Problème d'équilibre ou travail avec des "vecteurs" non géométriques

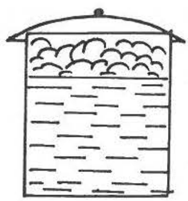
R. Gauthier

Cette activité a été utilisée en classe de Seconde. La "matrice" n'intervient que comme une notation commode. Aucune notion théorique n'a, bien sûr, été présentée sur le calcul matriciel.

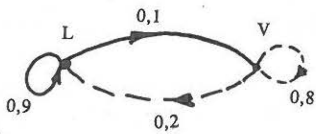
Cet exercice conduit à :

— du calcul numérique, des études de suites
— du calcul "vectoriel", sur des couples de décimaux
— des révisions sur "équation d'une droite"
— l'étude d'alignements de points et "limite" d'une suite de points
— l'utilisation d'une calculatrice.

Voici le texte d'un document de travail distribué aux élèves, avec quelques commentaires sur ce document, conduisant à des prolongements possibles en Première et Terminale.



∗ Un récipient cylindrique contient 7 litres d'un liquide et 3 litres de sa vapeur.
Les conditions d'une expérience* sont telles que, après 24 heures, $\frac{1}{10}$ du liquide s'est transformé en vapeur et $\frac{2}{10}$ de la vapeur s'est transformée en liquide.
Cet échange (liquide↔vapeur) est représenté par le graphe ci-contre ; expliquez-le.



1. Vous allez calculer le volume du liquide et le volume de vapeur au début du *deuxième jour* : on les désigne respectivement par L_2 et V_2.

* C'est une situation théorique... Dans la pratique, c'est plus compliqué !

• Analysez les calculs qui suivent et achevez-les :

$$L_2 = (0,9 \times 7) + (0,2 \times 3)$$
$$V_2 = (0,1 \times 7) + (0,8 \times 3)$$

• Calculez L_2 ; V_2 puis $L_2 + V_2$.

L'état (liquide-vapeur) est donné par le vecteur $E_1 = \binom{7}{3}$ au début du premier jour.

Pour représenter les calculs précédents, on écrit :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0,9 & 0,2 \\ 0,1 & 0,8 \end{pmatrix}}_{\text{matrice}} \bullet \underbrace{\begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}}_{\text{vecteur } E_1} = \begin{pmatrix} 0,9 \times 7 + 0,2 \times 3 \\ 0,1 \times 7 + 0,8 \times 3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \ldots\ldots \\ \ldots\ldots \end{pmatrix}}_{\text{vecteur } E_2}$$

2. L'expérience se poursuit du deuxième au troisième jour, dans les mêmes conditions d'échange à partir de l'état E_2 ; de même les jours suivants. Pour calculer l'état au début du troisième jour, on multipliera donc la même matrice par E_2 pour obtenir E_3...

Calculez les *composantes* de chacun des *vecteurs* E_3, E_4, E_5, E_6, E_7, E_8.

Soient (x_k, y_k) les composantes de E_k.

Ecrire les premiers termes de la suite (x_k) : 7 - 6,9 - 6,83 ...

Ecrire les premiers termes de la suite (y_k) : 3 - 3,1 - 3,17 ...

Vérifier pour $k \in \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$: $x_k + y_k = 10$.

On peut démontrer que :

Si un jour donné les composantes de E_k sont a et b , avec $a + b = 10$, alors le lendemain les composantes de E_{k+1} sont a' et b' avec $a' + b' = 10$.

3. Choisissez un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et représentez *chaque état* E_i par *un point* M_i tel que $\overrightarrow{OM_i}$ ait pour composantes celles du vecteur E_i.

Construisez les points M_1, M_2, M_3,... jusqu'à M_8.

Que remarquez-vous pour ces points ?

Calculez les composantes de $\overrightarrow{M_1M_2}$ et démontrez qu'il existe un réel k tel que $\overrightarrow{M_1M_2} = k(\vec{i} - \vec{j})$.

Même question pour $\overrightarrow{M_2M_3}$, ..., $\overrightarrow{M_7M_8}$.

Démontrez ensuite que tous ces points sont alignés.

4. Les points marqués sont donc alignés et, sur le dessin, la *distance* entre deux points consécutifs semble diminuer. Autrement dit, il semble, que les variations de volume deviennent de plus en plus petites.

Tout se passe comme si le mélange considéré "tendait" vers un état d'équilibre, ou *état stable,* pour lequel il n'y aurait plus de variation des volumes de liquide ou de vapeur.

Nous admettons que cet état stable S existe : désignez ses composantes par $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

S'il est stable on doit avoir : $\left\{\begin{array}{l} \begin{pmatrix} 0,9 & 0,2 \\ 0,1 & 0,8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ \text{et} \\ x+y=10 \end{array}\right.$

Déduisez-en les volumes x et y de liquide et de vapeur correspondant à l'état stable.

Commentaire pour l'utilisateur

1. Commodité de la notation matricielle pour coder une information.

2. D'abord une activité de calcul numérique dans laquelle l'usage d'une calculatrice est bien pratique (stockage, usage de mémoires, arrondi, etc.).

Dans certaines classes de en Première ou Terminale, on peut exprimer x_{n+1} en fonction de x_n et y_{n+1} en fonction de y_n, après avoir démontré (récurrence) que pour tout n : $x_n+y_n=10$.

On trouvera : $\left\{\begin{array}{l} x_{n+1}=0,7x_n+2 \\ y_{n+1}=0,7y_n+1 \end{array}\right.$

d'où $x_{n+1}-x_n=0,7(x_n-x_{n-1})$. De même pour y_n .

La suite $u_n=x_{n+1}-x_n$ est une suite géométrique de premier terme $u_1=-0,1$ et de raison 0,7.

De même, la suite $v_n=y_{n+1}-y_n$ est une suite géométrique de premier terme $v_1=0,1$ et de raison 0,7.

On pourra faire appel aux théorèmes classiques sur les variations, la convergence, etc.

3. Pour une bonne lecture du graphique, les élèves sentiront sans peine la nécessité d'une échelle adaptée au problème. ($\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=10$ en centimètres). Les x_n appartiennent à l'intervalle [6;7] et les y_n à [2;3].

On trouvera : $\overrightarrow{M_{n+1}M_{n+2}} = 0,7\,\overrightarrow{M_nM_{n+1}}$.

La suite $W_n=\|\overrightarrow{M_nM_{n+1}}\|$ est une suite géométrique de raison 0,7.

On trouvera : $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\overrightarrow{M_2M_3}$ etc. en fonction de $(\vec{i}-\vec{j})$ d'où l'alignement des points.

4. La convergence des suites (u_n), (v_n), (x_n) et (y_n) peut être établie.

Elle nous autorise à supposer un "état d'équilibre" que l'on peut déterminer.

D'où le "point limite" pour la "suite" de points (M_n).