Coup de cœur pour un livre numérique

En cheminant avec Kakeya

Geneviève Bouvart

PLOT a reçu ce « coup de cœur » de Geneviève Bouvart. Gérard Kuntz, dans le Bulletin Vert n°498, évoque lui aussi ce livre numérique. Pensant que les grands enthousiasmes sont bons à partager, fût-ce par deux fois, nous avons maintenu la parution de cet article.

En cheminant avec Kakeya, de Jean-Luc Rullière et Vincent Borrelli, est un voyage au pays des mathématiques, un voyage à pied avec son bâton de pèlerin, au rythme de la contemplation et de la rêverie. « Quelle est la plus petite surface à l'intérieur de laquelle il est possible de déplacer une aiguille de manière à la retourner complètement ? » : voici la question posée au début du XX$^{\text{ème}}$ siècle par le mathématicien japonais Sôichi Kakeya. S'il nous semble *a priori* que, seul, le disque est solution du problème nous comprenons à la lecture du livre, que l'imagination est une facette essentielle de l'activité mathématique. Nous sommes invités à cheminer pour explorer et admirer un champ (presque) infini de figures possibles parmi les figures ayant les plus belles propriétés, ou les figures les plus symétriques ou celles dont la construction semble le plus en harmonie avec le problème posé.

En parallèle de cette exploration, nous sommes conviés à un cheminement historique, qui met à l'honneur quelques mathématiciennes remarquables comme Émilie du Châtelet ou Marie Agnesi et de nombreux mathématiciens depuis Newton, Leibniz ou Descartes jusqu'à Riemann, Poincaré, Széméredi et Besicovitch. Chaque notion mathématique découverte par un de ces prestigieux personnages nous amène à poser la question de Kakeya différemment en vue de sa résolution ou de sa généralisation : nous ne considérons plus une figure fixe comme un disque ou un triangle mais la transformation progressive d'une figure en une autre. À partir de cette famille de figures nous cherchons celle qui a la plus petite aire. C'est là que le calcul différentiel et la géométrie analytique deviennent nécessaires pour déterminer l'aire minimale. Puis le calcul intégral va permettre de calculer des aires plus complexes et ainsi obtenir des figures d'aires encore plus petites. Une nouvelle façon d'aborder le problème de Kakeya conduit tout naturellement à une équation différentielle. L'étude du mouvement avec Navier Stokes nous amène à la deltoïde, la courbe enveloppe des positions successives de l'aiguille. Puis de conjecture en conjecture, nous arrivons au théorème de Besicovitch qui nous laisse pantois : « *Il est possible de retourner une aiguille dans une aire aussi petite que l'on veut !* ». Si dans le domaine convexe, le problème est résolu qu'en est-il dans le domaine étoilé ? Existe-t-il une figure d'aire nulle dans laquelle le retournement soit possible ? Si tel est le cas, la réponse au problème de Kakeya tiendrait en quelques mots : la plus petite aire, c'est zéro. Mais par quel miracle certaines surfaces pourraient-elles avoir une aire égale à zéro ? La représentation mentale de telles figures est un défi à l'imagination car rien ne semble plus paradoxal qu'une surface qui serait dépourvue d'aire.

Que devient ce problème de Kakeya en dimension supérieure ?

Ces cheminements historiques et mathématiques, à partir d'une petite aiguille, pourraient être simplement badins mais ils parviennent à établir, en fin d'ouvrage, des connexions avec de grandes questions mathématiques actuelles comme les progressions arithmétiques dans les nombres premiers et l'hypothèse de Riemann.

En cheminant avec Kakeya est, de fil en aiguille, un voyage richement illustré à ne pas manquer.

En téléchargement libre et gratuit sur la page : http://math.univ-lyon1.fr/~borrelli/Kakeya.html