Fiches - Problèmes

J. Lubczanski

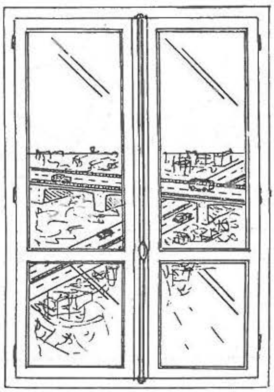
Les problèmes qui suivent sont des problèmes de "modélisation" où les mathématiques apparaissent comme un outil efficace.

Il n'y a pas de mode d'emploi particulier ; j'indique simplement la façon dont je travaille : ces problèmes sont les "devoirs à la maison", mais on commence à les chercher en classe, en présence du professeur. La règle que j'impose est : "pas de questions pendant la première heure", car il faut à mon avis avoir fréquenté seul un problème, au début. Passée la première heure, je suis par contre le plus disponible possible et j'interviens le plus souvent individuellement.

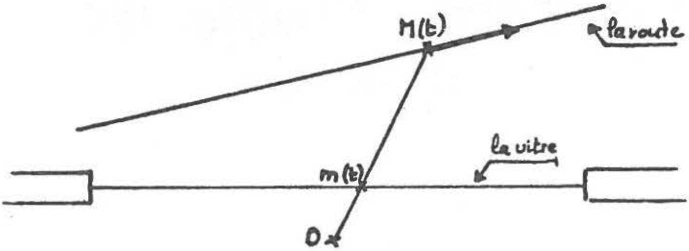
Après ces deux ou trois heures de recherche en classe, chaque élève dispose d'une semaine pour rédiger son travail. Je n'exige pas que le problème soit terminé, mais le goût de "l'ouvrage bien fait" pousse beaucoup d'élèves à essayer de terminer, ce que j'apprécie. Les copies ne sont pas notées.

J'ajouterai que le côté "concret" plait : "on voit enfin à quoi ça peut servir, les maths !".

PAR LA FENÊTRE...



Une auto roule à vitesse constante. Vous la voyez par la fenêtre ; soit, vue de dessus :

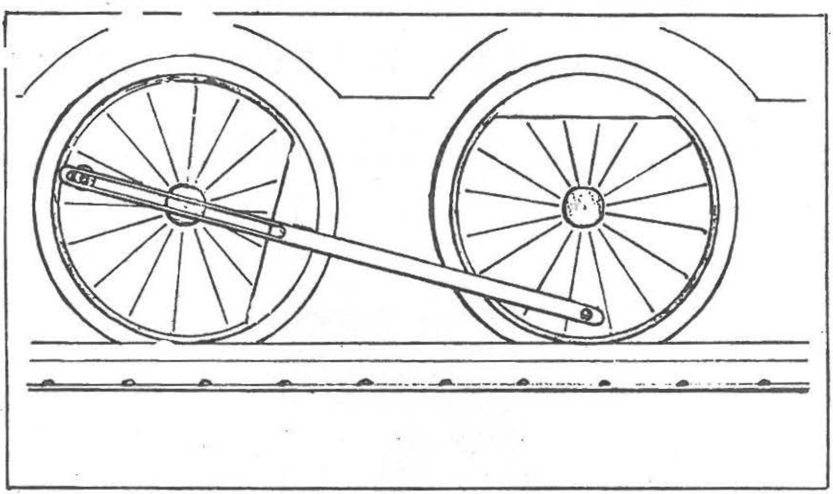


Vous êtes au point 0 ; m(t) est la position apparente de l'auto, dont la position réelle est M(t) . Calculer, en fonction du temps, la vitesse apparente de l'auto, c'est-à-dire v(t) , la vitesse de m(t) . (On introduira les paramètres nécessaires sous forme littérale).

Tracer la courbe représentative de $t \to v(t)$, pour un exemple numérique.

A PROPOS DE TRAINS...

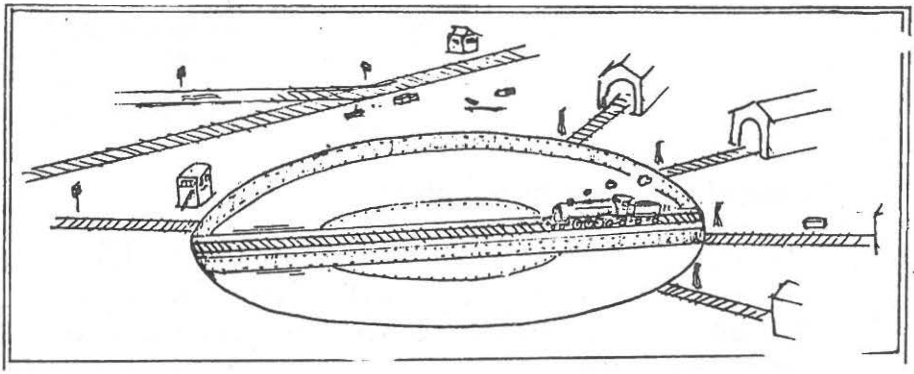
a)



Cet embiellage de locomotive peut-il fonctionner ?

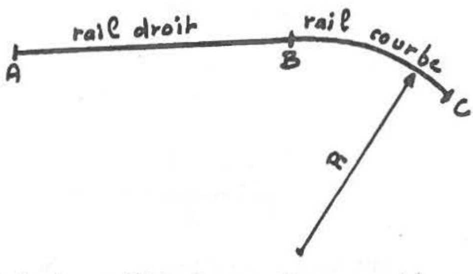
b) Il n'y a rien à faire : Dédé refuse toujours d'immobiliser sa machine pendant la manœuvre du pont tournant !

Quelle est la trajectoire de sa locomotive ?



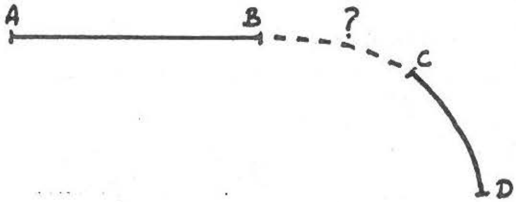
RACCORDEMENT DE VOIES FERRÉES

Si dans les boîtes de trains électrique miniatures, on ne dispose le plus souvent que de "rails droits" et de "rails courbes" pour construire un réseau, il n'en est pas de même pour les trains réels ; en effet, un raccordement direct comme dessiné ci-contre est impossible car un train arrivant de A à grande vitesse serait "instantanément" soumis au point B à une force centrifuge importante et dangereuse pour la stabilité du train et des voyageurs !



Pour compenser les effets de la force d'inertie centrifuge, on donne d'ailleurs à la voie un "dévers" (virage relevé), fonction du rayon de courbure.
Mais ce dévers lui non plus ne peut être instauré brutalement au point B.

Le problème est donc le suivant :



AB est une portion de voie droite.
CD est une portion de voie circulaire.

Il faut trouver une courbe joignant B et C de façon que la force centrifuge s'établisse progressivement.

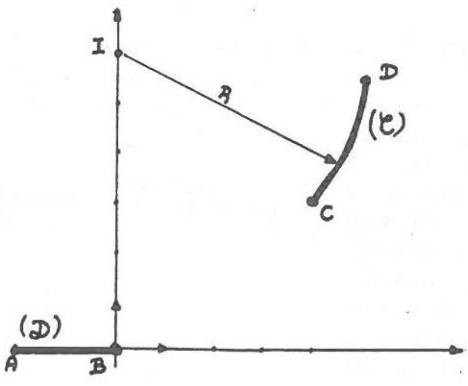
I. Première approche du problème

Dans un repère orthonormé, on donne $B\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$ et $I\begin{pmatrix}0\\6\end{pmatrix}$.
On note $(\mathcal{D})$ la droite $y=0$ et $(\mathcal{C})$ le cercle de centre I passant par C.

De combien de façons peut-on raccorder la portion rectiligne AB et la portion circulaire CD :

a) par un segment de droite (Γ_1) ?
b) par un segment (Γ_2) de parabole d'axe vertical ?
c) par un segment (Γ_3) de cubique (avec une équation du type

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d) ?$$



Dans les cas où plusieurs courbes sont possibles, l'une d'entre elles vous semble-t-elle plus apte à répondre au problème posé ? Pourquoi ?

On donnera l'équation de chaque courbe (Γ_i) proposée et on les dessinera.

II. Notion de contact d'ordre n

Définition :

On dit que deux courbes, représentatives de deux fonctions f et g, ont un contact d'ordre n au point d'abscisse x_0 si :

— f et g sont dérivables n fois au point x_0

— on a $f(x_0)=g(x_0)$; $f'(x_0)=g'(x_0)$; ... $f^{(n)}(x_0)=g^{(n)}(x_0)$.

Remarque :

— un contact d'ordre 0 signifie un "raccordement"

— un contact d'ordre 1 signifie un raccordement avec des tangentes qui coïncident.

On se propose de calculer l'ordre des contacts des courbes (Γ_i) du paragraphe I avec ($\mathcal{D}$) au point B, et avec ($\mathcal{C}$) au point C.

Pour cela :

a) déterminer la fonction g dont l'arc $\overset{\frown}{CD}$ est une représentation ;

b) pour chacune des courbes (Γ_i), calculer l'ordre des contacts avec ($\mathcal{D}$) en B et avec ($\mathcal{C}$) en C ;

c) dans chacun des cas b) et c) du paragraphe I, pouvait-on avoir un "meilleur" contact (c'est-à-dire avoir n plus grand) en B ? en C ? à la fois en B et en C ? Quelle courbe vous semble-t-elle à présent le mieux répondre au problème ?

III. Notion de rayon de courbure

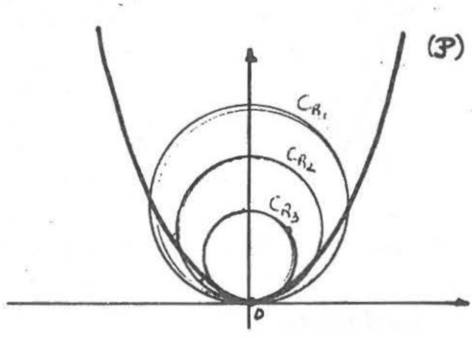
Considérons la parabole ($\mathcal{P}$) d'équation : $2py=x^2$ dans un repère orthonormé ($p \in \mathbf{R}$). Son allure est représentée ci-dessous.

Il existe une infinité — disons plutôt une "famille" — $(C_R)_{R\in\mathbf{R}}$ de cercles de rayon R tangents à la parabole ($\mathcal{P}$) en son sommet 0 (contact d'ordre 1).

a) Etablir l'équation d'un cercle C_R.

b) Quelle fonction g_R est représentée par le demi-cercle inférieur de C_R ?

c) Montrer qu'il existe un rayon R_0 pour lequel le contact de ($\mathcal{P}$) et de C_{R_0} en 0 est d'ordre 2.



Calculer R_0 en fonction de p .
R_0 s'appelle le *rayon de courbure* de ($\mathcal{P}$) en 0 (et C_{R_0} le *cercle osculateur* de ($\mathcal{P}$) en 0).

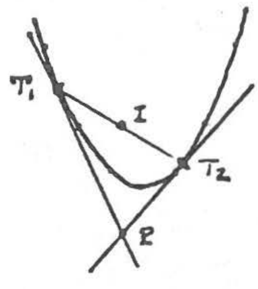
d) *Revenons à notre problème de raccordement entre ($\mathcal{D}$) et ($\mathcal{C}$) :* existe-t-il une parabole dont ($\mathcal{C}$) est le cercle osculateur, et passant par B ? Montrer que, si on accepte que le raccordement avec ($\mathcal{C}$) se fasse en un aute point que C, un segment de parabole peut réaliser ce raccordement avec un contact d'ordre 2 avec ($\mathcal{C}$). Quel est alors l'ordre du contact avec ($\mathcal{D}$) en B ? (indication : toutes les paraboles ne sont pas d'axe vertical !...)

Obtient-on de nouvelles solutions à notre problème ?

IV. Une propriété géométrique de la parabole

Elargissons le problème : cherchons, géométriquement, une parabole (d'axe oblique) passant par B et C, et tangente en ces points à AB et CD : autrement dit, la question est de trouver une parabole passant par deux points donnés avec deux tangentes données.

a) Soit T_1 et T_2 deux points d'une parabole P et I le milieu de $[T_1,T_2]$. Si P est le point d'intersection des tangentes à($\mathcal{P}$)en T_1 et T_2, montrer, en utilisant un repère adapté, que PI est parallèle à l'axe de la parabole P.



b) En déduire, T_1, T_2 et($\mathcal{P}$)étant donnés, la construction géométrique du foyer et de la directrice d'une parabole($\mathcal{P}$), tangente à T_1P en T_1 et à T_2P en T_2.

c) Application à notre problème de raccordement : tracé et équation d'une parabole ayant en B et en C un contact d'ordre 1 avec AB et CD.

d) Comparer la solution obtenue avec celle(s) du III.d).

V. Conclusions

Un segment de parabole peut-il convenir ? à quelles conditions ? et un segment de cubique ?

GARDEZ VOS DISTANCES !

Lorsque deux voitures roulent l'une derrière l'autre, la sécurité exige de conserver entre elles une distance minimale, en cas de freinage brusque de la voiture de tête. Mais quelle distance ? Comment la calculer ?

Et si on observe cet écart minimal, cette "distance de sécurité", ne risque-t-on pas de ralentir le trafic ? De créer des bouchons eux aussi nuisibles à la sécurité ?

C'est à ces questions qu'on va proposer ici des réponses...

I. Etude du freinage d'une auto

La situation est la suivante :

— à l'instant $t=-5$, un véhicule roule, en ligne droite, à la vitesse uniforme v ,

— à l'instant $t=0$, le conducteur freine,

— à l'instant $t=a$, le véhicule s'arrête et reste immobile jusqu'à l'instant $t=a+5$.

On recherche la loi horaire du véhicule pendant le freinage, c'est-à-dire la position $x(t)$ du véhicule à l'instant t , pour $t \in [0,a]$.

Le modèle qu'on va établir sera plus près de la réalité si la position x , la vitesse x' et l'accélération x'' sont des fonctions dérivables sur l'intervalle $[-5,a+5]$.

1. a) Combien valent x', x'' et x''' pour $-5<t<0$? pour $a<t\leqslant a+5$?

b) En déduire les valeurs que doivent prendre ces fonctions en $t=0$ et $t=a$ pour que x, x' et x'' soient dérivables sur $[-5,a+5]$.

> ***Le théorème fondamental :***
>
> Si f est un polynôme,
>
> $$f(a) = 0 \iff \exists P \text{ polynôme tel que } \forall t,\ f(t)=(t-a)\,P(t)\ .$$

2. On va chercher une expression polynomiale pour $x(t)$ (et donc aussi pour ses dérivées).

a) Montrer, en utilisant les valeurs de x', x'' et x''' pour $t=a$, que x' est de la forme : $x'(t)=(t-a)^3\,R(t)$ où R est un polynôme.

b) Montrer, en utilisant les valeurs de x', x'' et x''' pour $t=0$ qu'on peut prendre pour R un polynôme du second degré dont on déterminera les coefficients en fonction de a et v .

3. a) Etablir l'expression de $x(t)$ et en déduire que la distance de freinage d vaut $\dfrac{va}{2}$.

b) Montrer que x'' se factorise sous la forme $x''(t) = -\frac{30v}{a^5}t^2(t-a)^2$.

On note γ la décélération maximale au cours du freinage (γ est le maximum de $-x''$ sur $[0,a]$).
Calculer γ en fonction de v et a .

4. *Application numérique*

a) Dresser un tableau des valeurs de d pour des valeurs de v allant de 30 à 135 km/h, de 15 en 15 km/h et pour a allant de 1 à 8 s.

b) Dresser le tableau correspondant des valeurs, en kgf, de la force maximale $m\gamma$ s'exerçant sur un passager de la voiture au cours du freinage (on prendra $m = 70$ kg et $g = 9{,}81$). Qu'observe-t-on ?

c) Quelle est la valeur minimale du "coefficient de freinage" a/v pour que cette force soit inférieure au poids du passager ?

II. Distance de freinage et distance de sécurité

On pose $C = \frac{a}{v}$ (v en m/s ; a en secondes), coefficient de freinage d'un véhicule : s'il roule à la vitesse v , il lui faut un temps a pour s'arrêter. On suppose C constant pour un véhicule donné. On utilise le modèle de la partie I.

a) *Distance de freinage* :
— exprimer la distance de freinage d en fonction de C et v ;
— calculer C pour les données $v = 90$ km/h et $d = 75$ m ;
— tracer la courbe $v \to d$ pour $v \in [0,50]$.

b) *Distance de sécurité* : Deux véhicules, de coefficients de freinage C_1 et C_2, roulent à la vitesse uniforme v sur une autoroute, l'un derrière l'autre, à la distance D.

On va chercher les conditions sur D pour qu'il n'y ait pas collision au cas où le premier véhicule freine brusquement.

On prend $t = 0$ au moment où le premier véhicule commence à freiner.

— Quelle est, en fonction de C_1 et v , la distance d_1 parcourue par le premier véhicule entre l'instant $t = 0$ et l'instant où il s'immobilise ?

— Soit t_0 le temps de réaction du conducteur du deuxième véhicule (il commence à freiner à l'instant t_0).
Quelle est, en fonction de C_2, v et t_0 , la distance d_2 parcourue par le second véhicule entre l'instant $t = 0$ et l'instant où il s'immobilise ?

— Quelle relation doit-il y avoir entre D, C_1, C_2, t_0 et v pour qu'il n'y ait pas collision ? Et pour être à 3 m l'un de l'autre après immobilisation ?

— On suppose $t_0 = 1/3$ s. En outre les coefficients de freinage des différents véhicules en circulation sont voisins : on prendra $\|C_1 - C_2\| \leqslant \frac{1}{150}$.

En tenant compte de la distance de 3 m après immobilisation, donner l'expression de la distance minimale ("distance de sécurité") en fonction de v.

— Tracer la courbe $v \to D$ pour $v \in [0,50]$.

III. Densité critique du trafic

Soit une autoroute sur laquelle tous les véhicules roulent à la vitesse v, en respectant la distance de sécurité D.

D vérifie :

$$D = 3 + \frac{v}{3} + \frac{v^2}{300}.$$

a) Quel est, en fonction de v, le temps séparant le passage de deux véhicules au même endroit ?

Calculer, en fonction de v, le débit δ (nombre de véhicules par heure) à un endroit donné.

Etudier et tracer la courbe $v \to \delta$ pour $v \in [0,50]$.

b) Analyser et interpréter les résultats du 1) : caractériser graphiquement les situations non "embouteillées" ; y a-t-il une vitesse où le trafic est plus fluide ?

Quels conseils donneriez-vous aux automobilistes ?

Solution

I. Etude du freinage d'une auto

1. a) *Valeurs de x', x'' et x''' avant et après le freinage*

Pour $-5 \leqslant t < 0$, le mouvement est rectiligne uniforme : $x'(t) = v$; $x''(t) = 0$. Quant à x''', dérivée de x'', elle est également nulle.

Pour $a < t \leqslant a+5$, il en est de même, mais la vitesse aussi est nulle :

$$x'(t) = x''(t) = x'''(t) = 0.$$

b) *Valeurs de x', x'' et x''' aux bornes*

En $t=0$: x'' doit être dérivable à droite et à gauche de 0, et $x'''(0^+)$ doit être égal à $x'''(0^-)$ pour que x'' soit dérivable en 0 (en d'autres termes les demi-tangentes doivent coïncider). Or x'' est nulle et donc de dérivée nulle à gauche de 0 (c'est-à-dire pour les valeurs négatives de t).

On doit donc avoir $x'''(0) = 0$.

Le même raisonnement, appliqué à x' et à x donne : $x'(0) = v$
$x''(0) = 0$

En $t = a$: de la même façon, on doit avoir $x'(a) = x''(a) = x'''(0) = 0$.

2. a) *Factorisation de x'*

$x'(a)=0 \Rightarrow \exists P$ polynôme tel que $x'(t)=(t-a)P(t)$

alors $x''(t)=(t-a)\,P'(t)+P(t)$

$x''(a)=0 \Rightarrow P(a)=0 \Rightarrow \exists Q$ polynôme tel que $P(t)=(t-a)\,Q(t)$

soit $x'(t)=(t-a)^2\,Q(t)$

ce qui donne : $x''(t)=2(t-a)Q(t)+(t-a)^2Q'(t)$

et
$$\begin{aligned} x'''(t) &= 2Q(t)+2(t-a)Q'(t)+2(t-a)Q'(t)+(t-a)^2Q''(t) \\ &= 2Q(t)+4(t-a)Q'(t)+(t-a)^2Q''(t) \end{aligned}$$

$x'''(a)=0 \Rightarrow Q(a)=0 \Rightarrow \exists R$ polynôme tel que $Q(t)=(t-a)\,R(t)$

soit finalement :

$$x'(t)=(t-a)^3\,R(t)$$

b) *Expression de x'*

Partant de $x'(t)=(t-a)^3\,R(t)$ on obtient successivement :

$$\begin{aligned} x''(t) &= 3(t-a)^2\,R(t)+(t-a)^3\,R'(t) \\ x'''(t) &= 6(t-a)\,R(t)+6(t-a)^2\,R'(t)+(t-a)^3\,R''(t) \end{aligned}$$

Faisant $t=0$ dans les expressions de x', x'' et x''', on trouve :

$$\begin{aligned} x'(0)=v &\iff -a^3\,R(0)=v \\ x''(0)=0 &\iff 3a^2\,R(0)-a^3\,R'(0)=0 \\ x'''(0)=0 &\iff -6a\,R(0)+6a^2\,R'(0)-a^3\,R''(0)=0 \end{aligned}$$

D'où : $R(0)=-\dfrac{v}{a^3}$ puis $R'(0)=-\dfrac{3v}{a^4}$ et enfin $R''(0)=-\dfrac{12v}{a^5}$

On peut alors prendre pour R un polynôme du second degré :

$$R(t)=\alpha t^2+\beta t+\gamma \Rightarrow R(0)=\gamma \;;\; R'(0)=\beta \text{ et } R''(0)=2\alpha .$$

On en tire : $$R(t) = -\frac{6v}{a^5}t^2-\frac{3v}{a^4}t-\frac{v}{a^3}$$

ou encore : $$R(t) = -\frac{v}{a^5}(6t^2+3at+a^2)$$

3. a) *Expression de x*

On va chercher la primitive de $x'(t)$ qui vaut 0 pour $t=0$.

$$\begin{aligned} x'(t) &= -\frac{v}{a^5}(t-a)^3(6t^2+3at+a^2) \\ &= -\frac{v}{a^5}(t^3-3at^2+3a^2t-a^3)(6t^2+3at+a^2) \end{aligned}$$

soit après développement :

$$x'(t) = -\frac{v}{a^5}(6t^5-15at^4+10a^2t^3-a^5)$$

on en tire alors $x(t)$:

$$x(t) = \frac{v}{a^5}\left(-t^6 + 3at^5 - \frac{5}{2}a^2t^4 + a^5t\right)$$

La distance de freinage s'obtient en calculant $x(a)$:

$$d = \frac{v}{a^5}\left(-a^6 + 3a^6 - \frac{5}{2}a^6 + a^6\right) = \frac{v}{a^5} \times \frac{a^6}{2} \qquad \text{d'où} \qquad d = \frac{av}{2}$$

b) *Expression factorisé de* x''

La dérivation de x' donne : $x''(t) = -\dfrac{v}{a^5}\left[(t-a)^3(6t^2+3at+a^2)\right]'$

Soit :

$$x''(t) = -\frac{v}{a^5}\left[3(t-a)^2(6t^2+3at+a^2) + (t-a)^3(12t+3a)\right]$$

$$= -\frac{v}{a^5}.3(t-a)^2\underbrace{[6t^2+3at+a^2+(t-a)(4t+a)]}_{10t^2} = -\frac{30v}{a^5}t^2(t-a)^2$$

Donc $-x''(t) = \dfrac{30v}{a^5}t^2(t-a)^2$ donne la décélération à l'instant t .

Les variations de cette fonction sont celles de $t \to t^2(t-a)^2$.

$$[t^2(t-a)^2]' = 2t(t-a)^2 + 2t^2(t-a) = \underbrace{2t(t-a)}_{<0 \text{ sur }]0,a[}(2t-a) \quad \text{du signe de} \quad a-2t$$

t	0		$a/2$		a
$-x'''$	0	$+$	0	$-$	0
$-x''$	0		γ		0

On en déduit que $-x''$ prend son maximum pour $t = a/2$.
Le calcul donne alors :

$$\gamma = \frac{15}{8} \cdot \frac{v}{a}$$

4. *Application numérique*

Voici un programme de calcul des valeurs de d :

```
10 : FOR V=30 TO 135 STEP 15
20 : FOR A=1 TO 8
30 : PRINT INT (A*V / 7.2)
40 : NEXT A
50 : NEXT V
60 : END
```

Si v est en km/h, $d = \dfrac{av}{2 \times 3,6}$

Ce programme remplit le tableau colonne par colonne.

Distance de freinage

Durée en s.	Vitesse en km/h 30	45	60	75	90	105	120	135
1	4	6	8	10	12	14	16	18
2	8	12	16	20	25	29	33	37
3	12	18	25	31	37	43	50	56
4	16	25	33	41	50	58	66	75
5	20	31	41	52	62	72	83	93
6	25	37	50	62	75	87	100	112
7	29	43	58	72	87	102	116	131
8	33	50	66	83	100	116	133	150

Force exercée sur le passager

Si v est en km/h, on aura γ en m.s^{-2} par $\gamma = \frac{15}{8} \cdot \frac{v}{3,6}\ \frac{1}{a} = \frac{15}{28,8}\ \frac{v}{a}$

Alors la force, en N, vaut $\frac{15}{28,8}.70.\frac{v}{a} = \frac{1050}{28,8} \cdot \frac{v}{a}$

et donc en kg.f : $\frac{1050}{28,8} \cdot \frac{1}{9,81} \cdot \frac{v}{a} = \frac{1050}{282,528} \cdot \frac{v}{a}$

D'où le programme de calcul de F :

```
10 : K=1050 / 282.528
20 : FOR A=1 TO 8
30 : FOR V=30 TO 135 STEP 15
40 : PRINT INT (K*V/A)
50 : NEXT V
60 : NEXT A
70 : END.
```

Ce programme remplit le tableau ligne par ligne

Force maximale au cours du freinage pour un passager de 70 kg (en-dessous du pointillé, les valeurs supérieures au poids du passager)

Durée en s.	Vitesse en km/h 30	45	60	75	90	105	120	135
1	111	167	220	278	334	390	445	501
2	55	83	111	139	167	195	222	250
3	37	55	74	92	111	130	148	167
4	27	41	55	69	83	97	111	125
5	22	33	44	55	66	78	89	100
6	18	27	37	46	55	65	74	83
7	15	23	31	39	47	55	63	71
8	13	20	27	34	41	48	55	62

Observations :

Comme on pouvait s'y attendre, plus le freinage est bref, plus la force exercée est forte. Ce qui fait que même si, par exemple, une voiture pouvait passer de 90 km/h à l'arrêt en 2 secondes, la force de 167 kg.f qui en résulterait serait dangereuse pour le passager.

Dans tous les cas, une conclusion s'impose : la ceinture de sécurité peut limiter les dégâts.

c) *Coefficient de freinage minimal*

Si on impose — à titre indicatif — comme valeur maximale à la force celle du poids du passager (ce qui équivaut tout de même à une chute dans le vide... vers l'avant de la voiture), on a :

$$\gamma \leqslant g \iff \frac{15v}{8a} \leqslant 9{,}81 \iff \frac{a}{v} \geqslant \frac{15}{8 \times 9{,}81} \simeq 0{,}19$$

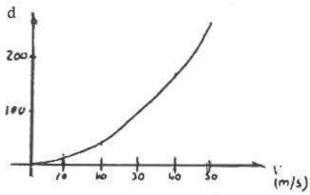
(v en m/s)

II. Distance de freinage à distance de sécurité

1. *Distance de freinage*

a) D'après le modèle de la partie I, $d = \frac{av}{2}$.

Alors $C = \frac{a}{v} \Rightarrow a = vC \Rightarrow d = C\,\frac{v^2}{2}$



b) Calcul numérique : si $d_0 = 75$ et $v_0 = 25$,

$$\left.\begin{array}{l} d_0 = C\,\dfrac{v_0^2}{2} \\ d = C\,\dfrac{v^2}{2} \end{array}\right. \Rightarrow d = d_0\left(\frac{v}{v_0}\right)^2 = 0{,}12\ v^2$$

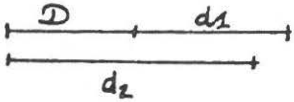
ce qui donne $C = 0{,}24$.

c) Courbe représentative : c'est un arc de parabole : à une vitesse double correspond une distance quadruple...

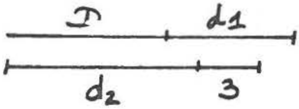
2. *Distance de sécurité*

a) On a $d_1 = C_1\,\frac{v^2}{2}$.

b) Quant à d_2, il est donné par $v.t_0 + C_2\,\frac{v^2}{2}$

c) 

Pour qu'il n'y ait pas collision, il faut que $D+d_1>d_2$



Pour qu'il y ait plus de 3 m après immobilisation des véhicules, il faut que $D+d_1>d_2+3$, soit

$$D>d_2-d_1+3=\frac{v^2}{2}\,(C_2-C_1)+vt_0+3$$

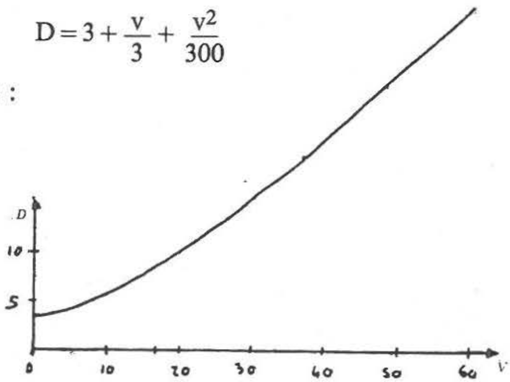
d) $t_0=1/3$ s $\Rightarrow D>\frac{v^2}{2}(C_2-C_1)+\frac{v}{3}+3$

La distance minimale est donc donnée par : $D=3+\frac{v}{3}+\frac{v^2}{2}(C_2-C_1)$.

Si $(C_2-C_1)\geqslant\frac{1}{130}$, l'inégalité sera vérifiée dès que

$$D=3+\frac{v}{3}+\frac{v^2}{300}$$

e) Courbe représentative :



III. Densité critique du trafic

1. a) *Temps de passage entre deux véhicules*

$$t=\frac{D}{v}=\frac{3}{v}+\frac{1}{3}+\frac{v}{300}$$

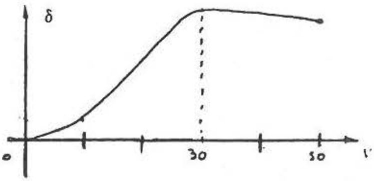
b) *Débit de véhicules*

$$\delta=\frac{3600}{t}=\frac{3600}{\frac{3}{v}+\frac{1}{3}+\frac{v}{300}}=\frac{1\ 080\ 000\ v}{v^2+100v+900}$$

c) *Etude et tracé de* $v\to\delta$: les variations de δ sont inverses de celles de t

$$\frac{dt}{dv}=-\frac{3}{v^2}+\frac{1}{300}=\frac{1}{300\ v^2}\,(v^2-900)$$

v	0		30		50
t	$\|$	$\searrow$	$\frac{16}{30}$	$\nearrow$	$\frac{14}{24}$
δ	0	$\nearrow$	6750	$\searrow$	$\simeq 6430$



2. *Interprétation*

Tant que le débit est inférieur à δ, le trafic est fluide ; mais dès que, pour une vitesse donnée v du trafic, le débit est supérieur à $\delta(v)$, la distance de sécurité ne peut plus être respectée : au premier coup de frein, ça bouchonne...

UN EXEMPLE DE LA THÉORIE DES CATASTROPHES*

Le but de cette activité est de montrer comment des phénomènes discontinus ("catastrophes") peuvent provenir d'une évolution parfaitement régulière.

Pour cela, on va traiter un exemple en géologie ; on va représenter le relief en coupe d'une vallée, en tenant compte de son évolution en fonction du temps : si t désigne le temps, on supposera que la courbe (C_t), représentative de la fonction :

$$x \to F_t(x) = tx + (x^2 - 3)^2$$

où $F_t(x)$ désigne l'altitude d'un point de la vallée en fonction de sa position x dans le plan où on trace le relief en coupe, est un modèle acceptable de la réalité physique.

I. Représentations graphiques de la vallée

On se propose dans cette partie de dessiner le relief de la vallée à des époques différentes : on va prendre comme valeurs pour t les éléments de $E = \{-15; -8; -4; 0; 4; 8; 15\}$.

a) On note F_t' la dérivée de F_t et (C_t') la courbe représentative de F_t' et montrer que toutes les courbes (C_t'), représentatives de F_t', se déduisent de la courbe (C_0') par translation.

b) Tracer (C_0'). En déduire, pour $t \in E$, la résolution approchée de $F_t'(x) = 0$.

---

* Référence : La Recherche, octobre 1977.

Etablir, pour chaque t de E, le tableau des signes de $F_t'(x)$ et le tableau de variation de F_t.

c) Tracer, dans sept repères différents, le relief de la vallée correspondant aux sept valeurs de t dans E.

II. Evolution d'un lac

On suppose que pour $t = -15$, un petit lac s'est formé, dont on va étudier l'évolution.
On note a(t) l'abscisse du fond du lac à la période t et φ la fonction $t \to a$.

1. Dresser un tableau de valeurs approchées de $\varphi(t)$ pour $t \in E$. Dans quels intervalles varie a lorsque t décrit **R** ?

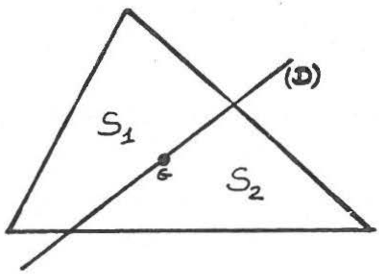
2. Montrer que $t = -4a^3 + 12a$ et représenter cette relation par une courbe. En déduire le tracé de la courbe C′ représentative de la fonction φ. Montrer que (Γ) est une partie de l'image de (C_0') par un quart de tour de centre 0.

3. La fonction φ est-elle continue ? dérivable ?
La fonction $t \to F_t(x)$ est-elle continue ? dérivable ?
Décrire l'évolution du lac en fonction du temps. Des "catastrophes" sont-elles susceptibles d'arriver ?

Echelles conseillées pour les représentations graphiques :
— pour les x : 1 unité = 10 cm
— pour les y : 1 unité = 0,25 cm
— pour les t : 1 unité = 0,5 cm.

POUR COUPER EN DEUX UN TRIANGLE...
...IL SUFFIT DE VISER LE CENTRE !

Le but de ce problème est de montrer que, si (D) est une droite quelconque passant par le "centre de gravité" d'un triangle, les aires des deux régions S_1 et S_2 découpées par (D) sont sensiblement égales.



Définitions et notations

Si A et B sont deux points du plan, on notera [A,B] le segment d'extrémités A et B et, selon l'usage, AB désignera la longueur de ce segment.

Si A, B et C sont trois points du plan, on appellera "triangle ABC" la réunion des segments [A,B], [B,C] et [A,C] ; on notera a(ABC) l'aire de l'intérieur du triangle ABC, et plus généralement a(S) l'aire d'une partie S du plan.

I. Une propriété des médianes

a) Soit ABC un triangle et P un point de [B,C] ; démontrer que

$$\frac{a(ABP)}{a(ABC)} = \frac{BP}{BC}.$$

b) Montrer que, dans un triangle, chaque médiane découpe l'intérieur du triangle en deux parties d'aires égales.

c) Montrer que, dans un triangle, les trois médianes découpent l'intérieur du triangle en six parties d'aires égales.

II. L'outil : un repère cartésien

Soit ABC un triangle et G son "centre de gravité" (c'est-à-dire l'isobarycentre de A, B et C). On va travailler dans le repère $(G, \vec{GC}, \vec{GA})$.

On note D_t la droite de coefficient directeur t passant par G.
P, Q et R désignent, lorsqu'ils existent, les points d'intersection de D_t avec [B,C], [A,C] et [A,B].

a) Discuter selon les valeurs de t l'existence des points P, Q et R.

b) Calculer les coordonnées de A, B, C, P, Q et R.

c) Montrer que si L, M et N sont des points de coordonnées $\begin{pmatrix} x_L \\ y_L \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} x_M \\ y_M \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} x_N \\ y_N \end{pmatrix}$, on a :

$$\text{L, M et N alignés} \Rightarrow \frac{LM}{LN} = \frac{x_M - x_L}{x_N - x_L} = \frac{y_M - y_L}{y_N - y_L}$$

III. Etude du rapport des aires découpées par D_t

(les notations sont celles du II)

Si S_1 et S_2 désignent les deux régions découpées par D_t à l'intérieur du triangle ABC, le rapport de leurs aires dépend de t :
on pose $r(t) = \dfrac{a(S_1)}{a(S_2)}$.

r est donc une fonction définie sur **R**, qu'on va étudier dans cette partie.

a) Montrer que

$$r(t) = \frac{\dfrac{a(S_1)}{a(ABC)}}{1 - \dfrac{a(S_1)}{a(ABC)}} = \frac{1 - \dfrac{a(S_2)}{a(ABC)}}{\dfrac{a(S_2)}{a(ABC)}}$$

Il suffit donc pour connaître $r(t)$ de connaître soit $\dfrac{a(S_1)}{a(ABC)}$, soit $\dfrac{a(S_2)}{a(ABC)}$.

b) *Etude de r pour $t \in [0,1]$* : S_1 désigne l'intérieur du triangle ARQ.

Etablir que $\dfrac{a(S_1)}{a(ABC)} = \dfrac{1}{3}\,\dfrac{a(ARG)}{a(ABG)} + \dfrac{1}{3}\,\dfrac{a(AGQ)}{a(AGC)}$.

Utiliser I.a) et II.c) pour en déduire l'expression de $\dfrac{a(S_1)}{a(ABC)}$, puis de $r(t)$, en fonction de t.

c) *Etude de r pour $t \in [1, +\infty[$* : S_2 désigne l'intérieur du triangle CPQ.

d) *Etude de r pour $t \in]-\infty, 0]$* : S_2 désigne l'intérieur du triangle BRP.

e) Etudier les variations de r, puis tracer la courbe représentative (on aura intérêt à choisir des unités différentes sur les deux axes).

IV. Vers une conclusion

a) Montrer que, lorsque t est une valeur pour laquelle r admet un extremum, D_t est parallèle à l'un des côtés du triangle ABC.

b) Montrer que lorsque $r(t)=1$, D_t est une médiane du triangle ABC. Que peut-on dire de D_t lorsque $t \to +\infty$ et lorsque $t \to -\infty$?

c) Rédiger une conclusion au problème posé initialement.

MODÈLE DÉMOGRAPHIQUE A DEUX DIMENSIONS

Le but de ce problème est de donner, à travers l'étude d'un modèle simplifié, une idée des méthodes mathématiques utilisées en démographie.

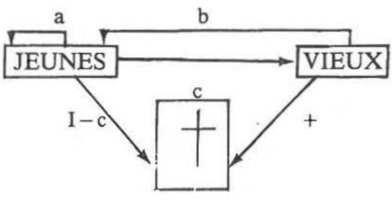
Présentation du modèle mathématique

Pour prévoir l'évolution d'une population à moyen et long terme, on utilise le modèle suivant : la population est divisée en deux classes, les "jeunes" (moins de 40 ans) et les "vieux" (entre 40 et 80 ans), et on étudie les effectifs de chaque classe à intervalles réguliers — tous les quarante ans —.

On note J_0 et V_0 les effectifs à une date initiale et J_n, V_n les effectifs après $40 \times n$ années. On ne tient pas compte de l'effectif des plus de 80 ans.

On suppose qu'en quarante ans :

— tous les "vieux ont disparu ; une proportion c de "jeunes" a survécu, mais vieilli ;
— de nouveaux "jeunes" sont apparus, issus des anciens "jeunes" (avec un taux de natalité a), ou des anciens "vieux" (avec un taux b) .



On a donc les relations :

$J_{n+1}=aJ_n+bV_n$
$V_{n+1}=cJ_n$

a, b et c sont des nombres compris entre 0 et 1. On suppose qu'ils restent constants.

Trois études de cas

Premier cas : $a=0,5$; $b=0,3$; $c=0,8$. J_0 et V_0 sont quelconques.

1. *Exploration numérique et graphique*

Soit M_n le point de coordonnées (J_n, V_n) dans un repère orthonormé. La "trajectoire" d'une population dans ce repère sera la ligne brisée $M_0M_1M_2 \ldots M_n \ldots$

Tracer dans un même repère les trajectoires d'origine M_0 et d'extrémité M_6 dans les quatre cas suivants :

$$M_0(7;3) \; ; \; M_0(5;5) \; ; \; M_0(4;6) \; ; \; M_0(2;8) \, .$$

Quelles observations peut-on faire sur l'évolution de ces populations ?

2. *Etude théorique*

On dira qu'une suite U est "sympa" si

$$\forall n, \; U_{n+2} = 0{,}5 U_{n+1} + 0{,}24 U_n \, .$$

a) Montrer que les suites $(J_n)_{n \in \mathbf{N}}$ et $(V_n)_{n \in \mathbf{N}}$ sont "sympas".

b) Montrer qu'il existe deux suites géométriques G' et G'', de premier terme 1, de raisons t' et t'', et qui soient sympas.

c) Si x et y sont deux nombres, on considère la suite W de terme général $W_n = xt'^n + yt''^n$. Montrer que W est une suite sympa.

d) Pour quelles valeurs de x et y a-t-on $W = J$? (x et y dépendent de J_0 et V_0). En déduire l'expression de J_n en fonction de n , puis son comportement asymptotique.

e) Pour quelles valeurs de x et y a-t-on $W = V$? En déduire l'expression de V_n en fonction de n , puis son comportement asymptotique.

f) Quelle est l'évolution à long terme de la population ? Dépend-elle des effectifs initiaux ? Comment évolue la proportion de "jeunes" et celle des "vieux" ?

Deuxième cas

$$a = 0{,}6 \; ; \; b = 0{,}5 \; ; \; c = 0{,}8.$$

Reprendre les questions 1 et 2 (dans ce cas, une suite U est "sympa" si $\forall n, \; U_{n+2} = 0{,}6 \, U_{n+1} + 0{,}4 \, U_n$).

Troisième cas

$$a = 0{,}8 \; ; \; b = 0{,}6 \; ; \; c = 0{,}8.$$

Reprendre les questions 1 et 2 (dans ce cas, une suite U est "sympa" si $\forall n, \; U_{n+2} = 0{,}8 \, U_{n+1} + 0{,}48 \, U_n$).

(D'après une idée de A. Deledicq dans "Mathématiques buissonnières" Ed. Cedic 1973).

Solution

Première étude de cas (a = 0,5 ; b = 0,3 ; c = 0,8)

1. *Exploration numérique et graphique*

Le calcul des coordonnées des points M_n s'obtient en programmant la calculatrice :

```
10 : INPUT "J=?",J                          donnée de J0
20 : INPUT "V=?",V                          donnée de V0
30 : FOR N=1 TO 6
40 : I=J                                    Jn-1 en mémoire I
50 : J=0.5*J+0.3*V                          Jn en mémoire J
60 : V=0.8*I                                Vn en mémoire V
70 : PRINT (INT(100*J))/100,                arrondit l'affichage à deux
     (INT(100*V))/100                       chiffres
80 : NEXT N
90 : END
```

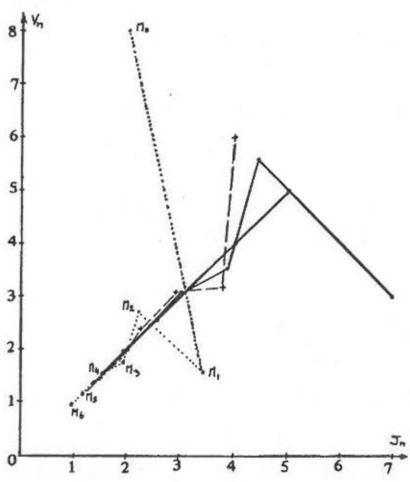
Tableau des résultats :

n	0	1	2	3	4	5	6
J_n	7	4.4	3.88	2.99	2.42	1.93	1.54
V_n	3	5.6	3.52	3.1	2.39	1.94	1.54

n	0	1	2	3	4	5	6
J_n	5	4	3.2	2.56	2.04	1.63	1.31
V_n	5	4	3.2	2.56	2.04	1.63	1.31

J_n	4	3.8	2.86	2.34	1.85	1.49	1.19
V_n	6	3.2	3.04	2.28	1.87	1.48	1.19

J_n	2	3.4	2.18	1.9	1.47	1.19	0.95
V_n	8	1.6	2.72	1.74	1.52	1.18	0.95



Observations :

Malgré des points de départ très différents (mais de même effectif total $J_0 + V_0 = 10$), les quatre trajectoires ont la même allure : elles se rapprochent de l'origine du repère, et en même temps, de la droite $J_n = V_n$.

D'ailleurs, dans les quatre cas, on a à 10^{-2} près $J_6 = V_6$. Quant à l'effectif total, il passe de 10 à une valeur beaucoup plus faible : entre 3.08 et 1.90.

D'un point de vue démographique, on a donc des populations en voie d'extinction, le nombre des "jeunes" et des "vieux" tendant à s'équilibrer.

2. *Etude théorique*

a) $(J_n)_{n\in N}$ et $(V_n)_{n\in N}$ *sont des suites sympas :*

$$\begin{array}{ll} J_{n+1} = 0{,}5J_n + 0{,}3V_n \Rightarrow & J_{n+2} = 0{,}5J_{n+1} + 0{,}3V_{n+1} \\ V_{n+1} = 0{,}8J_n & \phantom{J_{n+2}} = 0{,}5J_{n+1} + 0{,}3(0{,}8J_n) \\ & \phantom{J_{n+2}} = 0{,}5J_{n+1} + 0{,}24J_n \end{array}$$

$(J_n)_{n\in N}$ est donc une suite sympa.

Alors

$$\begin{aligned} V_{n+1} = 0{,}8J_n \Rightarrow V_{n+2} = 0{,}8J_{n+1} &= 0{,}8(0{,}5J_n + 0{,}24J_{n-1}) \\ &= 0{,}5 \times 0{,}8J_n + 0{,}24 \times 0{,}8J_{n-1} \\ &= 0{,}5 \times V_{n+1} + 0{,}24 \times V_n \end{aligned}$$

$(V_n)_{n\in N}$ est donc aussi une suite sympa.

b) *Suites géométriques sympas :*

Cherchons à quelles conditions une suite géométrique G de terme général $G_n = G_0 t^n$ est sympa :

$$\forall n \quad G_0 t^{n+2} = 0{,}5\, G_0 t^{n+1} + 0{,}24\, G_0 t^n$$

soit en supposant G_0 et t non nuls.

$\Longleftrightarrow t^2 = 0{,}5t + 0{,}24$

$\Longleftrightarrow t^2 - 0{,}5t - 0{,}24 = 0$ c'est une équation du second degré en t.

$\Delta = 0{,}5^2 - 4 \times (-0{,}24) = 1{,}21 = 1{,}1^2$ d'où deux racines $t' = 0{,}8$ et $t'' = -0{,}3$.

Les suites G' et G'' de terme général $G'_n = (0{,}8)^n$ et $G''_n = (-0{,}3)^n$ sont donc les deux suites géométriques cherchées.

c) *Suite $W = xG' + yG''$:*

Vérifions que W est sympa :

- $W_{n+2} = x(0{,}8)^{n+2} + y(-0{,}3)^{n+2}$
$= x(0{,}8)^n.(0{,}8)^2 + y(-0{,}3)^n(-0{,}3)^2 = 0{,}64(0{,}8)^n x + 0{,}09(-0{,}3)^n y$
- $0{,}5W_{n+1} + 0{,}24W_n$
$= 0{,}5(0{,}8)^{n+1}x + 0{,}5(-0{,}3)^{n+1}y + 0{,}24(0{,}8)^n x + 0{,}24(-0{,}3)^n y$

$$= (-0{,}8)^n x[0{,}5 \times 0{,}8) + 0{,}24] + (-0{,}3)^n y[0{,}5 \times (-0{,}3) + 0{,}24]$$
$$= 0{,}64(0{,}8)^n x + 0{,}09(-0{,}3)^n y$$

Il y a égalité : W est bien une suite sympa.

d) *Valeurs de x et y telles que $W = J$*

Pour que deux suites sympas soient égales, il suffit que leurs deux premiers termes soient identiques : en effet, supposons que :

$W_0 = J_0$ alors $W_2 = 0{,}5W_1 + 0{,}24W_0 = 0{,}5J_1 + 0{,}24J_0 = J_2$

$W_1 = J_1$ puis $W_3 = 0{,}5W_2 + 0{,}24W_1 = 0{,}5J_2 + 0{,}24J_1 = J_3$

Or $W_n = x(0{,}8)^n + y(-0{,}3)^n$ dont $W_0 = x + y$ et $W_1 = 0{,}8x - 0{,}3y$.

D'autre part, $J_1 = 0{,}5J_0 + 0{,}3V_0$.

On doit donc avoir : $\begin{cases} x + y = J_0 \\ 0{,}8x - 0{,}3y = 0{,}5J_0 + 0{,}3V_0 \end{cases}$

On résout ce système de deux équations à deux inconnues, J_0 et V_0 étant supposés connus :

$$\begin{cases} x + y = J_0 \\ 8x - 3y = 5J_0 + 3V_0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3x + 3y = 3J_0 & \Rightarrow 11x = 8J_0 + 3V_0 \\ 8x - 3y = 5J_0 + 3V_0 & \Rightarrow x = \frac{8}{11}J_0 + \frac{3}{11}V_0 \end{cases}$$

et alors :

$$y = J_0 - x = \frac{3}{11}J_0 - \frac{3}{11}V_0$$

D'où finalement :

$$J_n = \frac{1}{11}[(8J_0 + 3V_0)(0{,}8)^n + 3(J_0 - V_0)(-0{,}3)^n]$$

on a obtenu ainsi la formule de J_n en fonction de n : on peut en déduire son comportement asymptotique :

En effet, quand n tend vers l'infini, $(0{,}8)^n$ tend vers 0 ainsi que $(-0{,}3)^n$: *J converge donc vers 0.*

Cela ne dépend pas des valeurs initiales J_0 et V_0.

e) *Valeurs de x et y telles que $W = V$*

Par le même raisonnement, $W = V \iff W_0 = V_0$ et $W_1 = V_1$

Or $V_1 = 0{,}8J_0$ $\iff \begin{cases} x + y = V_0 \\ 0{,}8x - 0{,}3y = 0{,}8J_0 \end{cases}$

$$\iff \begin{cases} x + y = V_0 \\ 8x - 3y = 8J_0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3x + 3y = 3V_0 & \Rightarrow 11x = 3V_0 + 8J_0 \\ 8x - 3y = 8J_0 & \Rightarrow x = \frac{3}{11}V_0 + \frac{8}{11}J_0 \end{cases}$$

puis
$$y = V_0 - x = \frac{8}{11}V_0 - \frac{8}{11}J_0$$

d'où finalement :

$$V_n = \frac{1}{11}[(8J_0 + 3V_0)(0,8)^n - 8(J_0 - V_0)(-0,3)^n]$$

De la même façon que pour J_n, *V_n converge vers 0.*

f) *Evolution de la population à long terme*

L'effectif total est $J_n + V_n$: il converge donc vers 0 : la population est en voie d'extinction.

Cela ne dépend pas des valeurs de J_0 et V_0, puisque cela provient des valeurs 0,8 et $-0,3$ et de l'existence (mais pas de la valeur) de x et y.

D'ailleurs, si on calcule l'effectif total $P_n = J_n + V_n$, on obtient :

$$P_n = \frac{2}{11}(8J_0 + 3V_0).(0,8)^n - \frac{5}{11}(J_0 - V_0)(-0,3)^n$$

(P_n est donc elle-même une suite géométrique de raison 0,8, lorsque $J_0 = V_0$).

Pour étudier comment évolue la proportion des "jeunes" et la proportion des "vieux", étudions le rapport $\frac{J_n}{V_n}$.

$$\frac{J_n}{V_n} = \frac{(8J_0 + 3V_0)(0,8)^n + 3(J_0 - V_0)(-0,3)^n}{(8J_0 + 3V_0)(0,8)^n - 8(J_0 - V_0)(-0,3)^n}$$ divisons numérateur et dénominateur par $(0,8)^n$

$$= \frac{8J_0 + 3V_0 + 3(J_0 - V_0)(-\frac{3}{8})^n}{8J_0 + 3V_0 - 8(J_0 - V_0)(-\frac{3}{8})^n}$$ $-\frac{3}{8}$ est compris entre -1 et 1 : $(-\frac{3}{8})^n \to 0$

$\frac{J_n}{V_n}$ converge donc vers le rapport $\frac{8J_0 + 3V_0}{8J_0 + 3V_0}$ c'est-à-dire ... 1.

L'effectif des "jeunes" et celui des "vieux" tendent à s'équilibrer.

On a bien retrouvé par l'étude théorique — et prouvé ! — les observations qu'on avait pu faire à la suite de l'exploration numérique et graphique (en particulier, on peut remarquer sur l'expression de J_n et V_n en fonction de n que lorsque $J_0 = V_0$, on a $\forall n$, $J_n = V_n$).

Deuxième étude de cas ($a = 0,6$; $b = 0,5$; $c = 0,8$)

1. *Exploration numérique et graphique*

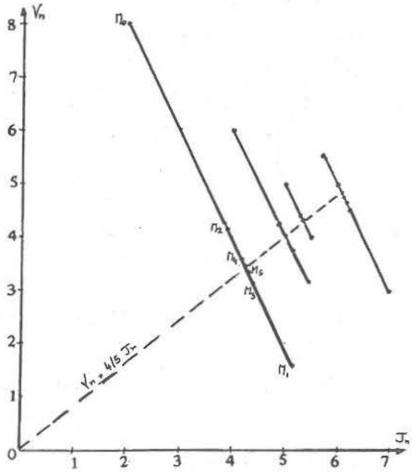
Il suffit de changer les valeurs de a et b dans le programme de calcul des coordonnées de M_n pour obtenir le tableau des résultats :

n	0	1	2	3	4	5	6
J_n	7	5.7	6.22	6.01	6.09	6.06	6.07
V_n	3	5.6	4.56	4.97	4.8	4.87	4.84

n	0	1	2	3	4	5	6
J_n	5	5.5	5.3	5.38	5.34	5.36	5.35
V_n	5	4	4.4	4.24	4.3	4.27	4.28

J_n	4	5.4	4.84	5.06	4.97	5.01	4.99
V_n	6	3.2	4.32	3.87	4.05	3.97	4

J_n	2	5.2	3.92	4.43	4.22	4.3	4.27
V_n	8	1.6	4.16	3.13	3.54	3.38	3.44



Observations :

L'allure des trajectoires est encore semblable pour les quatre points de départ, et très différente des cas précédents :

Les sept points M_n sont alignés sur une droite de pente 2.
Les quatre points M_6 sont à 10^{-2} près alignés sur la droite

$$V_n = \frac{4}{5} J_n$$

Les trajectoires se rapprochent donc de cette droite.
L'effectif total de la population oscille puis se stabilise à des valeurs allant de 8,71 à 10,91.

En termes démographiques, ces populations ont tendance à se stabiliser aussi bien en effectif qu'en proportion de "jeunes" et de "vieux".

2. *Etude théorique*

On ne va reprendre ici que les différences significatives avec la première étude de cas :

a) $(J_n)_{n \in \mathbf{N}}$ et $(V_n)_{n \in \mathbf{N}}$ sont encore des suites "sympas" mais cela signifie ici qu'on a :

$$\forall n,\ J_{n+2} = 0{,}6 J_{n+1} + 0{,}4 J_n \quad \text{et} \quad V_{n+2} = 0{,}6 V_{n+1} + 0{,}4 V_n$$

b) *Suites géométriques sympas :*

La raison t doit vérifier $t^{n+2} = 0,6t^{n+1} + 0,4t^n$ soit si $t \neq 0$, $t^2 - 0,6t - 0,4 = 0$

$\Delta = (0,6)^2 - 4(-0,4) = 0,36 + 1,6 = 1,96 = 1,4^2$ d'où deux racines $t' = 1$ et $t'' = -0,4$.

Les deux suites G′ et G″ ont donc pour terme général $G'_n = 1$ et $G''_n = (-0,4)^n$. (G′ est une suite stationnaire).

c) *Expression de J_n en fonction de n :*

Si $W_n = x + y(-0,4)^n$, $W = J \iff \begin{cases} x + y = J_0 \\ x - 0,4y = 0,6J_0 + 0,5V_0 \end{cases}$

$$\iff \begin{cases} x + y = J_0 \\ 10x - 4y = 6J_0 + 5V_0 \end{cases} \iff \begin{cases} 4x + 4y = 4J_0 \\ 10x - 4y = 6J_0 + 5V_0 \end{cases} \begin{matrix} \Rightarrow 14x = 10J_0 + 5V_0 \\ \Rightarrow x = \frac{10}{14} J_0 + \frac{5}{14} V_0 \end{matrix}$$

puis $$j = J_0 - x = \frac{4}{14} J_0 - \frac{5}{14} V_0$$

d'où $$J_n = \frac{1}{14} [5(2J_0 + V_0) + (4J_0 - 5V_0)(-0,4)^n]$$

$(0,4)^n$ converge vers 0 donc $(J_n)_{n \in N}$ converge vers $\frac{5}{14}(2J_0 + V_0)$

d) *Comportement asymptotique de V_n :*

On n'a pas besoin ici d'utiliser la suite W : en effet, $V_n = 0,8J_{n-1}$. $(J_{n-1})_{n \in N^*}$ est une suite convergente de limite $\frac{5}{14}(2J_0 + V_0)$ donc $(V_n)_{n \in N}$ est une suite convergente de limite

$$0,8 \times \frac{5}{14}(2J_0 + V_0) = \frac{2}{7}(2J_0 + V_0) .$$

e) *Evolution à long terme de la population :*

• L'effectif total $P_n = J_n + V_n$ converge vers

$$\left(\frac{5}{14} + \frac{2}{7}\right)(2J_0 + V_0) = \frac{9}{14}(2J_0 + V_0)$$

soit en remplaçant $J_0 + V_0$ par l'effectif total initial P_0: $\frac{9}{14}(P_0 + J_0)$.

Donc plus il y aura de "jeunes" au départ (c'est-à-dire plus J_0 sera grand), plus la limite sera grande ; par exemple, pour que la limite soit égale à P_0, il faut que $J_0 = \frac{5}{9}P_0$; mais si $J_0 = 2/3P_0$, la limite sera $\frac{15}{14} P_0$. (Toutefois, la limite ne peut pas être supérieure à $\frac{9}{7}P_0$, cas extrême où il n'y aurait que des "jeunes" au départ).

• Par contre, la proportion de "jeunes" tend toujours vers 5/9 : en effet :

$$\frac{V_n}{J_n} \to 0,8 \ .$$

• Enfin, il reste à expliquer pourquoi les trajectoires étaient faites de points alignés : pour cela, on peut calculer le coefficient directeur de $M_n \, M_{n+1}$; il vaut :

$$\frac{V_{n+1} - V_n}{J_{n+1} - J_n} = \frac{0,8J_n - 0,8J_{n-1}}{(0,6J_n + 0,4J_{n-1}) - J_N} = \frac{0,8J_n - 0,8J_{n-1}}{-0,4J_n + 0,4J_{n-1}} = -2$$

Tous les segments $M_n \, M_{n+1}$ de la trajectoire ont le même coefficient directeur -2 : les points M_n sont donc tous alignés.

Troisième étude de cas (a = 0,8 ; b = 0,6 ; c = 0,8)

1. *Exploration numérique et graphique*

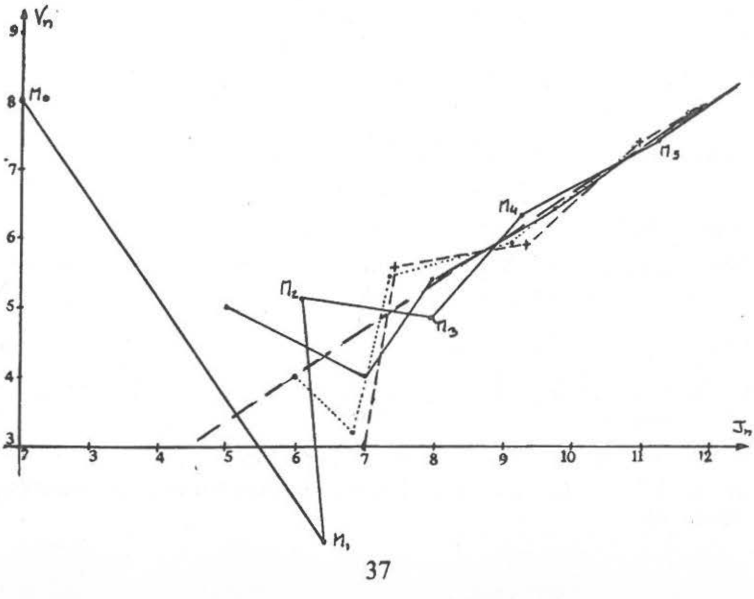
Tableau des résultats.

n	0	1	2	3	4	5	6
J_n	7	7.4	9.28	10.97	13.23	15.85	19.03
V_n	3	5.6	5.92	7.42	8.78	10.58	12.68

n	0	1	2	3	4	5	6
J_n	5	7	8	9.76	11.64	14	16.79
V_n	5	4	5.6	6.4	7.8	9.31	11.2

J_n	4	6.8	7.36	9.15	10.85	13.07	15.67
V_n	6	3.2	5.44	5.88	7.32	8.68	10.46

J_n	2	6.4	6.08	7.93	9.26	11.22	13.42
V_n	8	1.6	5.12	4.86	6.34	7.41	8.97



Observations :

Là encore les quatre trajectoires ont la même allure : elles s'en vont loin de l'origine en se rapprochant de la droite $J_n = 1{,}5V_n$.

L'effectif total augmente : au point M_6, il vaut entre 22,39 et 31,71 pour une valeur initiale de 10.

Du point de vue démographique, ce sont des populations en expansion, où les jeunes ont tendance à représenter 60 % de la population, indépendamment de la proportion initiale.

2. *Etude théorique*

a) On vérifie que $\forall n$, $J_{n+2} = 0{,}8J_{n+1} + 0{,}48J_n$ et $V_{n+2} = 0{,}8V_{n+1} + 0{,}48J_n$

b) Si G est une suite géométrique de raison t $(t \neq 0)$, on doit avoir, pour que G soit sympa :

$$t^{n+2} = 0{,}8t^{n+1} + 0{,}48t^n \qquad \Delta = 0{,}8^2 - 4 \times (-0{,}48) = 2{,}56 = 1{,}6^2$$

$$\Longleftrightarrow \quad t^2 - 0{,}8t - 0{,}48 = 0 \qquad \text{d'où les racines } t' = 1{,}2 \text{ et } t'' = -0{,}4$$

Les suites G' et G'' cherchées ont donc pour terme général :

$$G'_n = (1{,}2)^n \quad \text{et} \quad G''_n = (-0{,}4)^n$$

d) *Expression de J_n en fonction de n :*

Si $W_n = x(1{,}2)^n + y(-0{,}4)^n$, $W = J \Longleftrightarrow \begin{cases} x + y = J_0 \\ 1{,}2x - 0{,}4y = J_1 = 0{,}8J_0 + 0{,}6V_0 \end{cases}$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x + y = J_0 \\ 12x - 4y = 8J_0 + 6V_0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 4x + 4y = 4J_0 \\ 12x - 4y = 8J_0 + 6V_0 \end{cases} \begin{matrix} \Rightarrow 16x = 12J_0 + 6V_0 \\ \Rightarrow x = \frac{6}{8}J_0 + \frac{3}{8}V_0 \end{matrix}$$

et alors
$$y = J_0 - x = \frac{2}{8}J_0 - \frac{3}{8}V_0$$

d'où
$$J_n = \frac{1}{8}\,[3(2J_0 + V_0)(1{,}2)^n + (2J_0 - 3V_0)(-0{,}4)^n]$$

$(0{,}4)^n$ converge vers 0 mais $(1{,}2)^n$ diverge vers $+\infty$:

$(J_n)_{n \in \mathbf{N}}$ diverge vers $+\infty$.

e) *Comportement asymptotique de V_n :*

Puisque $\forall n$, $V_n = 0{,}8J_{n-1}$ et que $(J_{n-1})_{n \in \mathbf{N}^*}$ diverge vers $+\infty$, il s'ensuit que V_n diverge aussi vers $+\infty$.

f) *Evolution à long terme de la population :*

L'effectif total $P_n = J_n + V_n$ diverge vers $+\infty$: la population est donc en expansion.

Si on veut être plus précis, il faut calculer l'expression de V_n en fonction de n, à l'aide de la suite W (c'est-à-dire répondre complètement à la question e)) :

$$W = V \iff \begin{cases} x + y = V_0 \\ 1{,}2x - 0{,}4y = V_1 = 0{,}8J_0 \end{cases} \iff \begin{cases} x + y = V_0 \\ 12x - 4y = 8J_0 \end{cases} \iff \begin{cases} 4x + 4y = 4V_0 \\ 12x - 4y = 8J_0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 16x = 4V_0 + 8J_0 \Rightarrow x = \frac{1}{4}V_0 + \frac{1}{2}J_0$$

et alors
$$y = V_0 - x = \frac{3}{4}V_0 - \frac{1}{2}J_0$$

d'où
$$V_n = \frac{1}{4}[(V_0 + 2J_0)(1{,}2)^n + (3V_0 - 2J_0)(-0{,}4)^n]$$

Et finalement :

$$P_n = \frac{1}{8}[5(2J_0 + V_0)(1{,}2)^n - (2J_0 - 3V_0)(-0{,}4)^n]$$

Or, très vite $(-0{,}4)^n$ est négligeable devant $(1{,}2)^n$, comme le montre ce tableau :

n	0	1	2	3	4	5	6
$1{,}2^n$	1	1.2	1.44	1.73	2.07	2.48	3
$(-0{,}4)^n$	1	−0.4	0.16	−0.06	0.02	−0.01	0,004

P_n croit donc "comme" $1{,}2^n$ où n mesure le temps qui s'écoule : *c'est une croissance "exponentielle".*

D'autre part, le rapport $\frac{J_n}{V_n}$ a lui même une limite finie quand n

$$\frac{J_n}{V_n} = \frac{3(2J_0 + V_0)(1{,}2)^n + (2J_0 - 3V_0)(-0{,}4)^n}{2(2J_0 + V_0)(1{,}2)^n - (2J_0 - 3V_0)(-0{,}4)^n} = \frac{3(2J_0 + V_0) + (2J_0 - 3V_0)(-1/3)^n}{2(2J_0 + V_0) - (2J_0 - 3V_0)(-1/3)^n}$$

(en divisant numérateur et dénominateur par $(1{,}2)^n$: $-0{,}4/1{,}2 = -1/3$).

D'où : $\frac{J_n}{V_n} \to \frac{3}{2}$ quand n augmente : les jeunes ont tendance à représenter 60 % de la population (et les trajectoires se rapprochent de la droite $J_n = 1{,}5V_n$).

Commentaires

Les valeurs des taux a, b et c peuvent sembler élevées, mais il faut penser que ce ne sont pas des taux annuels, comme ceux que l'on rencontre en géographie humaine, mais ici des taux sur 40 ans ; si on calcule les taux annuels équivalents on trouve, par exemple pour $a = 0,5$; $b = 0,3$ et $c = 0,8$:

taux annuel de natalité des "jeunes" : $1+\alpha = (1,5)^{\frac{1}{40}} \simeq 1,01$
d'où $\alpha \simeq 10$ pour 1000

taux annuel de natalité des "vieux" : $1+\beta = (1,3)^{\frac{1}{40}} \simeq 1,006$
d'où $\beta \simeq 6$ pour 1000

taux annuel de mortalité des "jeunes" : $1+\gamma = (1,2)^{\frac{1}{40}} \simeq 1,004$
d'où $\gamma \simeq 4$ pour 1000

On retrouve bien là des valeurs vraisemblables.

Pour être vraisemblables, ces valeurs n'en sont pas forcément réalistes : d'une part les chiffres ont été choisis pour que les phénomènes soient très visibles, dès le tracé des trajectoires, d'autre part la division de la population en seulement deux classes est sommaire : les démographes utilisent des répartitions en tranches d'âges plus fines et plus nombreuses. La méthode de traitement mathématique est la même mais exige des calculs plus importants, qu'on confie alors à un ordinateur.

Enfin, le point le plus significatif de cette étude est sans doute dans les grands effets que peuvent produire de "petites" causes : une faible variation des taux a, b et c produit un changement profond dans l'évolution de la population.

Cette sensibilité du modèle mathématique peut s'expliquer si on fait une étude théorique en conservant les taux a, b et c sous forme littérale : on démontre alors que la nature de l'évolution de la population dépend de la quantité $a+bc$:

si $a+bc < 1$: la population s'éteint
si $a+bc = 1$: la population se stabilise
si $a+bc > 1$: la population croît.

Mais cette étude théorique est d'un niveau un peu plus élevé que le travail demandé ici...

VERS L'INVENTION DE LA ROUE OU APPROCHES DE LA CYCLOÏDE

I. Approche discrète

Avant de savoir faire des roues parfaitement circulaires, l'homme a utilisé des roues plus ou moins irrégulières, de profil polygonal.

Dans cette partie, notre roue sera un polygone régulier P_n, à n côtés, inscriptible dans un cercle de rayon R.

Si S désigne un des sommets de P_n, étudier la trajectoire (Γ_n) de S lorsque P_n "roule" sur une droite (Δ) :

— tracer d'abord les cas $n=3$; $n=4$; $n=6$; $n=8$, puis le cas général ;
— dans chaque cas, montrer que (Γ_n) est la réunion d'arcs de cercles dont on donnera les centres et les rayons ; calculer la longueur de (Γ_n) qu'on notera ℓ_n ainsi que la surface S_n délimitée par (Γ_n) et (Δ), lorsque P_n a fait un tour.

Etudier le comportement asymptotique de ℓ_n et de S_n .

II. Approche cinématique

Considérons un cercle de rayon R roulant sur une droite (Δ) ; on suppose que le mouvement est uniforme : un tour par seconde.

Si Ω désigne le centre du cercle et R_1 un repère cartésien fixe dont (Δ) est l'axe des abscisses, exprimer les coordonnées dans R_1 de Ω et du vecteur vitesse de Ω.

Si M désigne un point du cercle et R_2 un repère cartésien d'origine Ω, et dont l'axe des abscisses est parallèle à (Δ), quelles sont les coordonnées de M dans R_2 ? (on pourra supposer que M est sur (Δ) à l'instant $t=0$).

Quelles sont les coordonnées dans R_1 du point M ? de son vecteur vitesse ? Ces coordonnées sont *les équations paramétriques* de la trajectoire (Γ) de M.

Dessiner (Γ) de façon approchée, en calculant suffisamment de points et de tangentes (on prendra $R=3\,\text{cm}$).

III. Approche cartésienne

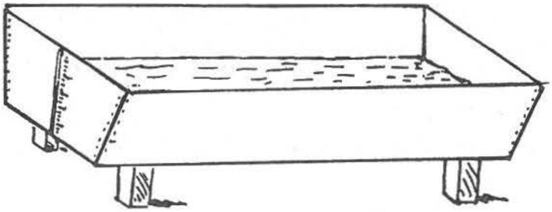
On continue l'étude du modèle précédent.

Etablir pour $t \in [0, \frac{1}{2}]$, la relation liant x et y , coordonnées de M dans le repère R_2. Cette relation est *l'équation cartésienne* de la trajectoire (Γ) pour un demi-tour.

Montrer que x est fonction de y ; on notera f cette fonction. Etudier f : ensemble de définition, continuité, dérivabilité, tableau de variation, limites.

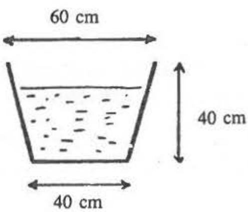
Montrer que f admet une réciproque g ; étudier et tracer g (on prendra $R = 3\,\text{cm}$). Prolonger la fonction g de façon à ce que le graphe de g soit la trajectoire (Γ) pour un tour complet.

LE PROBLÈME DE L'ABREUVOIR

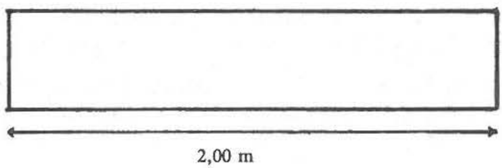


Une jauge est disposée sur la face avant de cet abreuvoir. Sauriez-vous la graduer ?

Données



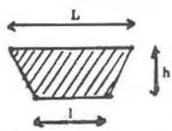
vue en coupe



vue de côté

Des questions pour vous aider

1. *Aire d'un trapèze :*



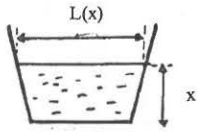
Quelle est l'aire du trapèze dessiné ci-contre, en fonction de ℓ, L et h ? Justifier votre réponse.

Dans toute la suite, l'abreuvoir est supposé rempli jusqu'à une hauteur x , en centimètres.

2. *Largeur de la "surface de l'eau"* :

On note L(x) la largeur occupée par l'eau à sa surface.

A l'aide du théorème de Thalès, exprimer L(x) en fonction de x .



3. *Volume d'eau contenue* :

Exprimer en fonction de x le volume V(x) d'eau contenue dans l'abreuvoir.

4. *Graphique* :

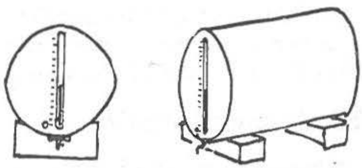
Tracer sur une feuille de papier millimétré la courbe représentative de la fonction V.

5. *Conclusion* :

On veut graduer l'abreuvoir de 50 l en 50 l. Utiliser la courbe précédente pour donner, en valeur approchée, la hauteur des graduations. Sauriez-vous calculer les valeurs exactes ?

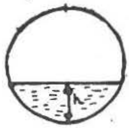
LE RÉSERVOIR CYLINDRIQUE

Une jauge, disposée sur la face de soutirage d'un réservoir cylindrique, indique le niveau du liquide.
Sauriez-vous la graduer ?



I. Première approche

Le problème revient à connaître la surface S(h) occupée par le liquide, sur la face avant, en fonction de la hauteur h du liquide.



En utilisant du papier millimétré et un cercle de rayon 10cm, établir un tableau de valeurs approchées de S(h), h variant de 5mm en 5mm. Tracer la courbe.

Quelles premières observations pouvez-vous faire ?

II. Le modèle mathématique

Choix des variables : le problème ne dépend pas de la taille du réservoir. On peut poser :

$$x = \frac{h}{R} \quad \text{où R est le rayon du cylindre}$$

$$t(x) = \frac{S(h)}{\pi R^2}\text{ , le taux de remplissage du réservoir.}$$

— Dans quels intervalles varient x et $t(x)$?
— Quelles valeurs particulières de la fonction t connaît-on ?
— t est-elle une fonction linéaire ?
— Montrer qu'on a $t(x)+t(2-x)=1$.
Que peut-on en déduire sur l'allure de la courbe représentant t ?

III. Premiers calculs

Pour $x \leqslant 1$, la surface S(h) est la différence de la surface d'un secteur de cercle et de celle d'un triangle.

— Si α est l'angle au centre du secteur, établir une relation entre $\frac{\alpha}{2}$ et x .
— Quelle est la surface du secteur en fonction de α ? Et en fonction de x ?
— Quelle est la surface du triangle en fonction de x ?
— En déduire l'expression explicite de la fonction $t(x)$ pour $x \leqslant 1$. Cette expression se simplifie (un peu) en posant $X=x-1$. On note alors $T(X)$ le taux de remplissage en fonction de X.

IV. Etude approfondie

On connaît à présent la fonction $X \to T(X)$ pour $X \in [-1,0]$. Le but de cette partie est d'en dessiner la courbe représentative le plus précisément possible.
— Calculer la fonction dérivée $\frac{dT}{dX}(X)$, pour $X \in [-1,0]$. Quel est son signe ? Quelles sont ses valeurs aux bornes de $[-1,0]$?
— Calculer la fonction dérivée seconde $\frac{d^2T}{dX^2}(X)$, pour $X \in [-1,0]$.

Quel est son signe ?

— Après avoir calculé quelques valeurs particulières de T, tracer la courbe représentative pour $X \in [-1,0]$ (une unité = 10cm ; repère orthonormé).

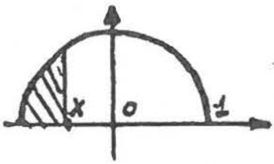
— Comment compléter cette courbe pour $X \in [0,1]$?

V. Réponse à notre problème

La courbe tracée permet d'établir la graduation de la jauge. Comment ? A titre d'exemple, représenter sur 20cm une graduation pour un réservoir de 20 litres.

VI. Problèmes annexes

Pouvez-vous calculer avec une précision de 10^{-8} le rapport $\frac{h}{R}$ pour lequel le réservoir est rempli au quart ?



$F(X) = \frac{1}{2}.T(X)$ est la surface représentée ci-contre. Pourquoi ?

Quelle est la courbe représentative, dans ce repère, de la fonction $\frac{dF}{dx}$?

Qu'observe-t-on ?

VOUS ÊTES OFFICIER DE GENDARMERIE

Vous êtes responsable du contrôle de la vitesse des automobiles sur le tronçon d'autoroute du sud situé entre l'aire de Chagny et la sortie "Chalons-Nord", 21 kilomètres plus loin.

Vous disposez des moyens suivants :

— une camionnette équipée d'une radio et d'un cinémomètre, avec deux hommes à bord ;
— deux motards, reliés par radio à la camionnette.

Où allez-vous poster vos hommes ?
Quelles instructions leur donner ?

Ce que vous devez savoir :

— l'interception d'une automobile en excès de vitesse ne peut être réalisée que par le dépassement de l'auto par les motards ;
— le temps écoulé entre la détection d'un excès de vitesse et le départ des motards, alertés par radio, est de 1 minute ;
— les motos utilisées peuvent rouler à 180 km/h ; pour atteindre cette vitesse, il leur faut 30 secondes et 1 kilomètre ;
— la portée de l'émetteur radio est de 15 km.