Association des Professeurs
de Mathématiques de
l'Enseignement Public

LES OLYMPIADES NATIONALES DE MATHÉMATIQUES 2016

TOME 1
énoncés

Coordination : Paul-Louis HENNEQUIN
Mise en forme : Jean BARBIER

N° APMEP : 1009

N° ISBN : 978-2-912846-85-3

LES OLYMPIADES NATIONALES DE MATHÉMATIQUES 2016

AVANT-PROPOS

PRÉSENTATION DU TABLEAU SYNTHÉTIQUE

Afin de vous permettre de naviguer efficacement et rapidement dans la centaine d'exercices très variés de ce recueil, nous avons, comme les années précédentes, rassemblé dans un tableau les informations qui vous permettrons de choisir un énoncé en fonction de six critères.

Géographie	La première colonne donne la liste des exercices et l'académie concernée. (dans le monde entier)
Thème	Les douze suivantes précisent le (ou les) domaine(s) mathématique(s) impliqué(s).
Type	La suivante (Nombre de questions) offre le choix entre les énoncés brefs laissant une large marge d'initiative dans la recherche et ceux beaucoup plus longs qui font gravir marche par marche l'escalier qui conduit à la solution. Avec bien entendu de nombreux intermédiaires.
Volume	La quinzième donne la longueur d'une solution détaillée évaluée en nombre de demi- pages ; le plus souvent 1, 2 ou 3.
Adaptation	L'avant–dernière précise les sections concernées, un même thème d'exercice pouvant comporter deux versions adaptées à chacune, par exemple Le coffre-fort à Lille ou Pavages en L à La Réunion.
Histoire	La dernière enfin donne le titre de chaque énoncé ; celui-ci, choisi dès la compétition ou proposé depuis, permet de retrouver immédiatement des problèmes classiques : Moyenne harmonique, Paradoxe de Bertrand, Nombre d'or, Taxi-distance, Droites tropicales, Flocon de von Koch, Pavages, Marche du cavalier d'échec.

La dernière ligne du tableau totalise les 12 colonnes et permet d'estimer l'importance attribuée à chaque thème et l'évolution d'une année à l'autre en liaison avec celle des programmes.

Ainsi, en 2016, la géométrie plane reste prépondérante mais elle est rattrapée par le dénombrement suivi, comme en 2015, des suites, de l'arithmétique et de l'algorithmique. Viennent ensuite les équations et fonctions, les probabilités, puis les inégalités, la numération et enfin, la géométrie dans l'espace.

Aucun énoncé ne concerne directement ni la logique ni les statistiques.

Pour accéder directement à l'exercice qui vous intéresse, vous pouvez cliquer sur le début de la ligne qui lui correspond. par exemple pour accéder à l'exercice Paris 1, cliquer sur la case Paris 1.

Jean Barbier et **Paul-Louis Hennequin**

2016

2016	Algorithmique	Arithmétique	Numération	Dénombrement	Logique	Inégalités	Suites	Equat.-Fonctions	Géométrie plane	Géométrie espace	Probablités	Statistique pourcentages	Nombre de questions	Longueur solution	Sections	Titre
National Europe 1		X				X		X		X			13	2	Toutes	Echanges thermiques
National Europe 2	X	X				X							12	2	S	Liber abaci
National Europe 3	X						X						9	2	Autres	Demi-tour
National Amérique 1		X											10	2	Toutes	Tout passe, tout s'efface
National Amérique 2	X	X					X						11	2	S	Sommes ou puissances entières d'entiers
National Amérique 3				X			X						5	1	Autres	Dés collés
National Asie Pacifique 1	X	X											8	1	Toutes	Accès réservé
National Asie Pacifique 2	X	X											10	1	S	Nombres à moyenne harmonique entière
National Asie Pacifique 3	X								X				8	2	Autres	Coloriages
Aix-Marseille 1		X						X					7	1	Toutes	La magl box
Aix-Marseille 2									X	X			11	4	S	Curieuses traversées
Aix-Marseille 3		X						X					4	2	Autres	Histoires de prix
Amiens 1			X										1	4	S	Graphe et chiffres
Amiens 2				X					X				2	1	Autres	Carrés dans un rectangle
Amiens 3											X		1	1	Autres	La mourre
Amiens 4								X		X			2	1	S	Diagonales
Ase Nouvelle Calédonie Pacifique 1									X		X		11	4	Toutes	Paradoxe de Bertrand
Asie Nouvelle Calédonie Pacifique 2				X					X				10	5	Toutes	Une histoire de pavage
Besançon 1	X							X			X		9	2	Toutes	Au feu rouge
Besançon 2		X				X		X	X	X			16	5	Toutes	Le nombre d'or
Bordeaux 1				X					X				7	2	Toutes	Coloriage
Bordeaux 2	X	X		X		X							10	2	S	La tombola
Bordeaux 3			X	X									12	2	Autres	Grande famille
Caen 1				X			X		X				7	2	Toutes	Les mots
Caen 2							X		X				6	2	S	Le lièvre infatigable
Caen 3								X					5	2	Autres	Une histoire de Moyenne
Clermont 1	X			X			X				X		10	4	Toutes	Si tous les jumeaux du monde voulaiernt se donner la main
Clermont 2	X						X		X		X		8	2	S	Chemins aléatoires paraboliques
Clermont 3								X	X				5	1	Autres	Fête foraine

Corse 1	X								X				5	1	Toutes	Cavalier seul
Corse 2		X						X	X				24	2	Toutes	Changeons les règles
Créteil 1				X				X	X	X			6	2	Toutes	Cousu de fils d'or
Créteil 2				X					X				9	2	Toutes	Les élastiques
Dijon 1		X						X					4	2	Toutes	Années de naissance
Dijon 2									X		X		6	2	S	Jeu de Palet
Dijon 3				X		X							8	2	Autres	Coccinelles
Grenoble 1		X							X				10	4	Toutes	Taxis à Mathville
Grenoble 2	X					X	X						8	2	S	Accepter les différences
Grenoble 3		X	X										13	4	Autres	Nombres prisonniers
Guadeloupe et Martinique 1											X		7	6	Toutes	Black dices : le black jack aux dés
Guadeloupe et Martinique 2		X	X				X						7	2	S	Simplifications scandaleuses
Guadeloupe et Martinique 3				X									3	1	Autres	Les boîtes
Lille 1				X					X				16		Toutes	Les dominos
Lille 2	X		X				X						14	6	S	Coffre-fort lourd
Lille 3	X		X				X						9	4	Autres	Coffre-fort plume
Limoges 1						X		X	X				9	2	Toutes	Quatre moyennes
Limoges 2										X			14	3	Toutes	Voyage à la surface de la Terre
Lyon 1							X		X				6	8	Toutes	Plier une feuille de papier
Lyon 2			X	X							X		9	10	Toutes	Nombres tri-tri
Mayotte1		X					X						7	1	Toutes	Triplets pythagoriciens
Mayotte 2										X			4	2	S	Deux iles voisines
Mayotte 3				X									5	2	Autres	Poignées de main
Montpellier 1									X				4	4	Toutes	Triangles frères
Montpellier 2			X	X									5	3	S	Nombres magiques
Montpellier 3						X	X						3	1	Autres	Jeu de jetons
Nancy-Metz 1								X	X				10	3	Toutes	Sauvetage en montagne
Nancy-Metz 2			X										7	4	Toutes	Somme et produit
Nantes 1	X					X					X		13	2	Toutes	Le jeu de court-circuit
Nantes 2											X		1	1	S	Un jeu équitable
Nantes 3				X					X				8	2	Autres	Le nombre de Green
Nice 1													8	4	Toutes	A travers les rues
Nice 2		X											9	3	Toutes	Nombres "riches"
Orléans-Tours 1				X			X						13	2	Toutes	Des nombres en forme
Orléans-Tours 2										X			9	3	S	Tas de sable, des tas de situations
Orléans-Tours 3				X			X		X				9	2	Autres	Gauche, droite !
Paris 1									X				8	8	Toutes	Droites tropicales
Paris 2				X			X						7	2	S	Intercaler la somme
Paris 3							X						5	2	S par équipes	Le solitaire bulgare

Paris 4										X			9	6	S par équipes	Une fourmillante planête
Paris 5	X	X											8	2	Autres (individuel)	La couleur des nombres
Paris 6									X		X		8	11	Autres (équipes)	L'anniversaire d'Anna
Paris 7				X									10	2	Autres (équipes)	Un classement
Poitiers 1		X	X	X									8	3	Toutes	Numération des plaques
Poitiers 2				X				X			X		9	1	S	Tirage à lafête foraine
Poitiers 3	X			X									8	1	L,ES,STMG	Les réseaux sociaux
Poitiers 4	X	X		X									11	2	ST2D,STL,STD2A	Des grilles magiques
Reims 1									X				5	2	Toutes	Arbèlos (sur les traces d'Archimède)
Reims 2							X		X				11	31	S	Le flocon de von Koch
Reims 3							X						9	2	Autres	Bactéries
Rennes 1	X	X				X							14	4	Toutes	Le Tripl'One
Rennes 2		X					X	X					16	2	S ,STI2D, STL	A la dérive
Rennes 3		X					X	X					11	2	L ES,ST2S STMG,STHR	Ca balance !
Réunion 1		X					X		X				8+6	4	Toutes	Pavages en L
Réunion 2	X										X		12	5	S	L'algorithme réducteur
Réunion 3	X			X		X					X		11	2	Autres	Stratégie de jeu
Rouen 1						X		X					8	3	Toutes	Retouche d'images
Rouen 2								X	X				9	3	S	A la recherche du triangle d'or
Rouen 3								X					5	2	Autres	Un aller-retour harmonique
Strasbourg 1									X				8	5	Toutes	Triangle équilatère
Strasbourg 2									X				4	3	S	Les cercles tangents
Strasbourg 3									X		X		10	1	Autres	Déplacement d'une coccinelle
Toulouse 1				X					X				7	3	Toutes	Autour du jeu de Sim
Toulouse 2		X									X		4	2	S	Vous avez dit 1/2 ?
Toulouse 3				X									6	5	Autres	Bracelets
Versailles 1				X									3	1	S	Tant qu'il y aura des sommes
Versailles 2				X			X						7	2	S	La sécuriité dans le désordre
Versailles 3				X			X						7	3	Autres	Table tournante
Versailles 4								X					2	1	Autres	Eloge de la régularité
TOTAL	21	25	10	31	0	12	25	19	34	8	16					

Métropole-Europe-Afrique-Orient-Inde

Premier exercice national

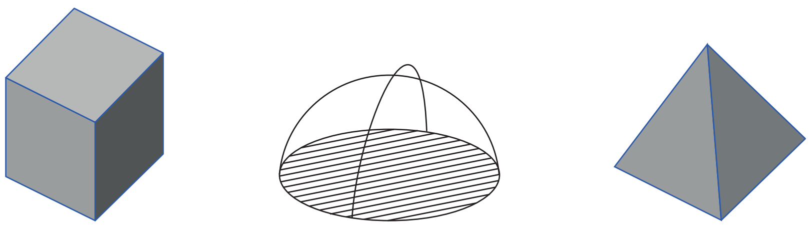
Toutes séries

Échanges thermiques

Énoncé

En architecture, on appelle facteur de compacité d'un bâtiment le rapport de la surface extérieure – y compris la base en contact avec le sol – de ce bâtiment, mesurée en m^2, à son volume, mesuré en m^3. Le facteur de compacité $c = \dfrac{S}{V}$, exprimé en m^{-1}, donne une première évaluation grossière des performances thermiques d'une construction d'habitation.

1. . Calculs de compacité pour quelques volumes usuels, dessinés ci-dessous.
   a) Déterminer le facteur de compacité d'un cube de côté a.
   b) Déterminer celui d'une demi-sphère de rayon r. On rappelle que le volume d'une sphère de rayon r est $\dfrac{4}{3}\pi r^3$ et que sa surface a pour aire $4\pi r^2$.
   c) Déterminer celui d'une pyramide régulière à base carrée de côté a, et de hauteur verticale a.



   d) En quoi, d'après vous, le facteur de compacité est lié aux performances thermiques d'un bâtiment ?
2. On se propose d'étudier le facteur de compacité d'un pavé droit de volume 1 dont les dimensions en mètres sont x, y et z.
   a) Vérifier que pour tous nombres a, b et c :
   $$a^3+b^3+c^3-3abc = \frac{1}{2}(a+b+c)[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]$$
   b) En déduire que pour tous nombres réels positifs a, b et c, $a^3+b^3+c^3 \geqslant 3abc$.
   c) En déduire que pour tous nombres réels positifs A, B et C dont le produit est égal à 1 :
   $$A+B+C \geqslant 3.$$
   d) Montrer que le facteur de compacité de ce pavé est : $c = 2\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\right)$.
   e) Quel est le pavé droit de volume 1 qui rend minimal le facteur de compacité ?
3. Dans cette question, on désire déterminer tous les pavés droits dont le facteur de compacité est égal à 1 et dont les dimensions p, q et r, exprimées en mètres, sont des nombres entiers. On prendra $p \leqslant q \leqslant r$.
   a) Établir que résoudre ce problème consiste à déterminer les triplets ordonnés d'entiers p, q et r tels que
   $$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r} = \frac{1}{2}.$$
   b) Démontrer que $3 \leqslant p \leqslant 6$.
   c) Montrer que si $p = 3$ alors $7 \leqslant q \leqslant 12$.
   d) Terminer la résolution.

RETOUR AU SOMMAIRE

Métropole-Europe-Afrique-Orient-Inde

Deuxième exercice national

Série S

Liber abaci

Énoncé

Il y a 4000 ans, les anciens égyptiens utilisaient en calcul une propriété arithmétique bien étonnante : tout nombre rationnel $\frac{p}{q}$ *strictement positif s'écrit comme une somme de fractions unitaires, c'est-à-dire d'inverses d'entiers positifs, tous différents les uns des autres. Depuis lors, une telle décomposition s'appelle une « écriture égyptienne ». Ainsi, la somme* $\frac{1}{6}+\frac{1}{17}+\frac{1}{102}$ *est-elle une « écriture égyptienne » du quotient* $\frac{4}{17}$*, tandis que les sommes* $\frac{1}{17}+\frac{1}{17}+\frac{1}{17}+\frac{1}{17}$ *et* $\frac{1}{17}+\frac{3}{17}$ *n'en sont pas. Plusieurs questions sur ces écritures demeurent, aujourd'hui encore, ouvertes.*

1. Pourquoi les deux dernières décompositions données en préambule ne sont-elles pas des « écritures égyptiennes » ? Proposer une écriture égyptienne de $\frac{2}{3}$ comportant deux fractions unitaires, puis une autre de $\frac{2}{3}$ en comportant trois.
2. **Un algorithme**.
   Soient p et q des entiers tels que $0 < p < q$. Le quotient $\frac{p}{q}$ est donc un élément de $]0\,;1[$.
   Poser $k=1, p_1 = p$, $q_1 = q$.
   Tant que $p_k \neq 0$
   Déterminer le plus petit entier positif n_k tel que $\frac{1}{n_k} \leqslant \frac{p_k}{q_k}$. Ainsi : $\frac{1}{n_k} \leqslant \frac{p_k}{q_k} < \frac{1}{n_k - 1}$
   . Poser $p_{k+1} = p_k n_k - q_k$ et $q_{k+1} = q_k n_k$. Ainsi : $\frac{p_{k+1}}{q_{k+1}} = \frac{p_k}{q_k} - \frac{1}{n_k}$.
   Incrémenter k, c'est-à-dire augmenter la valeur du compteur k d'une unité.
   Fin du Tant que

   a) On fait ici tourner l'algorithme sur le quotient $\frac{p}{q} = \frac{4}{17}$. Au début du premier tour de boucle, $k = 1$, $p_1 = 4$, $q_1 = 17$. On détermine alors $n_1 = 5$. Puis $p_2 = 3$, $q_2 = 85$ et k vaut 2 avant d'entrer dans le deuxième tour de boucle. Poursuivre jusqu'à l'arrêt complet. Que vaut $\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}+\frac{1}{n_4}$? Les quatre fractions unitaires sont-elles distinctes ?

   b) On suppose que l'algorithme prend fin à l'issue du $N^{\text{ème}}$ tour de boucle. Justifier qu'il permet de donner une « écriture égyptienne » du quotient $\frac{p}{q}$.

   c) Justifier clairement que l'algorithme ne peut être illimité.

   Cet algorithme permet donc de donner une « écriture égyptienne » de n'importe quel nombre rationnel élément de $]0\,;1[$. Il appartient à une classe d'algorithmes dits « gloutons » et est attribué à Léonard de Pise, auteur du *Liber abaci* (1202).

   L'adjectif « glouton » s'applique à des algorithmes faisant, à chaque étape, un choix optimal. L'optimalité globale n'est pas nécessairement atteinte comme en témoignent les deux décompositions de $\frac{4}{17}$ *rencontrées dans ce problème.*

3. **Et pour** $\dfrac{p}{q} \geqslant 1$?

   a) L'algorithme précédent fonctionne-t-il pour $\dfrac{p}{q} > 1$?

   b) Soit a un entier supérieur ou égal à 3. Justifier que :

$$\frac{1}{a+1}+\frac{1}{a+2}+\frac{1}{a+3}+\cdots+\frac{1}{2a-1}+\frac{1}{2a} \text{ et } \frac{1}{a+1}+\frac{1}{a+2}+\frac{1}{a+3}+\cdots+\frac{1}{4a-1}+\frac{1}{4a} > 1.$$

   c) En déduire qu'il existe un entier naturel $b > a$ tel que :

$$\frac{1}{a+1}+\frac{1}{a+2}+\cdots+\frac{1}{b-1}+\frac{1}{b} \leqslant 1 < \frac{1}{a+1}+\frac{1}{a+2}+\cdots+\frac{1}{b-1}+\frac{1}{b}+\frac{1}{b+1}.$$

   d) Établir alors que tout rationnel $\dfrac{p}{q} \geqslant 1$ admet lui aussi une « écriture égyptienne », puis une infinité.

RETOUR AU SOMMAIRE

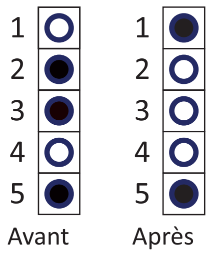
Métropole-Europe-Afrique-Orient-Inde

Troisième exercice national

Séries autres que S

Demi-tour !

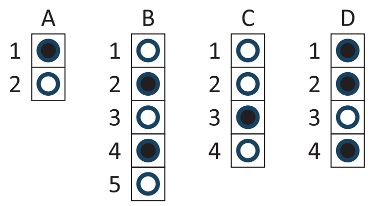
Énoncé



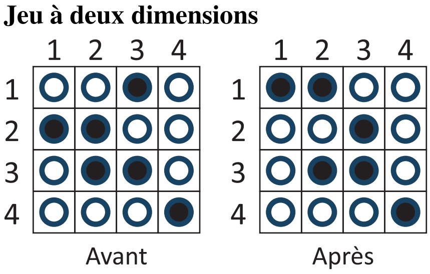
On dispose n pions verticalement. Ils sont noirs sur une face, blancs sur l'autre, et sont numérotés de 1 à n. Au début du jeu, chaque pion présente aléatoirement sa face noire ou sa face blanche. **À chaque coup – qu'on appelle une *opération* dans toute la suite – on retourne un des pions *et* tous ses voisins du dessus**. Le dessin ci-contre donne l'exemple du changement qu'apporte à une configuration initiale une opération avec le troisième jeton.

L'objectif du jeu est de trouver une séquence d'opérations telle que tous les pions montrent leur face blanche.

1. L'ordre dans lequel se succèdent deux opérations a-t-il de l'importance ?
2. Quel est l'effet combiné de deux opérations identiques ?
3. Indiquer les numéros des pions à retourner pour ne voir que des faces blanches, dans les situations représentées ci-contre.



4. On donne l'algorithme suivant, pour une configuration de n cases :
   Pour k allant de n à 1 par pas de -1
   Si le jeton k est noir, effectuer une opération avec ce jeton
   Fin Pour
   a) Expliquer pourquoi cet algorithme blanchit la colonne en un minimum d'opérations. Combien d'opérations met-il au maximum en œuvre ?
   b) Donner un exemple de configuration de n cases nécessitant n opérations.
5. Dans cette question et les suivantes, on change légèrement les règles du jeu en en proposant des variantes :
   a) À chaque coup – qu'on appelle toujours une opération – on retourne un des pions et son voisin du dessus uniquement (quand il en a un). Prouver qu'il est toujours possible de blanchir la colonne.
   b) À chaque coup – qu'on appelle toujours une opération – on retourne un des pions et son voisin du dessus quand il en a un, le dernier sinon. Ainsi, agir sur le pion n°1 retourne et le n°1 et le n° n. Donner, en le justifiant, un exemple de configuration à 4 jetons qui soit impossible à blanchir.
6. **Jeu à deux dimensions**



On considère maintenant un plateau carré de $n \times n$ cases. Les jetons ont une face noire et une blanche. Le but du jeu est de rendre visible les seules faces blanches. Les cases sont numérotées de haut en bas et de gauche à droite, et le jeton situé à l'intersection de la ligne i et de la colonne j est appelé jeton (i, j). Une opération est définie ainsi : **lorsque l'on retourne le jeton (i, j), on forme un rectangle dont le coin supérieur gauche est le jeton $(1,1)$ et le coin inférieur droit est le jeton (i, j) : tous les jetons situés dans ce rectangle sont retournés**. L'exemple ci-dessus montre ce qu'il se passe quand on retourne le jeton (2, 3) d'un plateau 4×4. Proposer un algorithme qui fasse apparaître toutes les faces blanches d'un plateau $n \times n$ en moins de n^2 opérations.

7. Proposer un jeu analogue à trois dimensions.

RETOUR AU SOMMAIRE

AMÉRIQUE - ANTILLES - GUYANE

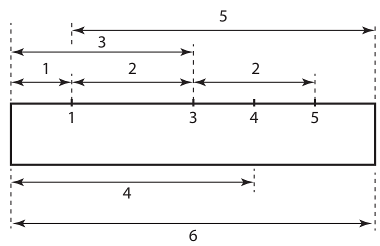
Premier exercice national

Toutes séries

Tout passe, tout s'efface

Énoncé

On dispose d'une règle graduée en cm dont la longueur, supérieure à 4 cm, est un nombre entier n de centimètres.
La figure ci-contre représente une règle de longueur 6 dont la graduation 2 a été effacée. Elle permet cependant de mesurer toutes les longueurs entières inférieures ou égales à 6. La longueur 2 est, par exemple, obtenue avec les graduations 1 et 3 ou avec les graduations 3 et 5.
On dit alors que la liste (1, 3, 4, 5) est opérationnelle.



Plus généralement, on dira qu'une liste d'entiers compris entre 1 et $n-1$ est opérationnelle pour une règle de longueur n si les écarts entre les extrémités de la règle ou les graduations marquées permettent de retrouver tous les entiers compris entre 1 et n.

1. On suppose que la longueur de la règle est égale à 6 cm.
   a) Le triplet (2, 3, 4) est-il opérationnel ?
   b) Le couple (1, 4) est-il opérationnel ?
2. Démontrer que pour une règle de 9 cm de longueur, il existe un triplet qui est opérationnel.
3. a) Combien d'écarts au maximum peut-on constituer à partir de p graduations et des extrémités d'une règle ?
   b) Démontrer, pour une règle de 11 cm, qu'il n'existe pas de triplet qui soit opérationnel.
4. On suppose que la règle a une longueur de 10 cm. On considère une liste de graduations opérationnelle dont $a \geqslant 1$ est le plus petit élément et $b \leqslant 9$ le plus grand.
   a) Montrer que $a = 1$ ou $b = 9$.
   b) On suppose que $a = 1$. Si la liste opérationnelle ne comporte que 3 entiers, montrer que $b = 8$.
   c) En déduire qu'il n'existe pas de liste opérationnelle à trois termes.
   d) Trouver une liste opérationnelle à quatre termes.
5. Déterminer une liste de longueur minimale qui soit opérationnelle avec une règle de 23 cm de longueur.

RETOUR AU SOMMAIRE

AMÉRIQUE - ANTILLES - GUYANE

Deuxième exercice national

Série S

Sommes de puissances entières d'entiers

Énoncé

Partie 1 : sommes, sommes de carrés, sommes de cubes

Les ensembles $A = \{1, 9, 11\}$ et $B = \{3, 5, 13\}$ possèdent des propriétés qui attisent la curiosité. On remarque en effet que $1+9+11 = 3+5+13$ et que $1^2+9^2+11^2 = 3^2+5^2+13^2$.
Dans la suite, on dira que la paire d'ensembles d'entiers $\{A, B\}$ possède la propriété S_1 si les deux ensembles ont le même nombre d'éléments et si la somme des éléments de A est égale à la somme des éléments de B. On dira qu'elle possède la propriété S_2 si elle possède la propriété S_1 et si de plus la somme des carrés des éléments de A est égale à la somme des carrés des éléments de B. On dira qu'elle possède la propriété S_3 si de plus la somme des cubes des éléments de A est égale à la somme des cubes des éléments de B.

Étant donné un entier impair n, on se demande s'il est possible de partager l'ensemble $\{1, 2, 3, \ldots, n-1, n\}$ en deux parties A et B telles que $\{A, B\}$ possède une des propriétés évoquées ci-dessus. Par convention, A sera la partie qui contient 0.

1. Dans le cas $n = 3$, peut-on trouver $\{A, B\}$ possédant la propriété S_1 ?
2. Même question dans le cas $n = 5$.
3. a) Si lensemble $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ peut être partagé en deux parties A et B telles que les propriétés S_1 et S_2 soient satisfaites, quelle est la somme des éléments de A ?
   b) Quelle est la somme des carrés des éléments de A ?
   c) Déterminer des parties A et B solutions du problème.
4. Lorsque l'ensemble $\{0, 1, 2, 3, \ldots, n-1, n\}$ peut être partagé de sorte à satisfaire une ou plusieurs des propriétés S_i, on adopte le système de représentation suivant : chaque case de la seconde ligne des tableaux ci-dessous contient 1 si le nombre appartient à A, 0 si le nombre appartient à B.
   a) Compléter les deux tableaux :

$n = 3$	0	1	2	3
	1			

$n = 7$	0	1	2	3	4	5	6	7
	1							

   b) L'observation de ces deux tableaux fait naître l'idée qu'en dédoublant chaque 0 en 01 et chaque 1 en 10, on transforme une séquence intéressante en une autre, dont la taille est doublée. Compléter le tableau correspondant à $n = 15$ et vérifier que les parties obtenues possèdent bien la propriété S_3.

Partie 2 : naissance d'une suite

Inspirés par les questions précédentes, on étudie la suite définie par $t_0 = 1$ et la relation de récurrence : pour tout entier n, $t_{2n} = t_n$ et $t_{2n+1} = 1 - t_n$ (suite de Prouhet-Thue-Morse).

5. Calculer t_{2016}.
6. Écrire un algorithme permettant, un entier n étant donné, d'obtenir la valeur de t_n.
7. La suite (t_n) possède-t-elle trois termes consécutifs identiques ?
8. Cette suite est-elle périodique ?

RETOUR AU SOMMAIRE

AMÉRIQUE - ANTILLES - GUYANE

Troisième exercice national

Séries autres que S

Dés collés

Énoncé

On rappelle que sur un dé à jouer la somme des nombres inscrits sur deux faces opposées est égale à 7. Cette condition est réalisée dans ce problème.

1. a) On aligne deux dés en collant deux faces représentant le même nombre. On convient que toutes les faces non collées sont accessibles à la vue, quitte à tourner l'ensemble.
   Quelles sont les valeurs possibles de la somme S_2 des nombres apparaissant sur toutes les faces visibles (non collées entre elles) ?

   b) On aligne trois dés de la même façon : en collant l'une contre l'autre des faces portant le même nombre. Montrer que la somme S_3 des nombres apparaissant sur toutes les faces visibles (non collées entre elles) ne dépend pas des nombres cachés.

2. . Maintenant on aligne k dés, de la gauche vers la droite, toujours en collant deux faces représentant le même nombre, l ?une contre l ?autre. Soit n le premier nombre caché en commençant par la gauche.
   a) Exprimer la somme des faces visibles des k dés, notée S_k, en fonction de n et de k. (On pourra distinguer deux cas en fonction de la parité de k).
   b) Peut-on avoir $S_k = 2016$ pour un k bien choisi ?
   c) Quelle est la prochaine année A pour laquelle on pourra avoir $S_k = A$ pour un k bien choisi ?

RETOUR AU SOMMAIRE

ASIE - PACIFIQUE - NOUVELLE CALÉDONIE POLYNÉSIE FRANÇAISE

Premier exercice national

Toutes séries

Accès réservé

Énoncé

L'accès à un laboratoire est protégé par un code composé de six chiffres. La sécurité de l'installation exige que deux responsables soient présents à chaque ouverture.

1. On songe à communiquer à chacun des deux responsables trois des six chiffres, avec leur position dans le code. Cependant, en essayant toutes les combinaisons restantes, l'un des deux pourrait accéder au local. Si chaque tentative lui prend en moyenne 5 secondes, y parviendrait-il en moins d'une heure ?
2. On envisage de communiquer à chacun des deux responsables les coordonnées d'un point du plan. Ces deux points ont des abscisses distinctes, et les six chiffres du code sont les six chiffres de l'ordonnée du point d'intersection de la droite qu'ils définissent avec l'axe des ordonnées. (Les données doivent permettre d'aboutir à un nombre entier de six chiffres.)
   a) Traitement d'un exemple : les deux couples transmis sont (105 ; 137 521) et (540 ; 151 876). Quel est le code ?
   b) Quand on ne connaît qu'un des deux points, peut-on espérer casser le code en moins d'une heure ?
3. On se demande si une information partielle pourrait permettre de pénétrer dans le laboratoire. Les couples de coordonnées sont (42 ; 295 199) et (684 ; 458 26X), le dernier chiffre de la dernière coordonnée est inconnu.
   a) Recopier et compléter l'algorithme ci-contre pour qu'il affiche toutes les combinaisons possibles.
   b) Quelles sont les combinaisons possibles ?
   c) On remplace le second couple par (684 ; 4582XX), les deux derniers chiffres de la deuxième coordonnée sont cette fois inconnus. Modifier le programme pour qu'il affiche toutes les combinaisons possibles et donner ces combinaisons.

Variables

$$x_1, x_2, y_1, y_2, i, n, d, c$$

Initialisation
$x_1 \leftarrow \cdots$
$x_2 \leftarrow \cdots$
$y_1 \leftarrow \cdots$
Pour i allant de 0 à 9
$y_2 \leftarrow \cdots$
$n \leftarrow y_1x_2 - y_2x_1$
$d \leftarrow x_2 - x_1$
Si le reste de la division euclidienne de n par d est nul
$c \leftarrow \cdots$
Afficher c
Fin Si
Fin Pour

Dispersion de l'information
Le responsable de la sécurité, qui a entendu parler des rapports entre la cryptographie et les courbes elliptiques, mais dont le bagage mathématique est limité, imagine de faire ouvrir la porte par un groupe de trois responsables au lieu de deux.

4. Si on donne les coordonnées de trois points non alignés, on peut trouver la fonction polynôme du second degré dont la représentation graphique passe par ces trois points et prendre pour combinaison l'image (qui serait un nombre entier) que cette fonction donne de 0.
   Proposer un triplet de points associés à la combinaison 190 680 et donner la fonction polynôme du second degré correspondante.
5. Quelle est la combinaison associée aux trois points (10 ; 365 464), (20 ; 350 314) et (30 ; 325 164) ?

RETOUR AU SOMMAIRE

ASIE - PACIFIQUE NOUVELLE CALÉDONIE POLYNÉSIE FRANÇAISE

Deuxième exercice national

Série S

Nombres à moyenne harmonique entière

Énoncé

Soit a un nombre entier naturel non nul. On rappelle qu'un diviseur strict de a est un diviseur positif de a distinct de a. On dit que a est un nombre parfait s'il est égal à la somme de ses diviseurs stricts. On dit que a est un nombre à moyenne harmonique entière lorsque la moyenne harmonique de ses diviseurs positifs, a compris, est un nombre entier.

On rappelle que la moyenne harmonique h des nombres strictement positifs $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n$ est l'inverse de la moyenne arithmétique de leurs inverses $h = \dfrac{n}{\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} + \dfrac{1}{x_3} + \cdots + \dfrac{1}{x_{n-1}} + \dfrac{1}{x_n}}$.

1. a) Un nombre premier p (nombre qui ne possède comme diviseurs que 1 et p) peut-il être parfait ? à moyenne harmonique entière ?

   b) Montrer que 28 est un nombre parfait. Est-il un nombre à moyenne harmonique entière ?

   c) Montrer que 140 est un nombre à moyenne harmonique entière. Est-il un nombre parfait ?

2. On considère un entier N et ses diviseurs positifs, notés $d_1, d_2, d_3, \dots, d_{n-1}, d_n$, rangés dans l'ordre croissant. Dans cette énumération, on a évidemment $d_1 = 1$ et $d_n = N$.

   a) Exprimer la somme $\Sigma = \dfrac{1}{d_1} + \dfrac{1}{d_2} + \cdots + \dfrac{1}{d_{n-1}} + \dfrac{1}{d_n}$ comme le quotient d'un entier S par N.

   b) On suppose que N est un nombre parfait. Quelle est la valeur de Σ ?

   c) En déduire une condition nécessaire pour qu'un nombre parfait soit un nombre à moyenne harmonique entière.

3. L'algorithme rédigé dans le tableau ci-contre a pour but d'identifier les diviseurs d'un entier.
   On demande de le compléter pour qu'il permette de déterminer si le nombre a entré est un nombre parfait et s'il est un nombre à moyenne harmonique entière.

Variables entières a, k
Entrer a
Pour k allant de 1 à a
    Si le reste de la division euclidienne de a
        par k vaut 0
        Afficher k
    Fin Si
Fin Pour

Au livre IX des *Éléments*, Euclide, savant de la Grèce antique, énonce :
« Si, à partir de l'unité, on prend tant de nombres que l'on voudra successivement proportionnels en raison double, et que leur somme soit un nombre premier, ce que fera cette somme multipliée par le dernier sera un nombre parfait. »
En langage moderne, cette affirmation signifie que, pour tout entier n tel que le nombre $(2^n - 1)$ soit premier, le nombre $N = 2^{n-1}(2^n - 1)$ est un nombre parfait.

4. On donne un entier non nul n. On suppose que $P = (2^n - 1)$ est un nombre premier.
   a) Quels sont les diviseurs du nombre $N = 2^{n-1}P$ défini ci-dessus ?
   b) N est-il un nombre parfait ?
   c) N est-il un nombre à moyenne harmonique entière ?
   d) En déduire que les nombres 496 et 8 128 sont des nombres parfaits et des nombres à moyenne harmonique entière.

RETOUR AU SOMMAIRE

ASIE - PACIFIQUE
NOUVELLE CALÉDONIE
POLYNÉSIE FRANÇAISE

Troisième exercice national

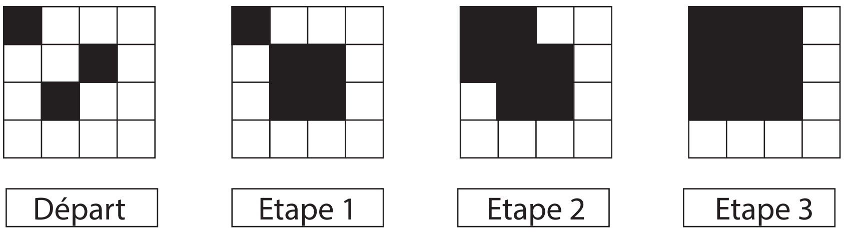
Séries autres que S

Coloriages

Énoncé

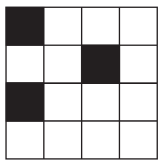
On donne un entier naturel n supérieur ou égal à 3.
Dans un damier $n \times n$ (n lignes et n colonnes), on dit que deux cases sont voisines si elles ont un côté (horizontal ou vertical) commun, et on décide que les cases peuvent être noircies selon la règle d'évolution suivante : toute case dont au moins deux des voisines sont noires à une certaine étape est noircie à l'étape suivante.
Le problème est de savoir quelle partie du damier sera finalement noircie.

Traitement d'un exemple, pour un damier 4×4



Étude de cas particuliers

1. Indiquer les étapes successives pour le damier 4×4 ci-contre :



2. Expliquer pourquoi, partant d'une configuration initiale $n \times n$ donnée, le processus finit par se figer.
3. a) Montrer que, sur un damier 3×3, noircir deux cases ou moins ne permet pas d'aboutir à un damier complètement noirci.

   b) Combien y a-t-il de façons de noircir trois cases sur un damier 3×3 pour parvenir à un damier intégralement noirci ?

Quelques résultats

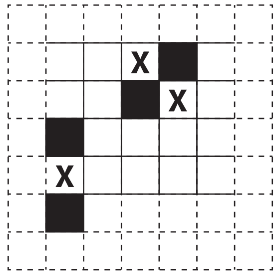
4. Sur un damier $n \times n$, peut-on aboutir à un damier complètement noirci en noircissant n cases au départ ?

5. On appelle k le nombre minimal de cases à noircir pour qu'un damier $n \times n$ soit noirci en fin de processus.

   a) Montrer que $k \leqslant n$.

   b) On s'intéresse à l'évolution de la zone noircie au cours du processus. Pour cela, on remarque qu'il y a deux dispositions (aux symétries près) dans lesquelles une case (marquée d'une croix) possède deux voisines noires : ou bien les deux cases noires ont un coin commun, ou bien non. Comment évolue le périmètre de la zone noircie au cours du processus ?

   c) En déduire que $k = n$.



RETOUR AU SOMMAIRE

AIX-MARSEILLE

Premier exercice

Toutes séries

La magibox

Énoncé

La magibox est une machine qui transforme deux nombres entiers naturels n et p à l'aide d'un procédé prédéterminé pour obtenir un troisième nombre.
Par exemple, si le procédé programmé consiste à *multiplier*, le transformé des nombres 5 et 9 sera 45. On notera : $t(5;9) = 45$.

1. On décide d'utiliser la magibox, mais on ne sait pas quel procédé est utilisé.
   Par test, on obtient $t(12;13) = 132$ mais $t(13;12) = 143$.
   Décrire un procédé permettant d'obtenir ces résultats grâce à la magibox.
2. On reprogramme la magibox.
   Par test, on obtient $t(3;5) = 81$.
   On sait que le procédé prédéterminé effectue l'opération $a \times n + b \times p$ où a et b sont des entiers positifs dont on a oublié les valeurs.
   a) Quelles sont toutes les valeurs possibles pour a et b ?
   b) On sait, de plus, que $t(52;35) = 784$. Quelles sont les valeurs de a et b ?
3. On programme la magibox afin que $t(n;p) = \sqrt{n^2 + p^2}$.
   On dira qu'un couple $(n;p)$ est acceptable si le nombre $t(n;p)$ est entier.
   a) Le couple (7 ; 24) est-il acceptable ?
   b) Déterminer deux entiers naturels distincts qui forment avec 8 un couple acceptable.
   c) Montrer que s'il existe deux entiers naturels a et b tels que $n = a^2 - b^2$ et $p = 2ab$, alors le couple $(n;p)$ est acceptable.
   d) (**Série S seulement**) Montrer que si un couple acceptable $(n;p)$ vérifie $n = a^2 - b^2$ et $p = 2ab$ avec b pair alors le produit $n \times p$ est un multiple de 12.

RETOUR AU SOMMAIRE

AIX-MARSEILLE

Deuxième exercice

Série S

Curieuses traversées

Énoncé

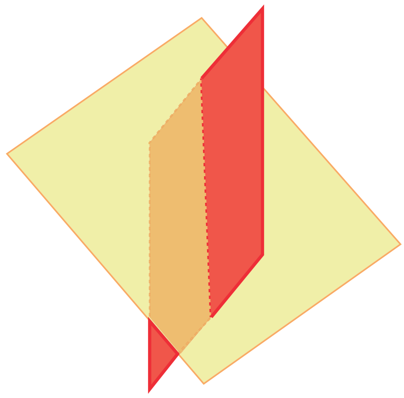
Cet exercice permet d'étudier la possibilité de faire traverser certains objets (des figures planes et un solide) par des objets de même forme, mais de dimensions plus grandes.

Partie A

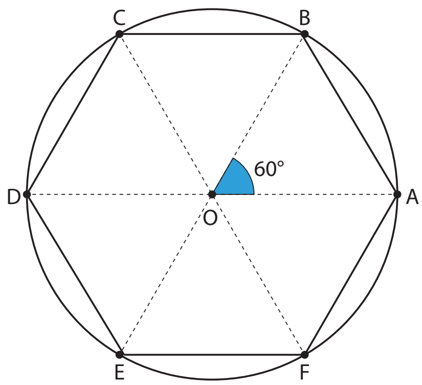
On appelle diamètre d'un polygone régulier la plus grande distance possible entre deux points de ce polygone. De même, on appelle hauteur d'un polygone régulier la distance :

- entre un sommet et son côté opposé lorsque ce polygone possède un nombre impair de sommets.
- entre deux côtés parallèles lorsque ce polygone possède un nombre pair de sommets.

1. On considère un carré C_1 de côté 1 unité (figure ci-contre).
   a) Quel est son diamètre ? Quelle est sa hauteur ?
   b) Est-il possible de faire passer un carré de côté 1,4 unité à travers le carré C_1 ?

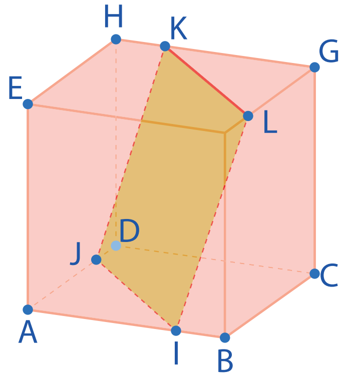


2. On considère un triangle équilatéral T_1 de côté 1 unité.
   a) Quel est son diamètre ? Quelle est sa hauteur ?
   b) Quelle doit être la relation entre la hauteur d'un triangle équilatéral T_2 et le diamètre de T_1 pour qu'il soit possible de faire traverser T_2 dans T_1 ?
   c) Quel est le côté du plus petit triangle équilatéral qu'il n'est pas possible de faire traverser dans T_1 ?
3. On considère un hexagone régulier H_1 de côté 1 unité.
   a) Quel est son diamètre ? Quelle est sa hauteur ?
   b) Quel est le côté du plus petit hexagone régulier qu'il n'est pas possible de faire traverser dans H_1 ?



Partie B

Dans cette partie on considère un cube ABCDEFGH de côté 1 unité. Les points I, J, K et L sont disposés comme sur la figure ci-dessous avec :$AI = \frac{3}{4}$,$AJ = \frac{3}{4}$,$HK = \frac{1}{4}$ et $FL = \frac{1}{4}$.



1. a) Calculer la longueur IJ.
   b) Calculer la longueur IL (on pourra travailler dans le triangle IFL rectangle en F).
   c) Justifier que IJKL est un carré.
2. En s'aidant de la question précédente, expliquer comment il est possible de faire traverser le cube ABC-DEFGH par un cube de côté légèrement plus grand.

RETOUR AU SOMMAIRE

AIX-MARSEILLE

Troisième exercice

Séries autres que S

Histoires de prix

Énoncé

1. Manon décide d'aller faire du shopping et sa mère lui donne de l'argent.
   Elle se rend dans 5 magasins différents, et dépense dans chacun d'entre eux 10 € de plus que la moitié de la somme dont elle disposait en entrant. A la fin, elle a tout dépensé.
   a) De combien d'argent disposait-elle en entrant dans le dernier magasin ?
   b) Quelle somme d'argent lui avait donnée sa mère au départ ?
2. Manon achète deux articles dans une supérette. Le commerçant, par étourderie, multiplie les prix au lieu de les ajouter. Fort heureusement, cela ne modifie pas le résultat qui est de 4,90 €.
   Quels sont les prix des deux articles ?
3. Ce même commerçant vend en exclusivité des CDSupers et des DVDExtras.
   Il y a exactement : 1 € d'écart entre le prix de 5 CDSupers et celui de 3 DVDExtras (mais on ne sait pas ce qui est le plus cher).
   1 € d'écart entre le prix de 18 CDSupers et celui de 11 DVDExtras (et on ne sait pas ce qui est le plus cher).
   Échangeriez-vous gratuitement vos 21 CDSupers contre 13 DVDExtras ?

RETOUR AU SOMMAIRE

AMIENS

Premier exercice

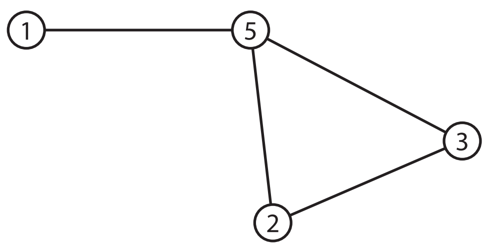
Série S

Graphe et chiffres

Énoncé

On considère un graphe avec des chiffres dans les nœuds. A chaque nœud on fait correspondre la somme de ses voisins.

Par exemple :



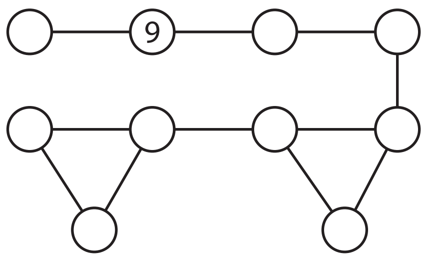
Ici, 1 est associé avec 5 ;

5 est associé avec $1+2+3=6$

2 est associé avec $5+3=8$

Et 3 est associé avec $2+5=7$.

On a mis les entiers de 0 à 9 dans le graphe suivant et associé à chaque nœud la somme de ses voisins. Malheureusement, presque tous les chiffres ont été effacés.



A vous de les retrouver sachant que :

$0 \to 10$	$1 \to 9$	$2 \to 10$
$3 \to 9$	$4 \to 18$	$5 \to 10$
$6 \to 9$	$7 \to 9$	$8 \to 9$
	$9 \to 9$	

La $\to$ signifie « est associé à ».

RETOUR AU SOMMAIRE

AMIENS

Deuxième exercice

Série S

Diagonales

Énoncé

1. Vérifier que, pour tous réels x, y, z, on a : $(x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz$.
2. La somme des aires des faces d'un parallélépipède rectangle est 22 cm² et la somme des longueurs de ses arêtes est 24 cm. Déterminer la longueur de ses diagonales intérieures.

RETOUR AU SOMMAIRE

AMIENS

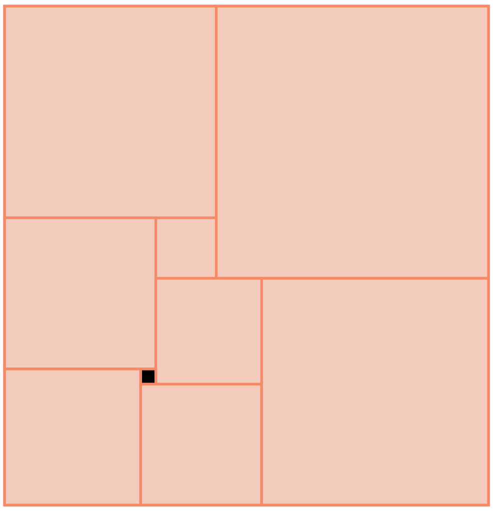
Troisième exercice

Séries STI2D/STL/STD2A

Carrés dans un rectangle

Énoncé

La figure suivante représente un rectangle découpé en carrés. Calculer la longueur et la largeur de ce rectangle sachant que le petit carré noir a son côté qui mesure 4 cm.



RETOUR AU SOMMAIRE

AMIENS

Quatrième exercice

Séries ES/L/STMG/ST2S

La mourre

Énoncé

« ***Les grecs jouent beaucoup à pair ou non : ils ont encore un autre jeu, fort en usage en Italie, et nommé communément la mourre. Il consiste à faire deviner le nombre des doigts qu'on élève, en tenant les autres pliés dans un lieu obscur.*** »

Pierre-Augustin Guys, *Voyage littéraire de la Grèce, ou Lettres sur les Grecs anciens et modernes, avec un parallèle de leurs mœurs*, Lettre 14.

La mourre est un jeu dans lequel deux joueurs se montrent simultanément un certain nombre de doigts d'une de leurs mains, tout en annonçant chacun la somme présumée des doigts dressés par les deux joueurs. Gagne qui devine cette somme.

Bien que le hasard n'ait pas toute sa place dans ce jeu, peut-on affirmer que toutes les combinaisons ont les mêmes chances d'apparaître ?

RETOUR AU SOMMAIRE

ASIE - PACIFIQUE
NOUVELLE CALÉDONIE
POLYNÉSIE FRANÇAISE

Premier exercice académique

Toutes séries

Paradoxe de Bertrand

Énoncé

Joseph Bertrand est un mathématicien français du XIXᵉ siècle. Il a énoncé un paradoxe en 1889 qui a mis en évidence les limites du recours à l'intuition dans la théorie des probabilités.

Partie 1 : un peu de géométrie

On rappelle que si A et B sont deux points distincts d'un cercle, le segment [AB] est appelé une corde.

1. Tracer un cercle $\mathscr{C}_1$ de centre O et de rayon 4 cm et placer un point A sur ce cercle.
2. Tracer à la règle et au compas le triangle équilatéral inscrit dans le cercle dont A est un sommet (*On laissera apparent les traits de construction*). Nommer H et E les 2 autres sommets.
3. Prouver que le côté de ce triangle mesure $4\sqrt{3}$.
4. Tracer le cercle $\mathscr{C}_2$ inscrit dans ce triangle et prouver que son rayon est 2 cm.
5. Prouver qu'un point I placé à l'intérieur du cercle $\mathscr{C}_1$ définit une unique corde de ce cercle dont I est le milieu, à l'exception d'un point particulier que l'on précisera.

Partie 2 : le paradoxe de Bertrand

Dans cette partie, on cherche à déterminer la probabilité qu'une corde choisie au hasard sur le cercle $\mathscr{C}_1$ ait une longueur supérieure au côté du triangle équilatéral AHE. Pour cela, on envisage les deux modélisations suivantes :

1. ***Modèle 1 :*** on choisit au hasard sur le cercle $\mathscr{C}_1$ un point B distinct de A.
   a) Déterminer la probabilité que la corde [AB] soit plus longue que [AH].
   b) Quelle est la probabilité que le milieu de la corde [AB] soit situé à l'intérieur du cercle $\mathscr{C}_2$?
2. ***Modèle 2 :*** on choisit au hasard un point I à l'intérieur du cercle $\mathscr{C}_1$.
   a) Quelle est la probabilité que la corde de milieu I soit plus longue que [AH] ?
   b) Quelle est la probabilité que le point I soit situé à l'intérieur du cercle $\mathscr{C}_2$?
3. Quels commentaires vous inspirent ces résultats ?
4. Ces 2 figures montrent des tirages aléatoires d'environ 500 cordes suivant l'un des 2 modèles (pour le modèle 1, le point A est lui-même choisi aléatoirement sur le cercle $\mathscr{C}_1$).

figure A

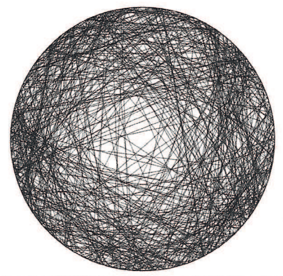
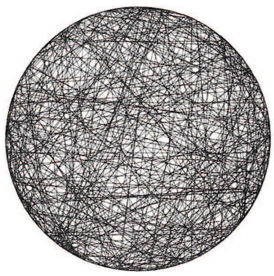


figure B



Laquelle de ces deux figures correspond au modèle 2 ? (*justifiez votre réponse*)

RETOUR AU SOMMAIRE

ASIE - PACIFIQUE NOUVELLE CALÉDONIE POLYNÉSIE FRANÇAISE

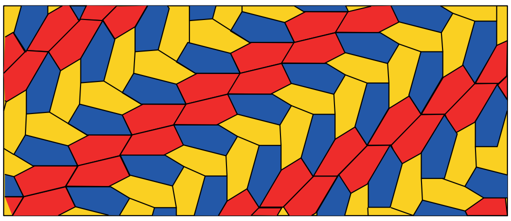
Deuxième exercice académique

Toutes séries

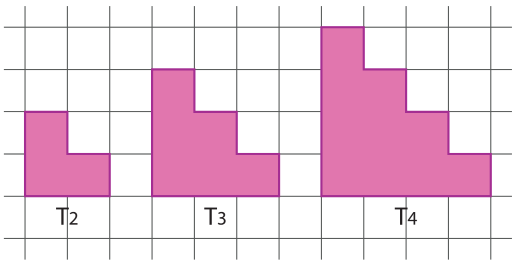
Une histoire de pavage

Énoncé

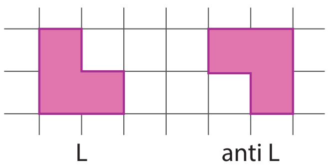
Aout 2015 : Une équipe de mathématiciens a bouleversé le monde des maths en découvrant un nouveau type de pentagone capable de « paver un plan », c'est-à-dire que les pièces peuvent s'assembler sur une surface plane sans qu'elles ne se chevauchent ni ne laissent de trous.



On considère pour notre part les surfaces T_2, T_3 et T_4 suivantes :



Plus généralement, pour tout entier n : $2 \geqslant 2$, on considère la surface T_n constituée de $1+2+\cdots+n$ carreaux formant un triangle « crénelé ».
La surface T_n est dite *pavable* si on peut la recouvrir entièrement par des pièces, sans qu'elles ne se chevauchent ou ne dépassent de la surface.
On s'intéresse ici au pavage de T_n par deux types de pièces **L** et **anti-L** définies ci-dessous.



1. Les surfaces T_2, T_3, T_4 sont-elles pavables ? Justifier vos réponses.
2. a) Montrer que T_9 est pavable.

   b) En déduire que T_{12} et T_{14} sont aussi pavables.
3. a) Montrer que pour que T_n soit pavable il est nécessaire que $n \times (n+1)$ soit un multiple de 3.
   b) Montrer que ce n'est pas une condition suffisante.
   c) Y a-t-il une infinité de surfaces T_n non pavables ? Justifier.
4. Montrer que si n est impair et T_n est pavable alors T_{n+3} est pavable.
5. Montrer que si n est pair et T_n est pavable alors T_{n+9} est pavable.
6. La surface T_{2016} est-elle pavable ?
7. Y a-t-il une infinité de surfaces T_n pavables ? Justifier.

RETOUR AU SOMMAIRE

BESANÇON

Premier exercice

Toutes séries

Au feu rouge

Énoncé

En moyenne, nous passons 6 mois de notre vie assis devant un feu rouge !
Certains designers ont imaginé des feux tricolores qui comprennent un chronomètre afin d'informer les automobilistes du temps d'attente restant avant le feu vert. Cette invention ne change pas le temps perdu au feu mais permet d'anticiper le passage du feu vert au feu rouge.

On considère un feu de signalisation qui clignote pendant 2 minutes (les voitures passent) puis passe au rouge pendant 1,5 minutes (les voitures s'arrêtent et sont en attente).

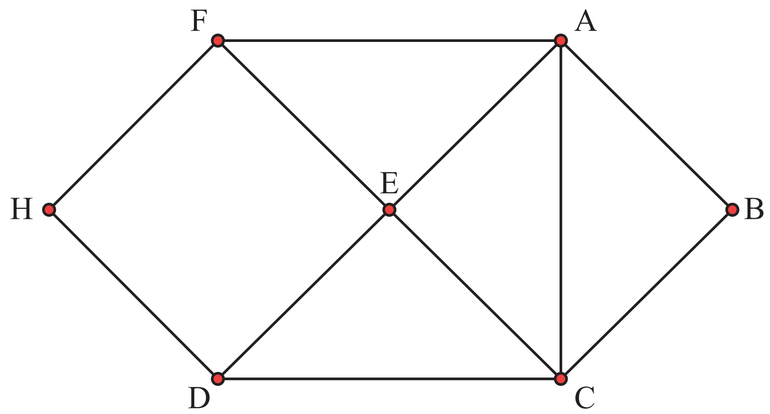
1. Une voiture arrive à un instant t.
   a) Expliquer pourquoi t peut être assimilé au tirage d'un réel aléatoire de l'intervalle $[0 ; 3{,}5]$.
   b) Quelle est la probabilité que la voiture arrive au feu alors qu'il est rouge ?
   c) Quelle est la probabilité que le temps d'attente au feu soit nul ?
   d) Déterminer la probabilité que le temps d'attente au feu soit supérieur à 1 minute.
   e) Déterminer la probabilité que le temps d'attente au feu soit inférieur à x minutes où x est un réel appartenant à l'intervalle $[0 ; 1{,}5]$
   f) Un automobiliste patiente depuis 50 secondes au feu rouge. Quelle est la probabilité que son temps d'attente total soit inférieur à une minute ?

2. L'algorithme ci-dessous permet de simuler l'arrivée d'une voiture au feu et d'afficher le temps d'attente.

```
Variables :    t et a sont des nombres réels
Traitement :   t prend une valeur aléatoire entre 0 et 3,5
               Si t ⩽ 2 alors
                  a prend la valeur 0
                  Afficher « le temps d'attente est nul »
               Sinon
                  a prend la valeur 3,5 − t
Sortie :       Afficher « Le temps d'attente est de »
               Afficher a
               Afficher « minutes. »
```

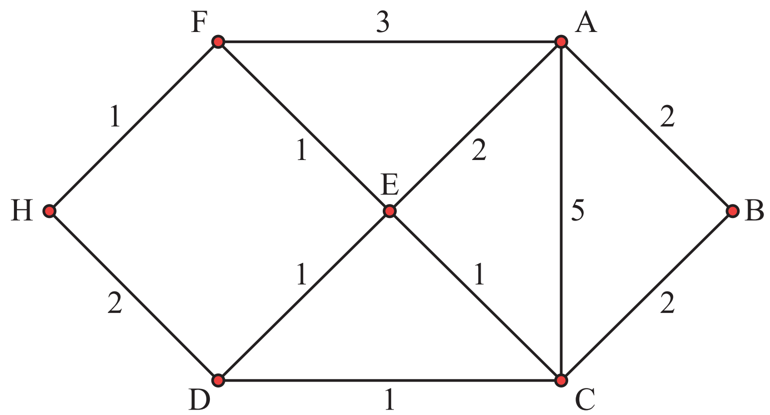
   Modifier l'algorithme pour qu'il donne le temps d'attente moyen au feu, que l'on pourra estimer à partir de 1000 véhicules.

3. Le schéma ci-dessous représente le plan d'une ville. Les segments matérialisent les principales avenues et les feux à l'intersection de ces avenues sont désignés par les points A, B, C, D, E, F et G.



a) Un piéton souhaite se promener dans la ville en parcourant toutes les avenues une et une seule fois. Est-ce possible ? Si oui, donner un trajet possible en mentionnant la liste des feux rencontrés, dans l'ordre.

b) Un automobiliste est au feu F. Déterminer le nombre de chemins lui permettant d'aller de F à D sans emprunter deux fois le même feu.
On a indiqué sur le schéma ci-dessous la longueur des avenues en kilomètres.



Parmi les chemins de la question précédente, quel est le plus long ?

RETOUR AU SOMMAIRE

BESANÇON

Deuxième exercice

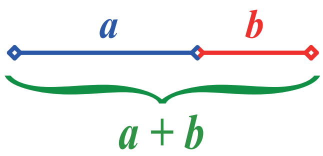
Toutes séries

Le nombre d’Or

Énoncé

Présentation :

Le nombre d’or est une proportion, définie initialement en géométrie comme l’unique rapport entre deux longueurs a et b telles que le quotient de la somme des deux longueurs $a+b$ par la plus grande a soit¨ égal à celui de la plus grande a par la plus petite b,



c’est-à-dire **l’unique rapport entre deux longueurs a et b tel que**

$$\frac{a+b}{a}=\frac{a}{b}.$$

Le découpage d’un segment en deux longueurs vérifiant cette propriété est appelée par Euclide découpage en « extrême et moyenne raison ». Le nombre d’or $\frac{b}{a}$ est maintenant souvent désigné par la lettre Φ (phi) en l’honneur du sculpteur Phidias qui l’aurait utilisé pour concevoir le Parthénon.

? Partie A - Généralités sur le nombre d ?or

Soient a et b deux nombres tels que : $\dfrac{a+b}{a}=\dfrac{a}{b}$.

1. On pose $\Phi=\dfrac{a}{b}$.
   a) Montrer que Φ est solution de l’équation $x^2-x-1=0$.
   b) Justifier que $\Phi=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. Donner une valeur approchée de Φ à 10^{-5} près.
2. a) Montrer que $\Phi=1+\dfrac{1}{\Phi}$.
   b) En déduire que

$$\Phi=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\Phi}}\text{ et }\Phi=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\Phi}}}.$$

3. On considère la suite de fractions suivantes :

$$F_0=1;F_1=1+\frac{1}{1};F_2=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}};F_3=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}}};\ldots$$

   a) Écrire les fractions F_4 et F_5 et les simplifier.
   b) Soit n un entier naturel. Écrire un algorithme permettant de calculer F_n.

c) A l'aide de la calculatrice, donner une valeur approchée à 10^{-9} de F_{20}.

d) Que peut-on conjecturer sur les nombres F_n lorsque n devient grand ?

Partie B - Nombre de pavages par des dominos et nombre d'or

On considère un quadrillage $n \times 2$ dont la longueur comporte n carreaux et la hauteur 2 carreaux. On s'intéresse au nombre $K(n)$ de manières différentes de paver complètement ce quadrillage par des dominos constitués de deux carreaux ayant un côté commun.
Les dominos recouvrent deux cases du quadrillage ayant un côté commun.

On pose $K(0) = 1$ car il existe une seule manière de ne mettre aucun domino dans un quadrillage 0×2.

1. a) Justifier que $K(1) = 1$ et $K(2) = 2$.

   b) Déterminer $K(3)$.

   c) Justifier que, pour tout nombre entier n supérieur ou égal à 1, $K(n+1) = K(n) + K(n-1)$.

2. a) Soit r un nombre réel non nul.
   Montrer que le nombre r vérifie la relation $r^{n+1} = r^n + r^{n-1}$ pour tout entier naturel n si, et seulement si $r = \Phi$ ou $r = \Phi - 1$.

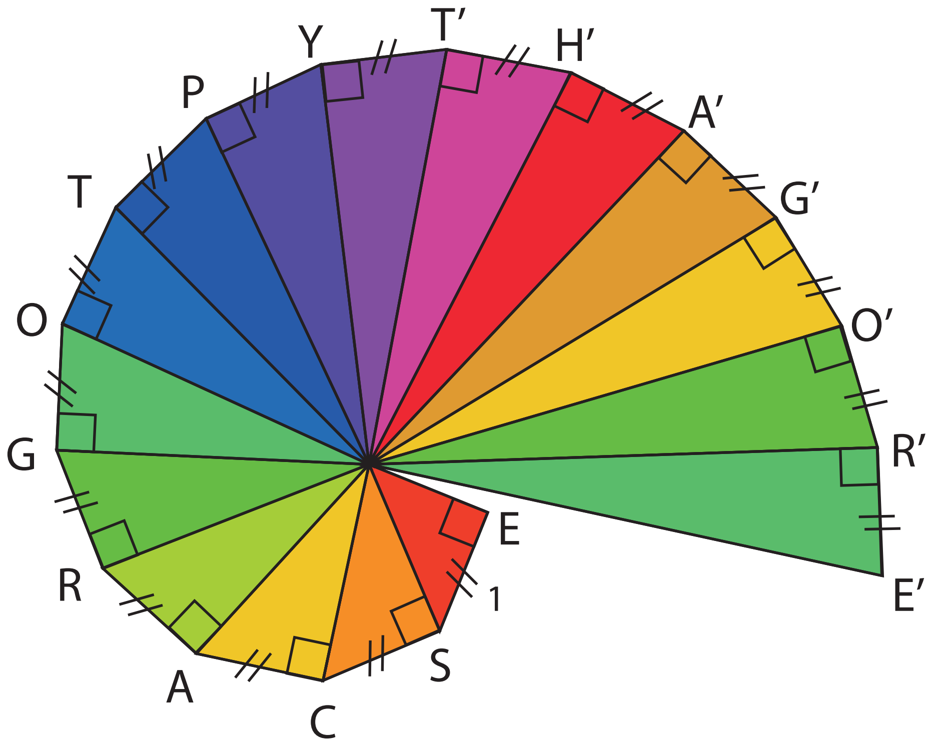
   b) Soient α et β deux nombres réels.
   Montrer que les nombres de la forme $u_\alpha \Phi^n + \beta(1-\Phi)^n$ vérifient, pour tout entier naturel n non nul, l'égalité $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$.
   Dans la suite de l'exercice, on admet que les nombres de la forme $u_\alpha \Phi^n + \beta(1-\Phi)^n$ sont les seuls vérifiant, pour tout entier naturel n non nul, la relation $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$.

   c) Déterminer α et β tels que $u_0 = u_1 = 1$.

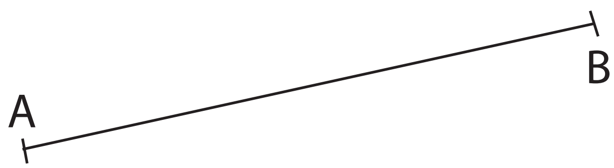
   d) En déduire une expression de $K(2016)$. (On pourra donner une expression de $K(2016)$ en fonction de Φ)

Partie C - Construction géométrique du nombre d'or

Un segment de longueur a est dessiné en annexe (à rendre avec la copie).
On souhaite tracer un segment de longueur b tel que $\dfrac{a}{b} = \Phi$.
On dispose pour cela d'une équerre et d'une règle non graduées, d'un compas, et de l'escargot dePythagore ci-dessous.
Construire, sur l'annexe, un segment de longueur b en expliquant clairement la démarche.



Annexe
à rendre avec la copie



BORDEAUX

Premier exercice

Toutes séries

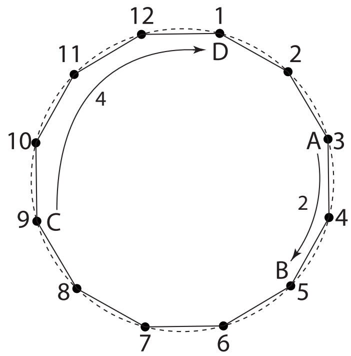
Coloriages

Énoncé

On a placé dans l'ordre les nombres 1, 2, ..., N aux sommets d'un polygone régulier.

La notion de distance est prise dans le sens suivant :
Soient A et B deux sommets du polygone. La distance entre A et B est la longueur du plus petit arc de cercle qui joint A et B, l'unité étant la longueur de l'arc séparant deux sommets consécutifs.

Par exemple, pour $N = 12$, si A et B correspondent aux points marqués 3 et 5, la distance entre A et B est 2. Si C et D correspondent aux points marqués 9 et 1, la distance entre C et D est 4.



1. Dans cette question, on suppose que le polygone a 12 sommets.
   a) Montrer qu'il est possible de colorier quatre de ces points en vert de sorte que les distances entre chaque paire de points verts soient toutes différentes.
   b) Expliquer pourquoi ce n'est pas possible avec cinq points. On pourra comparer le nombre de paires avec le nombre de distances possibles.

On désigne désormais par N le nombre de sommets du polygone régulier, $N > 12$.

2. Quelle est la valeur minimale de N pour laquelle les points marqués 1, 2, 4, 8, 16 peuvent être coloriés en vert de sorte que les distances entre chaque paire de points verts soient toutes différentes ?
3. On suppose que 5 points sont coloriés en vert de sorte que les distances entre chaque paire de points verts soient toutes différentes.
   a) Justifier que $N \geqslant 20$.
   b) Démontrer que si N est pair, la distance entre deux points marqués a et b est un entier de même parité que $a - b$. En déduire que N est différent de 20.
   c) Quelle est la valeur minimale de N qui permet de colorier cinq points en vert de sorte que les distances entre chaque paire de points verts soient toutes différentes ?
4. Montrer que pour $N = 2016$, on peut colorier au moins 11 points ayant la propriété habituelle.

RETOUR AU SOMMAIRE

BORDEAUX

Deuxième exercice

Série S

La tombola

Énoncé

Pour une tombola, on a vendu tous les billets numérotés $1, 2, 3, \dots, n$ où n est un entier supérieur ou égal à 2016.

On détermine les numéros des billets gagnants de la façon suivante : on écrit de gauche à droite la liste des entiers de 1 à n sur un tableau puis on passe en revue cette liste dans l'ordre croissant en effaçant les entiers qui sont les triples des nombres non effacés. On obtient donc la liste dont les premiers nombres sont :

$$1, 2, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 13, 14, 16, 17, 18, \dots$$

On décide que les numéros effacés sont les gagnants. Les autres sont perdants.

1. Justifier que le numéro 100 est perdant. En déduire que 300 est gagnant.
   Le numéro 2016 est-il perdant ou gagnant ?
2. Démontrer que si le numéro a est perdant alors le numéro $9a$ l'est également.
   Le numéro 729 est-il gagnant ou perdant ?
   Parmi les numéros qui sont des puissances de 3, lesquels sont perdants ?
3. On admet que l'algorithme suivant permet de répondre à la question « le nombre saisi correspond-il à un numéro gagnant ? »

```
Saisir un entier n
Tant que N est divisible par 9
   Remplacer N par N/9
Fin de boucle Tant que
Si N est divisible par 3
   Afficher « Le numéro N est gagnant »
Sinon
   Afficher « Le numéro N est perdant »
```

   a) Faire fonctionner cet algorithme pour $N = 100$, $N = 300$, $N = 2016$.
   b) Soit a un entier supérieur ou égal à 1 et b un nombre non divisible par 3.
   Qu'affiche l'algorithme lorsque l'on saisit le nombre $N = 3b$?
   On pourra distinguer deux cas selon la parité de a.
4. Démontrer qu'un numéro qui peut s'écrire comme produit de deux numéros perdants est perdant.
5. Dans cette question, on suppose que $n = 2016$.
   Quel est le pourcentage de numéros gagnants ?
6. En réalité, on a dénombré 2016 numéros perdants.
   Quelle est la plus petite valeur possible du nombre n de billets vendus ?

RETOUR AU SOMMAIRE

BORDEAUX

Troisième exercice

Séries autres que S

Grande famille

Énoncé

On désigne par $\mathscr{E}$ l'ensemble des nombres entiers qui s'écrivent avec quatre chiffres, chacun de ces chiffres étant différent de 0.

On rappelle que l'entier écrit $\overline{abcd}$ dans le système décimal est égal à $1000a+100b+10c+d$ où a, b, c, d désignent respectivement le chiffre des milliers, des centaines, des dizaines et des unités.

1. Quel est le nombre d'éléments de $\mathscr{E}$?

   Si n est un élément de $\mathscr{E}$, on appelle cousin de n tout nombre de $\mathscr{E}$, distinct de N, écrit avec les même quatre chiffres que lui. Par exemple 4363 et 6343 sont cousins. Un nombre N et l'ensemble de ses cousins de 2537 constituent une famille de N.

2. Quel est le nombre de cousins de 2537 ? de 2532 ?

   N étant un élément de $\mathscr{E}$, on appelle $Max(N)$ le plus grand élément de sa famille et $Min(N)$ le plus petit.

3. Combien y a-t-il d'entiers N de $\mathscr{E}$ tels que $Max(N) = Min(N)$?

   Si N est un élément de $\mathscr{E}$, on définit ses mensurations, à savoir sa taille notée $T(N)$ égale à la somme de ses chiffres et son poids noté $P(N)$ égal au produit de ses chiffres.

4. Quel est le plus petit entier N_0 de $\mathscr{E}$ dont le poids dépasse 1000 ?
5. Quelles sont les mensurations de 2449 ? Déterminer un entier N_1 de $\mathscr{E}$ qui n'est pas dans la famille de 2449 et a les même mensurations.
6. Trouver un entier N_2 de $\mathscr{E}$ tel que $Min(N_2)$ est divisible par 5, $Max(N_2)$ est pair, $T(N_2) = 13$ et $P(N_2)$ est divisible par 3.
7. On s'intéresse aux entiers N de $\mathscr{E}$ tels que $Min(N) + Max(N) = 11\,330$.
   On désigne par a, b, c, d les chiffres de $Min(N)$ tels que $Min(N) = \overline{abcd}$ avec $a \leqslant b \leqslant c \leqslant d$.
   a) Montrer que $Min(N) + Max(N) = 11[91(a+d)+10(b+c)]$.
   b) Quelle est la valeur de $a+d$?
   c) Déterminer la taille de N.
   d) Combien d'entiers N de $\mathscr{E}$ sont solutions de l'équation $Min(N) + Max(N) = 11\,330$?

RETOUR AU SOMMAIRE

CAEN

Premier exercice

Toutes séries

Les mots

Énoncé

On appelle « mot » n'importe quelle juxtaposition de lettres que ce « mot » ait un sens ou pas.
On associe à chaque mot un couple de nombres entiers (x, y) de la manière suivante : Au début (x, y) vaut (0,0).
On considère alors les lettres du mot, les unes après les autres, de gauche à droite ; chaque lettre du mot transforme le couple (x, y) selon la règle suivante :

la lettre A change x en $x+1$, la lettre B change x en $x-1$, la lettre C change x en $x+0.5$;

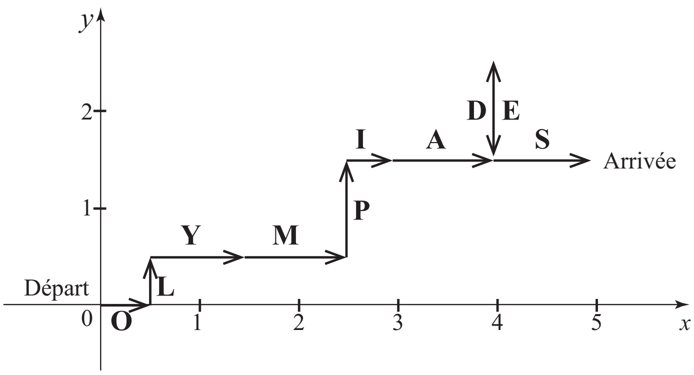
la lettre D change y en $y+1$, la lettre E change y en $y-1$, la lettre F change y en $y+0.5$;

la lettre G change x en $x+1$, la lettre H change x en $x-1$, la lettre I change x en $x+0.5$;

et ainsi de suite, en suivant l'ordre alphabétique.

Exemples : le mot « HD » donne le couple $(-1;1)$
le mot « BAC » donne le couple $(0,5;0$
le mot « KAALL » donne le couple $(2;0)$.

1. Quel couple obtient-on avec le mot « SELFIE » ?
2. Combien existe-t-il de mots de deux lettres conduisant au couple $(1;1)$?
3. Combien existe-t-il de mots de trois lettres conduisant au couple $(1;1)$?
4. Peut-on obtenir le couple $(0;-0,5)$ avec un mot de deux lettres, avec un mot de trois lettres, avec un mot de quatre lettres, avec un mot de cinq lettres et avec un mot de n lettres (n entier naturel supérieur ou égal à 2) ?
5. On considère le plan muni d'un repère orthonormé.
En partant de l'origine du repère, on arrive avec le mot **OLYMPIADES** au point de coordonnées $(5;1,5)$ comme indiqué sur le graphique ci-contre.



   a) En partant de l'origine du repère, peut-on arriver au point de coordonnées (5,6) avec un mot de 10 lettres ?
   b) Quelles sont les valeurs que peut prendre le nombre y pour arriver au point de coordonnées $(-3,5;y)$ en partant de l'origine du repère avec un mot de 10 lettres ?
   c) Dans quelle partie du plan se trouvent les points associés à un mot de 10 lettres.

RETOUR AU SOMMAIRE

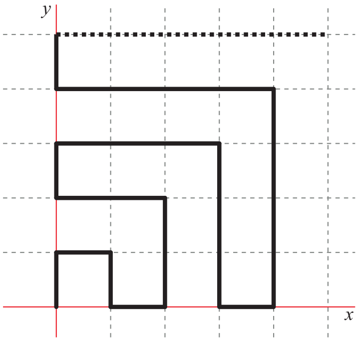
CAEN

Deuxième exercice

Série S

Le lièvre infatigable

Énoncé



Un lièvre infatigable, partant du point (0 ;0), a un déplacement comme indiqué ci-contre. Il se déplace d'un point à coordonnées entières vers un autre point à coordonnées entières parallèlement aux axes du repère orthonormé. Il parcourt une unité en une seconde.

1. a) Combien de temps le lièvre met-il pour aller de l'origine au point de coordonnées (1 ;2) ? Puis de l'origine au point de coordonnées (3 ;3) ? Puis de l'origine au point de coordonnées (4 ;2) ?

   b)) Quelles sont les coordonnées du point atteint en 1 minute à partir de l'origine ?

2. a) Quel est le temps mis par le lièvre infatigable pour atteindre le point de coordonnées $(n;n)$ depuis l'origine ?

   On pourra distinguer les cas où n est pair et où n est impair.

   On admet que $1+2+3\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$.

   b) Quel est le temps mis par le lièvre infatigable pour atteindre le point de coordonnées $(n;p)$ depuis l'origine ?

3. Déterminer les coordonnées du point atteint en 2016 secondes.

RETOUR AU SOMMAIRE

CAEN

Troisième exercice

Séries autres que S

Une histoire de moyenne

Énoncé

1. Paul veut calculer sa moyenne. Il a eu deux notes égales à 15, douze notes égales à 8 et sept autres notes comprises entre 9 et 14. La moyenne des sept notes comprises entre 9 et 14 est 12.

   Déterminer sa moyenne annuelle
2. Gwénaëlle a eu cinq notes égales à 7, six notes égales à 9, trois notes égales à 10, quatre notes égales à 12, une note égale à 13 et d'autres notes égales à 15.

   Sachant que sa moyenne annuelle est 10, déterminer le nombre de notes égales à 15.
3. Yohann a eu 15 pour note maximale et 8 pour note minimale. Sa moyenne annuelle est 10. S'il fait la moyenne des notes autres que 15 et 8, il trouve 12.

   Justifier qu'il a eu au moins deux notes égales à 15 et plus de six notes égales à 8.
4. Pierre a eu plusieurs notes, toutes comprises entre 6 et 15.
   - Il a eu exactement six devoirs notés entre 7 et 14.
   - S'il fait la moyenne de ces six notes (comprises entre 7 et 14), il obtient 12.
   - Le nombre de ses notes égales à 6 est le double du nombre de ses notes égales à 15.

   Sophie a eu plusieurs notes, toutes comprises entre 6 et 15.
   - Elle a eu exactement neuf devoirs notés entre 7 et 14.
   - Si elle fait la moyenne de ces neuf notes (comprises entre 7 et 14), elle obtient 12.

   Pierre et Sophie constatent que le nombre de notes égales à 15 de Sophie est le même que le nombre de notes égales à 6 de Pierre et que le nombre de notes égales à 6 de Sophie est le même que le nombre de notes égales à 15 de Pierre.

   Sachant que la moyenne de Sophie est de 2 points supérieure à la moyenne de Pierre, déterminer la moyenne de ces deux élèves.

RETOUR AU SOMMAIRE

CLERMONT-FERRAND

Premier exercice

Toutes séries

Si tous les jumeaux du monde voulaient se donner la main…

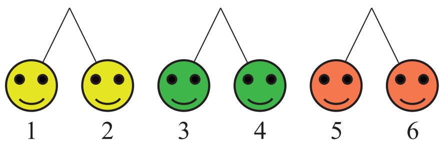
Énoncé

n paires d'enfants jumeaux, soit $2n$ enfants, se rassemblent, n étant un entier supérieur ou égal à 1. Chacun tient par une main son jumeau et, au hasard, de son autre main prend la main libre d'un enfant.

On s'intéresse à l'événement E_n « obtenir une seule ronde constituée des $2n$ enfants ». Peu importe que ceux-ci soient tournés vers l'intérieur ou l'extérieur de la ronde.

Le problème consiste à déterminer la probabilité p_n de cet événement.

1. Dans cette question $n = 1$. Que vaut la probabilité p_1 ?
2. Dans cette question $n = 2$. Montrer que la probabilité p_2 est égale à $\frac{2}{3}$.
3. Dans cette question $n = 3$.
   On modélise le problème en représentant les jumeaux comme l'indique le schéma ci-dessous.

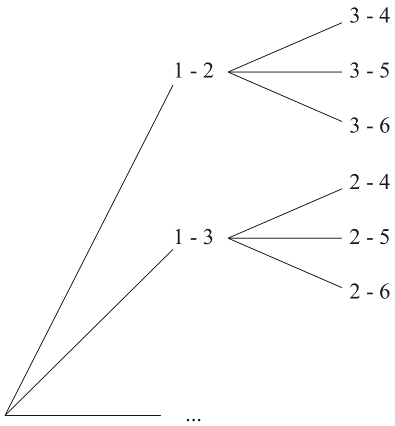


L'expérience consiste alors à associer les nombres deux par deux. Une issue sera notée, par exemple : $\omega = (1-4, 2-3, 5-6)$.

a) L'issue ω ci-dessus est-elle favorable à l'événement E_3 ?

b) Expliquer pourquoi on peut se contenter de désigner ω par $e = (1-4, 2-3)$.

c) Après avoir reproduit et complété l'arbre suivant, déterminer le nombre d'issues possibles ?



   d) Est-il vrai que $p_3 \geqslant 50\%$?

4. Dans cette question $n = 4$. Est-il vrai que $p_4 \geqslant 50\%$?

5. On admet que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, $p_{n+1} = \dfrac{2n}{2n+1} p_n$.

   a) Retrouver avec cette formule les valeurs de p_2 et de p_3 .

   b) Écrire un algorithme qui, un entier n supérieur ou égal à 1 étant donné, affiche p_n .

   c) Le programmer à la calculatrice. Est-il vrai qu'une valeur approchée à 10^{-2} près de p_{2016} est 2% ? Interpréter le résultat au vu du problème des jumeaux étudié.

RETOUR AU SOMMAIRE

CLERMONT-FERRAND

Deuxième exercice

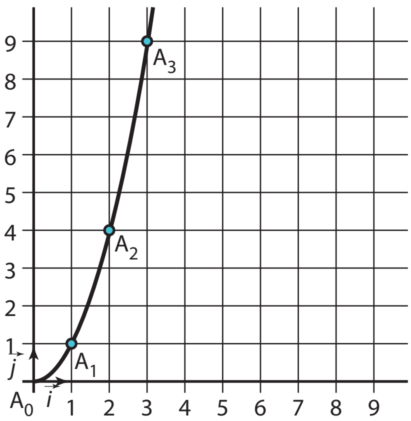
Série S

Chemins aléatoires paraboliques

Énoncé

On considère $(A_0; \vec{i}, \vec{j})$ un repère du plan. Pour tout entier naturel n, on note A_n le point de coordonnées $(n; n^2)$.
On se place sur l'origine du repère puis on parcourt **un chemin de N pas** ($N \geqslant 1$) de sorte que chacun d'eux soit effectué aléatoirement et de manière équiprobable vers la droite (noté **D**) ou vers le haut (noté **H**).

Par exemple si $N = 2$, on a :
• 4 chemins possibles : **DD, DH, HD** et **HH** ;
• 3 arrivées possibles : le point $\mathbf{A}_1$, le point de coordonnées (2 ;0), ou celui de coordonnées (0 ;2).



Nous appellerons chemin parabolique tout chemin ayant comme arrivée un des points $\mathbf{A}_n$ (pour $n \geqslant 1$) et passant par tous les précédents, c'est-à-dire $\mathbf{A}_0$, $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$, … et $\mathbf{A}_{n-1}$.

Par exemple :
• **DH** est un chemin parabolique (on part de $\mathbf{A}_0$ et on arrive en $\mathbf{A}_1$) ;
• ainsi que **HDHHDH** (on part de $\mathbf{A}_0$, on passe par $\mathbf{A}_1$ et on arrive en $\mathbf{A}_2$) ;
• tandis que **DD** et **HDHDD** ne sont pas des chemins paraboliques.

Partie A

1. Donner l'exemple d'une valeur de N pour laquelle il n'existe pas de chemin parabolique.
2. Donner toutes les valeurs de N comprises entre 1 et 100 pour lesquelles il existe au moins un chemin parabolique.
3. Compléter l'algorithme ci-dessous pour qu'il détermine s'il existe un chemin parabolique pour l'entier N saisi par l'utilisateur.

```
Variables : N,p (entiers)
Début
  p prend la valeur 0
  Saisir N
  TantQue ................ < N
    p prend la valeur p + 1
  FinTantQue
  Si .................. = N
    Afficher « Il existe un chemin parabolique pour cette valeur de N »
  Sinon
    Afficher « Il n'existe pas de chemin parabolique pour cette valeur de N »
  FinSi
Fin
```

Partie B

Dans cette partie on suppose que $N = 20$.

1. Combien a-t-on d'arrivées possibles ?
2. Combien a-t-on de chemins possibles ?
3. Calculer la probabilité d'effectuer un chemin parabolique.

Partie C

Dans cette partie on suppose que l'on arrive en $\mathbf{A}_n$ (avec $n \geqslant 1$).

1. Calculer, en fonction de n, la probabilité p_n d'effectuer un chemin parabolique.
2. Déterminer à l'aide d'un programme développé sur calculatrice, le plus petit entier naturel tel que $p_n < 10^{-50}$.
   On écrira le programme sur la copie, afin d'en laisser une trace.

RETOUR AU SOMMAIRE

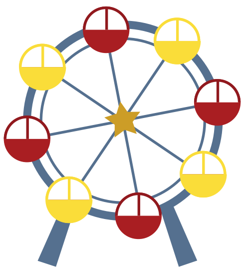
CLERMONT-FERRAND

Troisième exercice

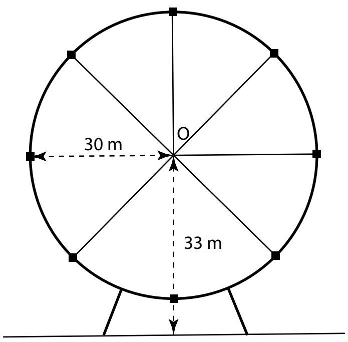
Séries autres que S

Fête foraine

Énoncé



La grande roue au repos



Une grande roue de 30 m de rayon compte 8 nacelles comme sur le dessin ci-contre : chaque nacelle sera assimilée à un point. La distance du sol au centre de la roue est de 33 m. Cette roue tourne à vitesse constante.

Un groupe d'adolescents décide de profiter de la vue dégagée et monte dans la nacelle du bas.

1. Quelle distance vont-ils parcourir en un tour ? (On arrondira le résultat au dm près)
2. Sachant qu'une nacelle met 2 min pour revenir à son emplacement d'origine, quelle est sa vitesse en m.s^{-1} ? (On gardera 2 chiffres après la virgule)
3. a) a) Au bout de 45 s, à quelle hauteur du sol, arrondie au mètre, se situera la nacelle ?
   b) Après 1 min et 10 s, à quelle hauteur du sol, arrondie au mètre, se situera la nacelle ?
4. L'un des adolescents est sujet au vertige à 60 m d'altitude.
   Pendant combien de temps, arrondi à la seconde près, en souffrira-t-il ?

RETOUR AU SOMMAIRE

CORSE

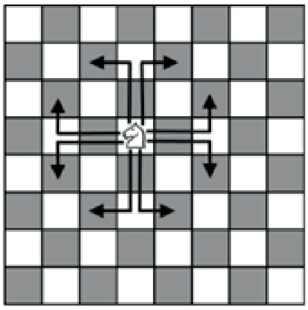
Premier exercice

Toutes séries

Cavalier seul

Énoncé

Aux échecs, un cavalier se déplace de la façon suivante :



1. Sur un échiquier de dimension 3×4, déplacer un cavalier afin qu'il parcoure l'ensemble des cases, sans repasser deux fois par la même.

1			
		2	

2. Est-il possible sur un échiquier de dimension 3×5, que le cavalier réalise un cycle. C'est-à-dire qu'il parcoure l'ensemble des cases sans repasser deux fois par la même et en revenant à la case de départ ?
3. a) On joue désormais sur un échiquier 3×3, où chaque case est numérotée de 1 à 9 comme suit :

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Au départ le cavalier se trouve sur la case 1. On place dans une urne neuf boules numérotées de 1 à 9 indiscernables au toucher. On tire ainsi au sort le numéro de la case sur laquelle le cavalier doit se rendre en un minimum de coups puis on remet la boule dans l'urne. Chaque numéro a ainsi la même probabilité de sortir. On interrompt le tirage si la case est inaccessible.

Au bout de combien de tirages dépasse-t-on 90 % de chance que la partie ait été interrompue ?

b) Voici un algorithme :
lorsque u est une liste $u[n]$ est le $n^{\text{ième}}$ terme de la liste, le premier étant $u[1]$.

```
Variables :       p,n,x,c : nombres entiers
                  u : liste de nombres entiers
Initialisation :  Affecter à p la valeur 1
                  Affecter à c la valeur 0
                  Affecter à u la liste {1 ;4 ;7 ;6 ;0 ;2 ;3 ;8 ;5}
Traitement :      Tant que p ≠ 5 Faire
                  Début TantQue
                      Demander un nombre entier de 1 à 9, l'affecter à n
                      Affecter à x la valeur absolue de (u[n] − u[p])
                      Affecter à x la valeur minimum entre x et (8 − x)
                      Affecter à c la valeur de c + x
                      Affecter à p la valeur de n
                  Fin TantQue
Sortie :          Afficher c − x
```

a) Indiquer les valeurs que prennent tour à tour les variables x et c lorsqu'on entre successivement les nombres 8, 7, 3 et 5 ?

b) Qu'indique en sortie cet algorithme ?

RETOUR AU SOMMAIRE

CORSE

Deuxième exercice

Toutes séries

Changeons les règles !

Énoncé

Soient a et b deux nombres réels.

— On appelle « addition tropicale » de a et b et on note $a \oplus b$ la quantité

$$a \oplus b = \min(a\,;b)$$

c'est à dire le plus petit des deux nombres a et b.

— On appelle « multiplication tropicale » de a et b et on note $a \otimes b$ la quantité

$$a \otimes b = a + b,$$

c'est à dire l'addition habituelle de a et b.

D'une manière plus générale, l'addition tropicale de plusieurs nombres correspond au plus petit de ses nombres et la multiplication tropicale de plusieurs nombres est l'addition habituelle de ces nombres.

On note aussi $a^{②} = a \otimes a$.

Exemple : On a par exemple, $3 \oplus 2 = \min(3\,;2) = 2$ et $2,5 \otimes 3 = 2,5 + 3 = 5,5$.

1. Effectuer les opérations suivantes :
   (a) $5 \oplus (-5)$;
   (b) $7 \oplus 7$;
   (c) $3 \oplus 1 \oplus 7$;
   (d) $\dfrac{3}{5} \oplus \dfrac{1}{2}$;
   (e) $5 \otimes (-5)$;
   (f) $3^{②}$;
   (g) $3 \otimes 1 \otimes 7$;
   (h) $6 \otimes (4 \oplus 2)$.
2. (a) a est un nombre réel. On précise que le nombre a^2 est le carré habituel de a, c'est à dire $a \times a$ où $\times$ désigne la multiplication habituelle.
   Calculer la quantité $a^2 + 1 \oplus 2a$.
   (b) a et b sont deux nombres strictement positifs.
   Calculer, selon les valeurs de a et b, la quantité $\dfrac{a}{b} \oplus \dfrac{a+1}{b+1}$.
3. Résoudre les équations suivantes :
   (a) $x^{②} = 9$;
   (b) $x^{②} = -1$;
   (c) $2 \oplus x = 0$;
   (d) $2 \oplus x = 5$;

(e) $2 \oplus x = x$.

4. Soient a et b deux réels positifs.
   (a) Montrer que $(a \oplus b)^{②} = a^{②} \oplus b^{②}$;
   (b) Montrer que l'on a aussi $(a \oplus b)^{②} = a^{②} \oplus (2 \otimes a \otimes b) \oplus b^{②}$;

   Dans toute la suite de l'exercice, on se place dans un repère.

5. (a) Le point $A(3\,;12)$ appartient-il à la « droite tropicale » d'équation $y = (2 \otimes x) \oplus 6$? Même question pour les points $B(5\,;6)$, $C(6\,;6)$ et $D(1\,;3)$.
   (b) Tracer dans un repère orthonormé la « droite tropicale » d'équation $y = (2 \otimes x) \oplus 6$.
   On choisira un repère dans lequel 1 unité de longueur correspond à 1 cm.
   (c) Dans un repère, on considère les droites tropicales d d'équation $y = x$ et Δ d'équation $y = x \oplus 0$.
   Est-il vrai que les droites d et Δ sont confondues ? Justifier.
   (d) Décrire, éventuellement à l'aide d'une figure, l'ensemble formé des points $M(x\,;y)$ vérifiant l'équation $y = (a \otimes x) \oplus b$, où a et b sont deux nombres réels.
6. (a) Déterminer l'intersection des droites d_1 d'équation $y = x$ et d_2 d'équation $y = 1 \otimes x$.
   (b) Déterminer l'intersection des droites d_3 d'équation $y = (2 \otimes x) \oplus 6$ et d_4 d'équation $y = (4 \otimes x) \oplus 4$.
   (c) b et b' sont deux nombres réels distincts. Déterminer l'intersection des droites d_5 d'équation $y = x \oplus b$ et d_6 d'équation $y = x \oplus b'$.

RETOUR AU SOMMAIRE

CRÉTEIL

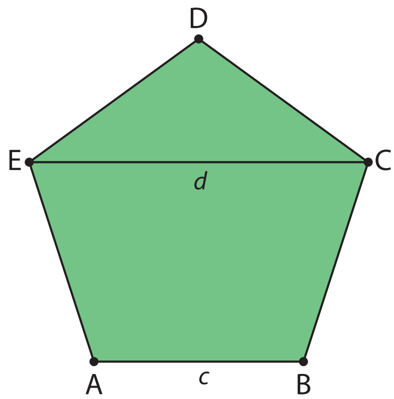
Premier exercice

Toutes séries

Cousu de fils d'or

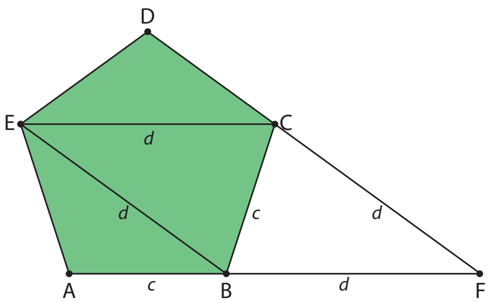
Énoncé

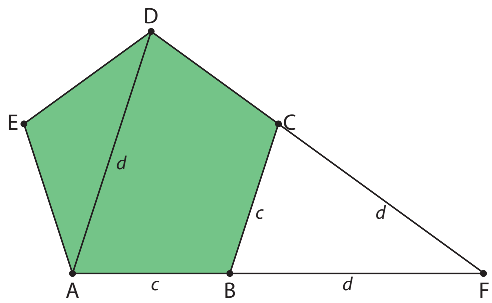
I] Aire d'un pentagone régulier :



Considérons un pentagone régulier et notons c et d les longueurs respectives d'un côté et d'une diagonale. (figure ci-contre)
Dans un pentagone régulier, on a :

- Toutes les diagonales sont de même longueur.
- Chaque diagonale est parallèle à un côté du pentagone.
- Deux diagonales issues d'un même sommet forment un losange avec les prolongements des deux côtés qui leurs sont respectivement parallèles.





1. Justifier que $\dfrac{d}{c} = \dfrac{c}{d} + 1$.

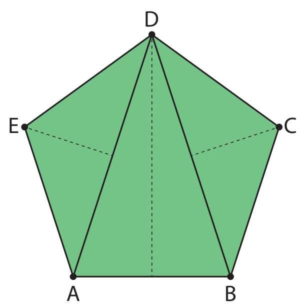
2. On pose $\Phi = \dfrac{d}{c}$ le rapport entre la longueur d'une diagonale et celle d'un côté du pentagone régulier.

   a) Justifier que Φ est solution de l'équation $x^2 - x - 1 = 0$.

   b) En déduire que $\Phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

3. Afin de calculer l'aire d'un pentagone régulier on peut décomposer celui-ci en 3 triangles EAD, DAB et CBD. (figure ci-contre)

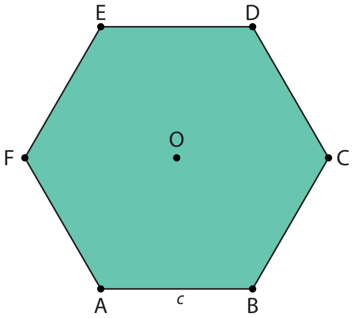
   Démontrer que l'aire du pentagone ABCDE, en fonction de c et Φ, est égale à $\dfrac{c^2}{4}\left(\sqrt{4\Phi+3} + 2\Phi\sqrt{3-\Phi}\right)$.



II] Aire d'un hexagone :

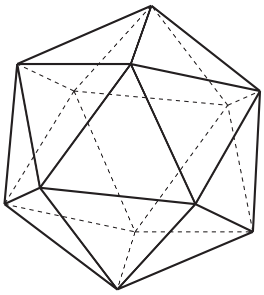
Considérons un hexagone régulier de centre O et notons c la longueur d'un côté.

Justifier que l'aire de cet hexagone est égale, en fonction de c, à $\dfrac{3c^2\sqrt{3}}{2}$.



III] Le ballon de foot :

L'icosaèdre est le polyèdre régulier qui possède le plus de faces (20 faces en formes de triangles équilatéraux qui se rejoignent par cinq à chaque sommet). Les angles de ses sommets sont trop pointus pour utiliser ce polyèdre comme ballon de foot, on décide alors d'amputer chaque arête du tiers de sa longueur de chaque côté. Les faces triangulaires initiales sont alors changées en hexagones, tandis que les morceaux enlevés autour de chaque sommet donnent naissance à des pentagones réguliers. Le polygone obtenu est un icosaèdre tronqué formé par **20 hexagones réguliers et 12 pentagones réguliers de même côté**.


Icosaèdre


Icosaèdre tronqué


ballon de foot
(Icosaèdre tronqué gonflé)

Les contraintes imposées par la réglementation internationale de football indiquent que la circonférence d'un ballon doit mesurer entre 68 cm et 70 cm.
Démontrer qu'il faut donc plus de 4 mètres de fil de couture pour assembler un tel ballon.

RETOUR AU SOMMAIRE

CRÉTEIL

Deuxième exercice

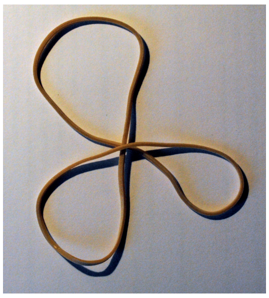
Toutes séries

Les élastiques

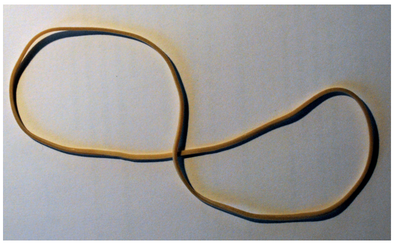
Énoncé

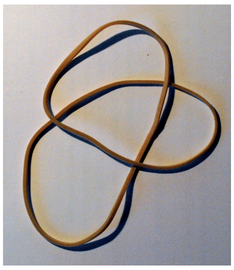
Un élastique circulaire souple et suffisamment grand posé à plat sur une feuille de papier peut être déformé successivement pour obtenir des nœuds et dont la trace sur la feuille est une courbe fermée plane comportant des nœuds, des arcs et des régions.

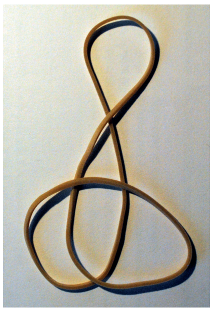
D'une étape à l'autre, on crée de nouveaux nœuds sans faire passer les arcs créés par les nœuds présents obtenus à l'étape précédente. La configuration ci-contre ne peut donc pas être réalisée.



Voici quelques exemples de déformation possibles.

a) 

b) 

c) 

On appelle :

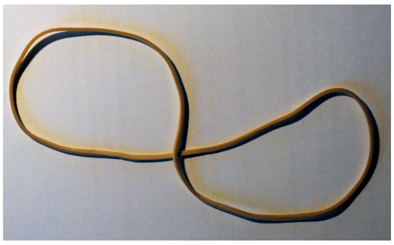
- Nœud tout croisement de l'élastique.
- Boucle toute portion de l'élastique dont les extrémités sont un même nœud et qui n'en contient pas d'autre.
- Arc toute portion de l'élastique dont les extrémités joignent exactement deux nœuds et ne contenant aucune boucle ou autre nœud.
- Région toute surface fermée délimitée par :
  - Soit une boucle
  - Soit des arcs et ne contenant aucun arc en son intérieur

  Par exemple :
- La figure a) est composée d'un nœud, 2 boucles, 2 régions.
- La figure b) est composée de 3 nœuds, 6 arcs, 4 régions.

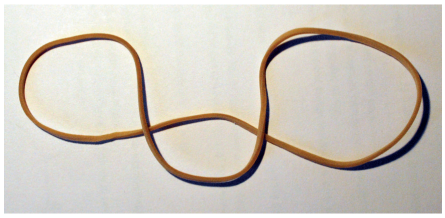
Partie A

1. Déterminer le nombre de nœuds, boucles, arcs et régions de la figure c).

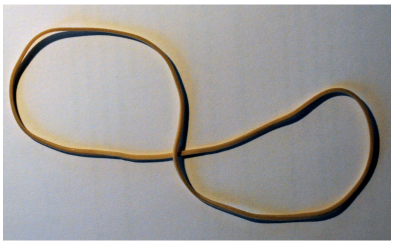
On ne s'autorise désormais que deux mouvements notés T et R. T agit sur un arc ou une boucle par torsion en créant une boucle extérieure.
Exemple :



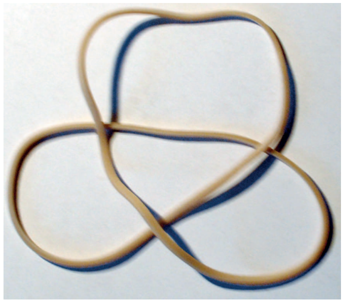
$\xrightarrow{T}$



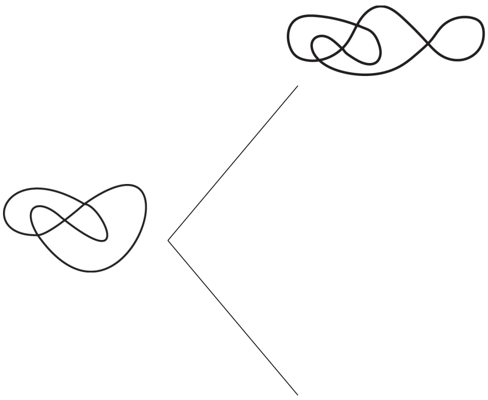
R agit sur une boucle par rabattement de celle-ci sur un arc périphérique ou sur une boucle de façon à l'intercepter en deux nouveaux points distincts. Exemple :

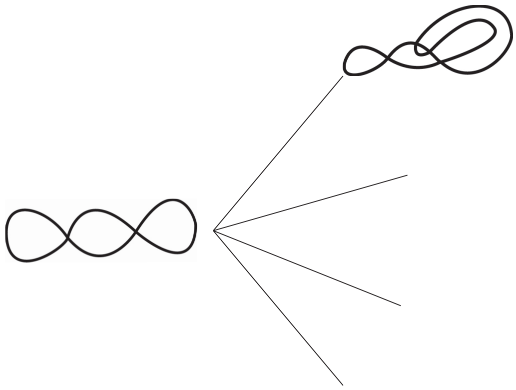


$\xrightarrow{R}$



2. Recopier puis compléter les deux arbres ci-dessous en représentant les déformations obtenues par application des mouvements T ou R sur l'arc ou la boucle de droite.





3. On note $\mathscr{C}$ l'ensemble des courbes obtenues à partir de la courbe a) par une succession de torsions T ou rabattements R effectuées dans un ordre quelconque mais compatible.
   À chaque courbe X de $\mathscr{C}$ on associe un triplet (c, r, a) où :
   - c désigne le nombre de nœuds ;
   - r le nombre de régions ;
   - a le nombre total d'arcs et boucles.

   a) Recopier et compléter le tableau ci-dessous.

Nbre de rabattements R	Nbre de torsions T	c	r	a
1	0			
0	1			
2	3			
p	q			

   b) Proposer une preuve des résultats énoncés dans la dernière ligne du tableau.

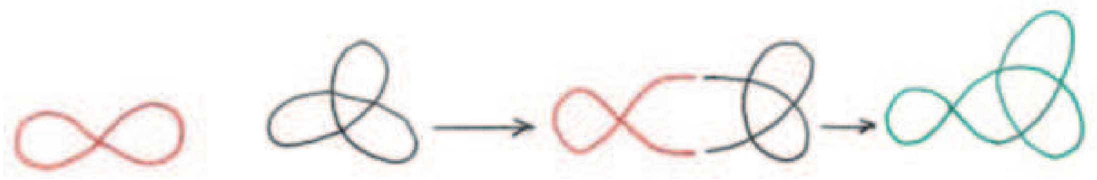
4. Déterminer une relation simple entre c, r et a valable pour tout $X \in \mathscr{C}$.
   Justifier la réponse.

Partie B

Deux courbes X et X' de $\mathscr{C}$ étant données, on peut obtenir plusieurs nouvelles courbes, toutes notées $X * X'$ en procédant comme suit :

- On coupe au choix un arc ou une boucle périphérique de X de façon à obtenir deux extrémités libres, et on procède de même avec X'.
- On joint ensuite, sans les croiser, chacune des extrémités libres de X à celles de X'.

Exemple :



Soit X et X' deux courbes de $\mathscr{C}$ de triplets respectifs (c,r,a) et (c',r',a').
On note $(c",r",a")$ le triplet associé à $X*X'$.

1. Exprimer :
   - $c"$ en fonction de c et c' ;
   - $r"$ en fonction de r et r' ;
   - $a"$ en fonction de a et a'.
2. Soit $X \in \mathscr{C}$ de triplet (c,r,a).
   Pour tout entier $p \geqslant 2$, on note X^p une courbe représentant $X*X^{p-1}$.
   Déterminer le triplet associé à X^p en fonction de c,r,a et p.]
3. Représenter une courbe de $\mathscr{C}$ telle que le nombre de nœuds de $((X^{16})^9)^7$ soit 2016.
4. Soit p un entier naturel tel que $2 \geqslant p \geqslant 2016$.
   Démontrer qu'il n'existe aucun $X \in \mathscr{C}$ tel que le nombre de nœuds de X^p soit 2017.
5. Démontrer que, pour tout $X \in \mathscr{C}$, il y a au moins deux régions comportant sur leurs contours le nombre de nœuds.

RETOUR AU SOMMAIRE

DIJON

Premier exercice

Toutes séries

Années de naissance

Énoncé

Dans cet exercice, aucune justification n'est demandée ! La calculatrice est votre alliée, la feuille de brouillon aussi... Pensez à écrire toutes vos idées.

Monsieur François Carré est né en 1980. Il aura donc 45 ans en 2025, or 2025 est le carré de 45 !
Son lointain aïeul, Clovis Carré, est né en l'an de grâce 650. Il a donc eu 26 ans en 676, or 676 est le carré de 26 !
Les années 650 et 1980 sont appelées des années quarrables.

Dans tout ce qui suit, on ne considère que des années à partir de l'an 1.

1. Marie-Antoinette Carré est née au XVIII^{e} siècle lors d'une année quarrable.
   Quelle est son année de naissance ?
2. Quel est le siècle le plus récent contenant deux années quarrables ?
   Et quel est le premier siècle qui n'en contiendra aucune ?
3. Charles Carré a 60 ans de plus que son petit fils Louis Carré. Tous deux sont nés lors d'années quarrables.
   Trouver les quatre années de naissance possibles de Charles.

RETOUR AU SOMMAIRE

DIJON

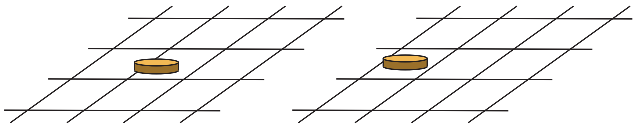
Deuxième exercice

Série S

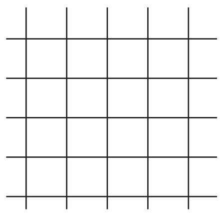
Jeu de Palet

Énoncé

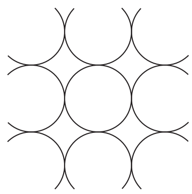
Un joueur lance un palet cylindrique de rayon 2 cm sur une aire de jeu où sont dessinées des lignes constituées par les contours de figures géométriques. On considère que les lignes sont sans épaisseur, et que l'aire de jeu est suffisamment grande pour qu'à chaque lancer, le palet soit à l'intérieur de cette aire de jeu.
On convient que le joueur gagne si le palet ne touche aucune des lignes, et qu'il perd dans le cas contraire.

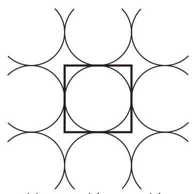


1. **Aire de jeu constituée de carrés** Dans cette question, les lignes sont formées par des carrés de côté de longueur 16 cm comme sur le dessin ci-contre. Le joueur lance le palet sur cette aire.
   a) Justifier que le joueur gagne si le centre du palet se situe dans un carré de côté de longueur 12 cm.
   b) On admet que la probabilité que le joueur gagne est égale au rapport des aires de ces deux carrés. Calculer cette probabilité.
   c) Si l'on veut que le joueur gagne avec une probabilité égale à 0,01, quelle devrait être la longueur du côté d'un carré ?

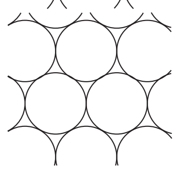


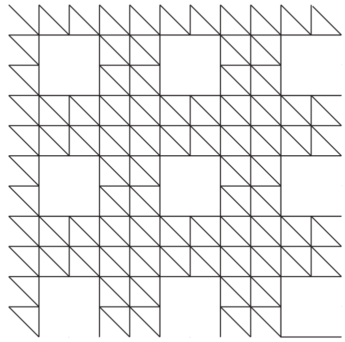
2. **Aire de jeu constituée de cercles** Dans cette question, les lignes sont formées par des cercles de même rayon 3 cm, tangents entre eux et disposés comme sur la figure ci-contre. Le joueur lance le palet sur cette aire.
   a) Montrer que le palet touche nécessairement les lignes tracées si son centre n'appartient pas à l'un des cercles.
   b) Montrer que la probabilité que le joueur gagne est égale à $\dfrac{\pi}{36}$. On pourra utiliser la configuration ci-contre.





3. **Autre disposition des cercles** Dans cette question, les lignes sont à nouveau formées par des cercles de rayon 3 cm tangents entre eux, mais disposés comme sur la figure ci-contre.
   Le joueur lance le palet sur cette aire de jeu.
   Calculer la probabilité qu'il gagne.





4. **Aire de jeu constituée de triangles rectangles isocèles** Dans cette question, les lignes sont formées par des triangles rectangles isocèles, dont le petit côté mesure 8 cm, disposés comme sur la figure ci-contre, en laissant quelques vides de forme carrée.
   Le joueur lance le palet sur cette aire de jeu.
   Calculer la probabilité qu'il gagne.

RETOUR AU SOMMAIRE

DIJON

Troisième exercice

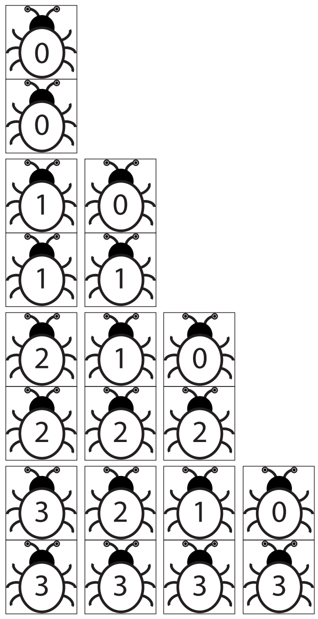
Séries autres que S

Coccinelles

Énoncé

L'association Les Coccinelles a fait fabriquer un jeu de magnets de forme rectangulaire, comme les pièces d'un jeu de dominos.
Chaque magnet est frappé de deux coccinelles portant chacune un nombre entier compris entre 0 et n, où n est un entier naturel. Cet entier représente les points de la coccinelle.
Les magnets sont tous différents et, dans le jeu, toutes les combinaisons de deux entiers sont présentes.

On a représenté ci-contre un jeu complet de magnets pour $n = 3$.



1. Dans cette question, on suppose que $n = 3$. Calculer la somme de tous les points portés par les coccinelles, pour l'ensemble d'un jeu.
2. Dans cette question, on suppose que $n = 6$.
   a) Combien y a-t-il de magnets dans un jeu complet ?
   b) Calculer la somme de tous les points.
3. Dans cette question, on cherche à déterminer la valeur de n et le nombre de magnets d'un jeu complet, à partir des renseignements qui suivent.
   L'association vend chaque magnet au profit d'une organisation non gouvernementale (ONG). Le prix de vente de chaque magnet est calculé en multipliant par 10 centimes d'euro la somme des points portés par les deux coccinelles. Après avoir vendu tous les magnets du jeu, la recette totale s'élève à peu près à 12 500 euros.
   Quelle est la valeur de n ? Combien de magnets constituent ce jeu ?
4. Dans cette question, n est un entier quelconque.
   Exprimer en fonction de n :
   a) le nombre de magnets constituant un jeu complet ;
   b) la somme de tous les points du jeu ;
   c) le nombre moyen de points par magnet.

RETOUR AU SOMMAIRE

GRENOBLE

Premier exercice

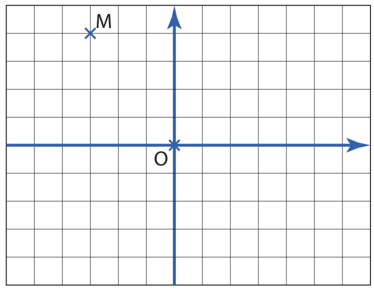
Toutes séries

Taxis à Mathville

Énoncé

A Mathville, les rues se coupent à angle droit en formant un quadrillage régulier.
L'unité de longueur est la longueur du côté d'un carré de ce quadrillage.

Dans cette ville, chaque point est repéré par ses coordonnées dans un repère dont l'origine est le point O, situé au centre de la ville.
Les axes de ce repère sont les des rues qui se coupent au point O, orientées comme indiqué sur la figure ci-contre.



Pour calculer la distance d'un point à un autre en suivant les rues, on utilise alors une distance particulière : la taxi-distance, ce qui conduit à une curieuse taxi-géométrie étudiée dans ce problème.

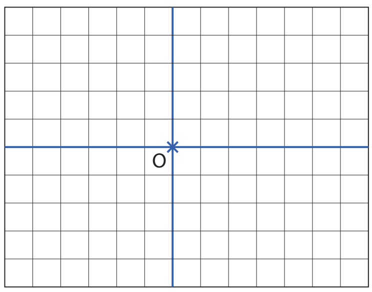
La taxi-distance entre deux points A et B est la plus courte distance que devrait parcourir un taxi pour aller de A à B, c'est-à-dire la distance parcourue en suivant les rues. On pourra noter cette distance $t(A,B)$.

1. a) Le musée des mathématiques se situe au point $M(-3;4)$.
   Vérifier que la taxi-distance de ce point à l'origine du repère est égale à 7.

   b) Plus généralement, quelle est la taxi-distance entre deux points $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$?

2. Un taxi cercle
   On appelle ***taxi-cercle*** de centre O et de rayon R (R est un nombre entier positif) l'ensemble des points du quadrillage situés à une taxi-distance égale à R du point O.
   On appelle ***taxi-disque*** l'ensemble des points du quadrillage situés à une taxi-distance inférieure ou égale à R du point O.

   a) Reproduire la figure ci-jointe et représenter :
      - en vert le taxi-cercle de centre O et de rayon 5,
      - en rouge les points du taxi-disque de centre O de rayon 5 situés à une distance paire du point O,
      - en bleu les points du taxi-disque de centre O de rayon 5 situés à une distance impaire du point O.

   b) Quel est le nombre de points d'un taxi-cercle de rayon R ?

   c) Quel est le nombre de points d'un taxi-disque de rayon R ?

3. Taxi-médiatrices
   On appelle ***taxi-médiatrice*** d'un couple de points $(A;B)$ l'ensemble des points du quadrillage situés à égale taxi-distance des points A et B.

   a) Placer au moins 5 points de la taxi médiatrice de (A ;B) lorsque $A(0;-1)$ et $B(1;2)$.

   b) Evariste habite un point du quadrillage situé à égale taxi-distance de deux points U et V.
   Pourquoi peut-on alors affirmer que la taxi-distance de U à V est paire ?

   c) Des points C et D sont tels que $x_C = y_D$ et $x_D = y_C$. Déterminer la taxi-médiatrice de $(C;D)$.

RETOUR AU SOMMAIRE

GRENOBLE

Deuxième exercice

Série S

Accepter les différences !

Énoncé

Dans cet exercice la notation min désigne le plus petit nombre de la liste des nombres considérés.
Ainsi $\min(5;7) = 5$ et $\min(8;11;7) = 7$.

À partir de deux entiers positifs x_1 et x_2 distincts, on calcule successivement $x_3 = |x_2 - x_1|$, puis $x_4 = \min(|x_3 - x_1|;|x_3 - x_2|;|x_2 - x_1|)$ puis pour $k \geqslant 4$, $x_k = \min(|x_j - x_i|; 0 < i < j < k)$.

Ainsi avec $x_1 = 23$ et $x_2 = 49$, on obtient $x_3 = 26$, $x_4 = 3$, $x_5 = 3$ et $x_6 = 0$.
Pour cette séquence on notera $23 \longrightarrow 49 \longrightarrow 26 \longrightarrow 3 \longrightarrow 3 \longrightarrow 0$. On dit que sa longueur est 6.

La longueur d'une séquence est le rang de son premier terme nul.

1. Construire la séquence obtenue avec $x_1 = 50$ et $x_2 = 30$ puis celle correspondant à $x_1 = 50$ et $x_2 = 31$.
2. Construire une séquence de longueur 7.
3. Montrer que quel que soit $x_1 > 0$ on peut trouver $x_2 > 0$ tel que la séquence obtenue soit de longueur 5.
4. Démontrer que quels que soient les entiers strictement positifs x_1 et x_2, il existe un entier n tel que $x_n = 0$.
   5. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3.
   a) Écrire un algorithme qui permet de construire une séquence de longueur n donnée.
   b) Écrire la séquence obtenue pour $n = 13$
5. Trouver la séquence la plus longue possible avec $x_2 < x_1 \leqslant 1000$.
6. Soit $x_1 = 2016$.
   Trouver la valeur de x_2 tel que $x_2 < x_1$ pour que la séquence soit la plus longue possible.

RETOUR AU SOMMAIRE

GRENOBLE

Troisième exercice

Séries autres que S

Nombres prisonniers

Énoncé

Dans tout cet exercice, les nombres considérés sont des nombres entiers positifs non nuls. De plus, lorsque l'on considère un nombre à plusieurs chiffres, le chiffre de gauche n'est jamais nul.

On dira qu'un nombre A est ***prisonnier*** du nombre B si on peut obtenir le nombre A en éliminant éventuellement certains chiffres de B.

> Ainsi, 13 est prisonnier de 153 (en rayant le chiffre 5),
> 105 est prisonnier de 31056 (en rayant les chiffres 3 et 6),
> 15 est prisonnier de 15 (sans rayer de chiffre)
> 23 a trois prisonniers : 2 ; 3 et 23.
> 22 a deux prisonniers : 2 et 22.
> alors que 11 n'est pas prisonnier de 15 et que 13 n'est pas prisonnier de 351.

1. Nombre de prisonniers d'un entier.
   a) Quels sont tous les nombres à deux chiffres qui ont exactement deux prisonniers ?
   b) Quels sont tous les nombres à deux chiffres qui ont exactement trois prisonniers ?
   c) Quels sont tous les prisonniers de 203 ?
   d) Existe-t-il des nombres à trois chiffres qui ont huit prisonniers distincts ?
   e) Parmi les nombres à cinq chiffres non nuls, quels sont ceux qui ont le moins de prisonniers ? Combien ont-ils de prisonniers ?
   f) Parmi les nombres à cinq chiffres non nuls, quels sont ceux qui ont le plus de prisonniers ? Combien ont-ils de prisonniers ?
2. Relations entre prisonniers.
   a) Démontrer que si A est prisonnier de B alors A est inférieur ou égal à B.
   b) Démontrer alors que si A est prisonnier de B et B prisonnier de A alors ces nombres sont égaux.
   c) Si A est prisonnier de B et B prisonnier de C, que peut-on en déduire concernant A et C ?
   d) Existe-t-il au moins un nombre non nul A tel que A soit prisonnier de $(3A)$?
   e) Existe-t-il au moins un nombre non nul A tel que A soit prisonnier de $(2A)$?
3. Gardien d'un ensemble de nombres.
   On appelle gardien d'un ensemble E de nombres un nombre G tel que tout nombre de l'ensemble E est prisonnier de G.
   a) Construire un gardien de l'ensemble $\{21 ; 26 ; 201 ; 206\}$.
      Ce gardien est-il unique ?
   b) Montrer que tout ensemble fini de nombres a un gardien qui est plus petit que les autres.

RETOUR AU SOMMAIRE

GUADELOUPE – MARTINIQUE

Premier exercice

Toutes séries

Black dices : le black jack aux dés

Énoncé

Alice et Bob jouent au Black dices. Il s'agit d'une variante du Black Jack qui se joue en 2 tours avec 3 dés, et où, comme dans la version casino avec des cartes, l'on doit chercher à s'approcher d'un score de 21, sans toutefois le dépasser. On va étudier ici une version simplifiée à 2 dés, supposés bien sûr équilibrés, pour un score limite de 15.

Voici comment se déroule une partie :

Premier tour : les joueurs lancent chacun les 2 dés et calculent le total obtenu.
Deuxième tour : suivant le résultat obtenu au premier tour, chacun des deux joueurs peut décider de s'arrêter (stratégie 0), ou bien de relancer un (stratégie 1) ou deux dés (stratégie 2), et d'ajouter le total obtenu à celui du premier tour.

L'objectif est d'avoir le plus grand score, sans toutefois dépasser 15.
En cas d'égalité, c'est le joueur qui a joué le premier qui est déclaré vainqueur.

Préliminaires

1. Au premier tour, on peut obtenir un total allant de 2 à 12. Donner la probabilité d'obtention de chacun de ces scores sous la forme d'un tableau.

Partie 1 : Stratégie pour Alice

Alice et Bob jouent une partie. A l'issue du premier tour, Alice a obtenu 8.

2. Bob joue son deuxième tour, et obtient un total de 12.
   a) Quelle est la probabilité pour Alice de dépasser 15 si elle choisit la stratégie 2 (elle relance les deux dés) ?
   b) Déterminer la stratégie qu'Alice doit choisir si elle veut optimiser ses chances de battre Bob, et donner la probabilité correspondante.
3. Même question que 2.b. en supposant maintenant que Bob obtient 11 à son deuxième tour.

Partie 2 : Stratégie pour Bob

On suppose que Bob et Alice ont tous les deux obtenus 8 au premier tour. Bob doit jouer son deuxième tour, et on suppose qu'Alice jouera ensuite en tenant compte du résultat de Bob et en choisissant *la stratégie qui optimise ses chances de victoires.*

4. A l'aide de la question 2., donner la probabilité qu'a Bob de gagner s'il obtient un score de 4 au deuxième tour (et donc un total de 12). On expliquera le calcul effectué.
5. De même, à l'aide de la question 3., donner la probabilité qu'a Bob de gagner s'il obtient un score de 3 au deuxième tour. On expliquera le choix d'Alice et le calcul effectué.
6. Sans plus d'explication, remplir un tableau donnant les probabilités de victoire pour Bob suivant chacun des scores possibles qu'il peut obtenir au second tour.
7. Déterminer la stratégie que Bob doit choisir pour optimiser ses chances de victoire. On expliquera le calcul effectué.

RETOUR AU SOMMAIRE

GUADELOUPE – MARTINIQUE

Deuxième exercice

Série S

Simplifications scandaleuses

Énoncé

Clovis Clou appelle l'élève Clapeyron, lui fait écrire la fraction $\frac{2666}{6665}$ et lui demande de la simplifier.

– Je peux enlever un 6 au numérateur et un autre au dénominateur, dit Clapeyron. Cela fait : $\frac{266}{665}$.

– Bien, approuve Clovis. Mais tu peux faire mieux !

– C'est vrai, reconnaît Clapeyron, je peux encore simplifier deux fois par 6. Et il écrit : $\frac{2666}{6665} = \frac{266}{665} = \frac{2}{5}$.

– Bravo ! dit Clovis. Je te mets 10 sur 10 !

Extrait du « JEUX de l'esprit et divertissements mathématiques » de Jean-Pierre ALEM.

Préambule

Bien qu'elle ait fourni à Clapeyron un résultat final juste, la méthode de simplification employée est évidemment tout à fait incorrecte. Néanmoins, il arrive parfois qu'elle donne un résultat juste. Dans ce cas, on dit que la fraction est simplifiable de manière scandaleuse.

1. Les fractions suivantes sont-elles simplifiables de manière scandaleuse : $\frac{199}{995}$, $\frac{2777}{7773}$?

Partie 1

Notation : Soit n un entier naturel, $n \geqslant 1$.
Si a, b, c sont des chiffres, on note $\overline{abb\ldots bb}$ le nombre formé du chiffre a suivi de n chiffres b.
De même, on note $\overline{bb\ldots bbc}$ le nombre formé de n chiffres b suivi du chiffre c.

L'objectif est de trouver une condition nécessaire sur les chiffres a, b, c, pour qu'une fraction du type $\frac{\overline{abb\ldots bb}}{\overline{bb\ldots bbc}}$ (avec les chiffres a et b distincts) se simplifie de manière scandaleuse, c'est-à-dire que : $\frac{\overline{abb\ldots bb}}{\overline{bb\ldots bbc}} = \frac{a}{c}$.

On rappelle la formule pour tout $q \neq 1 : 1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

2. Le nombre 2345 se décompose sous la forme : $2345 = 2 \times 10^3 + 3 \times 10^2 + 4 \times 10^1 + 5 \times 1$.
   De la même façon, le nombre $\overline{abb\ldots bb}$ qui contient n chiffres b se décompose sous la forme :
   $$a \times 10^n + b \times 10^{n-1} + b \times^{n-2} + \cdots + b \times 10^1 + b \times 1.$$
   Écrire de même la décomposition du nombre $\overline{bb\ldots bbc}$ qui contient n chiffres b.
3. Montrer que :
   $$a \times 10^n + b \times 10^{n-1} + 10^{n-2} + \cdots + 10^1 + 1) = a \times 10^n + b \times \frac{10^{n-1}}{9}.$$
4. Exprimer de même : $b \times 10 \times \left(10^{n-1} + 10^{n-2} + \cdots + 10^1 + 1\right) + c$
5. Montrer que si l'égalité $\frac{\overline{abb\ldots bb}}{\overline{bb\ldots bbc}} = \frac{a}{c}$ est vraie, alors les chiffres a, b et c vérifient l'égalité : $b = \frac{9ac}{10a-c}$.

Partie 2 : Une application

6. Trouver une fraction simplifiable de manière scandaleuse égale à $\frac{1}{2}$. Donner tous les triplets (a,b,c) possibles.
7. Existe-t-il une fraction simplifiable de manière scandaleuse égale à $\frac{2}{3}$?

RETOUR AU SOMMAIRE

GUADELOUPE – MARTINIQUE

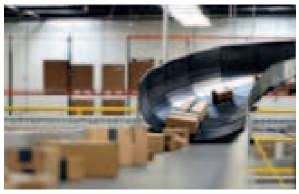
Troisième exercice

Séries autres que S

Les boîtes

Énoncé

Dans un centre d'achat par correspondance, les employés s'amusent à prendre du tapis plusieurs boîtes qui se suivent, puis à les replacer après les avoir rangées dans l'ordre inverse.



Le but de l'exercice est d'examiner si en manœuvrant les boîtes de cette façon, éventuellement plusieurs fois, il est possible de les trier pour les mettre dans un ordre fixé à l'avance.

Exemple : Cinq boîtes se présentent sur le tapis dans l'ordre suivant :

a	c	e	d	b

Il est possible, avec deux manœuvres successives, de trier ces cinq boîtes pour les mettre dans l'ordre « a-b-c-d-e ».

Justification :

① En manœuvrant sur les 3 dernières boîtes, on obtient :

a	c	b	d	e

② En manœuvrant ensuite sur les boîtes désormais en seconde et troisième position, on obtient :

a	b	c	d	e

1. Montrer qu'il est possible de trier les quatre boîtes données ci-dessous pour les mettre dans l'ordre « a-b-c-d ».

c	a	d	b

2. Trois boîtes ne sont pas dans l'ordre « a-b-c ».
   a) Est-il toujours possible de les trier pour les mettre dans l'ordre « a-b-c » en une seule manœuvre ?
   b) Est-il toujours possible de les trier pour les mettre dans l'ordre « a-b-c » en au plus deux manœuvres ? Vous justifierez vos réponses.

RETOUR AU SOMMAIRE

LILLE

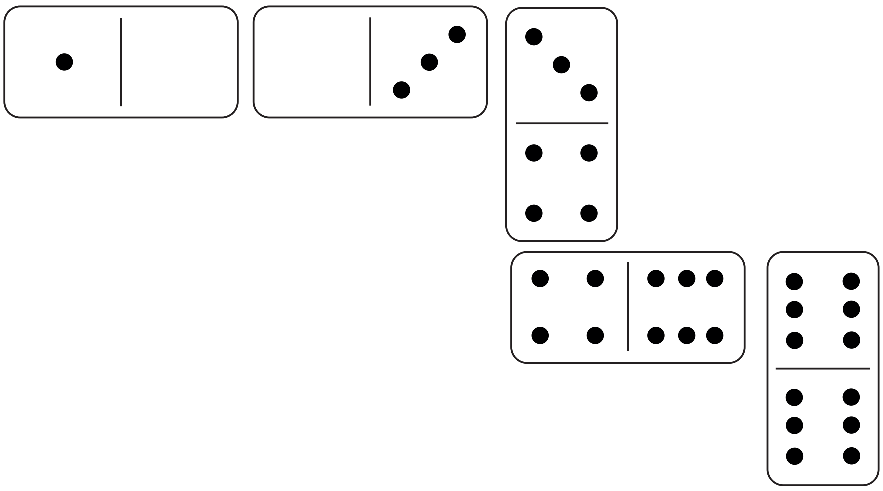
Premier exercice

Toutes séries

Les dominos

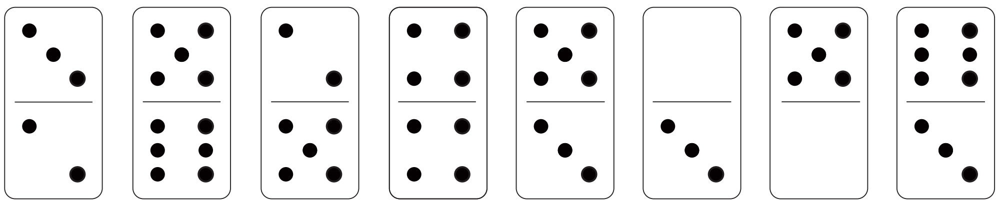
Énoncé

Le jeu de dominos consiste à faire un alignement de pièces de telle façon que les cases contiguës de deux pièces voisines soient identiques (exemple en image ci-dessous)



Partie 1

Voici quelques pièces d'un jeu de dominos que Léon a trouvé dans son grenier.



Léon s'interroge sur la longueur maximale de l'alignement qu'il peut créer avec ses pièces.

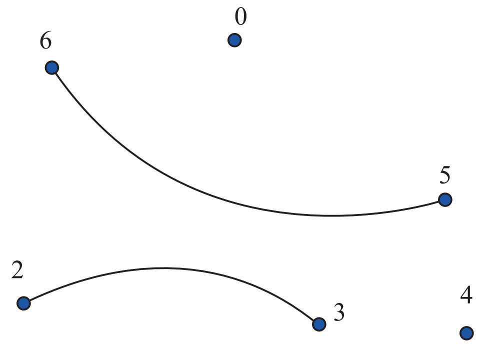
1. **Etude de la collection de pièces de Léon**

   a) Créer un alignement de longueur maximale avec les pièces trouvées par Léon.

   b) Léon cherche maintenant une méthode générale qui lui permettrait de savoir si, avec une collection de pièces quelconques, on peut créer, ou non, un alignement utilisant toutes les pièces.

   « *Pour comprendre les situations mathématiques, il faut souvent faire un dessin* » lui dit son professeur de mathématiques.

   Léon a commencé le schéma qui suit (Léon a représenté les deux premières pièces par des lignes reliant des entiers)



Compléter ce schéma donné en annexe. Ce schéma, lorsqu'il reprend toutes les lignes correspondant aux dominos de la collection, prend le nom de graphe.

c) Justifier que, si Léon veut aligner **toutes ses pièces**, son problème peut alors s'énoncer de la manière suivante : « *Est-il possible de tracer le graphe correspondant à son jeu de pièces obtenu en partant d'un entier (choisi judicieusement), sans lever le crayon et en traçant toutes les lignes sans passer deux fois sur la même ligne* ? »

2. **Étude générale d'un graphe**

Un tel tracé, lorsqu'il existe, peut alors être assimilé à un itinéraire, nous l'appellerons donc « **CHEMIN COMPLET** ». Cela nous permet de définir le « point de départ », le « point d'arrivée » et les « points-étapes », un même point du graphe pouvant avoir ces trois caractéristiques à la fois .

On appellera « degré » d'un point, le nombre d'extrémités de lignes du graphe qui atteignent ce point, c'est-à-dire, dans notre situation, le nombre de ses apparitions sur une face de domino.

a) Justifier qu'un point-étape, qui ne serait ni celui de départ ni celui d'arrivée, doit avoir un degré pair.

b) Peut-on imaginer un graphe pour lequel il existe un chemin complet ou non, qui aurait un nombre impair de points de degré impair ? Justifier.

c) Combien peut-il y avoir de points de degré impair sur un graphe où existe un chemin complet ?

d) Cette condition suffit-elle à assurer l'existence d'un chemin complet ?

3. **Retour à la collection de Léon**

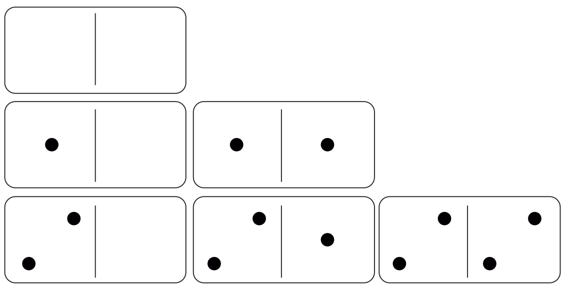
Léon décide de retirer le « double-4 » de sa collection, afin de parvenir à créer des chemins complets sur le graphe.

a) Quel(s) point(s) de départ peut-il choisir pour créer un chemin complet ?

b) Combien de chemins complets différents Léon peut-il alors envisager ? (les alignements symétriques n'étant pas confondus)

Partie 2

On appelle jeu de dominos de rang N, une collection dans laquelle chaque pièce est unique, en choisissant, dans un premier temps, la valeur maximale N (N étant un entier naturel) pouvant se trouver sur une face. Dans un deuxième temps, on construit les pièces en plaçant sur les faces toutes les combinaisons distinctes de deux entiers compris entre 0 et N, ***les pièces »doubles » (deux faces portant le même entier) étant possibles***.
Par exemple, pour $N = 2$, on obtient le jeu de domino suivant :



1. ***A partir de quelle valeur de N*** le graphe correspondant à un jeu de dominos de rang N comportera-t-il obligatoirement des lignes sécantes ? Justifier graphiquement.

2. a) Combien de pièces aurait un jeu de dominos de rang $N = 4$?

   b) *Cas général* : Combien de pièces aurait un jeu de domino de rang N ?

3. a) Construire le graphe, avec la méthode de Léon vue dans la première partie, d'un jeu de dominos de rang 4.

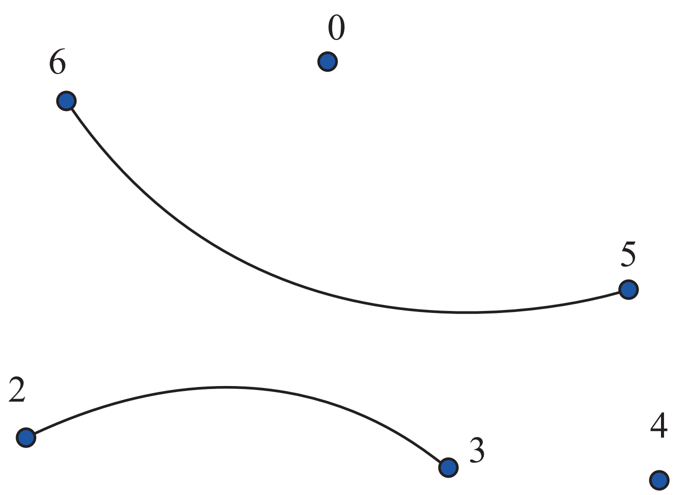
   b) Compléter le tableau qui suit, donnant le degré de chaque entier possible de face :

Valeur entier	0	1	2	3	4
Degré					

c) Pourrait-on créer un chemin complet sur ce graphe ? Justifier.

d) Justifier que tous les chemins complets trouvés devront commencer et se terminer par le même entier.

ANNEXE



RETOUR AU SOMMAIRE

LILLE

Deuxième exercice

Série S

Coffre-fort lourd

Énoncé

Partie 1

Monsieur Gauss, qui possède quelques objets de valeurs, a investi dans un coffre-fort doté d'un cadenas électronique qui s'ouvre à l'aide d'un code qui est de la forme $xyzA$, où x , y et z sont des entiers *pouvant aller de 0 à 9 inclus*, et A une lettre majuscule de l'alphabet latin, qui comporte 26 lettres de A à Z.

La partie xyz du code sera appelée partie chiffrée du code.
Le cadenas est programmé de telle sorte que Monsieur Gauss peut, à tout moment modifier le code d'ouverture par le biais d'une ligne d'appel sécurisée. A chacune de ses demandes le code est modifié à l'aide de l'algorithme décrit ci-après, et un *SMS* donnant le nouveau code à utiliser lors de la prochaine ouverture est envoyé à Monsieur Gauss.

Cet algorithme se présente ainsi :
si $xyzA$ est le code d'ouverture à un instant donné, alors, si Monsieur Gauss le demande, l'algorithme donne après transformation le code $x'y'z'A'$, où :
$x' = -x+y-2z$
$y' = -z+1$
$z' = x-y+z$.

Si les valeurs x' , y' ou z' ne sont pas comprises entre 0 et 9 inclus, l'algorithme les corrige en leur ajoutant ou en leur soustrayant 10 plusieurs fois, si nécessaire, et A' est la lettre obtenue selon le tableau ci-dessous, en ajoutant $x+y+z$ au code de la lettre de départ, et en y soustrayant 26 lorsque le nouveau code dépasse 25.

Lettre	***A***	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*	*H*	*I*	*J*	*K*	*L*	*M*
Code	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Lettre transformée													
Lettre	*N*	*O*	***P***	*Q*	*R*	*S*	*T*	*U*	*V*	*W*	*X*	*Y*	*Z*
Code	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
Lettre transformée				***Q***							***X***		

Premier exemple : si le code initial était, 887A, l'algorithme déterminera la nouvelle lettre en calculant $x+y+z = 8+8+7=23$, et en déduira que la lettre A de la case grisée doit être codée en la lettre X de la troisième ligne du tableau.

Deuxième exemple : si le code initial était, 999P , l'algorithme déterminera la nouvelle lettre en calculant $x+y+z = 9+9+9=27$, et en déduira que la lettre P de la case grisée doit être codée en la lettre Q de la troisième ligne du tableau.

Un code sera dit de « période N » s'il est globalement invariant après N changements de code exactement, autrement dit, si le code , après N changements successifs, se transforme en lui-même.

1. A un instant donné, le code d'ouverture est, 528G quel sera le nouveau code d'ouverture si Monsieur Gauss fait la demande d'un changement de code ? Justifier la réponse.

2. a) Existe-t-il des codes se terminant par la lettre P qui se transforment en le code $461E$? Justifier la réponse.
   b) Même question pour des codes se terminant par la lettre Q .
3. Existe-t-il des codes dont la lettre reste invariante après un changement de code ? Justifier la réponse.
4. Existe-t-il des codes dont la partie chiffrée est invariante après un changement de code ? Justifier la réponse.
5. Existe-t-il des codes globalement invariants ? Justifier la réponse.
6. a) Monsieur Gauss a choisi le code $123A$ et après trois demandes successives de changement de code, a reçu par *SMS* le code $229W$. Choisir un code au hasard autre que le code $123A$, puis déterminer quel sera le code que Monsieur Gauss recevra par *SMS* après trois demandes successives de changement de code ?
   b) Que peut-on conjecturer ?
   c) Justifier la validité de cette conjecture.
7. En utilisant les résultats des questions précédentes, justifier qu'il existe 26 codes d'ouverture de période 2.

Partie 2

Soucieux de sécuriser le coffre-fort, Monsieur Gauss demande à l'entreprise qui commercialise le cadenas électronique, un code à six chiffres de la forme $xyztuv$, avec changement de code dans les mêmes conditions, à savoir par le biais d'une demande par téléphone.
L'algorithme qui transforme le code initial $xyztuv$ en le code $x'y'z't'u'v'$ est décrit ci-dessous :

x	y	z	t	u	v
$x' = x+z$	$y' = y-u$	$z' = v-u-1$	$t' = z-1$	$u' = t-y+1$	$v' = v-x+1$

On applique pour chaque valeur calculée à la deuxième ligne, la même règle de correction (décalage éventuel de 10, en plus ou en moins, et autant de fois que nécessaire, pour obtenir un chiffre entre 0 et 9 inclus).

Un code sera dit de « période N » s'il est globalement invariant après N changements de code exactement, autrement dit, si le code *xyztuv* , par exemple, après N changements successifs, se transforme en lui-même.

1. Monsieur Gauss a demandé un changement de code, il reçoit par *SMS* le code suivant 100901.
   Quel était le code initial avant sa demande ? Conclure.
2. Monsieur Gauss, ayant des aptitudes mathématiques, exige un algorithme évitant la possibilité qu'un code soit invariant ou de période 2.
   Le bureau d'étude de l'entreprise, qui commercialise les cadenas électroniques, propose alors de ne modifier que le calcul de z', en remplaçnt la formule actuelle par $z' = k \times v - u - 1$, dans laquelle k est un entier naturel.
   a) Expliquer pourquoi, s'il n'y a plus de code de période 2, alors il est impossible qu'il y ait un code de période 1 .
   b) Vérifier que si k est nul, alors il n'y a plus de code de période 2 .
   c) La condition $k = 0$ ne satisfait pas Monsieur Gauss, qui trouve que la formule $z' = -u - 1$ serait trop simple.
   En étudiant la parité des chiffres du code initial, justifier que si k est un entier pair, alors il n'y aura forcément aucun code de période 2.

RETOUR AU SOMMAIRE

LILLE

Troisième exercice

Séries autres que S

Coffre-fort plume

Énoncé

Monsieur Gauss, qui possède quelques objets de valeurs, a investi dans un coffre-fort doté d'un cadenas électronique qui s'ouvre à l'aide d'un code qui est de la forme $xyzA$, où x , y et z sont des entiers *pouvant aller de 0 à 9 inclus*, et A une lettre majuscule de l'alphabet latin, qui comporte 26 lettres de A à Z.

La partie xyz du code sera appelée partie chiffrée du code.
Le cadenas est programmé de telle sorte que Monsieur Gauss peut, à tout moment modifier le code d'ouverture par le biais d'une ligne d'appel sécurisée. A chacune de ses demandes le code est modifié à l'aide de l'algorithme décrit ci-après, et un *SMS* donnant le nouveau code à utiliser lors de la prochaine ouverture est envoyé à Monsieur Gauss.

Cet algorithme se présente ainsi :
si $xyzA$ est le code d'ouverture à un instant donné, alors, si Monsieur Gauss le demande, l'algorithme donne après transformation le code $x'y'z'A'$, où :
$x' = -x+y-2z$
$y' = -z+1$
$z' = x-y+z$.

Si les valeurs x' , y' ou z' ne sont pas comprises entre 0 et 9 inclus, l'algorithme les corrige en leur ajoutant ou en leur soustrayant 10 plusieurs fois, si nécessaire, et A' est la lettre obtenue selon le tableau ci-dessous, en ajoutant $x+y+z$ au code de la lettre de départ, et en y soustrayant 26 lorsque le nouveau code dépasse 25.

Lettre	**A**	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
Code	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Lettre transformée													
Lettre	N	O	**P**	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
Code	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
Lettre transformée				**Q**							**X**		

Premier exemple : si le code initial était, $887A$, l'algorithme déterminera la nouvelle lettre en calculant $x+y+z = 8+8+7 = 23$, et en déduira que la lettre A de la case grisée doit être codée en la lettre X de la troisième ligne du tableau.

Deuxième exemple : si le code initial était, $999P$, l'algorithme déterminera la nouvelle lettre en calculant $x+y+z = 9+9+9 = 27$, et en déduira que la lettre P de la case grisée doit être codée en la lettre Q de la troisième ligne du tableau.

Un code sera dit de « période N » s'il est globalement invariant après N changements de code exactement, autrement dit, si le code , après N changements successifs, se transforme en lui-même.

1. A un instant donné, le code d'ouverture est, $528G$ quel sera le nouveau code d'ouverture si Monsieur Gauss fait la demande d'un changement de code ? Justifier la réponse.
2. a) Existe-t-il des codes se terminant par la lettre P qui se transforment en le code $461E$? Justifier la réponse.

b) Même question pour des codes se terminant par la lettre Q .

3. Existe-t-il des codes dont la lettre reste invariante après un changement de code ? Justifier la réponse.
4. Existe-t-il des codes dont la partie chiffrée est invariante après un changement de code ? Justifier la réponse.
5. Existe-t-il des codes globalement invariants ? Justifier la réponse.
6. a) Monsieur Gauss a choisi le code $123A$ et après trois demandes successives de changement de code, a reçu par *SMS* le code $229W$. Choisir un code au hasard autre que le code $123A$, puis déterminer quel sera le code que Monsieur Gauss recevra par *SMS* après trois demandes successives de changement de code ?

   b) Que peut-on conjecturer ?

   c) Justifier la validité de cette conjecture.
7. En utilisant les résultats des questions précédentes, justifier qu'il existe 26 codes d'ouverture de période 2.

RETOUR AU SOMMAIRE

LIMOGES

Premier exercice

Toutes séries

Quatre moyennes

Énoncé

La moyenne que vous utilisez habituellement se nomme moyenne arithmétique. On se propose de découvrir trois autres types de moyennes, et de les comparer.

Soit a et b deux nombres réels strictement positifs. On définit quatre types différents de moyennes :

La *moyenne arithmétique*, notée $A(a;b)$: $$A(a;b)=\frac{a+b}{2}$$	La *moyenne harmonique*, notée $H(a;b)$: $$H(a;b)=\frac{1}{\frac{1/a+1/b}{2}}=\frac{2\times a\times b}{a+b}$$
La *moyenne quadratique*, notée $Q(a;b)$: $$Q(a;b)=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$	La *moyenne géométrique*, notée $G(a;b)$: $$G(a;b)=\sqrt{a\times b}$$

1. **Répondre aux questions suivantes et préciser dans chaque cas de quel type de moyenne il s'agit.**

   a) Deux amis cherchent des champignons. Le premier en trouve 10, le second 30.
   Combien ont-ils trouvé de champignons en ***moyenne***, c'est-à-dire quel même nombre de champignons chacun aurait-il dû trouver pour obtenir le même nombre total ?

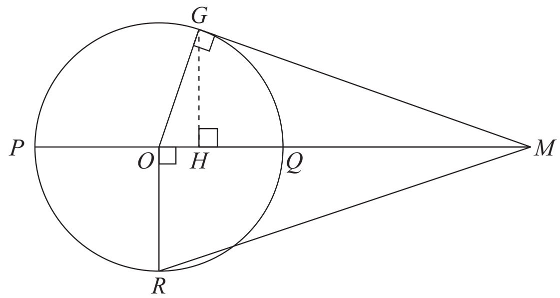
   b) Au 1[er] janvier 2016, une certaine vidéo avait déjà été visionnée 4000 fois. Le nombre total de vues a été multiplié par 10 au mois de janvier, puis par 30 au mois de février.
   Par combien le nombre total de vues a-t-il été multiplié chaque mois en ***moyenne***, c'est-à-dire par quel même nombre doit-on multiplier chaque mois le nombre de vue pour obtenir le même nombre final ?

   c) Un cycliste monte une côte de 1 km à la vitesse de 10 km/h, puis la redescend à la vitesse de 30 km/h.
   Combien de temps a-t-il mis pour parcourir les 2 km ?
   Quelle est sa vitesse ***moyenne*** sur l'ensemble du parcours, c'est-à-dire à quelle vitesse constante sur l'ensemble du parcours aurait-il dû rouler pour mettre le même temps ?

   d) Un appareil fonctionne avec deux panneaux solaires circulaires, l'un de 10 cm de rayon, l'autre de 30 cm de rayon. Quelle est l'aire totale des panneaux solaires ?
   Quel est le rayon ***moyen*** des panneaux solaires, c'est-à-dire le rayon que devraient avoir les panneaux solaires pour obtenir la même surface totale, s'ils avaient le même rayon ?

2. On souhaite démontrer géométriquement les inégalités suivantes : $H(a;b)\leqslant G(a;b)\leqslant A(a;b)\leqslant Q(a;b)$.
   Pour cela, on considère deux réels a et b strictement positifs tels que $a>b$, et on construit la figure suivante :

- On place deux points P et M tels que $PM = a$.
- Soit Q un point du segment [PM] tel que $QM = b$.
- Soit O le milieu du segment [PQ]
- Soit R un point du cercle de centre O et de rayon O tel que ORM soit un triangle rectangle en O.
- Soit G un point du cercle de centre O et de rayon OP tel que OGM soit un triangle rectangle en G.
- Soit H un point du segment [OQ] tel que HGM soit rectangle en H.



Les élèves de la série S donneront les résultats des calculs suivants en fonction des réels a et b. Les élèves des autres séries pourront prendre $a = 30$ *et* $b = 10$.

a) Calculer la longueur OP. En déduire la valeur OM.
À quelle moyenne de a et b cette valeur OM correspond-elle ?

b) Calculer la longueur RM. À quelle moyenne de a et b cette valeur RM correspond-elle ?

c) Calculer la longueur GM. À quelle moyenne de a et b cette valeur GM correspond-elle ?

d) Calculer la longueur GH (on pourra utiliser deux expressions différentes de l'aire du triangle OGM).
En déduire la longueur HM. À quelle moyenne de a et b cette valeur HM correspond-elle ?

e) Justifier que $HM \leqslant GM \leqslant OM \leqslant RM$ (on pourra traiter séparément chaque inégalité) et conclure.

RETOUR AU SOMMAIRE

LIMOGES

Deuxième exercice

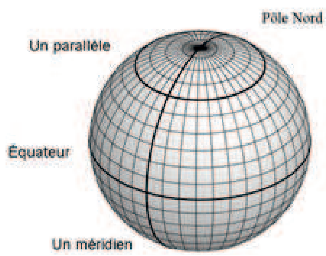
Toutes séries

Voyage à la surface de la Terre

Énoncé

On étudie les parcours d'un voyageur sur la Terre modélisée par une sphère parfaite. Sur cette sphère, on définit

- *Les pôles Nord et Sud.*
- *L'équateur : ensemble des points à égale distance des pôles, qui partage la Terre en hémisphère Nord et hémisphère Sud.*
- *Des méridiens : des grands cercles passant par les deux pôles.*
- *Des parallèles : des cercles « parallèles à l'équateur ».*

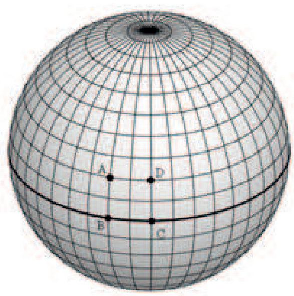


On suppose que la longueur de l'équateur est exactement 40 000 km.
Les distances entre des points de la surface de la Terre seront toujours données ou calculées en restant à la surface de la Terre : on ne creuse pas de tunnel !
Pour le voyageur,

- *« aller vers le Sud (ou vers le Nord) » signifie suivre un méridien en direction du Sud (ou du Nord),*
- *« aller vers l'Est (ou vers l'Ouest) » signifie suivre un parallèle en direction de l'Est (ou de l'Ouest).*

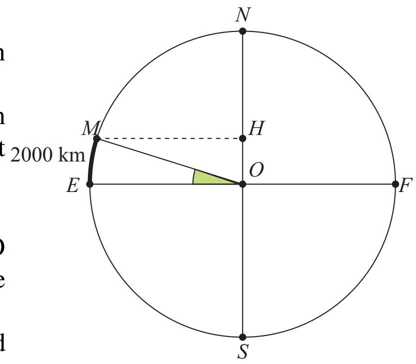
1. Quelle est la distance entre le pôle Nord et l'équateur ?
2. En partant d'un certain point de l'hémisphère Nord, le voyageur parcourt 2000 km vers le sud, 2000 km vers l'Est et 2000 km vers le Nord et se retrouve à son point de départ. Quel est son point de départ ?
3. Le voyageur part d'un point A situé à 2000 km au nord de l'équateur.
   Il parcourt
   - 2000 km vers le Sud jusqu'à un point B,
   - 2000 km vers l'Est jusqu'à un point C,
   - 2000 km vers le Nord jusqu'à un point D,
   - et enfin 2000 km vers l'Ouest.

   Justifier qu'il ne se retrouve pas au point A.
   Est-il repassé par le point A ?



4. Les deux questions précédentes montrent que des phénomènes étranges se passent lorsqu'on décrit des déplacement sur Terre. Il est cependant possible pour le voyageur d'effectuer 2000 km vers le Sud, 2000 km vers l'Est, 2000 km vers le Nord, et enfin 2000 km vers l'Ouest et de se retrouver à son point de départ. De quelle distance de l'équateur doit-il partir ? (il y a plusieurs solutions, mais une seule est demandée).
5. Dans cette question, on souhaite préciser la réponse à la question 3.

a) On s'intéresse à la longueur du parallèle situé à 2000 km au Nord de l'équateur.
On utilise le schéma ci-contre qui représente la Terre en coupe :
E et F sont des points de l'équateur, M le point à 2000 km au Nord de E et O le centre de la Terre. Les droites (EO) et (MH) sont parallèles.
Quelle est la mesure de l'angle $\widehat{EOM}$?
Calculer la distance EO puis la distance MH (Les points O et H sont à l'intérieur de la Terre : il s'agit donc de distance en ligne droite).
En déduire la longueur du parallèle situé à 2000 km au Nord de l'équateur.



b) En reprenant les données et notations de la question 3 : quelle fraction de l'équateur parcourt le voyageur lorsqu'il va de B vers C ?

c) En déduire le nombre de kilomètres qu'il doit parcourir vers l'Ouest en partant du point D pour rejoindre le point A.

6. La longueur $L(x)$ d'un parallèle situé à x km de l'équateur est donné par la formule :

$$L(x) = 40000 \times \cos\left(\frac{90 \times x}{10\,000}\right) \text{ (l'unité d'angle étant le degré)}$$

Pour les élèves de série S uniquement : démontrer cette formule.
Les élèves des autres séries peuvent admettre cette formule.

7. On souhaite reprendre la question 2, mais en partant d'un point de l'hémisphère Sud.
   a) Montrer qu'il existe un parallèle de l'hémisphère Sud de longueur 2000 km. À quelle distance (arrondie au km) de l'équateur est-il situé ?
   b) Partant d'un point de l'hémisphère Sud, le voyageur parcourt 2000 km vers le sud, 2000 km vers l'Est et 2000 km vers le Nord, et se retrouve à son point de départ. À quelle distance de l'équateur peut être son point de départ ?
   c) Proposer une autre solution à la question précédente.
8. Proposer une autre solution à la question 4. Toute trace de recherche sera prise en compte.

RETOUR AU SOMMAIRE

LYON

Premier exercice

Toutes séries

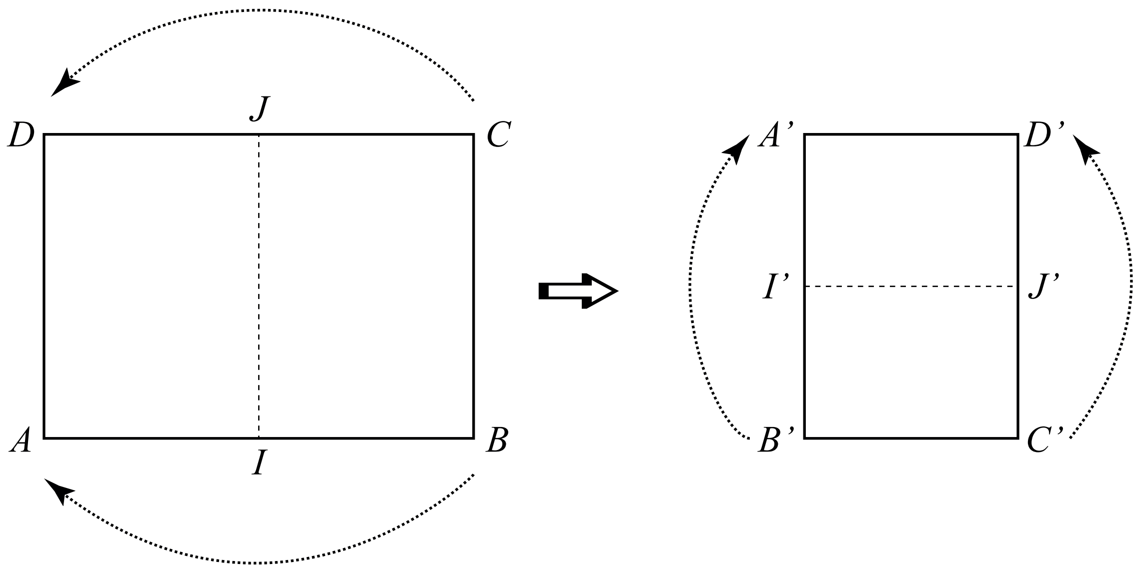
Plier une feuille de papier

Énoncé

Le format de la feuille de cet énoncé est un format dit A4. Mais d'où vient cette dénomination ?
Une feuille au format A0 est un rectangle ABCD d'aire 1 m^2 avec [AB] la longueur et [BC] la largeur. On pose $AB = L_0$ et $BC = \ell_0$. On nomme k le rapport : $\dfrac{L_0}{\ell_0} = k$ (on a donc $k > 1$). Le nombre k n'est pas quelconque mais a la propriété suivante :

On appelle I le milieu de [AB] et J le milieu de [CD]. Lorsqu'on plie la feuille ABCD de format A0 suivant la droite (IJ) (en superposant A et B ainsi que C et D, comme indiqué sur le dessin), on obtient une feuille au format A1, c'est-à-dire un rectangle A'B'C'D' d'aire 0,5 m^2, de longueur notée L_1 et de largeur ℓ_1. Dans ces conditions $k = \dfrac{L_1}{\ell_1}$ et $L_1 = \ell_0$ et $\ell_1 = \dfrac{L_0}{2}$. Une feuille A0 est ainsi un agrandissement d'une feuille A1.

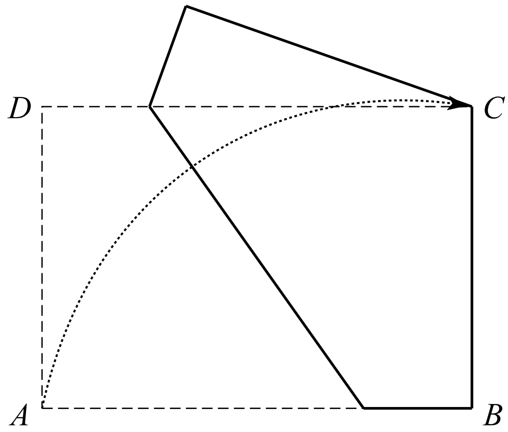
Format A0 Format A1



1. Démontrer que $k = \sqrt{2}$.
2. Calculer les valeurs exactes exprimées en mètre de L_0 et ℓ_0.
   On recommence le même procédé en pliant la feuille de format A1 pour obtenir une feuille de format A2. En réitérant encore le procédé on obtient ainsi une feuille de format A3, puis de format A4…
3. Calculer l'aire exacte, en cm^2, d'une feuille au format A4.

4. Déterminer les valeurs exactes des dimensions, en cm, des côtés d'une feuille au format A4 et arrondir ces résultats au dixième.
5. Si l'on plie une feuille A0 en superposant deux de ses sommets diagonalement opposés, à savoir A et C, on obtient un pentagone ayant un axe de symétrie.

Pliage en pentagone



Calculer, en cm^2, l'aire exacte du pentagone obtenu.

RETOUR AU SOMMAIRE

LYON

Deuxième exercice

Toutes séries

Nombres tri-tri

Énoncé

Les nombres *tri-tri* sont les entiers positifs de trois chiffres dont les seuls chiffres possibles sont 1, 2 ou 3.
Par exemple 123 et 122 sont des nombres *tri-tri* mais pas 142.

1. Démontrer qu'il existe 27 nombres *tri-tri* distincts.
   Trois nombres *tri-tri* distincts forment un trident si et seulement si pour les trois positions possibles (unités, dizaines, centaines), leurs trois chiffres sont soit égaux, soit tous distincts.
   121, 122 et 113 ne constituent pas un trident car les chiffres des dizaines ne sont ni tous égaux ni tous distincts bien que les chiffres des centaines soient tous égaux et que les chiffres des unités soient tous différents.
   Il existe trois sortes de tridents : *trident2, trident1, trident0.*
   - 121, 122 et 123 constituent un *trident2* : les chiffres des trois nombres sont égaux pour deux positions sur trois
   - 123, 222 et 321 constituent un *trident1* : les chiffres des trois nombres sont égaux pour une position sur trois
   - 123, 231 et 312 constituent un *trident0* : les chiffres des trois nombres sont tous différents pour trois positions sur trois
2. a) On considère les nombres *tri-tri* 122 et 323. Combien de nombre(s) *tri-tri* peut-on leur associer pour former un trident ? Écrire ce(s) nombre(s).
   b) Montrer que si on a deux nombres *tri-tri*, on ne peut leur associer qu'un unique nombre *tri-tri* pour former un trident.

On suppose qu'on choisit au hasard, successivement et sans remise, trois nombres distincts dans l'ensemble des nombres tri-tri.

3. a) Si on tient compte de l'ordre des tirages, montrer qu'on peut obtenir six tridents constitués des mêmes nombres.
   b) Démontrer qu'il existe 117 tridents distincts (si l'on ne tient pas compte de l'ordre des tirages).
4. On suppose qu'on choisit au hasard un *trident* parmi l'ensemble des tridents.
   a) Combien existe-t-il de tridents du type *trident2* ? En déduire la probabilité d'avoir un *trident2*.
   b) Quelle est la probabilité d'avoir un *trident1* ?
   c) Quelle est la probabilité d'avoir un *trident0* ?
5. Cette question peut être traitée indépendamment des autres.
   a) Trouver un ensemble de 8 nombres *tri-tri* à partir desquels on ne peut former aucun *trident*.
   b) Trouver un ensemble de 9 nombres *tri-tri* à partir desquels on ne peut former aucun *trident*.

RETOUR AU SOMMAIRE

MAYOTTE

Premier exercice

Toutes séries

Triplets pythagoriciens

Énoncé

Une définition préliminaire.
Un triplet d'entiers naturels (a, b, c) est dit triplet Pythagoricien lorsque $a^2 + b^2 = c^2$.
Par exemple : (3, 4, 5) est un triplet Pythagoricien.

L'exercice a pour objectif de mettre en évidence des méthodes pour trouver des exemples de triplets pythagoriciens.

1. **Une solution moderne**
   a) Montrer que pour tous nombres réels x et y on a l'égalité suivante
   $$(x^2 - y^2)^2 + (2xy)^2 = (x^2 + y^2)^2$$
   b) En déduire deux exemples de triplets Pythagoriciens.
2. **La solution de Fibonacci.**

   La solution générale est difficile et trop longue ! Pour la faire découvrir, nous l'abordons sur des exemples. L'idée principale est d'écrire un nombre carré sous la forme d'une somme de nombres impairs.

   A) Considérons le nombre carré 1764. Il est pair, de moitié 882. On peut donc écrire : **1764 = 881 + 883**. On pose $\boldsymbol{A = 1 + 3 + 5 + \cdots + 879}$ et $\boldsymbol{B = 1 + 3 + 5 + \cdots + 881 + 883}$.
      a) Écrire 1764 à l'aide de A et de B.
      b) En utilisant les résultats sur les suites, écrire 1764 comme différence de deux carrés ; en déduire un triplet Pythagoricien.

   B) Considérons le nombre carré 225. Il est divisible par 3. On peut l'écrire $\boldsymbol{225 = 73 + 75 + 77}$.
      a) Proposer deux sommes de nombres impairs A et B comme dans l'exemple précédent et écrire 225 à l'aide de A et B.
      b) Écrire 225 comme différence de deux carrés ; en déduire un triplet Pythagoricien.

RETOUR AU SOMMAIRE

MAYOTTE

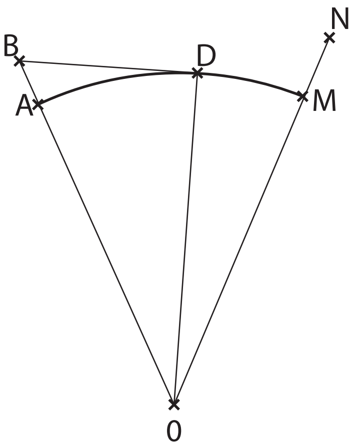
Deuxième exercice

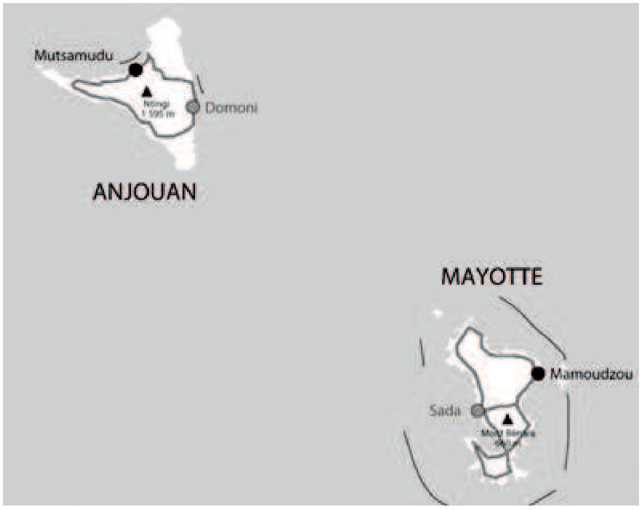
Série S

Deux îles voisines

Énoncé

Dans le problème suivant, on s'intéresse aux plus hauts sommets de deux îles voisines Anjouan et Mayotte.
La figure ci-dessous représente une coupe de la sphère terrestre par un plan passant par son centre O. On y a marqué les points B et N représentant les sommets respectifs du Mont Bénara à Mayotte et du Mont Ntringui à Anjouan.
On donne le rayon terrestre $R = 6370$ km. On indique d'autre part que le Mont Bénara culmine à l'altitude $AB = 660$ m et le Mont Ntringui à l'altitude $MN = 1595$ m. La distance AM est de 108 km, cette distance correspondant à la mesure de l'arc de cercle AM indiqué sur la figure.





1. a) Depuis le sommet B du Mont Bénara, à quelle distance d en km à 10^{-1} près sont les points qui comme le point D sur la coupe sont situés à l'horizon, au niveau de la mer ?
   b) Calculer la mesure en degré de l'angle $\widehat{AOD}$ à 10^{-2} près, puis en déduire la longueur de l'arc AD.
   c) Calculer la différence en mètres à 10^{-2} près entre la distance d et la longueur de l'arc AD.
2. Donner un encadrement de l'altitude des points situé sur les parois du Mont Ntringui et visibles depuis le sommet B, on arrondira au mètre près.

RETOUR AU SOMMAIRE

MAYOTTE

Troisième exercice

Séries autres que S

Poignées de main

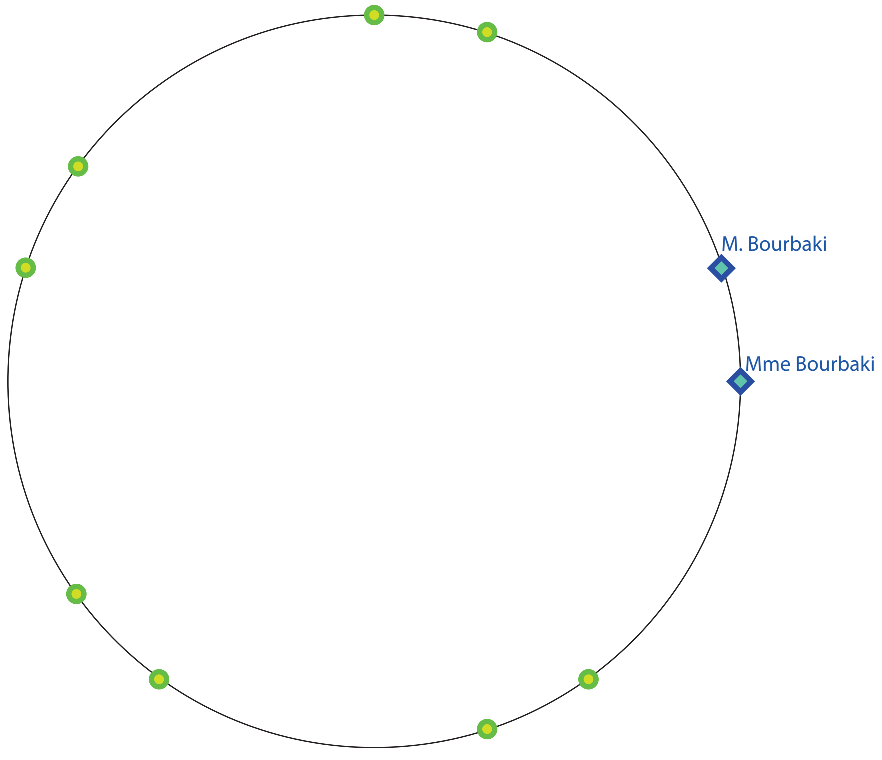
Énoncé

M. et Mme Bourbaki assistent au congrès international des Mathématiques. Quatre autres couples partagent leur table. Avant le repas, un certain nombre de poignées de mains sont échangées. Bien évidemment, personne ne se serre la main à lui-même. Les époux ne se serrent pas la main entre eux. Et deux personnes autour de la table se serrent la main au plus une fois.

Mme Bourbaki, qui est très observatrice, remarque que **les 9 autres personnes autour de la table ont échangé des nombres de poignées de main tous différents**.

Combien de poignées de main ont échangé M. et Mme Bourbaki ?

1. Préciser le nombre maximum et le nombre minimum de poignées de main qu'une personne donnée peut échanger.
2. Expliquer pourquoi la personne qui a échangé 8 poignées de mains est en couple avec la personne qui en a échangé zéro, et pourquoi cette personne n'est ni M. ni Me Bourbaki.
3. Répondre à la question posée en justifiant la réponse On pourra s'aider du graphique suivant. Les points représentent les personnes présentes autour de la table, les losanges représentent M. et Mme Bourbaki.



RETOUR AU SOMMAIRE

MONTPELLIER

Premier exercice

Toutes séries

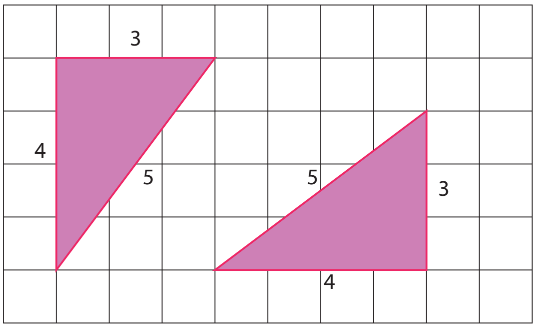
Triangles frères

Énoncé

Un triangle du plan est défini par les longueurs de ses trois côtés. Dans tout l'exercice, l'unité choisie est le cm.

Deux triangles qui ont la même aire et le **même périmètre** sont appelés **triangles frères**. Deux triangles qui ont les **mêmes longueurs de côtés** seront appelés **frères jumeaux**.

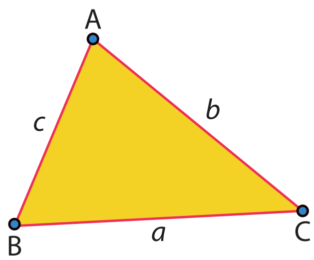
Exemple :



Ces deux triangles sont frères jumeaux.

Des triangles frères jumeaux sont évidemment des frères, mais existe-t-il des triangles frères qui ne soient pas jumeaux ? Cet exercice se propose d'étudier certains cas possibles.

Notations : Dans un triangle ABC on appellera a, b et c les longueurs de [BC], [AC] et [AB].



p est le périmètre

$$p = a + b + c$$

A est l'aire du triangle

$$\frac{base \times hauteur}{2}$$

1. **Cas des triangles équilatéraux**

   On considère un triangle équilatéral dont les côtés mesurent 4.
   Parmi les triangles équilatéraux, peut-on trouver un frère de ce triangle qui ne soit pas son jumeau ? Si oui, donner la longueur de ses côtés.

2. **Cas des triangles rectangles**

   On considère un triangle rectangle dont les côtés mesurent 3, 4 et 5.

   a) Parmi les triangles rectangles, peut-on trouver un frère de ce triangle dont un des côtés mesure 3 et qui ne soit pas son jumeau ? Si oui, donner la longueur de ses côtés.

   b) Parmi les triangles rectangles, peut-on trouver un frère de ce triangle dont un des côtés mesure 5 et qui ne soit pas son jumeau ? Si oui, donner la longueur de ses côtés.

3. **Cas des triangles isocèles**

   On considère le triangle isocèle de cotés 5, 5 et 6.
   Montrer que ce triangle a un frère isocèle qui n'est pas son jumeau.

RETOUR AU SOMMAIRE

MONTPELLIER

Deuxième exercice

Série S

Nombres magiques

Énoncé

Un nombre entier naturel supérieur ou égal à 10 est dit **magique** si la somme de ses chiffres est égale au produit de ses chiffres.

1. Trouver tous les nombres magiques à 2 chiffres.
2. Trouver tous les nombres magiques à 3 chiffres.

On s'intéresse désormais à certains nombres magiques qui s'écrivent avec 4 chiffres ou plus.

3. Existe-t-il un nombre magique à 10 chiffres ? Si oui, en donner un exemple.
4. Les symboles α et β sont des chiffres qui représentent des nombres strictement supérieurs à 1
   Quel est le plus grand nombre magique qui s'écrit sous la forme : $\alpha\beta 1\ldots(\text{que des } 1)\ldots 1$?
5. Existe-t-il une infinité de nombres magiques ?

RETOUR AU SOMMAIRE

MONTPELLIER

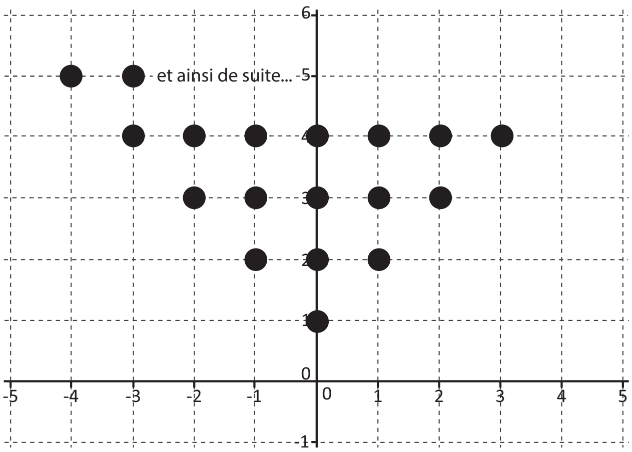
Troisième exercice

Séries autres que S

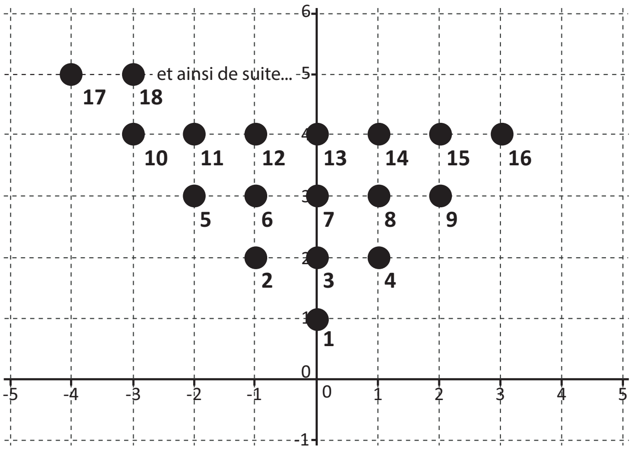
Jeu de jetons

Énoncé

On positionne dans un repère orthonormé du plan, des jetons comme illustré ci-dessous.
Les jetons sont placés sur des points à coordonnées entières.



On les numérote ensuite en partant du jeton positionné en (0,1) :



1. Quelles sont les coordonnées du jeton numéro 2016 ?
2. Quel est le numéro porté par le jeton positionné au point de coordonnées (1998 , 2016) ?

RETOUR AU SOMMAIRE

NANCY-METZ

Premier exercice

Toutes séries

Sauvetage en montagne

Énoncé

La maman de Romain et Sophie est secouriste en montagne. Elle possède une balise ainsi qu'un récepteur qui indique à tout moment la distance qui le sépare de la balise. Romain a caché la balise dans un pré et Sophie doit la retrouver en utilisant le récepteur.

On représente le pré par un repère orthonormé d'origine O. Au départ, Sophie se trouve sur le point O.

1. Lorsque Sophie est au point O, la distance indiquée par le récepteur est de 5 mètres. Quel est l'ensemble des positions possibles de la balise ? Dessinez cet ensemble (en prenant 1cm pour 1m).
2. Sophie se déplace maintenant sur le point $A(1,0$ et observe sur son récepteur une distance de 4,5 mètres. Quelles sont les positions possibles de la balise ? Dessinez cet ensemble.

Romain cache maintenant la balise dans un nouvel emplacement inconnu. Dans la suite, on note $M(x,y)$ la position de la balise.

3. Exprimez la distance entre la balise et le point O en fonction de x et y.
4. Même question pour la distance entre la balise et le point $A(1,0)$.
5. Lorsqu'elle est au point O, Sophie observe la distance a sur son récepteur. Lorsqu'elle est au point $A(1,0)$, elle observe la distance b. Quelle est l'abscisse x de la balise en fonction de a et b ?
6. Proposez une méthode pour retrouver la position $M(x,y)$ de la balise, en vous inspirant des calculs précédents.

C'est maintenant Sophie qui cache la balise, et c'est au tour Romain de la trouver. Il voudrait utiliser une méthode sans calcul.

7. Montrez que l'abscisse de la balise coïncide avec le point de la droite des abscisses où la distance avec la balise est minimale.
8. En déduire une méthode sans calcul pour retrouver la position de la balise.

Remarque :

En cas de sortie en montagne, les randonneurs sont équipés de balises qui permettent aux secouristes de les retrouver en cas d'avalanche. La méthode utilisée par les secouristes pour les retrouver s'appuie sur les outils mathématiques développés dans la dernière partie de cet exercice.

RETOUR AU SOMMAIRE

NANCY-METZ

Deuxième exercice

Toutes séries

Somme et Produit

Énoncé

Nous sommes deux nombres de 2 chiffres.
Notre somme donne un nombre de 3 chiffres avec un 0 en chiffre des dizaines.
Si dans ce dernier nombre, on intercale un deuxième 0, le nombre obtenu est égal à la moitié de notre produit.
Que vaut notre produit ?

Notons a et b les chiffres du premier nombre N_1 (on a donc $N_1 = 10a + b$) et c et d les chiffres du second nombre N_2 (on a donc $N_2 = 10c + d$).

1. Montrer qu'il est impossible que les chiffres des unités des deux nombres soient 3 et 6 (autrement dit d'avoir $b = 3$ et $d = 6$).
2. Montrer qu'il est impossible que les chiffres des dizaines soient respectivement 4 et 6 (autrement dit d'avoir $a = 4$ et $c = 6$).
3. Supposons que $b + d \leqslant 9$.
   a) Montrer qu'alors $a + c = 10$.
   b) Déterminer une solution au problème
4. Supposons que $b + d \geqslant 10$.
   a) Montrer qu'alors $a + c = 9$.
   b) Montrer qu'aucune solution ne convient
5. Conclure.

RETOUR AU SOMMAIRE

NANTES

Premier exercice

Toutes séries

Le jeu du court-circuit [1]

Énoncé

Aïssa et Paul le Poulpe jouent au jeu du court-circuit dont voici les règles :

Règles du jeu :

À chaque tour, les joueurs choisissent en secret un nombre entier entre 1 et 6, puis les valeurs choisies sont révélées simultanément.

1. *Si Aïssa choisit une valeur d ?au moins deux points au-dessus de la valeur de Paul (par exemple 6 contre 4), elle marque le nombre de points correspondants (6 points) et Paul marque 0 point. Et inversement.*
2. *Si Aïssa et Paul choisissent la même valeur, ils marquent chacun 0 point.*
3. *Le court-circuit : Si Aïssa choisit la valeur exactement un point au-dessous de celle de Paul, elle le court-circuite : elle marque la somme des deux valeurs choisies et Paul 0. Par exemple, si elle choisit 4 et Paul 5, alors elle marque 9 points et Paul 0. Et inversement.*

Le but du jeu est de marquer au moins 21 points.

Partie A : les trois premières parties

1. Voici le déroulement de leur première partie (elle a duré six coups) :

Choix d'Aïssa	6	5	5	5	6	4
Choix de Paul	4	5	4	3	4	5

   Justifier qu'Aïssa remporte la partie avec 26 points contre 9.
2. Au cours de la seconde partie, Aïssa est à 13 points et Paul à 14. Au coup suivant :
   a) Aïssa peut-elle gagner ?
   b) Aïssa peut-elle atteindre exactement un score de 21 points ?
3. Au cours du déroulement d'une troisième partie, Aïssa est à 20 points et Paul à 10. Quel coup conseiller à Aïssa ?
   Argumenter.
4. Décrire la partie la plus courte possible à ce jeu.

Partie B : Comment gagner ?

Paul est un poulpe et par conséquent il joue au hasard : il choisit sa valeur entre 1 et 6 de manière équiprobable.

Proposer une stratégie de jeu gagnante pour Aïssa. En quoi est-ce une stratégie gagnante ? Estimer le nombre de points qu'elle peut espérer gagner à chaque coup.

Partie C : Paul s'améliore

1. **Important** : Dans chaque exercice, l'utilisation d'algorithme peut constituer un élément de réponse valable qui sera valorisé par le jury, à condition de le rédiger soigneusement sur la copie et d'indiquer en détail les simulations effectuées.

Dans cette nouvelle partie, Paul choisit toujours au hasard et de manière équiprobable, mais seulement parmi les valeurs 4, 5, 6.

Existe-t-il une stratégie permettant de battre le poulpe ? Existe-t-il une stratégie meilleure que les autres ?

Partie D : Paul resserre

Soit p un réel de l'intervalle] 0 ; 1 [.
Dans cette partie, Paul joue la valeur 5 avec probabilité p et la valeur 6 avec probabilité 1?p.

Pour contrer cette stratégie, Aïssa décide de jouer aléatoirement 4, 5 ou 6 avec les probabilités respectives x, y et 1?x?y , x et y désignant deux réels de l'intervalle] 0 ; 1 [.

Quelles sont les valeurs du couple (x, y) qui permettent de battre la stratégie du poulpe ? Existe-t-il un choix optimal ?

RETOUR AU SOMMAIRE

NANTES

Deuxième exercice

[2] Série S

Un jeu équitable

Énoncé

Deux personnes envisagent le jeu suivant : n boules, des boules noires et des boules blanches, indiscernables, sont placées dans un sac. Un des joueurs tire une première boule au hasard, ne la remet pas dans le sac, puis une deuxième. Il gagne une partie si les deux boules tirées sont de couleurs différentes.

Le but de cet exercice est de connaître le contenu d'un sac qui rende le jeu équitable, c'est-à-dire qui donne au tireur la probabilité $\frac{1}{2}$ *de tirer deux boules de couleurs différentes.*

On note a le nombre boules blanches dans le sac (a vérifie naturellement l'encadrement $2 \leqslant a \leqslant n$).

Quels sont, pour $n \leqslant 50$, les couples (a, n) rendant le jeu équitable ?

Nota bene. Les copies apportant deux solutions de natures différentes seront valorisées par le jury.

RETOUR AU SOMMAIRE

2. **Important** : Dans chaque exercice, l'utilisation d'algorithme peut constituer un élément de réponse valable qui sera valorisé par le jury, à condition de le rédiger soigneusement sur la copie et d'indiquer en détail les simulations effectuées.

NANTES

Troisième exercice

Séries autres que S[3]

Le nombre de Green

Énoncé

Dans cet exercice, on fixe un quadrillage et on s'intéresse aux domaines du plan délimités par un contour, à savoir une ligne polygonale fermée dont tous les côtés s'appuient sur le quadrillage.

Voici comment définir le nombre de Green du domaine correspondant à la Figure 1 : on fait le tour du domaine en partant du sommet du contour situé à gauche en haut, A dans notre exemple (Figure 2.) et on se déplace sur le contour dans le sens opposé aux aiguilles d'une montre (« sens trigonométrique ») ; on compte les pas effectués en appliquant les règles suivantes : un déplacement vers le bas est compté négativement, un déplacement vers le haut est compté positivement et un déplacement horizontal, vers la gauche ou la droite, compte pour zéro. De plus, un déplacement vertical est multiplié par un coefficient entier d'autant plus élevé que l'on s'éloigne de A (Figure 2). On ajoute toutes les valeurs obtenues : 1 x (-2) + 2 x (-1) + 4 x (+2) + 5 x (+2) + 3 x (-1) = 11 ; c'est le nombre de Green du domaine de la Figure 1.

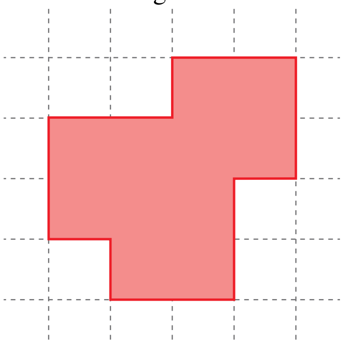


Figure 1

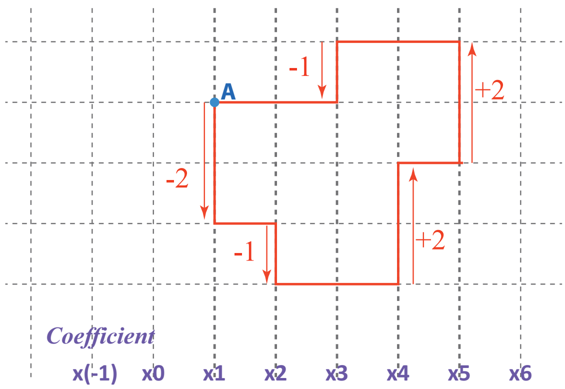


Figure 2

Questions.

1. a) Calculer le nombre de Green du domaine de la Figure 3. (cf. Annexe).
   b) Comment s'effectue le calcul sur la Figure 2. lorsque l'on change de point de départ tout en gardant les mêmes coefficients ?
   c) Dessiner sur la Figure 4. de l'annexe un domaine dont le nombre de Green vaut 7.
2. a) On **scinde** le domaine précédent selon une droite verticale du quadrillage (Figure 5.). Calculer la somme des nombres de Green de chacun des domaines obtenus et comparer au nombre de Green du domaine initial. Le résultat dépend-il de la droite verticale choisie ?
   b) La propriété est-elle conservée si on coupe avec une droite horizontale du quadrillage ?
   c) Comment définir le nombre de Green à partir d'un domaine comportant un « trou » (Figure 6.) ?
3. a) Combien vaut le nombre de Green d'un carré de côté 1 ?

3. **Important** : Dans chaque exercice, l'utilisation d'algorithme peut constituer un élément de réponse valable qui sera valorisé par le jury, à condition de le rédiger soigneusement sur la copie et d'indiquer en détail les simulations effectuées.

b) Que représente le nombre de Green ?

ANNEXE

(A remettre avec la copie)

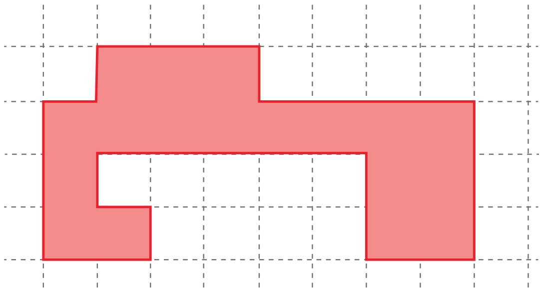


Figure 3

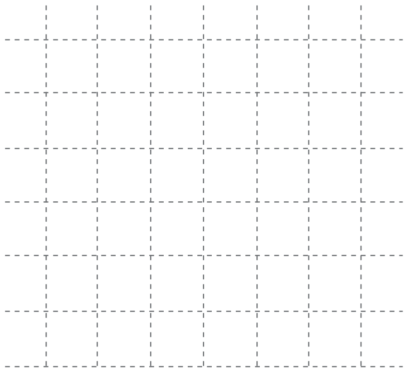


Figure 4

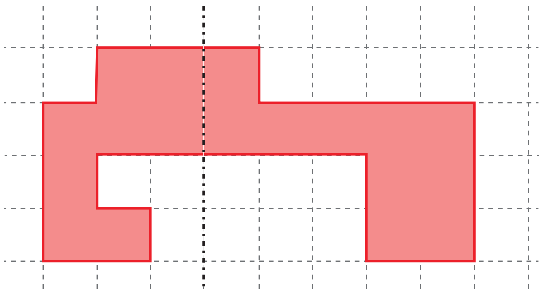


Figure 5

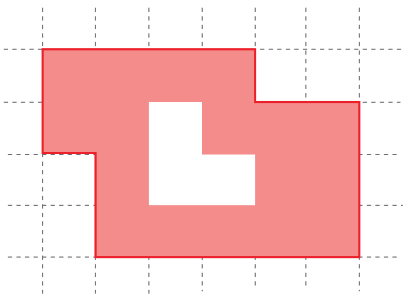


Figure 6

RETOUR AU SOMMAIRE

NICE

Premier exercice

Toutes séries

A travers les rues

Énoncé

Informations préliminaires :

A - Distance euclidienne

Soient deux points $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$ dans un repère orthonormé.
On rappelle que la distance usuelle entre les points A et B est donnée par la formule :

$$AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}.$$

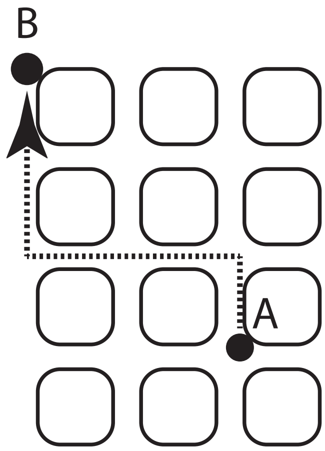
Cette distance, notée $d(A,B)$, est appelée distance euclidienne entre les points A et B.

B - Distance du taxi

On rappelle que $|x|$ désigne la valeur absolue de x ; par exemple : $|-3|=3; |5|=5, |0|=0$.
Pour $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$, on définit $d_t(A,B)$ par : $d_t(A,B)=|x_B-x_A|+|y_B-y_A|$.
Cette distance, notée $d_t(A,B)$ est appelée distance du taxi entre les points A et B.
Par exemple, si $A(0;0)$ et $B(1;-2)$ on a $d(A,B)=\sqrt{5}$ et $d_t(A,B)=3$.

1. **Comparaison de la distance euclidienne et de la distance du Taxi**
   a) On considère dans un repère orthonormé les points $A(3;2)$ et $B(-3;4)$.
   Calculer et comparer $d(A,B)$ et $d_t(A,B)$.
   b) Reprendre la question a) avec les points $A(5;2)$ et $B(5;4)$.
   c) D'une manière générale, dans quels cas a-t-on $d(A,B)=d_t(A,B)$?
   Peut-on avoir $d(A,B)>d_t(A,B)$? On pourra s'aider d'un dessin qui représente la distance du taxi entre deux points A et B dans un repère orthonormé.
   d) Peut-on trouver des points A et B distincts tels que $d_t(A,B)=\sqrt{2}\times d(A,B)$?
   e) Peut-on trouver des points A et B distincts tels que $d_t(A,B)=2\times d(A,B)$?
2. **Plans en damier**
   De nombreuses villes ont des plans d'urbanisme où les rues sont rectilignes et se croisent à angle droit, créant des îlots de forme carrée. On peut citer le centre-ville du Havre et le plan de Manhattan.

Sur le plan ci-dessous, un taxi souhaite partir d'un point $A(x_A\,;y_A)$ et arriver à un point $B(x_B\,;y_B)$ dans une ville construite en damier.



a) Si on considère que chaque pâté de maison mesure une unité, quelle est la distance euclidienne, « à vol d'oiseau » entre le point A et le point B ?

b) Le tracé en pointillés ci-dessus donne un itinéraire possible sans détour entre A et B.
Déterminer le nombre d'itinéraires possibles (sans détour) pour aller de A à B.

3. **Des cercles avec des angles…**

On considère dans cette partie le point O d'origine d'un repère orthonormé du plan.

a) Quel est l'ensemble des points M du plan distants de 3 unités du point O en considérant la distance euclidienne ? Représenter cet ensemble.

b) Reprendre la question précédente en considérant cette fois–ci la distance du taxi. (On pourra commencer par placer quelques points).

RETOUR AU SOMMAIRE

NICE

Deuxième exercice

Toutes séries

Nombres « riches »

Énoncé

Informations préliminaires :

Définition : [*entier premier*]
On dit qu'un entier naturel p est premier s'il admet exactement 2 diviseurs positifs : 1 et lui-même.
Par exemple : 2, 3, 5, 7, 11 sont premiers ; 0, 1, 6, 25 ne sont pas premiers.

Théorème (admis) : Soit n un entier supérieur ou égal à 2.
n se décompose en un produit de facteurs premiers et cette décomposition est unique, à l'ordre près des facteurs.
Par exemple, la décomposition en facteurs premiers de 245 est : $245 = 5 \times 7 \times 7 = 5 \times 7^2$

On note $n = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \cdots p_k^{\alpha_k}$ la décomposition de n en facteurs premiers où $p_1, p_2, \ldots p_k$ sont des nombres premiers deux à deux distincts et où $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_k$ sont des entiers naturels non nuls.
Par exemple : $20 = 2 \times 2 \times 5 = 2^2 \times 5 = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2}$ avec $p_1 = 2$ et $\alpha_1 = 2$; $p_2 = 5$ et $\alpha_2 = 1$.

Propriété (admise) : Tout diviseur positif d de n est de la forme $d = p_1^{\beta_1} \times p_2^{\beta_2} \times \cdots p_k^{\beta_k}$ avec $0 \leqslant \beta_1 \leqslant \alpha_1$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant k$.
Par exemple : 20 possède 6 diviseurs positifs : 1, 2, $2^2 = 4$, 5, $2 \times 5 = 10$ et $2^2 \times 5 = 20$.

Partie A

1. Donner la décomposition en facteurs premiers de 30 puis de 60.
2. Déterminer tous les diviseurs positifs de 30 et de 60.
3. En dénombrant toutes les façons possibles de former un diviseur positif de n, montrer que le nombre de diviseurs positifs de $n = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \cdots p_k^{\alpha_k}$ est $d(n) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \cdots (\alpha_k + 1)$.
4. Trouver un nombre entier qui possède exactement 10 diviseurs positifs.

Partie B

On dit qu'un nombre entier est **riche** s'il peut s'écrire comme différence des carrés de deux entiers naturels.
Par exemple, 27 est riche car $27 = 6^2 - 3^2$.

1. Trouver trois exemples dentiers riches supérieurs à 10 (justifier la réponse).
2. a) Décomposer 76 en produit de facteurs premiers.
   b) En déduire le nombre de diviseurs positifs de 76.
   c) Justifier que si $76 = a^2 - b^2$ avec a et b deux entiers, alors $a - b$ et $a + b$ sont des diviseurs pairs de 76.
   d) Montrer que 76 est riche.
3. Montrer que tout nombre impair est riche.
4. Montrer qu'un entier n pair est riche si et seulement si n comporte au moins deux fois le facteur 2 dans sa décomposition en facteurs premiers.
5. Donner la liste des entiers compris entre 0 et 50 qui ne sont pas riches.

RETOUR AU SOMMAIRE

ORLÉANS - TOURS

Premier exercice

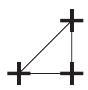
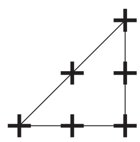
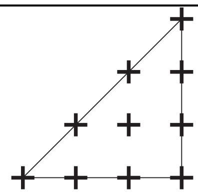
Toutes séries

Des nombres en forme

Énoncé

Première partie : Des nombres en triangle

Les figures ci-dessous décrivent la construction des premiers « nombres triangulaires ».

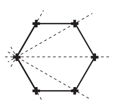
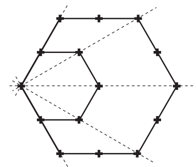
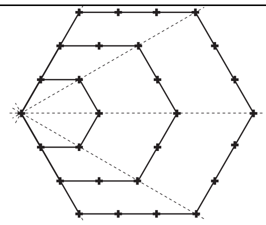
Étape	**Étape n° 1**	**Étape n° 2**	**Étape n° 3**	**Étape n° 4**
Figure	+			
Nombre de points	1 point	3 points	6 points	10 points
Nombre triangulaire	$T_1 = 1$	$T_2 = 3$	$T_3 = 6$	$T_4 = 10$

Ainsi T_4 est le quatrième nombre triangulaire et vaut 10.
Pour tout entier naturel n non nul, on note T_n le nombre de points situés à l'intérieur ou au bord du triangle obtenu à la $n^{\text{ième}}$ étape. Les nombres T_n sont appelés des nombres triangulaires.

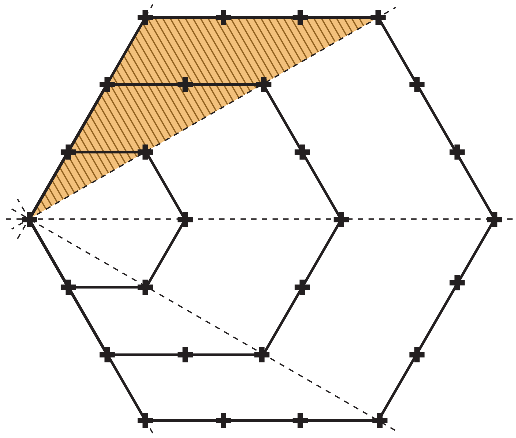
1. Donner la valeur de T_5 et de T_6.
2. a) Construire la figure de l'étape n° 5 et justifier l'égalité $2 \times T_6 - 6 = 6^2$.
   b) Sans faire explicitement la figure, expliquer comment justifier l'égalité $2 \times T_{20} - 20 = 20^2$.
   c) Justifier que pour tout n entier naturel non nul on a : $T_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.
3. 3. 2016 est-il un nombre triangulaire ?

Deuxième partie : : Des nombres en hexagone

Les figures ci-dessous décrivent la construction des premiers « nombres hexagonaux ».

Étape	**Étape n° 1**	**Étape n° 2**	**Étape n° 3**	**Étape n° 4**
Figure	+			
Nombre de points	1 point	6 points	15 points	28 points
Nombres hexagonaux	$H_1 = 1$	$H_2 = 3$	$H_3 = 6$	$H_4 = 10$

Ainsi H_4 est le quatrième nombre hexagonal et vaut 28. Pour tout entier naturel n non nul, on note H_n le nombre de points de la figure obtenus à la $n^{\text{ième}}$ étape. Les nombres H_n sont appelés des nombres hexagonaux.



1. Représenter sur le document en annexe 1, à rendre avec la copie, la figure obtenue à l'étape n° 5 et donner la valeur de H_5.
2. Vérifier que le nombre de points de la partie hachurée de la figure ci-contre est égal à T_4.
3. Pour tout entier naturel n non nul, exprimer H_n en fonction de T_n.
4. En déduire que pour tout entier naturel n non nul on a $H_n = 2n^2 - n$.
5. 2016 est-il un nombre hexagonal ?
6. a) Montrer que tout nombre hexagonal est également un nombre triangulaire.

   b) La réciproque est-elle vraie ? Justifier votre réponse.

RETOUR AU SOMMAIRE

ORLÉANS - TOURS

Deuxième exercice

Série S

Tas de sable, des tas de situations

Énoncé

Dans cet exercice, on verse une quantité de sable maximale sur une plaque horizontale ayant la forme d'un polygone. Selon la nature du polygone, les tas de sable prennent des formes différentes comprenant des sommets et des arêtes.


Figure 1
Plaque rectangulaire

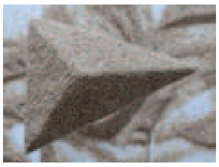


Figure 2
Plaque triangulaire


Figure 3
Plaque « en L »

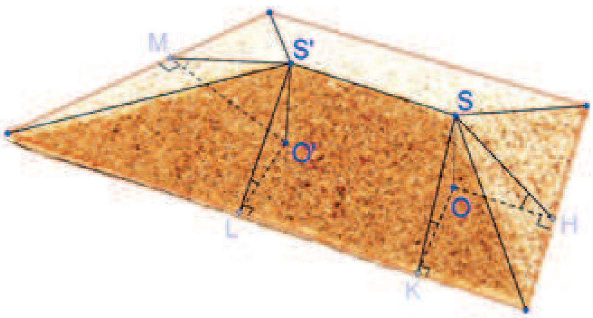
L'objectif de cet exercice est d'étudier la forme géométrique du tas de sable obtenu pour chacune des trois plaques ci-dessus.

Principe général :

Pour le tas de sable ci-contre :

- S est un sommet du tas de sable
- O est le projeté orthogonal du point S sur le polygone de base
- H est le projeté orthogonal de O sur un coté du polygone.

L'angle $\widehat{SHO}$ est appelé l'angle de talus.

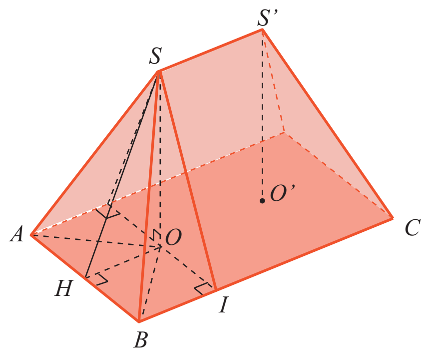


Sur la figure ci-dessus, $\widehat{SKO}$, $\widehat{S'LO'}$, $\widehat{S'MO'}$ sont d'autres angles de talus et le principe physique des tas de sable permet de considérer que l'angle de talus est constant c'est-à-dire que :

$$\widehat{SHO} = \widehat{SKO} = \widehat{S'LO'} = \widehat{S'MO'}.$$

Rappel d'un résultat :
On rappelle que la bissectrice d'un angle est l'ensemble des points équidistants des côtés de l'angle.

1. **Cas où la plaque est un rectangle.**
Dans cette question la plaque est un rectangle ABCD (figure 1).
Le tas de sable comprend deux sommets S et S' et une arête [SS ?].
On note O et O' les projetés orthogonaux respectifs de S et S' sur la base ABCD.
On note H, I et J les projetés orthogonaux respectifs de O sur les segments [AB], [BC] et [AD]. De même K, L et M sont les projetés orthogonaux respectifs de O' sur les segments [CD], [AD] et [BC].
Le principe physique des tas de sable permet d'affirmer que :



$$\widehat{SHO} = \widehat{SIO} = \widehat{SJO} = \widehat{S'KO'} = \widehat{S'LO'} = \widehat{S'MO'}.$$

a) Démontrer que le point O est l'intersection des bissectrices des angles A ? et B ?.

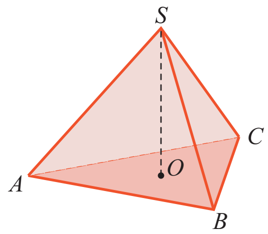
b) En déduire une construction du point O'.

c) Démontrer que la droite (OO') est parallèle aux cotés du rectangle.

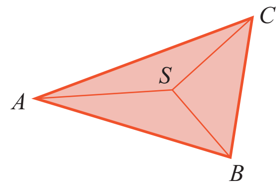
d) On dispose de la plaque rectangulaire fournie en annexe 2 à rendre avec la copie.
Tracer avec précision la vue de dessus du tas de sable obtenu avec une telle plaque.

e) Que se passe-t-il quand la plaque fournie est un carré ?

1. **Cas où la plaque est un triangle.**
Dans le cas d'une plaque triangulaire ABC (figure 2), le tas de sable est une pyramide ABCS.
Comme précédemment, on note O le projeté orthogonal de S sur la face ABC.



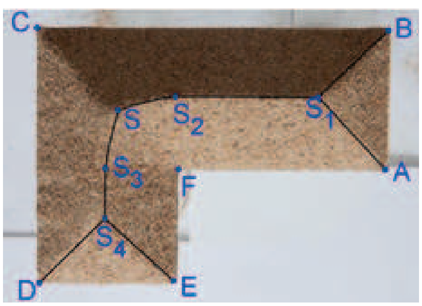
Vue en perspective



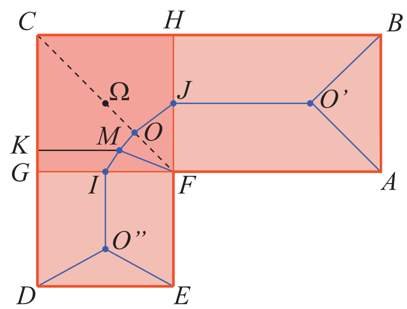
Vue de dessus

Déterminer une méthode de construction du point O en justifiant votre réponse.
La réaliser sur la figure présente en annexe 2 à rendre avec la copie.

2. **Cas où la plaque est en « L ».**
Dans cette question la plaque est le polygone ABCDEF (figure 3) où ABHF et DEFG sont des rectangles et CGFH est un carré de centre Ω.
L'allure des arêtes du tas de sable est donnée par les figures ci-dessous.



Vue de dessus



Projection des arêtes et sommets sur la plaque

On admet que :

- Les points I et J sont les milieux respectifs de [GF] et [FH] ;
- les arcs IO et JO sont symétriques par rapport à la droite (CF) ;
- M est un point de l'arc IO si et seulement si $MF = MK$ où K est le projeté orthogonal de M sur [CG].

L'objectif de cette question est de tracer avec précision la vue du dessus du tas de sable.

a) Expliquer comment sont construits les points O' et O".

b) On considère un point M de coordonnées (x, y) dans le repère $(\Omega; I, J)$.

   i. Vérifier que le point M appartient à l'arc IO si et seulement si :

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = (y+1)^2.$$

   ii. En déduire que l'arc IO est la représentation graphique d'un arc de parabole.

c) On dispose de la plaque « en L » fournie en annexe 2 à rendre avec la copie.
Tracer avec précision la vue de dessus du tas de sable obtenu avec une telle plaque.

RETOUR AU SOMMAIRE

ORLÉANS - TOURS

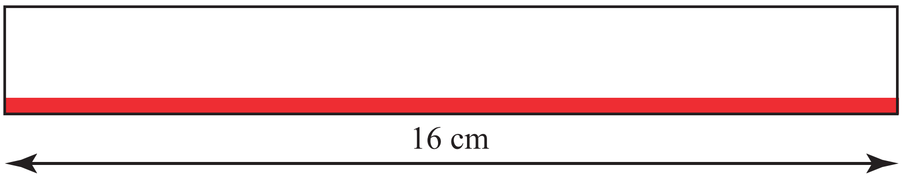
Troisième exercice

Séries autres que S

Gauche, droite !

Énoncé

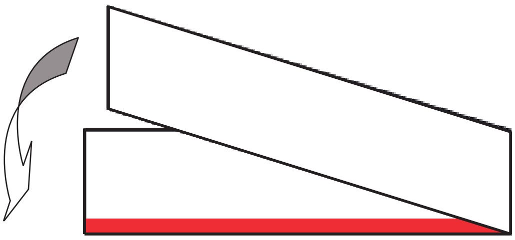
On considère une bande de papier de longueur 16 cm dont le bord inférieur est colorié.



Le but de cet exercice est de trouver la forme de cette bande de papier après des pliages successifs.

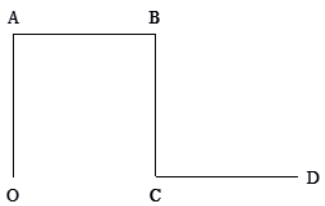
Première étape

La bande de papier est pliée en deux en rabattant le bord situé à droite sur le bord situé à gauche.



Deuxième étape

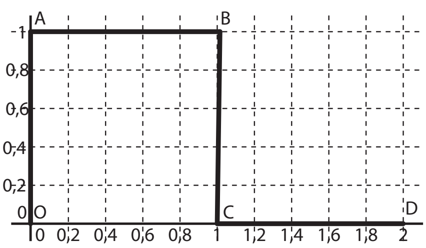
On recommence l'opération sur le pliage précédent. On déplie ensuite la bande de papier de telle sorte que chaque pli se transforme en un angle droit. En posant ce pliage sur une table, côté rouge vers la table, on obtient la figure suivante :



On dispose la ligne brisée OABCD, formée de segments d'égale longueur, dans un repère orthonormé d'unité graphique 4 cm, de manière à ce que le point A ait pour coordonnées (0 ;1).

Cette figure géométrique est codée (d, d, g) pour « droite, droite, gauche » qui correspond au parcours en partant du point O :

« *Aller de O à A, tourner de* 90° *à droite pour aller à B, tourner de* 90° *à droite pour aller à C, tourner de* 90° *à gauche pour aller à D* ».



On notera $ligne_2$ = OABCD et $pliage_2$ = (d,d,g).

Cette construction est répétée par pliages successifs. Dans la suite les lignes brisées seront représentées dans le repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ en partant du point O et en disposant l'extrémité du premier segment sur l'axe des ordonnées, avec une ordonnée positive.

1. a) Dessiner la figure $ligne_3$ dans le repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ et préciser le codage $pliage_3$.
   b) Quelles sont les coordonnées de l'extrémité de la ligne brisée (autre que le point O) ?
2. a) Dessiner la figure $ligne_4$ dans le repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ et préciser le codage $pliage_4$.
   b) Quelles sont les coordonnées de l'extrémité de la ligne brisée (autre que le point O) ?
   c) Expliquer comment obtenir le codage $pliage_4$ à partir du codage $pliage_3$.
   d) Expliquer comment obtenir les coordonnées de l'extrémité de la ligne brisée $ligne_4$ à partir des coordonnées de l'extrémité de la ligne brisée $ligne_3$.
3. Déterminer les coordonnées de l'extrémité de la ligne brisée $ligne_6$.
4. Le codage de $pliage_2$ comporte 3 éléments : d, d, et g.
   a) Combien $pliage_3$ et $pliage_4$ comportent-ils d'éléments ?
   b) n est un entier naturel non nul quelconque. Conjecturer le nombre d'éléments de $pliage_n$. Quelle est la longueur de chacun des côtés de la ligne brisée $ligne_n$?

RETOUR AU SOMMAIRE

PARIS

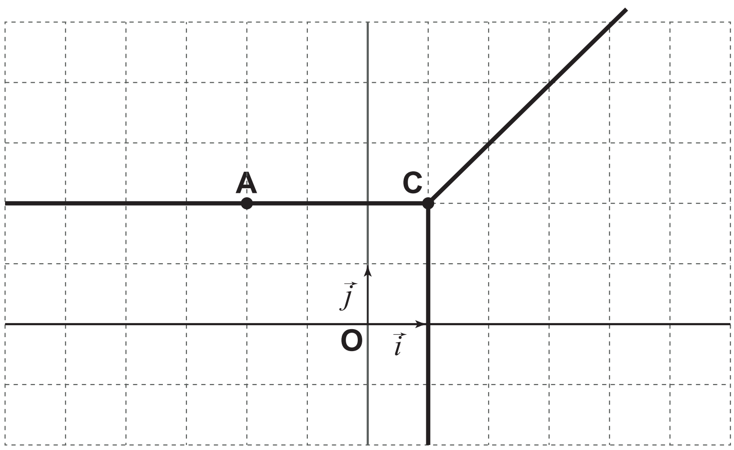
Premier exercice

Toutes séries

Droites tropicales

Énoncé

Le plan est muni d ?un repère orthonormé $(O; \vec{i}\,; \vec{j}\,)$.
Soit C un point du plan. On appelle droite tropicale de point central C la réunion des trois demi-droites d'origine C et dirigées respectivement par les vecteurs directeurs $-\vec{i}$, $-\vec{j}$ et $\vec{i}+\vec{j}$.
On remarquera qu'une droite tropicale est déterminée de manière unique par la position de son point central.
On dit qu'une droite tropicale passe par un point lorsque ce point est situé sur l'une des trois demi-droites qui constituent la droite tropicale.
Par exemple, on a représenté ci-dessous la droite tropicale de point central C (1 ; 2) passant par le point A (-2 ; 2) :



Le but de cet exercice est d'étudier quelques propriétés des droites tropicales[4]. Dans cet exercice, le mot « droite » sans aucun adjectif qualificatif fait référence aux droites rencontrées en géométrie usuelle dite euclidienne[5]. On dit que deux points du plan sont dépendants s'ils appartiennent à une même droite de direction $\vec{i}$, de direction $\vec{j}$ ou de direction $\vec{i}+\vec{j}$. Les deux points sont dits indépendants dans le cas contraire.

1. a) Tracer dans un même repère les droites tropicales suivantes et en préciser le point central.
   - une droite tropicale T_1 passant par les points A_1 (-2 ;3) et B_1 (0 ; 5) ;
   - une droite tropicale T_2 passant par les points A_2 (1 ; 1) et B_2 (3 ; 4) ;
   - une droite tropicale T_3 passant par les points A_3 (2 ; 1) et B_3 (5 ; 2) ;
   - une droite tropicale T_4 passant par les points A_4 (2 ; -1) et B_4 (6 ; -4).

   b) Démontrer la propriété « Par deux points quelconques du plan passe une droite tropicale ».

   c) La propriété « Par deux points quelconques dépendants et non confondus du plan passe une et une seule droite tropicale » est-elle vraie ?

4. Le qualificatif ń tropicale ż a été donné en l'honneur de l'informaticien brésilien Imre Simon (1943- 2009).
5. Euclide dans son livre « *Les Éléments* » (300 av. J-C.) énonce trois propriétés sur les droites :
- par deux points quelconques du plan passe une droite ;
- par deux points quelconques et non confondus du plan passe une et une seule droite ;
- deux droites non parallèles se coupent toujours en un unique point.

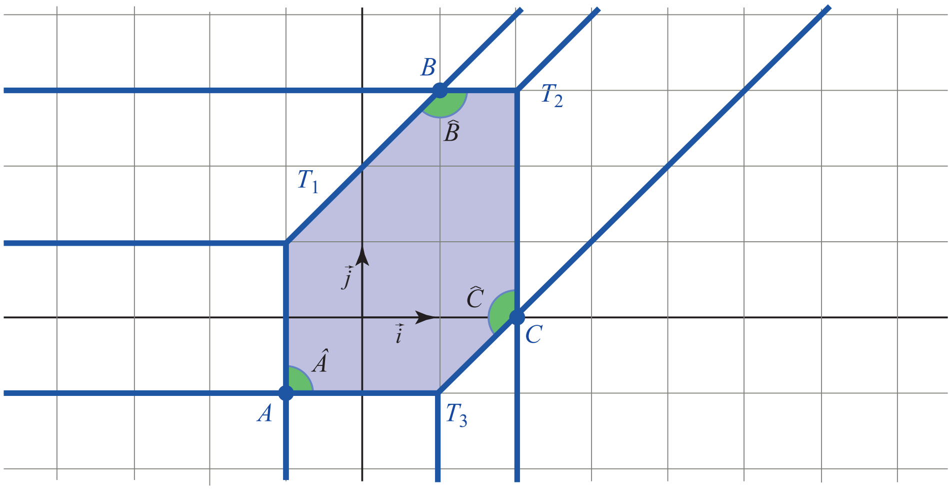
d) Démontrer la propriété « Par deux points quelconques indépendants et non confondus du plan passe une et une seule droite tropicale ».

2. a) Étudier l'intersection de deux droites tropicales dont les points centraux sont dépendants.

   b) Donner les points d'intersection de la droite tropicale de point central O (0 ; 0) avec les droites tropicales de points centraux A (2 ; 4), B (4 ; 1) et C (5 ; -2). On tracera pour cela ces droites tropicales dans un même repère.

   c) Démontrer la propriété « Deux droites tropicales dont les points centraux sont indépendants se coupent toujours en un unique point ».

3. On considère trois droites tropicales dont les points centraux sont supposés deux à deux indépendants. On appelle triangle tropical le domaine borné du plan délimité par ces trois droites tropicales. Les droites tropicales sont alors appelées les côtés du triangle tropical, et les points d'intersection de ces droites tropicales sont appelés les sommets du triangle tropical.
   Par exemple, on a représenté ci-dessous le triangle tropical de sommets A, B, C et de côtés T_1, T_2 et T_3 :



   a) On constate que sur l'exemple ci-dessus on a l'égalité d'angles : $\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}=360^\circ$.
   Cette égalité est-elle vraie pour tous les triangles tropicaux ?

   b) Montrer que l'on a l'égalité d'angles $\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}=360^\circ$ lorsqu'on suppose les sommets A, B, C du triangle tropical deux à deux indépendants.

RETOUR AU SOMMAIRE

PARIS

Deuxième exercice

Série S (individuel)

Intercaler la somme

Énoncé

Soit n un entier naturel non nul.

On considère la suite (E_n) définie par :
$E_1 = (1;1)$ et, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, E_n est la liste des nombres entiers naturels obtenue en intercalant entre deux nombres consécutifs de la liste $E_(n-1)$ la somme de ces deux nombres.
On obtient ainsi les listes $E_2 = (1;2;1)$ et $E_3 = (1;3;2;3;1)$.

La liste E_2 contient trois éléments et la liste E_3 contient cinq éléments.

1. Déterminer les listes E_4 et E_5.
2. **A la onzième étape**
   a) Combien d'éléments contient la liste E_{11} ?
   b) Quelle est la somme des éléments de la liste E_{11} ?
   b) Quel est le plus grand élément de la liste E_{11} ?
3. **A la $n^{\text{ème}}$ étape**
   On note N_n le nombre d'éléments de la liste E_n.
   On pose $v_n = N_{n-1}$.
   a) Étudier la suite (v_n) et en déduire N_n en fonction de n.
   b) Quelle est la somme des éléments de la liste E_n. ?

RETOUR AU SOMMAIRE

PARIS

Troisième exercice

Série S (par équipes)

Le solitaire bulgare

Énoncé

Un mathématicien décide de jouer avec des cartes. Il choisit N cartes (où N est un nombre entier fixé supérieur à 3) et avant de commencer, il forme un nombre arbitraire de piles de cartes de tailles variables. Son jeu consiste alors à effectuer le mouvement suivant : il prend une carte dans chaque pile et forme ainsi une nouvelle pile. Il répète alors ce mouvement indéfiniment. L'état du jeu est complètement décrit par la taille des piles et le nombre de piles de chaque taille.

Exemple : supposons qu'il ait décidé de jouer avec $N = 8$ cartes, et que l'état du jeu de départ soit le suivant : deux piles de trois cartes et une pile de deux cartes. Après un mouvement du jeu, il se retrouve dans l'état suivant : il a une pile de trois cartes (constituée des cartes qu'il a prises dans chacune des piles précédentes), deux piles de deux cartes (qui correspondent aux piles de trois cartes de l'état précédent) et une pile d'une carte (qui correspond à la pile de deux cartes de l'état précédent). Après un deuxième mouvement, il obtient une pile de quatre cartes, une pile de deux cartes et deux piles d'une carte.

1. On suppose dans cette question que le mathématicien joue avec $N = 9$ cartes. L'état initial est constitué d'une pile de quatre cartes, deux piles de deux cartes et une pile d'une carte. Déterminer les six premiers états du jeu. Quels auraient été les six premiers états si le mathématicien avait choisi de commencer à jouer avec trois piles de trois cartes ?
2. Est-il possible d'obtenir l'état à N piles d'une carte au cours du jeu (après un nombre de mouvements strictement positif) ?
3. Quand est-il possible de voir l'état à une pile de N cartes ?

Le mathématicien s'arrête de jouer quand il voit un état déjà observé. Le mathématicien déclare qu'un état est **olympique** si après un mouvement l'état du jeu est identique.

4. Démontrer que le mathématicien finit toujours par s'arrêter de jouer.
5. Déterminer une infinité d'entiers N tels qu'il existe au moins un état initial tel que le mathématicien finisse de jouer dans un état olympique.
6. Le mathématicien décide finalement de jouer avec 2016 cartes. Montrer qu'il existe un état initial tel que le mathématicien finisse de jouer dans un état olympique.

RETOUR AU SOMMAIRE

PARIS

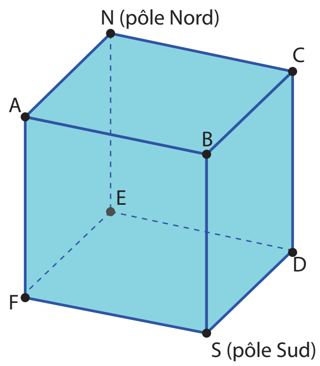
Quatrième exercice

Série S (par équipes)

Une fourmillante planète

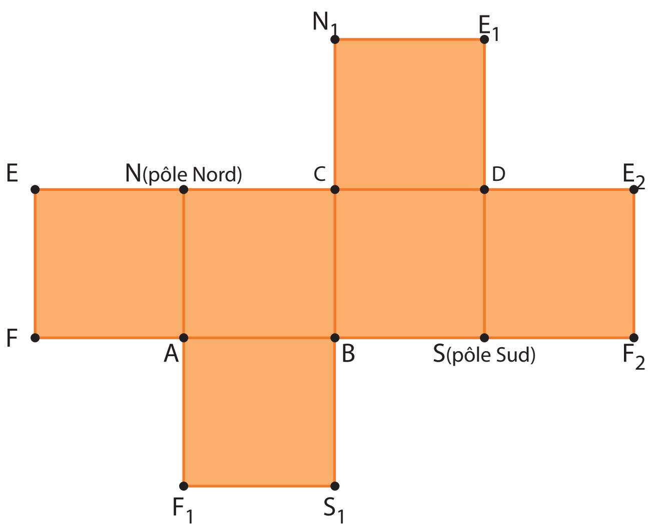
Énoncé

Deux fourmis, Four et Mi, se sont retrouvées un jour exilées sur une planète cubique, d'une superficie totale de 600 m^2.



Partie A

Four a établi sa maison au pôle Nord (N) et Mi au pôle Sud (S), et, pour faciliter leurs échanges, elles souhaitent construire une route reliant leurs demeures respectives.
Elles cherchent à construire la route la plus courte possible, en se limitant à des routes composées de segments de droites, reliant différents points à la surface de leur planète. Afin de faciliter leur réflexion, Four et Mi ont réalisé un patron de leur planète, donné ci-dessous.



Sur ce patron, les points désignés par une même lettre, avec ou sans indice, représentent un même sommet du cube.

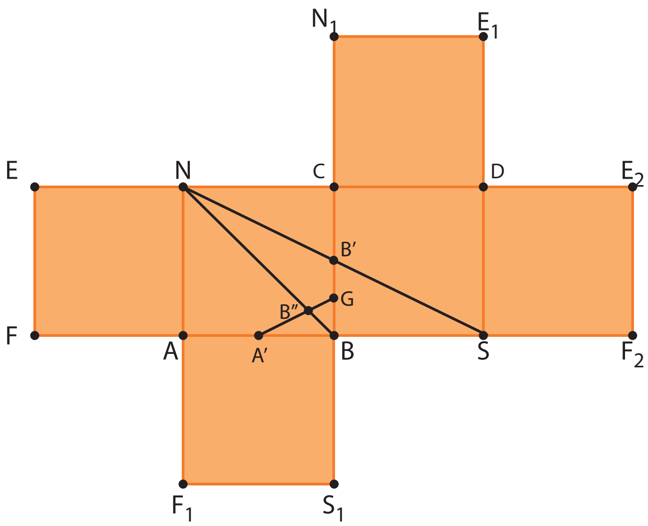
1. **Examen de quelques possibilités**
   a) Quelle est la longueur de la route NAFS ? de la route NAS ?
   b) On note A' le milieu de l'arête [AB]. Quelle est la longueur de la route NA'S ?
2. **Recherche d'un minimum**
   a) Parmi les trois routes examinées au 1., laquelle est la plus courte ?
   b) Expliquer pourquoi il n'existe pas de route plus courte pour relier les deux pôles.
   c) Combien existe-t-il de routes réalisant ce minimum ?

Partie B

Four et Mi se lancent dans l'agriculture. Elles souhaitent se partager équitablement la terre, chacune ayant en charge la culture d'un domaine qui s'étendra d'un pôle à ce qu'elles ont appelé l' « équateur ». Cet « équateur » est l'ensemble des points équidistants des deux pôles.

1. **Recherche de points équidistants des pôles**

   Sur le patron ci-dessous, les points A' et B' sont respectivement les milieux des arêtes [AB] et [BC].
   Le point G est le milieu du segment [BB'].
   Le point B" est le point d'intersection des segments [A'G] et [NB].



   a) Justifier par des arguments géométriques que les points A' et B' sont équidistants des deux pôles.
   b) Déterminer la distance du point G au pôle Nord (représenté par les points N ou N_1 sur ce patron) et la distance du point G au pôle Sud (représenté par les points S ou S_1 sur ce patron).
   Le point G est-il équidistant des deux pôles ?
   c) Le point B" est-il équidistant des deux pôles ?

2. **Tracé de l'équateur**
   a) Déterminer l'ensemble des points équidistants des deux pôles de la planète.
   b) Reproduire le patron proposé ci-dessus et construire l'équateur, frontière entre les domaines de Four et Mi.

RETOUR AU SOMMAIRE

PARIS

Cinquième exercice

Séries autres que S (individuel)

La couleur des nombres

Énoncé

On souhaite colorier les nombres rationnels strictement positifs avec deux couleurs : en rouge ou en bleu. Chaque nombre ne peut être colorié qu'une fois.

On donne les règles suivantes :

- le nombre 1 est colorié en rouge ;
- les nombres x et $\dfrac{1}{x}$ ont toujours des couleurs identiques ;
- les nombres x et $x+1$ ont toujours des couleurs différentes.

On admet qu'avec ces règles, tout nombre rationnel strictement positif a un unique coloriage.

1. Quelle est la couleur de 2016 ?
2. Soit x un nombre rationnel strictement positif.
   Que peut-on dire de la couleur de $x+n$ où n est un entier naturel ?
3. Quelle est la couleur de $\dfrac{2016}{2015}$? Quelle est la couleur de $\dfrac{4}{13}$?
4. a) La règle « la somme de deux nombres rouges est un nombre bleu » est-elle vraie ?
   b) La règle « la somme de deux nombres bleus est un nombre rouge » est-elle vraie ?
5. A l'aide de l'égalité (admise) $\dfrac{235}{68} = 3 + \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{6}}}$), déterminer rapidement la couleur de $\dfrac{235}{68}$.
6. On donne l'algorithme suivant :

```
Début
| Lire a
| Lire b
| c ← 0
| Tant que b ≠ 0 faire
    q ← quotient dans la division euclidienne de a par b
    c ← c + q
    r ← reste dans la division euclidienne de a par b
    a ← b
    b ← r
  Fin tant que
  Si c est pair alors
    Afficher « fraction Bleue »
  Sinon
    Afficher « fraction Rouge »
  Fin Si
Fin
```

Appliquer cet algorithme à la fraction $\dfrac{235}{68}$ et expliquer pourquoi il renvoie la couleur de cette fraction.

7. Quelle est la couleur de $\dfrac{1515}{1789}$?

RETOUR AU SOMMAIRE

PARIS

Sixième exercice

Séries autres que S (par équipes)

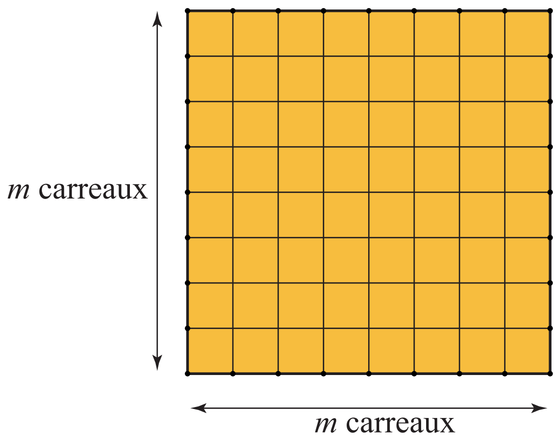
L'anniversaire d'Annia

Énoncé

Annia fête son anniversaire et vient le moment où on la sollicite pour partager le gâteau.
D'humeur joueuse, Annia s'apprête à découper ce gâteau au hasard et à s'en remettre à la chance pour assurer l'équité du partage.

Le gâteau a la forme d'un carré, et il est décoré d'un quadrillage régulier de m carreaux sur m carreaux.

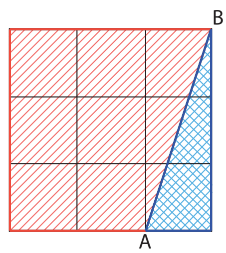
Exemple : avec $m = 8$



Partie A

Annia a un seul invité.
Annia choisit au hasard, parmi les points du quadrillage situés sur le pourtour du gâteau, un couple (A ; B) de points distincts, situés sur des côtés différents, et coupe le gâteau suivant le segment [AB].

1. On suppose que $m = 3$.
   a) Existe-t-il un choix du couple de points (A ; B) permettant d'obtenir deux parts égales ?
   b) Combien y a-t-il de tels choix possibles ?
   c) Annia choisissant au hasard le couple de points (A ; B), quelle est la probabilité pour que le partage soit équitable ?

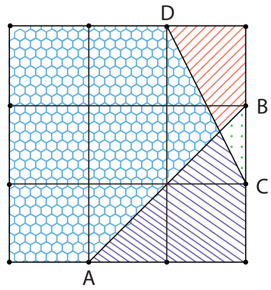


2. On suppose maintenant que m est un entier quelconque, supérieur ou égal à 3.
   a) Annia choisissant au hasard le couple de points (A ; B), quelle est la probabilité pour que le partage soit équitable ?
   b) Déterminer la (ou les) valeur(s) de m pour lesquelles la probabilité d'obtenir un partage équitable est supérieure ou égale à 0,1 , puis supérieure ou égale à 0,05 .

Partie B

Annia a trois invités. Annia choisit au hasard, parmi les points du quadrillage situés sur le pourtour du gâteau, un quadruplet de points distincts, (A ; B ; C ; D), de sorte à obtenir quatre parts en deux traits de couteau, le long des segments [AB] et [CD].

On suppose que $m = 3$.



1. Est-il possible qu ?Annia puisse, en deux traits de couteau, obtenir quatre parts égales ?
2. Combien y a-t-il de quadruplets (A ; B ; C ; D) correspondant à un partage en quatre parts égales ?
3. Annia choisissant au hasard le quadruplet (A ; B ; C ; D), quelle est la probabilité d'obtenir un partage équitable en quatre parts en coupant le long des segments [AB] et [CD] ?

RETOUR AU SOMMAIRE

PARIS

Septième exercice

Séries autres que S (par équipes)

Un classement

Énoncé

Cinq étudiants, dénommés Alexia, Boris, Clément, Dounia et Ehlias, participent à une compétition. À la fin de cette compétition, ils seront classés (les ex-aequo ne sont pas autorisés). Deux autres étudiants, Xavier et Youna, cherchent à deviner le classement final avant cette compétition. Xavier pense qu'Alexia arrivera première, Boris deuxième, Clément troisième, Dounia quatrième et Ehlias cinquième. Youna pense que Dounia arrivera première, Alexia deuxième, Ehlias troisième, Clément quatrième et Boris cinquième.

On dit qu'un étudiant a trouvé une paire de participants consécutifs si dans le classement qu'il propose, un compétiteur arrive juste derrière celui qui, dans le véritable classement, est classé juste devant lui.

Exemple : Supposons que le véritable classement soit Clément premier, Boris deuxième, Alexia troisième, Dounia quatrième et Ehlias cinquième et qu'on ait proposé le classement suivant, avant le début de la compétition : Alexia première, Dounia deuxième, Clément troisième, Ehlias quatrième et Boris cinquième.
On n'aurait alors trouvé le classement correct d'aucun compétiteur mais on aurait trouvé exactement une paire consécutive : la paire Alexia Dounia. En effet, Dounia est arrivée quatrième dans le véritable classement, juste après Alexia (troisième) et dans le classement supposé Dounia était bien classée (deuxième) juste après Alexia (première).

Après la compétition, Xavier s'aperçoit qu'il n'avait trouvé le classement correct d'aucun participant et de plus, il n'a réussi à trouver aucune paire de participants consécutifs. Youna a réussi à trouver le classement de deux participants ainsi qu'à trouver deux paires de participants consécutifs.

Quel est le classement final ?

RETOUR AU SOMMAIRE

POITIERS

Premier exercice

Toutes séries

Numération des plaques

Énoncé

Partie A :

Cas particulier :

La mairie d'une ville décide de refaire les plaques des maisons. Pour fabriquer les plaques, les deux ouvriers chargés de cette mission se posent la question suivante : combien de chiffres faut-il pour écrire tous les nombres de 1 à N ? Avec N un entier naturel. Les deux ouvriers commencent par étudier chaque rue de la ville .

1. Déterminer le nombre de chiffres nécessaires pour écrire toutes les plaques d'une rue contenant 99 maisons
2. Montrer que le nombre de chiffres nécessaires à l'écriture de toutes les plaques d'une rue contenant 999 maisons est de $3 \times 10^3 - 111$.
3. Un des ouvriers affirme qu'ils auront besoin de 2016 chiffres pour écrire les plaques d'une rue de 708 maisons.
   Cette affirmation est-elle correcte ? Justifier votre réponse.

Généralisation :

1. Soit M un entier naturel constitué de n chiffres. Montrer que $10^{n-1} \leqslant M$
2. Déterminer le nombre de chiffres nécessaires à l'écriture de 1 à $(10^{n-1} - 1)$ plaques
3. Déterminer le nombre de chiffres nécessaires à l'écriture de 10^{n-1} à M plaques
4. En déduire le nombre de chiffres nécessaires à l'écriture de 1 à M plaques

Partie B :

Dans une rue qui compte moins de mille maisons, les deux ouvriers commencent à peindre les plaques, ils travaillent à des vitesses différentes. Pendant que l'un peint quatre chiffres, l'autre en peint cinq.
Ils ont décidé de procéder de la manière suivante : le moins rapide commence par les premiers numéros et l'autre par les derniers.
Ils terminent de peindre leur dernière plaque en même temps et chacun a peint exactement le même nombre de plaques.
Combien de maisons compte donc cette rue ?

RETOUR AU SOMMAIRE

POITIERS

Deuxième exercice

Série S

Tirage à la fête foraine

Énoncé

Un stand de fête foraine propose aux passants de tirer successivement deux boules dans un sac composé de boules noires et blanches. Les boules sont numérotées à partir de 1 dans chaque couleur. Le passant gagne s'il tire deux boules de couleurs différentes, peu importe la couleur.

Le forain souhaiterait que le passant ait plus de chances de perdre, alors que le passant souhaiterait avoir plus de chance de gagner. Nous allons nous intéresser à la situation équitable (hors mise et prix) où les deux protagonistes visent une probabilité de gagner de $\frac{1}{2}$.

Le but de cet exercice est de connaître le contenu d'un sac qui permette d'atteindre cette probabilité de $\frac{1}{2}$. On note n le nombre total de boules dans le sac et a le nombre de boules blanches. (n et a sont des entiers naturels tels que $2 \leqslant a \leqslant n$.)

Toutes les compositions d'un sac ne permettent pas d'atteindre cet objectif. En effet, un sac composé de quatre boules noires et deux boules blanches (on a donc $n = 6$ et $a = 2$) donne une probabilité de gagner de $\frac{8}{15}$.

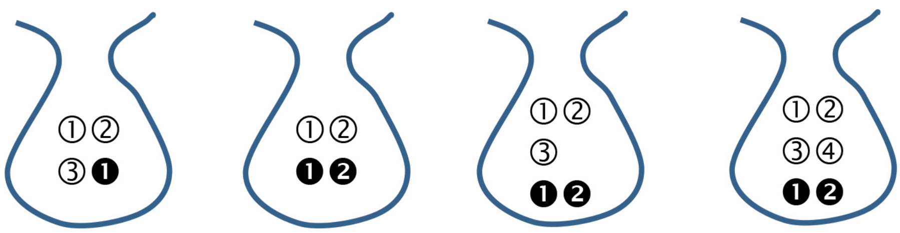
Les tirages possibles sont :

Tirages perdants	
B1-B2	B2-B1
N1-N2	N2-N1
N1-N3	N3-N1
N1-N4	N4-N1
N2-N3	N3-N2
N2-N4	N4-N2
N3-N4	N4-N3

Tirages gagnants	
B1-N1	N1-B1
B1-N2	N2-B1
B1-N3	N3-B1
B1-N4	N4-B1
B2-N1	N1-B2
B2-N2	N2-B2
B2-N3	N3-B2
B2-N4	N4-B2

La notation B2-N3 signifie qu'on a tiré la boule blanche n^{o}2 au premier tirage puis la boule noire n^{o}3 au second tirage.

1. Parmi les sacs suivants, quels sont ceux pour lesquels la probabilité que le passant gagne est $\frac{1}{2}$?



2. Établissons deux résultats préliminaires pour la suite de l'étude.

a) On tire deux boules successivement et sans remise dans un sac contenant n boules. Donner le nombre de tirages distincts possibles en fonction de n.

b) Un sac contient n boules dont a blanches, le reste étant des noires. On extrait successivement et sans remise deux boules de ce sac. Combien y a-t-il de tirages avec deux boules de couleurs différentes en fonction de n et a ?

3. Un passant arrive sur un stand où il y a un sac avec 10 boules, mais il ne connait pas la répartition entre boules rouges et boules noires. En étudiant toutes les répartitions possibles, est-il possible que ce passant ait une probabilité de gagner égale à $\frac{1}{2}$? Et si le sac contenait seulement 9 boules.

4. Étude du cas général. Le sac contient n boules, dont a noires.

a) Déterminer, en fonction de n et a, la probabilité $p(a;n)$ que le passant gagne.

b) Montrer que l'équation $p(a;n) = \frac{1}{2}$ est équivalente à $4a^2 - 4na + n(n-1) = 0$.

c) En considérant que l'inconnue est a, résoudre cette équation.

d) Quelle caractéristique doit avoir le nombre n pour que l'équation $p(a;n) = \frac{1}{2}$ admette des solutions ? Comment peut alors être composée l'urne pour répondre au problème posé ?

RETOUR AU SOMMAIRE

POITIERS

Troisième exercice

Séries L, ES, STMG

Les réseaux sociaux

Énoncé

Le 1[er] janvier 2015, Marc s'inscrit sur un réseau social et enregistre deux amis.
Le 2 janvier, chacun de ses deux amis lui propose de devenir ami avec deux autres personnes et il accepte.
Le 3 janvier, chacun de ses nouveaux amis lui propose, à nouveau, de devenir ami avec deux autres personnes.
Il accepte encore.

Son cercle d'amis s'agrandit ainsi : chaque jour, tous ses nouveaux amis (uniquement ceux acceptés la veille) lui proposent de devenir ami avec deux nouvelles personnes.

1. a) Justifier que le 2 janvier, le cercle de Marc compte 6 amis.
   b) Combien d'amis compte le cercle de Marc le 3 janvier ? le 4 janvier ? le 5 janvier ?
2. On utilise un tableur pour remplir le tableau suivant. Quelle formule doit-on rentrer dans la cellule D2 pour, ensuite, la recopier vers la droite ?

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Numéro du jour de l'année	1	2	3	4	5	6	7
2	Nombre d'amis dans le cercle de Marc	2	6					

Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on note $A(n)$ le nombre d'amis que compte le cercle de Marc au jour n de l'année. A l'aide de la question 2, expliquer la relation suivante : $A(n+2) = 3A(n+1) - 2A(n)$.

3. a) A l'aide des questions précédentes, compléter l'instruction manquante dans l'algorithme ci-dessous qui permet d'afficher le nombre d'amis que compte le cercle de Marc pour un jour n donné par l'utilisateur.

```
Variables :    n est un entier supérieur ou égal à 3
               i;u;v et a sont des entiers
Traitement :   Demander à l'utilisateur la valeur de n.
               u prend la valeur 2
               v prend la valeur 6
               Pour i allant de 3 à n
                  a prend la valeur ......
                  u prend la valeur v
                  v prend la valeur a
               FinPour
Sortie :       Afficher a
```

   b) Écrire un algorithme qui permet d'afficher à partir de quel jour, le cercle de Marc aura dépassé un nombre N d'amis donné à saisir par l'utilisateur.
4. On admet que pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on a : $A(n) = a \times 2n + b$.
   Déterminer les valeurs des réels a et b.
5. Théoriquement, sachant que la France dénombrait 66,3 millions d'habitants au 1[er] janvier 2015, à partir de quel jour Marc pourrait-il prétendre avoir pour amis l'équivalent au moins de toute la population française ?

RETOUR AU SOMMAIRE

POITIERS

Quatrième exercice

Séries STI2D, STL, STD2A

des grilles magiques

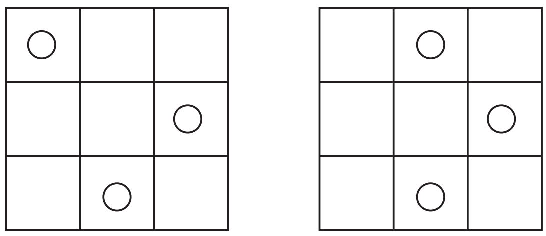
Énoncé

On considère une grille carrée dont chaque côté présente n cases (n entier supérieur ou égal à 2). Chaque case est repérée par ses coordonnées de la forme (ligne , colonne). Avec $n = 3$, la grille est donc :

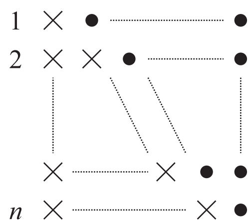
Case (1,1)	Case (1,2)	Case (1,3)
Case (2,1)	Case (2,2)	Case (2,3)
Case (3,1)	Case (3,2)	Case (3,3)

On place n jetons dans la grille de sorte que chaque ligne et chaque colonne contienne exactement un jeton. On obtient alors une grille qualifiée de valable :

grille valable grille non valable



1. Dans cette question, on considère une grille de côté n et on souhaite compter, en fonction de n, le nombre de grilles valables que l'on peut former.
   Pour former une grille valable, on suppose que l'on place d'abord un jeton sur la première ligne, puis un deuxième jeton sur la deuxième, et ainsi de suite jusqu'à la dernière ligne.
   (a) Combien de possibilités a-t-on pour placer le premier jeton ? Et pour placer le second ?
   (b) Au total combien existe-t-il de grilles valables ? On pourra donner le résultat en fonction de n et sous forme d'un produit.
2. *Une question intermédiaire.*
   On veut calculer la somme $1+2+\cdots+n$. Cette somme est égale au nombre de croix dans le schéma suivant :



   Combien ce schéma compte-t-il de symboles en tout (croix + ronds) ?
   En déduire que $1+2+\cdots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

3. Dans cette question, on numérote les cases de la grille de 1 à n^2. Avec $n = 3$, la grille est donc :

1	2	3
4	5	6
7	8	9

On place ensuite des jetons pour obtenir une grille valable et on note S la somme des nombres des cases occupées.

a) *Conjecture*
Dans le cas où $n = 3$, donner deux grilles valables et calculer pour chacune d'elle la somme S correspondante. Que conjecturez-vous ? Dans la suite de l'exercice, on souhaite prouver cette conjecture.

b) On appelle $N(i, j)$ le nombre figurant dans la case (i, j) de la grille numérotée.

i Quels sont les nombres figurant sur la première ligne ? En déduire la valeur de $N(1, j)$.

ii Lorsqu'on passe d'une case à celle située juste en dessous, quelle valeur ajoute-t-on ? En déduire les valeurs de $N(2, j)$ et de $N(3, j)$.

iii Donner finalement la valeur de $N(i, j)$ en fonction de n, i et j.

c) Pour chaque i variant de 1 à n, on note $c(i)$ le numéro de la colonne qui contient le jeton de la ligne i. Ainsi les jetons sont placés dans les cases de coordonnées $(1, c(1))$, $(2, c(2))$, $\ldots, (n, c(n))$.
Par exemple, pour $n = 3$ et avec la grille suivante, on a $c(1) = 3$, $c(2) = 1$, $c(3) = 2$:

1	2	3◯
4◯	5	6
7	8◯	9

Calculer la somme $c(1) + c(2) + \cdots + c(n)$. On expliquera le raisonnement et on pourra utiliser le résultat de la question 2.

d) *Preuve de la conjecture*
Calculer la somme S et conclure sur la conjecture émise.

RETOUR AU SOMMAIRE

REIMS

Premier exercice

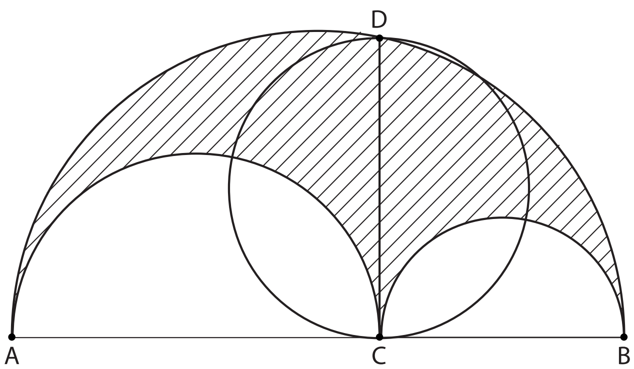
Toutes séries

Arbelos (sur les traces d'Archimède)

Énoncé

Soient C un point quelconque sur le segment [AB] et trois demi-cercles de diamètres [AB], [AC] et [CB] situés du même coté du segment [AB].
On considère D le point d'intersection de la perpendiculaire à [AB] passant par C avec le demi-cercle de diamètre [AB].
L'**arbelos** (*partie hachurée sur la figure ci-dessous*) est la figure constituée du demi-disque de diamètre [AB] privé des deux demi-disques de diamètres [AC] et [CB].

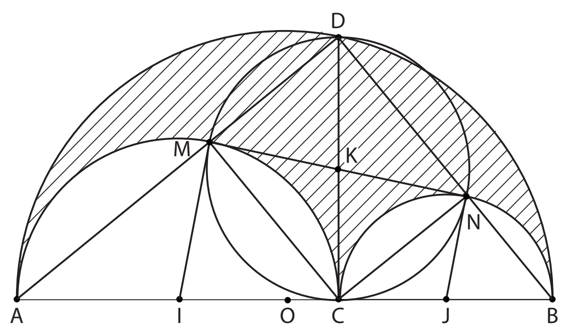
Rappel : l'aire d'un disque de rayon r est : $A = \pi r^2$.



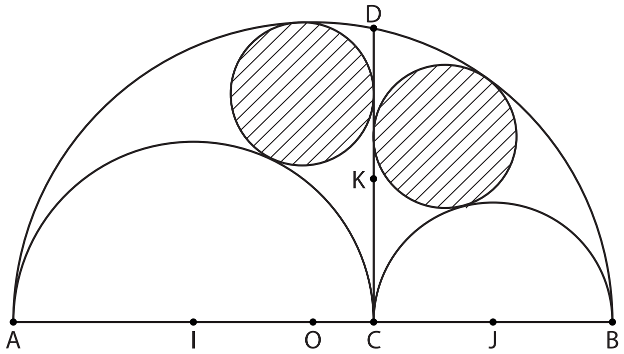
1. a) Déterminer l'aire de l'arbelos (partie hachurée) en fonction de AC et CB.
   b) Démontrer que $DC^2 = AC \times CB$.
   c) Démontrer que l'aire de l'arbelos est égale à l'aire du disque de diamètre [DC].

   (*Cette propriété est la première énoncée par Archimède.*)

2. On considère maintenant la figure ci-contre où O, I, J et K sont les milieux respectifs des segments [AB], [AC], [CB] et [CD] et M et N sont les points d'intersection du cercle de diamètre [CD] avec les demi-cercles de diamètres [AC] et [CB] distincts de C.
   Démontrer que la droite (MN) est une tangente commune aux deux demi-cercles de diamètres [AC] et [CB].



3. On trace ensuite deux petits cercles tangents à [CD] et tangents au bord de l'arbelos comme ci-dessous.



Archimède a établi que ces deux petits cercles, appelés cercles d'Archimède, ont des rayons égaux.
Démontrer que le rayon commun de ces deux petits cercles est égal à : $\dfrac{AI \times JB}{AO}$.

RETOUR AU SOMMAIRE

REIMS

Deuxième exercice

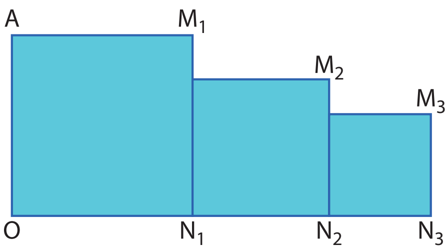
Série S

Le flocon de von Koch

Énonce

I - Préliminaires

Dans toute cette partie, q est un nombre réel appartenant à $]0,\ 1[$.
On considère la figure ci-contre formée de trois carrés.
Le premier carré a pour côté 1. Le deuxième carré est une réduction du premier carré de coefficient q et le troisième carré est une réduction du deuxième carré de coefficient q également. Ainsi, le deuxième carré a pour côté q et le troisième carré a pour côté q^2.
On se place dans le repère $\left(O, \overrightarrow{ON_1}; \overrightarrow{OA}\right)$



1. Montrer que les points M_1, M_2 et M_3 appartiennent à une même droite qu'on appellera Δ.
   On poursuit la construction en construisant un quatrième carré qui est une réduction de coefficient q du troisième, et ainsi de suite jusqu'à un $n^{\text{ième}}$ carré.
   On a alors construit deux suites de points $M_1, M_2, \dots, M_n$ et $N_1, N_2, \dots, N_n$.
2. Montrer que le point M_4 appartient à la droite Δ.
   On pourrait montrer de la même façon que tous les points $M_1, M_2, \dots, M_n$ appartiennent à Δ.
3. Déterminer une équation de Δ.
4. En déduire les coordonnées du point d'intersection I des droites Δ et (ON_1).
5. De quel point semble se rapprocher la suite des points N_n si on répète indéfiniment la construction ?
   Vers quoi tend la somme $1 + q + q^2 + \cdots + q^{n?1}$ quand n tend vers l'infini ?

II - Le flocon de von Koch

En 1904, Helge von Koch (mathématicien suédois, 1870-1924) expose à la communauté scientifique une courbe fermée, sans point double (c'est-à-dire qui ne se coupe pas), bornée (c'est-à-dire contenue dans un cercle), admettant une aire finie et un périmètre infini !
L'objectif de cette partie est d'étudier la construction de cette courbe, appelée flocon de von Koch, et de calculer l'aire de la surface délimitée par la courbe.

A.Construction du flocon

On considère un triangle équilatéral dont les côtés mesurent une unité. On divise chaque côté en trois parties égales puis on retire la partie centrale et on construit un triangle équilatéral à la place (en se développant à l'extérieur du triangle). On recommence ensuite l'opération avec les triangles équilatéraux obtenus à l'étape précédente :

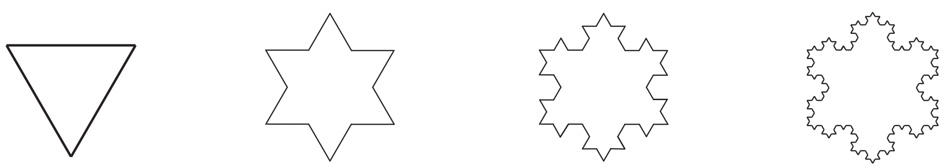


Figure 1 *Figure 2* *Figure 3* *Figure 4*

On notera a_n l'aire de la figure obtenue à l'étape n.

1. **Étape 1** : on considère le triangle équilatéral de côté 1 (figure 1). Calculer a_1
2. **Étape 2** : on applique le partage des trois côtés du triangle et on remplace à chaque fois la partie centrale par un triangle équilatéral (figure 2). Calculer a_2.
3. **Étape 3** : on recommence l'opération précédente (figure 3). Calculer a_3.

B. Aire du flocon

1. Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul,

$$a_{n+1} = a_n + \left(\frac{4}{9}\right)^2 \times \frac{3\sqrt{3}}{16}.$$

2. En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$a_n = \frac{\sqrt{3}}{16} + \frac{3\sqrt{3}}{16} \times \left(1 + \left(\frac{4}{9}\right)^1 + \left(\frac{4}{9}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}\right).$$

3. Montrer que, quand le nombre n d'étapes de construction tend vers l'infini, l'aire du flocon de von Koch tend vers $\dfrac{2\sqrt{3}}{5}$.

RETOUR AU SOMMAIRE

REIMS

Troisième exercice

Séries autres que S

Bactéries

Énoncé

Un nouveau produit facilite la reproduction de bactéries. Il est régi par deux principes :

- Quand il est employé, le nombre de bactéries augmente mais on ne connaît pas le nouveau nombre de bactéries.
- S'il est utilisé deux fois de suite, il triple le nombre de bactéries initial.

Pour modéliser l'action de ce produit, nous nommons F la fonction qui à tout entier naturel n (nombre de bactéries dans la population initiale) associe l'entier naturel $F(n)$ donnant le nombre de bactéries après application du produit. On suppose que cette fonction vérifie, pour tout entier naturel n :

- $F(n) \in \mathbb{N}$.
- F croissante.
- $F(F(n)) = 3n$.

Partie A - Questions préliminaires :

1. « Pour tout entier naturel n, $F(F(n)) = 3n$ ». Quel élément du problème initial traduit cette affirmation ?
2. « Pour tout entier naturel n, $F(n) \in \mathbb{N}$ », on a donc $F(0) \geqslant 0$. Quel élément du problème initial permet de justifier que ce constat subsiste pour tout entier naturel n non nul, à savoir que $F(n) \geqslant n$?

Partie B ? Propagation des premières bactéries :

1. Justifier que $F(F(0)) \geqslant F(0) \geqslant 0$ et en déduire que $F(0) = 0$. Interpréter le résultat.
2. a) Expliquer pourquoi $F(n) \neq n$ pour n entier naturel non nul.

   b) Expliquer pourquoi $F(1) \neq 3$.

   c) Justifier que $1 \leqslant F(1) \leqslant 3$ et en déduire la valeur de $F(1)$, puis celle de $F(2), F(3)$ et $F(6)$.
3. Déterminer la valeur de $F(4)$, puis celle de $F(5)$.

RETOUR AU SOMMAIRE

RENNES

Premier exercice

Toutes séries

Le Tripl'One

Énoncé

Roméo et Juliette aiment jouer avec les nombres. Ils ont inventé un jeu : Le Tripl–One. Le but du jeu est d'arriver à un nombre entier N donné en partant de 1, et en utilisant uniquement deux opérations :

Additionner 1 au nombre obtenu ou **Multiplier le nombre obtenu par 3**

Chaque personne propose à tour de rôle une des deux opérations. Le gagnant est celui qui obtient le nombre voulu.

Exemples : $N = 19$

$1 \xrightarrow{\times 3} 3 \xrightarrow{+1} 4 \xrightarrow{+1} 5 \xrightarrow{\times 3} 15 \xrightarrow{+1} 16 \xrightarrow{+1} 17 \xrightarrow{+1} 18 \xrightarrow{+1} 19$	19 est atteint en 8 étapes et si Roméo a commencé, c'est Juliette qui a fini et qui a donc gagné !
$1 \xrightarrow{+1} 2 \xrightarrow{\times 3} 6 \xrightarrow{\times 3} 18 \xrightarrow{+1} 19$	19 est atteint en 4 étapes et si Juliette a commencé, c'est Roméo qui a fini et qui a donc gagné !

Partie I : Étude de quelques exemples

1. Donner deux décompositions (c'est-à-dire deux suites d'opérations) permettant d'obtenir le nombre $N = 10$.
2. Roméo a obtenu 31. Pourquoi peut-on affirmer que le nombre précédent était 30 ?
   Qu'en serait-il si Roméo avait obtenu 63 ?
3. Roméo et Juliette cherchent à obtenir pour un nombre N donné, une décomposition donnant un nombre minimal d'étapes.
   a) Déterminer, éventuellement à l'aide d'un arbre, tous les nombres atteignables en 3 étapes.
   b) En quel nombre minimal d'étapes peut-on atteindre le nombre 90 ?
   c) En déduire le nombre minimal d'étapes pour obtenir 91 et 92.
   d) Qu'en est-il pour 93 ? Pour 105 ? Pour 108 ?
   Montrer dans chaque cas les étapes minimales conduisant à chacun de ces nombres.

Partie II : Quelques types de nombres particuliers

On considère un nombre N atteint en un nombre minimal de ***p* étapes** (où p est un entier).

1. Supposons tout d'abord que N soit une puissance de 3.
   a) Donner la valeur de p lorsque $N = 38$.
   b) Dans le cas général, déterminer en fonction de p, le nombre minimal d'étapes pour atteindre le nombre $(N+1)$, puis le nombre $(N+3)$.
2. Supposons maintenant que N soit un multiple de 3.
   Déterminer en fonction de p, le nombre minimal d'étapes pour atteindre le nombre $(N+1)$.
   Donner un nombre N, tel que le nombre $(N+3)$ soit atteint en moins de p étapes.

Partie III : Optimisons

1. Élaborer un algorithme **en langage naturel** permettant d'obtenir le nombre minimal d'étapes pour un nombre N choisi.
2. Forts de cet algorithme, Roméo et Juliette énoncent les règles du jeu suivantes :
   - A chaque étape « $+1$ », le joueur perd 1 point.
   - A chaque étape « $\times 3$ », le joueur gagne 3 points.
   - Celui qui atteint N gagne 10 points supplémentaires.
   - Chaque joueur triple le total de ses points si la partie se fait en le nombre minimal d'étapes donné par l'algorithme.

   Le nombre N choisi est 2016.

   a) Lors des premières étapes, Juliette et Roméo utilisent la multiplication par 3 tant qu'ils le peuvent, pour accumuler le plus vite possible des points. Juliette commence. Calculer les scores (positifs ou négatifs) de chacun à la fin de la partie, lorsque la cible est atteinte.

   b) Ils refont une partie, mais cette fois-ci, ils font en sorte d'utiliser le minimum d'étapes. Montrer que dans ce cas, le joueur qui commence est aussi celui qui finit.
   Roméo étant très amoureux, il souhaite que Juliette gagne le plus de points possible. Doit-il la laisser commencer ?

RETOUR AU SOMMAIRE

RENNES

Deuxième exercice

Séries S, STI2D et STL

À la dérive…

Énoncé

Rappel *: Un nombre premier est un entier naturel ayant exactement deux diviseurs positifs distincts. Ainsi par exemple 1, 4 et 18 ne sont pas premiers mais 2, 7 et 17 le sont. Les huit plus petits nombres premiers classés dans l'ordre croissant sont : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 et 19.*
On admet que la quantité de nombres premiers est infinie.
On admet qu'il existe une fonction f définie sur l'ensemble des réels par :

$$f(p) = 1 \text{ signifie que } p \text{ est un nombre premier,}$$

$$\text{et pour tous les réels } x \text{ et } y \text{ on a : } f(x \times y) = x \times f(y) + f(x) \times y.$$

Partie A

Dans cette partie on ne s'intéresse qu'aux entiers naturels.

1. Justifier que $f(13) = 1$ et que $f(6) = 5$.
2. Démontrer que $f(0) = 0$ puis que $f(1) = 0$.
3. Recopier puis compléter sans justification les tableaux suivants :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$f(n)$	0	0	1	1		1	5	1		

n	10	111	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$f(n)$				1				1			

4. a) Démontrer que si p et q sont deux nombres premiers alors $f(p \times q) = p + q$.
   b) En déduire $f(209)$.
   c) Trouver tous les entiers naturels N s'écrivant sous la forme $N = p \times q$ où p et q sont deux nombres premiers tels que $f(N) = 30$.
5. On admet que si p est un nombre premier quelconque et n un naturel non nul alors $f(p^n) = np^{n-1}$.
   a) Vérifier cette propriété pour $n = 1, n = 2$ puis $n = 3$.
   b) Calculer $f(49), f(392)$ puis $f(f(392))$.
6. Donner quatre nombres de la forme n^n qui vérifient la relation $f(n^n) = n^n$.

Partie B

Dans cette partie on s'intéresse aux entiers relatifs.

1. Déterminer $f(-1)$.
2. Pour tout n entier naturel exprimer $f(-n)$ en fonction de $f(n)$.

Partie C

Dans cette partie on s'intéresse aux nombres rationnels.

Rappel *: Tout nombre rationnel peut s'écrire sous la forme* $\dfrac{a}{b}$, où a est un entier relatif et b un entier naturel non nul.

1. Calculer $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$.
2. Démontrer que $f\left(\dfrac{a}{b}\right) = \dfrac{bf(a) - af(b)}{b^2}$ où a est un entier relatif et b un entier naturel non nul.
3. Calculer $f\left(\dfrac{17}{49}\right)$.

Partie D

Dans cette partie, toute trace de recherche, même incomplète, ou d ?initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

Calculer $f\left(6\sqrt{3}\right)$.

RETOUR AU SOMMAIRE

RENNES

Troisième exercice

Séries L, ES, ST2S, STMG, STHR

Ça balance !

Énoncé

Autrefois, on se servait d'une balance et d'une boîte de poids mesurant les masses en grammes. Toutes les masses sont entières.

Partie A

1. On considère la boîte notée $(1, 2, 2, 5)$ contenant les quatre poids suivants : 1, 2, 2 et 5 grammes.
   a) Vérifier que l'on peut mesurer toutes les masses de 1 à 10 grammes.
   b) Donner une masse qui peut être mesurée de deux manières différentes.
2. Quel est le poids que l'on doit ajouter à la boîte précédente pour pouvoir mesurer toutes les masses de 1 à 20 grammes ?
3. Trouver des nombres a et b pour que la boîte de cinq poids notée $(1, 2, 2, a, b)$ mesure toutes les masses de 1 à 23 grammes.

Partie B

De façon générale, on note $(p_1, p_2, \dots p_n)$ la boîte contenant les n poids $p_1, p_2, \dots p_n$ rangés dans l'ordre croissant et on appelle taille de la boîte la somme , $T = p_1 + p_2 + \cdots + p_n$.
On dit qu'une boîte de poids est **parfaite** lorsque les poids qui la composent sont tous différents et que toutes les masses comprises entre 1 et T, ne peuvent être obtenues que d'une seule manière.

1. Donner deux raisons pour lesquelles la boîte notée $(1, 2, 2, 5)$ ne soit pas parfaite.
2. Justifier que si la boîte notée $(p_1, p_2, \dots p_n)$ est parfaite alors $p_1 = 1$
3. a) Quelle est la seule boîte parfaite de taille 3 ? Justifier.
   b) Y a-t-il une boîte parfaite de taille 5 ? De taille 7 ? De taille 15 ? Expliquer pour chaque cas.
   c) Conjecturer la taille de la prochaine boîte parfaite.
4. On admet que les boîtes $(1, 2, 2^2, \dots, 2^n)$ sont parfaites.
   Qu'en est-il d'une boîte $(1, 3, 3^2, \dots, 3^n)$? Justifier.
5. On considère la boîte $(1, 2, 2^2, 2^3, 2^4, \dots)$. Quelle est la taille minimale T de cette boîte permettant de mesurer la masse 2016 ? On justifiera tous les calculs et en particulier, on indiquera tous les poids utilisés pour obtenir 2016.

RETOUR AU SOMMAIRE

RÉUNION

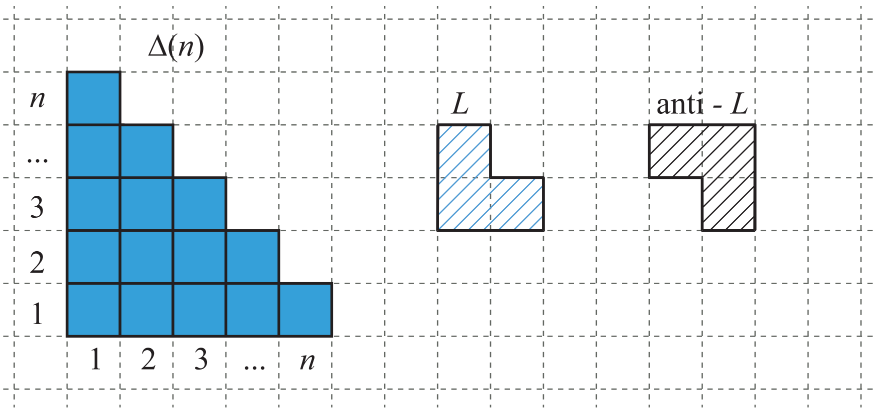
Premier exercice

Toutes séries [6]

Pavages en L

Énoncé

Le but de l'exercice est de recouvrir entièrement et sans chevauchement un polygone $\Delta(n)$ en escalier de n colonnes et de n lignes avec des blocs « L » ou « anti-L » qu'il est impossible de tourner, et que l'on doit absolument disposer comme indiqué ci-dessous. On dit alors que ce polygone est pavable.
L'aire de chaque carré bleu est égale à 1 (elle représente l'unité d'aire).



1. En justifiant à l'aide d'un dessin, étudier si $\Delta(2)$, $\Delta(3)$ sont pavables.
2. Expliquez pourquoi on est sûr que $\Delta(4)$ ne sera pas pavable.
3. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1. Justifier que si $\Delta(n)$ est pavable, alors l'aire de $\Delta(n)$ doit être divisible par 3.
4. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1.
   Justifier que l'aire de $\Delta(n)$ est égale à $\dfrac{n^2+n}{2}$.
5. En déduire que $\Delta(13)$ n'est pas pavable.
6. **À traiter uniquement par les élèves de S**

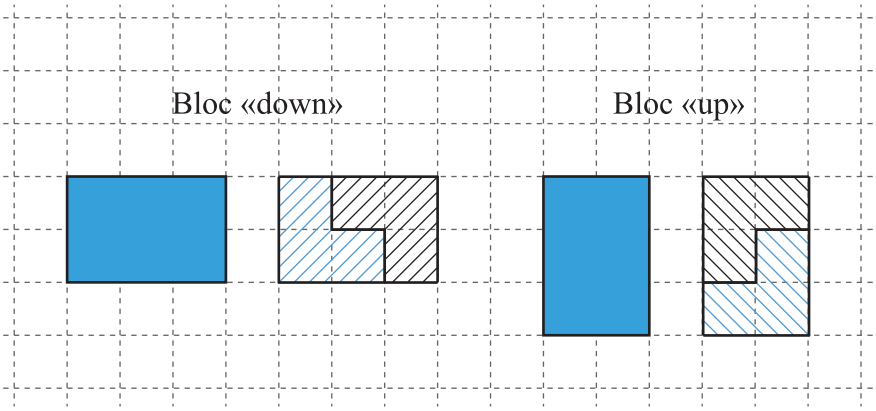
   On souhaite démontrer que tous les polygones $\Delta(3k+1)$ avec $k \in \mathbb{N}$ ne sont pas pavables

   a) Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer que $(3k+1)^2 + (3k+1)$ n'est pas divisible par 3.

   b) En déduire que tous les polygones $\Delta(3k+1)$ avec $k \in \mathbb{N}$ ne sont pas pavables.

   Nous allons maintenant former des blocs « up » et des blocs « down » à l'aide d'un bloc L et d'un bloc anti-L, comme indiqué ci-dessous.

6. Les question 6, 10, 11 et 12 seront à traiter par les candidats de la série S uniquement



7. A l'aide d'un dessin, démontrer que $\Delta(9)$ est pavable.
8. A partir du dessin précédent, en déduire que $\Delta(11)$ et $\Delta(12)$ sont pavables.
9. En utilisant le pavage de $\Delta(12)$ et $\Delta(2)$ sur un même dessin ou par tout autre méthode, démontrer qu'on aura $\Delta(12+2)$ pavable.

   La suite de l'exercice est à traiter uniquement par les élèves de S

10. On suppose que $\Delta(n)$ et $\Delta(n')$ sont pavables.
    Justifier les 2 conditions suivantes :
    - Si n est divisible par 2 et n' divisible par 3, alors $\Delta(n+n')$ est pavable.
    - Si n est divisible par 3 et n' divisible par 2, alors $\Delta(n+n')$ est pavable.
11. En déduire que tous les $\Delta(12+m)$ avec $k \in \mathbb{N}$ et, $m = 0$ ou $m = 2$ ou $m = 9$ ou $m = 11$, sont pavables.
12. $\Delta(2016)$ est-il pavable ?

RETOUR AU SOMMAIRE

RÉUNION

Deuxième exercice

Série S

L'algorithme réducteur

Énoncé

On considère l'algorithme suivant :

```
Variables :x;y;z;t
Début :
  • Affecter à x un entier aléatoire compris entre 0 et 999
  • Affecter à y le triple de x
  • Affecter à z la somme des chiffres de y
  • Affecter à t le tiers de z
  • Afficher t
Fin
```

1. On se propose de tester l'algorithme sur quelques valeurs.
Compléter le tableau ci-dessous comme dans l'exemple donné dans la première colonne.

Si $x = 1$	816	10	333	670
alors l'algorithme affiche	6			

2. On souhaite démontrer, dans le cas d'un nombre entier N à 4 chiffres , la proposition suivante :
« Si un nombre entier N est divisible par 3, alors la somme S de ses chiffres est divisible par 3, et réciproquement, tout entier N dont la somme S des chiffres est divisible par 3, est divisible par 3 ».
On rappelle que si on note a le chiffre des milliers, b le chiffre des centaines, c le chiffre des dizaines et d le chiffre des unités d'un nombre N de 4 chiffres, alors

$$N = 1000a + 100b + 10c + d.$$

   a) Exprimer la somme S des chiffres de N en fonction de a, b, c et d.
   b) Montrer que $N - S$ est divisible par 3.
   c) En déduire que si N est divisible par 3, alors S est divisible par 3.
   d) De même, démontrer que si S est divisible par 3, alors N est divisible par 3.

3. Démontrer que l'algorithme affiche toujours un entier, et que cet entier est toujours compris entre 0 et 9.
(On rappelle que $0 \leqslant x \leqslant 999$)

4. Afin de conjecturer si certains nombres ont plus de chances d'être affichés par l'algorithme réducteur que d'autres, on a programmé un algorithme qui calcule la fréquence d'affichage d'un nombre donné sur 10 000 essais. Celui-ci a permis d'obtenir par exemple les résultats suivants :

   La fréquence d'affichage du nombre 1 par l'algorithme réducteur sur 10 000 essais est 0,0188
   La fréquence d'affichage du nombre 9 par l'algorithme réducteur sur 10 000 essais est 0,0102
   La fréquence d'affichage du nombre 1 par l'algorithme réducteur sur 10 000 essais est 0,0194
   La fréquence d'affichage du nombre 5 par l'algorithme réducteur sur 10 000 essais est 0,2249

Compléter les parties manquantes de l'algorithme donné page suivante, afin qu'il calcule la fréquence d'affichage d'un nombre souhaité sur 10 000 essais.

```
Début :
  • Affecter à nombre_d'apparitions_de_n la valeur 0.
  • Afficher : « De quel nombre n voulez-vous calculer la fréquence
    d'apparition sur 10 000 essais ? »
  • Lire n.
  • Pour i allant de 1 à ......
     • Affecter à x un entier aléatoire compris entre 0 et 999
     • Affecter à y le triple de x
     • Affecter à z la somme des chiffres de y
     • Affecter à t le tiers de z
     • Si ......alors
       ..................................................................
       ..................................................................
       Fin Si
    Fin pour.
  • Affecter à f la valeur ......
  • Afficher : « La fréquence d'affichage du nombre »
  • Afficher n
  • Afficher « par l'algorithme réducteur sur 10 000 essais est : »
  • Afficher f.
Fin
```

5. Déterminer les probabilités des événements suivants et vérifier qu'on obtient une valeur proche de la ou des fréquences obtenue(s) à la question 4 :
   a) A : « L'algorithme affiche le nombre 0 »
   b) B : « L' algorithme affiche le nombre 1 »
   c) C : « L'algorithme affiche le nombre 9 ».

RETOUR AU SOMMAIRE

RÉUNION

Troisième exercice

Séries autres que S

Stratégie de jeu

Énoncé

Un jeu de Pile ou Face est organisé avec les règles suivantes :

- le joueur peut mettre initialement en jeu la mise qu'il souhaite ;
- s'il perd la partie, il perd aussi sa mise ;
- s'il gagne la partie il récupère sa mise et gagne aussi l'équivalent de cette mise.

La pièce utilisée est bien équilibrée, et on a une chance sur deux d'obtenir Pile ou Face.

Un joueur décide d'adopter la ***stratégie suivante*** quelle que soit la somme dont il dispose au départ :

- il mise 1 € pour la première partie
- après chaque partie perdue, il augmente la mise de 1 € à la partie suivante ;
- après chaque partie gagnée, il diminue la mise de 1 € à la partie suivante, ou la mise reste à 1 € si on n'avait misé qu'un euro ;
- si la somme de départ est épuisée ou si on ne dispose plus de la somme suffisante pour appliquer cette stratégie, le jeu s'arrête pour ce joueur.

On donne ci-dessous des exemple de situations de jeu, avec une somme de départ de 5 €.
P signifie que la partie est perdue ; G signifie que la partie est gagnée.
Dans les tableaux suivants, la partie numéro 0 correspond à la situation au début du jeu.

Situation 1

Numéro de la partie	0	1	2	3	4
Résultat		G	P	P	P
Mise pour la partie suivante	1	1	2	3	4
Somme restante	5	6	5	3	0

Le jeu s'arrête

Situation 2

Numéro de la partie	0	1	2	3	4
Résultat		P	P	G	G
Mise pour la partie suivante	1	2	3	2	1
Somme restante	5	4	5	5	7

Le jeu peut continuer

Pour toute la suite de l'exercice, le joueur décide d'appliquer cette stratégie.

1. **Dans situation 2** :
   a) de quelle somme disposerait le joueur s'il gagnait la partie suivante ?
   b) de quelle somme disposerait le joueur s'il perdait la partie suivante ?
2. **Dans un premier temps, le joueur décide d'être prudent** :
   Il dispose d'une somme de 6 € et décide de ne jouer que trois parties.

a) Après les trois partie, quelle est la somme maximale dont il peut disposer ? Avec quelle probabilité ?

b) Quelle est la probabilité qu'il ait perdu ses 6 € après les trois parties ?

3. **Avant d'aller plus loin**, le joueur construit un algorithme, donné ci-dessous, qui simule une suite de parties. Dans cet algorithme :
   - la fonction `ALEA.ENTRE.NOMBRE(0,1)` permet d'obtenir de façon aléatoire soit 0 soit 1,
   - S désigne la somme dont dispose le joueur après chaque partie,
   - n le nombre de parties que l'on souhaite jouer,
   - m la mise pour la partie suivante.
   - x est la valeur obtenue par la fonction `ALEA.ENTRE.NOMBRE(0,1)` : si $x = 0$ la partie est perdue ; si $x = 1$ la partie est gagnée.

```
Variables : S,m,x,n,i

1       Début
2          Lire S
3          Lire n
4          Affecter à m la valeur....
5          Affecter à i la valeur 0
6          Tant que m ⩽ S et i < n faire
7             Affecter la valeur ALEA.ENTRE.NOMBRE(0,1) à x
8             Si x = 0 alors
9                Affecter à S la valeur S − m
10               Affecter à m la valeur m + 1
11               Sinon
12                  Affecter à S la valeur S + m
13                  Si m ⩾ 2 alors
14                     Affecter à m la valeur m − 1
15                     Sinon
16                        Affecter à m la valeur 1
17                        Fin Sinon
18                     Fin Si
19                  Fin Sinon
20               Fin Si
21            Affecter à i la valeur i + 1
22            Fin Tant que
23         Afficher S
24      Fin
```

a) Compléter la ligne 4 de l'algorithme.

b) Expliquer les conditions de la ligne 6.

c) Ajouter une instruction pour que le nombre de parties effectivement jouées s'affiche à la fin de l'algorithme.

4. **Dans un deuxième temps, le joueur dispose de 100 € et s'arrête de jouer dès qu'il parvient à doubler sa fortune (c'est-à-dire lorsqu'il aura 200 € au total)**

a) Quel est le nombre minimum de parties qu'il lui faudra jouer pour espérer atteindre son objectif ? Quelle est la probabilité que cette situation se réalise ?

b) Quel est le nombre minimum de parties à l'issue desquelles il risque d'être ruiné ou de ne plus pouvoir appliquer sa stratégie ?

5. Le joueur a perdu ses premières parties, et ses pertes s'élèvent à 55 €.

a) Combien de parties a-t-il joué ?

b) Combien de parties au minimum doit-il gagner pour compenser ses pertes ?

ROUEN

Premier exercice

Toutes séries

Retouche d'images

Énoncé

Une image numérique en noir et blanc est composée de petits carrés (pixels) dont la couleur va du noir au blanc en passant par toutes les nuances de gris. Chaque nuance est codée par un nombre réel x de la façon suivante :

- $x = 0$ pour le noir ;
- $x = 1$ pour le blanc ;
- x varie de 0 à 1 pour toutes les nuances de gris intermédiaires (du foncé au clair).

L'image A, ci-dessous, est composée de quatre pixels et donne un échantillon de ces nuances avec leurs codes.
Un logiciel de retouche d'image utilise des fonctions numériques dites « **fonctions de retouche** ».
Une fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ est dite « fonction de retouche » si elle possède au moins les trois propriétés suivantes :

- $f(0) = 0$;
- $f(1) = 1$;
- f est croissante sur l'intervalle $[0\,;\,1]$.

Une **nuance codée** x_0 est dite :

- assombrie par la fonction f si $f(x_0) \leqslant x_0$;
- éclaircie par la fonction f si $f(x_0) \geqslant x_0$.

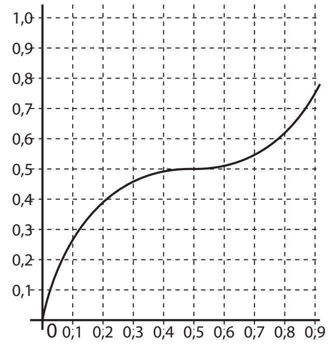
Ainsi, si $f(x) = x^2$, un pixel de nuance codée 0,2 prendra la nuance codée $0,2^2 = 0,04$.
L'image A sera transformée en l'image B ci-dessous.
Si $f(x) = \sqrt{x}$, un pixel de nuance codée 0,2 prendra la nuance codée $\sqrt{0,2} \approx 0,45$.
L'image A sera transformée en l'image C ci-dessous.

Image A

Image B

Image C

Partie A



1. On considère la fonction f_1 définie sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ par $f_1(x) = 4x^3 - 6x^2 + 3x$. Sa courbe représentative est donnée ci-contre.
   a) Démontrer que la fonction f_1 est une fonction de retouche.
   b) À l'aide du graphique, quelles sont les nuances codées x appartenant à l'intervalle $[0\,;\,1]$ qui seront assombries par la fonction f_1 ?
   c) Résoudre par le calcul l'inéquation $f_1(x) \leqslant x$.
2. a) Proposer une fonction de retouche f_2 définie sur $[0\,;\,1]$ éclaircissant toute nuance x appartenant à l'intervalle $[0\,;\,1]$.
   b) Proposer une fonction de retouche f_3 définie sur $[0\,;\,1]$ assombrissant toute nuance x appartenant à l'intervalle $[0\,;\,1]$.

Partie B

1. On considère une fonction polynôme du second degré g_1 définie sur $[0\,;\,1]$ vérifiant $g_1\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{3}$.
   Sachant que g_1 est une fonction de retouche, justifier qu'elle est définie sur $[0\,;\,1]$ par :
   $$g(x) = \frac{2}{3}x^2 + \frac{5}{3}x.$$
2. On cherche maintenant une fonction de retouche g_2 définie sur $[0\,;\,1]$ qui, après l'application de la fonction de retouche g_1, permettrait de revenir aux nuances initiales.
   a) Donner les valeurs de $g_2(0), g_2(1)$ et $g_2\left(\frac{2}{3}\right)$.
   b) Calculer $g_2\left(\frac{1}{6}\right)$
   c) Résoudre l'équation de la variable x, $g_1(x) = y$, avec $x \in [0;1]$ et $y \in [0;1]$.
   En déduire l'expression de la fonction de retouche g_2 qui, après l'application de la fonction de retouche g_1, permet de revenir aux nuances initiales.

RETOUR AU SOMMAIRE

ROUEN

Deuxième exercice

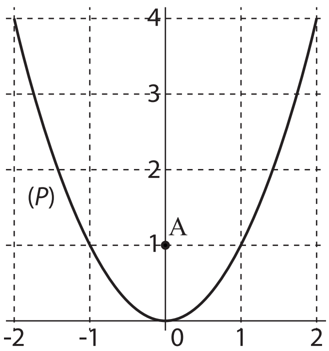
Série S

À la recherche du triangle d'or

Énoncé

Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ du plan, on note (P) la parabole d'équation $y = x^2$ et on appelle A le point de coordonnées $(0\,;\,1)$.
On s'intéresse, dans cet exercice, aux triangles AMM', où M et M' sont deux points de la parabole (P). L'objectif est de déterminer tous les couples de points M et M' appartenant à (P) pour lesquels le triangle **AMM' soit isocèle rectangle en A.**

Partie A - Quelques exemples



a) Représenter sur le graphique ci-contre deux exemples simples de triangles AMM', symétriques, qui satisfont le problème (aucune justification n'est attendue).

b) Vérifier que les points $M\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}; \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$ et $M'\left(\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}; \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$ appartiennent à (P) et forment un couple de points également solution au problème.

Partie B - Avec un cercle

On considère le cercle $(\mathscr{C})$ de centre A et de rayon r (avec $r > 0$).
Ci-dessous le cercle $(\mathscr{C})$ a été représenté dans le même repère que la parabole $y = x^2$ pour cinq valeurs particulières de r.

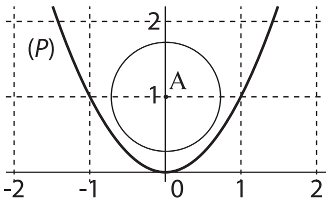


Figure 1

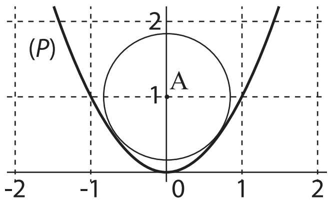


Figure 2

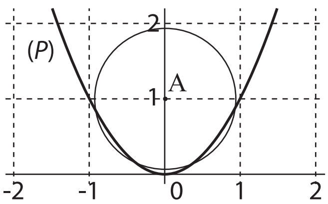


Figure 3

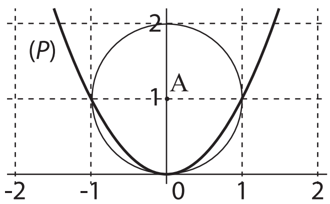


Figure 4

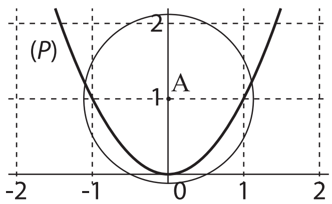


Figure 5

1. Soit $M(x; y)$ un point quelconque du plan.
   Démontrer que M appartient au cercle $(\mathscr{C})$ si et seulement si $x^2 + y^2 - 2y + 1 = r^2$.

2. En déduire que $M(x; y)$ appartient à la fois au cercle $(\mathscr{C})$ et à la parabole (P) si et seulement si $\begin{cases} y = x^2 \\ y^2 - y + 1 - r^2 = 0 \end{cases}$

3. Expliquer en quoi la résolution de ce système contribue à la résolution du problème initialement présenté.
4. a) Déterminer, selon la valeur de r, le nombre de solutions de l'équation : $y^2 - y + 1 - r^2 = 0$

   b) À quel graphique ci-dessus le cas « $r = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ » correspond-il ?
5. On suppose dans la suite que : $r \geqslant \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

   a) Soient M$(x;y)$ et M'$(x';y')$ deux points appartenant à la fois à $(\mathscr{C})$ et à (P) et **symétriques par rapport à l'axe des ordonnées**.
   Justifier que si le triangle AMM' est rectangle en A alors $y^2 - 3y + 1 = 0$.

   b) À l'aide des représentations graphiques ci-dessus, et en raisonnant selon la valeur de r, terminer la résolution du problème, c'est-à-dire, déterminer tous les couples de points M et M' appartenant à (P) pour lesquels le triangle **AMM' est isocèle rectangle en A**.

RETOUR AU SOMMAIRE

ROUEN

Troisième exercice

Séries autres que S

Un aller-retour harmonique

Énoncé

Nous nous intéressons à une compétition sportive où les participants doivent enchaîner deux disciplines : la course à pied et le vélo.
Le parcours consiste en un aller-retour entre deux villes, l'aller s'effectuant à pied, en courant et le retour à vélo.
Nous allons étudier plus particulièrement la course de deux participantes : Lou et Anna.

1. **Comparaisons**
   Lou couvre habituellement la distance aller à la vitesse moyenne de 15 km/h et le retour à la vitesse moyenne de 35 km/h.
   a) Calculer la durée totale du trajet aller-retour de Lou en fonction de la distance d qui sépare les deux villes.
   b) À l'entrainement, Anna effectue le trajet aller-retour à la vitesse moyenne de 20 km/h.
   Entre Lou et Anna, laquelle réalise la meilleure performance ?
2. **Performances**
   Afin de progresser, Anna veut augmenter sa vitesse moyenne sur l'aller-retour. Elle sait cependant qu'en course à pied, elle ne peut pas faire mieux que 15 km/h. Elle est donc consciente qu'il lui faut augmenter sa vitesse à vélo.
   Notons x sa vitesse moyenne sur le retour à vélo et $v(x)$ sa vitesse moyenne sur l'aller-retour (toutes deux exprimées en km/h).
   a) Démontrer que si Anna optimise sa course à pied $v(x) = \dfrac{30x}{15+x}$.
   b) À quelle vitesse Anna doit-elle rouler sur le retour pour que sa vitesse moyenne sur l'aller-retour soit de 22 km/h ?
   c) Démontrer que, quelle que soit la vitesse moyenne d'Anna sur le retour à vélo, sa vitesse moyenne sur l'aller-retour ne pourra jamais dépasser 30 km/h.

RETOUR AU SOMMAIRE

STRASBOURG

Premier exercice

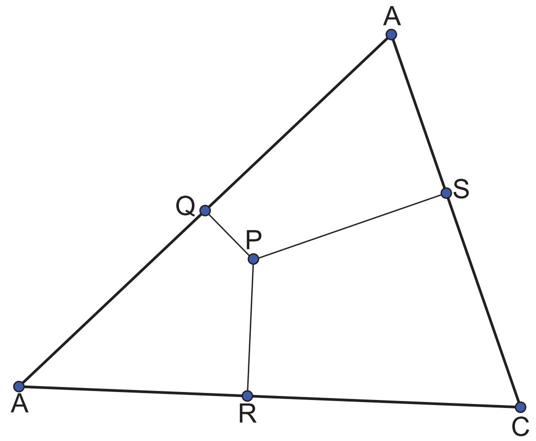
Toutes séries

Triangle équilatéral

Énoncé

ABC est un triangle équilatéral.
Soit P un point à l'intérieur du triangle.
On note Q, R, S les projetés orthogonaux de P sur [AB], [BC] et [AC].
On sait que $PQ = 1$, $PR = 2$ et $PS = 3$.

Patrick a tenté de faire une figure, mais il constate que son triangle n'est pas équilatéral :



1. Le but de la question est de construire une figure exacte.
   a) Claudine a réussi à faire la figure en calculant l'angle $\widehat{QPR}$. Qu'a-t-elle trouvé ? (justifier votre réponse).

   b) Faire une figure à l'échelle. Cette figure sera complétée tout au long de l'exercice.
2. Le but de la question est de calculer la longueur du côté du triangle ABC.
   a) La droite (PS) coupe (AB) en T. Calculer la longueur PT. Calculer la longueur AT.
   b) Soit H le projeté orthogonal de T sur [PR]. Montrer que H est le milieu de [PR].
   c) Soit K le projeté orthogonal de T sur [BC]. Calculer BT.
   d) En déduire la longueur du côté du triangle ABC.
3. On note R_C le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC et R_I le rayon du cercle inscrit dans le triangle ABC. Démontrer que $PQ + PR + PS = R_C + R_I$.
4. Retrouver la réponse à la question 2 en utilisant un calcul d'aires.

RETOUR AU SOMMAIRE

STRASBOURG

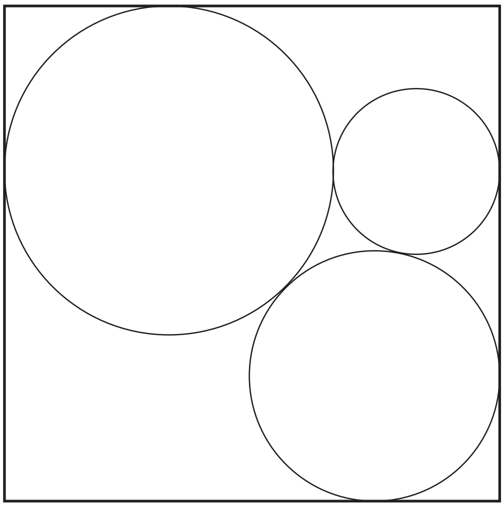
Deuxième exercice

Série S

Cercles tangents

Énoncé

Dans le carré suivant, de côté 1, on a dessiné trois cercles tangents entre eux, un grand, un moyen et un petit. Le grand cercle et le moyen sont tangents à deux côtés du carré, le petit cercle est tangent à un côté du carré. Le centre du grand cercle et le centre du petit cercle sont sur une même droite parallèle à un des côtés du carré.



1. Déterminer la distance entre le centre du grand cercle et celui du petit cercle.
2. Manuel peut calculer la distance entre le centre du cercle moyen et celui du grand cercle. Faites aussi bien que lui.
3. Déterminer la distance entre le centre du cercle moyen et celui du petit cercle.
4. Peut-on trouver le rayon des trois cercles ?

RETOUR AU SOMMAIRE

STRASBOURG

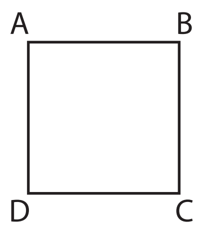
Troisième exercice

Séries autres que S

Déplacements d'une coccinelle

Énoncé

Dans cet exercice, une coccinelle se déplace sur les côtés d'un carré ABCD **en partant toujours du point A**.
Elle peut rebrousser chemin si elle le souhaite.



On appelle déplacement élémentaire tout trajet de la coccinelle le long d'un côté du carré, d'un sommet à un autre.
A partir d'un sommet donné, il y a donc deux déplacements élémentaires possibles.
Une marche est constituée de déplacements élémentaires.
Ainsi, la marche A$\longrightarrow$B$\longrightarrow$A$\longrightarrow$D$\longrightarrow$C a pour départ A, pour arrivée C et est constituée de quatre déplacements élémentaires.

Partie A

Dans cette partie, la coccinelle se déplace de manière aléatoire sur les côtés du carré ABCD en partant du point A et on considère que tous les déplacements élémentaires sont équiprobables.

1. Arrivées possibles.
   a) Quelles sont les arrivées possibles pour une marche de trois déplacements élémentaires ?
   b) Quelles sont les arrivées possibles si la marche comporte un nombre pair de déplacements élémentaires ?
2. Dans cette question, la coccinelle effectue deux déplacements élémentaires. Quelle est la probabilité de l'événement « la coccinelle arrive en A en deux déplacements élémentaires » ?
3. Compléter le tableau ci-dessous :

Nombre de déplacement élémentaires	1	2	3	4	5
Probabilité d'arriver en A					

Partie B

Dans cette partie, la coccinelle se déplace de manière aléatoire sur les côtés du carré ABCD (toujours en partant du point A) et a cette fois deux fois plus de chances de se déplacer verticalement qu'horizontalement. En revanche, elle décide de s'arrêter dès qu'elle revient en A.

1. Dans cette question, la coccinelle effectue deux déplacements élémentaires.

a) Calculer la probabilité de l'événement « la coccinelle arrive en A en exactement deux déplacements élémentaires ».

b) Calculer la probabilité de l'événement « la coccinelle arrive en C en exactement deux déplacements élémentaires ».

2. Dans cette question, la coccinelle effectue davantage de déplacements élémentaires.

   a) Calculer la probabilité de l'événement « la coccinelle arrive en A en exactement quatre déplacements élémentaires ».

   b) Calculer la probabilité de l'événement « la coccinelle arrive en A en exactement six déplacements élémentaires ».

RETOUR AU SOMMAIRE

TOULOUSE

Premier exercice

Toutes séries [1]

Autour du jeu de Sim

Énoncé

A - Un jeu simplifié à cinq points

On dessine cinq points A, B, C, D, E dans le plan en évitant qu'il y ait trois points alignés.
Deux joueurs jouent à tour de rôle. Le premier (appelé Plein) trace un trait plein entre deux de ces cinq points. Le second (appelé Tiret) trace à son tour un trait formé de petits tirets entre deux de ces points.
Ensuite c'est de nouveau à Plein de jouer, et ainsi de suite. Lorsque deux points sont déjà reliés, ils ne peuvent l'être à nouveau par la suite.
Dès qu'un joueur réalise un triangle avec ses traits, il a perdu.
Ainsi sur la figure ci-dessous, c'est à Plein de jouer, mais s'il joue [AD] il perd car cela termine un triangle ABD tracé en traits pleins.

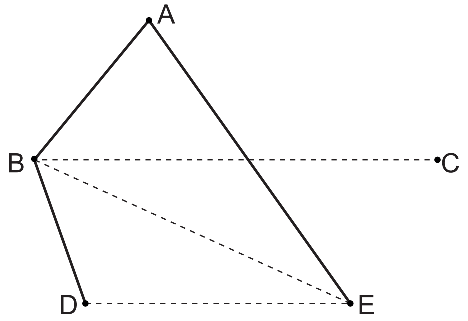


Figure 1

Déroulement du jeu :

1. Plein trace [AB]
2. Tiret trace [BC]
3. Plein trace [AE]
4. Tiret trace [DE]
5. Plein trace [BD]
6. Tiret trace [BE]

Si tous les traits possibles entre les cinq points ont été tirés sans que personne ne perde, la partie est déclarée nulle.

1. Voici un nouveau début de partie.

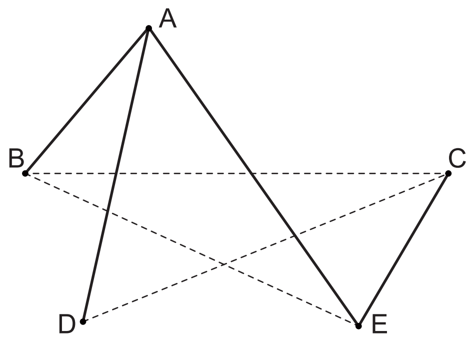


Figure 2

Déroulement du jeu

1. Plein trace [AB]
2. Tiret trace [BC]
3. Plein trace [AE]
4. Tiret trace [BE]
5. Plein trace [AD]
6. Tiret trace [CD]
7. Plein trace [CE]

C'est maintenant à Tiret de jouer.
Proposer une manière de jouer pour Tiret au huitième coup afin qu'il gagne à coup sûr.

1. Parties A et B, par tous les candidats ; partie C uniquement par les candidats de la série S.

2. Voici un nouveau début de partie.

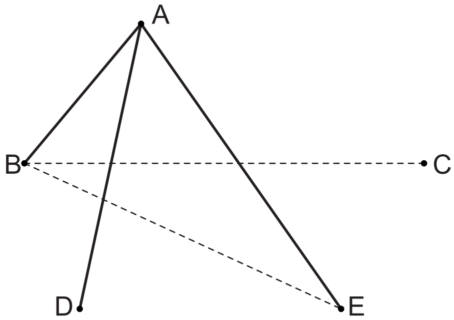


Figure 3

Déroulement du jeu
1. Plein trace [AB]
2. Tiret trace [BC]
3. Plein trace [AE]
4. Tiret trace [BE]
5. Plein trace [AD]

C'est à Tiret de jouer.
Proposer une manière de jouer pour Tiret au sixième coup afin qu'il gagne à coup sûr.

3. Montrer que la partie associée à la figure 1 décrite dans le préambule peut s'achever par une partie nulle.
4. Si à un moment de la partie il y a trois traits du même type issus d'un même sommet, expliquer pourquoi il ne peut pas y avoir de partie nulle.

B

1.) **Le jeu de Sim ordinaire**, jeu imaginé en 1969 par le mathématicien américain Gustavus James Simmons.
On reprend les mêmes règles que précédemment, mais avec six points A, B, C, D, E, F (tels qu'on n'en trouve jamais trois alignés).
Montrer que dans ce cas, il n'y a jamais de partie nulle.
2. **Plus de points**
On reprend les mêmes règles que précédemment, mais avec un nombre n de points, $n > 6$ (tels qu'on n'en trouve jamais trois alignés).
Montrer que dans ce cas, il n'y a jamais de partie nulle.

C (*candidats élèves en série scientifique seulement*

On reprend encore les mêmes règles, avec un nombre $n > 6$ de points (tels qu'on n'en trouve jamais trois alignés).
Cette fois il y a trois joueurs.
A partir de quelle valeur de n pensez-vous pouvoir garantir qu'il n'y aura jamais de partie nulle ? Justifier.

RETOUR AU SOMMAIRE

TOULOUSE

Deuxième exercice

Série S.

Vous avez dit 1/2 ?

Énoncé

Chloé veut acheter un couple de poissons rouges (un mâle et une femelle) pour son nouvel aquarium. Pour cela, elle se rend dans une animalerie où elle rencontre un vendeur un peu loufoque qui semble passionné de mathématiques.

1. Le vendeur commence par lui montrer un premier aquarium qui contient quatre poissons rouges (un mâle et trois femelles). Il lui indique que si elle choisit au hasard successivement deux poissons dans cet aquarium, la probabilité d'avoir un mâle et une femelle est égale à 1/2.
   Justifier les propos du vendeur.
2. Le vendeur lui montre ensuite un deuxième aquarium qui contient neuf poissons rouges. Il lui dit à nouveau que si elle choisit au hasard deux poissons dans cet aquarium, la probabilité d'avoir un mâle et une femelle est égale à 1/2.
   Déterminer une répartition possible entre mâles et femelles dans cet aquarium.
3. a) Chloé, amusée par ce vendeur, commence à se prendre au jeu ... elle réfléchit et arrive à la conclusion :

      « Pour que la probabilité d'obtenir un mâle et une femelle en choisissant au hasard deux poissons dans un aquarium donné soit égale à 1-2, il faut que le nombre total de paires que l'on peut constituer avec les poissons de cet aquarium soit pair. »

      N.B. : On appelle « paire » de poissons les ensembles du type $\{P_1, P_2\}$, où P_1 et P_2 sont deux poissons distincts.
      On rappelle que $\{P_1, P_2\} = \{P_2, P_1\}$.

      Expliquer la conclusion de Chloé.

   b)) Du coup, Chloé réagit vivement lorsque le vendeur lui annonce que dans un autre aquarium avec 70 poissons, la probabilité d'obtenir un mâle et une femelle en choisissant au hasard deux poissons est égale à 1-2. Expliquer pourquoi.
4. Pendant que le vendeur, vexé, lui expose ses théories probabilistes, Chloé continue à réfléchir. Envisageant un nombre de poissons dans l'aquarium compris entre 30 et 50, elle affirme : « *Je peux trouver une répartition entre mâles et femelles dans l'aquarium pour qu'en prenant deux poissons au hasard la probabilité d'obtenir une femelle et un mâle soit égale à 1/2, mais à condition que le nombre total de poissons soit 36 ou 49* ».
   Dans la suite on s'intéresse au cas général. On étudie un aquarium théorique, de contenance illimitée, dans lequel se trouvent n poissons, n entier supérieur ou égal à 2.
   On note (H) la propriété : « il y a une répartition entre mâles et femelles dans l'aquarium telle que, lorsqu'on choisit au hasard deux poissons, la probabilité d'obtenir un mâle et une femelle soit 1/2. »

   a) Avec la déclaration de Chloé, exprimer une conjecture à propos des valeurs de l'entier n pour lesquelles la propriété (H) est vraie.

   b) Démontrer cette conjecture.

   c) Pour un aquarium contenant n poissons (n entier supérieur ou égal à 2) et vérifiant la propriété (H), donner une répartition possible entre femelles et mâles.

RETOUR AU SOMMAIRE

TOULOUSE

Troisiième exercice

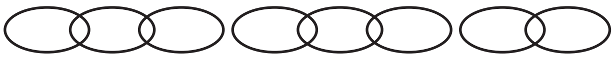
Séries autres que S.

Bracelets

Énoncé

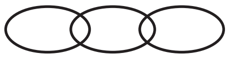
Sophie et Martin réalisent des bracelets à partir de morceaux de chaine dont ils peuvent ouvrir et refermer des maillons.

1. Sophie dispose de deux morceaux de chaine comportant chacun trois maillons et d'un autre comportant deux maillons.

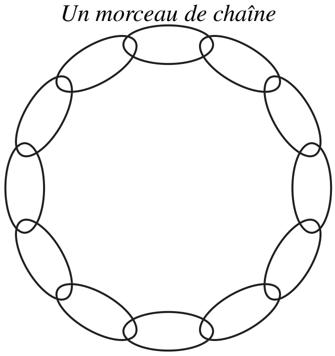


Expliquer comment elle peut réaliser un bracelet de huit maillons en ouvrant et en refermant seulement deux maillons.

2. Martin, lui, dispose uniquement de morceaux de chaine ayant trois maillons.
Il veut en faire des bracelets en ouvrant le moins possible de maillons et en utilisant tous les maillons.



Un morceau de chaîne



Un bracelet de douze maillons

   a) Montrer que, pour avoir un bracelet de douze maillons en utilisant quatre morceaux de chaine, il lui suffit d'ouvrir et de refermer seulement trois maillons.
   Martin peut-il faire mieux ?

   b) Il utilise maintenant huit morceaux de chaine pour fabriquer un bracelet.
   Quel est le nombre minimum de maillons à ouvrir ?

   c) Et s'il s'agit de former un bracelet avec sept morceaux de chaine ?

   d) A supposer que Martin ait 672 morceaux de chaine, chacun de trois maillons, quel nombre minimum de maillons devra-t-il ouvrir pour former un bracelet de 2016 maillons ?

   e) Qu'en serait-il pour un bracelet respectivement de 2013, 2019, 2022 maillons ?

RETOUR AU SOMMAIRE

VERSAILLES

Premier exercice

Série S.

Tant qu'il y aura des sommes

Énoncé

On cherche deux ensembles A et B, dont les éléments sont des nombres entiers naturels, tels que tout entier naturel compris entre 0 et 2 016 puisse être écrit comme la somme d'un élément de A et d'un élément de B. De plus, A et B doivent avoir le même nombre d'éléments.

1. Donner un exemple dans lequel A et B ont chacun 1 008 éléments.
2. On appelle p le nombre minimal d'éléments que doivent avoir les ensembles A et B pour réaliser l'objectif. Montrer que $p \geqslant 45$.
3. Donner un exemple d'ensembles A et B ayant chacun 45 éléments et répondant à la question.

RETOUR AU SOMMAIRE

VERSAILLES

Deuxième exercice

Série S.

La sécurité dans le désordre

Énoncé

Un fabricant de serrures propose un nouveau modèle de code de protection :

a) On enregistre un nombre, appelé *code initial*, formé des trois chiffres 1, 2 et 3, chacun apparaissant une et une seule fois. On ferme la porte.

b) Pour ouvrir la porte, il faut composer un nombre, lui aussi formé des trois chiffres 1, 2 et 3 apparaissant une et une seule fois, mais aucun des trois n'occupant la même place que dans le *code initial*.
Ainsi, si le *code initial* est 132, le nombre 321 permet d'ouvrir la porte, 123 ne le permet pas.

1. a) Si le nombre 123 permet d'ouvrir la porte, quels sont les *codes initiaux* possibles ?

   b) Si le nombre 123 ne permet pas d'ouvrir la porte, quels sont les *codes initiaux* possibles ?

   c) On suppose que des essais infructueux ne bloquent pas le mécanisme d'ouverture. Une personne désireuse d'entrer peut ainsi essayer plusieurs fois. Montrer que la série 123 - 231 - 132 - 213 permet d'ouvrir la porte.

   d) Existe-t-il une suite de trois nombres permettant d'ouvrir la porte ?

   On améliore le système : le code initial est un nombre formé avec les quatre chiffres 1, 2, 3 et 4, le mode d'emploi étant le même que précédemment.

2. a) Un *code initial* étant fixé, combien de nombres différents permettent d'ouvrir la porte ?

   b) Y a-t-il une série de quatre nombres permettant d'ouvrir la porte quel que soit le *code initial* ?

3. Dans le cas d'un *code initial* à cinq chiffres, y a-t-il une série de huit nombres permettant d'ouvrir la porte ?

RETOUR AU SOMMAIRE

VERSAILLES

Troisième exercice

Séries autres que S.

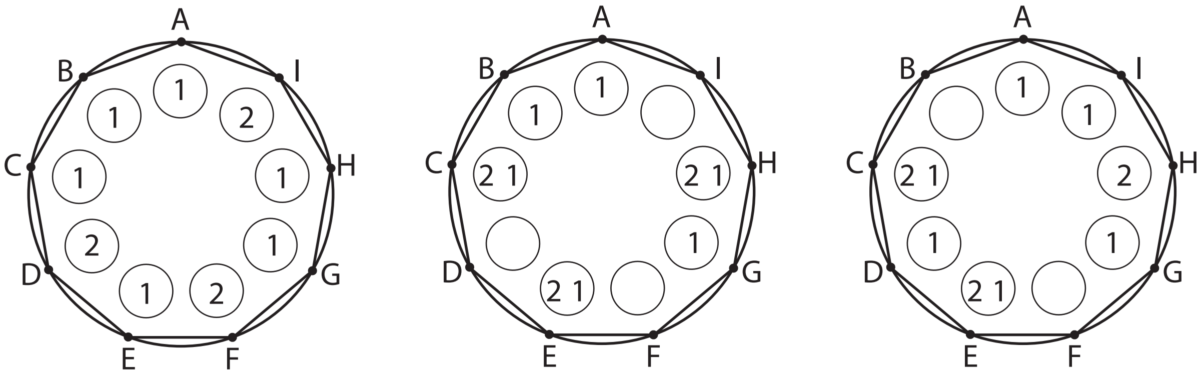
Table tournante

Énoncé

Neuf personnes sont assises autour d'une table. Un sac contient 8 pièces de 1 euro et 8 pièces de 2 euros. On pose devant chaque personne une pièce prise au hasard dans le sac.

On demande dans un premier temps à chaque personne ayant reçu une pièce de 2 euros de la donner à son voisin de gauche. Dans un second temps, chaque personne ayant reçu une pièce de 1 euro doit la donner au voisin de droite de son voisin de droite.

Exemple :



Distribution initiale — Passage des « 2 euros » à gauche — Passage des « 1 euro » 2 fois à droite

1. On reprend l'exemple précédent, en remplaçant les pièces de 1 euro par des pièces de 2 euros et vice-versa. Quelle distribution obtient-on après les deux mouvements de pièces ?
2. a) Montrer que si une personne, son voisin de droite et son voisin de gauche ont chacun reçu une pièce de 2 euros, un des participants au moins est démuni à l'issue des mouvements.

   b) Quelles sont les distributions initiales qui permettent que chaque personne ait une pièce à l'issue des mouvements ?

   On procède de la même façon avec 10 personnes attablées et un sac contenant 9 pièces de 1 euro et 9 pièces de 2 euros. On fait l'hypothèse qu'après les deux temps de redistribution, chaque personne a au moins une pièce devant elle.
3. a) Montrer que deux voisins ne peuvent pas avoir chacun une pièce de 2 euros.

   b) Montrer qu'il est impossible qu'une personne, son voisin de droite et son voisin de gauche aient chacun une pièce de 1 euro.

   c) Montrer que toute personne ayant une pièce de 1 euro ne peut pas être entourée de voisins ayant chacun une pièce de 2 euros.

   d) Conclure quant à la validité de l'hypothèse « après les deux temps de redistribution, chaque personne a au moins une pièce devant elle ».

RETOUR AU SOMMAIRE

VERSAILLES

Quatrième exercice

Séries autres que S.

Éloge de la régularité

Énoncé

Pierre a construit un parcours de marche à pied de 15 km entre les points A et B. Ce parcours se divise en trois parties, chacune d'au moins 1 km : la première est une montée, la seconde est en terrain plat, la troisième est une descente.

L'objectif est de se conformer à un rythme de progression donné. Les marcheurs doivent parcourir les montées à la vitesse de 4 km/h, les descentes à 6 km/h, et marcher à 5 km/h en terrain plat. Dans ces conditions, le parcours de A vers B s'effectue en exactement 3 heures.

1. Clara a effectué le parcours, de B vers A. Elle a mis 3 heures. Prouver qu'elle a couru un moment.
2. Isabelle a effectué le parcours, elle aussi de B vers A. Elle a mis 3 heures et quart. Prouver qu'elle s'est arrêtée un moment.

RETOUR AU SOMMAIRE