LES $\mathcal{M}$ATHS : L'Ω ?

Organe officiel de la Régionale de CAEN de l'APMEP : **Numéro 5 - Mars 2008**

Rédacteur en Chef : Richard Choulet

Éditorial.

Bonne année 2008 = 8 × 251 où 251 est premier. On peut jouer aussi avec :
$2008 \to 2^2 + 8^2 = 68 \to 6^2 + 8^2 = 100 \to 1 \to 1 \cdots$, alors qu'on avait $2007 \to 53 \to 34 \to 25 \to 29 \to 85 \to 89 \to 145 \to 42 \to 20 \to 4 \to 4 \to \cdots$.
Bonne santé à tout notre petit monde et longue vie à nos retraités, qui ont la mœlle. Ne l'ébruitons pas trop car on pourrait leur faire un pont (de nombres) d'or pour venir rebosser dans nos établissements alors que leur état de pensionné (il paraît que c'est le bon terme) leur sied bien en général et même en simple soldat d'ailleurs ; vous avez certainement entendu la formule «travailler ± pour gagner ∓». Bref nos deux exercices ont suscité réactions et courrier de Claude Dujardin piqué au vif qu'il fut, par une invitation personnelle au travail. Bravo.

L'APMEP en campagne.

Le mardi 2 octobre notre président Didier et moi-même allâmes à l'IUFM parler de l'association. Xavier Gauchard servit d'intermédiaire en nous trouvant une salle et en faisant la retape qui, il faut le dire fut sans doute menée de main de maître car nous eûmes une bonne vingtaine d'étudiants qui firent mieux que nous accueillir poliment. C'est vrai qu'on avait un peu biaisé le truc car, honte sur nous, on proposait un coup à boire pour leurs chauffer les amygdales après leurs quelques 8 heures de cours ; mais nous sommes vicieux il faut appâter le chaland. Bilan : échanges sympathiques, questions intéressées, présentation de documents, magnifique vue sur le site de l'APM à l'écran ⋯ donc coup de pied à suivre comme on a dit funestement pour nous il n'y pas si longtemps au rrrruby.

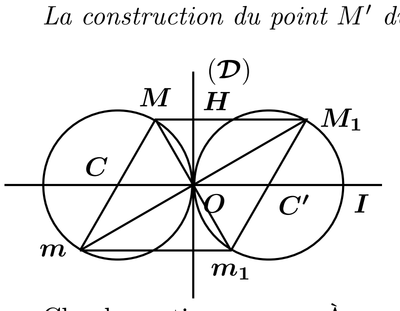
La journée de la Régionale.

C'est la deuxième du nom (on n'hésite pas à mouiller la chemise) : la première eut lieu le 21 novembre à l'IUFM sur les thèmes généraux du socle commun et de maths expérimentales, des choses un peu dans l'air du temps. L'après midi nous regroupa d'abord avec Nicole Lorret sur «Mathématiques à Madagascar», puis avec Éric Reyssat et Jean Lejeune sur «Expérimentation dans la recherche universitaire».
La journée annoncée aura lieu le 5 mars sur le thème général «Statistiques», au lycée du Robillard. La spécificité de l'enseignement agricole nous sera présentée ; une visite guidée des installations et des dispositifs expérimentaux en cours, par la coordinatrice entremise de Jacques Pavy, devrait nous rendre plus familier ce cadre de formation. Merci Jacques.
À cette occasion le département STID («Statistiques et traitement Informatique des Données»), antenne lexovienne de l'IUT de Caen, présentera le cursus offert aux étudiants ainsi que les débouchés de cette voie.
D'ores et déjà le bureau de la Régionale remercie vivement le Proviseur du lycée du Robillard de nous recevoir gracieusement dans ses locaux.

Solutions partielles des exercices : Claude Dujardin dans ses œuvres !

Rappel : *Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux cercles tangents en O. À tout point M de $\mathcal{C}$, distinct de O, on associe le point M' de $\mathcal{C}'$ tel que (OM) et (OM') soient orthogonales. On note H le projeté orthogonal de O sur (MM'). Déterminer l'ensemble des points H quand M varie.*

Notre pensionné et passionné aussi du reste, collègue envisage les cas de cercles tangents extérieurement avec même rayon, puis avec des rayons différents, puis tangents intérieurement et enfin le cas général de deux cercles sécants.
La construction du point M' du texte cache en fait une transformation ponctuelle bien connue (sic).



Ceci lui permet de trouver dans chacun des cas énumérés, un segment de droite pour le premier et des arcs de cercle pour les autres.
Notons que la conjecture du résultat peut être faite assez rapidement avec la construction de la figure sous GeoGebra en activant "lieu de " ou "trace" autant que je m'en souvienne.

Claude continue avec : «À propos des nombres polygonaux».

On utilise beaucoup les nombres carrés, un peu les nombres trianguaires (définis généralement par $\frac{n(n+1)}{2}$*), beaucoup moins les nombres pentagonaux, hexagonaux,* $\cdots$.
À une époque (ça fait ancien combattant), je m'y étais intéressé à propos de la «pyramide de Lucas» qui datait de 1875 : "est-il possible de disposer des boulets de canon en une pyramide à base carrée de telle sorte que le nombre total de boulets soit un carré parfait ?" (Arithmétique pour amateurs par un autodidacte, Guinot tome IV).
On connaissait une solution : $1^2+2^2+\cdots+24^2+70^2$*, mais Guinot donne une solution "élémentaire" (?) pour montrer qu'il n'y en a pas d'autres.*
Je m'étais dit qu'on savait aussi calculer $1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$ *et résoudre* $\frac{n(n+1)}{2}=m^2$*. On perd le côté figuratif encore que "est-il possible de ranger des troncs d'arbres de même diamètre les uns sur les autres de telle sorte que leur nombre soit un carré ?". La solution conduit à deux équations de Pell :* $T_1=C_1$*,* $T_8=C_6$*,* $T_{49}=C_{35}$*,* $T_{288}=C_{204}$*,* $\cdots$ *(NDLR :* T_{indice} *pour nombre triangulaire de côté indice, idem pour carré et C, etc).*
On peut d'ailleurs donner une autre interprétation géométrique : un organisateur de meeting aérien envisage de faire des passages des avions au-dessus des spectateurs en formation de carré, puis de triangle. Combien doit-il prévoir d'avions ? S'il n'est pas très riche, un seul suffira mais il faudra qu'il explique au public que c'est une convention !
Emporté par l'élan, je m'étais dit que cette convention était quand même commode pour tous les polygones (triangles, carrés, pentagones, $\cdots$*) ne serait-ce que pour le très puissant théorème, intuité par Fermat et démontré par Cauchy-Legendre (c'est Guinot qui le dit) : tout entier (quitte à prendre aussi 0 par convention) peut s'écrire comme somme d'au plus trois nombres triangulaires, quatre nombres carrés, cinq nombres pentagonaux,* $\cdots$*, p nombres p-polygonaux.*
[*Exemple (NDLR : de l'an passé donc à voir pour cette année qui débute) :*

$$2007=T_{60}+T_{18}+T_3=C_{42}+C_{15}+C_3+C_3=P_{1926}+P_{70}+P_5+P_5+P_1.]$$

Mais pour faire cette convention, il faut avoir leur expression en fonction de n et p. J'avais décidé (quelle audace !) de noter $d_n^{(p)}$ *le nombre de points figurant dans un p-polygone à n points sur chaque côté. Ainsi* $d_n^{(3)}=\frac{n(n+1)}{2}$*,* $d_n^{(4)}=n^2$.
Ces deux valeurs se trouvent par récurrence sur n, et la convention $d_1^{(p)}=1$*. J'avais trouvé :*

$$d_n^{(p)}=d_{n-1}^{(p)}+(p-2)(n-1)+1.$$

En descendant n jusqu'à 2 et ajoutant membre à membre, je trouve :

$$d_n^{(p)}=\frac{n[(p-2)(n-1)+2]}{2}.$$

On vérifie bien : $d_n^{(3)}=\frac{n(n+1)}{2}$*,* $d_n^{(4)}=n^2$ *et* $d_n^{(5)}=\frac{n(3n-1)}{2}$*. D'où* $\mathbb{N}_5=\{1,\ 5,\ 22,\ 35,\ 51,\ 70,\ \cdots\}$*.* $d_2^{(p)}$ *est toujours le premier nombre p-polygonal significatif.*
Notre collègue s'intéresse ensuite à l'équation proposée : $n^2+(n+1)^2=m^2$ (recherche des nombres carrés centrés égaux à un carré) et à l'aide d'équations de Pell, sans calculatrice mais, comme il le dit lui-même, «avec une bonne table numérique des fonctions élémentaires Laborde de 1961», il trouve les premières valeurs annoncées 1, 25, 841, 28 161, 32.959.081, $\cdots$.
Je ne vais pas vous le faire à la Fermat, qui n'avait pas assez de place, mais j'ai trouvé pour ces nombres la récurrence :

$$N_{n+1}=17N_n-4+6\sqrt{8N_n^2-4N_n}$$

et la fonction génératrice f telle que : $f(z)=\frac{z(1-10z+z^2)}{(1-z)(1-34z+z^2)}$. Alors heureux ? Pour les amateurs de suites d'entiers en tous genres, allez sur le site de Neil Sloane (voir ci-dessous ou taper njas sur google et vous l'avez) où vous trouverez cette suite sous le nom de A008844. Pour clore provisoirement cette étude, un article est à venir dans le BV où je reparlerai de ces nombres figurés (avec dessins à la clef) sous le titre sybillin, voire ésotérique «Pourquoi tant de Trocs et si peu de Tronz ?».

Nouvel exo - de l'analyse cette fois -

Trouvez tous les polynômes P à coefficients dans $\mathbb{C}$ (et donc dans $\mathbb{R}$? ! ?) tels que pour tout z of course :

$$\boxed{P(z)\times P(z+1)=P(z^2-z+1)}.$$

Pour les mordus, je propose la généralisation, sur laquelle je me casse les dents (avec quelques bribes de solutions) : même question avec $\boxed{P(z)\times P(z+a)=P(z^2+bz+c)}$, a, b et c réels.

Nouvelle rubrique : Et dans nos classes ?

Attention pas question de faire de l'ombre au BV, ni de juger les auteurs qui osent se lancer : il s'agit sans censure, d'amorcer une pompe initiatrice de débats enrichissants, espérons-le. Une seule contrainte que le texte soit lisible ; pitié pour le scribe. And the first is $\cdots$ Jacques Pavy qui nous propose une expérimentation en classe de Première S. Merci d'avoir osé.

Le travail proposé par notre collègue est en deux parties.
Tout d'abord il donne un devoir à la maison le 10 octobre à rendre le 19 octobre, qui comprend entre autres, l'exercice qui suit.

Soit ABCD un parallélogramme. On considère le point P, symétrique du milieu I de [AB] par rapport à A. On définit le point Q par l'égalité vectorielle : $\overrightarrow{AQ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$.

1. Réaliser une figure conforme à l'énoncé
   (a) à la main sur papier blanc au compas, à la règle graduée et peut-être à l'équerre -faire apparaître les traces intermédiaires-
   (b) en sortie papier avec le logiciel Geogebra -une séance informatique de prise en main de Geogebra, à partir de cet exemple est en gestation-.
   (c) Que peut-on conjecturer ?
2. Pour démontrer cette conjecture, trois méthodes de démonstration sont proposées, obligatoires à réaliser.
   (a) <u>Méthode 1</u> : Introduire un repère -ici $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$- puis on déterminera les coordonnées des points de la figure A, B, C, D, I, P et Q.
   (b) <u>Méthode 2</u> : Exprimer les deux vecteurs $\overrightarrow{PC}$ et $\overrightarrow{PQ}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ puis conclure.
   (c) <u>Méthode 3</u> : Exprimer P comme barycentre des points A et B, Q comme barycentre de A et de D et conclure.

La deuxième partie est le travail réalisé en salle informatique. Jacques en dit «Cela a très bien marché ; j'ai découvert les élèves sous une autre facette et une relation très détendue. J'ai été surpris par la maîtrise de certains.»
Voici le texte de la fiche proposée aux élèves.

Fiche Élève n°1 : Réalisation d'une figure géométrique conforme à un énoncé

1. <u>Énoncé donné dans le DNS 3 :</u> On considère le parallélogramme ABCD. Soit I le milieu de [AB] et P le point symétrique de I par rapport à A. On définit le point Q par l'égalité vectorielle $\overrightarrow{AQ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$.
   Que conjecture-t-on ?
2. <u>Travail à effectuer :</u> Réaliser une figure conforme à l'énoncé en respectant la dénomination des points du texte, puis faire une sortie papier de la figure.
3. <u>Création de la figure de l'exercice :</u> Créer un dossier sous le nom TPMATH.
   (a) **Étape 1 : Faire apparaître les axes**
   Dans la barre ds menus (première ligne de la fenêtre de démarrage), sélectionner le menu «affichage», puis le sous menu «axes».
   (b) **Étape 2 : Créer les trois points libres A, B, C dans la feuille de travail**
   ♣ Créer A :
   Cliquer à gauche dans la barre des boutons (deuxième ligne), le bouton «point A»
   Avec la souris, déplacer le curseur et positionner-le sur un point si possible à coordonnées entières
   Cliquer gauche
   On constate que le point est fixé, avec affichage de son étiquette A. Dans la fenêtre «Algèbre», A apparaît comme un objet libre avec ses coordonnées.
   ♢ Créer B et C de manière analogue.
   (c) **Étape 3 : Construire le parllélogramme et le quatrième sommet D**
   ♣ Créer la droite (AB), objet dépendant des points A et B.

Cliquer gauche sur le troisième bouton «droite», puis sélectionner le mode «droite passant par deux points»

Avec la souris, curseur sur A puis sur B. Finir avec un clic gauche.

À l'écran, la droite (AB) est dessinée et étiquetée a. dans la fenêtre «algèbre», la droite a apparaît en objet dépendant avec son équation cartésienne.

♢ Créer la droite (BC)

♡ Créer la droite passant par A et parallèle à (BC)

Sélectionner le quatrième bouton «droites perpendiculaires», puis le mode «droites parallèles».

Curseur A, clic gauche, puis curseur sur la droite (AB) et clic gauche

Créer la droite passant par C et parallèle à (AB)

♠ Créer et étiqueter le point D, point d'intersection des deux parallèles

Sélectionner le deuxième bouton «point A», puis le mode «intersection de deux courbes»

Curseur sur chacune des droites avec clic gauche

Bilan : on a obtenu le parallélogramme ABCD.

(d) Étape 4 : Créer le point I

Choisir le deuxième bouton «point A», puis le mode «milieu ou centre»

Curseur avec clic gauche sur le point A, puis sur B : on obtient un point milieu du segment [AB] étiqueté E

Pour transformer l'étiquette E en I, clic droit sur la souris, puis sélectionner le mode «renommer», etc et suivre les instructions

(e) Étape 5 : Créer le point P

Choisir le septième bouton «transformations géométriques»

Sélectionner avec clic gauche «symétrie centrale»

Curseur avec clic gauche sur le point I, puis sur A : on obtient I'

Renommer I' en P comme cela a été déjà fait

(f) Étape 6 : Créer le point Q

Créer le vecteur $\overrightarrow{AB}$ nommé u (en minuscules sans flèche dans Geogebra). Pour cela

Choisir le troisième bouton «droite», puis le mode «vecteur à partir de deux points»

Curseur avec clic gauche sur le point A, puis sur B.

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ apparaît dans la feuille de travail et l'objet dépendant u avec ses coordonnées.

Créer le vecteur $\dfrac{1}{3}$u

Dans la ligne de saisie en bas de la fenêtre de démarrage, taper au clavier $\dfrac{1}{3}$u et valider avec la touche ENTRÉE du clavier

Le logiciel nomme ce nouveau vecteur v et le crée dans la feuille à partir du point O. Dans la fenêtre «algèbre», le vecteur v apparaît en objet dépendant, avec ses coordonnées.

Choisir le troisième bouton «droite», puis le mode «représentant (origine -vecteur)»

Curseur avec la souris sur A avec clic gauche ; idem sur le vecteur v. On obtient le point nommé A' sur le segment [AD]

Renommer A' en Q

(g) Étape 7 : Effacer sur l'écran les traces intermédiaires : les vecteurs u, v, les axes

Curseur sur le vecteur u, clic droit et apparition dans le menu contextuel du mode «afficher l'objet» ; cliquer sur l'icône gauche

(h) Étape 8 Sauvegarder votre travail sous le nom de TPM1

(i) Étape 9 : Sortie papier

Et voilà le travail ! À votre geogebra préféré et merci Jacques.

Les adresses utiles

Le président : didier.trotoux@ac-caen.fr

La trésorière : ch.faisant@wanadoo.fr

La secrétaire : annie.memin@ac-caen.fr

Le scribe : richard.choulet@orange.fr

Neil Sloane : www.research.att.com

Le site national avec notre petit coin local : www.apmep.asso.fr