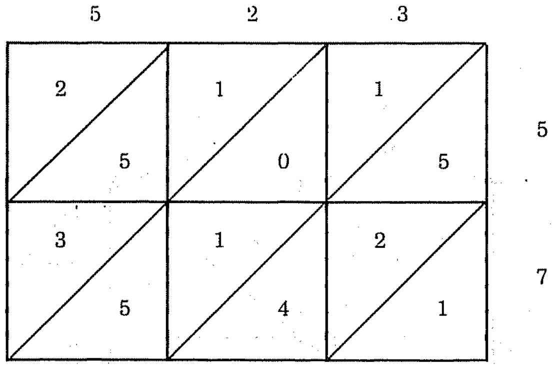
Ainsi le calcul de 523 × 57 s'achevait jusqu'alors par l'addition dans un ordre quelconque des six nombres écrits dans la grille sans les décomposer.

500	20	3	
25000	1000	150	50
3500	140	21	7

Par exemple :

$$\begin{array}{r} 25000 \\ +\ 1000 \\ +\ 3500 \\ +\ 140 \\ +\ 150 \\ +\ 21 \\ \hline 29811 \end{array}$$

Tandis que la nouvelle technique de calcul en diagonale utilise la décomposition des six nombres :

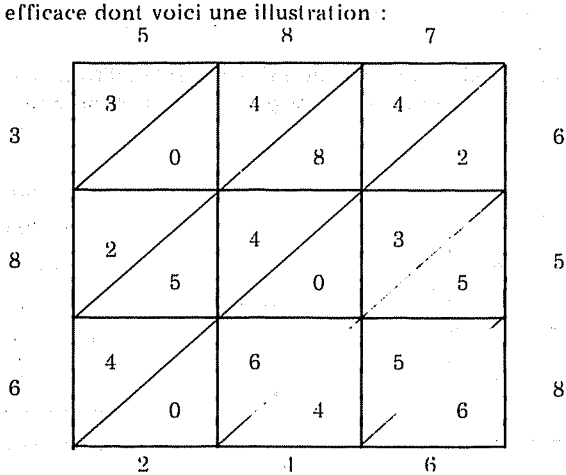


La disposition ci-contre, que les enfants n'utilisent pas, illustre les calculs qu'ils font.

	1
+	50
+	20
+	40
+	100
+	100
+	500
+	1000
+	5000
+	3000
+	20000
	29811

IV.8. La technique finale

Une fois que les enfants ont reconnu la technique habituelle d'addition, ils abandonnent les couleurs et arrivent ainsi à une technique sûre et efficace dont voici une illustration :



587 X 658 = 386 246

Le grand avantage de cette technique est la possibilité de calculer les produits partiels indépendamment les uns des autres, dans un ordre arbitraire et en s'arrêtant au besoin, car il n'y a pas de retenue ; de plus, il est loisible de vérifier chacun des résultats écrits avant de passer à l'addition.

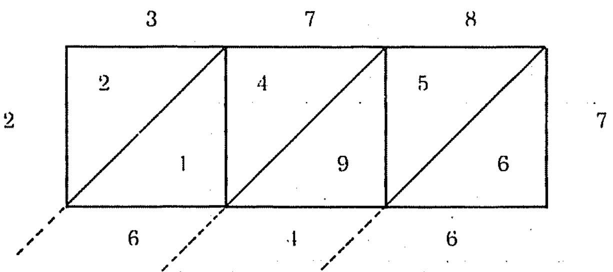
Le seul inconvénient de cette technique est l'obligation de dessiner la grille avec les diagonales.

La technique habituelle est un raccourci de la technique précédente ; elle réduit les écritures mais elle surcharge la mémoire par le jeu entre-croisé des multiplications et des additions partielles ; on est ainsi contraint d'utiliser les retenues ; en outre, on ne peut s'arrêter qu'à certaines étapes bien précises du calcul. La technique habituelle n'est d'un emploi commode que dans le cas de produits de petits nombres (trois ou quatre chiffres pour un adulte moyennement entraîné). Le nombre des erreurs dues à la fatigue augmente rapidement avec la taille des nombres à multiplier.

IV.9. La technique usuelle

Nous allons exposer une méthode qui permet de passer d'une technique à l'autre.

— On reprend d'abord le calcul des produits d'un nombre par un nombre d'un chiffre;



$378 \times 7 = 2646$

L'observation de ce genre de grilles permet le passage à l'écriture plus condensée habituelle :

$$\begin{array}{r} 378 \\ \times \quad 7 \\ \hline 6 \end{array}$$

le 5 est mis en mémoire

et est additionné à 7×7 :

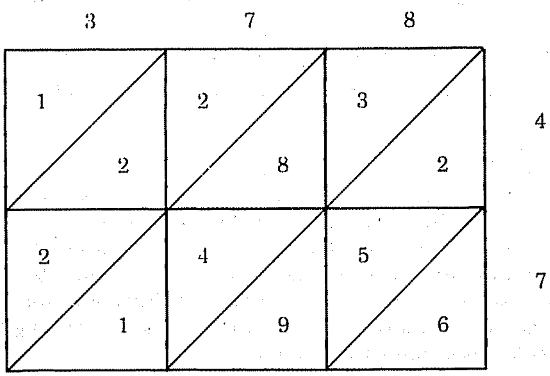
$$\begin{array}{r} 378 \\ \times \quad 7 \\ \hline 46 \end{array}$$

le 5 est mis en mémoire

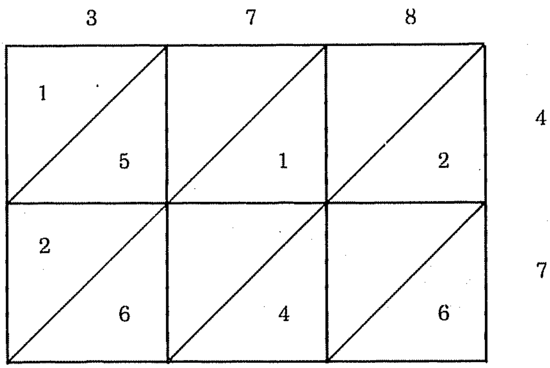
et est additionné à 7×3 :

$$\begin{array}{r} 378 \\ \times \quad 7 \\ \hline 2646 \end{array}$$

— Ensuite on observe des grilles ayant plus d'une ligne :



Chaque ligne peut se condenser de la manière expliquée pour des grilles à une ligne :



On redresse le calcul :

$$\begin{array}{r} 1\,5\,1\,2 \\ +\quad 2\,6\,4\,6 \\ \hline \end{array}$$

Et on arrive enfin à la disposition habituelle en écrivant en premier le produit par le chiffre des unités (2646) puis celui par le chiffre des dizaines (1512) dûment décalé.

Remarque

Il ne faut pas se cacher que chez certains enfants le passage d'une technique voisine d'une technique artisanale, qu'ils ont mise au point eux-mêmes, à une technique "venue de l'extérieur" pose des problèmes qui sont plus d'ordre psychologique que mathématique. De toutes façons, il semble souhaitable de laisser les enfants utiliser la technique qui leur convient le mieux, selon le calcul à effectuer.

C. LA SOUSTRACTION

I. Le problème didactique

La soustraction a toujours posé, tant au niveau conceptuel qu'au niveau technique, beaucoup de problèmes aux enfants.

Au niveau conceptuel, les difficultés sont pour une part importante la conséquence de deux facteurs, l'un lié à la complexité inhérente à la soustraction, l'autre lié au choix didactique d'introduction de la soustraction.

I.1. La complexité vient du fait que les situations pour lesquelles les calculs peuvent faire intervenir des différences sont de nature très diverses. Nous allons en donner quelques exemples :

— "J'ai 18 billes, des rouges et des bleues ; 7 sont bleues, x sont rouges. Trouver x".

Cette situation peut se traduire par les écritures suivantes :

$$7 + x = 18$$

(ou les écritures équivalentes

$$x + 7 = 18,\ 18 = 7 + x,\ 18 = x + 7)$$

ou

$$x = 18 - 7$$

— "J'avais 18 billes ; j'en ai perdu 7 ; il m'en reste x. Trouver x". Celle-ci peut se traduire par

$$7 + x = 18\ ,\quad x = 18 - 7 \quad \text{ou} \quad 18 - x = 7\ .$$

— "J'avais 18 billes ; j'en ai perdu x, il m'en reste 7. Trouver x". Cette situation conduit aux mêmes écritures que la situation précédente.

— "J'ai 18 billes, tu en as 7. J'en ai x de plus que toi. Trouver x". Cette situation peut se traduire par

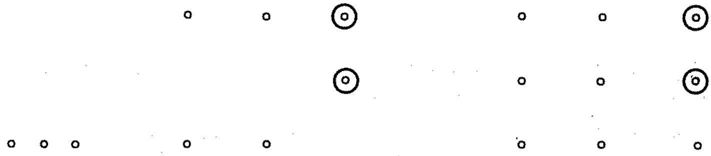
$$7 + x = 18\ ,\quad 7 = 18 - x \quad \text{ou} \quad 18 - 7 = x\ .$$

I.2. La difficulté liée au choix didactique tient au fait que la complexité décrite plus haut va devoir être prise en compte et qu'en même temps il va falloir montrer l'unité de toutes les situations au niveau des nombres.

Dans l'état actuel des recherches, l'enseignement de la soustraction n'a pas fait l'objet de découvertes fondamentales ; cependant, on peut essayer de dégager des travaux des divers expérimentateurs une ligne générale pour l'étude de la soustraction.

Nous allons rappeler brièvement la manière dont est actuellement introduite l'addition au C.P.

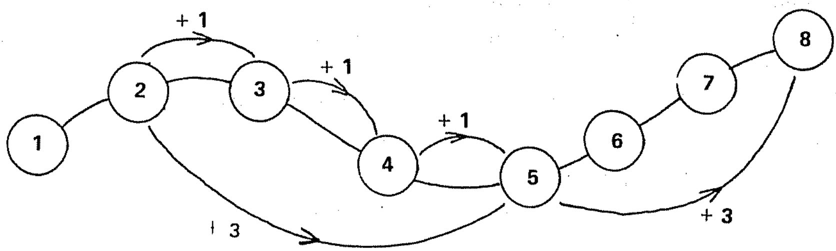
- Les enfants réunissent des collections d'objets, puis écrivent le nombre d'objets de la nouvelle collection ainsi obtenue :



3   4   2 $3 + 4 + 2 = 9$

L'addition est alors introduite comme loi interne sur les naturels, c'est-à-dire que dans $2 + 3 = 5$, 2 et 3 ont exactement la même nature.

- Ensuite les enfants étudient l'autre aspect de l'addition lié à l'ordre des nombres.



Passer d'un nombre au suivant, cela se fait en ajoutant 1 ; on découvre l'addition comme "translation" sur les naturels :

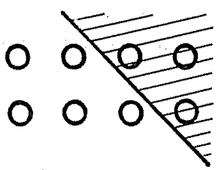
$$\begin{array}{ccc} & +3 & \\ 2 & \longrightarrow & 5 \\ 1 & \longrightarrow & 4 \\ 5 & \longrightarrow & 8 \end{array}$$

Ici, dans $2 + 3 = 5$, 2 et 3 n'ont pas la même nature : 2 est le code d'un point et 3 est le nombre de "pas" pour aller de 2 à 5.

- Les enfants vont ensuite, tout au long de leur scolarité, étudier de nombreuses situations mettant en oeuvre les deux aspects de l'addition ; petit à petit, l'expérience aidant, ils en viendront à utiliser les propriétés évidentes de l'addition "interne" pour l'addition "translation" et vice-versa.

- Pour la soustraction, il est possible de suivre une démarche tout à fait similaire.

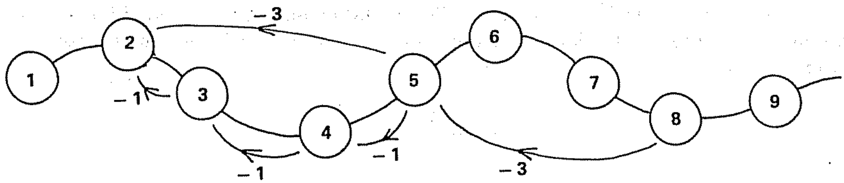
Les enfants amputent des collections d'objets puis écrivent le nombre d'objets d'une des collections ainsi obtenues :



$8 - 3 = 5$

La soustraction n'apparaît pas clairement comme opération inverse de l'addition ; en effet, il faut prendre en compte $8 - 3 = 5$ et $8 - 5 = 3$ pour bien décrire une situation équivalente à $5 + 3 = 8$; c'est une des premières difficultés.

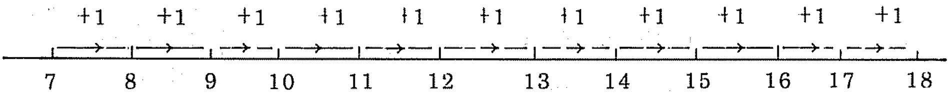
Ensuite, il convient, comme pour l'addition, d'étudier l'aspect de la soustraction lié à l'ordre des nombres :



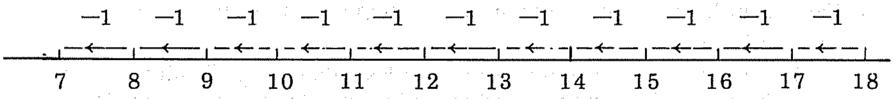
Passer d'un nombre au nombre précédent, cela se fait en retranchant 1 ; on étudie alors la soustraction comme "translation" sur les naturels, et dans ce cas elle apparaît évidemment comme l'inverse de l'addition "translation".

● Il est des problèmes dont on ne peut pas dire s'ils sont d'addition ou de soustraction tant la symétrie de l'addition "translation" et de la soustraction "translation" est patente :

"J'ai 18 billes, tu en as 7, combien en ai-je de plus que toi ?" Cela peut se traduire par : Qu'est-ce qu'on doit ajouter à 7 pour arriver à 18 ?



Mais cela peut se traduire aussi par : Qu'est-ce qu'on doit retrancher à 18 pour arriver à 7 ?



Pour passer de l'un à l'autre des deux nombres 7 et 18, on ajoute 11 à 7 ou on retranche 11 à 18.

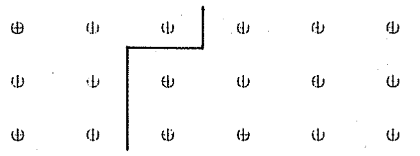
Dans le début de leur scolarité, les enfants vont donc avoir mis en place deux sortes de soustractions. Le but de l'enseignement sera de leur faire étudier un grand nombre de situations variées qui les amèneront progressivement à choisir dans chaque situation l'aspect le mieux adapté, puis finalement à faire l'unité entre les deux aspects de la soustraction (Pour trouver des situations de translation, voir E : Le train).*

* Voir page 71

II. Usage des représentations

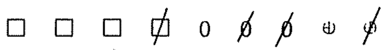
Comme pour l'addition, l'enfant a besoin, dans les situations où les calculs conduisent à des soustractions, de s'aider de représentations. Les enfants en inventent spontanément certaines ; ce sera le rôle du maître que d'en suggérer d'autres ; en effet, les représentations spontanées ne sont pas toujours efficaces, ni utilisables.

Dans une situation telle que "J'ai 18 billes en tout ; 7 sont bleues ; les autres sont rouges", les jeunes enfants ont tendance à utiliser des représentations du type :



bleues rouges

Ces représentations sont pratiques lorsque les nombres en jeu sont petits ; elles peuvent être adaptées à des nombres plus grands par l'utilisation de symboles différents pour les centaines, les dizaines et les unités. Par exemple, si on veut illustrer le calcul de 432 — 121, on peut dessiner :



432 — 121 = 311

Code :

□ centaine

0 dizaine

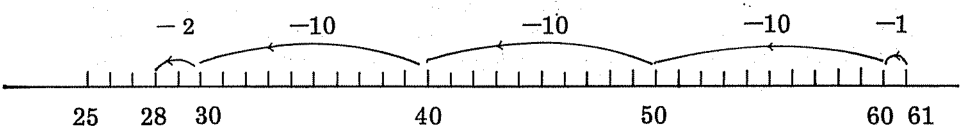
⊕ unité

Dans un calcul tel que celui de 200 — 129, cette représentation devient difficile à utiliser puisqu'il faut penser à remplacer un □ par dix 0, puis un de ces 0 par dix ⊕.

Un autre type de représentation que les enfants ont l'habitude de rencontrer est une droite (ou une courbe) graduée par des naturels : numéros des maisons d'une rue, jeu de l'oie, codage d'un quadrillage, etc. Ces représentations peuvent aider à imager des calculs de soustraction.

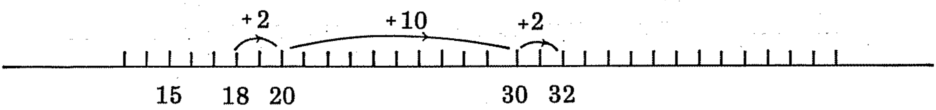
Par exemple :

J'avais 61 billes ; j'en ai perdu 33 ; combien m'en reste-t-il ?



61 — 33 = 28. Il m'en reste 28.

J'ai 18 francs ; tu en as 32 ; qui en a le plus et combien de plus ?



Pour chaque situation, le maître a intérêt à faire confronter toutes les représentations utilisées par les enfants ; cela permet de reconnaître celles qui étaient le mieux adaptées à la situation, et cela permet de faire prendre conscience de propriétés telles que

$$18 + x = 32 \quad \text{est équivalent à} \quad x = 32 - 18 \ .$$

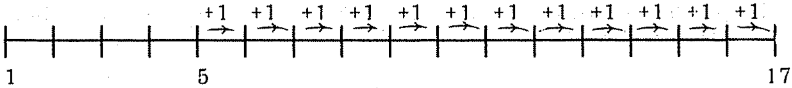
III. Techniques opératoires

Nous allons maintenant aborder l'autre facette du problème posé par la soustraction, c'est-à-dire la difficulté de l'apprentissage d'une technique opératoire.

Un des pièges possibles est de demander aux enfants d'apprendre trop tôt une technique opératoire. Au contraire, en s'abstenant d'instaurer précocement une technique opératoire, on incite les enfants, placés devant des calculs où il y a des soustractions, à développer des techniques artisanales pour arriver au bout de leurs calculs. C'est en provoquant ces tâtonnements que l'on oblige les enfants à utiliser, au moins implicitement, les propriétés de la soustraction sur lesquelles est fondée toute technique opératoire élaborée. Si l'on exige des enfants un apprentissage avant qu'ils aient bien pratiqué les propriétés de la soustraction, il ne peut s'agir que d'un conditionnement avec tous les risques d'oublis et de blocages que cela comporte.

III.1. Nous allons montrer, sur un exemple de représentation, comment peut évoluer une des techniques artisanales que les enfants, ayant travaillé sur des situations telles que celles du petit train* par exemple, pourraient éventuellement mettre en place.

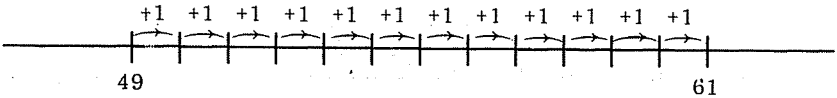
Pour chercher x tel que $5 + x = 17$, la technique la plus sommaire consiste à représenter tous les nombres entre 1 et 17 par un trait de graduation, puis à compter un par un les intervalles :



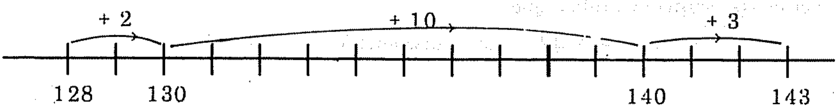
La première abstraction consiste à ne pas faire figurer la graduation à partir de 1 mais à choisir un intervalle utile.

* Voir page 71

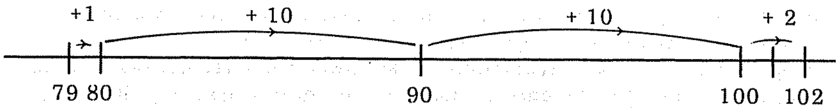
Ainsi pour chercher x tel que $49 + x = 61$:



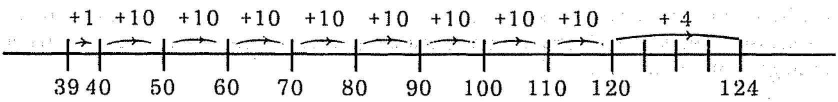
Une amélioration consiste à faire apparaître des segments contenant dix intervalles. Ainsi, pour $128 + x = 143$;



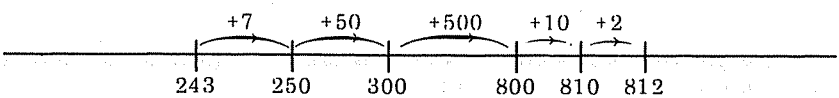
Ensuite, la graduation dans chaque segment de dix intervalles s'avère inutile. Ainsi, pour $79 + x = 102$:



Une deuxième abstraction consiste à utiliser par exemple un demi-carreau pour les unités et un carreau pour les dizaines. Ainsi, pour $124 = 39 + x$



De proche en proche, on parvient au schéma le plus élaboré. Ainsi, pour trouver $812 - 243 = 569$:



Remarque : C'est le changement de la taille des nombres qui est le moteur principal de l'évolution.

III.2. Nous allons étudier certaines techniques actuellement en usage, et pour chacune d'elles dégager les propriétés de la soustraction qui sont utilisées.

III.2.1.

$$\begin{array}{r} 177 \\ -\ 89 \\ \hline \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{rccc} & ^{16} & & \\ & \cancel{1} & \cancel{7} & 17 \\ - & & 8 & 9 \\ \hline \end{array}$$

Cette technique fait allusion à une manipulation représentée par :

100	10	10	10	1	1	1	
	10	10	10	1	1	1	
		10			1		

On ne peut retirer directement 8 dizaines et 9 unités ; il faut donc transformer en

10	10	10	10	~~10~~	~~10~~	~~10~~	~~10~~	~~1~~	~~1~~	~~1~~	~~1~~	~~1~~	1	1	1
10	10	10	10	10	~~10~~	~~10~~	~~10~~	~~1~~	~~1~~	~~1~~	~~1~~	~~1~~	1	1	1
														1	

Cette technique utilise des connaissances assez frustes sur la soustraction ; par contre, elle demande une assez grande virtuosité en numération. Sur un plan pratique, la nécessité de barrer et de surcharger des chiffres est assez malcommode. Pourtant, le plus grand inconvénient vient de la difficulté que recèle cette technique dans les cas du type suivant : 200 — 64 ; car il faut transformer directement une centaine en 9 dizaines et 10 unités.

$$\begin{array}{r} 200 \\ -\ \ 64 \\ \hline \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{rccc} & ^{1} & ^{9} & \\ & \cancel{2} & \cancel{10} & 10 \\ - & & 6 & 4 \\ \hline \end{array}$$

III.2.2.

$$\begin{array}{rrr} 1 & {}_{1}7 & {}_{1}7 \\ -1 & 8_{1} & 9 \\ \hline \end{array}$$

Cette technique fait allusion à la propriété suivante : si on ajoute 10 unités au 1er terme et 1 dizaine au 2ème terme d'une différence, cela ne change pas le résultat ; puis, si on ajoute 10 dizaines au 1er terme et 1 centaine au 2ème terme, cela ne change pas le résultat.

Cette technique utilise des connaissances très complexes à la fois sur la soustraction et sur la numération ; elle ne peut donc être abordée par les enfants que lorsqu'ils auront beaucoup pratiqué la soustraction (CM) ; il sera très intéressant pour eux, à ce moment-là, d'en démonter le fonctionnement.

III.2.3.

$$\begin{array}{r} 89 \\ + \;.\,.\,.\,. \\ \hline 177 \end{array}$$

Cette technique offre l'avantage de faire appel seulement à des notions très élémentaires sur la soustraction et à une bonne compréhension de la technique d'addition. La disposition telle qu'elle est indiquée ici n'est pas pratique pour les divisions, mais on fait utiliser indifféremment par les enfants :

$$\begin{array}{r} 89 \\ + \;.\,.\,.\,. \\ \hline 177 \end{array} \qquad \begin{array}{r} .\,.\,.\,. \\ + \;\; 89 \\ \hline 177 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \underline{177} \\ 89 \\ + \;.\,.\,. \end{array} \qquad \text{et finalement} \qquad \begin{array}{r} 177 \\ - \;\; 89 \\ \hline .\,.\,.\,. \;\; + \end{array}$$

En conclusion, toutes ces techniques ont leur intérêt ; elles ne sont pas toutes adaptées aux possibilités des enfants du cycle élémentaire.

D. APPROCHE DE LA DIVISION *

Nous allons exposer ici quelques activités qui peuvent amener les enfants à acquérir le sens de la division. Le but au C.E. n'est pas de faire construire un algorithme efficace pour la division, mais de familiariser les enfants avec la division par l'étude de situations et de problèmes les conduisant à un ensemble de techniques artisanales.

Ainsi, l'objectif est double :

1°) Construire un concept de division riche de toutes les situations et de toutes les techniques.

2°) Constituer un stock de savoir-faire dans lequel on puisera pour mettre en place au C.M. des techniques plus systématiques.

I. La multiplication à trous

On peut poser aux enfants des énigmes telles que

$3 \times w = 21$; $w \times 7 = 49$; $7 \times w = 31$ (qui n'a d'ailleurs pas de solution)

Ensuite on peut proposer des calculs un peu plus complexes utilisant la numération :

$$25 \times w = 2500 \quad ; \quad 10 \times w = 43\,000 \quad , \quad \text{etc.}$$

Pour résoudre des problèmes du genre

$$23 \times w = 207$$

les enfants sont obligés de tâtonner et de calculer un grand nombre de multiples de 23.

II. Partage en parts égales

On veut distribuer 293 billes entre 7 enfants de façon à que chacun en ait le même nombre. Pour se débrouiller dans cette situation, les enfants peuvent distribuer des billes : 7, puis 14, puis 21, etc. ; ils peuvent aussi les distribuer par paquets de 10 : 70. puis 140, etc. (ils peuvent aussi utiliser des distributions anarchiques : 1, puis 5, puis 5, etc.).

III. Saut de puce

Une puce se déplace par bonds sur une marelle :

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	....

On peut avec cette marelle proposer diverses activités aux enfants. Nous allons décrire une des activités possibles .

* D'après un article de J. PAINCHAULT dans la revue *Grand N* n° 13.

Les enfants sont groupés par 2 ; l'un fait sauter la puce, l'autre pose des pièges pour essayer de l'attraper. Au début de chaque exercice on fixe :

— une zone de départ (une ou plusieurs cases au début de la marelle) ;

— une zone de pièges (une dizaine de cases éloignées du départ pouvant sortir des limites du dessin).

On tire une longueur de saut au sort. Deux possibilités sont alors offertes :

— la puce choisit sa case de départ dans la zone de départ ; le piégeur marque ensuite une ou plusieurs cases piégées dans la zone de pièges ;

— des cases sont d'abord piégées et ensuite la puce choisit sa case de départ.

La première possibilité conduit les enfants à construire la liste

$$x_0,\ x_0 + s\ ,\ x_0 + 2s\ ,\ x_0 + 3s, \ldots$$

où x_0 désigne le nombre de départ et s la longueur du saut. La deuxième possibilité conduit les enfants à construire la liste

$$x_1\ ,\quad x_1 - s\ ,\quad x_1 - 2s\ ,\quad x_1 - 3s\ ,\quad \ldots .$$

où x_1, désigne le numéro d'une case piégée et s la longueur du saut.

IV. Nombre de cases d'une grille rectangulaire quadrillée

Une grille rectangulaire contient 2296 cases ; il y a 28 cases le long d'un de ses bords ; combien y en a-t-il le long de chacun des autres bords ?

Une première tentative des enfants peut les conduire à des soustractions successives :

$$2296 - 28 = 2268, \quad 2268 - 28 = 2240, \quad 2240 - 28 = 2212, \quad \text{etc.}$$

Ils se rendent compte rapidement qu'il faudrait un grand nombre de soustractions. Ils peuvent alors essayer de tâtonner pour trouver :

$28 \times 30 = 840$	$2296 - 840 = 1456$
$28 \times 30 = 840$	$1456 - 840 = 616$
$28 \times 20 = 560$	$616 - 560 = 56$
et $2 \times 28 = 56$	

Il y a donc $2 + 20 + 30 + 30$, soit 82, cases le long du grand côté de la grille.

V. Calendrier

On peut se poser des problèmes du genre suivant :

Nous sommes rentrés le lundi 3 janvier.

. L'anniversaire de Sylvie est le 28 janvier ; ce sera quel jour de la semaine ?
. Noël était un samedi : quel jour de la semaine était l'anniversaire de Luc qui est né le 3 décembre ?
. Le 15 mars est un mercredi ; quels seront les dates des mercredis de mars, d'avril, etc. ?
. Quel jour sera le 1er janvier de l'année prochaine ?
. Quel jour était le premier janvier de l'année dernière ?

Les enfants sont conduits à établir des listes du type

$$a + 7, \quad a + 14, \quad \dots$$
$$a - 7, \quad a - 14, \quad \text{etc.}$$
$$a + 365, \quad a + (2 \times 365), \quad \dots$$
$$a - 365, \quad a - (2 \times 365), \quad \text{etc.}$$

Au bout d'un certain temps, ils prennent conscience du fait que leur travail est facilité par l'écriture de listes de multiples qu'ils peuvent représenter de diverses façons. Faire fabriquer un tableau de multiples est un excellent travail de calcul mental.

Exemple : $\xrightarrow{\times 23}$

0	0
1	23
2	46
3	69

En utilisant les listes de multiples, ils prendront petit à petit conscience de certaines de leurs propriétés :

— Pour obtenir la ligne | 9 | 207 | il suffit de multiplier par 3 les deux nombres de la ligne | 3 | 69 | .

— Pour obtenir la ligne | 90 | 2070 | il suffit de multiplier par 10 les deux nombres de la ligne | 9 | 207 | .

— Si on ajoute les deux nombres de deux lignes, on obtient une nouvelle ligne du tableau ; ainsi

| 3 | 69 | et | 5 | 115 | donnent | 8 | 184 |

$(3 + 5 = 8 \quad \text{et} \quad 115 + 69 = 184)$

Pour attirer l'attention sur ce genre de propriétés, on peut demander aux enfants de compléter certaines lignes du tableau et d'en écrire de nouvelles :

0	0
1	47
2	94
6	282
66	?
?	940
?	?

On peut alors revenir aux activités précédentes avec des nombres dont le maniement dans les calculs est délicat.

— Equations. Exemple :

On sait que $b \times 7 = 245$; trouver b en utilisant les renseignements suivants :

$1 \times 7 = 7$ $\quad 2 \times 7 = 14$ $\quad 3 \times 7 = 21$ $\quad 4 \times 7 = 28$

$5 \times 7 = 35$ $\quad 6 \times 7 = 42$

VI. Partages. Exemple :

Partager 3992 centimes entre 47 enfants de façon que chacun ait la même somme. Est-ce plus ou moins de 10 c. par enfant ? Est-ce plus ou moins de 100 c. par enfant ? Est-ce plus ou moins de 50 c. par enfant ?

Les enfants sont conduits à calculer

$47 \times 100 = 4700$; $47 \times 10 = 470$; $47 \times 50 = 2350$

Si ces résultats ne leur suffisent pas pour résoudre le problème, on peut les encourager à calculer d'autres multiples de 47.

0	0
1	47
2	94
3	141
4	188
5	235
6	282
7	329
8	376
9	423

Les enfants peuvent alors remarquer que

$47 \times 80 = 3760$ $\qquad 3992 - 3760 = 232$

$4 \times 47 = 188$

et $5 \times 47 = 235$

et en déduire qu'on peut distribuer 84 centimes à chaque enfant ; il restera 44 centimes qu'on ne peut pas distribuer.

Ce sont les premiers pas vers une technique de division qui ne sera systématiquement mise en place qu'au C.M.

Remarque : Il n'est pas nécessaire d'introduire le signe ":" ; en effet, il n'a aucune utilité pour résoudre les problèmes, les écritures pouvant toujours se faire de façon multiplicative.

E. LE TRAIN

La situation suivante nous paraît intéressante pour plusieurs raisons :

- Au début du C.E.1, elle permet de proposer des activités variées qui amènent les enfants à réactualiser et consolider les connaissances acquises sur les nombres au niveau du C.P.

- Pour résoudre les problèmes posés, les enfants vont utiliser la comptine dans les deux sens, calculer l'écart de petits nombres, écrire de longues additions, comparer et réduire ces écritures additives.

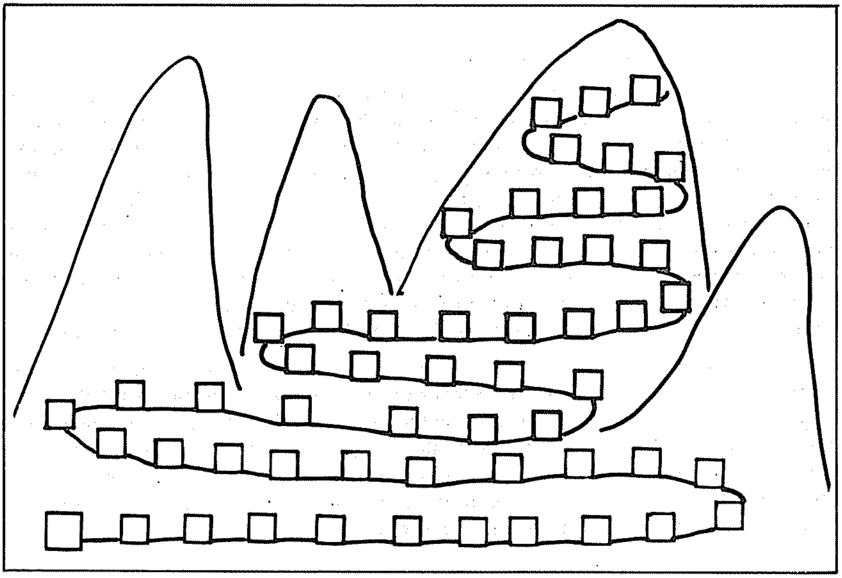
- De plus, les problèmes posés vont conduire les enfants à déborder le cadre de la situation initiale et étendre le champ des nombres utilisés.

- Enfin, au cours de ces activités, les élèves seront amenés à représenter la suite des nombres sur une courbe, puis sur une droite graduée et à utiliser les possibilités offertes par cette représentation tant au niveau du calcul sur les nombres qu'au niveau de la schématisation de situations. En ce sens, cette situation s'intègre au travail effectué à propos de la soustraction *.

Nous proposons ici une succession d'activités possibles à partir de cette situation. Cette liste n'est pas limitative et les activités sont susceptibles de multiples variantes.

I. Phase de familiarisation

Une ligne de chemin de fer est dessinée sur une grande feuille. Cette ligne est jalonnée de nombreuses gares (une cinquantaine environ). Une locomotive est placée à la gare de départ.



* Voir page 59

Le but des activités de cette première phase est le suivant :

— familiarisation avec les déplacements de gare en gare ;

— utilisation de la comptine dans un sens et dans l'autre ;

— préparation au codage numérique des gares.

Le maître laisse les enfants observer le dessin. Tout de suite, ils proposent de faire avancer la locomotive. Cela peut se faire de la façon suivante : on choisit un chef de train et les enfants lui transmettent des messages écrits. Quand le chef de train reçoit un message, il l'interprète et fait avancer la locomotive. Après chaque voyage, la locomotive est remise à la gare de départ.

Rapidement, les messages se simplifient et prennent la forme : $\boxed{a}$,

a étant un nombre. On les appellera des tickets. Avec le ticket $\boxed{5}$ on avance de 5 gares.

Dès ces premières activités, les enfants ne se contentent pas de compter en déplaçant la locomotive. Beaucoup essaient de prévoir où va s'arrêter la locomotive sans tout recompter depuis la gare de départ. Le maître peut les y inciter en proposant un ticket voisin de celui qui vient d'être donné ; ou bien, si le train est arrêté à une gare, en demandant quel ticket il aurait fallu acheter pour arriver à une gare proche qu'il montre.

Le fait de partir toujours, dans cette première phase, de la gare de départ nous paraît important. Il vise à associer à chaque gare un nombre : le nombre figurant sur le ticket qui permet de l'atteindre à partir de la gare de départ, et d'associer ainsi étroitement le codage des gares aux déplacements sur la ligne à partir de l'origine.

II. Codage numérique des gares

Le codage numérique des gares préparé par les activités précédentes peut être motivé de différentes manières. Par exemple, le maître peut fabriquer un tunnel en carton et le placer à différents endroits de la ligne. Comme les gares ne sont pas régulièrement espacées et qu'il y a des virages, les enfants ne peuvent prévoir à coup sûr, en observant la ligne, le nombre de gares cachées par le tunnel. Bien entendu, ils ont la ressource de compter toutes les gares (en général, ils le font spontanément dès la première séance), de compter le nombre de gares vues et d'en déduire le nombre de gares cachées. Mais, au début du C.E.1, cela présente pour eux beaucoup de difficultés et, généralement, ils demandent au maître si l'on ne pourrait pas numéroter les gares.

Signalons que dans une classe de C.E.1, où cette situation avait été présentée plus tard dans l'année, les élèves connaissaient le nombre total de gares et parvenaient assez facilement à calculer le nombre de gares cachées. Le maître installa alors deux tunnels et la situation s'avéra très intéressante. Les enfants trouvèrent que les deux tunnels cachaient douze cases à eux deux, puis cherchèrent toutes les possibilités que cela donnait pour chacun des deux tunnels. Pour certains couples, par exemple

$$\left\{\begin{array}{l} 0 \text{ pour le premier tunnel} \\ 12 \text{ pour le deuxième tunnel} \end{array}\right. \quad : (0,12)$$

ou (1,11), ils disaient : "Oh, ce sera sûrement pas ça !" mais ils ne voulaient pas les abandonner. Ils s'étaient dégagés de la situation pour en arriver à la résolution d'un problème purement mathématique :

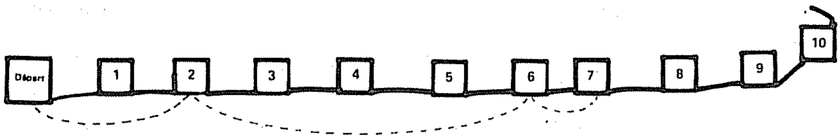
"Trouver tous les couples de naturels (a,b) tels que $a + b = 12$."

(ils avaient d'ailleurs écrit cette équation au tableau). Cette recherche terminée, le maître suggéra de représenter graphiquement tous les couples (a,b) tels que $a + b = 12$. Les enfants furent étonnés de trouver des points alignés. Cela les amena à se poser d'autres problèmes : "Et si c'était 2 tunnels qui cachaient 15 cases, ça serait pareil ?" ... puis à chercher à expliquer l'alignement. Cette digression montre qu'une situation, même aussi simple que celle-là, peut dévier avec bonheur dans des directions variées et que l'on peut voir les enfants abandonner la situation initiale pour se poser des problèmes au niveau des nombres. Il est important de saisir les occasions qui se présentent ; mais vouloir à tout prix reproduire dans une classe exactement ce qui s'est passé dans une autre, c'est-à-dire, en fait, vouloir que les enfants de n'importe quelle classe adoptent exactement la même démarche que ceux d'une classe donnée, diminue beaucoup l'intérêt de la situation.

III. Voyage avec plusieurs tickets

Au cours de cette troisième phase, le chef de train, au lieu de recevoir un seul ticket, en reçoit plusieurs. De plus, il ne revient pas à la gare de départ après l'utilisation de chaque ticket.

Par exemple, s'il reçoit les tickets $\boxed{2}$ $\boxed{4}$ $\boxed{1}$ et les utilise dans cet ordre, il fera effectuer à la locomotive les mouvements suivants :



La locomotive part de la gare de départ, s'arrête aux gares 2 et 6, puis arrive à la gare 7.

Si le chef de train reçoit ensuite un autre lot de tickets, il replace la locomotive à la gare de départ pour effectuer ce nouveau voyage de plusieurs étapes.

Cette troisième phase vise l'extension du champ des nombres utilisés grâce à l'utilisation d'écritures additives. Cette extension amènera nécessairement une modification de la schématisation de la ligne.

Dans un premier temps, le chef de train reçoit deux ou trois tickets et il s'agit de prévoir quelle sera la gare d'arrivée de la locomotive. S'il reçoit les tickets $\boxed{4}$ $\boxed{5}$ $\boxed{3}$ il arrivera à la gare 12. Mais s'il utilise ces mêmes tickets dans un ordre différent, s'arrêtera-t-il aux mêmes gares ? A la fin du voyage, arrivera-t-il à la même gare ? (Ici, les enfants mettent en oeuvre spontanément et implicitement la commutativité et l'associativité de l'addition).

Après une période de familiarisation, on peut grouper les enfants par équipes de quatre et leur faire tirer au sort ou choisir chacun un ticket. Dans chaque équipe, ils devront déterminer quelles sont les gares que l'on peut atteindre en utilisant un, deux, trois ou les quatre tickets de l'équipe.

Par exemple, avec les tickets 2 — 3 — 6 — 10, on peut atteindre 15 gares :

gare d'arrivée	tickets utilisés	gare d'arrivée	tickets utilisés
2	$\boxed{2}$	11	$\boxed{6}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$
3	$\boxed{3}$	12	$\boxed{10}$ $\boxed{2}$
5	$\boxed{2}$ $\boxed{3}$	13	$\boxed{10}$ $\boxed{3}$
6	$\boxed{6}$	15	$\boxed{10}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$
8	$\boxed{6}$ $\boxed{2}$	16	$\boxed{10}$ $\boxed{6}$
9	$\boxed{6}$ $\boxed{3}$	18	$\boxed{10}$ $\boxed{6}$ $\boxed{2}$
10	$\boxed{10}$	19	$\boxed{10}$ $\boxed{6}$ $\boxed{3}$
		21	$\boxed{10}$ $\boxed{6}$ $\boxed{3}$ $\boxed{2}$

Ensuite, on compare les résultats de différentes équipes. Trouvent-elles toutes le même nombre de gares ? Sinon, pourquoi ? Et comment choisir les tickets pour obtenir le plus de possibilités ? (Avec les tickets 2 — 3 — 5 — 12, on n'atteint que 13 gares !).

Autre exercice possible : comment choisir les tickets pour aller le plus loin possible sur la ligne sans sauter de gares ?

Pour amener les enfants à travailler sur des nombres plus grands, on peut leur proposer l'activité suivante :

On dispose de 2 tickets uniquement, mais on peut utiliser chaque ticket autant de fois qu'on le désire. Quelles gares va-t-on pouvoir atteindre ? (chaque affirmation doit être justifiée).

Très vite, les enfants débordent le cadre du train initial. Pour justifier leurs affirmations, ils utilisent des écritures additives. Par exemple : "Avec les tickets 5 et 2, je peux atteindre la gare 12 parce que $5 + 5 + 2 = 12$ ".

Ils se lancent dans de longues listes de calculs et se jettent des défis : "Est-ce que tu peux atteindre 92 ?".

On peut leur laisser choisir librement les tickets. On peut également faire le lien avec les activités de numération en imposant $\boxed{10}$ pour l'un des tickets.

A ce moment-là, la schématisation initiale du train n'est plus adaptée et on va profiter de l'occasion pour la faire évoluer :

- on redresse la ligne en une demi-droite et les gares y sont repérées par les traits d'une graduation, régulière ou non.

- d'autre part, le domaine des nombres utilisés s'élargissant, il ne sera pas toujours possible de dessiner toutes les gares depuis la gare de départ. Par exemple, pour résoudre le problème : "Je suis à la gare 78 ; je veux aller à la gare 83 ; quel ticket vais-je acheter ?", les enfants se contenteront de représenter un morceau de la ligne.

Si l'on propose ensuite des nombres dont l'écart est plus important, par exemple 83 et 135, on voit assez souvent, alors, si la graduation initiale était régulière, les enfants adopter deux échelles pour concilier un souci de régularité et un souci d'efficacité maximum.

A ce stade-là, le langage du train ne constitue plus qu'un support commode. Les enfants travaillent sur les nombres et leurs écritures. La représentation sur la droite les aide à schématiser les problèmes posés et guide leurs calculs. Les graduations évoluent pour des raisons d'efficacité (voir C : La soustraction).

De nombreuses activités sont possibles. Par exemple :

- On dispose d'une liste de couples (gare de départ, gare d'arrivée) ; les trier suivant qu'ils correspondent ou non au même ticket.

- On connaît deux quelconques des trois paramètres, gare de départ — gare d'arrivée — ticket. Trouver le troisième.

IV. Remarque importante

Dans toutes les classes où cette situation a été proposée, le signe "—" avait été introduit à la fin du C.P. ou au tout début du C.E.1. Dès que les enfants ont pu utiliser plusieurs tickets successivement (phase III), ils ont demandé à disposer également de tickets pour reculer et proposé de les noter

$\boxed{-a}$. Parallèlement, les anciens tickets sont devenus $\boxed{+a}$ au lieu de $\boxed{a}$.

Les activités de la phase III ont donc été menées avec à la fois des tickets positifs et des tickets négatifs. Le seul problème posé par l'utilisation de ces deux sortes de tickets est un problème de notation.

En effet, dans un premier temps, pour justifier leurs affirmations, les enfants écrivent :

$\boxed{+5}$ $\boxed{-2}$ $\boxed{+10}$: 13

ou +5 , −2 , +10 : 13

Mais, très vite, on trouve sur les feuilles des écritures comme celle-ci :

$$5 - 2 + 10 = 13$$

qui reflètent mieux leurs calculs. Une telle écriture,sans parenthèses, est ambiguë ; il y a deux interprétations possibles :

$$(5 - 2) + 10 = 13 \qquad\qquad 5 - (2 + 10) = ?$$

Mais les enfants, eux, se comprennent, car ils utilisent tacitement une règle de priorité qui consiste à effectuer les calculs dans l'ordre où ils se présentent à partir de la gauche. Les obliger à mettre systématiquement des parenthèses alourdirait l'écriture de façon aberrante ; par exemple, avec les 2 sortes de tickets $\boxed{+5}$ et $\boxed{-2}$, je peux atteindre la gare 11 parce que

$$11 = 5 + 5 + 5 - 2 - 2$$

et la gare 12 parce que

$$12 = 5 + 5 + 5 - 2 - 2 + 5 - 2 - 2$$

ce qui devrait s'écrire :

$$11 = (((5 + 5) + 5) - 2) - 2$$
$$12 = ((((5 + 5) + 5) - 2) - 2) + ((5 - 2) - 2)$$

Même si la classe, dans ce contexte, se contente de cette règle de priorité, il est indispensable que l'accent soit mis sur le fait que ces écritures peuvent dans le cas général être interprétées de plusieurs façons différentes qui ne conduisent pas toutes au même résultat (contrairement aux écritures additives).

Par contre, l'utilisation de tickets à la fois positifs et négatifs a l'avantage de faire jouer des rôles symétriques à l'addition et à la soustraction. A chaque déplacement est associé le déplacement inverse. L'aide que ce point de vue apporte aux enfants apparaît lors de la résolution d'exercices comme celui-ci :

"Je suis arrivé à la gare 27 avec le ticket $\boxed{+12}$; de quelle gare suis-je parti ?" De nombreux enfants sont bloqués face à un tel problème et le meilleur moyen pour supprimer ce blocage est de leur demander le ticket qu'il faut acheter pour revenir à la gare de départ. On les engage ainsi à utiliser le déplacement inverse.

Il nous semble donc important d'introduire à un moment donné, dans cette activité, des tickets pour faire reculer la locomotive et cela même si le signe "—" n'a pas encore été introduit en classe. Les enfants inventeront alors un signe pour signifier que la locomotive doit reculer et le maître pourra, soit utiliser provisoirement ce signe, soit, s'il le juge bon, introduire à cette occasion le signe "—".

On peut, pour terminer cette suite d'activités, laisser les enfants se poser librement des problèmes et tenter de les résoudre en utilisant la représentation sur la droite. En voici un,relevé dans une classe de CE_2 :

"J'ai utilisé 2 tickets, le premier c'est $\boxed{-3}$, le second tu dois le trouver. En tout, j'ai avancé de 7 gares".
qui est, en fait, parmi les problèmes que l'on peut se poser en matière de soustraction, un de ceux dont la schématisation est la plus difficile.

F. ACTIVITES DE CALCUL — CALCUL RAPIDE — CALCUL MENTAL

L'objectif général de ces activités est d'amener les enfants à structurer d'une manière de plus en plus fine le champ numérique à leur disposition (construction des relations de voisinage et d'ordre, des relations de type additif, multiplicatif...)

Quelques remarques s'imposent :

— pour atteindre cet objectif, les calculs répétés de sommes, de produits, etc. à l'aide des techniques habituelles sont peu utiles, même si ces algorithmes ont été élaborés par les élèves. Ainsi, effectuer le calcul

$$\begin{array}{r} 137 \\ +\ 296 \\ \hline 723 \end{array}$$

n'amène pas pour autant un enfant à voir dans le nombre 296 un nombre proche de 300.

— l'application de recettes stéréotypées, qui fonctionnent alors comme un conditionnement, ne permet pas aux élèves d'élargir leur connaissance des nombres : tel enfant saura additionner 99 sous la forme *additionner* 100 *puis retrancher* 1, mais sera incapable de transférer la demarche sous-jacente à l'addition de 97 ;

— on reconnaît qu'il y a évolution dans la connaissance des nombres quand les élèves font appel à des combinaisons de plus en plus hardies. Il faut évidemment prévoir des démarches pédagogiques permettant cette diversité. C'est ainsi que le recensement des résultats et des méthodes utilisées, puis le débat entre élèves les obligeant à une attitude de réflexion sur ces méthodes, sur leur facilité d'emploi, sur les resultats qu'il faut connaître, sur les erreurs commises ou évitées, remplacent avantageusement les classiques verdicts du maître : *bon, faux*.

— pour favoriser les évolutions conscientes de stratégies de calcul, il est nécessaire de placer les enfants devant de nouvelles contraintes. Bien souvent un argument de rapidité suffit, qu'on l'utilise tel quel, ou indirectement comme condition de réussite dans des jeux numériques.

— contrairement à l'idée répandue selon laquelle "dix minutes de calcul mental en début de séance de mathématique suffisent", certaines procédures de calcul rapide nécessitent un apprentissage spécifique pouvant s'étaler sur une ou plusieurs séquences. Ainsi la multiplication par 10, par 100 constitue une étape importante dans l'apprentissage de l'algorithme de la multiplication ; de même la multiplication par 11 ou par 9 peut faire l'objet de recherches sur grilles qui permettront de trouver et de formuler les règles correspondantes, puis de mettre en évidence des dispositions économiques :

$$123 \times 11 : \quad \begin{array}{r} 123 \\ 123 \\ \hline 1353 \end{array} \qquad\qquad 123 \times 9 : \quad \begin{array}{r} 1230 \\ 123 \\ \hline 1107 \end{array}$$

— enfin, et du fait même de notre numération, il est indispensable que soient connus les résultats élémentaires que sont les sommes et produits des nombres de 0 à 9 entre eux.

Les paragraphes qui suivent développent quelques-uns des points signalés ci-dessus.

I. Apprentissage des tables

Il n'est pas du tout souhaitable, pour des raisons exposées par ailleurs (voir par exemple : B, la multiplication), que la mémorisation des tables conditionne l'apprentissage d'un algorithme général de calcul. Bien plutôt, lorsque celui-ci commence à devenir opérationnel (avec l'aide d'un répertoire de résultats affiché), il importe de sensibiliser de plus en plus les élèves au gain de temps qu'apporte dans la pratique la mémorisation de certains résultats, de façon à obtenir une prise en charge par les élèves eux-mêmes de l'apprentissage de ces tables. Un entraînement spécial à cette fin peut alors être mis efficacement en place par le maître.

Soulignons que les difficultés rencontrées dans l'apprentissage des tables trouvent pour une bonne part leur origine dans une mémorisation imposée au compte-gouttes par le maître, les élèves n'ayant alors pas d'autre motivation que le désir de plaire au maître (ou la crainte de lui déplaire !).

Passons maintenant à la description de quelques activités. Les exemples concernent tantôt la table d'addition, tantôt la table de multiplication ; dans chacun des cas le lecteur fera le transfert.

I.1. Organisation d'un répertoire minimum

I.1.1. Le recensement, dans le répertoire, des égalités qui peuvent être obtenues à partir d'autres (par exemple 3 X 20 = 60 peut se déduire de 3 X 2) conduit à la mise en évidence des égalités "fondamentales".

I.1.2. Pour trouver rapidement une égalité dont on a besoin, il est commode

— d'aligner les égalités dans lesquelles le premier facteur du produit est le même ;

— de ranger ces lignes, puis les égalités à l'intérieur de chaque ligne.

Exemple :

1 X 4 = 4	1 X 7 = 7		
2 X 3 = 6	2 X 6 = 12	2 X 9 = 18	
3 X 1 = 3	3 X 4 = 12	3 X 6 = 18	3 X 8 = 24
4 X 1 = 4	4 X 5 = 20	4 X 10 = 40	

— éventuellement d'aligner aussi en colonnes celles pour lesquelles le deuxième facteur du produit est le même. On obtient alors un tableau d'égalités.

Exemple :

1 X 1 = 1	1 X 2 = 2			1 X 5 = ...	....
2 X 1 = 2	2 X 2 = 4	2 X 3 = 6			....
3 X 1 = 3			3 X 4 = 12		....

— En dernier lieu, il est possible de passer à la table de Pythagore habituelle.

I.2. Travail sur la structure des tableaux obtenus*

Exemple d'activités autour de la table d'addition du CE_1.
par Jacques Painchault

1.2.1. Avant d'arriver à l'étude qui suit.

Les points suivants ont été abordés avec les enfants :

— Constitution de répertoires de sommes.
— Organisation de ces répertoires en table de Pythagore.
— Construction et organisation du répertoire classique appelé "table d'addition" en tableau à double entrée.

Les enfants utilisent dans un premier temps la "table" qu'ils ont construite mais, pour les activités que nous proposons, il est indispensable que chacun dispose de plusieurs tables, claires, bien imprimées sur lesquelles il peut dessiner, colorier, raturer, etc....

+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
5	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
6	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
7	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
8	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
9	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

* Nous reproduisons ici un article paru dans la revue "*Grand* N" n° 8

Ces activités se situent au début du CE_1 et peuvent être reprises par la suite.

I.2.2. Description du travail effectué dans une classe

"Voici des répertoires de sommes" (on les distribue). *"Observons-les". "Quelles remarques pouvez-vous faire ?"*

Les premières idées apparaissent rapidement et les enfants ont beaucoup de mal à les exprimer. C'est en les aidant à les formuler que nous précisons un certain vocabulaire, peut-être déjà utilisé précédemment à propos des tableaux cartésiens : ligne, colonne, diagonale montante (de gauche à droite), diagonale descendante.

Peu à peu les enfants parviennent à exprimer clairement ce qu'ils observent, au besoin ils montrent sur une "table" écrite au tableau noir ce qu'ils veulent dire.

— *"Dans une ligne les nombres que l'on peut lire (de gauche à droite) sont comme quand on compte".*

— *"Les nombres vont de un en un".*

— *"C'est pareil dans les colonnes".*

— *"C'est pareil dans toutes les lignes et dans toutes les colonnes".*

On enregistre toutes les observations en s'assurant de la compréhension et de l'accord des autres enfants.

Des observations considérées comme "originales" par presque toute la classe peuvent être mises en réserve pour examen ultérieur (voir plus loin).

Quand le rythme des propositions des enfants se ralentit, on en profite pour tenter de faire expliquer des observations faciles à justifier : "les lignes et les colonnes sont des extraits de la suite des naturels".

On n'hésite pas à manipuler des collections d'objets pour justifier ces observations car, au niveau où nous nous plaçons, les propriétés de l'addition dans N sont encore à découvrir et le plus souvent inaccessibles.

Exemple : si 10 suit 9 dans la ligne du 4, c'est parce que :

$4 + 6 = 4 + (5 + 1)$

$4 + (5 + 1) = (4 + 5) + 1$

$(4 + 5) + 1 = 9 + 1$

La justification fait donc intervenir l'associativité et ne serait possible qu'après étude du parenthésage ou des arbres de calcul. On se contente donc de formulation à caractère plus intuitif du genre : "dans 4 + 6, il y a un de plus que dans 4 + 5, parce que 6, c'est un de plus que 5". En se déplaçant sur une même ligne ou sur une même colonne, les enfants voient donc qu'étant donnés deux naturels n et p, la somme de n et du suivant de p est le suivant de $n + p$ (*).

(*) Il n'est pas question de demander une formulation de cette propriété. Il suffit que les enfants l'aient perçue intuitivement.

Une propriété plus générale se dégage des réponses aux questions suivantes :

Je me place dans une case du tableau, je lis le nombre écrit dans cette case. Que puis-je observer si je fais un pas à droite (ou à gauche, ou vers le haut, ou vers le bas) ? On précise ce qu'on appelle un pas si des exercices de cheminement sur quadrillage n'ont pas été faits auparavant.

On fait de nombreuses observations relatives à ces questions et on essaie de justifier les constatations que l'on peut faire.

Des exercices permettent de vérifier l'acquisition par tous des propriétés établies.

Exemple : cachons la table. Supposons que nous nous plaçons dans une case marquée 7. Peut-on prévoir ce qui sera marqué dans la case d'arrivée si on fait 5 pas à droite ? (Ou à gauche, etc...). Vérifions.

Remarquons que pour vérifier, tout le monde ne part pas de la même case. Certains peuvent même sortir de la "table".

Autres observations des enfants

"Dans la diagonale montante il n'y a que des 9"
"Pour les 7, c'est pareil".

Il y aura certaines difficultés à exprimer la position des 7. Peut-être pourra-t-on dire qu'ils sont disposés parallèlement à la diagonale montante ?

On teinte d'une même couleur toutes les cases marquées 7, toutes les cases marquées 11.

On tente d'expliquer : pour passer d'une case de la diagonale à une autre qui la touche par un coin, quel trajet peut-on faire ? *"Un pas à droite puis un pas vers le haut"*... Ou encore ?

Quel trajet permet de passer d'une case marquée 7 à une de ses voisines marquée 7 ?

L'examen de la diagonale montante et de ses parallèles conduit les enfants qui ne l'ont pas déjà fait à examiner la diagonale descendante et ses parallèles. On essaie de justifier les résultats observés.

Propositions "originales"

"Si on descend l'escalier, on trouve 0, 1, 2, 3, 4...".

L'enfant explique à ses camarades ce qu'il appelle "l'escalier". La propriété se justifie assez facilement.

"Mais alors, dit un autre, c'est pareil dans tous les escaliers". Il montre à ses camarades où il voit d'autres escaliers. On justifie.

"C'est encore pareil, dit un troisième, *dans les grands escaliers."*

"Et c'est encore pareil si toutes les marches ne sont pas aussi grandes". (Ce que nous appelons des escaliers irréguliers).

+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
5	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
6	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
7	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
8	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
9	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

"l'escalier"

+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
5	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
6	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
7	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
8	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
9	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

autres "escaliers"

+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
5	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
6	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
7	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
8	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
9	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

"grands escaliers"

+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
5	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
6	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
7	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
8	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
9	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

"escalier irrégulier"

+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
5	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
6	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
7	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
8	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
9	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

"escalier irrégulier montant"

Les "escaliers" leur plaisent beaucoup et certains veulent observer les "escaliers" montants. Ils dégagent assez facilement une propriété observable pour les "escaliers réguliers", mais renoncent à expliquer ce qui se passe dans les escaliers irréguliers, sauf une petite fille qui me glisse à l'oreille : "*On danse autour d'un nombre*" (ce qui n'est vrai que pour certains escaliers irréguliers montants).

I.2.3. Autres propriétés observables.

Les enfants de la classe ont orienté leurs observations dans le sens des cheminements sur quadrillage, activité déjà pratiquée par eux au C.P. D'autres propriétés peuvent leur être suggérées, qui leur ouvriront de nouvelles démarches :

— La symétrie par rapport à la diagonale descendante, qui découle de la commutativité.

— On peut isoler des morceaux de table (de 4 cases par exemple) et les observer (lignes, diagonales, colonnes).

11	12
12	13

8	9
9	10

On peut vérifier, puis tenter d'expliquer pourquoi, quel que soit le morceau extrait, la somme des nombres écrits dans chacune des diagonales est la même.

Question :

Sans regarder la "table", peut-on dire combien de cases sont marquées 5... ou 7... ou 13 ?

On vérifie ce que l'on a trouvé. Il s'agit d'exercices de décomposition de 5, 7 ou 13 en somme de deux nombres. Le cas de 13 peut aider à comprendre que la "table" utilisée n'est qu'un répertoire partiel que l'on pourrait prolonger.

1.2.4. Objectifs de ces activités.

— Familiariser les enfants avec le répertoire de sommes et favoriser sa mémorisation ultérieure.

— Exercer les enfants à la lecture et à l'utilisation de tableaux cartésiens.

— Faire apparaître dans les justifications de propriétés des "îlots logiques". Percevoir la différence entre ce que l'on "voit" et ce que l'on "explique".

II. Comment aider à mémoriser

II.1 Dans un premier temps, il s'agit de réduire le nombre des mémorisations fondamentales et de faire retrouver les autres à partir de ce noyau de façon que l'enfant ne soit jamais démuni face à la recherche d'un résultat élémentaire. Les différentes étapes pourraient être les suivantes :

- mémoriser les produits de la forme $2 \times n$ ou $n \times 2$ (ils seront trouvés à partir de $n + n$, jusqu'à mémorisation);
- contrôle de cet apprentissage par des exercices oraux (le maître énonce $2 \times n$) ou écrits (résoudre $2 \times \square = 16$) ;
- se servir de ces résultats pour trouver mentalement des produits de la forme $2 \times n$ ou $n \times 2$ (n plus petit que 100 dans un premier temps) ;
- compter de 5 en 5 est un exercice facile et permet de s'imprégner simultanément des produits de la forme $n \times 5$ ou $5 \times n$ $(n \leqslant 9)$;
- des travaux sur grilles rectangulaires adéquates préparent autant d'outils permettant de retrouver des résultats de la forme

$n \times 9$ comme : $(n \times 10) - n$;	$n \times 4$ comme : $(n \times 2) \times 2$;
$n \times 8$ comme : $(n \times 4) \times 2$;	$n \times 3$ comme : $(n \times 2) + n$;
$n \times 6$ comme : $(n \times 5) + n$	ou comme : $(n \times 3) \times 2$;

- après tout ce travail, et compte tenu de la commutativité de la multiplication, le seul produit non envisagé est 7×7, qui peut s'obtenir comme $(7 \times 6) + 7$. Notons d'ailleurs que pour des raisons inconnues, c'est un produit très bien mémorisé : on peut donc s'en servir pour retrouver cet autre : 8×7, qui pose toujours plus de problèmes ($8 \times 7 = (7 \times 7) + 7$, soit $49 + 7$ ou 56) (mais certains enfants préfèrent retrouver 7×8 en prenant le "milieu" entre 6×8 et 8×8).

II.2. On prévoira un deuxième temps de mémorisation totale : il s'agira de faire abandonner les techniques artisanales décrites précédemment au profit d'une mémorisation pure et simple. Un contexte de jeu où l'automatisme devient condition de réussite permet une utilisation répétée et non lassante des résultats, amenant à leur fixation.

Voici quelques-uns de ces jeux :

II.2.1. Jeu de Pythagore (*)

Règle du jeu

Dans votre "Jeu de Pythagore", vous avez :
un tableau de 144 cases : 23 de ces cases (dont une grise) portent un nombre, et 121 (dont 11 grises) sont vides :
121 cartons, à placer sur les cases vides du tableau.

(*) Extrait d'un article paru dans l'EDUCATION du 9-12-1971.

Comment place-t-on les cartons ? Chaque carton peut être posé sur une case libre du tableau à cette condition : lisez le nombre qui se trouve au-dessus de la case que vous voulez occuper, et celui qui se trouve à gauche sur la même ligne : multipliez ces nombres l'un par l'autre : le carton qui porte le nombre que vous avez ainsi obtenu peut occuper cette case.

Par exemple, un carton marqué 24 pourra se mettre sur la 8e case à partir de la gauche de la 3e rangée à partir du haut, ou sur la 6e case de la 4e rangée, ou en quatre autres endroits que vous trouverez de même.

On ne doit pas mettre deux cartons l'un sur l'autre dans une même case, et on ne met rien sur les cases qui portent un nombre.

Vous voulez jouer seul ? Prenez soixante cartons ; retournez-en un autre et placez-le. Puis, à partir de celui que vous avez placé ainsi, placez les autres en posant un à un des cartons dans des cases adjacentes à une case déjà occupée (deux cases sont adjacentes, cela veut dire qu'elles se touchent par un bord, comme les cases où l'on a placé les nombres 72 et 81, ou 99 et 110). Si vous remplissez une case grise, ou deux, ou trois, etc vous aurez le droit de remettre à la fin de la partie un carton, ou deux, ou trois, etc., avec les soixante que vous avez laissés en commençant. Vous avez gagné si vous vous êtes ainsi défait de tous vos cartons.

Vous êtes plusieurs joueurs ensemble ? Répandez les cartons retournés, mêlez-les.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2											24
3							24				
4											
5											
6			24								
7											
8		24						72			
9								81			
10											
11								99	110		
12	24										

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2											
3											
4											
5											
6											
7											
8											
9											
10											
11											
12											

Qu'un joueur mette en place sur le tableau trois cartons pris au hasard. Puis chacun de vous prend des cartons :

si vous êtes 2	*joueurs, chacun prendra*	*20 cartons*
3		*15*
4		*12*
5		*10*

Regardez et classez vos cartons. Puis, chacun à son tour, vous en placez sur une case adjacente à une case déjà occupée (deux cases sont adjacentes, cela veut dire qu'elles se touchent par un bord). Celui qui occupe une case grise (le nombre qu'il place alors s'appelle un "carré parfait") remet aussitôt un carton de son jeu avec ceux que personne n'a pris. Celui qui ne trouve rien dans son jeu à poser sur le tableau puise un carton parmi ceux que personne n'a pris, et l'on passe son tour. Le gagnant est celui qui, le premier, s'est défait de tous ses cartons.

On a donc là tout à la fois un exercice et un véritable jeu de société. Nous avons vu des enfants, des adultes aussi, s'absorber spontanément plusieurs heures sur les combinaisons qu'ils y découvraient ; et la forme "réussite" pour un joueur seul incite à étudier des combinaisons au moins aussi variées que la plupart des réussites du jeu de cartes.

En effet, les produits à placer sont au nombre de 53, et parmi eux :

9 ne se présente qu'une fois,	*ce qui donne 9 cartons,*
33 se présente deux fois,	*ce qui donne 66 cartons,*
1 se présente trois fois,	*ce qui donne 3 cartons,*
5 se présente quatre fois,	*ce qui donne 32 cartons,*
1 se présente cinq fois,	*ce qui donne 5 cartons,*
1 se présente six fois,	*ce qui donne 6 cartons*
53 produits, répartis sur	*121 cartons*

Ainsi, le joueur qui détient l'un des 9 premiers cartons (4, 9, 25, 49, 64, 81, 100, 121, 144) n'a pas à se presser de les poser : aucun concurrent ne peut occuper la place, et comme ces cases sont celles de carrés parfaits, il a même intérêt à attendre, s'il peut, pour rejeter à cette occasion un carton que la tournure du jeu révèle difficile à placer. Au contraire, pour tous les autres produits, la place que vous espérez occuper, à moins que vous ne déteniez tous les cartons relatifs au produit considéré, peut être prise par l'un des joueurs dont le tour précède le vôtre, et cela a d'autant plus de chances de se produire que le nombre de cases possibles pour ce produit est plus élevé et que vous possédez moins de cartons de ce produit : on s'empressera donc de placer le carré parfait 36, et, si ce carré parfait n'est pas encore posé, on songera que c'est probablement avantager l'adversaire que de remplir une case adjacente à celle du carré parfait 36.

Serrons davantage cette étude. Le tableau comporte un carré ABCD : traçons les diagonales AC et BD. La diagonale AC divise le carré en deux triangles rigoureusement symétriques : de part et d'autre de cette diagonale, on retrouve aux mêmes places les mêmes produits, et c'est pour cela que la règle du jeu prescrit de ne pas utiliser au départ plus de la moitié du total des cartons. Au contraire, la diagonale BD ne divise pas le carré des produits en triangles de valeur ici équivalente ; si l'on étudie les chances pour chaque case du tableau d'être remplie par les trois cartons pris au hasard au début de la partie (avec plusieurs joueurs), on s'aperçoit que ce sont les cases du triangle ABD qui ont le plus de chances d'être occupées ; entre les deux triangles, les cases traversées par la diagonale BD mises à part, le rapport des chances est comme 171 est à 131 (un peu plus que 9 par rapport à 7). Ainsi, chaque case du tableau entier a, si l'on prend un seul carton au hasard, une chance d'être remplie qu'on peut exprimer par 2,8 sur 121 ; mais, pour chacune des cases situées au-dessus et à gauche de BD, la valeur de cette chance s'élève à 3,1 sur 121, et, pour chacune de celles situées au-dessous et à droite, elle s'abaisse à moins de 2,4 sur 121.

Chaque bande n'a pas les mêmes chances d'être remplie : les plus favorisées sont celles des produits dont un des facteurs est 6 (c'est-à-dire 2 X 3) ; les plus défavorisées sont celles dont un des facteurs est 7 ou 11 (nombres premiers). Si l'on étudie les bandes diagonales, ou parallèles aux diagonales, même contraste : la bande des cases traversées par la diagonale BD réunit deux fois plus de chances que celle des cases traversées par la diagonale AC ; on a presque une chance sur 8 pour qu'un carton pris au hasard au début puisse prendre place sur la diagonale BD.

On voit donc qu'un joueur averti saura toujours tirer du hasard le meilleur parti : et ce jeu, en apparence si simple, amène à réfléchir sur des combinaisons variées. Lorsqu'on joue seul, le premier carton placé (le 61e pris sur les 121) a une grande importance : si c'est le 4 ou le 144, les chances de pouvoir déboucher sont réduites au minimum ; elles sont très fortes, au contraire, si l'on a tiré le 25 ou le 81. Et, si le carton tiré peut se placer en plusieurs points, le choix de ce point de départ n'est pas indifférent : les six places du 24 ont ainsi trois valeurs inégales, les plus rapprochées du centre étant en principe (mais cela dépend des cartons qu'on a à placer) les plus favorables.

Tenons-nous-en là : notre but est atteint si nous avons montré que ce jeu est un instrument pédagogique de valeur et fournit un joli divertissement extra-scolaire pour tous les âges ; il est rare qu'un matériel réalise à la fois l'un et l'autre.

Charles Rossel

II.2.2. Une variante de "l'Homme Noir" *

On confectionne un jeu de 29 cartes en fonction des nombres qui doivent être travaillés. Ces cartes portent des nombres.

Exemple :

$\boxed{3 + 2}$ $\boxed{1 + 4}$ $\boxed{2 + 3}$ $\boxed{0 + 5}$ $\boxed{3 + 3}$ $\boxed{2 + 4}$ $\boxed{1 + 6}$

Quatre cartes portent deux nombres dont la somme est 5, quatre cartes portent deux nombres dont la somme est 6, et ainsi de suite jusqu'à 9, ce qui donne 20 cartes.

* Paru dans *Math-Ecole* n° 81

Une seule carte porte deux nombres dont la somme est 10. C'est celle qui restera entre les mains du joueur perdant (l'homme noir). Quatre cartes portent deux nombres dont la somme vaut 11 et quatre portent deux nombres dont la somme vaut 12.

Comme avec un jeu de cartes ordinaires, le joueur a le droit de poser sur la table deux cartes représentant la même somme. On peut donc poser 3 + 2 avec 1 + 4 ou avec 2 + 3 ou encore 0 + 5. En faisant choisir, à tour de rôle, une carte de son jeu à son voisin, on dépose deux cartes chaque fois que c'est possible, A la fin du jeu, l'un des joueurs conserve forcément la seule carte valant 10.

De nombreuses variantes peuvent être imaginées en changeant les nombres utilisés. Avec des élèves plus grands, par exemple, les cartes pourront porter les nombres 627, 173, 580, 20, 442, 258, etc. On aura alors le droit de déposer deux cartes lorsque leur somme est égale à un multiple de 100.

Remarquons encore que, avec la première série de cartes, les petits peuvent aussi jouer au jeu de la bataille qui les amuse toujours beaucoup.

II.2.3. D'autres activités à partir de cartes à jouer**

Le maître a fabriqué un jeu de 118 cartes sur lesquelles il a écrit les nombres suivants :

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11, 16, 23, 25, 28, 1 + 0, 0 + 1, 1 + 1, 2 + 0,
0 + 2, 0 + 3, 1 + 2, 2 + 1, 3 + 0, 0 + 4, 1 + 3, 2 + 2, 3 + 1, 4 + 0,
0 + 5, 1 + 4, 2 + 3, 3 + 2, 4 + 1, 5 + 0, 0 + 6, 1 + 5, 2 + 4, 3 + 3,
4 + 2, 5 + 1, 6 + 0, 0 + 7, 1 + 6, 2 + 5, 3 + 4, 4 + 3, 5 + 2, 6 + 1,
7 + 0, 0 + 8, 1 + 7, 2 + 6, 3 + 5, 4 + 4, 5 + 3, 6 + 2, 7 + 1, 8 + 0,
0 + 9, 1 + 8, 2 + 7, 3 + 6, 4 + 5, 5 + 4, 6 + 3, 7 + 2, 8 + 1, 9 + 0,
0 + 11, 1 + 10, 2 + 9, 3 + 8, 4 + 7, 5 + 6, 6 + 5, 7 + 4, 8 + 3, 9 + 2,
10 + 1, 11 + 0, 0 + 16, 1 + 15, 2 + 14, 3 + 13, 4 + 12, 5 + 11, 6 + 10,
7 + 9, 8 + 8, 9 + 7, 10 + 6, 11 + 5, 12 + 4, 13 + 3, 14 + 2, 15 + 1,
16 + 0, 11 + 12, 13 + 10, 2 + 21, 3 + 20, 18 + 5, 6 + 19, 1 + 24, 13 + 12.
11 + 14, 10 + 15, 9 + 16, 19 + 6, 14 + 14, 3 + 25, 13 + 15, 24 + 4,
26 + 2, 7 + 21, 16 + 12, 25 + 3, 17 + 11.

Variante du loto : Le maître garde pour lui les 14 premières cartes (1, 2, ... 28) et distribue le reste aux enfants. Quand il lève une carte, les enfants qui ont une carte représentant le même nombre doivent la lever (ensuite ils la retournent sur leur table). Discussion sur le nombre de bras levés en fonction du nombre proposé par le maître.

Jeu de bataille : 52 cartes pour le maître, les autres distribuées aux enfants. Règle classique de la bataille, maître contre classe.

** D'après un article de C. COMITI dans *Grand* N n° 2.

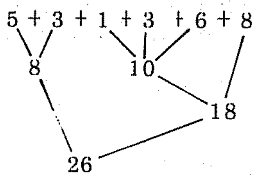
II.2.4. Jeu sur l'alphabet.*

Au tableau sont écrites les lettres de l'alphabet. On convient que

a vaut 3 points
b vaut 1 point
c vaut 5 points
e vaut 8 points
n vaut 6 points

Combien vaut le mot "cabane" ?

Recherches - Réponses - Justification du type



Le maître attribue des valeurs arbitraires à d'autres lettres et invite les élèves à calculer combien de points valent certains mots. Si chaque lettre a une valeur, les élèves peuvent calculer le nombre de points correspondant à leur prénom.

Inversement les élèves peuvent chercher un mot qui vaut 10 points, un mot de trois lettres qui vaut le moins (le plus) de points possible, etc.

III. Quelques réflexions sur le calcul mental

Le calcul mental se laisse difficilement enfermer dans des règles strictes. Un même calcul sera effectué de façons différentes par des enfants différents, ou par un enfant à des moments différents de ses progrès en calcul. La méthode qu'il utilise dépend de ce qu'il a déjà mémorisé, de la taille des nombres en jeu, du fait qu'il conserve ou non l'un des nombres, ou les deux, sous les yeux et enfin de sa connaissance des propriétés des opérations.

Voici quelques exemples :

$37 + 5 = 42$	directement pour un individu bien entraîné
$37 + 5 = (37 + 3) + 2$ $37 + 5 = 40 + 2$ $37 + 5 = 42$	à condition d'avoir repéré dans 40 un voisin intéressant de 37 et de connaître sans hésiter la décomposition de 5 correspondante.
$37 + 5 = 30 + (7 + 5)$ $37 + 5 = 30 + 12$ $37 + 5 = 42$	à condition d'avoir mémorisé $7 + 5 = 12$.

* Tiré de "L'addition au CP", IREM de Bordeaux

Dans l'exemple qui suit, nous montrons comment le maître peut provoquer une évolution des stratégies de calcul en jouant sur les deux paramètres à sa disposition : la taille et le degré de "bonne proximité" des nombres dans le calcul proposé.

Conditions du calcul

a) Soit donc à calculer $37 + 48$:

- Si les deux nombres restent sous les yeux des enfants, ceux-ci auront tendance à reproduire mentalement la technique écrite; on aboutit alors à ce qu'on appelle encore la technique du calcul en ligne.
- Si le maître écrit au tableau 37 puis annonce "plus quarante huit", le calcul qu'on verra le plus fréquemment sera

$$\begin{aligned} 37 + 48 &= (37 + 40) + 8 \\ &= 77 + 8 \\ &= 85 \end{aligned}$$

- Si le maître annonce oralement les deux nombres, pour des raisons de proximité, combinées à la plus grande facilité de mise en mémoire, on aura quelques chances de voir apparaître le calcul

$$\begin{aligned} 37 + 48 &= (37 + 50) - 2 \\ &= 87 - 2 \\ &= 85 \end{aligned}$$

On provoquera d'ailleurs encore plus sûrement l'émergence de cette stratégie en augmentant la taille des nombres en jeux : par exemple $37 + 448$.

b) De même pour la soustraction :

$143 - 17$ peut être calculé de différentes façons :

$$\begin{tikzcd} 17 \arrow[r, "+3"] \arrow[rrr, bend right, "+126"'] & 20 \arrow[r, "+80"] & 100 \arrow[r, "+43"] & 143 \end{tikzcd}$$

ou $143 \xrightarrow{-10} 133 \xrightarrow{-7} 126$

ou $143 \xrightarrow{-10} 133 \xrightarrow{-3} 130 \xrightarrow{-4} 126$

ou $143 \xrightarrow{-20} 123 \xrightarrow{+3} 126$

La première méthode semble plus lourde ; les trois autres seront préférées en fonction des possibilités et des connaissances de chacun.

c) Pour la multiplication, les produits devenant vite très grands quand la taille des facteurs augmente, les possibilités de calcul mental sont plus limitées. Néanmoins le calcul mental intervient dans :

- la construction des tables
- les produits par 10, 100, 1000 . . . ou 20, 500 . . .
- et en conséquence les calculs d'ordre de grandeur des résultats. Par exemple, 22 X 78 est voisin de 20 X 80, c'est-à-dire de 1600

Il y a en outre d'autres cas intéressants ; par exemple : la multiplication par 9, par 11, par 5 (si l'on sait prendre la moitié d'un nombre), par 4, par 8 et même par 16 (par doublements successifs).

IV. Quelques jeux numériques

La plupart de ces jeux sont décrits dans le document de recherche n° 2 de l'I.N.R.D.P. ou dans les nos 10 et 12 de la revue *Grand* N .

IV.1. Avec des dés

IV.1.1. — *Deux enfants.* Chacun lance deux dés (du commerce ou bien spécialement fabriqués pour la circonstance à partir de cubes de bois par exemple) et calcule la somme (ou le produit) des points obtenus.

Pour chaque partie, les enfants écrivent leur score personnel et le comparent avec celui de l'adversaire (=, <, >).

IV.1.2. — *Variante* : les deux dés possédés par chaque enfant sont de couleurs différentes (rouge - vert) et l'on calcule, quand c'est possible, la différence des points obtenus dans un ordre déterminé ("rouge moins vert").

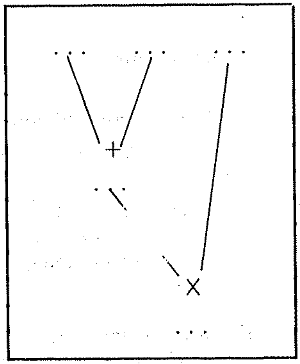
IV.1.3. — *Collectivement* ou par équipes (la classe est alors divisée en un nombre pair d'équipes opposées deux à deux) :

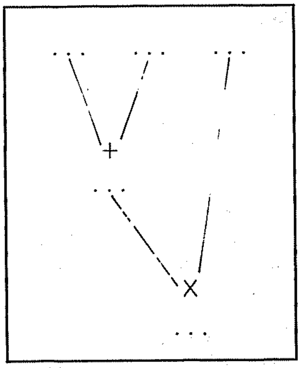
. trois dés portent des nombres ;

. des cartes : sur chaque carte se trouve un moule à calcul ou bien un arbre à calcul.

Exemples de cartes :

(. . . + . . .) X . . .	(. . . X . . .) + . . .	(. . . X . . .) : . . .
(. . . : . . .) X . . .	(. . . X 4) + (. . . X . . .)	(. . . X . . . X 12) : . . .





On montre une carte portant soit un moule, soit un arbre, puis on lance trois dés.

Avec les trois nombres sortis et le programme indiqué par le moule ou l'arbre, les élèves doivent déterminer le plus grand nombre possible, ou bien dépasser un nombre fixé à l'avance, ou bien s'approcher le plus près possible d'un nombre fixé.

Quand les élèves sont familiarisés avec ce type de travail, ils peuvent construire eux-mêmes des moules à calcul. Chaque équipe construit un moule et joue contre une autre équipe qui doit utiliser le programme donné par le moule.

IV.1.4. Autre jeu de dés

Matériel nécessaire : Trois dés et la table de nombres que voici :

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
15	16	18	20
24	25	30	36

Bien entendu, on peut agrandir cette table en fonction de l'habileté des enfants.

Règle du jeu.

1) On peut jouer par groupes de deux ou cinq joueurs.

2) Pour commencer le jeu, chaque joueur jette à tour de rôle les trois dés et détermine la somme des trois nombres qui apparaissent sur la face du dessus. Le joueur qui a la plus petite somme commence le jeu.

3) Le premier joueur jette les trois dés. Il peut utiliser les opérations connues et une seule fois chaque nombre sorti pour obtenir un nombre figurant sur la table. Il marque alors d'une croix le résultat. Quand il a fini, il passe les dés au joueur se trouvant à droite.

4) Pour marquer des points, un joueur doit couvrir une case de la table qui est voisine, par un côté ou un sommet, d'une case déjà couverte.

Si la case est voisine d'une case déjà couverte, il marque un point. Si la case est voisine de deux cases déjà couvertes, il marque deux points ...

Si la case n'est pas voisine d'une case couverte, il ne marque rien.

5) Quand un joueur ne peut obtenir un nombre qui n'a pas été couvert, il passe son tour.

Si, par contre, il passe son tour alors qu'il pouvait jouer, le premier joueur qui découvre l'erreur marque les points correspondants, ce qui ne change pas le tour de table.

6) Un joueur qui passe trois fois de suite est éliminé.

7) Le joueur qui obtient le plus grand nombre de points a gagné.

IV.2. *Jeux de dominos*

IV.2.1. *Avec les dominos classiques.*

La règle du jeu peut être modifiée : deux cases pourront être juxtaposées si la différence entre les nombres indiqués est un nombre fixé à l'avance (nombre compris entre 1 et 6).

IV.2.2. *Avec des dominos fabriqués avec le maître ou les élèves.*

La construction de ces dominos peut être l'occasion d'un petit travail :

Combien peut-on fabriquer de dominos avec sept nombres ? Pour répondre, il faut savoir si on fabriquera

5	8

et

8	5

ou si on s'autorisera à retourner les dominos. Si on se permet ce retournement, alors, comme dans un jeu normal, on en trouve 28. Contrairement au jeu normal, on n'écrira pas deux fois avec la même écriture un nombre donné. On a donc besoin de huit écritures différentes pour un même nombre. Par exemple, pour les nombres 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76 on pourra fabriquer :

70 | 60 + 10	71 | 60 + 11	26 + 46 | 25 + 48	59 + 14 | 70 + 6
59 + 11 | 50 + 21	30 + 41 | 56 + 16	30 + 42 | 18 + 56	74 | 60 + 14
12 + 58 | 50 + 22	21 + 50 | 40 + 33	18 + 54 | 25 X 3	70 + 4 | 13 + 62
22 + 48 | 50 + 23	18 + 53 | 20 + 54	11 + 61 | 33 + 43	51 + 23 | 72 + 4
20 + 50 | 52 + 22	15 + 56 | 100 - 25	73 | 60 + 13	75 | 60 + 15
30 + 40 | 50 + 25	25 + 46 | 30 + 46	70 + 3 | 50 + 24	70 + 5 | 42 + 34
25 + 45 | 40 + 36	72 | 60 + 12	67 + 6 | 31 + 44	76 | 60 + 16

Ces jeux de dominos, fabriqués par les élèves, pourront être utilisés avec la règle classique et, comme les jeux de cartes ou de loto, favoriseront le calcul mental.

IV.3. *"Le compte est bon"*

On choisit (ou tire au sort) quatre à cinq nombres de un ou deux chiffres au maximum ; avec ces nombres et les opérations connues des enfants, chaque joueur essaie de fabriquer un nombre qui soit le plus proche possible d'un nombre de trois chiffres choisi (ou tiré au sort) comme cible. On peut convenir de n'utiliser qu'une seule fois certains nombres, ou bien de les utiliser tous, autant de fois que l'on veut, ou bien encore d'utiliser tous les nombres chacun une seule fois.

Exemple : Nombres choisis : 12 ; 25 ; 10 ; 5 ; 7
Cible : 157

1ère proposition : (25 X 5) + 7 + 12 + 10 soit 154
2ème proposition : (7 X 12) + 25 + (5 X 10) soit 159
3ème proposition : (10 + 5) X 12 — (25 + 7) soit 148

La 2ème proposition est donc gagnante.

Pour ce jeu, de multiples variantes existent :

- On peut donner les nombres et un moule à calcul (déjà indiqué ci-dessus).
- Le moule et le nombre cible sont donnés et on recherche des nombres convenables à choisir au départ. Il s'agit là de la résolution d'équations à plusieurs inconnues posées sur l'ensemble des naturels.

IV.4. *"Objectif zéro"*

Quatre nombres inférieurs à 20 étant donnés, il s'agit, en utilisant les opérations connues (ou certaines d'entre elles seulement) et les quatre nombres, une fois chacun, d'obtenir le plus petit naturel possible.

Exemple : 7, 8, 5, 2

$(5-2)-(8-7)=2$

$(7\times 2)-(8+5)=1$

IV.5. " *Golf*"

On part de 6 et on doit parvenir à 25 ; pour cela, seules sont autorisées les consignes $\longrightarrow(+5)\longrightarrow$ et $\longrightarrow(-2)\longrightarrow$.

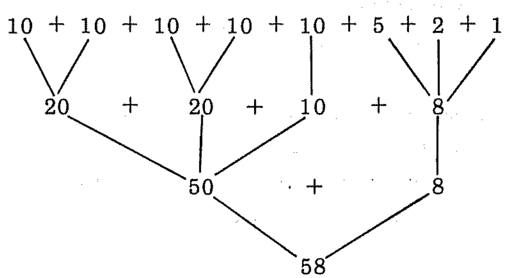
Il est, dans ce cas, possible d'atteindre la cible. Des résultats sont obtenus empiriquement d'abord. Ensuite on peut organiser ces résultats :

$$\begin{tikzcd}
6 \arrow[r, "+5"] \arrow[d, dashed, "-2"'] & 11 \arrow[r, "+5"] \arrow[d, dashed, "-2"'] & 16 \arrow[r, "+5"] \arrow[d, dashed, "-2"'] & 21 \arrow[r, "+5"] \arrow[d, dashed, "-2"'] & 26 \arrow[r, "+5"] \arrow[d, dashed, "-2"'] & 31 \arrow[d, dashed, "-2"'] \\
4 \arrow[r] \arrow[d, dashed] & 9 \arrow[r] \arrow[d, dashed] & 14 \arrow[r] \arrow[d, dashed] & 19 \arrow[r] \arrow[d, dashed] & 24 \arrow[r] \arrow[d, dashed] & 29 \arrow[d, dashed] \\
2 \arrow[r] \arrow[d, dashed] & 7 \arrow[r] \arrow[d, dashed] & 12 \arrow[r] \arrow[d, dashed] & 17 \arrow[r] \arrow[d, dashed] & 22 \arrow[r] \arrow[d, dashed] & 27 \arrow[d, dashed] \\
0 \arrow[r] & 5 \arrow[r] & 10 \arrow[r] & 15 \arrow[r] & 20 \arrow[r] & 25
\end{tikzcd}$$

IV.6. Avec des pièces de monnaie

- Individuellement : les enfants disposent de pièces de 1, 2, 5 et 10 centimes. Objectif : former une somme déterminée.

Ils doivent trouver plusieurs solutions et expliquer leur calcul. Par exemple, pour une somme de 58 centimes :



● Trois enfants : un marchand, un client, un secrétaire.

Le client ne possède que des pièces de 20 centimes et doit payer une certaine somme. Le marchand dispose de pièces de 10, 5, 2 et 1 centimes et rend la monnaie. Le secrétaire note.

*

*   *

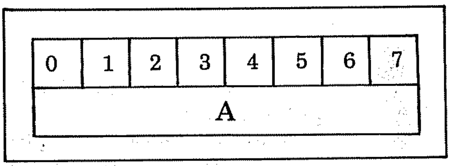
Tous les exemples qui précèdent montrent qu'il est possible de diversifier les activités de calcul. Il serait souhaitable d'allonger la liste de ces jeux.

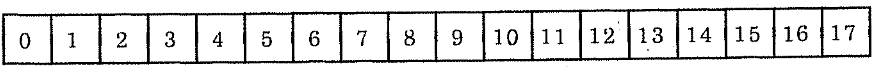
G. RELATIONS NUMERIQUES

Voici quelques situations conduisant à l'étude de relations numériques ; la plupart sont présentées très brièvement. Nous détaillerons plus largement un exemple de fonction de la forme :
"$n \longmapsto n + a$" (différences d'âge : V.) et un exemple de fonction de la forme
"$n \longmapsto n \times a$" (agrandissement de puzzles : II.3.).

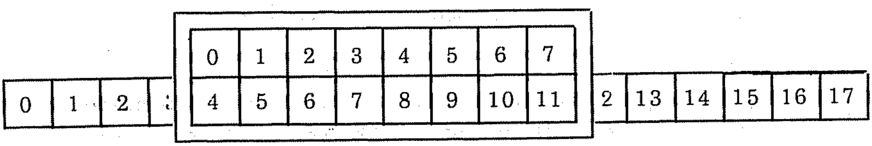
I. Fonctions de la forme $n \longmapsto n + a$.

I.1. Réglette coulissante





Chaque élève place la réglette dans la partie A, comme il le désire, par exemple :



puis cherche à coder la position de la réglette. Parmi les codages proposés, on trouve en général ceux-ci :

— codage par un couple de nombres homologues, par exemple ici : (2, 6);

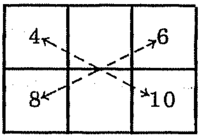
— codage par les nombres situés aux extrémités de la partie A, ici 4 et 11.

Les problèmes de prévision que l'on posera à propos de ces codages conduiront à l'étude de diverses relations numériques ; par exemple :

$$n \longmapsto n + 4$$

$$n \longmapsto n + 7$$

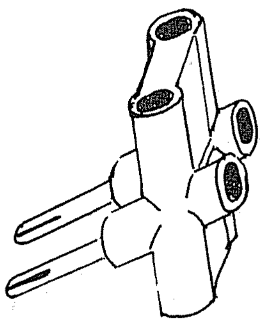
D'autres activités peuvent être menées avec ce matériel. Par exemple, des enfants peuvent chercher à utiliser la règle à calcul pour faire des additions ou des soustractions, d'autres peuvent faire des remarques comme celle-ci :



$$10 + 4 = 8 + 6$$

et chercher à les justifier. Mais nous ne les détaillerons pas ici.

I.2. Prises de courant



On dispose d'une prise de courant et de prises multiples du type ci-contre. Suivant le nombre de prises multiples dont on dispose, combien peut-on brancher d'appareils ?

I.3. Différences d'âge

Voir V., page 102

II. Fonctions de la forme $n \longmapsto (n \times a) + b$

Dans le cas où $b = 0$, il s'agit des fonctions linéaires.

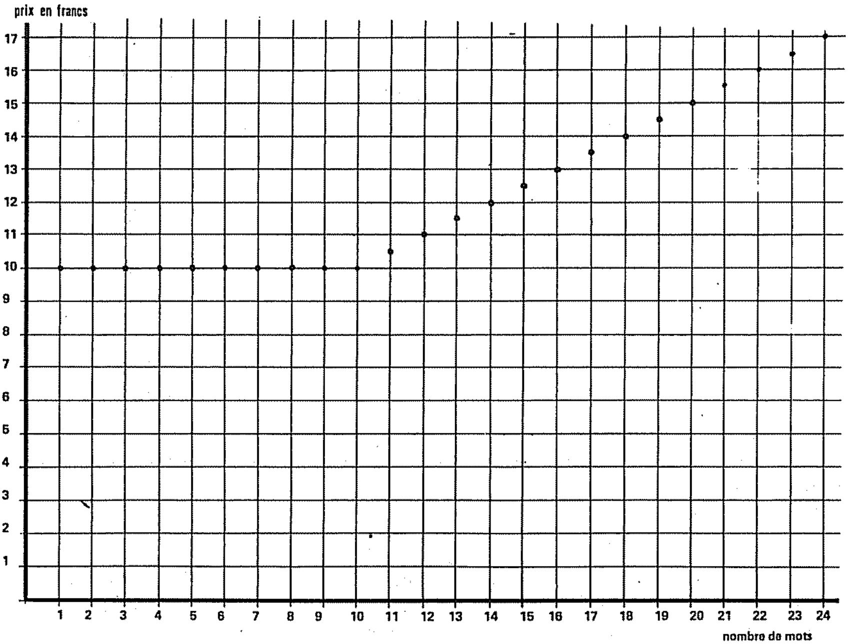
II.1. Tarifs

Les situations sont bien connues des maîtres (affranchissement des lettres et colis, télégrammes, téléphone, taxis, manèges, parkings, ...).

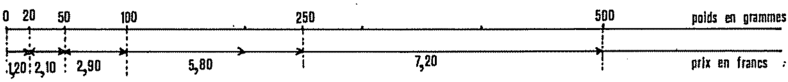
Il faut remarquer que la plupart de ces tarifs ne conduisent pas à des fonctions linéaires (c'est-à-dire de la forme $n \longmapsto n \times a$). Certains, comme ceux des taxis et du téléphone, conduisent à l'étude de fonctions de la forme $n \longmapsto (n \times a) + b$. D'autres, comme les tarifs d'affranchissement des postes, conduisent à des fonctions constantes par intervalles. Les tarifs de manèges avec remise, par exemple "1 tour vaut 3 francs et 4 tours valent 10 francs", conduisent à des fonctions de la forme $n \longmapsto (n \times a) + b$ par intervalles.

Voici quelques exemples de représentations et en particulier de représentations graphiques associées à ces différents types de relations (il existe, bien entendu, beaucoup d'autres représentations possibles) :

II.1.1. *Tarif des télégrammes* : jusqu'à 10 mots, 10 francs ; puis 0,50 franc de plus par mot supplémentaire.



II.1.2. *Tarif d'affranchissement des lettres*

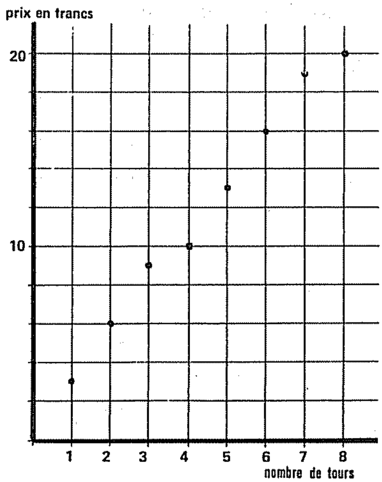


($_{20} \longmapsto {}_{50}$ signifie : de 20 inclus à 50 exclu)

Poids en grammes	Prix en Francs
Jusqu'à 20	1,20
de 20 à 50	2,10
de 50 à 100	2,90
de 100 à 250	5,80
de 250 à 500	7,20
de 500 à 1000	9,60
de 1000 à 2000	12,80
de 2000 à 3000	15,20
de 3000 à 4000	18,60
de 4000 à 5000	21,20

II.1.3. *Tarif d'un manège*

1 tour : 3 francs
4 tours : 10 francs



L'étude de telles relations, non linéaires, nous paraît très importante, car c'est à partir de l'étude de fonctions linéaires et non linéaires que se construira le concept de linéarité.

II.2. Marché aux billes

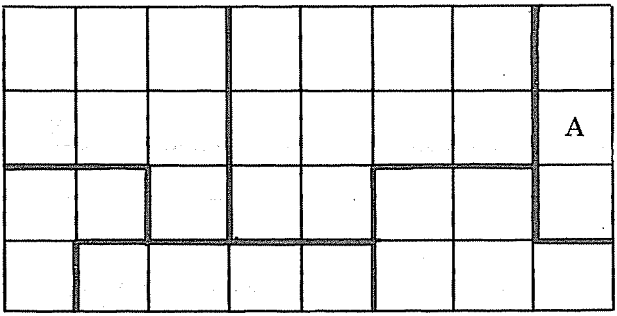
Voici les cours du marché aux billes dans une école de la région parisienne au mois de septembre 1978. A partir de ces cours, on peut demander aux enfants d'inventer librement des problèmes, puis de les résoudre.

— 1 calot en verre vaut 2 calots en porcelaine (dits "calots porço")
— 1 calot porço vaut 20 billes porço
— 1/2 calot porço vaut 5 billes en verre
— 1 araignée vaut 1 calot porço
— 1 verre vaut 10 terre
— 1 goutte d'eau vaut 2 porço
— 1 porço vaut 5 terre
— 1 porço cassée vaut 2 terre

II.3. Agrandissement de puzzles

Cet exemple s'inspire des agrandissements de puzzles présentés dans les cahiers de l'IREM de Bordeaux.

Les enfants travaillent par équipes de 3 ou 4. On fournit à chacune des équipes un puzzle dessiné sur du papier quadrillé au centimètre, par exemple :



L'exemplaire fourni est petit (ici 8 cm sur 4 cm) et peu agréable à manipuler. On demande aux enfants de l'agrandir sur du papier fort. La consigne est donnée sous la forme suivante : "La longueur de la pièce A est 3 cm sur le petit puzzle, elle sera 9 cm (ou 12 cm) dans le puzzle agrandi". (Si on donnait la consigne sous la forme : "Fais un puzzle trois fois plus grand (ou quatre fois plus grand)", on indiquerait aux enfants dans la consigne quel modèle mathématique ils doivent utiliser pour résoudre le problème). Dans chaque équipe, les enfants se partagent le travail. Chacun agrandit une ou deux pièces du puzzle. Quand ce travail est achevé, dans chaque équipe, on essaie d'assembler les morceaux. Or, le premier modèle mis en oeuvre par les enfants dans cette situation est généralement un modèle de type additif. Par exemple, si la consigne est "3 cm $\longmapsto$ 9 cm", ils ajoutent 6 cm à toutes les dimensions et les pièces ainsi agrandies ne s'emboîtent pas. Leur modèle additif est mis en échec et, c'est ce qui fait l'intérêt de cette situation, c'est l'expérience même qui le leur prouve et non le jugement du maître. Ils sont donc conduits par les faits à rejeter le modèle additif au profit du modèle multiplicatif. On constate souvent que les enfants ont beaucoup de réticences à rejeter le modèle initial, mais les faits sont têtus.

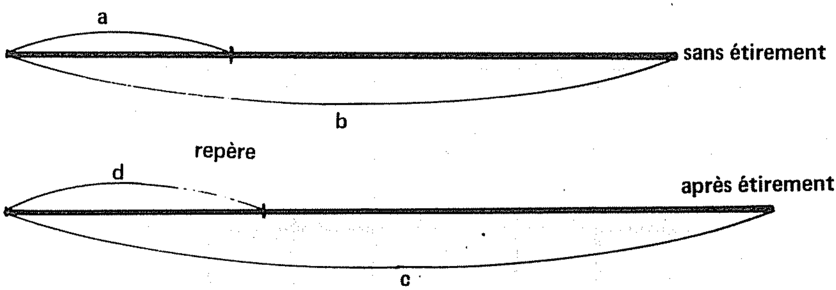
II.4. Elastiques

Un élastique est tendu entre deux punaises (sans être étiré). On place un repère sur l'élastique puis on tire sur l'une de ses extrémités. De combien avance le repère quand l'extrémité avance de x centimètres ?

Si l'on place le repère à n'importe quel endroit de l'élastique, les capacités numériques des enfants du C.E. ne leur permettront pas de prédire correctement le déplacement du repère, même s'ils ont une bonne intuition du modèle mathématique en jeu.

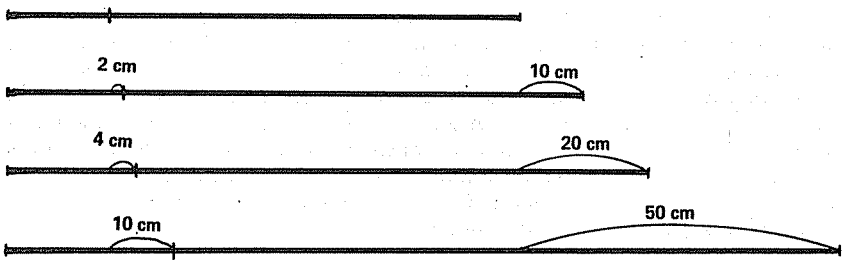
Si l'on suppose l'élastique homogène, le rapport des longueurs ne change pas quand on tire :

$$\frac{c}{d} = \frac{b}{a}$$



Par contre, si l'on choisit pour le repère une position particulière sur l'élastique (le milieu, le quart ou le tiers), on peut demander aux enfants de faire des prévisions sur son déplacement, de vérifier expérimentalement leur bien-fondé, donc de vérifier si le modèle qu'ils ont utilisé est adéquat ou non.

Ensuite, on pourra placer le repère n'importe où sur l'élastique, l'étirer de 10 cm par exemple et mesurer le déplacement du repère, puis demander aux enfants de prévoir les déplacements du repère pour des étirements de 20 cm, 40 cm, 70 cm, 5 cm, de l'élastique.



II.5 Bicyclettes

Après une étude technologique de la bicyclette, qui peut être menée en activité d'éveil à dominante scientifique, on propose aux élèves de classer les différents développements d'un vélo à dix vitesses, puis de les comparer à ceux d'autres vélos. Pour ce faire, ils sont conduits à étudier le nombre de tours de roue en fonction du nombre de tours de pédalier selon les pignons et plateaux utilisés, et à chercher à quels nombres de tours de pédalier correspondent des nombres entiers de tours de roue.

Exemples :

● avec un plateau de 50 dents à l'avant et un pignon de 20 dents à l'arrière :

nombre de tours de pédalier	nombre de tours de roue
2	5
4	10
6	15
⋮	⋮

● avec un plateau de 40 dents à l'avant et un pignon de 15 dents à l'arrière :

nombre de tours de pédalier	nombre de tours de roue
3	8
6	16
9	24
⋮	⋮

Dans un cas, pour 6 tours de pédalier, on a 15 tours de roue.

Dans l'autre, pour 6 tours de pédalier, on a 16 tours de roue.
D'où la comparaison des deux développements.

III. Fonctions qui ne sont pas de la forme $n \longmapsto (n \times a) + b$

Si les enfants ne manipulent que des relations linéaires, ils peuvent être amenés à penser que le modèle linaire est le seul modèle possible. Il est donc important de leur faire étudier des situations conduisant à des relations non linéaires. Nous en donnons quelques autres exemples ici :

III.1. *Jeu du quitte ou double*

La première réponse rapporte a francs, la deuxième $2 \times a$ francs, la troisième $2 \times 2 \times a$ francs, la $n^{\text{ième}}$ $\underbrace{2 \times 2 \times ..... \times 2}_{n-1} \times a$ francs et ainsi de suite jusqu'à l'échec.

III.2 *Pendule*

On fabrique un pendule en attachant un poids au bout d'un fil. On le fait osciller et on laisse les enfants étudier ce phénomène physique et dégager les paramètres pertinents.... Nous ne détaillerons pas plus ici. De plus amples explications se trouvent dans l'article sur le pendule diffusé par l'IREM de Paris-Sud.

III.3 *Crics*

On procure aux élèves différents types de crics (crics à crémaillère, crics losangiques...) En discipline d'éveil, ils les observent, essaient de comprendre comment ils fonctionnent, d'en schématiser les mécanismes, éventuellement d'en construire des maquettes par exemple en utilisant des pièces de meccano.

Au cours de cette étude technologique, les enfants se posent de nombreuses questions :

— Combien de tours faut-il faire pour monter complètement chaque cric ?
— De combien monte chaque cric ?
— Montent-ils tous régulièrement ?
— Montent-ils tous aussi vite ?

Le maître peut exploiter ces questions, demander quelle signification on peut donner à des expressions comme : "Ce cric monte régulièrement" ou "Ce cric monte plus vite que celui-là".

Ensuite, les élèves effectuent les mesures et les calculs qui doivent leur permettre de répondre aux questions qu'ils se sont posées. Cela les conduit à étudier différentes relations ; certaines sont linéaires, d'autres non ; c'est ce que montre leur comparaison.

IV. Remarque

On peut distinguer, dans les exemples cités ci-dessus, deux sortes de situations selon que les nombres en relation sont donnés ou non. Par exemple, dans le cas des différences d'âge, les couples de nombres en relation sont donnés (il s'agit des âges respectifs des deux enfants à une date donnée). Par contre, dans la situation "élastique", il n'y a pas de nombres. Dans les situations expérimentales (crics, pendules, élastiques....), les enfants doivent dégager les données pertinentes et ensuite trouver les moyens de les mesurer. Cela fait, ils peuvent faire l'hypothèse d'un modèle de fonctionnement, puis vérifier si ce modèle est adéquat ou non *en tenant compte de l'incertitude des mesures*. Toute cette démarche est une approche physique des phénomènes ; elle est inséparable d'un apprentissage des mathématiques.

V. Différences d'âge (chronique)

Les enfants de la classe ont des frères et soeurs et la discussion porte sur les âges respectifs des enfants. La maîtresse choisit la famille de Pierre : Pierre a 8 ans et son frère Frédéric a 3 ans. Elle demande aux enfants de poser toutes les questions qu'ils veulent sur les âges des deux enfants. On obtient des questions du type suivant :

— Quand Pierre aura 9 ans, quel âge aura Frédéric ?
— Quand Frédéric avait 1 an , quel âge avait Pierre ?
— Quel âge avait Pierre quand Frédéric est né ?

Au bout de peu de temps, certaines questions reviennent à plusieurs reprises et la maîtresse demande aux enfants de s'organiser pour ne pas avoir à chercher plusieurs fois les mêmes renseignements.

Les élèves proposent de présenter les résultats dans un tableau :

âge de Frédéric	âge de Pierre
3	8
1	6
4	9
10	15
12	17
8	13
20	25

Les flèches ne figurent pas dans le tableau des enfants. Elles sont ajoutées ici pour indiquer au lecteur comment les enfants ont rempli le tableau.

Ces deux listes sont affichées au tableau pour que chaque enfant ait tous les renseignements sous les yeux. Chaque fois qu'un nouveau résultat est trouvé, son inventeur vient l'inscrire dans le tableau collectif ; cela permet à toute la classe de vérifier les calculs individuels.

La plupart des enfants raisonnent ainsi : si, par exemple, Frédéric a 3 ans quand Pierre en a 8, lorsque Frédéric avait 1 ans, c'est-à-dire 2 ans de moins que maintenant, Pierre avait aussi 2 ans de moins que maintenant, c'est-à-dire 6 ans.

Très peu d'enfants utilisent le fait que la différence d'âge est de 5 ans ; en effet ils ne sont pas très sûrs que cette différence reste constante au cours du temps. Une petite fille a même affirmé : "Maintenant ils ont 5 ans de différence, mais Frédéric va bien rattraper Pierre un jour". Ils passent donc du couple (10, 15) au couple (20,25) en disant que chaque enfant a vieilli de 10 ans.

Lorsque les enfants ont fait un grand nombre de calculs, la maîtresse écrit de grands nombres dans le tableau, par exemple : 78 dans la colonne de Frédéric ou 93 dans la colonne de Pierre.

Au début, les enfants font des calculs compliqués pour les raccrocher à des couples de nombres plus petits déjà écrits dans le tableau. Lorsqu'ils commencent à trouver les calculs trop fastidieux, la maîtresse leur demande d'observer le tableau et de faire des remarques qui permettent de simplifier leur travail. Assez vite, les enfants se mettent à calculer en utilisant un modèle de la forme $a \longmapsto a + 5$, ce qui leur permet de répondre facilement aux questions de la maîtresse concernant les grands nombres.

La maîtresse peut ensuite demander aux enfants de donner l'âge de Pierre lorsque Frédéric a x années. Puis leur faire placer tous les couples trouvés sur un graphique où l'on place par exemple l'âge de Frédéric en abscisse et celui de Pierre en ordonnée. Les enfants constatent alors que tous les points sont alignés.

Remarque : Cette situation amène les enfants à construire un tableau du type de ceux indiqués dans les instructions complémentaires. Elle est très motivante pour les enfants parce qu'elle entre dans leurs préoccupations et elle leur permet d'avoir un langage simple pour parler de ce qu'ils font. De plus, ils approchent dans ce cadre une propriété importante de la soustraction, qui, mathématiquement, s'écrit :

$$\text{quel que soit } x \text{ , } (a+x)-(b+x)=a-b$$

et qu'ils expriment par : "Les deux enfants ont toujours la même différence d'âge". Cela contredit d'ailleurs en général leurs convictions premières ; c'est pourquoi il ne faudra pas s'étonner si, au bout de peu de temps, les enfants reviennent à leurs modèles antérieurs (différence d'âge variable dans le temps). Leur conviction affective est, en l'occurrence, bien trop puissante pour être renversée durablement par une preuve mathématique.

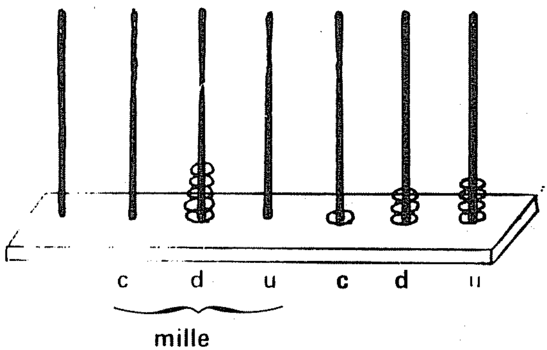
Dans une classe de CM_2, on a pu observer un phénomène analogue. Malgré une étude poussée du calendrier, certains enfants n'étaient pas tout à fait sûrs que la différence d'âge entre deux élèves était vraiment constante ; ils se demandaient si l'existence des années bissextiles n'apportait pas sur l'écart une perturbation d'un jour ou deux. Ils ont dû suivre une démarche analogue à celle qui est décrite plus haut pour se convaincre de l'invariance de cet écart.

H. D'AUTRES TECHNIQUES OPERATOIRES

(à titre de curiosité)

I. Une technique d'addition à partir de l'utilisation d'abaques

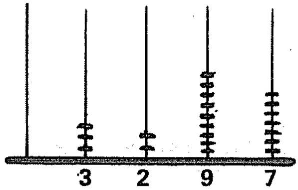
Un abaque est constitué par une planchette sur laquelle sont fixées des tiges ; des anneaux peuvent être enfilés sur ces tiges.

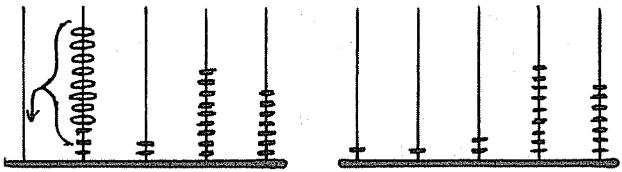


Le nombre des anneaux enfilés sur chaque tige est le nombre d'unités de chaque ordre, dans une base b donnée.

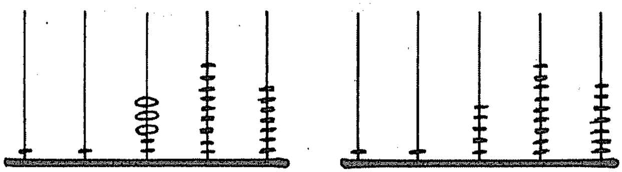
Exemple : Sur le schéma ci-dessus, on a représenté le nombre 50 134 en base *dix* : cinquante mille centre trente quatre.

Soit à calculer la somme suivante (en base *dix*) : 3297 + 8345

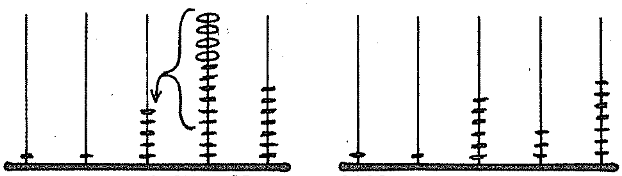




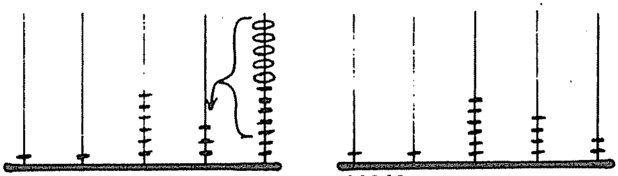
3297 + 8000 = 11297



11297 + 300 = 11597



11597 + 40 = 11637



11637 + 5 = 11642

Traduction écrite :

```
  3 2 9 7
+ 8 3 4 5
---------
  1 5 3 2
```

soit

1 1 6 4 2

Cette technique, différente de la technique habituelle, permet de calculer une somme à partir des unités du plus grand ordre, donc d'en trouver rapidement l'ordre de grandeur.

II. Une technique de multiplication : *la technique russe* ; elle est basée sur la numération en base *deux*.

- *Premier exemple*

Pour calculer 37×56 :

37	56
74	28
148	14
. 296	7
. 592	3
. 1184	1

$$
\begin{aligned}
37 \times 56 &= 37 \times (2 \times 28) = (37 \times 2) \times 28 \\
&= 74 \times 28 = 74 \times (2 \times 14) \\
&= 148 \times 14 \\
&= 296 \times 7 = 296 \times [(2 \times 3) + 1] \\
&= (592 \times 3) + 296 = [592 \times (2+1)] + 296 \\
&= 1184 + 592 + 296
\end{aligned}
$$

$$37 \times 56 = 1184 + 592 + 296$$

$$37 \times 56 = 2072$$

Nous laissons au lecteur le soin de démonter le mécanisme de cette technique.

- *Deuxième exemple :*

Pour calculer 249×55 :

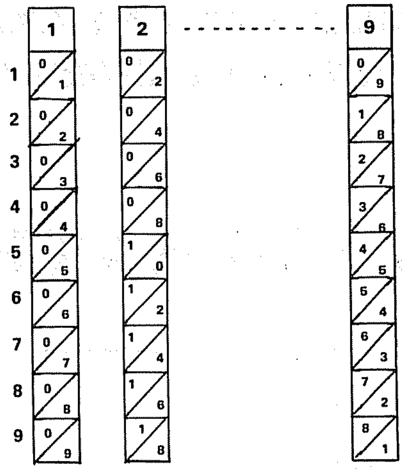
. 249	55
. 498	27
. 996	13
1992	6
. 3984	3
. 7968	1

$$249 \times 55 = 7968+3984+996+498+249$$

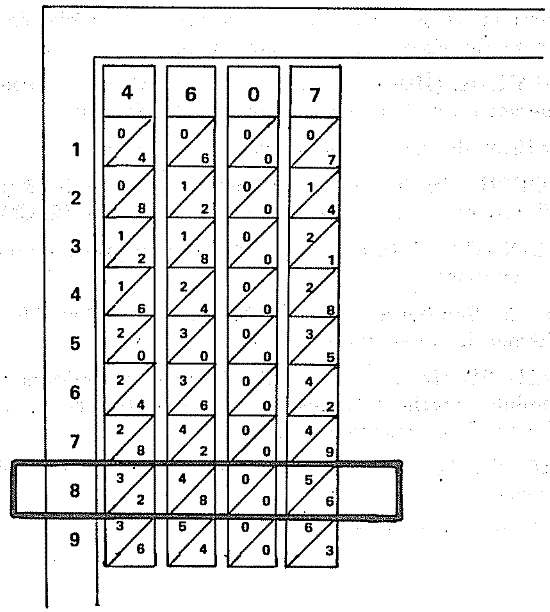
$$249 \times 55 \quad 13\,695$$

III. Une présentation commode de la table de multiplication : les réglettes de Neper (1617).

Sur une réglette (ou bâton), on écrit les résultats d'une table de multiplication.



Puis ces réglettes sont utilisées dans un cadre ; voir ci-dessous le calcul du produit : 4 6 0 7 X 8



4607 X 8 = 36 856

UNE COLLECTION DE L'A.P.M.E.P.
POUR L'ÉCOLE ÉLÉMENTAIRE

ELEM-MATH

ELEM-MATH I (56 pages)

regroupe quelques-uns des articles relatifs à l'Ecole Elémentaire parus dans le Bulletin de l'A.P.M.E.P.

Les divers sujets abordés sont directement utilisables dans la pratique quotidienne des classes. Voici le sommaire :

ROUQUAIROL (IREM de Paris) : Recherche dans l'enseignement élémentaire : code de navigation dans les chenaux.

LECOQ (E.N. de Caen) : Induction et récurrence.

P. LEGOUPIL (Instituteur, Valconville) : Recherche à partir d'un jeu télévisé dans une classe rurale à trois cours (CE2, CM1, CM2).

B. COLLIN (C.E.S. Saint Laurent de la Salanque) : Fonction sélective des exercices.

Travaux du Séminaire APMEP, Lyon, Septembre 1974 : Noyaux-thèmes dans l'enseignement élémentaire.

A. FOULIARD (Instituteur, Ecole Decroly, Saint-Mandé) : Pliages et modèles mathématiques (article reproduit de la revue *Activités Recherches Pédagogiques*).

M. CARMAGNOLE (CM2, Pierrefeu du Var) : Le précédent et le suivant.

Prix : 3 F (port compris : 4,50 F).

CHAPITRE 3

ACTIVITES GEOMETRIQUES

A. LA GEOMETRIE DANS L'ENSEIGNEMENT ELEMENTAIRE

I. Où en est-on ?

La géométrie à l'Ecole Elémentaire s'est longtemps réduite à l'enseignement du système métrique assorti d'une description sommaire de quelques figures ou objets simples (carré, rectangle, cube, etc.)

L'étude du système métrique se limitait à des exercices de conversion plus proches de la numération que d'activités proprement géométriques ou même de mesurage. On ne se posait pas de question à propos de la conservation des quantités ni de la conceptualisation des grandeurs physiques par les enfants.

L'étude des figures géométriques aboutissait à l'énoncé de propriétés observables sans établir de lien entre elles. On traitait cet enseignement dans le même esprit que les leçons de choses : enseignement d'une description et d'un vocabulaire conventionnels sans intérêt explicatif.

Dans le cadre des programmes du 2.1.1970, qui mettaient l'accent sur l'activité propre des enfants et la manipulation d'objets, la présentation de la géométrie s'est modifiée. Ainsi on a vu apparaître un grand nombre d'activités sur quadrillage : repérages, cheminements, mais aussi transformations géométriques telles que translation, agrandissement, symétrie.

En fait, la géométrie comporte bien d'autres aspects que ceux évoqués ci-dessus. C'est une véritable théorie physique proposant un modèle explicatif d'une partie du monde qui nous entoure : ronds, faces planes, traits, coins, agrandissement, déplacement, etc. En tant que telle, elle présente selon les moments deux aspects essentiels :

- l'un consiste à agir sur des objets réels et à récolter des informations;
- l'autre consiste à organiser ces informations afin de prévoir la possibilité ou l'impossibilité de réalisations matérielles.

Il va de soi que ces deux aspects interagissent constamment l'un sur l'autre. (voir G : construction d'un tétraèdre)

Les nouveaux programmes mettent l'accent sur cet aspect organisation qui est, de fait, au centre des préoccupations des enfants déjà au CE.

Malheureusement, les recherches didactiques sur ce sujet sont moins avancées que celles concernant les structures numériques. En outre, la géométrie étant, par nature, plus complexe que le nombre, il est plus difficile d'y préciser un ordonnancement des démarches intellectuelles des enfants, ce qui exclut la production d'une progression prévue dans tous ses détails.

II. La géométrie : une activité d'éveil

Néanmoins, il est nécessaire de s'interroger sur ce que l'on souhaite obtenir par l'enseignement de la géométrie, aussi bien en ce qui concerne les attitudes des enfants qu'en ce qui concerne leur conceptualisation des connaissances.

A ce niveau de l'enseignement, la géométrie doit être comprise comme l'une des activités d'éveil et les extraits suivants des Instructions Complémentaires relatives à ces activités sont tout à fait adaptés :

... "*la démarche de base doit rester l'exploration effective de l'environnement des enfants...*

... mais ce type de démarche doit être organisé en fonction de questions aussi précises que possible que les enfants ont été conduits à se poser...

... organiser les démarches signifie entre autres que les enfants sont invités à conduire leur observation en sélectionnant et en classant leurs constatations...

... les trier et les organiser [les informations] en vue, non de réaliser un inventaire ou une nomenclature détaillés, mais de répondre aux questions qui ont motivé les démarches".

Si, à l'instar des autres activités d'éveil, la géométrie consiste à se poser des questions et, pour tenter d'y répondre, à combiner et à organiser les informations recueillies, elle comporte un aspect supplémentaire : la possibilité de justifier, sans nouveau recours expérimental, des concordances ou des impossibilités. Par exemple : pour construire sur quadrillage l'image d'un motif par un déplacement de n carreaux vers la droite et de p carreaux vers le haut, on commence par procéder point par point. Mais, si n et p sont grands par rapport aux dimensions du motif, les enfants ont recours spontanément au procédé qui consiste à placer les derniers points de l'image en se basant uniquement sur leurs positions relatives par rapport aux points déjà dessinés. Ainsi ils utilisent concurremment la définition du déplacement et une de ses propriétés, ce qui pose un problème de justification qu'ils sont capables de résoudre.

III. Deux idées importantes

La conceptualisation des connaissances peut s'organiser autour de deux idées générales particulièrement importantes. Il ne s'agit évidemment pas de les enseigner, mais de les faire pratiquer dans des situations diverses.

Tout d'abord, une situation géométrique comporte simultanément des objets et des actions (ou des transformations) portant sur ces objets.

Certaines propriétés des objets sont modifiées au cours des actions, d'autres ne le sont pas. De ce point de vue on peut

- classer des objets selon la façon dont ils se comportent vis-à-vis d'une action donnée;
- ou classer des actions qui portent sur un certain type d'objets.

Ainsi, dans l'exemple évoqué ci-dessus,

- les objets sont des traits et leurs croisements;
- l'action est un déplacement (modélisé par une translation).

La place de chaque objet change mais la position relative des objets entre eux ne change pas.

La seconde idée qui nous paraît fondamentale consiste à enrichir simultanément les domaines numérique et géométrique par l'étude de situations où l'un des domaines sert d'outil ou de support à l'autre. Par exemple, dans la situation évoquée plus haut, la justification nécessaire utilisera des nombres (n, p et les coordonnées des points). (Voir chapitre 1 D : Sur le thème du rectangle).

IV. Quelques conditions didactiques

Il va de soi que l'on n'atteindra pas les objectifs précédents au moyen de séances

- où l'on se contente de contempler des objets (leçons de choses) ;
- où, ayant donné un ou plusieurs objets aux enfants, on leur demande ce qu'on peut en faire ou en dire ;
- où on impose aux enfants une tâche à exécuter selon un plan de travail détaillé.

Dans le premier et le second cas, l'enfant est en pleine incertitude. Il ne sait pas ce qu'on attend de lui et n'a pas de raison de s'engager dans une voie plutôt que dans une autre. Dans le premier cas, le maître lève l'incertitude au coup par coup en précisant ce qu'il faut observer. Dans le second cas, si les enfants réagissent, ce n'est pas en fonction du matériel, mais pour se conformer au désir implicite du maître. Dans le troisième cas, les enfants n'ont aucune initiative à prendre.

Pour échapper à ces inconvénients, les situations à proposer nous semblent devoir satisfaire aux conditions minimum suivantes :

- des objets ou des dessins sont effectivement présents dès le début ;
- des objets, des dessins, des messages, des codages devront être réalisés au cours de l'activité ;
- une question est clairement formulée de telle sorte
  - que sa réponse ne soit pas évidente ;
  - qu'elle mobilise un secteur de connaissances antérieures ;
  - qu'elle permette d'envisager des tâches intermédiaires et des moyens à mettre en oeuvre pour y répondre.

Cela exige en particulier que les enfants aient à leur disposition des lots d'objets variés (triangles, carrés, cubes, barres, etc.) et des outils (ciseaux, colle, papiers, instruments de dessin, etc.)

B. QUELQUES ACTIVITES SUR POLYEDRES

I. Le matériel : description, confection

Le matériel décrit ci-dessous a été conçu pour être réalisé facilement, à très bon marché et pour durer. Il est constitué par des "polyèdres" réalisés en plâtre à modeler et peints. La peinture donne un toucher plus agréable et permet des inscriptions, par exemple à la craie.

Nous avons également utilisé dans d'autres classes des "polyèdres" réalisés en ciment rapide additionné de sable fin. Ils paraissent plus résistants que ceux en plâtre et aussi faciles à réaliser.

On peut aussi réaliser ce matériel en carton, en polystyrène, en résines polymères ou bien même l'acheter.

I.1. La confection des moules.

Les moules sont faits en tôle d'aluminium (plaques de propreté) achetée dans une quincaillerie, découpés à l'aide d'une cisaille et pliée à la main sans effort. Un sillon creusé avec une pointe acérée suivant les traits du pliage évitera une trop grande déformation des arêtes et des faces lors du pliage. Celui-ci est facilité par l'emploi de deux planchettes de bois dur et l'appui sur une table comme le suggère la figure.

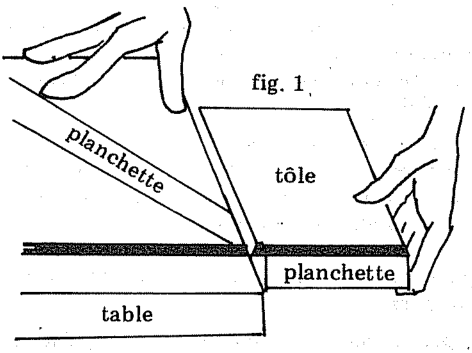


fig. 1

Pour les polyèdres comportant un grand nombre de faces, le moule peut être réalisé en deux "morceaux".

Chaque polyèdre peut ainsi être réalisé en autant d'exemplaires qu'on le souhaite, par exemple un par élève ou pour deux ou trois élèves.

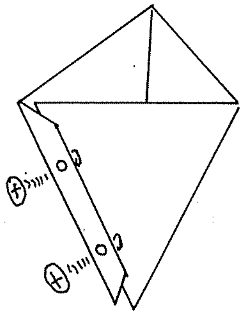
I.2. Quelques précisions sur l'emploi des moules

Après pliage le moule est maintenu, pendant tout le temps de l'emploi, par des anneaux de caoutchouc ou mieux par des vis à tôle vissées dans des trous préalablement percés au poinçon dans les onglets et les faces correspondantes (figure ci-dessous).

Le démoulage se fait en dépliant suffisamment le moule après avoir dévissé les vis à tôle.

Un ponçage léger des faces permet de corriger d'éventuels défauts tels que bavures, faces bombées, etc.

On enduit ensuite les faces de chaque polyèdre d'une peinture pour plâtre. Il est important que tous les polyèdres soient de la même couleur.



I.3. Le choix des polyèdres.

Diverses raisons ont motivé le choix des polyèdres utilisés ;

— On ne peut pas les décrire en faisant uniquement référence à des objets familiers, C'est ainsi que le cube et le pavé droit, trop connus, ne font pas partie du lot.

— Il est important que, dans l'ensemble des polyèdres utilisés, plusieurs polyèdres de type différent aient le même nombre de faces, d'arêtes ou de sommets de telle façon que l'un de ces nombres seul ne permette pas de déterminer le polyèdre.

— Il est souhaitable que le caractère (pointu-écrasé) ne soit pas un élément de détermination du polyèdre. Les cotes ont été choisies dans cette intention.

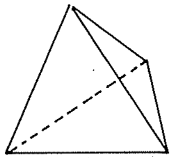
Par exemple, l'ensemble des polyèdres décrits ci-dessous a donné satisfaction.

I.4. Description des polyèdres utilisés

Les dimensions des arêtes sont indiquées en centimètres sur les patrons du moule. Il s'est avéré que les solides obtenus, suffisamment grands, sont bien maniables. Voici pour chacun de ces polyèdres les caractéristiques, la perspective cavalière (1) le patron du moule (comportant une face de moins que le polyèdre pour permettre le remplissage) (2) et quelques détails de réalisation.

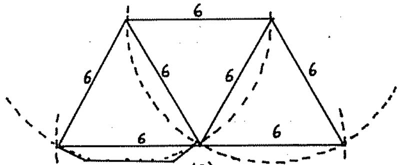
Un tétraèdre régulier

4 faces (triangles équilatéraux), 4 sommets, 6 arêtes.

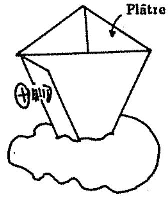


(1)

En pointillés, tracés permettant la construction du patron.



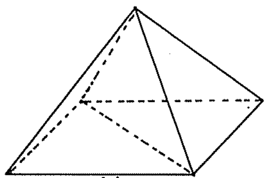
(2)



Maintenir l'ouverture horizontale en fichant la "pointe" dans du sable ou de la pâte à modeler.

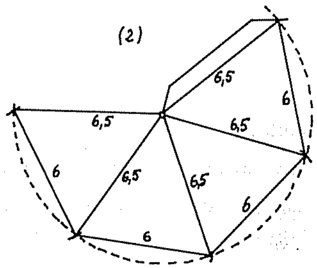
Une pyramide à base carrée :

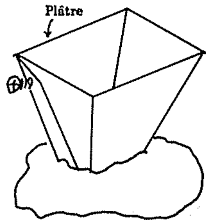
5 faces (4 triangles, 1 carré), 5 sommets, 8 arêtes.



(1)

(2)

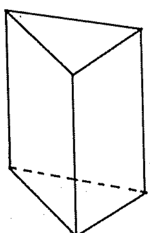




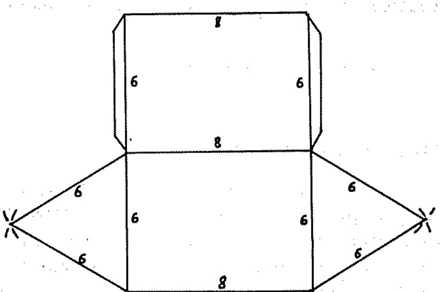
Bien s'assurer que l'ouverture est "carrée" et le restera pendant le moulage

Un prisme droit à base triangulaire

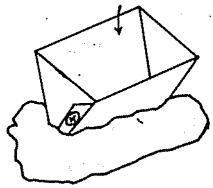
5 faces (3 rectangles ou carrés, 2 triangles), 6 sommets, 9 arêtes.



(1)

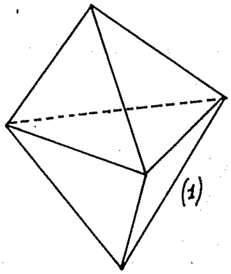


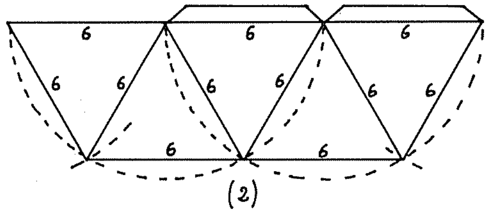
(2)



Un hexaèdre :

Obtenu par juxtaposition de deux tétraèdres. 6 faces triangulaires, 5 sommets, 9 arêtes.

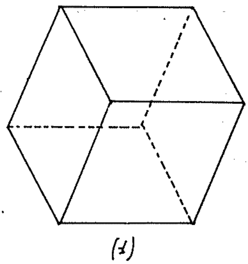


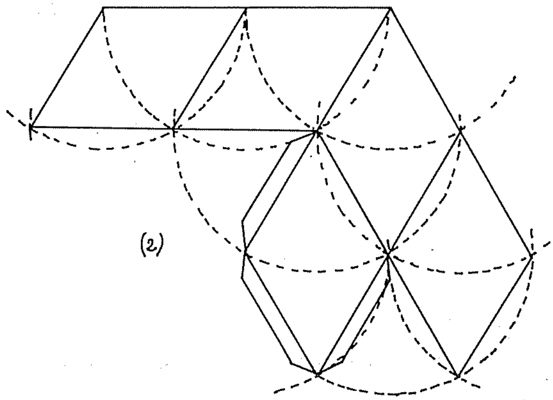


Un rhomboèdre :

Pavé oblique dont les faces sont des losanges. 6 faces, 8 sommets, 12 arêtes.

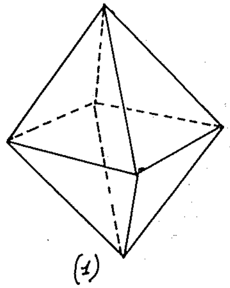
Toutes les arêtes mesurent 6 cm.

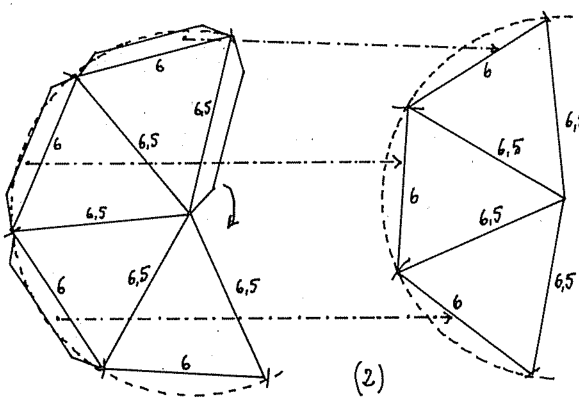




Un octaèdre

8 faces (triangles), 6 sommets, 12 arêtes.



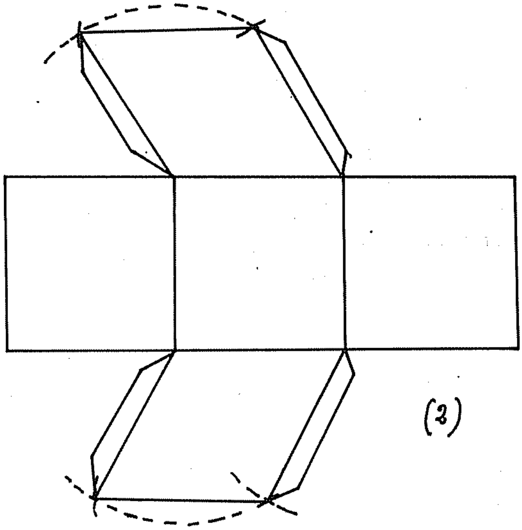


Un pavé oblique :

Comportant 4 faces carrées, 2 faces losanges, 8 sommets, 12 arêtes.

Toutes les arêtes mesurent 6 cm

Cf Rhomboèdre

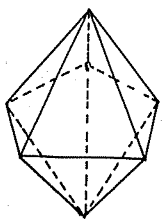


(2)

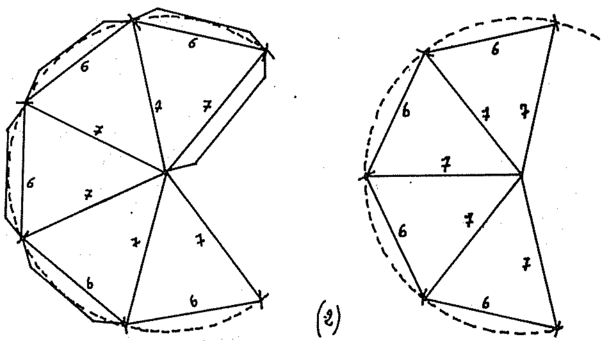
Un décaèdre

10 faces (triangles), 15 arêtes, 7 sommets.

Pour l'assemblage, cf octaèdre.



(1)



(2)

II. Un jeu du portrait

Cette activité est largement inspirée d'un article de Pierre Gagnaire publié dans le Bulletin de l'A.P.M.E.P. n° 292 : "La mise en pièce de la Géométrie".

II.1. Objectifs

Découvrir des éléments caractéristiques d'un polyèdre.

Mettre en place un vocabulaire commun pour décrire ces polyèdres.

Remarque importante.

Le but de cette activité n'est pas de faire apprendre aux élèves le nom "savant" de chacun de ces polyèdres utilisés. En effet, ce nom suffit à déterminer chacun de ces objets dans l'ensemble proposé (on notera cependant qu'il y a deux hexaèdres, dont le rhomboèdre) et les activités décrites ci-après sous la rubrique "Jeux du portrait" perdent alors tout leur sens.

Ces noms ne sont utilisés ici qu'à titre documentaire. Il n'est bien entendu pas interdit de donner ultérieurement ces noms si les élèves les demandent.

Il ne s'agit pas non plus de faire trouver une quelconque relation entre les nombres de faces, d'arêtes, de sommets.

II.2. Description de l'activité

Situation de communication classique avec échange de messages.
Chaque élève (ou groupe d'élèves) reçoit un exemplaire de chacun des polyèdres décrits ci-dessus. Il choisit un des objets (polyèdres) et doit adresser un message écrit à un correspondant (élève ou groupe) afin que celui-ci reconnaisse cet objet parmi tous ceux qu'il a à sa disposition. Après reconnaissance éventuelle, le correspondant devra montrer cet objet (validation de la communication).

Pour chaque élève (ou groupe) la consigne est donc :

— choisir un objet
— rédiger un message pour identifier cet objet
— envoyer ce message au correspondant
— recevoir le message du correspondant
— décoder ce message
— montrer, si on le peut, l'objet correspondant à ce message.

Il est indispensable de répéter cette activité un certain nombre de fois en demandant que, chaque fois, le choix porte sur un objet différent.

En effet, certains messages ne sont pas correctement décodés, certains élèves choisissent des polyèdres ressemblant à des objets familiers et l'on voit des messages tels que : "On dirait une carotte" ou bien "Il a deux grandes pointes et trois petites" pour l'hexaèdre.

Enfin, certains messages portant des informations notoirement insuffisantes risquent néanmoins d'être validés. Par exemple, on a vu une équipe recevoir le message "Il a de (deux) bords" et reconnaître le prisme à base triangulaire qui était bien l'objet choisi.

Tout au long de ces activités, les élèves sont amenés à prendre conscience de certains types d'informations permettant de décrire sans ambiguïté un polyèdre donné, principalement: nombre d'arêtes, de sommets, de faces, forme des faces, mais aussi des appréciations qualitatives (grand, petit), prélude à la mesure.

Par exemple, hexaèdre et rhomboèdre ont six faces, mais pas le même nombre d'arêtes ni de sommets ; rhomboèdre et octaèdre ont douze arêtes mais pas le même nombre de faces, etc.

III. D'autres jeux du portrait

III.1. Objectifs

Dans un premier temps, on peut accepter le vocabulaire proposé par les enfants, tels que "bords", "côtés", "pointes" et proposer ultérieurement le vocabulaire habituel : arêtes, faces, sommets.

- Employer le vocabulaire précédemment mis en place.
- S'organiser pour décrire les objets.

III.2. Description des diverses activités

I) Un élève choisit un polyèdre et le décrit oralement pour permettre à ses camarades de le reconnaître.

II) Le maître ou un élève montre un polyèdre et demande de le décrire (par écrit).

III) Le maître indique un nombre de faces (ou d'arêtes, ou de sommets) et demande qu'on lui montre le polyèdre correspondant. Il y a plusieurs solutions, d'où nécessité de donner d'autres informations.

Dans les deux premières activités, on notera des erreurs. Comme le dénombrement des faces, arêtes, sommets, n'est pas très commode, cela se traduit pour un polyèdre donné par des réponses divergentes des élèves. On peut suggérer un numérotage des différents éléments, à la craie par exemple. On peut également rechercher d'autres stratégies de dénombrement.

IV. Habillage d'un polyèdre

IV.1. Objectifs

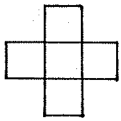
- Obtenir des représentations planes des différents polyèdres, du type patron ou développement.
- Organiser la manipulation du polyèdre pour obtenir les empreintes, chaque face du polyèdre venant une fois et une seule au contact de la feuille en respectant les relations de voisinage.
- Contrôler son travail par essayage.

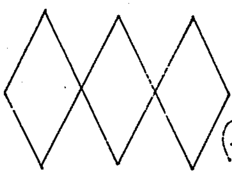
IV.2. Description de l'activité

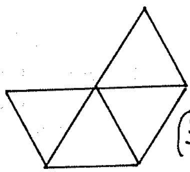
Chaque élève choisit un objet dans le lot des polyèdres. Il reçoit une feuille de papier (emballage, Canson, chute de papier peint, etc.), un crayon, des ciseaux.

L'activité consiste à "habiller" le polyèdre choisi par l'élève en découpant cet "habit" dans un papier après traçage. L'élève est autorisé à se servir du polyèdre pour effectuer ce traçage.

Il paraît intéressant de se limiter à la consigne : "confectionner un habit en papier pour l'objet choisi", sans ajouter aucune indication supplémentaire.


(1)


(2)


(3)

Mais il faut alors s'attendre à ce que certains élèves fassent simplement un "emballage" pour le polyèdre, ou bien un assemblage de 5 carrés pour habiller une pyramide à base carrée (1) ou 4 triangles isolés pour un tétraèdre, ou encore l'assemblage (2) pour un hexaèdre, ou (3) pour un tétraèdre, etc..

Au cours de cette activité, les enfants définissent peu à peu ce qu'ils entendent par habillage à l'occasion d'échanges, de dialogues.

On obtient en gros trois types de productions :

— Emballage.
— Assemblage de polygones.
— Habit "d'un seul tenant".

Chaque habit est essayé : cela sert de validation. De nombreuses remarques sont alors suscitées sur les échecs, sur la manière de s'y prendre.

Ces activités s'apparentent au travail manuel. Elles nous paraissent profitables à la fois pour l'éducation du geste et pour la connaissance des objets manipulés. On peut avec profit les répéter pour plusieurs sortes de polyèdres, chaque construction apportant son lot de problèmes, de difficultés et aussi de découvertes.

Au cours de cette activité, les enfants étaient amenés à utiliser les "empreintes" des polyèdres. Dans l'activité suivante, ils sont conduits à faire des mesurages.

V. Construction de patrons

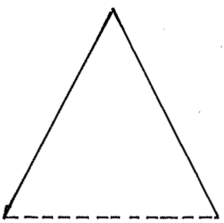
V.1. Objectifs

- Prendre conscience des nécessités du mesurage.
- Réfléchir sur la quantité d'information nécessaire.
- Inventer des techniques et utiliser des instruments pour réaliser les constructions.

V.2. Description de l'activité

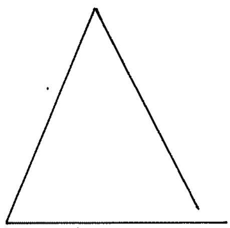
Il s'agit encore d'habillage, mais le polyèdre à habiller n'est pas directement accessible aux élèves. On peut par exemple décider que seul un élève, chargé de commander l'habit, peut manipuler le polyèdre.

Il n'est pas indifférent que les autres élèves puissent ou non voir le polyèdre, car on peut remarquer que la plupart d'entre eux utilisent des informations visuelles qui n'ont pas été explicitées. Par exemple, pour construire un triangle (visible par tous) dont ils apprennent que les trois côtés mesurent 6 cm, beaucoup d'entre eux réussissent une construction "presque correcte" en n'utilisant que deux données, c'est-à-dire en traçant à partir d'une extrémité commune deux segments de 6 cm dont "l'écartement", estimé "à l'oeil", est voisin de 60 degrés. Ils terminent la construction soit en reliant les extrémités libres (fig. 1) sans mesurer le troisième côté, soit en construisant un troisième segment de 6 cm, obtenant ainsi un triangle non fermé (fig. 2).



(fig. 1)

côté non mesuré



(fig. 2)

Il est intéressant d'imposer alors des contraintes, par exemple cacher tous les polyèdres à habiller, dès le début de l'activité, ou seulement certains d'entre eux (la contrainte intervenant dans ce cas en cours d'activité). On fait ainsi apparaître certains problèmes fondamentaux, théoriques et techniques :

Nature et nombre des informations indispensables.
Construction du patron connaissant ces informations.
Mesurages sur l'objet.

Par exemple :

"Que faut-il connaître pour construire un triangle ou un losange s'appliquant exactement sur l'une des faces du polyèdre ?"

"Comment utiliser ces données pour réaliser le dessin ?"

"Le client a-t-il bien pris les mesures ?"

"Comment un élève peut-il contrôler son travail en cours de réalisation ?"

Tous les gens qui travaillent de leurs mains (couturiers, cuisiniers, maçons, ouvriers métallurgistes, etc.) procèdent par une succession d'essais qui améliorent la qualité du produit. Tel fait des essayages, tel autre goûte la sauce, tel autre utilise le fil à plomb ou le mètre, etc.

Il est indispensable de se montrer aussi strict en ce qui concerne des élèves construisant un triangle, ou un losange, ou toute autre figure.

Il paraît fondamental d'accepter de "perdre du temps" en échecs puis en tâtonnements, en réflexions sur ces échecs, car en contrepartie on peut en attendre une amélioration de la qualité de l'apprentissage.

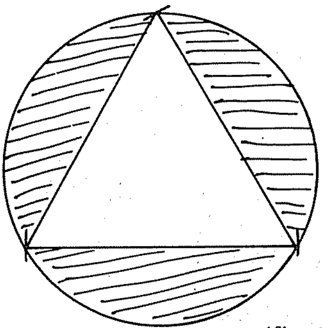
VI. Jeu de construction

VI.1. Objectifs

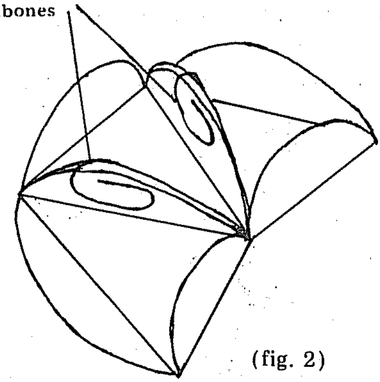
— Inventer des polyèdres ou des pavages du plan.

VI.2. Matériel

Réalisé en carton ou en papier fort, il est constitué par des disques dans lesquels on inscrit des triangles, des carrés, éventuellement des pentagones ou autres polygones réguliers (voir figure).



(fig. 1)



(fig. 2)

En se servant des segments de cercle comme d'onglets, on peut réaliser très rapidement des assemblages à l'aide d'attaches-trombones. On pourra avec ce matériel chercher des patrons des polyèdres connus et même créer de nouveaux polyèdres comme le cube, le dodécaèdre dont les douze faces sont des pentagones et l'icosaèdre dont les vingt faces sont des triangles équilatéraux. Beaucoup de ces polyèdres ornent des classes maternelles aux environs de Noël.

VI.3 Activité

Dès qu'un assemblage permet la réalisation d'un polyèdre, on relève ce "patron" sur une feuille de dessin en se servant de l'assemblage comme d'un gabarit (retirer quelques trombones et mettre à plat), ou bien en faisant la construction à l'aide d'instruments.

Certains de ces assemblages ne peuvent "se plier" et donnent un pavage du plan. Par exemple, on peut constater que l'assemblage de quatre carrés ou de six triangles équilatéraux autour d'un sommet commun ne "donne pas" de polyèdre.

VII. Charpentes de polyèdres

VII.1. Objectif :

- Visualiser le système d'arêtes du polyèdre.
- Contrôler le dénombrement des arêtes et des sommets.

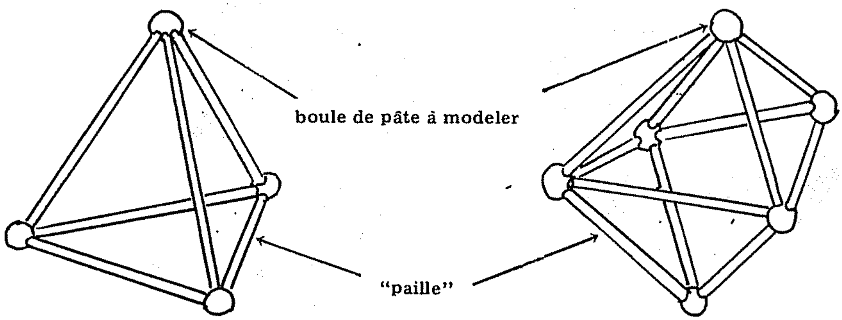
Matériel :

- Des "pailles" (chalumeaux pour boire des jus de fruits)
- De la pâte à modeler.

VII.2. Description de l'activité

• Chaque élève choisit un polyèdre et doit faire une commande (nombre exact de pailles et de boules de pâtes à modeler) pour réaliser la "charpente" du polyèdre, c'est-à-dire un assemblage de "pailles" à l'aide de pâte à modeler reproduisant le système des arêtes du polyèdre (nombre, position relative).

Voici à titre d'exemple la charpente de deux polyèdres :



Tetraèdre　　　　Octaèdre

C. DESSIN ET GEOMETRIE

Références

Objectifs du cycle élémentaire

5 - Activités géométriques

- ...
- ...
- "Savoir utiliser... règle, équerre, compas... et autres instruments de dessin pour étudier, construire ou reproduire des figures planes".

Instructions pédagogiques

4 - Géométrie. En particulier :

"Dans ces activités l'accent sera tantôt mis sur les objets à construire, tantôt sur la découverte des techniques... et l'utilisation des instruments (règle, équerre, compas, bande de papier). Dans ce cas les activités pourront être du type réalisation de maquettes, plans, assemblages, mosaïques, frises, etc. Elles sont inséparables des activités manuelles développant l'adresse et le soin."

I. Nécessité d'une pratique du dessin géométrique

La géométrie comporte l'étude des propriétés de certains objets de l'espace usuel. Ces propriétés apparaîtront d'autant plus facilement que les activités géométriques prendront leur source dans la réalisation effective de tels objets.

Par exemple : on décide de construire une boîte en carton (sans couvercle) pour y ranger des objets. Une première observation conduit les enfants à constater que, pour la réaliser, il faut cinq pièces (le fond et les quatre parois), que ces cinq pièces ont chacune quatre côtés et que les longueurs de ces côtés ne peuvent être choisies arbitrairement. Après avoir fabriqué par tâtonnement une maquette en papier, ils sont en mesure de passer à la réalisation effective de la boîte, qui se décompose en trois étapes : le tracé des pièces, leur découpage et leur assemblage.

Chacune de ces étapes nécessite l'emploi d'outils appropriés, en particulier la règle, l'équerre, le compas pour les tracés.

Les textes cités en référence incitent à utiliser les instruments de dessin aussi bien au cours d'activités de travail manuel (réalisation de maquettes) ou d'activités esthétiques (frises, mosaïques) qu'au cours d'activités géométriques (étudier, construire ou reproduire des figures planes).

Les instruments de dessin sont des outils de précision et la qualité des réalisations qu'ils permettent dépend de l'habileté manuelle du dessinateur. Pour de jeunes enfants, leur maniement s'intégre donc dans une éducation générale des gestes mettant en oeuvre d'autres techniques (découpage, pliage, assemblage, collage, etc...)

II. Quelques habitudes à prendre

- Dessiner sur une table stable, bien plane et préalablement recouverte d'une feuille de papier fixée à la table.
- Fixer la feuille sur laquelle on va dessiner par quatre languettes de scotch. Ainsi les deux mains du dessinateur restent disponibles, l'une pour l'instrument requis, l'autre pour le porte-mine.
- Savoir se placer par rapport à la source lumineuse. Pour un droitier la lumière doit venir de la gauche, ce qui évite d'être gêné par l'ombre portée de la main.
- Savoir utiliser une règle.
  La règle ne doit pas se déplacer au cours d'un tracé. Il faut donc que la main gauche (pour un droitier) s'applique fermement et bien à plat à la fois sur la règle et sur le papier. Ce geste est difficile à accomplir si l'on dispose d'une règle à section carrée. Un tel modèle de règle est donc à éviter.

- Le crayon suit toujours le bord éclairé de l'instrument qu'on utilise. Ainsi on n'est pas gêné par l'ombre portée de l'instrument.

- Savoir tailler une mine.
  Le porte-mine est préférable au crayon, ce dernier étant difficile à tailler.

  On dessine avec une mine dure (2H ou 3H), car elle résiste mieux à l'usure qu'une mine tendre, qui, par ailleurs, salit les mains et donc le dessin.

  Pour tailler la mine, on utilise l'embout du porte-mine destiné à cet effet. A défaut, on frotte la mine sur un morceau de papier de verre fin pour obtenir un cône bien effilé.

- Au cours du tracé, veiller à ce que la mine reste bien en contact avec le bord de l'instrument. Le corps du porte-mine ne doit pas toucher l'instrument. La longueur de la mine sortie doit être suffisante pour éviter cet incident.

- Prendre soin des instruments.

  Les arêtes des règles et des équerres seront préservées de tout choc. Le compas ne se transformera pas en fléchette.

  En dehors des périodes d'utilisation, le plus simple consiste

  - à suspendre sur un panneau: té, équerre, règle graduée ;
  - à ranger dans une boîte : compas, porte-mine, gomme, scotch.

III. Les instruments de dessin

Il est essentiel qu'ils soient de bonne qualité.

Dans toute la mesure du possible, s'adresser à un magasin spécialisé dans les articles de dessin.

- Le té (outil destiné à tracer des parallèles).

  Choisir un té à tête fixe, non gradué, d'environ 50 cm.

- Les équerres (outils destinés à tracer une droite faisant un angle donné avec une droite donnée).

  Les choisir en plastique transparent et sans graduation (longueur de l'hypoténuse : envire 35 cm).
  L'une des équerres est dite à 45 (angles : 90° et 45°).
  L'autre est dite à 60 (angles : 90°, 60° et 30°).

- La règle graduée (outil destiné à mesurer la distance entre deux points).

  Choisir un triple décimètre en plastique entièrement transparent.

- Le compas (outil destiné à reporter une longueur).

  C'est l'outil le plus délicat puisqu'il est articulé.
  Le choisir le plus simple possible, mais de bonne qualité.
  Préférer un modèle sans pointe mobile, ni tire-ligne.

Un modèle comportant une grosse bague — dans laquelle peut coulisser un porte-mine — avec vis de blocage, est bien adapté à de jeunes enfants.

- Le porte-mine, les mines, la gomme.
  Choisir un porte-mine simple.
  L'équiper avec des mines 2H ou 3H.
  Choisir une gomme plastique auto-nettoyante.

Remarques

1) Ce matériel — peu onéreux — pourrait figurer en deux ou trois exemplaires dans la classe. En tout cas il n'est pas nécessaire que chaque enfant ait ses propres instruments de dessin.

2) Eviter certaines difficultés.

Le triple décimètre est un instrument assez élaboré. Il porte en effet cinq graduations :

une graduation décimétrique
une graduation centimétrique
une graduation demi-centimétrique
une graduation millimétrique
une graduation demi-millimétrique

On peut donc, tout au moins au début, se contenter d'utiliser des réglettes de papier ne portant qu'un seul type de graduation (cf. Q : Mesure).

IV. Des activités

Voici quelques suggestions permettant d'utiliser des instruments de dessin concurremment avec d'autres outils. Au cours de ces activités, les enfants participent à des ateliers qui fonctionnent en parallèle : atelier de dessin, atelier de découpage, atelier d'assemblage, atelier de décoration. Au long de l'année, chaque enfant participe à chacun de ces ateliers.

IV.1. *Reproduction d'objets*

Supposons que les enfants aient besoin de construire une boîte pour y ranger des objets. Plutôt que d'imaginer tout de suite une boîte aux dimensions convenables, ils peuvent souhaiter faire des copies de boîtes existantes.

Deux techniques s'offrent :

- prendre l'empreinte de chaque face, découper, assembler ;
- relever les cotes des faces, les dessiner, découper, assembler.

La précision du dessin et du découpage est sanctionnée par la qualité de l'assemblage.

Autres activités possibles :

- Construire plusieurs répliques d'une boîte sans couvercle pour obtenir des éléments de rangement.

- Reproduire des puzzles : Tangram, Polyminos, etc. avec ou sans modification de la taille des pièces.

IV.2. *Dessins d'exposition, illustrations*

Supposons que les enfants aient observé, classé, inventé des carrelages. Il serait alors judicieux de présenter leurs remarques, suggestions. voire inventions, sous forme d'une exposition ou d'un album.

Ce travail réclame du soin dans la présentation pour que le résultat ait un caractère attrayant et décoratif.

Une présentation possible pourrait être réalisée par collage de pièces en papier Canson de couleur, préalablement dessinées et découpées avec soin.

Une autre présentation pourrait être réalisée à partir de fragments de carrelages dessinés puis coloriés avec soin.

Autres suggestions :

- Même travail que ci-dessus à partir de frises, de mosaïques, de vitraux, etc.
- Invention et tracé de motifs décoratifs à colorier ou à peindre.
- Plan du quartier, du village, de l'école, de la classe, etc.
- Et même des tâches aussi simples — tout au moins en apparence — que

  — régler une feuille de papier avant écriture d'un texte ou calligraphie d'un poème ;

  — réaliser avec soin un tableau à double entrée ou toute illustration à caractère géométrique (dans le cadre d'une correspondance scolaire par exemple) ;

  — réaliser des papiers quadrillés, triangulés, etc. (réglés ou à points), utilisables dans d'autres activités géométriques.

IV.3. *Construction d'objets*

L'illustration d'un conte, par exemple, peut conduire à réaliser un village imaginaire.

Une technique assez simple consiste à partir d'objets fabriqués (emballages, boîtes d'allumettes, ...) que l'on colle les uns sur les autres, que l'on complète (ajouter un toit, une cheminée, ...), que l'on habille avec du papier et que l'on décore (portes, fenêtres, colombages, ...). Le dessin géométrique intervient au cours de l'habillage et de la décoration.

Plus complexe, mais aussi plus variée, serait la construction d'une maison d'assez grandes dimensions avec toit amovible afin de pouvoir construire les pièces d'habitation, les meubler, les décorer. Il va de soi que, dans une telle réalisation, les exigences porteront aussi bien sur la précision du dessin, du découpage et de l'assemblage que sur la qualité artistique de la décoration.

Autres activités possibles :

- Construire des emballages pour des objets divers (puzzles par exemple).
- Reproduire ou habiller des polyèdres (voir B : Quelques activités sur polyèdres).

D. REALISATION D'UNE COLLECTION DE TRIANGLES

(Activité réalisée dans un C.E.1 en février).

I. Objectif

Mettre en oeuvre une procédure qui permet de constituer une collection de triangles de taille et de forme variées.

II. Matériel

Pour deux enfants, un géoplan 3 x 3 *, un élastique et une paire de ciseaux.

Un stock de feuilles sur lesquelles le géoplan est reproduit en vraie grandeur.

Une table libre est réservée au tri des productions.

III. Activité

Les enfants travaillent par équipes de deux.

L'un des enfants place l'élastique sur le géoplan de façon à former un triangle.

Sur l'une des feuilles où figure le géoplan, l'autre enfant dessine alors ce qu'il voit. Il découpe le triangle qu'il vient de dessiner puis il le porte vers la table commune.

Si ce triangle peut en recouvrir un autre déjà déposé, on le pose dessus ; sinon, on le pose à un endroit libre de la table.

Après quoi, l'équipe, dont les membres peuvent avoir échangé leurs rôles, recherche un nouveau triangle et ainsi de suite.

IV. Prolongements

Extraire du stock de triangles ainsi réalisé les triangles rectangles, les triangles isocèles, etc.

Utiliser les doubles pour réaliser des assemblages de triangles et observer les résultats.

V. Variantes

Un stock de barres de meccano ou de réglettes en carton de différentes longueurs est disposé en vrac sur une table.

On en extrait trois que l'on assemble par les bouts dans l'intention de construire un triangle (vis-écrou, scotch, attache parisienne, etc.).

* Voir P : Géoplans , page 165

Comment se fait-il que pour certains choix on ne peut réaliser de triangle ?

Envisager différents classements des triangles obtenus.

Dessiner avec soin les triangles obtenus (en respectant les longueurs de leurs côtés, par exemple en utilisant les barres comme gabarit) puis les découper.

Reprendre les activités précédentes pour constituer une collection de quadrilatères.

E. CUBES ET CARRES

(Les deux premières parties ont été vécues en C.E.1).

I. Que faut-il pour construire un cube en carton ?

Le maître donne à chaque enfant un cube dont toutes les faces ont la même couleur. Il s'agit de compter les faces. Les réponses — en général fort diverses — justifient l'activité suivante :

Matériel :

Un stock de carrés de même taille découpés dans du papier fort ou du carton léger (longueur du côté : 6 cm).

Un stock de petites bandes de scotch (longueur : 4 cm environ).

Une feuille blanche par enfant dite "carte d'achat".

Objectif :

Dénombrer les faces et les arêtes d'un cube par achats successifs de carrés et de morceaux de scotch.

Organisation :

Un enfant s'installe dans un coin de la classe et dispose du stock de carrés. C'est le marchand de carrés.

Un autre enfant est installé dans un autre coin de la classe. C'est le marchand de scotch.

Les autres enfants construisent individuellement leur cube.

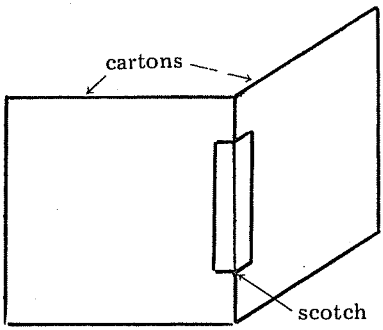
Déroulement :

Chaque enfant achète des carrés un par un ; de même pour les morceaux de scotch.

A chaque achat d'un carré, l'acheteur dessine un petit carré sur sa carte d'achat.

A chaque achat de scotch, il dessine un trait.

Les carrés sont collés bord à bord sans superposition ni décalage. Le morceau de scotch est disposé en long sur la jointure des deux carrés (cf. figure).



Un cube est achevé quand toutes les arêtes sont scotchées ; le vérifier en constatant l'impossibilité de faire coulisser une lame de canif ou une tige mince tout le long de chaque arête en passant entre les bords des deux carrés.

Quand un enfant a terminé la construction de son cube, il compte les carrés et les traits dessinés sur sa carte d'achat.

En fin de séance, on compare les nombres obtenus. Au cas où un enfant propose des nombres aberrants, on l'invite à examiner soigneusement son cube, éventuellement à en construire un nouveau. Au besoin, il peut se faire aider par un camarade.

II. Mise à plat des cubes

Objectif :

Trouver le plus grand nombre possible de patrons du cube ; éventuellement les trouver tous.

Matériel :

Pour chaque enfant, le cube qu'il a construit au cours de la première partie.

Consignes :

Chaque enfant coupe des morceaux de scotch de façon

- que l'assemblage obtenu puisse se poser à plat sur une table
- tout en restant d'un seul tenant.

Les assemblages plans ainsi obtenus sont déposés un par un sur une grande table libre et, chemin faisant, on empile les doubles.

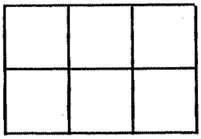
Prolongement :

A partir de ces divers patrons, il est possible d'organiser des ateliers de construction (dessin géométrique aux instruments, découpage, pliage, collage).

III. D'autres assemblages plans de carrés

Les patrons du cube sont des assemblages plans de six carrés, bord à bord, sans superposition ni décalage. De tels assemblages sont appelés des hexaminos.

Si donc un patron du cube est un hexamino, il va de soi qu'un hexamino n'est pas — en général — un patron du cube. Par exemple, l'hexamino ci-dessous ne permet pas de réaliser un cube fermé par pliage et collage seulement.



On sera donc tenté de rechercher tous les hexaminos ; mais, leur nombre étant assez élevé, on pourra préférer se limiter à la recherche des pentaminos (assemblages de cinq carrés).

Matériel :
Un stock de carrés découpés dans du papier fort ;
le recto et le verso des carrés sont de la même couleur.

Consigne :
L'assemblage des carrés s'effectue comme dans la première partie et, bien entendu, reste à plat ;
l'identification des doubles s'effectue comme dans la deuxième partie.

Remârques

1) La réalisation des pentaminos s'effectue, en général, au hasard. Mais il arrive un moment où, la production de formes nouvelles se tarissant, les enfants croient les avoir trouvés tous. Si c'est effectivement le cas, on les laisse sur cette conviction. Sinon, une bonne façon de relancer l'activité consiste à donner le nombre des pentaminos qui restent à construire.

2) Nous déconseillons de procéder à la recherche des pentaminos par dessin uniquement. La situation serait trop complexe, en particulier en ce qui concerne l'identification des doubles. Par contre, quand on a obtenu tous les pentaminos, il est tout indiqué de les reconstruire d'une seule pièce par découpage dans du carton fort, de l'isorel ou du contreplaqué peint (les séparations entre carrés sont dessinées sur chaque pentamino).

IV. Assemblages de carrés dont les faces sont de couleurs différentes

On reprend l'activité précédente en modifiant les conditions comme suit :

- les carrés sont maintenant découpés dans du papier-affiche (recto rouge, verso blanc, par exemple) ;
- chaque face de chaque pentamino doit être d'une seule couleur (le recto entièrement rouge, le verso entièrement blanc) ;
- au cours de l'identification des doubles, tous les pentaminos sont posés sur la table de façon que leur face rouge soit visible.

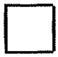
Une fois tous les pentaminos obtenus par ce moyen, on ne trouve pas le même nombre que dans la partie III. Il est donc intéressant d'inviter les enfants à discuter ce fait et à tenter d'en fournir une explication.

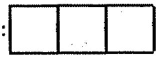
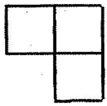
V. Prolongements des parties III et IV

Un domino est un rectangle que l'on peut découper en deux carrés.

Sur le mot *domino* on a forgé le mot *polymino* pour désigner un assemblage plan de carrés, bord à bord, sans superposition ni décalage.

On a ainsi

un monomino :  , un domino :  ,

deux triminos :  

des tétraminos, des pentaminos, etc.

En s'inspirant des troisième et quatrième parties ci-dessus, on pourra entreprendre la recherche de tous les polyminos constitués de 5 ou 6 carrés au plus.

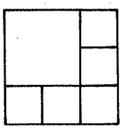
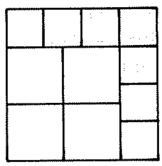
Les polyminos fournissent de nombreux problèmes d'assemblage. Par ailleurs, les polyminos, qui ne sont que des polygones particuliers, constituent l'un des matériels indiqués pour aborder les problèmes d'aire et de périmètre.

VI. Découpage d'un carré en carrés.

Objectif.

Au lieu d'assembler des carrés, tous de même taille, on cherche à découper un carré en plusieurs petits carrés de tailles éventuellement différentes.

Exemples :

Partage en 6 :  Partage en 11 : 

Matériel :

Du papier blanc et du papier quadrillé à petits carreaux.

Activités :

Etudier successivement les problèmes rencontrés à partir de la consigne initiale : découpage d'un carré en carrés.

• Le dessin à main levée sur papier blanc ne permet pas de voir facilement, dans certains cas, si les rectangles tracés sont bien tous des carrés. C'est pourquoi il est intéressant de demander aux enfants de reproduire sur papier quadrillé les dessins faits sur papier blanc. On peut normaliser les productions en choisissant le carreau du quadrillage comme taille pour le plus petit carré du découpage à reproduire (ce qui, dans certains cas, tel le partage en 11 cité, oblige à tracer des côtés qui ne sont pas des traits du quadrillage).

- Cette normalisation peut être motivée par la question suivante : Si deux partages donnent le même nombre n de petits carrés, font-ils intervenir le même lot de carrés ? (autrement dit : peut-on découper le premier partage et réorganiser les carrés pour reproduire le deuxième ?)

- Quels sont les nombres n de petits carrés que l'on peut obtenir ? Il apparaît que :

  — certains petits nombres sont impossibles à obtenir.
  — il existe deux procédures systématiques, l'une pour obtenir les nombres pairs à partir de 4, l'autre pour obtenir $n + 3$ à partir de n (pour n'importe quel n déjà obtenu).

Ces deux procédures permettent de construire un partage en n carrés, pour n quelconque assez grand.

F. DU MATERIEL POUR LA GEOMETRIE

I. Utilité de matériels

Pour que les enfants du C.E. puissent se familiariser avec les propriétés des figures simples, il est nécessaire de mettre à leur disposition des objets géométriques qu'ils pourront colorier, assembler, coller, voire découper. Libérés des difficultés inhérentes au dessin, les enfants peuvent agir directement sur des objets et constater expérimentalement un certain nombre de faits.

Ainsi on peut mettre à leur disposition :

- un lot de barres de meccano ou, à défaut, de réglettes en carton que l'on assemble avec des attaches parisiennes ;
- des triangles équilatéraux, des carrés, voire des pentagones, découpés dans du carton fort ;
- des cubes de bois découpés dans du tasseau ;
- des géoplans, des planches à trous ;
- des puzzles géométriques tels que : Tangram, Pentaminos, Polycubes.

Il est souhaitable que les enfants puissent disposer de différents types de papier (blanc, calque, quadrillé) sur lequel ils pourront mettre au net leurs productions et enregistrer ainsi certains faits remarquables. Par exemple, sur du papier triangulé, il est facile de rendre compte du fait que six triangles équilatéraux peuvent être assemblés pour constituer un hexagone.

II. Carrés de Mac-Mahon (exemple d'utilisation d'un tel matériel)

II.1. *But de l'activité*

On se propose de faire réaliser une collection de carrés colorés de la façon suivante :

Chaque carré est partagé en quatre régions par ses diagonales.
Chaque région est coloriée d'une seule couleur.

Si l'on dispose de trois couleurs, on obtient 24 carrés différents parfois appelés les 24 "carrés de Mac-Mahon".

II.2. *Fabrication des carrés*

Chaque enfant reçoit ou construit un gabarit en carton dont la forme est un triangle rectangle isocèle.

Tous les gabarits utilisés dans la classe sont superposables.

Chaque enfant utilise ce gabarit pour dessiner puis découper un stock de triangles rectangles isocèles dans des papiers de trois couleurs (par exemple : jaune, rouge, vert).

Ensuite il assemble, quatre par quatre, à l'aide de morceaux de scotch, les triangles ainsi découpés.

II.3. Au cours de la phase d'assemblage, on aurait pu procéder de la façon suivante :

- Les enfants travaillent par deux avec un stock de triangles en commun. L'un d'eux réalise un carré. L'autre doit ensuite réaliser un nouveau carré. Puis, c'est au tour du premier de réaliser un carré différent des deux premiers, et ainsi de suite.
- Ce type d'activité amène les enfants à observer, pour chaque carré, le nombre des couleurs utilisées et leurs positions relatives. Le nombre des carrés augmentant, il devient difficile d'imaginer un nouveau carré. C'est alors que peuvent s'esquisser un ou plusieurs classements des carrés déjà réalisés.

II.4. Il s'agit maintenant d'obtenir tous les carrés possibles ou de s'assurer qu'on les a effectivement tous obtenus.

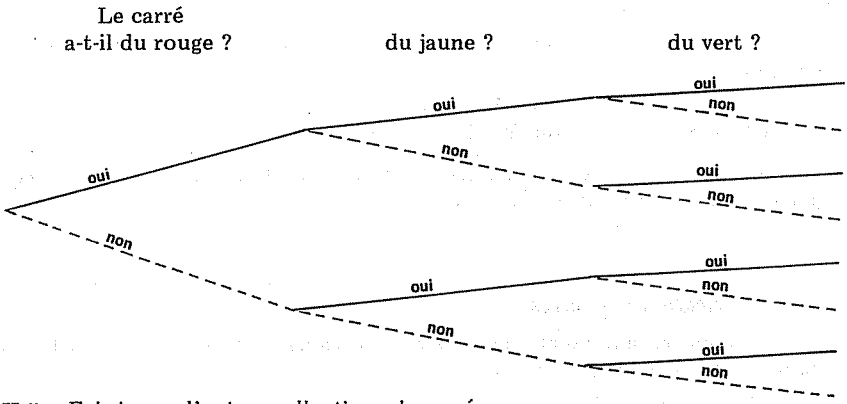
La comparaison des différentes productions est facilitée par l'exploitation des classements de l'étape précédente.

Ainsi, par exemple, on peut chercher

- tous les carrés qui n'ont qu'une couleur
- tous les carrés qui ont deux couleurs (3 types différents)
- tous les carrés qui ont trois couleurs (2 types différents).

Au fur et à mesure, on fabrique les carrés qui manquent.

Une autre démarche pourrait se baser sur l'utilisation d'un arbre du type suivant :



II.5. *Fabriquer d'autres collections de carrés*

Un jeu de 24 carrés coloriés avec du jaune, du rouge et du vert ayant été réalisé, on demande de réaliser un nouveau jeu de 24 carrés coloriés avec d'autres couleurs, par exemple : bleu, orange, noir.

La réalisation est notablement simplifiée si on utilise une table de correspondance entre couleurs, par exemple :

jaune	rouge	vert
bleu	orange	noir

Voici une autre façon de procéder :

Au cours de la recherche initiale (voir II.2), les enfants ont utilisé des couleurs différentes. Puis on a examiné et complété la production d'un enfant ou d'une équipe comme il est suggéré en II.4.

Il s'agit alors de comparer les autres productions au jeu complet obtenu qui sert de référence. Cette comparaison conduit chacun à réaliser les carrés qui lui manquent.

En vue des activités suivantes, il est intéressant de travailler avec du papier gommé et de coller les triangles sur des supports carrés en carton.

II.6. *Jeu du portrait*

Il s'agit dans un tel jeu d'amener les enfants à affiner leur perception des objets en question (prise en considération des positions relatives des couleurs, par exemple) et d'obtenir des descriptions verbales.

La règle du jeu est bien connue.
Le meneur de jeu extrait un carré sans le montrer.
Il s'agit pour les joueurs de trouver quel est ce carré en posant des questions auxquelles le meneur de jeu ne répond que par *oui* ou *non*.

Le carré choisi ayant été convenablement décrit, on peut examiner les questions posées :

— Y a-t-il eu des questions inutiles ?
— Peut-on réduire le nombre de questions ?
— Y a-t-il un nombre minimum de questions permettant de trouver à coup sûr n'importe quel carré ?

II.7. *Puzzles*

La règle d'assemblage est celle des dominos : deux carrés se touchent par des bords de même couleur.

En utilisant les 24 carrés, peut-on réaliser

- un rectangle de 4 sur 6 ?
- un rectangle de 3 sur 8 ? de 2 sur 12 ?
- un carré de 5 sur 5 avec un trou au centre ?

On peut introduire des contraintes supplémentaires. Par exemple, peut-on réaliser un rectangle de 4 sur 6 dont la frontière soit d'une seule couleur ?

On peut aussi ne travailler qu'avec une partie des carrés, par exemple avec les 12 carrés bicolores.

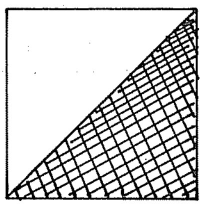
Ces activités mettent en jeu deux attitudes :

— trouver un objet répondant à certaines caractéristiques ;
— en cas de blocage en cours de réalisation, que faut-il modifier dans ce qui est déjà réalisé pour éviter ce blocage ?

III. Utilisation d'un module

Dans le même ordre d'idées, le lecteur intéressé consultera le livre de Louis Empain : *Un module parcourt l'espace* (Dessain et Tolra).

Il y trouvera des exploitations décoratives d'un carré bicolore (voir ci-dessous) utilisé comme motif de base.



Bien souvent, le plaisir esthétique d'une composition provient d'une certaine régularité qui peut être analysée en utilisant le langage géométrique : symétrie, translation, rotation.

G. CONSTRUCTION DE TETRAEDRES

(Activité pour le C.E.2).

Objectifs :

- Recherche des informations pertinentes pour une construction ;
- utilisation du compas comme instrument servant à reporter les longueurs ;
- organisation du travail dans les équipes.

Matériel :

- Un tétraèdre non régulier fabriqué par le maître dans un morceau de carton d'un seul tenant (trois des arêtes sont pliées et les trois autres sont scotchées).
- Du papier cartonné et du scotch pour les élèves ; règle, crayon, ciseaux.

Activité :

Après avoir fait circuler le tétraèdre parmi les élèves, le maître découpe le scotch des arêtes, déplie le tétraèdre et le punaise au tableau. Ensuite :

Première consigne :

Chaque élève doit construire un objet analogue en utilisant sa feuille de papier cartonné. Les élèves ont la possibilité d'aller au tableau pour regarder et toucher le patron déployé, sans le détacher. Certains élèves veulent reproduire le modèle et cherchent à noter des longueurs (avec la règle graduée ou une bande de papier) ou des angles (par décalque ou par dessin à vue sur du papier brouillon tenu à côté du modèle).

Le maître donne des conseils matériels (par exemple : prendre une lame de ciseaux pour marquer un pli en s'appuyant sur le bord de la règle). Il interrompt le travail pour soumettre à la classe les difficultés rencontrées par certains.

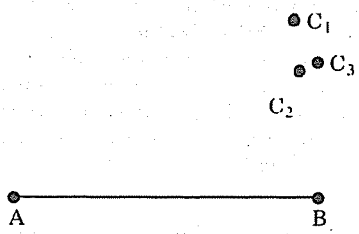
Pour éviter la bousculade près du tableau, quelques élèves, à tour de rôle, sont chargés de relever les mesures réclamées par leurs camarades ; cela oblige à donner des noms aux sommets du patron.

Quelles que soient leurs intentions initiales, la plupart des enfants terminent leur tétraèdre en ajustant par découpage (ils éliminent ce qui dépasse quand ils ont plié).

Deuxième consigne :

Les élèves, par équipes de quatre, doivent fabriquer un tétraèdre, chaque membre de l'équipe ayant un triangle à réaliser dans sa feuille de papier cartonné.

Les élèves sont obligés de s'organiser et de prévoir les dimensions des arêtes soit à l'avance, soit au fur et à mesure des réalisations (le premier triangle est arbitraire, le deuxième a une dimension imposée, le troisième deux, et le dernier, les trois). C'est ce dernier triangle qui pose le plus de problèmes aux élèves. Ils procèdent généralement par approximation, en repérant chaque fois les longueurs avec une règle ou une bande de papier (voir figure).



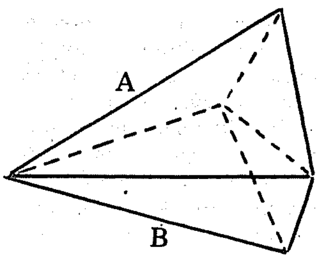
Pour construire C situé à la distance m de A et à la distance p de B, ils construisent d'abord le point C_1 à peu près au bon endroit tel que $AC_1 = m$; puis, sur la droite BC_1, le point C_2 tel que $BC_2 = p$; puis, si $AC_2 \neq m$, sur la droite AC_2, le point C_3 tel que $AC_3 = m$; bien souvent le point C_3 convient (erreur de moins d'un millimètre sur la longueur de BC_3).

Quand les élèves se sont expliqués sur la manière dont ils procèdent et le but qu'ils poursuivent, on peut leur proposer d'utiliser des compas ; mais tous ne voient pas dès l'abord le parti à tirer de cet instrument, qui pour eux est avant tout destiné à faire des ronds.

Prolongement :

La technique de fabrication étant maintenant au point, on peut passer au stade de la production en série, en décidant des dimensions à donner aux différents triangles et en constituant des ateliers de dessin, de découpage et d'assemblage. Le matériel obtenu peut servir à la fabrication, par collage, de polyèdres étoilés plus ou moins compliqués.

Remarque :



Deux jeux identiques de quatre triangles peuvent donner deux tétraèdres A et B (voir figure), symétriques par rapport à une face (quelle que soit cette face). Un troisième jeu identique de triangles donne l'assemblage C nécessairement de l'un des deux types A ou B. Si C est du type A par exemple, il est beaucoup plus facile, pour s'en assurer, de passer par l'intermédiaire de B que de le faire directement, car il n'est pas possible de "superposer" A et B comme on le ferait de figures planes (il faudrait ici les emboîter).

H. SYMETRIES DES QUADRILATERES

Objectif :

Faire découvrir aux élèves que les symétries plus ou moins nombreuses de certains quadrilatères sont des propriétés particulières qui permettent de les caractériser.

Matériel :

Pour cette activité il faut que chaque élève dispose d'un même lot d'une dizaine de quadrilatères convexes découpés dans du papier fort ; ce lot comporte au moins : un carré ; deux rectangles non carrés (dont l'un est très allongé) ; un trapèze isocèle ; un trapèze non isocèle ; un losange non carré ; un parallélogramme ni rectangle ni losange ; un quadrilatère non parallélogramme ayant deux paires de côtés consécutifs de même longueur (forme de cerf-volant) ; un quadrilatère ayant seulement une paire de côtés consécutifs de même longueur ; un quadrilatère ayant seulement une paire de côtés opposés de même longueur. Il est important que dans chaque quadrilatère les éléments, angles ou longueurs qui doivent être différents le soient d'une façon suffisamment sensible pour que la maladresse des enfants, en matière de dessin , n'apporte pas d'ambiguïté.

Chaque quadrilatère porte un nom (A, B, etc. par exemple) ; sur chaque quadrilatère les côtés sont numérotés en suivant (1, 2, 3, 4). Ces indications sont écrites sur les deux faces du carton ; elles sont destinées à permettre une communication sûre dans la classe.

Activité préparatoire :

Si le maître en a le courage, il peut fabriquer lui-même tous les lots et les distribuer aux enfants ; mais il est également intéressant de faire circuler parmi les élèves deux ou trois lots en leur demandant de les reproduire (sans oublier les noms et les numéros).

Quand chaque élève a complété son lot, il dispose ses cartons sur une feuille de papier, trace le contour de chacun d'eux et reporte (à l'extérieur) les noms et les numéros.

Mise en place de la communication :

Les élèves sont invités à chercher, pour chaque quadrilatère, différentes façons de le poser sur son empreinte. Au bout de quelques minutes, le maître s'assure que la consigne est bien comprise en demandant à quelques élèves d'annoncer ce qu'ils ont réussi à faire avec tel ou tel quadrilatère ; les autres élèves doivent vérifier avec leur propre matériel. Rapidement, les termes "retourner", "glisser", "tourner", etc., accompagnés éventuellement de gestes, sont remplacés par des phrases du genre : "J'ai placé le côté 2 du carton sur le côté 3 de la feuille". Les renseignements ainsi fournis par les élèves pour décrire leur action peuvent être incomplets ou redondants, c'est sans importance.

Jeu du portrait :

Le maître annonce aux enfants : "J'ai choisi un quadrilatère et je l'ai posé sur ma feuille ; il faut que vous trouviez lequel c'est ; pour vous aider, je vous donne un renseignement : j'ai placé le côté 1 du carton sur le côté 3 de la feuille". Il incite les enfants à faire l'inventaire des possibilités par des questions telles que "Etes-vous sûrs que c'est celui-là ? N'y en a-t-il pas d'autres ?". Quand il est évident pour tous les élèves que le renseignement donné ne suffit pas à caractériser le quadrilatère inconnu, le maître invite les enfants à lui poser des questions auxquelles il répond par *oui* ou par *non*, jusqu'à la découverte du quadrilatère.

Dans cette première phase, on ne se préoccupe ni des questions inutiles, ni de la justification de la découverte ; il s'agit simplement de préciser le type de questions que l'on peut poser.

Ensuite, les élèves, en jouant à deux ou en petits groupes, sont amenés à chercher toutes les symétries de chaque figure et à les noter. Au cours de phases de jeu collectif, leurs découvertes sont explicitées au niveau de la classe. L'organisation suivante est particulièrement efficace dans ce but.

La classe entière joue contre le maître ou une moitié contre l'autre. Dans les deux cas, une question est proposée par un élève que le maître désigne ; cette question est examinée par ses coéquipiers qui, après discussion, la retiennent, la modifient ou la rejettent. C'est seulement quand tous les élèves concernés se sont mis d'accord sur la formulation d'une question que celle-ci est enregistrée et qu'il y est répondu.

Les découvertes géométriques :

Chemin faisant, les élèves constatent qu'il n'est pas possible par ce procédé de distinguer les uns des autres les quadrilatères quelconques et le trapèze non isocèle qui n'ont aucun élément de symétrie ; on les élimine du jeu (de même, on ne peut pas distinguer les rectangles l'un de l'autre).

Il ne reste plus alors que les figures ayant au moins une symétrie par rapport à une droite ou par rapport à un point (et, pour le carré, les rotations d'un quart de tour). On peut alors dessiner ces éléments de symétrie sur les figures et introduire le vocabulaire correspondant.

Dans ce contexte, le parallélogramme apparaît comme un trapèze isocèle particulier, le rectangle comme un parallélogramme particulier, le losange comme un parallélogramme ou un cerf-volant particulier et le carré comme un n'importe-quoi particulier.

Prolongement :

Invention de dessins de quadrilatères ayant des symétries données.

J. PAPIERS PEINTS, TABLEAUX ET FRISES

Voici deux exemples d'activités, sur papier peint et sur un tableau de Vasarely, qui ont les mêmes objectifs :

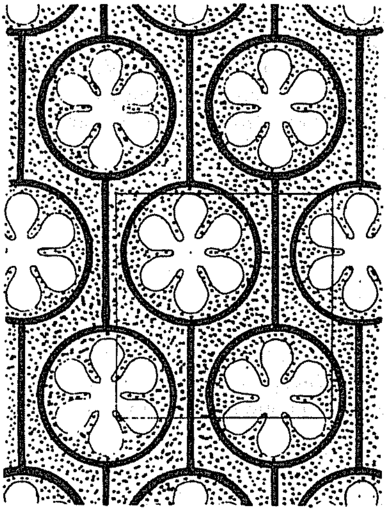
- Analyser une structure modulaire à deux dimensions.
- Chercher des procédés pour reproduire cette structure.
- Créer un objet esthétique de structure donnée.

I. Papier peint

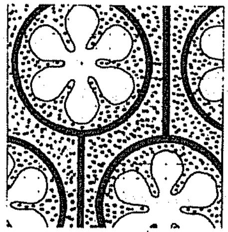
Matériel :

- Un échantillon de papier peint (voir figure) et la photographie d'une pièce tapissée (extraits d'un catalogue de papiers peints périmé fourni par un commerçant).

- Du papier blanc et du papier quadrillé au centimètre, à la disposition des enfants.



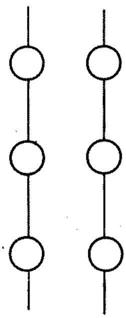
pan de mur tapissé



échantillon montré aux élèves (dimension : 50 cm environ).

Activités (dans un CE_1)

Le maître affiche l'échantillon et demande aux élèves d'imaginer comment le papier se continue tout autour de l'échantillon. Il répond aux questions des élèves sur les morceaux de ronds et de traits que l'on voit aux bords de l'échantillon.

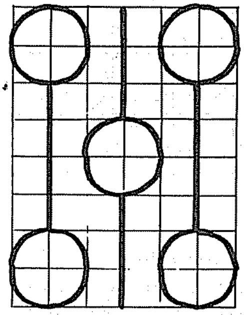


Les enfants doivent alors faire un dessin ; ils choisissent d'utiliser le papier blanc. Leurs productions, très schématiques, sont (voir figure) caractérisées par le non-respect des proportions et l'absence de décalage d'une colonne à la suivante. (Seuls quelques enfants ont décalé, mais pas suffisamment).

Le maître leur montre la photo d'une pièce tapissée ; la comparaison avec leurs dessins fait apparaître les deux défauts cités.

Les élèves font alors un deuxième échantillon (toujours sur papier blanc), généralement plus conforme.

On leur demande de rechercher un modèle sur papier quadrillé qui soit facile à décrire et à reproduire.



A partir de leurs propositions un modèle collectif est construit au tableau (voir figure). Les proportions ne sont pas encore réellement respectées car les enfants ont voulu faire tenir les ronds dans les carrés du quadrillage.

Ensuite chaque élève utilise ce modèle pour décorer une feuille quadrillée. Plusieurs procédés sont essayés :

- collage de gomettes ; peu pratique car il est difficile de bien centrer la gomette du premier coup.
- rond tracé au compas ; peu commode car le rayon est petit (1 cm).
- utilisation d'un gabarit (pièce de monnaie) ; il est facile de bien centrer la pièce avant d'en dessiner le pourtour.

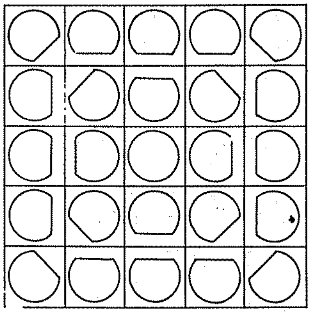
Avant de mettre en couleur, chaque enfant vérifie que son dessin peut se raccorder à celui d'un camarade.

Les dessins terminés sont affichés de manière à tapisser un pan de mur. On constate encore quelques irrégularités de disposition qui empêchent que le raccordement soit parfait.

II. Un tableau de Vasarely : Zaphir - Z

Matériel

- Une reproduction du tableau dans un livre ouvert devant les élèves (ce tableau est composé par la juxtaposition de motifs dont les tons sont différents, mais qui comportent tous un disque écorné centré dans un carré de dimension légèrement supérieure).
- Un agrandissement réalisé par le maître de ce tableau (voir figure) dans lequel seules les limites des taches colorées sont dessinées.
- Papier à dessin, ciseaux et instruments à la disposition des élèves.



Activités (dans un C.E.2) :

Les élèves observent la reproduction ; ils analysent la structure du tableau ; ils pensent en particulier que c'est toujours le même rond coupé qui tourne d'un carré à l'autre plus ou moins régulièrement. Pour plus de commodité le maître affiche l'agrandissement au tableau. Les élèves, en mesurant quelques carrés et quelques ronds (diamètre, corde, "épaisseur"), justifient leur première impression. Chaque élève doit alors produire un ou plusieurs motifs en découpant un carré, en y traçant un cercle et en cherchant comment il faut le couper. (Les dimensions retenues pour le carré et le cercle ne sont pas celles de l'agrandissement).

Le découpage du carré ne pose pas un gros problème. Par contre, pour le cercle, les enfants ne sachant pas où placer la pointe du compas, le font à vue de nez et le résultat ne les satisfait pas ; ils préfèrent alors utiliser un objet rond comme gabarit (pièce de monnaie) qu'il est plus facile de centrer à l'oeil.

C'est en cherchant à tracer la corde qu'ils prennent conscience qu'il y a deux sortes de motifs, selon que cette corde est parallèle à un bord du carré ou qu'elle est parallèle à une diagonale. Le tracé des diagonales leur fournit alors d'une part le centre du cercle et d'autre part la corde parallèle à un bord (voir figure 1). Cette construction est reproduite sur les carreaux de l'agrandissement pour être validée.

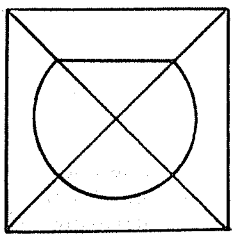


figure 1

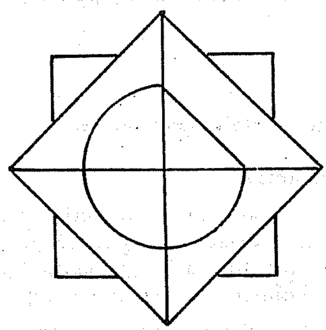


figure 2

Pour construire les motifs de l'autre type les élèves essaient par tâtonnement. Le maître leur suggère de placer le motif déjà construit sur le nouveau carré en le tournant convenablement (voir figure 2) ce qui permet aux élèves de constater que les diagonales du premier carré sont parallèles aux bords du second. Ils construisent alors les médianes.

Une fois ces procédés de construction bien explicités, les élèves préparent plusieurs motifs et les peignent. Les motifs terminés sont disposés sur une grande feuille ; cette disposition donne lieu à un débat, d'une part, sur les règles à observer si l'on veut obtenir des symétries et, d'autre part, sur la répartition des couleurs.

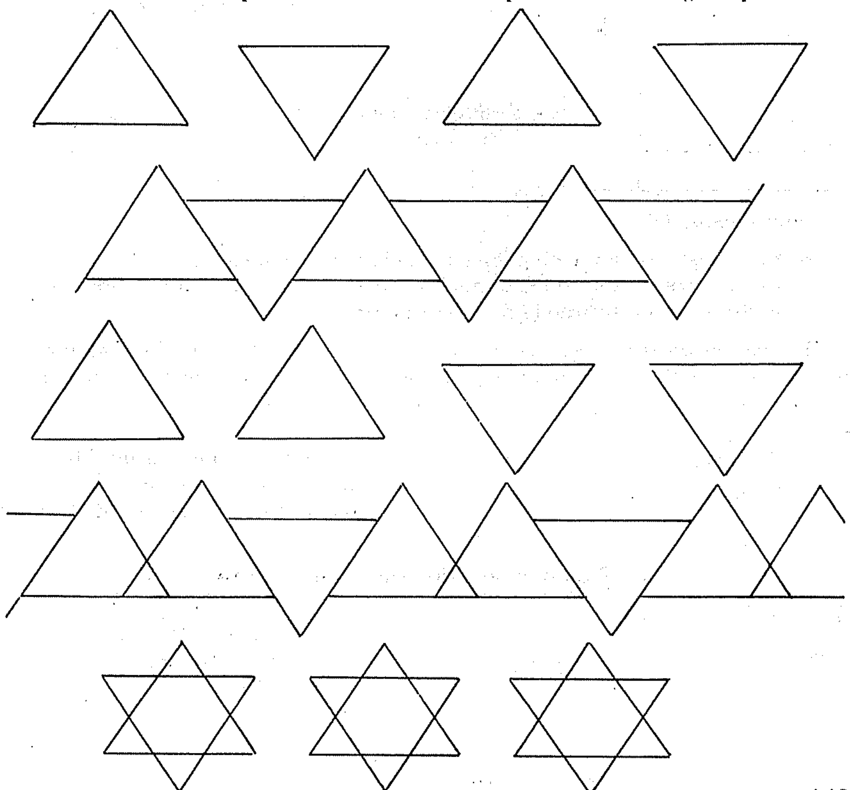
Quand la classe est parvenue à un accord, les motifs sont collés pour donner un "tableau de Vasarely".

Remarque : Il est possible de trouver dans la production de Vasarely et dans celle de Mondriaan de multiples points de départ pour des activités de ce type.

III. Frises

Une frise est une structure modulaire à une seule dimension ; on pourrait obtenir des frises à partir des deux productions précédentes en les découpant en bandes et en raboutant les bandes.

Voici des exemples de frises réalisées à partir d'un triangle équilatéral.



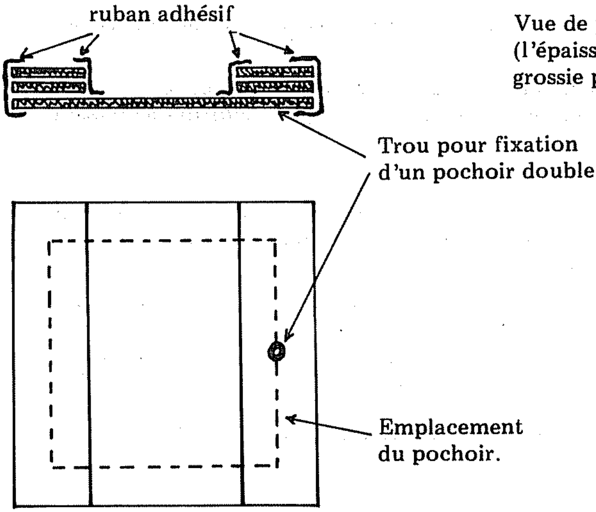
Si l'on ne dispose que des instruments de dessin, la réalisation de frises est fastidieuse.

Pour plus de commodité, on peut construire un appareil en carton qui permet de réaliser commodément des frises.

L'appareil est composé :

- d'un socle qui sert de guide au support de la frise ;
- d'un pochoir mobile que l'on pose sur le socle.

Plan du socle



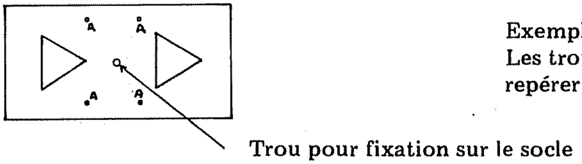
Vue de profil.
(l'épaisseur du carton a été grossie pour la clarté du dessin)

Vue de dessus.

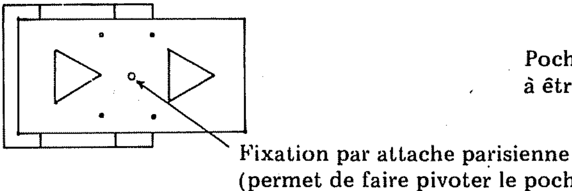
Pour chaque frise :

- on déplace la bande de papier d'une longueur convenue ;
- on retourne — ou non — le pochoir (dans les deux premiers exemples ci-dessus, on retourne le pochoir une fois sur deux).

La réalisation des frises présentées ci-dessus est facilitée par l'utilisation d'un pochoir double qui peut pivoter autour d'un point du socle. On utilise alors tantôt la partie gauche, tantôt la partie droite du pochoir.

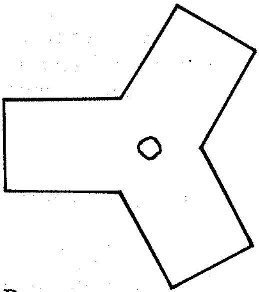


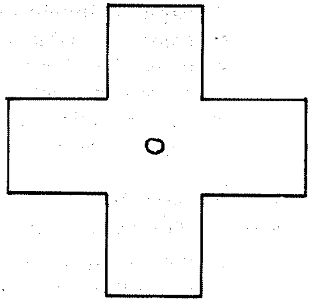
Exemple de pochoir double
Les trous notés A servent à repérer le déplacement de la bande



Pochoir double prêt à être utilisé

Pour obtenir des frises plus intéressantes, on peut utiliser des pochoirs à 3 places ou à 4 places





Remarque :

On peut compléter cette activité de dessin par une activité de communication : un enfant ayant réalisé une frise, il essaie de donner les instructions nécessaires pour qu'un autre enfant réalise la même.

K. QUADRILLAGES

I. Références : Arrêté du 27.VII.78

I.1. Objectifs du Cycle Elémentaire

......

4 - Repérer et mesurer

- Savoir repérer les cases ou les noeuds d'un quadrillage et savoir utiliser ces repérages dans des activités diverses.

....

I.2. Instructions Pédagogiques et Types d'Activités.

.....

3 - Repérer et mesurer

3.1. Activités sur quadrillage

Les quadrillages permettent une organisation du plan : tout point, tout noeud ou toute case du plan peut y être repéré dès que l'on a désigné les lignes et les colonnes (exemple : situer un monument d'une ville sur un plan). Par ailleurs, la résolution de nombreux problèmes peut être facilitée si l'on se limite à utiliser l'ensemble des "noeuds" d'un réseau par exemple, tracés divers, reproduction de figures, figures symétriques, déduites par translation, agrandissement de figures, représentation graphique de fonctions, calculs de distances. Enfin, on y retrouve évidemment des activités de désignation déjà pratiquées au cycle préparatoire : codage et décodage de cheminement par exemple.

.....

II. Qu'entend-on par quadrillage ?

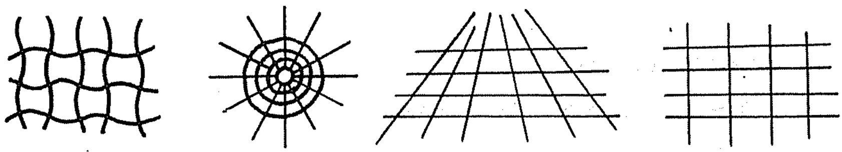
II.1. Le mot *quadrillage* évoque généralement un entrecroisement de 2 faisceaux de droites parallèles se coupant à angles droits et formant des mailles le plus souvent carrées. C'est ainsi que se présentent les papiers quadrillés du commerce :

- papier millimétrique
- papier à maille carrée au demi-centimètre dit "à petits carreaux"
- papier à maille carrée au centimètre dit "à grands carreaux" (certains cahiers de petit format ou papier couturière de grand format).
- papier écolier à maille carrée avec interlignes.
- papier à lettres à maille rectangulaire.

II.2. En géométrie on utilise le mot *quadrillage* dans un sens plus général, à savoir : 2 faisceaux de lignes telles que

- 2 lignes quelconques de l'un des faisceaux ne se coupent pas,
- toute ligne de l'un des faisceaux coupe chaque ligne de l'autre en un seul point.

Exemples :



II.3. Dans un quadrillage, on peut s'intéresser

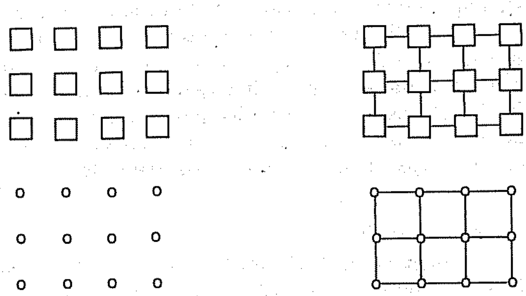
- soit aux mailles ou cases
- soit aux noeuds (points d'intersection des lignes)

Ainsi un quadrillage donné peut être réalisé en deux versions suivant que les lignes sont dessinées (papier réglé) ou que les noeuds seuls sont dessinés (papier à points). On trouvera des modèles de ces papiers en fin de brochure.

II.4. Dans la pratique des classes, deux grands types de quadrillages sont suffisants :

- du papier à maille carrée, réglé ou à points,
- du papier à maille triangulaire, réglé ou à points.

Dans certaines activités, des versions intermédiaires présentent des avantages d'utilisation (de lecture, par exemple, pour de jeunes enfants) :



III. Utilisation des quadrillages en géométrie

III.1. Quand il arrive au cycle élémentaire, l'enfant a déjà acquis une certaine maîtrise de l'espace. Par exemple, il s'y déplace, il distingue ce qui est intérieur de ce qui est extérieur, ce qui est loin de ce qui est près.

Mais cette maîtrise reste partielle et il doit encore affiner sa perception des positions, des intervalles, des déplacements, des orientations, des longueurs des aires, des volumes... Il s'agit donc de l'aider à se construire un espace objectif, cohérent et homogène.

III.2. Pour lui faciliter cette approche et lui ouvrir la voie vers une géométrie de la droite, les quadrillages constituent un matériel simple et bien adapté.

Que ce soit sous la forme de planches à clous (géoplans), de planches à trous ou de papier quadrillé, ces réseaux de points constituent un espace artificiel mais structuré.

Il est facile d'y aborder l'étude de certains phénomènes (alignements de points, parallélisme, symétrie...).

Par contre, les quadrillages sont mal adaptés à l'étude des angles et des cercles.

III.3. Du fait que les points d'un quadrillage sont régulièrement disposés,

- d'une part, on facilite certains comptages qu'il est parfois difficile d'imaginer si on travaille sur papier blanc,
- d'autre part, on élimine les délicats problèmes de la précision du mesurage qu'il serait prématuré d'aborder de façon systématique à ce niveau.

III.4. En outre, les travaux sur quadrillages permettent aux enfants de combiner et d'articuler différentes propriétés pour constituer des noyaux autonomes de connaissances interdépendantes. Ainsi la classe B dont il est question dans "Sur le thème du rectangle" (voir : Chap. I - D, page 27) avait étudié des symétries sur quadrillage antérieurement à l'activité décrite.

L'origine en avait été

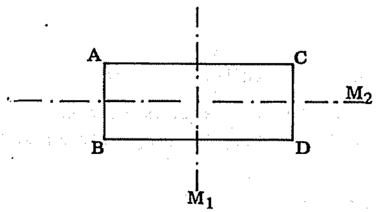
- d'une part, l'étude du reflet d'un dessin à travers un miroir placé le long d'une ligne du quadrillage,
- d'autre part, le décalquage d'un dessin après pliage le long d'une ligne du quadrillage.

L'examen attentif des dessins réalisés a permis aux élèves d'élaborer une méthode de construction utilisant à la fois

- la distance d'un point et de son image à l'axe,
- la conservation des distances mutuelles au cours de la transformation

Après avoir construit les reflets d'un même dessin dans deux miroirs perpendiculaires, les enfants ont cherché — mais en vain — à plier de façon à superposer les deux reflets. Au cours de leur recherche ils ont été amenés à construire les différents points qu'on obtient à partir d'un point donné en prenant son reflet dans un miroir, puis le reflet du reflet dans l'autre miroir, etc. C'est ainsi qu'ils ont construit des rectangles. A l'issue de cette activité, les enfants ont plusieurs façons d'expliquer que, dans un rectangle, deux côtés opposés, AB et CD par exemple, ont même longueur :

- soit en considérant AB comme le reflet de CD dans le miroir M_1
- soit en s'appuyant sur le fait que BD est parallèle à M_2 pour affirmer que B et D sont à la même distance de M_2 (c'est-à-dire que les demi-côtés ont même longueur).



Ce sont ces connaissances, entre autres, que les enfants ont réemployées au cours de leur travail sur papier blanc (voir : chap. I - D, page 30).

IV. Quadrillages et repérage

IV.1. De nombreuses activités peuvent être menées sur des quadrillages sans qu'il soit nécessaire d'en repérer les cases ou les noeuds (voir P : Géoplans).

Il va de soi que le fait de ne pas repérer les cases ou les noeuds n'interdit nullement d'utiliser des nombres pour repérer localement un point par rapport à un autre (voir L : Alignements sur quadrillage) ou pour exprimer la distance entre deux points situés sur une même ligne du quadrillage.

IV.2. En fait, le repérage des cases ou des noeuds d'un quadrillage ne devient nécessaire que si l'on veut étudier ou introduire des relations numériques.

Ainsi, quand on s'intéresse à la croissance d'une plante, le report sur un quadrillage repéré des mesures faites permet de répondre commodément à des questions telles que :

- la croissance d'une plante est-elle régulière ?
- les différentes parties de la plante grandissent-elles à la même vitesse ?

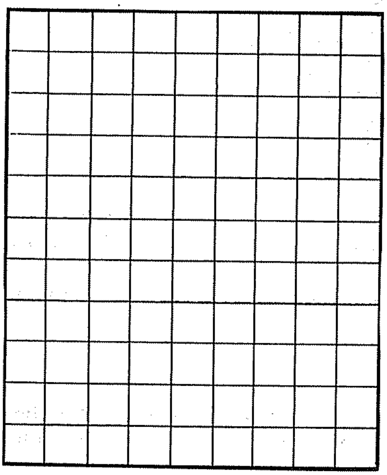
Pour d'autres exemples, voir :

- Chap. I - C — Jeu de cible, page 12
- Chap. II - G — Relations numériques, page 95

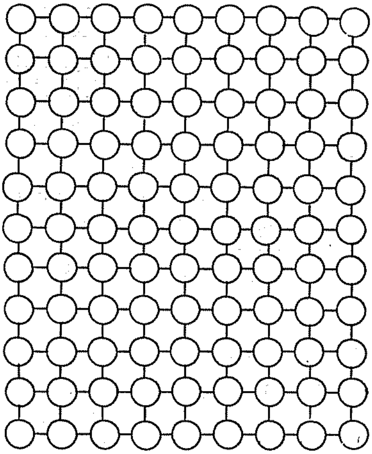
L. ALIGNEMENTS SUR QUADRILLAGE

I. Constructions d'alignements

Dans la cour ou dans le préau on a dessiné un réseau de l'un ou l'autre des types ci-dessous que l'on se propose d'utiliser pour amener les enfants à dégager une ou plusieurs critères d'alignement.



Les enfants se placent dans les cases



Les enfants se placent dans les plots

I.1. Dans la cour

I.1.1. Objectifs

Faire aligner, par visée, des enfants dans des cases d'un quadrillage. Reporter sur papier quadrillé la disposition obtenue.

I.1.2. Consignes

La classe est divisée en deux groupes :

- l'un A, celui des acteurs parmi lesquels on désigne un meneur de jeu ;
- l'autre B, celui des observateurs qui notent sur papier quadrillé les positions de leurs camarades du groupe A. Seuls les enfants du groupe A viennent sur le quadrillage au fur et à mesure qu'ils y sont conviés.

I.1.3. Déroulement de l'activité

- Le maître place deux enfants a et b sur le quadrillage.
- Le meneur de jeu se place de façon que a lui cache b, puis il doit, par des consignes orales — et gestuelles si nécessaire —, placer un de ses camarades c de façon que celui-ci se trouve dans une case du quadrillage et soit caché par a. Il place de même d, puis e.
- Quand le groupe B a relevé les positions de a, b, c, d, e, ceux-ci sortent du quadrillage.

									3
						3			
			3					e	
3						d			
2				c					
	2	b							
a		2							
			2						
1	1	1	1	2 1	1	1	1	1	1
					2				

- On recommence la même activité avec un autre meneur de jeu. On obtient, par exemple, les alignements 1,2,3, etc. tous notés par les enfants du groupe B.
- On reprend la même activité en échangeant les rôles des groupes A et B.

I.2. En classe :

- On examine les feuilles de notes et on s'accorde sur le fait que les points qui y sont marqués sont effectivement alignés, par exemple en utilisant une règle.
- Ensuite chaque enfant colorie des cases ou des points alignés sur une feuille quadrillée.
- La classe est à nouveau partagée en deux groupes A et B. Chaque groupe décide en commun d'un alignement dont il colorie les cases ou les points sur une feuille vierge.
- Un meneur de jeu choisi dans le groupe A doit réaliser avec ses camarades l'alignement décidé par B, avec contrôle par B. Puis on échange les rôles.

Remarque

Ces deux premières phases pourraient être menées en utilisant des planches à trous, les enfants étant groupés par deux : un acteur qui place les fiches et un observateur qui contrôle les alignements par visée au ras de la table.

I.3. A nouveau dans la cour

- Les enfants se replacent sur les points ou dans les cases du réseau tracé dans la cour.
- Tous les élèves étant accroupis, on désigne deux enfants *a* et *b*, qui se lèvent ; on demande aux élèves alignés avec *a* et *b* de se lever. On choisit un élève *c* qui n'est pas aligné avec *a* et *b* ; il se lève ; on demande alors aux élèves alignés avec *a* et *c* de se lever.

- Tous les élèves étant debout, on fait sortir les enfants d'une rangée. Ils doivent, en se promenant autour de leurs camarades, chercher des emplacements d'où ils peuvent voir simultanément plusieurs alignements.
- Après quoi ils reprennent leurs places, la rangée suivante sort et ainsi de suite.
- De retour en classe les enfants colorient des alignements sur papier quadrillé et cherchent l'endroit où il faudrait se placer pour les voir simultanément.

II. Alignements sans points communs

Objectif

Enrichir les observations précédentes en faisant observer et réaliser des alignements n'ayant pas de point commun.

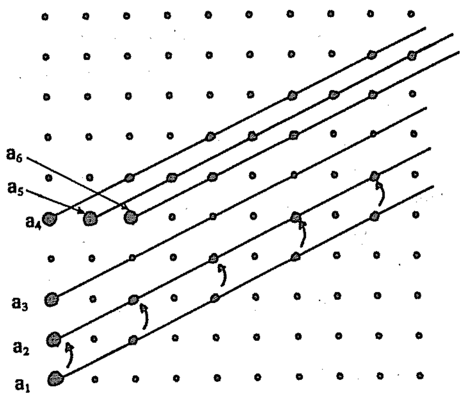
II.1. Dans la cour

Matériel

- Un réseau de points plus vaste que le précédent, dessiné dans la cour ou sur le terrain de sports.
- Un lot de ficelles dont la longueur est sensiblement égale à la longueur de la diagonale du réseau de points.

Déroulement de l'activité :

- Comme au début de l'activité I, la classe est partagée en deux groupes A et B qui ont à remplir les mêmes fonctions.
- Le meneur de jeu aligne des enfants sur les points du réseau. Cet alignement est marqué à l'aide d'une ficelle.



- Sur l'indication du maître, le meneur de jeu déplace le premier enfant a de l'alignement, qui passe ainsi par exemple de a_1 à a_2, puis il demande à tous les autres enfants de l'alignement de se déplacer comme a.

- On marque le nouvel alignement obtenu à l'aide d'une ficelle. Puis on recommence, a passant de a_2 à a_3, de a_3 à a_4, de a_4 à a_5, etc...
- Au fur et à mesure, les enfants du groupe B notent sur papier quadrillé les alignements réalisés.
- Puis on reprend la même activité en échangeant les rôles des groupes A et B.

II.2. En classe

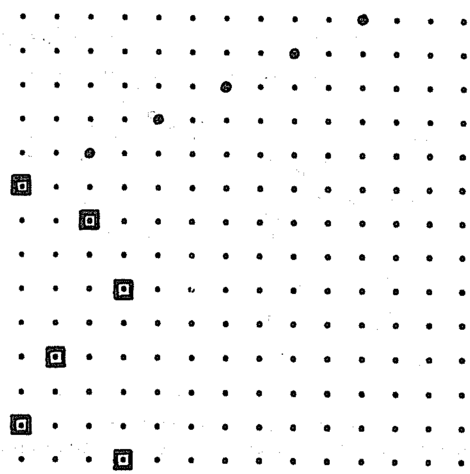
- En utilisant les feuilles de notes, on demande aux enfants de raconter — voire de mimer — ce qu'ils ont fait.

  Cela leur permet de prendre conscience des actions qu'ils ont effectuées et de se rendre compte qu'on peut décrire de façons différentes une même action. Cela permet au maître de s'assurer que les enfants ont un minimum de représentation commune de la situation sur lequel il pourra s'appuyer pour entreprendre la suite des activités, en particulier pour adapter le jeu suivant.

II.3. Jeu de relais ou jeu du téléphone

Le principe du jeu est le suivant.

- La classe est répartie en équipes, de cinq par exemple.
- Le maître a dessiné sur des feuilles quadrillées un alignement dont le point le plus à gauche, par exemple, est marqué (couleur ou forme différente). En outre, il a dessiné sur les feuilles cinq points marqués de la même façon.
  L'alignement figure une file d'enfants, les points isolés figurent la place occupée par le premier enfant de la file au cours de déplacements successifs.
- Le maître donne une feuille à chaque groupe.



- A tour de rôle chaque enfant doit dessiner la nouvelle position de la file correspondant à un déplacement du premier enfant.
- Sous cette forme rudimentaire, ce jeu peut servir de contrôle de compréhension des activités précédentes.

  De plus, des variantes de ce jeu permettent d'amorcer la recherche d'un critère d'alignement utilisant des nombres .
- Voici les éléments du jeu qu'on peut modifier pour construire des variantes :

— inclinaison relative de l'alignement initial par rapport aux bords du quadrillage ;
— emplacement des points de l'alignement initial ;
— emplacement des points marqués (indiquant les positions futures de la file) ;
— choix de la place dans la file du point marqué (on peut aussi bien le choisir au milieu, ou à droite).

- En outre, on peut

  introduire la consigne suivante : avant de passer la feuille au suivant, chaque enfant la plie de façon à ne laisser visible que l'alignement qu'il vient de dessiner ;

  ou modifier le jeu comme suit : au départ un alignement est dessiné et un seul point est marqué. Le premier enfant dessine l'alignement défini par ce point marqué et choisit le point marqué pour l'enfant suivant et ainsi de suite. La préparation de la feuille (choix d'un alignement et d'un point marqué) peut être faite par le maître, par un enfant de l'équipe concernée ou par un enfant d'une autre équipe.

Remarque

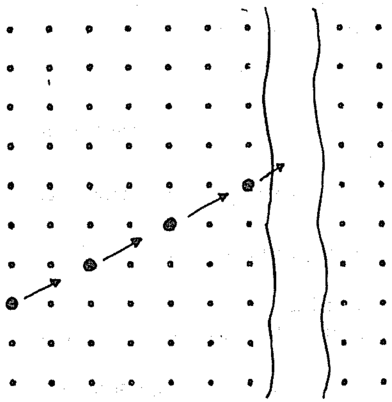
La raison de ces modifications est de créer des conditions dans lesquelles les enfants pratiqueront déjà le genre de comptages qu'on explicitera plus loin (Voir IV.2.).

III. Files qui se rencontrent

Objectifs : poser le problème de l'intersection des droites et faire naître le besoin d'une procédure de construction de points alignés.

III.1. Dans la cour. Première activité

- Chaque enfant dessine un alignement de 5 points sur un quadrillage 10 X 10 par exemple.



Vue partielle de la file réalisée dans la cour

● On choisit l'un de ces alignements. On le réalise de façon que le premier enfant de la file soit placé sur un bord du quadrillage (à ce propos, il est souhaitable que le réseau de points dessiné dans la cour soit plus grand que celui qui figure sur la feuille).

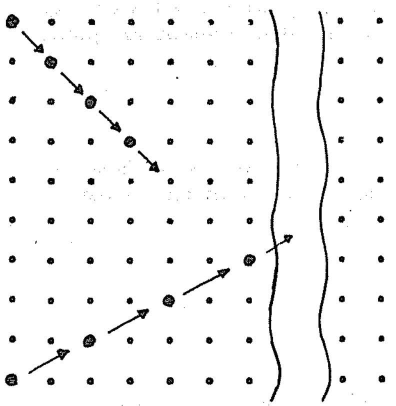
● A un signal, les enfants se décalent d'un cran dans la file. L'enfant qui était au bord du quadrillage libère ainsi une place qui est occupée par un nouveau camarade.

● Puis on se décale à nouveau d'un cran et ainsi de suite. Dès qu'un enfant sort ainsi du quadrillage, il rejoint le groupe des observateurs.

III.2. Dans la cour. Deuxième activité

● On choisit maintenant deux alignements parmi ceux qui ont été préparés. On les réalise comme ci-dessus.

● Chaque fois qu'on donne le signal, les deux files se déplacent simultanément d'un cran.



● Suivant le choix des deux files, trois cas se présentent :

— les deux files se déplacent d'un bord à l'autre du quadrillage sans se gêner,
— les enfants se bousculent parce que les deux files se croisent ;
— dès le départ un enfant appartient aux 2 files.

On fait vivre à la classe chacune de ces situations.

III.3 En classe

● De retour en classe, on invite les enfants à raconter ce qui s'est passé. La difficulté à décrire par le seul langage certains moments de l'activité précédente conduit les enfants à utiliser des dessins sur papier à points pour clarifier leurs explications.

● Les dessins vont se répartir en 2 catégories.

Dans l'une se regroupent les descriptions des cas où les enfants se sont gênés dans leurs déplacements. Dans ces cas-là, manifestement les deux files se croisent, ce qu'on peut mettre en évidence en traçant des droites. Le point commun aux droites est ou non un point de quadrillage.

Dans l'autre catégorie se regroupent les dessins où les alignements ont certainement un point commun hors des limites du quadrillage et ceux dont on n'est pas certain qu'il y ait un point commun. C'est précisément sur cette catégorie de dessins qu'on va travailler.

IV. Caractérisation des alignements

Objectif : Elaborer une procédure de construction (ou de reconnaissance) de proche en proche d'une suite de points alignés.

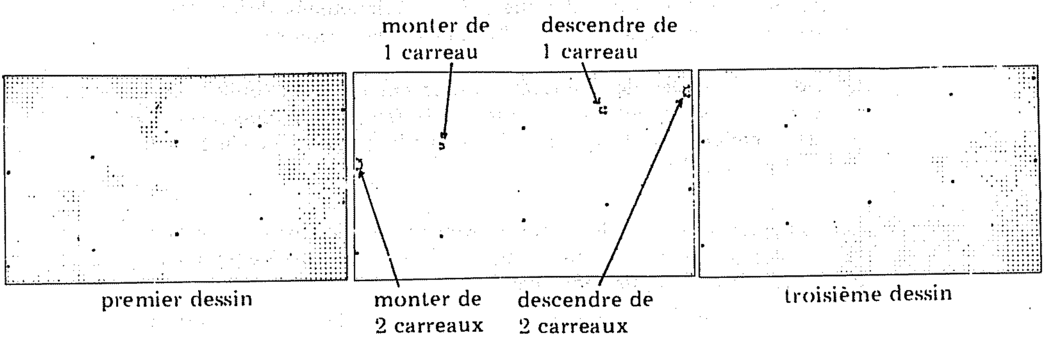
IV.1. Matériel

- Sur un papier quadrillé de grandes dimensions à maille assez petite (par exemple papier couturière), le maître a préparé trois dessins où figurent deux alignements de 5 points, les points extrêmes étant le plus proches des bords possible.
- Dans chacun des trois dessins, l'un des alignements est le même.

Dans le premier dessin, les deux alignements sont parallèles.

Dans le second, les deux alignements se coupent visiblement hors de la feuille à une vingtaine de centimètres du bord.

Le troisième dessin est obtenu à partir du premier comme l'indiquent les schémas ci-dessous :



premier dessin — troisième dessin

IV.2. Activités

Collectivement

- Le maître explique que ces dessins représentent les files d'enfants. On imagine qu'elles se déplacent vers la droite et on se demande si les enfants vont se gêner au cours de leur déplacement.

- Pour exprimer leur opinion, les enfants opposent les situations où l'on se gêne à celles où l'on ne se gêne pas en utilisant des expressions comme :

  "Les files se rapprochent" ou "Les files ne sont pas penchées pareilles" (droites non parallèles).

  . "Les files ne se rapprochent pas" ou "Les files sont penchées pareilles" (droites parallèles).

- La difficulté consiste à trouver un moyen pour décider à quel cas correspondent le premier et le troisième dessins.

- On passe alors à un travail individuel.

Par groupes de deux

- Chaque enfant reçoit deux feuilles 21 X 29,7 à petits carreaux. Sur l'une d'elles, il colorie un alignement d'au moins une quinzaine de points la barrant complètement d'un petit côté à l'autre (le maximum est de l'ordre de la trentaine de points).

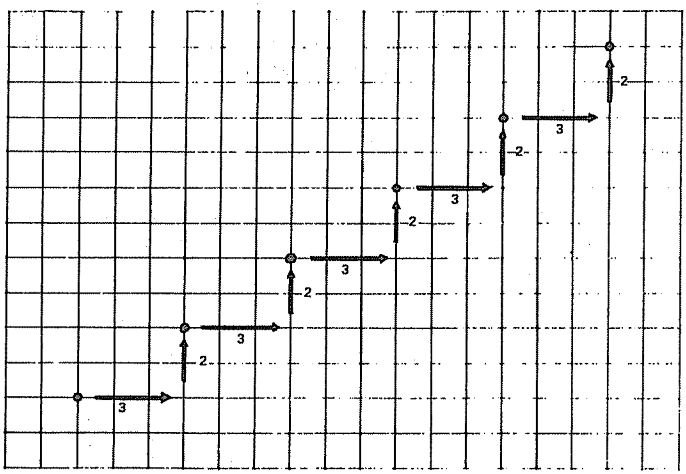
- Sur la deuxième feuille, il recopie les 3 ou 4 premiers points les plus à gauche de l'alignement choisi. Il passe cette deuxième feuille à un camarade ; celui-ci doit chercher, dans l'alignement défini par les points déjà marqués, le point le plus à droite et le colorier.

- Quand il a fini, les deux enfants comparent les deux feuilles. Pour décider si le point coloré (à droite de la feuille) est bien placé, on plie la première feuille et on la pose sur la seconde en ajustant les lignes des quadrillages.

- On examine avec soin les erreurs éventuelles. On les corrige et on fait expliciter par les enfants le procédé qu'ils ont utilisé (escalier et comptage. Voir croquis) pour passer

  du premier point au deuxième (3 carreaux vers la droite, 2 carreaux vers le haut)
  du premier point au troisième (6 carreaux vers la droite, 4 carreaux vers le haut)
  ....

  du premier point au neuvième (27 carreaux vers la droite, 18 carreaux vers le haut).



- Ce procédé permet de construire un critère numérique de parallélisme utilisable pour résoudre le problème posé par les trois dessins de la première phase.

M. DEPLACEMENTS SUR QUADRILLAGE

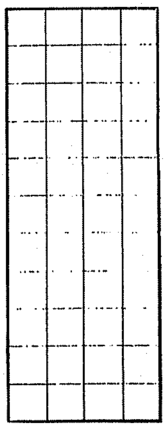
Le point de départ de cette série d'activités est inspiré du jeu : "Mère veux-tu ?".

Dans le jeu proprement dit, le meneur de jeu tourne le dos à ses camarades et se tient le nez contre le mur que les autres joueurs veulent atteindre. Chaque joueur à tour de rôle pose la question rituelle "Mère veux-tu ?" et le meneur de jeu par sa réponse choisit de le faire avancer ou reculer d'une distance arbitraire exprimée en pas de souris, petits pas, grands pas, etc... Il doit avoir en tête la position approximative de chaque joueur pour ne pas lui donner d'ordre impossible à exécuter. Le gagnant est le premier qui parvient au mur et devient le nouveau meneur de jeu. Dans la pratique, des règles plus ou moins explicitées s'instaurent pour conserver son attrait au jeu dont le véritable intérêt est d'ordre social.

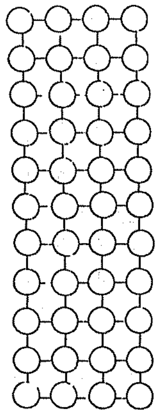
En transposant ce jeu sur quadrillage, on supprime le choix de la longueur du pas (du moins au début, car rien n'interdit de réintroduire plus tard des demi-pas, des doubles pas, etc.), mais on peut augmenter le choix en ce qui concerne le sens de parcours (avancer, reculer, aller à droite, aller à gauche) ; ces expressions sont sans ambiguïté car tous les élèves, y compris le meneur de jeu qui se tient en avant de la grille, tournant le dos à ses camarades, sont orientés de la même façon.

Il serait sans doute dangereux d'exiger des enfants une formalisation précoce : celle-ci trouve naturellement sa place en V ; au cours des activités I à IV, on agit et on se comprend grâce au langage ordinaire.

I. Activités sous le préau



Type 1



Type 2

On trace une grille sur le sol :

soit du type 1 : quadrillage classique ; les enfants se déplacent d'une case à l'autre ;

soit du type 2 : quadrillage dans lequel on a matérialisé les noeuds à l'aide de plots ; les enfants se déplacent d'un noeud à l'autre.

Ce deuxième type de grille est important ; il permet de déboucher sur l'utilisation des papiers quadrillés pour les représentations graphiques de relations numériques.

I.1. Familiarisation avec le jeu.

Il s'agit de faire comprendre aux élèves les rôles respectifs du meneur de jeu et des autres joueurs et de préciser la manière dont les consignes seront données par le meneur et exécutées par les promeneurs.

Les consignes sont d'abord orales ; elles peuvent ensuite être muettes ; il faut alors disposer soit d'une ardoise, soit de cartons indiquant le nombre de pas et le sens du parcours (exercice de symbolisation).

Pour commencer, chaque promeneur peut avancer ou reculer sur sa ligne ; on place un promeneur par ligne.

Les promeneurs doivent apprendre à exécuter correctement les consignes ; au début beaucoup se trompent et comptent 1 sur la case de départ.

Une manière efficace de faire apparaître cette erreur est de donner la même consigne à chacun.

I.2. Activités complémentaires

Elles sont variées et visent à faire prévoir aux enfants le nombre de pas nécessaires pour aller d'une case à l'autre. Par exemple :

— Placer sur chaque ligne une barrière que le promeneur n'a pas le droit de franchir. Si un promeneur reçoit un ordre qui l'obligerait à franchir cette barrière, il ne doit pas l'exécuter mais doit informer le meneur de jeu de cette impossibilité. En fait, deux cas se présentent :

- l'enfant s'en aperçoit immédiatement et ne bouge pas,
- l'enfant commence à se déplacer et il doit alors rejoindre sa place initiale (éventuellement avec l'aide des spectateurs).

— Marquer sur chaque ligne une case à laquelle le promeneur doit parvenir au terme de la dernière étape mais qu'il peut dépasser auparavant.

— On peut faire assister le meneur de jeu par un élève qui regarde la grille et peut lui communiquer des renseignements qualitatifs ("pas assez loin", "dépassé", etc.) ou quantitatifs ("encore deux pas", etc.).

— On peut décider, soit en cours de jeu, soit dès le début, que le meneur de jeu dispose de tant de coups pour conduire tout le monde à son but ou limiter le choix des ordres possibles (pas plus de trois pas), etc.

II. Contrôle de la compréhension en classe

1. *Objectif* : observer à travers les représentations et les déclarations des élèves la manière dont ils ont appréhendé la structure du quadrillage.

Activité : demander aux enfants d'expliquer le jeu par un dessin en leur laissant le choix du papier (blanc ou quadrillé). Comparer ensuite les dessins et élaborer collectivement une représentation.

2. *Objectif* : contrôler l'utilisation du langage introduit dans le jeu.

Activité : poser des questions auxquelles les élèves doivent répondre sur une grille reproduisant le modèle élaboré précédemment.

Exemples :

Le promeneur A avance de 3 pas ; mets une croix où il arrive.
Le promeneur B recule de 2 pas ; mets une croix où il arrive.
Le promeneur C veut aller dans la case hachurée ; que doit-il faire ?
Le promeneur D avance de 4 et recule de 1 ; où arrive-t-il ?

III. Jeux utilisant les conventions de langage introduites précédemment.

III.1. Gendarmes et voleurs.

Principe : dans chaque ligne un voleur est caché et un gendarme se déplace. Le gendarme doit retrouver le voleur en s'arrêtant dans la case où ce dernier est caché.

Le jeu se joue à deux et son déroulement s'inspire du jeu de bataille navale. Chaque adversaire dispose d'une grille. Le joueur A place les voleurs sur sa grille (croix), le joueur B propose les déplacements des gendarmes à partir des cases départ de chaque ligne ; les deux joueurs notent ces déplacements à l'aide de pions, chacun sur sa grille. Le joueur A donne après chaque déplacement un renseignement qualitatif (par exemple : "vu en passant", "pas vu" ou "attrapé" selon le cas). On fait préciser le vocabulaire par les enfants au cours d'une partie de démonstration au tableau devant la classe.

II.2. Jeu de l'objet caché.

Le principe est le même : les objets cachés par le joueur A (un par ligne) sont cherchés par les promeneurs du joueur B. Les renseignements fournis par A sont quantitatifs cette fois (Par exemple ces réponses peuvent être : "trouvé" pour la bonne case, "tu brûles" pour les cases adjacentes, etc.). Le vocabulaire est précisé au cours d'une partie de démonstration faite au tableau.

Dans les deux jeux, on peut commencer avec des grilles de deux ou trois lignes ayant chacune une douzaine de cases, puis laisser les enfants décider entre eux de la taille de leurs grilles (le matériel le plus commode est alors du papier quadrillé sur lequel les enfants délimitent les grilles). Dès que le nombre de lignes dépasse trois, il est indispensable que les joueurs décident d'un code pour désigner les lignes ou les promeneurs (jusque-là, "droite", "gauche" et "milieu" suffisent).

Ces jeux peuvent également se faire par équipes sous le préau ou dans la cour en dessinant le réseau de points sur le sol.

IV. Introduction des déplacements vers la droite ou vers la gauche

Cela peut se faire de différentes manières sous le préau ou dans la cour.

Par exemple :

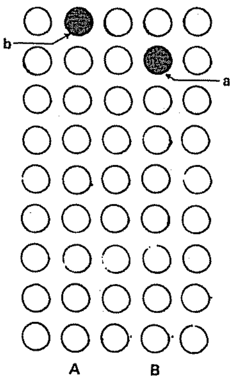


figure 1

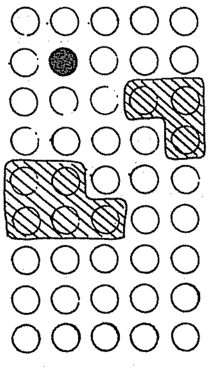


figure 2

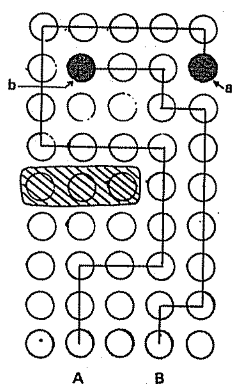


figure 3

IV.1. Reprendre le jeu "Mère veux-tu ?" avec deux promeneurs A et B en assignant à chacun un but (*a* ou *b*) se trouvant dans la ligne de l'autre (fig. 1).

Le meneur de jeu est choisi après l'explication des nouvelles règles et il est invité à bien regarder avant de tourner le dos. Il y a de fortes chances pour que, dès ce moment, certains enfants objectent que le jeu est impossible. Plutôt que d'ouvrir la discussion tout de suite, il est plus intéressant de choisir un meneur de jeu volontaire pour essayer et d'attendre le constat de son échec, voire de recommencer plusieurs fois, avant de laisser expliciter ce qui ne va pas et dégager la nécessité de nouveaux ordres comme "aller à droite", "aller à gauche" (tout en maintenant un seul sens de déplacement pour chaque ordre).

Remarque : au cours du jeu apparaissent ensuite deux sortes de difficultés :

- Que faire quand un promeneur reçoit un ordre qui l'oblige à passer sur (ou à s'arrêter à) une case déjà occupée par l'autre ?

- Le meneur de jeu, qui tourne le dos à la grille, ne peut plus maîtriser la situation ; on peut l'autoriser à venir se placer du côté du départ de façon à contrôler l'effet de ses ordres.

IV.2. Placer des obstacles qu'il faudra contourner (fig. 2).

IV.3. Décider en outre que les trajets des promeneurs ne doivent pas se croiser (fig. 3) ; ce qu'on peut vérifier en transformant chaque promeneur en petit poucet qui dépose un caillou dans chaque case où il passe (Cet exercice est plus difficile).

N.B. Au cours de ces activités, il ne s'agit pas encore de formaliser, mais de décrire oralement les trajets.

Contrôle en classe.

On reprend les mêmes types de contrôle que précédemment en les adaptant aux nouvelles possibilités.

On peut de même adapter les jeux en n'utilisant plus qu'un voleur, un gendarme, un objet et un chercheur.

V. Codages des cheminements

V.1. Codages

Sous le préau ou dans la cour.

En imposant aux élèves une consigne de silence, on les oblige à inventer un code pour donner les ordres. Ce code peut être gestuel, gestes du bras, imités de ceux des agents de la circulation, pour indiquer le sens du déplacement, accompagné de l'indication du nombre de pas à l'aide des doigts par exemple. On peut également utiliser du matériel, par exemple : cartons portant des signes pour indiquer le sens et des chiffres pour indiquer le nombre de pas.

Un matériel particulièrement intéressant est constitué de pions emboîtables de diverses couleurs (rouge, bleu, jaune et vert par exemple). Chaque couleur indique un sens de parcours : ainsi l'ordre "avancer de 3" sera matérialisé par un bâtonnet de trois cubes rouges. Dans tous les cas, une "rose des directions" se révèle fort utile.

V.2. Succession d'ordres

Les différents matériels permettent d'introduire une nouvelle contrainte : donner en une seule fois les ordres permettant de réaliser un trajet composite.

Par exemple : un enfant ayant effectué un trajet sur la grille, un autre enfant doit suivre le même. Le matériel sert alors à trancher les contestations sur les erreurs éventuelles. Si de plus le deuxième enfant n'a pas vu le premier, le matériel devient indispensable pour lui communiquer les informations.

Placés devant ce dernier problème, les élèves d'un CE_1 ont procédé ainsi : chaque fois que le premier promeneur avançait d'un pas, un observateur prenait dans la boîte un cube de la couleur adéquate et fabriquait ainsi un bâtonnet qu'il donnait ensuite au deuxième promeneur (lequel n'avait pas assisté à sa fabrication).

V.3. Autre activité

Si on impose aux enfants de regarder toujours dans la même direction, et par suite de marcher en crabe pour se déplacer vers la droite ou vers la gauche, il est possible de faire exécuter la même série d'ordres simultanément à plusieurs enfants placés côte à côte au départ (en se donnant la main par exemple). Les spectateurs constatent alors que leur disposition et les écarts relatifs restent les mêmes tout au long du déplacement. Cette activité est à rapprocher des activités sur la soustraction. (Cf. chap. 2, G, V, Différences d'âge, page 102).

V.4. Contrôle en classe

Il peut se faire sur des grilles de différents types, en particulier des grilles du type 2 (cf. I) dans lesquelles on réduit la taille des plots et on supprime les traits de liaison (ce qui rend plus visible le dessin du cheminement), du papier quadrillé sur lequel les enfants sont invités à indiquer par de gros points les noeuds où on change de direction, ou du papier pointé.

Ces contrôles consistent en codage et décodage de trajets en utilisant les symboles imaginés précédemment.

Dans le cas d'un codage par les pions emboîtables colorés, on pourrait utiliser des crayons de 4 couleurs, mais les enfants trouvent bien vite plus commode de remplacer chaque couleur par un signe, par exemple l'initiale du mot qui la désigne. Par exemple un trajet pourra être codé 3J 2R 5B 3V 1R. (On peut aussi utiliser les lettres ARDG, initiales des mots : *avancer*, *reculer*, *droite* et *gauche*).

Bien entendu, il est indispensable de rappeler la "rose des directions" et utile de dessiner celle-ci dans un coin de la feuille.

V.5. Reproduction de dessins.

Le codage ainsi mis au point peut être utilisé dans une activité de communication ; l'émetteur transmet au récepteur un message permettant à ce dernier de reproduire le dessin imaginé par le premier. Bien entendu, les dessins doivent suivre les lignes du quadrillage.

VI. Chemins équivalents.

VI.1. Sous le préau ou dans la cour

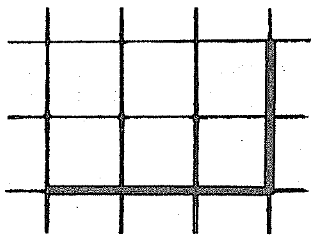
Pour cette activité, les cubes emboîtables colorés constituent le matériel le plus commode, car le même lot de cubes (utilisé pour coder un trajet) peut s'organiser en bâtonnet de diverses manières. Le changement de bâtonnet peut se produire fortuitement (le bâtonnet tombe et les cubes s'éparpillent) ou être organisé par le maître (les cubes sont mis en vrac dans un sac par exemple) ; celui-ci peut même poser directement le problème : que se passe-t-il si on change l'ordre des cubes ?

Les enfants constatent que le trajet n'est plus le même, mais que le point d'arrivée est inchangé. Les efforts qu'ils font pour expliquer ce phénomène, d'abord surprenant, leur permettent de trouver que, si on supprime les éventuelles paires de cubes indiquant des directions opposées, le point d'arrivée ne change pas et qu'on peut ainsi raccourcir les chemins en évitant les détours ; finalement, ce qui compte, c'est le nombre n de pas dont on s'est déplacé soit vers la droite, soit vers la gauche et le nombre m de pas dont on s'est déplacé soit vers l'avant, soit vers l'arrière.

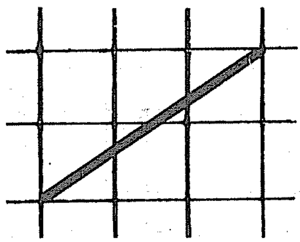
VI.2. En classe : application aux dessins

Cette nouvelle interprétation des codages, non pour représenter le cheminement lui-même mais pour indiquer la position relative du point de départ et du point d'arrivée, est utilisable pour coder dans un dessin un trait "de travers".

Par exemple : 3R 2V conserve la signification antérieure.



3R 2V



$\underbrace{\text{3R 2V}}$

Pour coder le trait de travers et indiquer que les deux ordres élémentaires 3R et 2V doivent se combiner en un seul trait, on les relie par un trait qui les souligne.

VII. Remarques sur les objectifs

VII.1. Ces différentes activités ont l'intérêt de procurer aux enfants une expérience sur laquelle ils peuvent s'appuyer pour se forger des représentations mentales des fonctions numériques *ajouter n, retrancher m.*

VII.2. Dans le même ordre d'idées, il est utile de lier l'image de points du quadrillage régulièrement alignés à la répétition d'un même déplacement (cf alignement sur quadrillage).

VII.3. D'autres prolongements sont possibles par l'introduction, sur le quadrillage, de nouveaux points intermédiaires que l'on peut atteindre par des demi-pas, des quarts de pas, etc., en liaison avec l'étude des longueurs et des distances.

N. A PROPOS DE REPERAGE : UN JEU

I. Matériel

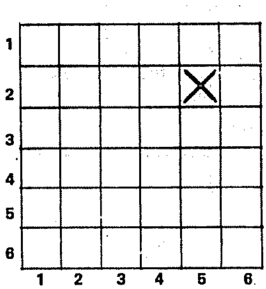
- deux dés de même couleur
- une grille 6 X 6 dessinée sur papier quadrillé.

Les lignes et les colonnes sont numérotées de 1 à 6.

Si on dispose d'un coin-jeux dans la classe, on aura le souci d'attirer l'attention sur ce jeu en lui donnant une présentation matérielle attrayante. La piste du jeu pourra être réalisée en bois verni ou peint de couleur vive et chaque joueur disposera d'un nombre convenable de pions à sa couleur.

II. Règle du jeu

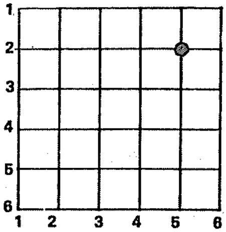
- Le jeu se joue à deux.
- A tour de rôle chaque joueur lance les deux dés.

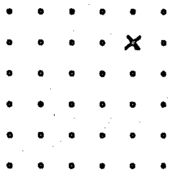


Si, par exemple, les dés marquent 2 et 5, le joueur qui vient de les lancer met sa marque (une croix) dans l'une des cases correspondant à 2 et à 5 (voir une possibilité ci-contre).

- Puis c'est à l'autre joueur de lancer les dés et à mettre sa marque (un rond) dans une case correspondant au tirage effectué.
- Le premier joueur qui aligne quatre de ses marques a gagné (les marques doivent se trouver dans quatre cases consécutives d'une ligne ou bien d'une colonne).

III. Remarques





1° Au lieu de marquer les cases du quadrillage, on pourrait colorier les noeuds d'un réseau. Dans ce cas, ce sont les lignes du réseau qui sont numérotées et les joueurs utilisent des crayons de couleurs différentes.

2° On pourrait également jouer sur du papier à points.

3° Il s'agit d'un jeu au sens strict du terme. Il est l'occasion d'une activité et n'a pas à faire l'objet d'une leçon préalable en ce qui concerne la désignation des cases ou des noeuds.

En fait il serait souhaitable que les enfants aient pratiqué de telles activités avant d'aborder l'étude du repérage sur quadrillage.

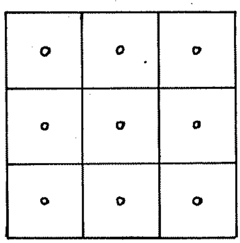
Néanmoins la pratique de ce jeu suscite des remarques et provoque des discussions exploitables au niveau de la classe.

P. GEOPLANS

I. Matériel

Un géoplan est une planchette de contreplaqué quadrillée et munie de pointes au centre des carrés.

Voici un géoplan 3 X 3 :



On peut construire des géoplans 4 X 4, 5 X 5, ...

I.1. Matériaux

Du contreplaqué de 10 mm d'épaisseur ;
des pointes sans tête (pointes tête homme) de 15 à 16 mm ;
espacement conseillé pour les pointes : 5 à 6 cm.

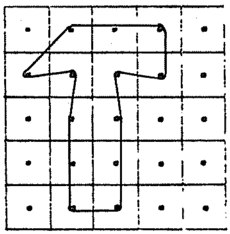
I.2. Conseils pour la fabrication

- Dessiner ou graver avec soin le réseau de carrés.

  On peut :

  soit dessiner les carrés puis vernir la planchette ;
  soit la peindre puis dessiner les carrés.

- Si l'on fabrique plusieurs géoplans de même taille, on a intérêt à utiliser une matrice pour planter les clous. Elle est constituée d'une plaque de carton, de mêmes dimensions que la planchette, trouée aux emplacements prévus pour les clous.
- Il vaut mieux ne pas apporter d'embellissement tel que marges, rives abattues, coins arrondis, etc, car on peut être amené à travailler en réunissant deux ou plusieurs géoplans bord à bord.
- On peut utiliser des élastiques de différentes tailles et de différentes couleurs pour matérialiser des figures géométriques. Au besoin on peut se procurer de l'élastique au mètre, que l'on coupe à la longueur souhaitée et que l'on noue.



I.3. Remarque

On peut réaliser des planches rectangulaires ou carrées en choisissant la taille de la planche et le nombre de clous en fonction des activités prévues :

Si l'on veut obtenir une grande variété de figures, l'on a intérêt à avoir un nombre assez grand de clous ; par contre, pour certaines activités de dénombrement, il vaut mieux limiter le nombre de clous.

Ce matériel très simple et peu coûteux peut être réalisé par des enfants de cours moyen ; cette construction entre dans le cadre des activités géométriques (construction d'un réseau à maille carrée).

II. Utilisation du matériel

Avec ce matériel, on peut proposer des activités d'objectifs variés s'étendant du cours élémentaire au cours moyen :

— étude de figures géométriques : réalisation de figures, comparaison, déformations, reproduction sur réseaux, transformations ;
— repérage sur réseau ;
— périmètre et aire de polygones ;
— dénombrements.

Mais ce qui caractérise ce matériel, ce qui lui donne sa spécificité, c'est la rapidité et la mobilité des réalisations. L'enfant construit, déforme, passe d'une figure à une autre, reproduit. Il est amené à opérer mentalement sur certaines figures, à anticiper les effets de son action. Ce matériel permet de privilégier l'étude des transformations faisant passer d'une figure à une autre, alors qu'habituellement on s'intéresse surtout aux figures elles-mêmes. Dans des activités de reproduction, l'enfant peut remarquer certaines relations entre les éléments des figures.

On peut utiliser un seul élastique ou plusieurs élastiques. Le choix n'est pas indifférent : on n'a pas les mêmes conduites ni les mêmes observations dans l'un ou l'autre cas. Lorsque l'enfant dispose de plusieurs élastiques, l'expérience prouve qu'il travaille en complétant ses figures par des élastiques comme il compléterait un dessin par des traits supplémentaires ; tandis qu'avec un seul élastique, il est obligé de construire ses figures, de les déformer par continuité, et de s'intéresser aux étapes intermédiaires.

III. Phase d'exploration

III.1. Familiarisation avec le matériel

Chaque enfant dispose d'un géoplan et d'un élastique ; la consigne est la suivante : "En tendant l'élastique entre des clous, réalisez des figures". Si les enfants éprouvent des difficultés à comprendre la consigne, et sont déroutés par le matériel, le maître peut montrer quelques réalisations.

Le maître peut intervenir auprès des enfants, leur demandant, lorsqu'une figure est réalisée, de suivre du doigt le trajet de l'élastique. Il pourra ainsi leur faire prendre conscience :

— qu'il y a des changements de direction ;
— que l'on revient au point de départ ;
— que l'élastique peut passer plusieurs fois au même endroit.

On pourra observer que certains enfants réalisent leurs figures au hasard ; que d'autres au bout d'un certain temps ont des projets, ce qui les oblige à déterminer leur action en fonction d'un objectif.

III.2. Jeu de déformations

Le jeu se joue à deux avec un seul géoplan et un seul élastique.

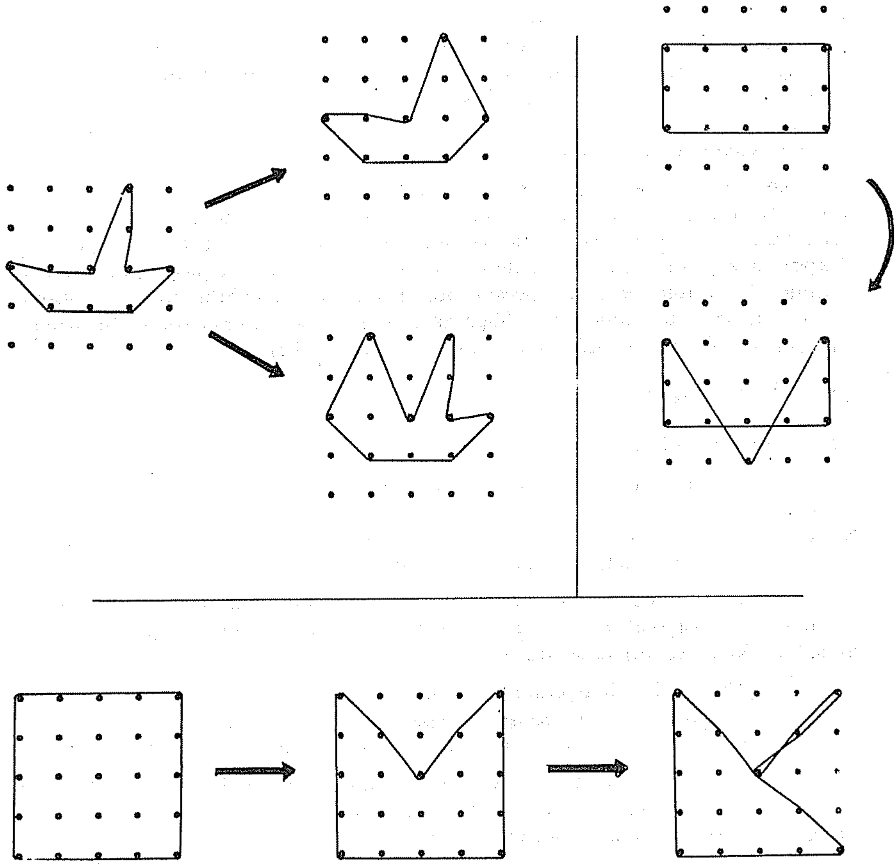
Un des enfants réalise une figure. Le deuxième la déforme en déplaçant l'élastique d'une seule main, d'un seul coup (il peut soit décrocher l'élastique d'un clou, soit l'accrocher à un clou). Le jeu se poursuit ; les enfants déforment les figures obtenues à tour de rôle en appliquant toujours la même règle (un seul coup).

Au cours de ce jeu, les enfants vont voir apparaître différentes figures, les unes à la suite des autres, et faire des observations sur les effets de tel ou tel geste. L'on pourra observer deux attitudes :

— les enfants font des gestes au hasard et les effets qui en résultent les surprennent ;

— progressivement, la plupart des enfants font des prévisions en vue d'obtenir telle ou telle figure et adaptent leurs gestes en conséquence.

Exemples de suites de figures :



IV. Activités plutôt orientées vers le repérage

IV.1. Reproduction d'un modèle.

● *Organisation* Le travail se fait par groupe de deux. Chaque groupe dispose de deux géoplans et de deux élastiques.

● *Activité*

a) Chaque groupe réalise un modèle sur l'un des géoplans en utilisant un seul élastique

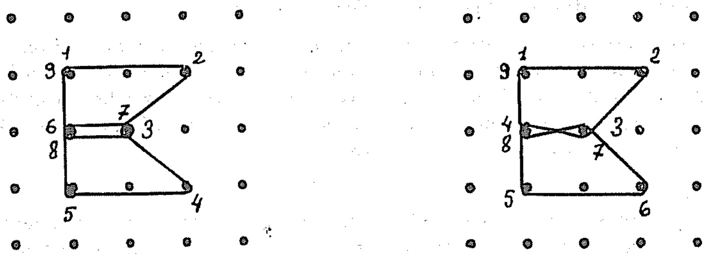
b) Les groupes échangent entre eux les géoplans portant les modèles

c) Chaque groupe essaie de reproduire le modèle reçu, sur son deuxième géoplan

d) Les groupes ayant échangé leurs géoplans comparent leurs réalisations.

Certains groupes peuvent éprouver des difficultés à reproduire le modèle ; il faut en effet retrouver le processus de construction : points de départ possibles, ordres de passage , bien observer les redoublements d'élastique quand il y en a.

Dans certains cas les groupes peuvent constater que des trajets différents de l'élastique donnent cependant la même figure ; voici un exemple :



Les numéros indiquent les ordres de passage.

IV.2. Reproduction de modèles sur feuilles pointées

● *Matériel*

Par groupe de deux, un géoplan, deux élastiques de couleurs différentes, quelques feuilles pointées.

● *Activité*

a) Chaque groupe, après avoir réalisé une figure avec l'un des élastiques sur sa planche, la dessine sur une feuille pointée.

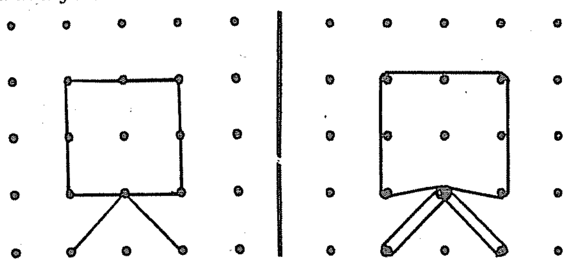
b) Le groupe transmet la feuille pointée à un autre groupe qui doit refaire la figure sur sa planche avec le deuxième élastique d'après le dessin sur la feuille pointée.

c) Les deux groupes comparent leurs réalisations.

Cette activité fait appel à du repérage local sur quadrillage ; les enfants, pour reproduire une figure, doivent repérer les dispositions relatives des clous, par lesquels l'élastique passe. L'emplacement de la figure par rapport au géoplan n'est pas nécessairement le même dans les deux cas.

Sur le dessin, les superpositions et les redoublements de l'élastique n'apparaissent pas, ce qui rend la réalisation de la figure beaucoup plus difficile que lors de l'activité précédente. C'est l'occasion d'un important effort de réflexion et d'analyse.

Exemple :



dessin réalisation

IV.3. Communication du mode de construction d'une figure

IV.3.1. Communication orale

Un groupe réalise une figure sur un géoplan. Ce groupe doit fournir oralement des explications aux autres enfants de la classe afin que ceux-ci, qui ne voient pas la figure réalisée, puissent la refaire. Les échanges entre informateurs et réalisateurs obligent à préciser le langage.

Par cette activité, les enfants sont amenés à repérer certains clous, à repérer le cheminement de l'élastique : numérotage de lignes pour repérer les clous, distinction entre plusieurs directions — suivre une ligne horizontale, verticale, une diagonale d'un petit carré, se déplacer de tant de clous vers la droite puis de tant de clous vers le bas — etc.

Remarque :

Des problèmes analogues se retrouvent dans d'autres activités (cheminements sur quadrillage) ; leur influence peut conduire à certaines variantes par rapport à la suite de la progression présentée ici.

IV.3.2. Communication écrite

Même principe ; un groupe réalise une figure sur un géoplan et doit, par écrit, transmettre les informations nécessaires pour refaire la figure.

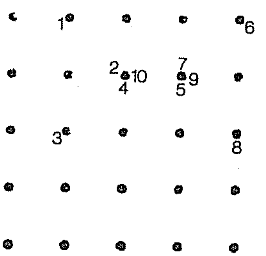
Deux cas se présentent :

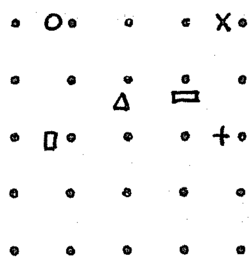
a) Le groupe dispose d'une feuille pointée, mais il est interdit de reproduire la figure. Des codages divers peuvent apparaître :

— On note par un nombre, dans l'ordre, chaque clou par lequel passe l'élastique. Certains clous ont plusieurs nombres, quand on y passe plusieurs fois. On joint ensuite en suivant l'ordre des nombres pour obtenir la figure.

— Chaque clou par lequel passe l'élastique est colorié d'une certaine façon (une couleur différente pour chaque clou). On choisit un point de départ et on écrit dans l'ordre les couleurs des clous qu'on rencontre pour parcourir toute la figure.

Exemples de codages :





message : ○ △ ◻ △ ▭ × ▭ + ▭ △ ○

b) Le groupe n'a pas de feuille pointée, mais seulement une feuille de papier blanc.

— Il peut refaire un quadrillage et reprendre des codages des types précédents.

— Il peut proposer un système de repérage des rangées à l'aide de nombres ou de lettres ; chaque clou étant repéré par deux renseignements, il suffit alors d'indiquer dans l'ordre les codes des clous par lesquels passe l'élastique.

(Il est nécessaire que le groupe émetteur donne son système de codage de façon précise ; des problèmes d'orientation des planches à clous peuvent se poser).

— Les élèves peuvent aussi coder le trajet de l'élastique en choisissant des codes pour chacun des déplacements élémentaires le long des lignes du quadrillage : déplacement horizontal d'un clou vers la droite ou vers la gauche, déplacement vertical d'un clou vers le haut ou vers le bas (cheminements sur quadrillage) ; ils doivent également préciser le point de départ.

Remarque : Le type de codage proposé peut dépendre des activités menées antérieurement ou parallèlement ; il peut y avoir découverte d'un procédé de repérage ou réutilisation d'un système rencontré à propos d'une autre activité.

V. Activités plutôt orientées vers l'étude des figures

V.1. Réalisation de figures répondant à certaines contraintes

Chaque enfant disposant d'un géoplan et d'un élastique, le maître demande de réaliser des figures pour lesquelles il impose certaines contraintes :

— figure ayant 3, 4, ... côtés
— figure ayant 3, 4, ... sommets
— réaliser un triangle, un carré, un rectangle, un quadrilatère ...

Cette activité est peut-être l'occasion d'introduire un certain vocabulaire s'il n'a pas déjà été introduit (*triangle* pour "figure à 3 côtés ou 3 sommets") ou d'en vérifier la connaissance s'il a été introduit au cours d'autres activités.

Des observations peuvent être faites sur les figures réalisées : reconnaissance d'une même forme dans des positions différentes, nécessité de faire tourner la planche pour identifier une forme, classements de différents triangles ou quadrilatères selon certains critères ...

Les figures réalisées peuvent être reproduites sur feuilles pointées ou sur papier blanc. Dans ce dernier cas, se poseront des problèmes de construction nécessitant la reconnaissance de propriétés et l'utilisation d'instruments (règle, équerre, compas).

A partir de ce travail, il est possible de reprendre ou d'introduire de nombreuses activités sur les polygones.

V.2. Par déformation, essayer de passer d'une figure à une autre

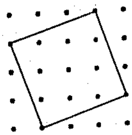
Une figure étant réalisée, il s'agit de la transformer, pour obtenir une figure imposée, par déplacement de l'élastique en un seul coup : on peut soit le décrocher d'un clou, soit l'accrocher à un nouveau clou.

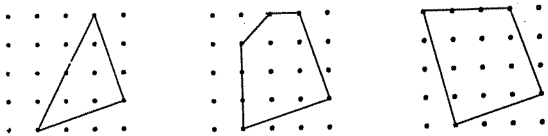
Exemples de questions :

Peut-on transformer : un carré en triangle ?
un quadrilatère en un autre quadrilatère ?
un triangle en rectangle, en carré ?
....

Exemples de transformations :

Figure initiale



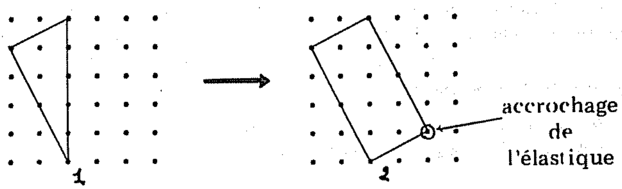


Exemples de figures transformées

L'objectif de cette activité est de mettre en évidence les propriétés de certaines figures par comparaison des figures entre elles.

Les possibilités ou impossibilités de passage d'une figure à une autre conduisent à une analyse de chacune des figures : nombre de côtés, longueur des côtés, angles, ...

Dans le passage de l'une à l'autre, certains éléments restent invariants : ainsi un carré peut être transformé en un triangle rectangle isocèle ou en trapèze rectangle (il y a conservation d'un angle et des deux côtés consécutifs dans le premier cas, et conservation de trois côtés consécutifs dans le deuxième cas). Pour transformer un triangle en un rectangle, il est nécessaire qu'il possède un angle droit ; par ailleurs, il s'agit de bien placer l'élastique pour obtenir un rectangle ; le quatrième clou d'accrochage est déterminé sans ambiguïté.



Q. MESURE

I. Place de la mesure dans l'enseignement

La mesure est à la fois du domaine des activités d'éveil et des mathématiques. Tout effort d'analyse en vue de distinguer ce qui relève de l'une ou de l'autre composante doit permettre de dépasser une simple classification des activités et montrer les indispensables interactions entre celles-ci.

Le texte de l'Arrêté du 7-7-78 semble indiquer que la conceptualisation des grandeurs et l'introduction de nombres à leur propos serait plutôt du domaine mathématique, tandis que l'utilisation de l'outil "mesure" et la pratique du mesurage serait plutôt du domaine des activités d'éveil. Cette répartition des tâches doit être envisagée avec beaucoup de nuances, en ne perdant pas de vue que, pour les enfants, cette distinction entre activités mathématiques et activités d'éveil n'a pas de sens ; de plus, les enfants ont à construire un savoir global.

Des phrases telles que :

"Cet objet est plus long que celui-là"
"Ces deux objets ont la même longueur"
"Ici la longueur est plus grande que là"

sont la transcription dans le discours d'expériences sensibles qui peuvent porter sur des objets de natures variées (plantes — voitures — dos d'un livre — espace entre deux meubles — baguettes — arêtes d'un solide — etc...). Prononcées en situation, elles ont un sens pour les enfants dès le début du CE (et même avant). Elles sont le reflet d'une première conceptualisation de la longueur : l'objectif de l'enseignement est de fournir à l'élève l'occasion de s'exprimer sur cette conceptualisation et, par les activités proposées, de la faire évoluer en la structurant (c'est-à-dire en explicitant l'ordre, l'égalité et l'addition des longueurs), puis en introduisant l'utilisation de nombres de sorte que ces concepts deviennent opératoires et permettent en particulier de faire des prévisions.

Les objectifs du C.E. portent sur deux grandeurs : la longueur et la masse. Les études de psychologie génétique ont montré que la conservation relative à la longueur était acquise plus tôt que la conservation relative à la masse. En fait, la conservation de la quantité de matière est compliquée par les relations non évidentes entre volume et masse. Cela est un argument important pour privilégier à ce niveau l'étude de la longueur. Sur le plan mathématique, on peut également faire valoir l'argument suivant : l'étude de la longueur peut servir de modèle, de guide, de référence pour l'étude d'autres grandeurs.

II. Longueur

II.1. Le concept de longueur se construit à travers

d'une part des actions qui portent sur des objets matériels, par exemple:
— comparer des objets en les plaçant côte à côte, ou en essayant d'en mettre un dans la place laissée vide par un autre ;

d'autre part des activités où les objets à comparer ne sont pas immédiatement saisissables, par exemple :

— trouver l'enfant qui saute le plus loin,
— évaluer la distance parcourue par un escargot dans un temps donné,
— répondre à la question : "Comment les plantes poussent-elles ?",
— chercher à savoir si les escargots grandissent.

Dans les activités évoquées ci-dessus, le protocole de mesurage est le problème principal ; il peut conduire à matérialiser les longueurs par des objets rectilignes (bandes de carton, baguettes, etc.) ou susceptibles de le devenir (ficelle, ruban, etc.) pour lesquelles la comparaison se fait directement en les plaçant côte à côte. Ce protocole fait donc intervenir l'idée que la longueur est associée à la comparaison d'objets rectilignes et que les objets courbés doivent être redressés ou remplacés par un double qui peut l'être.

Dans un certain nombre de cas, les enfants explicitent volontiers ce fait (par exemple : il faut se tenir droit pour se mesurer) ; mais cette idée n'est pas acquise en toute généralité : certains enfants du C.M. ne sont pas très sûrs que la diagonale d'une cour rectangulaire est moins longue que le parcours de deux côtés consécutifs.

Les remarques précédentes mettent en évidence

d'une part *l'utilité*

- d'activités par lesquelles on peut arriver à distinguer parmi les matériaux souples ceux qui sont extensibles de ceux qui ne le sont pas : ainsi la variation de longueur d'une ficelle ou d'un fil selon la tension est généralement imperceptible ; il n'en est pas de même pour un élastique ; la laine est intermédiaire, il faudra préciser comment on la tend (voir IV) ;

- d'activités occasionnelles qui se traduiront plus tard dans le modèle mathématique par des additions de longueurs et des multiplications de longueurs par des nombres ; ainsi, après avoir fait quelques guirlandes en papier, on peut évaluer le nombre de bandes de papier à préparer pour décorer entièrement la classe ; de même, on peut évaluer la longueur de laine utile pour monter les mailles d'un tricot, pour obtenir un tricotin ou pour faire un tissage, le nombre de gommettes à coller pour recouvrir le contour d'un dessin.

d'autre part la *nécessité*

de faire une sélection des objets sur lesquels on travaille (objets rectilignes et suffisamment rigides), en vue de faciliter l'explicitation des relations entre ces objets que les enfants connaissent déjà implicitement, et de systématiser ces explicitations en simplifiant les manipulations correspondantes ou en les rendant possibles ; en particulier ce matériel doit permettre de rendre certaines opérations réversibles (par exemple partage et addition des longueurs).

On est ainsi conduit à construire ce qu'on peut appeler une maquette, c'est-à-dire un matériel de référence spécialement adapté à l'étude de la grandeur, plus simple et moins riche au départ que le matériel sur lequel se posent les problèmes de mesurage en activités d'éveil, mais qui pourra être complété au cours de l'étude.

Il est cependant indispensable de sortir des manipulations sur la maquette seule pour enrichir le domaine sur lequel les relations ont été explicitées et rendre les concepts opératoires dans les activités diverses où ils interviennent.

II.2. Maquette

Elle est constituée d'objets longilignes choisis pour leur facilité de manipulation ; elle se modifie, s'enrichit ou au contraire se simplifie au long des activités.

Au début, on a besoin d'objets d'une dizaine de tailles différentes, dont les longueurs, suffisamment distinctes pour que les incertitudes soient imperceptibles, sont choisies de façon à ménager quelques relations d'assemblage (pour un exemple de tel choix, voir II-4).

Les baguettes de bois ont l'avantage de la rigidité et de la solidité ; elles peuvent jouer le rôle d'étalon. Mais elles sont difficiles à assembler. Le matériel le plus commode est sans doute constitué de bandes de papier fort : posées à plat elles prennent toujours la même forme ; on peut les assembler bout à bout à l'aide de papier collant ; de plus, les enfants peuvent en découper eux-mêmes et produire ainsi des objets dont la longueur répond à des conditions imposées par l'activité (en particulier ils peuvent les partager).

II.3. Schémas des activités

II.3.1. Classements d'objets

Le point de départ de ces classements peut être de nature variée (voir II-4), mais les manipulations sont en grande partie analogues à celles qui ont présidé à la construction des nombres naturels au C.P. Il s'agit de

a) Déterminer par la comparaison directe des objets ceux qui sont de même longueur et les rassembler dans un même tas matérialisé par une boîte, une enveloppe ou un autre récipient.

b) Classer de nouveaux ensembles d'objets en complétant le classement déjà fait : c'est-à-dire pour chaque nouvel objet trouver la boîte dans laquelle il va, s'il y en a une, et, sinon, introduire une nouvelle boîte.

c) Fondre en un seul classement les différents classements faits avec des lots distincts d'objets, ce qui permet de réduire le nombre de récipients utilisés.

d) Au cours de ces activités, ordonner les boîtes pour faciliter les manipulations.

Ces activités mettent en jeu plus ou moins implicitement les idées suivantes :

a) Pour savoir si un objet va dans une boîte donnée, il suffit de le comparer avec un objet de cette boîte ; le résultat de cette comparaison est indépendant de l'objet choisi : pour cette action tous les objets d'une même boîte sont équivalents.

b) Si l'on sait déjà que les objets de la boîte A sont moins longs que les objets de la boîte B et si le nouvel objet à classer est plus long qu'un objet de la boîte B, ce n'est pas la peine de le comparer aux objets de la boîte A.

c) Il est toujours possible de construire un objet dont la longueur est comprise entre deux longueurs données (c'est-à-dire qui va dans une nouvelle boîte à placer entre deux boîtes de la série déjà utilisée).

Remarque : Cette dernière constatation introduit une différence fondamentale entre les longueurs et les nombres naturels.

II.3.2. Phase d'explicitation ; désignation des longueurs

La tâche des élèves se complique considérablement avec le nombre croissant d'objets et de boîtes. Pour qu'ils puissent s'organiser, il est nécessaire que le maître ménage des moments de discussion collective au cours desquelles les idées précédentes sont explicitées et traduites en terme de programme d'action.

Cette explicitation permet d'utiliser, en le précisant, le vocabulaire correspondant dans des phrases telles que :

- Ces deux objets ont la même longueur ; pour s'en souvenir, on les met dans la même boîte.
- La longueur de cet objet (sorti d'une première boîte) est plus petite que la longueur de cet autre (sorti d'une deuxième boîte). Tous les objets de la première boîte ont une longueur plus petite que les objets de la deuxième boîte.

Comme, au cours des activités, les élèves ont besoin de sortir beaucoup d'objets des boîtes pour faire des comparaisons directes, ils éprouvent le besoin de trouver un moyen de les replacer rapidement.

C'est alors qu'intervient la désignation des longueurs par des signes ou des lettres. Par exemple : a est la longueur de tous les objets de cette boîte ; pour s'en souvenir on met le signe a sur la boîte (de même pour toutes les autres boîtes) ; a prend alors une signification analogue aux signes 2, 3, etc. que l'on utilise au C.P.

Dès lors, si un enfant a pris un objet dans une boîte, il pourra le ranger plus facilement même si les boîtes ont été déplacées, à condition de se souvenir de la longueur de cet objet. Cette dernière difficulté peut être résolue en décidant de donner à chaque objet un nom qui rappelle sa longueur : par exemple a_1, a_2 ..., etc. pour les objets de longueur a (voir à ce propos II-4.3).

Au moment de marquer ainsi les objets, il est évidemment indispensable de faire une vérification du contenu des boîtes, car certains objets ont pu être mal rangés au cours des manipulations précédentes.

On constitue ainsi, pour chaque longueur nommée, un stock d'objets marqués qui pourront servir d'étalons.

II.3.3. Ordre sur les longueurs

Dès ce moment, on dispose d'un premier "instrument de mesure" (les boîtes d'étalons) et d'un langage parlé rendant compte des comparaisons. Il s'agit maintenant de poursuivre la mise en forme de ce langage et de le rendre plus efficace en le traduisant par écrit et en le structurant.

Ainsi, par exemple, la comparaison directe permet de voir qu'un objet quelconque de la boîte a est moins long que chacun des objets de la boîte b ; on dit que la longueur a est plus petite que la longueur b et on écrit : $a < b$ (ce qui se lit : "a est plus petit que b").

Inversement, admettons qu'on sache déjà que $c < d$; par comparaison directe avec des étalons sortis des boîtes c et d, on trouve que la longueur d'un objet 0_1 est c et que la longueur d'un objet 0_2 est d. On peut en conclure que 0_1 est moins long que 0_2. Les enfants ont à pratiquer cette activité s'ils doivent comparer des segments dessinés sur une feuille de papier, la comparaison directe à l'oeil étant impossible ou douteuse, ou bien s'ils doivent comparer des objets dispersés dans la classe et qu'ils ne peuvent pas déplacer.

Il est également possible d'organiser le travail des élèves de sorte que la vérification du contenu des boîtes fasse apparaître que tous les objets p_1, p_2 ... etc. de longueur p placés dans la boîte p sont aussi longs que les objets q_1, q_2 ... etc. de longueur q placés dans la boîte q. Dans ce cas, on constate que la longueur p est la même que la longueur q ; ce que l'on transcrit par $p \quad q$ (lu "p est égale à q"). La conclusion qui s'impose alors est qu'une des deux boîtes est de trop ; on met tous les objets dans une seule boîte qui reçoit les deux étiquettes p et q.

II.3.4. Assemblage d'objets

- *Manipulations*

Le travail se fait avec les objets marqués issus d'une dizaine de boîtes au plus ; les longueurs sont choisies de manière que certaines d'entre elles soient la somme de plusieurs autres (deux ou plus). Les activités sont :

a) assembler des objets bout à bout pour réaliser un nouvel objet (c'est ici que les bandes de papier sont les plus commodes) ;

b) classer le nouveau matériel ainsi construit et donner des noms aux boîtes (nommer les longueurs).

- *Explicitation des relations*

Pour désigner la longueur de l'assemblage des objets *Aa*, *Bb*, et *Ca** par exemple, il est naturel d'utiliser les lettres a et b qui désignent les longueurs des objets composants. Cela peut se faire de diverses façons :

- simple juxtaposition *aba* si les objets ont été assemblés dans l'ordre : *A*, *B*, *C* ;
- utilisation d'un signe rappelant le papier collant : $a \circ b \circ a$ ou $a \square b \square a$;

* La signification de ces écritures est expliquée en II.4.3.

- utilisation du mot *et* : a et b et a ;
- utilisation du signe "+" : $a + b + a$ (préférable à *et*)

Dès le début, certains enfants ne tiennent pas compte de l'ordre d'assemblage, surtout quand ils utilisent plusieurs objets de même longueur, et écrivent par exemple $5a$. $3b$ pour une longueur qui, en tenant compte de l'ordre, serait désignée par *aababaab* (introduction des nombres comme moyen de réduire l'écriture).

Une même longueur peut être obtenue par des assemblages différant non seulement par l'ordre mais aussi par la longueur des objets qui les composent. Ce qui permet de désigner cette longueur par des écritures différentes et de produire des égalités entre ces différentes écritures.

- *Comparaison des résultats ; production de nouvelles relations*

Les nombreuses égalités (voire inégalités) proposées par les élèves vont être prises comme objet d'étude.

Par exemple, les deux égalités $3a = 2b$ et $6a = 4b$ peuvent se déduire l'une de l'autre (cela se justifie par des manipulations *inverses l'une de l'autre* imaginées dans le but de convaincre).

De la même manière, il est facile, par partage en deux, de passer de la relation $c = 2d$ à la relation "d est la moitié de c" écrite $d = 1/2\ c$ ou $d = \frac{1}{2} c$ (la pièce de 1/2 F fait partie des connaissances sociales des élèves).

On peut aussi, dans l'égalité $m = 4d + 3a$, remplacer $3a$ par $2b$ et obtenir $m = 4d + 2b$; etc.

II.4. Conditions didactiques

Le schéma général indiqué ci-dessus peut se traduire en une suite de séquences didactiques de bien des manières différentes. Nous allons, sur quelques points, essayer de faire apparaître la marge de manoeuvre du maître, en indiquant les tenants et aboutissants de divers choix.

II.4.1. Premiers classements

Si les élèves ont déjà pratiqué des activités dans lesquelles la longueur intervient (voir IV), on peut directement travailler sur la maquette. Sinon, il est préférable de commencer en distribuant aux élèves des lots d'objets hétéroclites, ayant comme caractéristique commune d'être longilignes. Si on leur demande, sans consigne supplémentaire, de classer les objets, l'incertitude des élèves est très grande puisqu'ils n'ont pas de but pour faire le classement. On verra apparaître, selon les enfants, des critères très différents (par exemple : matière, couleur, voire..... ordre alphabétique) ; en organisant la comparaison des classements et l'explicitation des critères, et en demandant aux élèves de les appliquer à l'ensemble du matériel, on oriente ceux-ci vers le critère de la longueur, le seul vraiment pertinent. Il faut cependant avoir conscience que ce type de séquence vécue porte davantage sur les classements que sur la longueur.

Il est possible de diminuer l'incertitude des enfants en leur posant d'emblée un problème de comparaison, par exemple en montrant par le geste ce qui est recherché. Au cours de leurs manipulations, les élèves observent que la comparaison est plus facile et plus sûre avec des objets rectilignes ; on peut alors poursuivre les activités sur la maquette.

II.4.2. Le travail sur la maquette appelle les remarques suivantes:

Le choix initial du maître porte à la fois sur :

- le nombre de longueurs,
- le nombre d'objets de chaque longueur,
- le nombre de récipients dont la classe dispose.

Si l'on veut créer les conditions pour que les activités a) b) c) et d) soient effectivement pratiquées par les enfants, il importe que :

- plusieurs classements soient réalisés en même temps (travail par équipes ne disposant que d'une partie des longueurs) ;
- un classement global soit obtenu en combinant les classements des équipes ;
- il y ait encore à ce moment des objets à classer (qui n'avaient pas été distribués aux équipes). Certains de ces objets nécessitent l'introduction de nouvelles boîtes ;
- les élèves puissent construire de nouveaux objets (par marquage puis découpage ou pliage de bandes de papier suffisamment longues, par exemple) vérifiant certaines conditions : être d'une longueur donnée ou d'une longueur intermédiaire entre deux longueurs données.

L'expérience montre que l'activité sera riche sans être fastidieuse si les nombres à choisir le sont dans les créneaux suivants ;

- Nombre de longueurs : une dizaine environ. Par exemple, en centimètres : 5 ; 10 ; 15 ; 20 ; 30 ; 50 ; 22 ; 44 ; 17 ; 34 (les rapports de ces longueurs sont choisis pour obtenir des relations intéressantes au moment des assemblages).
- Nombre des objets : chaque équipe reçoit des objets de 6 à 7 longueurs différentes à raison de 1 à 5 objets par longueur ; il reste à classer une dizaine d'objets, dont trois par exemple sont d'une longueur nouvelle intermédiaire entre deux longueurs déjà retenues.
- Nombre de récipients : légèrement insuffisant (5 ou 6 par équipe) pour satisfaire les besoins de toutes les équipes à la fois et obliger celle-ci à faire un classement commun.

II.4.3. Le marquage des objets

Le marquage des objets de chaque boîte se fait après qu'un symbole a été choisi pour désigner la longueur. Si a désigne une longueur, on peut désigner par a_1, a_2, etc. les objets de longueur a. Certains enfants peuvent préférer utiliser la grande lettre correspondante pour désigner les objets : A_1, A_2, etc. , ou un système plus économique en signes tel que Aa, Ba, Xa, etc. Cela revient à considérer, pour chaque objet, *a* comme son nom de famille et *A*, *B* ou *X* comme son prénom. Ce dernier système apparaît en particulier si les objets initiaux (ou certains d'entre eux) avaient été étiquetés avant le classement, ce qui est le cas par exemple quand ces objets matérialisent des sauts d'enfants.

II.4.4. Les assemblages d'objets

Par le choix des bandes marquées que l'on distribue à chaque enfant ou groupe d'enfants (par exemple beaucoup de bandes de 5 cm et quelques bandes de 15 cm, 30 cm ou 50 cm dans un groupe, beaucoup de bandes de 10 cm et quelques bandes de 20 ou 50 dans un autre, etc...), on favorise la création d'assemblages de plusieurs bandes de même longueur et l'obtention d'assemblages dont la longueur est celle d'un des objets marqués dont le groupe dispose (par exemple un assemblage de 6 bandes de 5 cm a la même longueur qu'une bande de 30 cm).

Une fois constatée la possibilité d'obtenir par assemblage une longueur déjà nommée, la classe peut se fixer comme objectif de trouver le maximum d'assemblages de longueur donnée ; comme le matériel vient alors à manquer, la recherche peut se prolonger à la fois par l'utilisation des relations déjà écrites entre les longueurs et par le dessin, au verso des objets marqués, de la graduation correspondant au report d'une longueur plus petite (par exemple pour une bande de 30 cm, 6 intervalles de 5 cm, ou 3 intervalles de 10 cm, ou ...)

Remarque : si les bandes sont bien découpées et si les assemblages sont faits avec suffisamment de soin, les enfants sont prêts à considérer un écart de quelques millimètres comme négligeable et uniquement dû à une mauvaise manipulation. Il serait contre-indiqué, à ce moment de l'étude, de mettre en doute les décisions d'égalité de longueurs, car il importe de mettre en place le modèle de l'addition des longueurs avant de pouvoir prendre en compte le problème de la précision.

Cependant, les bandes de 22 cm et 44 cm par exemple, qui ont entre elles des relations simples, fournissent des exemples de longueurs qu'on ne peut pas obtenir par assemblage de bandes de 5 cm, 10 cm, etc... car l'écart est trop important ; cela conduit à écrire des inégalités.

II.5. Mesurages

II.5.1. Au cours des activités précédentes, les bases du modèle mathématique ont été construites. Il s'agit maintenant pour les élèves de faire fonctionner ce modèle par la pratique du mesurage de façon à constater qu'ils ont ainsi un bon moyen de décrire ce qu'ils font, de prévoir certains résultats avant de les vérifier ou de construire des informations que le mesurage ne permet pas d'obtenir directement. Au cours de ces nouvelles activités, le modèle va se compléter par l'introduction d'unités de mesure adaptées à la tâche à faire, la construction de graduations (instruments de mesure commodes), la pratique de l'encadrement des mesures, la recherche de la précision par affinement. Le besoin de cohérence entre les unités et les nécessités de la communication débouchent sur l'utilisation des unités du système métrique.

L'éventail des possibilités est très ouvert. Les activités d'éveil nécessitant des mesurages de longueur sont l'occasion de mettre en oeuvre les idées évoquées ci-dessus ; en particulier il est intéressant de reprendre, le cas échéant, les activités qui avaient servi de point de départ à l'étude des longueurs (saut des élèves par exemple) et de les traiter avec les nouveaux moyens construits depuis. (La démarche qui consiste à reprendre un problème est très efficace — voir par exemple : jeu de cible, chapitre 1, C, page .)

II.5.2. Voici quelques exemples succincts d'activités traitant l'un ou l'autre des aspects évoqués ci-dessus.

- Un même lot de bandelettes, de longueurs toutes différentes, collées sur une feuille (ou de segments dessinés) est distribué à chaque groupe d'élèves ; celui-ci dispose en outre d'une petite bandelette étalon non collée (il y a dans la classe, par exemple, des étalons de trois longueurs différentes : a, $b = 2a$, et $c = 4a$; les enfants ne le savent pas au départ mais ils le découvrent en cours de route si dans le lot se trouvent des bandelettes collées de longueurs a, b, etc. Les élèves doivent mesurer les bandelettes collées (c'est-a-dire chercher combien de fois on peut reporter l'étalon) ; certaines mesures aboutissent à des encadrements. Ce fait est explicité et commenté au cours d'une séance collective qui fait aussi apparaître les relations $b = 2a$ et $c = 4a$. La classe se met d'accord pour nommer chaque objet (une variante consiste à n'utiliser qu'un seul lot d'objets préalablement nommés qui circulent entre les groupes). Au cours d'un jeu de portrait, chaque groupe, à tour de rôle, choisit un objet dont il communique la mesure trouvée avec son unité ; les autres groupes doivent trouver le nom de l'objet. Selon les cas la réponse est unique ou non : les demandes de renseignements complémentaires et les justifications des réponses conduisent les élèves à utiliser des égalités et des inégalités entre longueurs telles que

$$3c + 3a = 7b + a \qquad \text{ou} \qquad 3c + 3a < 8\,b$$

- Le mesurage d'objets de grande longueur incite les élèves à construire des sur-étalons de l'étalon donné et des bandes graduées.

- Au contraire, la recherche de la précision du mesurage fait intervenir les longueurs $\frac{1}{2}\,a$, $\frac{1}{4}\,a$, etc., qui sont les seules longueurs pour lesquelles il est facile de construire un sous-étalon (voir la construction du plan de la classe dans la rubrique *Sur le thème du rectangle* Ch. 1, D, page 25).

- La production d'objets en activité manuelle nécessite la commande de matériaux *. Pour déterminer la longueur à commander, les élèves peuvent utiliser une unité arbitraire ; mais la perspective de l'achat oblige à poser le problème de la communication des mesures et permet au maître d'introduire les unités usuelles en les présentant comme des conventions sociales.

- L'estimation des longueurs est complémentaire du mesurage. S'il s'agit d'estimer la longueur d'un objet, qu'on pourra ensuite mesurer pour vérifier, cette estimation s'appuie sur l'expérience acquise au cours des mesurages

* Si la classe dispose d'un stock, mais si celui-ci est insuffisant, la préparation de la commande est l'occasion de calculer une mesure par différence. D'une manière générale ce procédé présente des difficultés pour les enfants ; c'est particulièrement le cas pour la mesure des masses par double pesée.

antérieurs ; elle est utile pour choisir l'instrument le mieux adapté au mesurage. S'il s'agit au contraire d'estimer une somme de longueurs (cas d'une commande par exemple), l'estimation peut déboucher sur des problèmes de calculs numériques approchés auxquels elle donne une signification.

III. Les autres grandeurs

III.I. Utilisation des nombres

Dans la démarche développée ci-dessus à propos de la longueur, les nombres naturels interviennent très tôt dans les productions orales et écrites des élèves. Le langage qu'ils construisent en utilisant des écritures telles que

$$3\,a \quad \text{ou} \quad a + 4b$$

est très efficace pour rendre compte de leurs activités. Ces expressions se présentent d'abord comme des noms de longueurs. Mais leur structure reflète les actions faites et elle permet de déboucher sur un véritable calcul.

En utilisant le vocabulaire de la linguistique, disons que les règles de calcul fonctionnent comme une syntaxe ; elles rendent compte des relations entre les objets ; elles sont imposées par les actions faites, lesquelles constituent le champ sémantique du langage.

Le rôle des mathématiques est de prendre ce langage comme objet d'étude ; c'est ce que nous allons faire ici succinctement.

L'ensemble des longueurs est muni d'une *addition* (sémantique : bandes mises bout à bout) et de l'opération inverse, la *soustraction* (sémantique : bandes coupées). L'addition a des propriétés analogues à celles de l'addition des nombres ; cela justifie l'abus de notation que constitue l'utilisation du même signe "+" dans les deux cas (par exemple, dans l'écriture

$$3\,a + 2\,a = (3 + 2)\,a$$

le premier "+" porte sur des longueurs, le second sur des nombres). Cet abus de notations est ici plus bénéfique que gênant car il traduit le lien étroit entre les deux structures.

L'écriture $5a$, par exemple, est une notation commode pour

$a + a + a + a + a$ (sémantique : mise bout à bout de cinq objets de même longueur). Par ces écritures, on introduit une *opération externe* sur l'ensemble des longueurs ; c'est-à-dire qu'à tout couple (nombre, longueur), on fait correspondre une longueur.

L'ordre sur les longueurs est compatible avec l'addition, comme pour les naturels ; c'est-à-dire que si $a < b$ alors $a + c < b + c$.

Mais il possède une propriété supplémentaire ; il est toujours possible de trouver une longueur plus petite qu'une longueur donnée a, par exemple

$\frac{1}{2}\,a$ (sémantique : partage d'une bande en deux morceaux superposables). C'est cette propriété qui va inciter les élèves à construire de nouveaux nombres au cours d'activités mettant en oeuvre le procédé suivant : une unité u étant choisie, toute écriture sur les longueurs (par exemple : $3u + 2u + 5u$) se traduit par une écriture sur les nombres qui sont les mesures de ces longueurs avec l'unité u (3 + 2 + 5), et réciproquement. C'est cet aller et retour entre les deux types d'écritures qui donne un sens aux quelques rationnels introduits. Ainsi l'écriture $\frac{1}{2}\,a + \frac{1}{2}\,a = a$ (sémantique : partage en deux)

aboutit à l'écriture $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$. Par la suite, l'étude d'autres grandeurs, en enrichissant le champ d'application de ces écritures, leur donne une plus grande généralité et confère ainsi une certaine autonomie aux nombres introduits.

III.2. Conditions génétiques de la construction des grandeurs.

Ce qui précède montre que la principale difficulté n'est pas d'ordre mathématique ; elle consiste plutôt pour les enfants à intégrer les actions qu'ils font sur les objets en des schémas cohérents où apparaissent les relations qui sont traduites dans le langage par des écritures du type $3a$ ou $a + 4b$, (comme pour les longueurs). Quand cette étape importante est franchie par les élèves, les règles de calcul en découlent aisément par le même processus que pour les longueurs car ils ont alors créé un nouveau champ sémantique associé à la même syntaxe.

III.3. Masse

La deuxième grandeur au programme du C.E. est la masse. Nous nous contenterons de décrire quelques activités préparatoires destinées à assurer l'invariance de la masse ; les schèmes correspondants sont indispensables aux enfants pour traiter les problèmes de comparaison et de classement analogues à ceux proposés sur la longueur (voir II.3.1 : Classement d'objets).

Soupesage. La comparaison par soupesage des objets pris en main est fortement perturbée par la forme des objets. Pour éviter cet inconvénient, on peut faire utiliser aux élèves un panier ou un carton muni de ficelles. Même dans ces conditions, les réponses sont parfois différentes pour un même enfant selon qu'il voit les objets ou qu'il ne les voit pas (Objets cachés par un couvercle ou enfant les yeux bandés). Les activités de soupesage permettent aux élèves de donner un sens aux expressions "plus lourd que, plus léger que..." et de constater que pour certains objets il est facile de se mettre d'accord sur le plus lourd et que pour d'autres c'est impossible.

Utilisation d'une balance

a) *Réalisation d'un équilibre.* Un objet est posé à demeure sur l'un des plateaux ; les élèves doivent réaliser l'équilibre en plaçant de la pâte à modeler sur l'autre plateau ; ensuite, ils rassemblent toute la pâte nécessaire en une seule boule qu'ils reposent sur le plateau. L'équilibre est maintenu. Les élèves explicitent : c'est normal, on a remis la même quantité de pâte à modeler.

b) *Destruction et rétablissement de l'équilibre.*

En partant de la situation précédente, on prépare plusieurs boules de pâte à modeler de tailles différentes et on les pose sur le plateau à côté de la première boule. On retire les boules supplémentaires une à une ; l'équilibre se rétablit quand on enlève la dernière.

Inversement, on morcèle la pâte à modeler, on enlève quelques morceaux et on les repose un à un.

Tout au long de ces manipulations, il est important que les élèves

- explicitent que quand on ajoute de la pâte à modeler, le plateau est plus lourd, et que quand on en retire, le plateau est moins lourd ;
- prévoient ce qui va se passer à chaque manipulation ;
- étudient ce qui arrive quand on ajoute juste une petite miette : le fléau bouge tout de même, mais si peu q'on le voit à peine.

c) *Test sur la conservation.* Quand il manipule, le maître place, entre les élèves et la balance, un écran qu'il enlève pour leur demander de raconter ce qu'il a fait. Au départ, la balance est en équilibre (la tare sur un plateau, la boule de pâte à modeler sur l'autre). Trois types de manipulations :

- Le maître détache un morceau de la boule, qu'il roule entre ses doigts et redépose sur le plateau.
- Même chose, mais le maître conserve dans sa main une partie de la pâte enlevée (il fait une farce aux élèves).
- Le maître reprend ces manipulations en modifiant en outre la forme de la pâte à modeler.

Dans tous les cas, le maître permet aux doutes éventuels de s'exprimer par des questions telles que : "est-ce que j'ai ajouté de la pâte à modeler ? est-ce qu'il y en a moins qu'avant ?....". Les élèves qui ne semblent pas sûrs de leur réponse viennent faire la manipulation à la place du maître ; ils peuvent faire des farces à leurs camarades.

Pour la suite des activités (classement d'objets), les élèves ont besoin d'utiliser les deux plateaux de la balance indifféremment ; il est important de leur poser le problème de la justesse. Que se passe-t-il si on échange les contenus des plateaux ? Comment faire pour être sûr que deux objets ont bien la même masse, ou des masses différentes ?

Remarque : on pourrait attendre que ce problème se pose au cours des manipulations, mais il est alors, semble-t-il, trop difficile pour les élèves de maîtriser la situation.

Matériel pour les manipulations suivantes. La maquette peut être constituée par :

- des paquets bien fermés dont la masse n'est pas en rapport avec le volume ;
- un jeu de balles creuses en caoutchouc dans lesquelles on injecte, avec une seringue, une quantité d'eau plus ou moins importante ;
- etc...

Attention. On ne peut pas conserver longtemps des étalons en pâte à modeler car celle-ci se dessèche ; la perte relative de masse est d'autant plus importante que le morceau est plus petit. Le plus simple est alors d'utiliser les masses marquées.

IV. Une activité d'éveil scientifique contribuant à la construction du concept de longueur*

Voici un exemple d'activité très utile, avant toute étude systématique sur la longueur, pour préciser les conditions expérimentales dans lesquelles il est possible de parler de longueur et pour conduire à l'idée qu'il faut choisir un matériel de référence.

IV.1. Point de départ.

Les enfants, ayant réalisé un objet décoratif, veulent l'offrir en cadeau ; il s'agit de faire un paquet. Les élèves et la maîtresse ont apporté des boîtes, des papiers d'emballage, des sacs en papier, des ficelles, des galons de papier, des élastiques et du papier collant. Chaque enfant, selon son idée et le matériel dont il dispose, essaie d'emballer puis de ficeler son cadeau.

Au cours de l'emballage, les enfants ont l'occasion de faire des comparaisons sur les avantages et inconvénients respectifs des boîtes, des sacs et du papier.

De même, pour fermer le paquet, les enfants constatent que :

- Si le papier collant n'est pas bien mis du premier coup, on déchire l'emballage en voulant le déplacer.
- Si la ficelle est trop courte, on ne peut rien en faire ; au contraire si on ne la serre pas assez, elle ne tient pas.
- L'élastique est moins beau, mais il a beaucoup d'avantages : il n'y a pas à faire de noeud, on peut l'allonger et il serre bien. Il remporte les suffrages de la plupart des enfants.

IV.2. Objets qui s'allongent et objets qui ne s'allongent pas.

L'intérêt manifesté par les enfants permet à la maîtresse de leur demander d'apporter en classe tout ce qui pourrait servir à ficeler un paquet.

L'inventaire de leur récolte fait apparaître :

des élastiques en anneau,
du ruban élastique pour cheveux,
de l'élastique à chaussettes (plat ou rond),
des galons divers, des rubans, des galons de dentelle,
des fils de lin, de coton, de laine, de la ficelle, etc.

* D'après une expérience conduite par Madame Antier, professeur à l'Ecole Normale de Niort, dans le cadre d'une recherche de l'I.N.R.P.

Dans le lot mis à leur disposition, les enfants font un tri et mettent d'abord de côté tout ce qu'ils connaissent déjà pour être élastique (en vérifiant tout de même). Certains enfants essaient systématiquement tout ce qu'ils ont ; leurs remarques engagent les autres enfants à procéder de même. Ils annoncent en particulier que les fils de laine s'allongent un peu quand on tire dessus. La maîtresse pose alors la question : "Comment faire pour en être sûr ?"

Après recherche, plusieurs enfants proposent de prendre deux morceaux de fil de laine pareils, de tirer sur l'un et pas sur l'autre en les mettant côte à côte. Les multiples expériences que font alors tous les enfants avec leurs divers matériaux leur permettent de constater que :

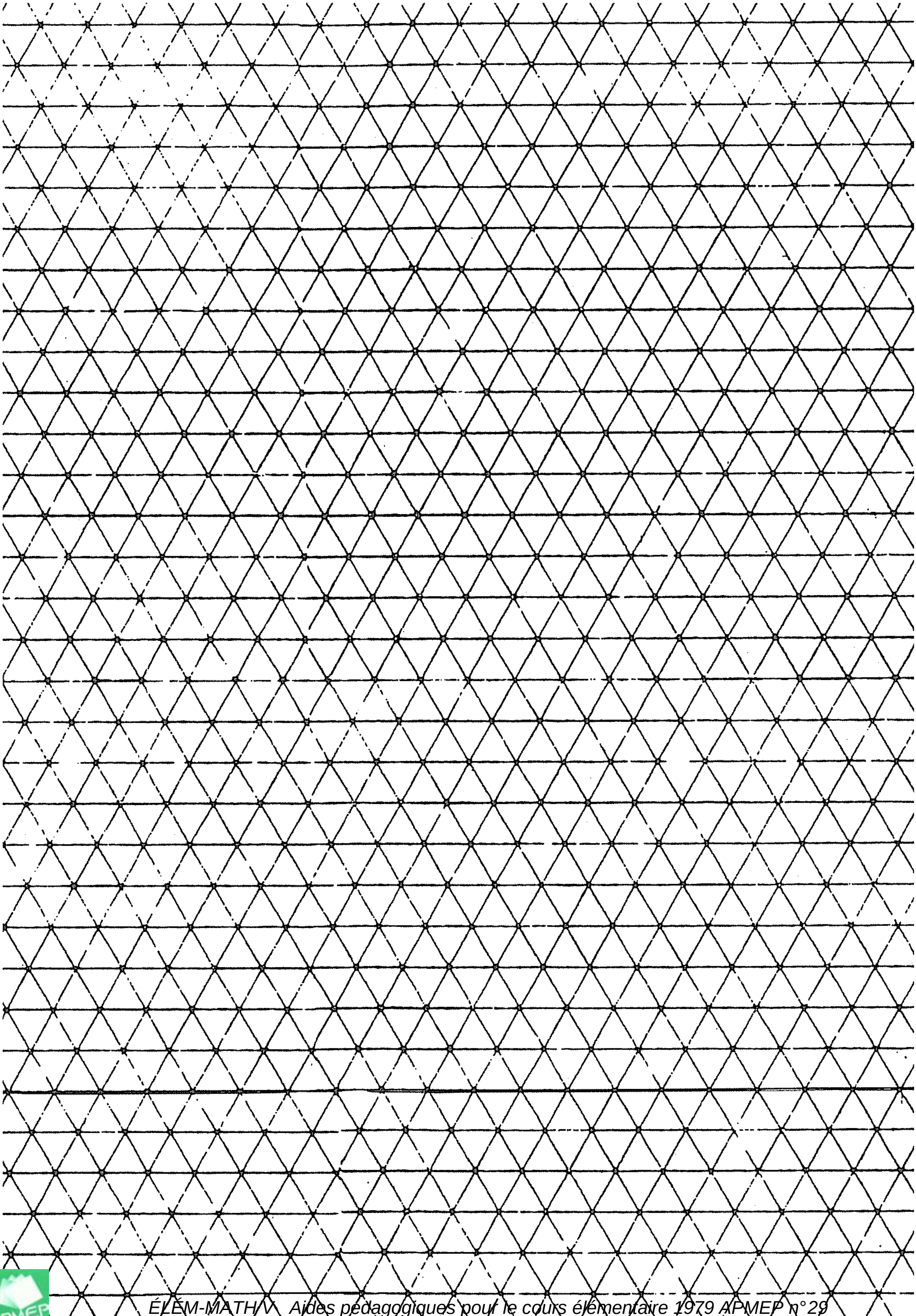
- quand un fil ou un élastique s'allonge, il devient plus petit en même temps (sa section diminue) ;
- que certains galons restent plus longs quand on arrête de tirer (à moins de tirer à peine), contrairement à l'élastique ;
- que certaines ficelles s'allongent à peine même si on tire très fort.

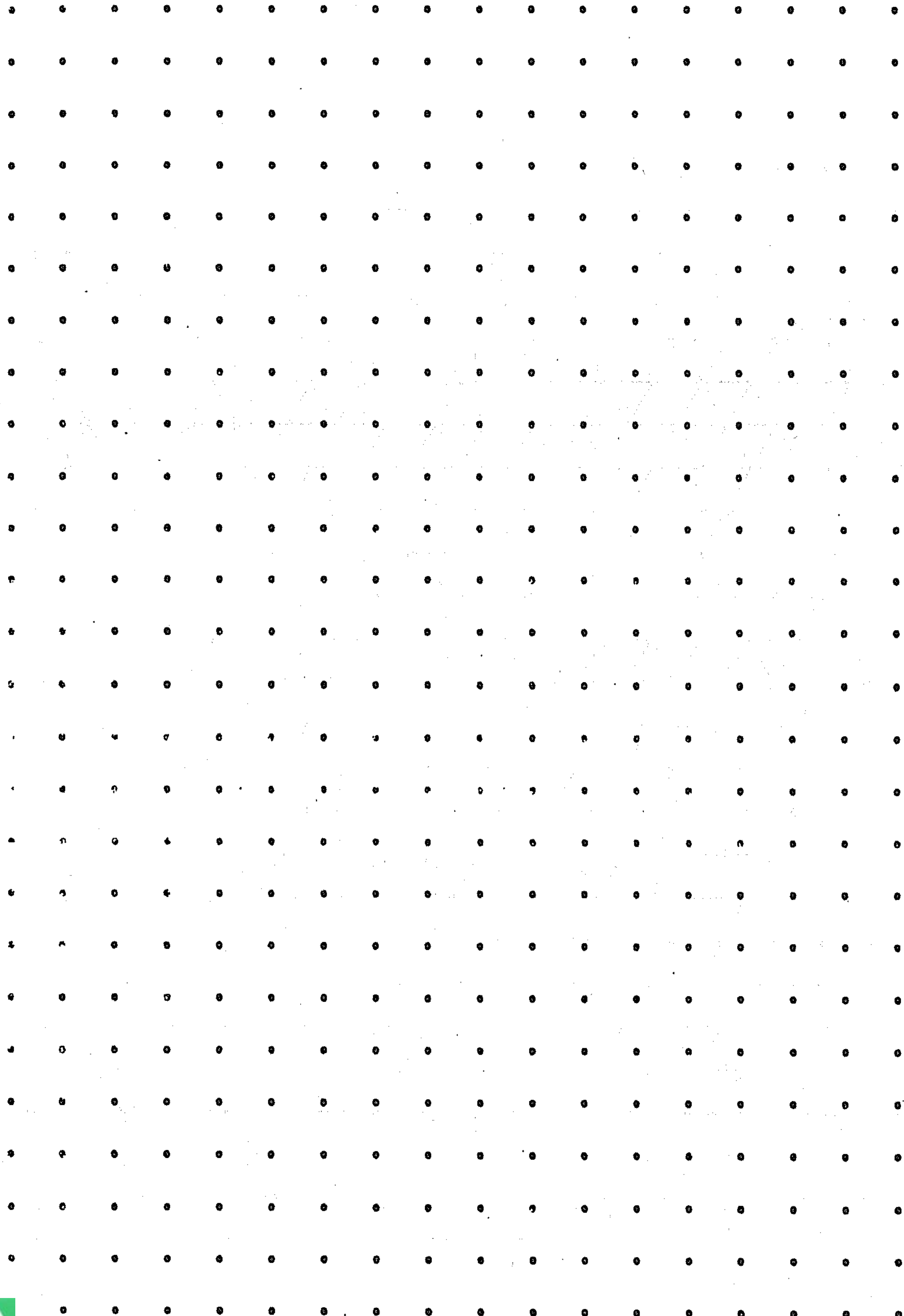
Il est alors possible de rechercher des matériaux, tels les baguettes ou les bandes de papier, qui ne changent pas de longueur quand on les manipule et qui peuvent servir de référence pour comparer les autres.

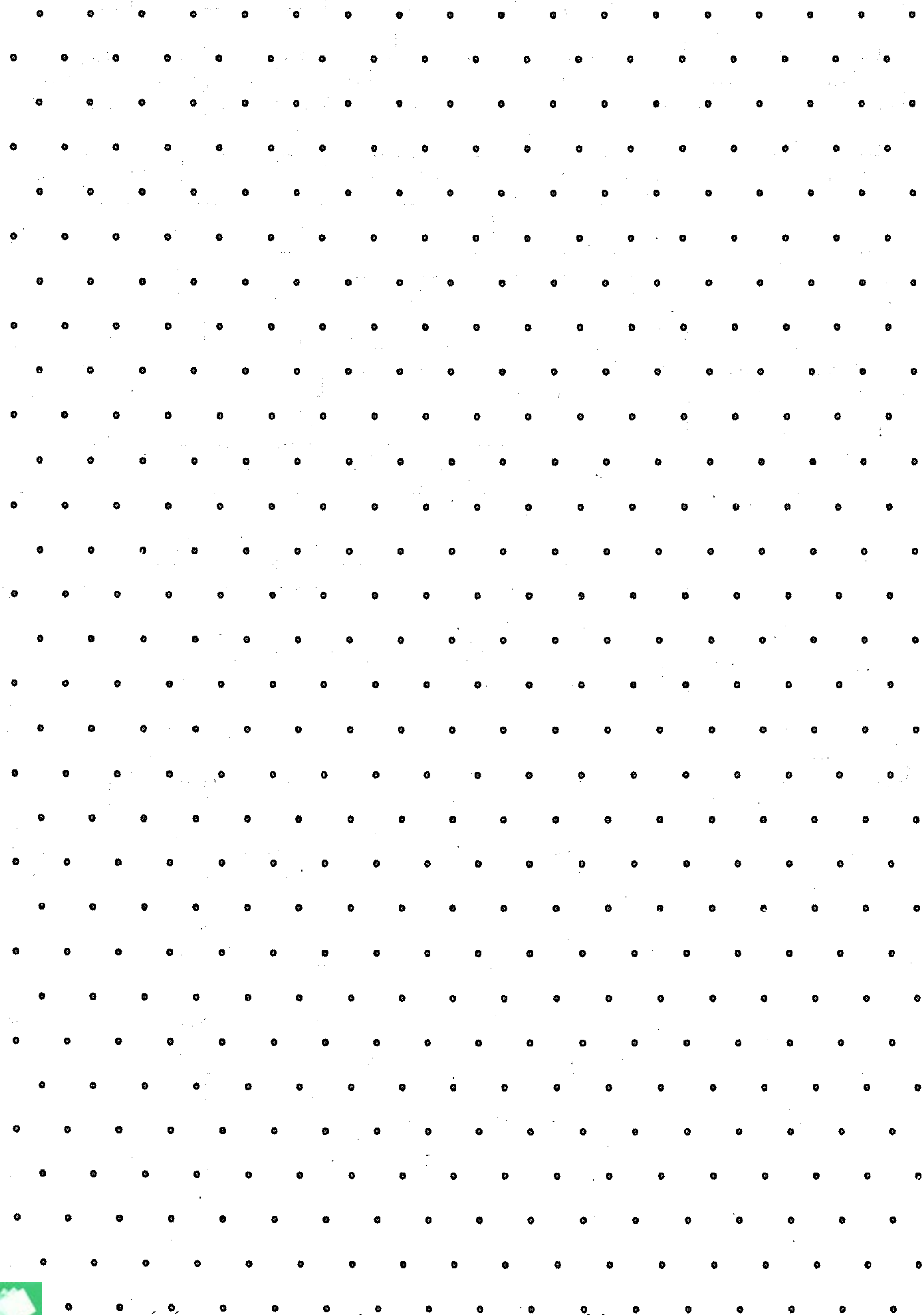
IV.3. Prolongements

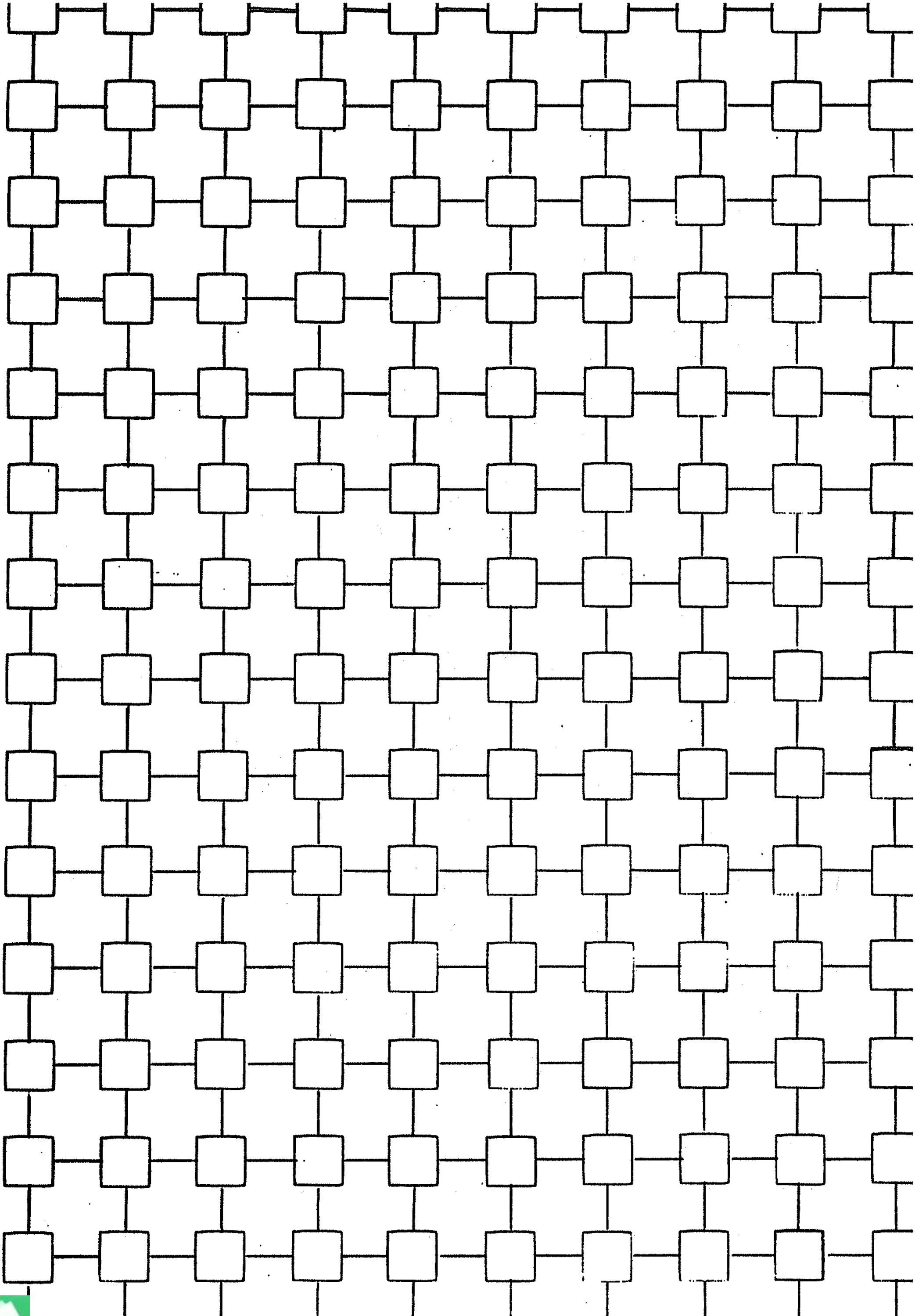
Chercher quel est l'enfant le plus fort en utilisant des sandows sur lesquels on tire. Chercher quel est l'enfant qui saute le plus loin.

Au cours de ces activités, les enfants sont obligés de fixer progressivement les conditions de l'épreuve et de trouver des moyens pour comparer les résultats (comptage de pas, utilisation de baguettes ou de bandes de papier par exemple).









BIBLIOGRAPHIE

I. Des idées pour la pratique quotidienne

I.1. Nombre

- Numération, IREM de Bordeaux (1)
- La Numération au CE, IREM de Clermont (2)
- G. Deramecourt, La Multiplication au CE, IREM de Bordeaux
- Elem-Math II, La Multiplication des Naturels à l'Ecole Elémentaire, A.P.M.E.P. (3)
- Elem-Math III, La Division à l'Ecole Elémentaire, A.P.M.E.P.

I.2. Géométrie

- Elem-Math VI, Le Triangle à l'Ecole Elémentaire, A.P.M.E.P. (à paraître début 1980).
- N. Picard et M.A. Girodet, Pavages et Polyèdres, OCDL.
  (Suggère la réalisation et le classement de pavages et de polyèdres à partir de polygones pré-découpés)
- L. Empain, Un module parcourt l'espace, Dessain et Tolra.
  (Le module considéré ici est un triangle rectange icosèle. Reproduit en respectant des symétries, il conduit à des motifs graphiques d'un étonnant dynamisme. Ce thème donne l'occasion de prendre une revanche sur ceux qui considérent la géométrie comme une science austère).
- E. Holiday, Rythmes pour un dessin, Dessain et Tolra.
  (Recueil de pavages inspirés de motifs décoratifs arabes. Par coloriage, on obtient une très grande variété de dessins).
- Les activités manuelles éducatives (2 fasc.), CRDP de Marseille (4)
- M.C. Rivière, Fils et pointes, Dessain et Tolra.
- L. Kampmann, Espaces et volumes, Dessain et Tolra.
- J. Jackson et H. Skipper, Formes et papier, Dessain et Tolra.
- J. Meeus et P. Torbijn, Polycubes, CEDIC.
  (Etude de puzzles à réaliser avec des assemblages de cubes).

I.3 Signalons en outre :

- Elem-Math I, A.P.M.E.P.
  (Recueil d'articles divers dont, en particulier, des activités de pliage et un compte rendu d'exploitation du jeu "le compte est bon" dans une classe rurale à 3 niveaux).

(1) IREM de Bordeaux, 351 cours de la Libération, 33405 Talence.
(2) IREM de Clermont, Complexe scientifique des Cézeaux, BP 45, 63170 Aubière
(3) A.P.M.E.P. 37 rue Jacob, 75006 Paris.
(4) C.R.D.P. de Marseille, 55-57 Rue de Sylvabelle, 13293 Marseille Cedex

- F. Boule, Mathématique et jeux, CEDIC
- E. Galion, Rencontre sur l'Enseignement Elémentaire, CEDIC.

et surtout deux ouvrages de base

- Wheeler, Mathématique dans l'Enseignement Elémentaire, OCDL.
  (Très bonne initiation aux mathématiques fondée sur l'étude expérimentale de situations.)
- C. Banwell, K. Saunders, D. Tahta, Points de départ, CEDIC.
  (Ouvrage très riche qui passionnera petits et grands. Trois parties : méthodes de travail, points de départ, matériels).

II. Information pour les maîtres

- N. Picard et M.A. Girodet, Techniques opératoires, OCDL.
  (Analyse comparative de plusieurs techniques opératoires pour chacune des quatre opérations).
- ERMEL, Apprentissages mathématiques à l'Ecole Elémentaire, Cycle Elémentaire (2 vol.), OCDL.
  (Oeuvre de l'Equipe de Recherche Mathématique à l'Ecole Elémentaire de l'INRP, ce livre contient une présentation des notions mathématiques et une discussion des objectifs pédagogiques, une progression générale avec quelques variantes, des exemples d'activités en classe et quelques chroniques)
- A. Myx. 6 thèmes pour 6 semaines, CEDIC.
  (Entre autres : numération, opérateurs, mesure. Le 6e thème - géométrie - est particulièrement intéressant).
- J. et S. Sauvy, L'enfant à la découverte de l'espace, Casterman.
  (Initiation à la topologie intuitive).
- J. et S. Sauvy, L'enfant et les géométries, Casterman.
  (Une réflexion sur ce que pourrait être la géométrie à l'Ecole Elémentaire)
- MOTS. 4 fascicules parus, A.P.M.E.P.
  (Cette collection présente une réflexion à propos de certains termes utilisés en mathématiques à l'Ecole Elémentaire.)
  Signalons en particulier :
  Egalité, Couple, Relation binaire, Nombre naturel dans MOTS I
  Représentations graphiques, Partition-Equivalence, Partages, Division, Division euclidienne dans MOTS II.
  Numération, Opération, Ordre, Préordre dans MOTS III.
  Proportionnalité, opérateurs multiplicatifs, Ensemble, Cardinal dans MOTS IV.

III. Une revue pour l'Ecole Elémentaire :

- *Grand* N, CRDP de Grenoble (5)
  (Réalisée par l'IREM de Grenoble, cette revue, qui paraît trois fois l'an, publie des comptes rendus d'activités menées dans des classes élémentaires).

(5) CRDP de Grenoble, 11 rue du Général Champon, 38031 Grenoble Cedex

2.902680.05.8

IGR Imprimerie Lyon - Photocomposition : Marie-Paule COMPO - Montage : Atelier M. MICHAUD
Façonnage ALAIN