Association des Professeurs
de Mathématiques de
l'Enseignement Public

LES OLYMPIADES ACADÉMIQUES DE MATHÉMATIQUES 2012

Brochure APMEP n° 200

Coordination : Paul-Louis HENNEQUIN
Mise en forme : Jean BARBIER

LES OLYMPIADES ACADÉMIQUES DE MATHÉMATIQUES 2012

TABLEAU SYNTHÉTIQUE

Le tableau des pages suivantes vous permet de choisir un exercice et les éléments de sa solution en fonction de quatre critères.

- La première colonne donne la liste des exercices et l'académie concernée
- Les douze suivantes précisent le (ou les) domaine(s) mathématique(s) impliqué(s)
- La suivante (Nombre de questions) offre le choix entre les exercices laissant une large marge d'initiative dans la recherche et ceux qui font gravir marche par marche l'escalier qui conduit à la solution.
- La quinzième donne la longueur d'une solution détaillée évaluée en nombre de demi-pages
- L'avant-dernière précise les sections concernées, un même exercice pouvant être proposé à deux niveaux
- La dernière enfin donne le titre de chaque énoncé : nous avons rajouté cette colonne car ces titres sont empreints de fantaisie et permettent de retrouver immédiatement des thèmes classiques tels que : nombre d'or, Syracuse, Kaprekar, NIM...

Par rapport aux années précédentes, on notera l'augmentation significatives des colonnes algorithmique et probabilités aux dépens de la colonne statistique, pourcentages et en liaison avec l'évolution des programmes

Pour accéder directement aux articles qui vous intéressent, vous pouvez cliquer sur le début de la ligne des exercices cherchés. Par exemple pour accéder à l'exercice Paris 1, cliquez sur la case Paris 1

Olympiades 2012	algorithmique	arithmétique	numération	dénombrement	logique	inégalités	suites	équations, fonctions	géométrie plane	géométrie espace	probablités	statistique, pourcentages	nombre de questions	longueur de la solution	sections	titre
National 1		X	X										9	2	TOUTES	Nombres digisibles
National 2									X		X		10	3	TOUTES	Plus proche, plus loin
AEFE Amérique 1									X				10	4	TOUTES	Partages équitables
AEFE Amérique 2		X				X			X				8	2	TOUTES	Nombres éligibles
Aix-Marseille 1						X			X				9	2	S,	Un carreleur
Aix-Marseille 2											X		6	2	S,	Marche aléatoire
Aix-Marseille 3	X								X				4	1	Autres	Un autre carreleur
Aix-Marseille 4		X	X										8	1	Autres	Rep-unit
Amiens 1		X					X						8	2	S,	Octogones
Amiens 2													2	1	S,	Carré inscrit
Amiens 3	X	X											5	1	ES-L-STG-ST2S	Un magicien
Amiens 4									X				2	1	ES-L-STG-ST2S	Partage d'un carré
Amiens 5						X							12	2	STI2D-STD2A-STL	Moyennes
Amiens 6							X						1	1	STI2D-STD2A-STL	Calcul mental !
Besançon 1	X	X											20	4	TOUTES	L'algorithme de Kaprekar
Besançon 2				X							X		14	4	TOUTES	Une coccinelle
Bordeaux 1									X				5	2	S,	Cinq cercles dans un carré
Bordeaux 2		X								X			6	1	S,	Pavé droit
Bordeaux 3					X								7	1	Autres	Les sextuplés de M. et Mme Logic
Bordeaux 4		X											9	6	Autres	Pyramides multiplicatives
Caen 1						X			X				5	2	TOUTES	Le Poulailler
Caen 2								X					3	3	S,	Pierre et sa fille
Caen 3										X			10	2	Autres	Le logo
Clermont 1	X	X		X									12	3	TOUTES	De toutes les couleurs
Clermont 2	X	X											12	4	S,	Naissance de triplets (arithmétiques)
Clermont 3					X								6	1	Autres	Sudomaths !

Olympiades 2012	algorithmique	arithmétique	numération	dénombrement	logique	inégalités	suites	équations, fonctions	géométrie plane	géométrie espace	probablités	statistique, pourcentages	nombre de questions	longueur de la solution	sections	titre
Corse 1		X					X	X	X				4	3	TOUTES	Les nombres « Corses »
Corse 2									X				5	2	TOUTES	Hélice d'avion
Créteil 1	X							X					10	2	S,	Taylor
Créteil 2								X	X				1	2	S,	Nombredor sec
Créteil 3								X	X				7	3	Autres	Paraboles
Creteil 4								X	X				4	3	Autres	Nombredor détaillé
Dijon 1	X	X		X									5	1	TOUTES	Le tour de magie
Dijon 2						X			X				10	3	S,	Drôle de distance
Dijon 3				X									6	1	Autres	Pavage bicolore
Grenoble 1				X					X				9	3	TOUTES	Polygones manichéens
Grenoble 2									X				13	2	S, STI	Droite et naissance de l'ère industrielle
Grenoble 3				X					X		X		6	2	Autres	Des territoires aléatoires
Guadeloupe 1		X											5	1	TOUTES	Quand 7 divise n^2
Guadeloupe 2									X				1	1	TOUTES	Géométrie, le retour
Guyane 1				X									10	3	TOUTES	Le cavalier boiteux
Guyane 2		X		X									12	4	TOUTES	Jeux de NIM
Lille 1	X	X		X									12	1	S,	Un podium olympique
Lille 2		X					X						5	1	S,	Une chasse au trésor
Lille 3	X	X		X									14	2	Autres	Un autre Podium Olympique
Lille 4	X	X					X						7	3	Autres	Une autre chasse au trésor
Limoges 1		X					X		X				9	2	TOUTES	L'hexagone magique
Limoges 2							X		X				11	2	S,	Suites de carrés
Limoges 3		X											10	1	Autres	Une calculatrice défectueuse
Lyon 1									X				5	1	TOUTES	Les éoliennes
Lyon 2											X		8	2	TOUTES	Duels tétraédriques
Martinique 1								X					1	1	TOUTES	Prix du billet
Martinique 2											X		9	5	TOUTES	Billes

Olympiades 2012	algorithmique	arithmétique	numération	dénombrement	logique	inégalités	suites	équations, fonctions	géométrie plane	géométrie espace	probablités	statistique, pourcentages	nombre de questions	longueur de la solution	sections	titre
Mayotte1 et Réunion1	X	X					X						10	2	TOUTES	Syracuse
Mayotte 2								X	X				4	2	S	à Sakouli
Mayotte 3				X	X						X		5	3	Autres	Silences éloquents
Montpellier-Maroc1				X							X		5	3	S	Le problème de Dédé
Montpellier-Maroc 2										X			3	1	S	Perdre le Nord
Montpellier-Maroc 3	X												3	1	Autres	Parlons le *MIU*
Montpellier-Maroc 4		X		X		X							10	2	Autres	Quitte ou double
Nancy-Metz 1	X	X											6	1	TOUTES	Sommes de carrés
Nancy-Metz 2									X				9	2	TOUTES	Partages de même aire
Nantes 1								X	X				7	2	S	Moyennes (S)
Nantes 2						X	X	X					9	2	S	Décimales d'une racine carrée
Nantes 3								X	X				8	3	Autres	Moyennes (autres que S)
Nantes 4	X	X					X						7	3	Autres	Nombres triangulaires et tétraédriques
Nice 1									X				2	1	S	La chambre de Léa
Nice 2		X									X		8	2	S	On lance un dé
Nice 3									X				2	1	Autres	La chambre d'Adrien
Nice 4	X	X		X							X		9	2	Autres	Déplacement sur un réseau
Orléans-Tours 1							X	X	X				9	2	TOUTES	Des cercles à la suite
Orléans-Tours 2	X			X			X						7	2	TOUTES	Accrochez les wagons
Paris 1	X							X					4	2	TOUTES	Une calculatrice cassée
Paris 2		X			X								3	2	TOUTES	Jouer sur un damier
Poitiers 1		X							X				5	2	TOUTES	Pavages
Poitiers 2			X					X					7	2	S	Une fonction sur les entiers
Poitiers 3			X				X						5	1	Autres	Robinson
Polynésie 1								X					17	2	TOUTES	Une équation fonctionnelle
Polynésie 2									X	X			7	3	TOUTES	A la recherche de l'aire perdue

Olympiades 2012	algorithmique	arithmétique	numération	dénombrement	logique	inégalités	suites	équations, fonctions	géométrie plane	géométrie espace	probablités	statistique, pourcentages	nombre de questions	longueur de la solution	sections	titre
Reims 1								X	X				5	2	TOUTES	Réflexions, réfraction et lois de Descartes
Reims 2								X	X				4	1	S	Construction par origami d'une racine
Reims 3							X						3	2	Autres	Paul attend Virginie qui ne vient pas
Rennes 1	X	X					X						1	2	TOUTES	Martin et le défi de calculator
Rennes 2								X	X				7	4	S,STI	Les fêtes de Kerondec
Rennes 3					X								4	4	Autres	Les amies
Réunion 2									X				3	4	S	Moyennes
Réunion 3	X	X					X						4	2	Autres	Listes
Rouen -AEFE Afrique 1	X							X			X		5	2	TOUTES	La machine à algorithmes
Rouen -AEFE Afrique 2									X				6	3	S, STI	Le jardin de madame Olympe
Rouen -AEFE Afrique 3									X				3	1	Autres	Un instrument de calcul
Strasbourg 1				X	X								2	1	S	Un professeur d'EPS
Strasbourg 2			X	X									2	1	S	Un dé tétraédrique
Strasbourg 3			X										1	1	Autres	Le kougelhopf
Strasbourg 4				X									2	1	Autres	Nombres à quatre chiffres
Toulouse 1				X				X			X		7	5	TOUTES	Le concours d'Olympie
Toulouse 2									X				10	4	S	Largeur constante
Toulouse 3					X								10	4	Autres	Peintures et gravures
Versailles 1						X							2	1	TOUTES	Inauguration
Versailles 2				X									9	2	S	Mille et une lampes
Versailles 3				X									9	2	Autres	Tableaux triangulaires
TOTAL	20	29	6	21	7	8	16	20	31	37	4	12				

SUJET NATIONAL

Premier exercice

Toutes séries

Nombres digisibles

Énoncé

On dit qu'un nombre entier est *digisible* lorsque les trois conditions suivantes sont vérifiées :

- aucun de ses chiffres n'est nul ;
- il s'écrit avec des chiffres tous différents ;
- il est divisible par chacun d'eux.

Par exemple,

- 24 est *digisible* car il est divisible par 2 et par 4.
- 324 est *digisible* car il est divisible par 3, par 2 et par 4.
- 32 n'est pas *digisible* car il n'est pas divisible par 3.

On rappelle qu'un nombre entier est divisible par 3 si et seulement si la somme de ses chiffres est divisible par 3.

1. Proposer un autre nombre *digisible* à deux chiffres.
2. Proposer un nombre *digisible* à quatre chiffres.
3. Soit n un entier *digisible* s'écrivant avec un 5.
   a. Démontrer que 5 est le chiffre de ses unités.
   b. Démontrer que tous les chiffres de n sont impairs.
   c. Démontrer que n s'écrit avec au plus quatre chiffres.
   d. Déterminer le plus grand entier *digisible* s'écrivant avec un 5.
4. Soit n un entier *digisible* quelconque.
   a. Démontrer que n s'écrit avec au plus sept chiffres.
   b. Si n s'écrit avec sept chiffres, dont un 9, déterminer les chiffres de n.
   c. Déterminer le plus grand entier *digisible*.

Éléments de solution

1. Essayer différents chiffres des dizaines, chiffres des unités : 12, 15, 24 ou encore 36...
2. L'idée est d'utiliser le 1 comme chiffre des milliers. 1000 étant divisible par 2, 4, 8 ...on cherche à partir des trois chiffres 2, 4, 8 ; 1248 est divisible par 8 donc par 4 ainsi que par 2 et 1. Il convient.

3. a) Le nombre est divisible par 5, son chiffre des unités est 0 ou 5 ; seul 5 est possible car aucun des chiffres ne doit être nul. 5 est le chiffre des unités.

   b) Avec 5 comme chiffre des unités, le nombre est impair et n'a donc que des diviseurs impairs ; tels sont les chiffres de son écriture décimale. Tous les chiffres de n sont impairs.

   c) Les cinq chiffres impairs peuvent-ils figurer dans l'écriture du nombre ? Si oui, celui-ci s'écrit $\overline{xyzt5}$, x, y, z, t étant quatre chiffres impairs. Cela fait vingt-quatre nombres éventuels ; la somme des chiffres $1+3+5+7+9$ valant 25, aucun n'est divisible par 3. n s'écrit avec au plus quatre chiffres.

   d) Le nombre s'écrit $\overline{xyz5}$, x, y, z étant des chiffres impairs tous différents. On cherche le plus grand possible.
   Essayons $x = 9$. Le plus grand nombre qui puisse être écrit, 9735 ne convient pas (non divisible par 9) ; puis 9715 non plus (non divisible par 9) ; 9375 pas plus (non divisible par 9) ; 9315 est *digisible.* 9315 est le plus grand nombre *digisible* s'écrivant avec un 5.

4. La somme des neuf chiffres $1 + 2 + \cdots + 9$ vaut 45.

   a) S'il y a le 5, l'écriture du nombre *digisible* ne comporte pas plus de quatre chiffres, d'après 3.c). S'il n'y a pas le 5, avec huit chiffres, la somme des chiffres vaut 40 ; il est impossible que le nombre soit divisible par 3. Un entier *digisible* n s'écrit avec au plus sept chiffres.

   b) Si le nombre s'écrit avec sept chiffres, dont un 9, il n'y a donc pas le 5. Les huit chiffres éventuels ont une somme valant $45 - 5 = 40$. Quel chiffre ôter pour que cette somme soit un multiple de 9 ? Il s'agit du chiffre 4. Un nombre *digisible* s'écrivant avec sept chiffres, dont le 9, comporte exclusivement les chiffres 1, 2, 3, 6, 7, 8, 9.

   c) Pour la recherche du plus grand entier *digisible*, on tente avec le 9 comme chiffre des centaines de mille. . .Le chiffre des unités ne peut être que 2, 6 ou 8 puisqu'il doit être pair. S'il s'écrit $\overline{9876xy2}$, il n'y a que deux possibilités : 9876312 non divisible par 7 et 9876132 non divisible par 8.
   S'il s'écrit $\overline{9867xy2}$, il n'y a que deux possibilités : 9867312 et 9867132. 9867312 est divisible par chacun de ses sept chiffres.
   9867312 est le plus grand entier *digisible.*

Retour au sommaire

SUJET NATIONAL

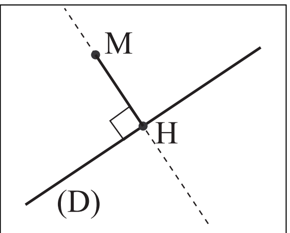
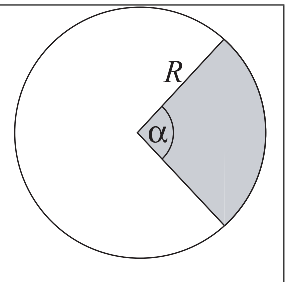
Deuxième exercice

Toutes séries

Plus proche, plus loin

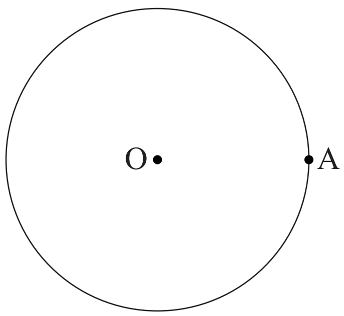
Énoncé

Rappels

On appelle ***distance entre un point M et une droite (D)*** la distance MH, où H est le point d'intersection de (D) avec la droite perpendiculaire à (D) passant par M.	
Dans la figure ci-contre, si le rayon du disque est R, et si l'angle du secteur angulaire grisé mesure α (en degrés), alors l'aire de la portion de disque grisée vaut $\dfrac{\pi\alpha R^2}{360}$. Dans la partie II de l'exercice, on considèrera la distance d'un point M à un segment [BC] comme étant la distance du point M à la droite (BC).	

Partie 1

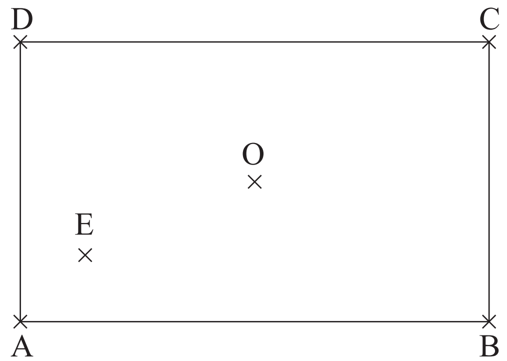
Soit C un cercle de centre O, A un point de ce cercle et D le disque délimité par ce cercle.



1. Reproduire la figure, et représenter l'ensemble des points du disque équidistants de O et de A.
2. Hachurer l'ensemble des points du disque plus proches de O que de A.
3. Soit M un point déterminé aléatoirement de manière équiprobable sur la surface du disque D.
   Quelle est la probabilité que M soit plus proche de O que de A ?

Partie 2

Soit ABCD un rectangle de longueur $AB = 20$ cm et de largeur $BC = 12$ cm, de centre O.
Soit E un point situé à l'intérieur du rectangle, proche de A, à 2 cm de chaque bord (comme sur la figure ci-après, qui n'est toutefois pas à l'échelle).
Soit M un point déterminé aléatoirement de manière équiprobable à l'intérieur du rectangle ABCD.

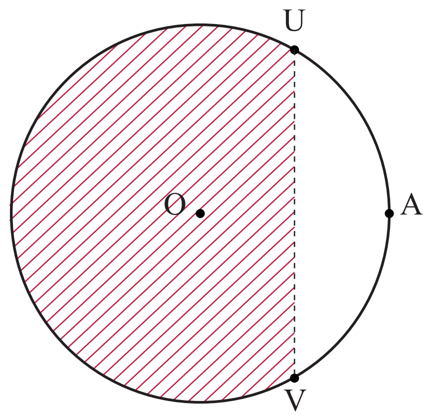


1. Quelle est la probabilité que M soit plus proche du côté [BC] que du côté [AD] ?
2. a. Reproduire le rectangle, et représenter l'ensemble des points intérieurs au rectangle et équidistants des côtés [AB] et [BC].
   b. Hachurer l'ensemble des points intérieurs au rectangle et plus proches du côté [BC] que du côté [AB].
   c. Quelle est la probabilité que M soit plus proche du côté [BC] que du côté [AB] ?
3. Quelle est la probabilité que M soit plus proche du côté [AB] que des trois autres côtés [BC], [CD] et [DA] ?
4. Quelle est la probabilité que M soit plus proche de O que de E ?
5. Quelle est la probabilité que M soit plus proche de O que des quatre sommets A, B, C et D ?

Éléments de solution

Partie 1

1) et 2)
On représente le segment [UV] intersection avec le disque de la médiatrice du segment [OA].
On hachure : noter que les points du segment [UV] ne sont pas dans l'ensemble hachuré.



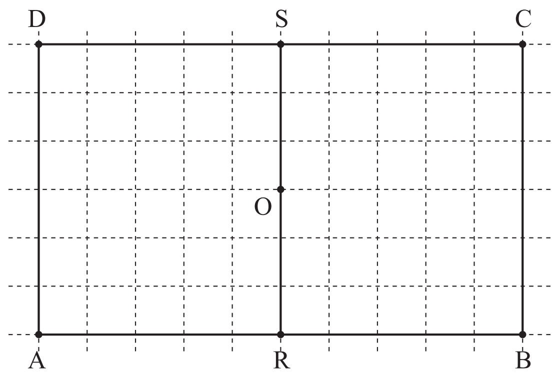
3)
Quel est le rapport de l'aire hachurée à celle du disque ?

L'aire du disque (de rayon R) : πR^2 (l'aire d'un secteur d'angle de mesure 360^o).
Le secteur angulaire UOV a pour aire le tiers de la précédente.

L'aire du triangle OUV est $\dfrac{1}{2}OU \times OV \times \sin(120^o) = \dfrac{1}{4}\sqrt{3}R^2$. L'aire de la portion hachurée est la somme des deux tiers de l'aire du disque et de l'aire du triangle OUV, soit $\frac{2}{3}\pi R^2 + \frac{1}{4}\sqrt{3}R^2$.

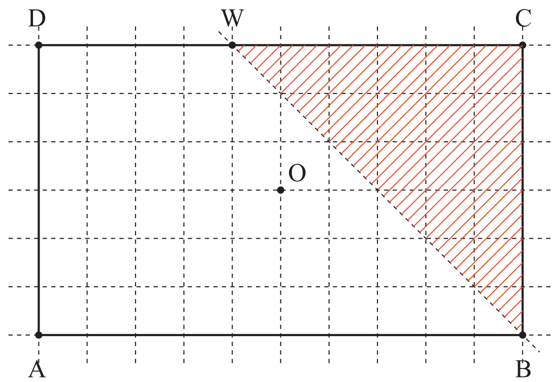
La probabilité que M soit plus proche de O que de A est : $\boxed{\frac{2}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4\pi} = 80,5\%}$

Partie 2

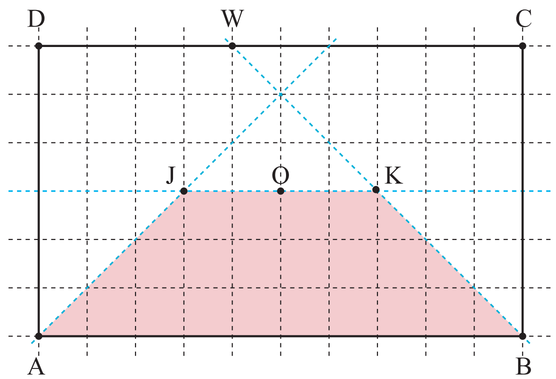


La médiatrice du segment [AB] coupe le segment [AB] en R et le segment [CD] en S. Le segment [RS] représente l'ensemble des points du rectangle équidistants du côté [BC] et du côté [AD].
Le rectangle RBCS est l'ensemble des points plus proches du côté [BC] que du côté [AD]. Son aire est la moitié de celle du rectangle.

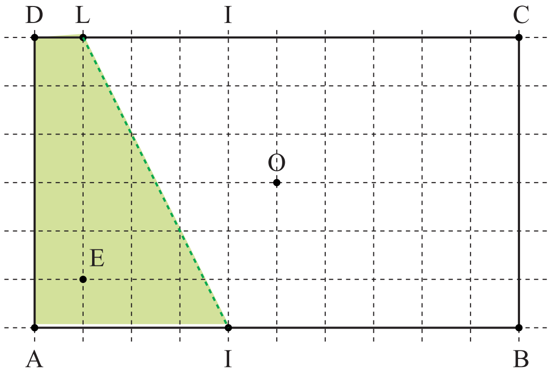
La probabilité cherchée est $\boxed{\frac{1}{2} = 50\%}$



La bissectrice de l'angle droit en B coupe le segment [CD] en W. Le segment [BW] représente l'ensemble des points du rectangle équidistants du côté [BC] et du côté [AB].
Le triangle BCW rectangle isocèle en C (excepté le segment [BW]) est l'ensemble des points plus proches du côté [BC] que du côté [AB]. Son aire : $\frac{12 \times 12}{2} = 72$ cm^2.
Le rapport de celle-ci à celle du rectangle est la probabilité cherchée : $\boxed{\frac{72}{240} = \frac{3}{10} = 30\%}$



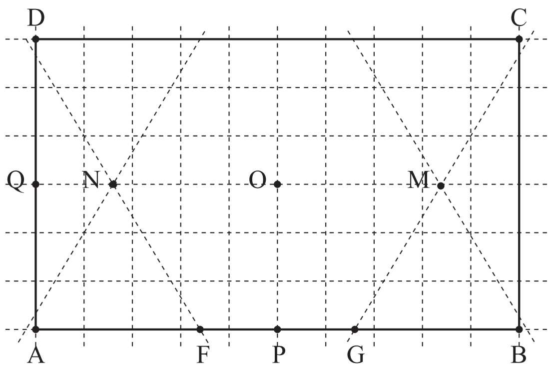
Les bissectrices de l'angle droit en B, de l'angle droit en A, la médiatrice du segment [BC] déterminent le quadrilatère ABKJ qui est l'ensemble des points plus proches du côté [AB] que des trois autres côtés du rectangle (exception faite des côtés [BK], [KJ], [JA]).
Son aire : $\frac{AB \times JK}{2} \times \frac{BC}{2} = \frac{20 + 20 - 2 \times 6}{2} \times 6 = 84$ cm^2.
La probabilité cherchée :
$\boxed{\frac{84}{240} = \frac{7}{10} = 35\%}$



La médiatrice du segment [OE] détermine les points I et L respectivement sur les côtés [AB] et [CD].
Il semble que la longueur AI vaille 8 ; un triangle rectangle (6 sur 2) extrait du quadrillage d'hypoténuse EI, ainsi que de même avec OI, confirme que le point de [AB] à la distance 8 de A est équidistant de O et de E.
De même $DL = 2$.

L'aire du trapèze AILD (ensemble des points plus proches de E que de O (exception faite du segment [IL]) vaut : $AD \times \dfrac{DL \times AI}{2} = 60 \text{ cm}^2$

La probabilité cherchée : $\boxed{\dfrac{240 - 60}{240} = \dfrac{3}{4} = 75\ \%}$



On considère les médiatrices des segments [OA], [OB], [OC] et [OD] qui déterminent un hexagone ensemble des points plus proches de O que des sommets A, B, C, D.
La médiatrice du segment [AO] détermine le point F sur le segment [AB].
Les médiatrices des segments [AO] et [OD] déterminent le point N situé aussi sur l'axe médian du rectangle (par symétrie du rectangle appliquée aux segments générant les médiatrices).
Le quadrilatère AFON dont les diagonales ont pour milieu le pied de la médiatrice est un parallélogramme (c'est un losange car (OA) et (NF) sont perpendiculaires).
Ce losange a même centre de symétrie que le rectangle APOQ, (P et Q milieux respectifs de [AB] et [AD]).
Dans cette symétrie centrale, PFNO et NQAF se correspondent.L'hexagone, portion du rectangle ensemble des points plus proches de O que des sommets A, B, C, D, a pour aire la moitié de celle du rectangle ABCD, puisqu'il est constitué de quatre trapèzes de mêmes dimensions que PFNO.

La probabilité cherchée est $\boxed{\dfrac{1}{2} = 50\%}$.

Ce résultat est indépendant de la longueur des côtés du rectangle.

Retour au sommaire

AEFE - AMÉRIQUE

Premier exercice

Toutes séries

Partages équitables

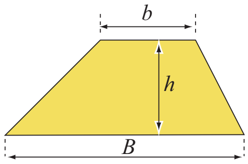
Énoncé

Les différentes parties sont indépendantes

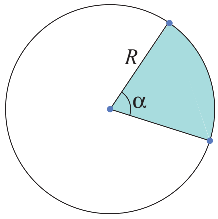
Partie I

Rappels

- Aire d'un trapèze : $A = \dfrac{(B+b)\times h}{2}$

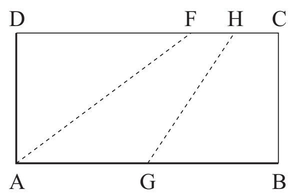


- Dans la figure ci-contre, si le rayon du disque est R et si l'angle du secteur angulaire coloré mesure α (en degrés), alors l'aire de la portion de disque colorée vaut $\dfrac{\pi\alpha R^2}{360}$.

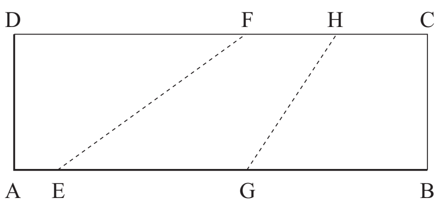


Une pizza rectangulaire ABCD comporte de la croûte sur deux côtés consécutifs, [DA] et [AB]. **On cherche comment partager la pizza en trois morceaux équitables** : chaque part doit avoir la même longueur de croûte et la même aire.
Dans chaque situation, on fixe la longueur du petit côté AD = 1.

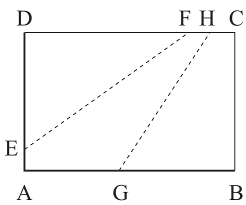
1. Dans le cas particulier ci-dessous, on suppose que le partage réalisé est équitable.
   Quelle est la longueur AB ?
   Déterminer les longueurs DF, FH et HC.



2. On généralise la situation en posant $AB = L$ (et en supposant toujours que $AD = 1$).
   Déterminer, pour chaque situation ci-dessous, les longueurs utiles permettant de découper équitablement la pizza.



situation 1 : $L > 2$

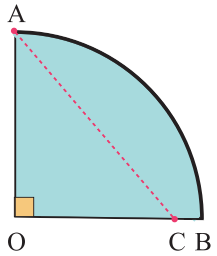


situation 2 : $L < 2$

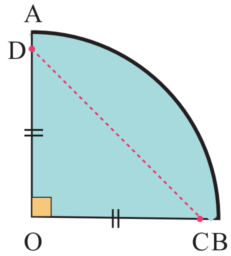
Partie II

On souhaite partager une portion de disque de centre O en deux parties ayant même aire, et telles que l'arc de cercle AB soit inclus dans une seule de ces parties.

1. On suppose que $OA = OB = 1$, et que l'angle $\widehat{AOB}$ est droit.
   Déterminer OC pour que les deux parts aient la même aire dans les deux cas suivants :



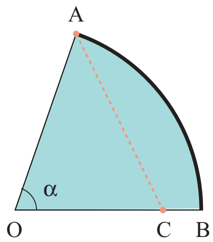
Cas 1 : *OA* est un rayon

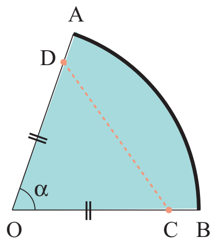


Cas 2 : *OD* = *OC*

2. On souhaite généraliser ce problème dans le cas où l'angle $\widehat{AOB}$ est aigu et mesure α degrés.
   Déterminer OC en fonction de α dans chacun des cas suivants.

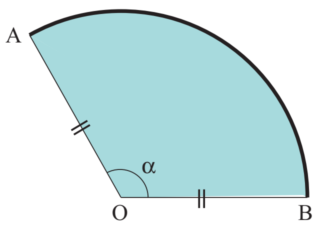
   Remarque : pour le cas 2, on pourra utiliser la formule : $2\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sin\alpha$





Cas 2 : *OC* = *OD*

3. Les formules obtenues au 2. permettent également d'obtenir la solution dans le cas d'un angle obtus « pas trop grand ».
   Justifier que si la mesure de l'angle $\widehat{AOB}$ est supérieure à une valeur particulière, un découpage équitable est impossible.
   Décrire la situation limite à l'aide d'une équation et déterminer une valeur approchée de α (à l'aide d'une calculatrice).



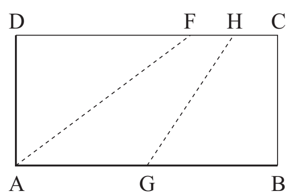
Éléments de solution

Partie I

1. Le partage étant équitable, chaque part a la même longueur de croûte : donc $DA = AG = GB$.

   D'où $AB = 2$.

   L'aire du rectangle ABCD est donc 2, et chaque part a donc une aire de $\frac{2}{3}$.



   - Triangle ADF : $\frac{DA \times DF}{2} = \frac{2}{3}$; Donc $DF = \frac{4}{3}$

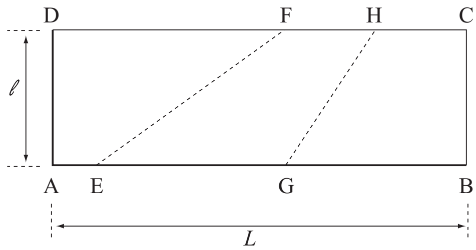
- Trapèze HCBG : $\dfrac{(HC+BG)\times BC}{2}=\dfrac{2}{3}$

  Donc $HC=\dfrac{1}{3}$.

- $FH=2-DF-HC$. Donc $FH=\dfrac{1}{3}$.

On pourrait prouver préalablement que $FH = HC$ en utilisant les aires des trapèzes FHGA et HCBG. C'est encore vrai dans la solution 1 de la question 2 ci-dessous.

2. **Situation 1**
   Il suffit de connaître quatre longueurs, par exemple : DF, HC, AE et BG.



- Égalité des croûtes :

  $BG=GE=AE+1=\dfrac{L+1}{3}$.

- Égalité des aires :

  Trapèze AEDF : $\dfrac{DE+AE}{2}=\dfrac{L}{3}$.

  Trapèze HCBG : $\dfrac{HC+BG}{2}=\dfrac{L}{3}$.

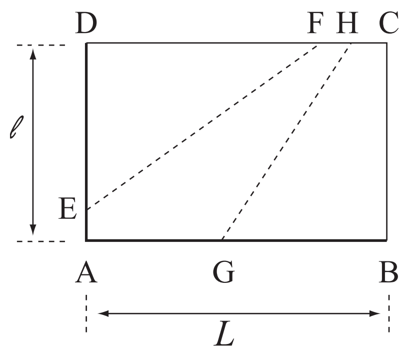
D'où (...)

$AE=\dfrac{L-2}{3}; BG=\dfrac{L+1}{3}$;

$DF=\dfrac{L+2}{3}; HC=\dfrac{L-1}{3}$.

On peut calculer aussi $EG=\dfrac{L+1}{3}$ et $FH=\dfrac{L-1}{3}$.

Situation 2



Il suffit de calculer DE, BG, DF et HC.

- Égalité des croûtes : $BG=\dfrac{L+1}{3}$
- Égalité des aires :

  Triangle DEF : $\dfrac{DE\times DF}{2}=\dfrac{L}{3}$.

  Trapèze HCBG : $\dfrac{HC+BG}{2}=\dfrac{L}{3}$.

D'où (...)

$DE=\dfrac{L+1}{3}; BG=\dfrac{L+1}{3}$; $DF=\dfrac{2L}{L+1}; HC=\dfrac{L-1}{3}$.

On trouve aussi $AG=\dfrac{2L-1}{3}$ et $FH=\dfrac{2L^2-3L+1}{3(L+1)}$.

Partie II

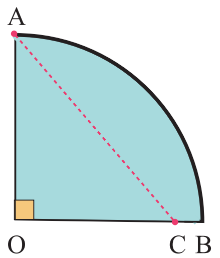
1. L'aire du quart de disque est $\frac{\pi}{4}$. Donc chaque part doit avoir pour aire : $\frac{\pi}{8}$.

   Cas 1 :
   L'aire du triangle OAC est $\dfrac{OC \times OA}{2} = \dfrac{\pi}{8}$

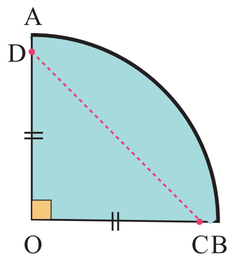
   d'où $OC = \dfrac{\pi}{4}$.

   Cas 2 :
   L'aire du triangle OCD est $\dfrac{OC^2}{2} = \dfrac{\pi}{8}$

   d'où $OC = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.



Cas 1 : *OA* est un rayon



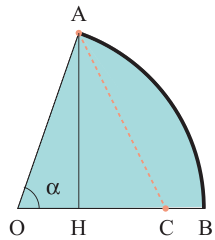
Cas 2 : *OD* = *OC*

2. L'aire de la portion de disque est $\dfrac{\alpha\pi}{720}$

   Cas 1 :

   L'aire du triangle AOC est $\dfrac{OC \times AH}{2} = \dfrac{OC \times \sin\alpha}{2} = \dfrac{\alpha\pi}{720}$.

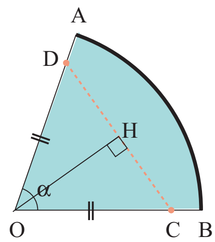
   Donc $\boxed{OC = \dfrac{\pi \times \alpha}{360 \sin(\alpha)}}$



   Cas 2 :

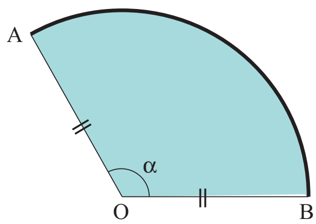
   L'aire du triangle OCD est : $CH \times OH = \sin(0,5\alpha) \times OC \times \cos(0,5\alpha) \times OC$

   Donc $\boxed{OC^2 = \dfrac{\pi \times \alpha}{360 \times \sin(\alpha)}}$



3.

   La formule obtenue au b) permet de calculer OC.
   La condition à imposer est $0 \leqslant OC \leqslant 1$.
   On cherche donc la valeur de α permettant d'obtenir $OC = 1$.
   On obtient une valeur approchée à l'aide de la calculatrice.
   $\alpha \approx 108,6°$.



Retour au sommaire

AEFE - AMÉRIQUE

Deuxième exercice

Toutes séries

Nombres éligibles

Énoncé

On dit qu'un entier naturel non nul n est éligible lorsque le carré de côté n peut être partagé en n carrés à côtés entiers.

Les figures ci-dessous montrent que les entiers $n = 6; n = 9$ et $n = 11$ sont éligibles (*l'entier écrit à l'intérieur de chaque carré indique la longueur du côté*).

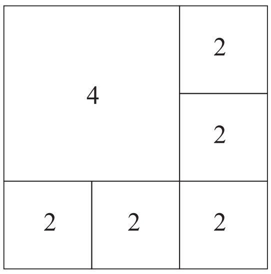


Figure a
Le carré de côté 6 est partagé en 6 carrés

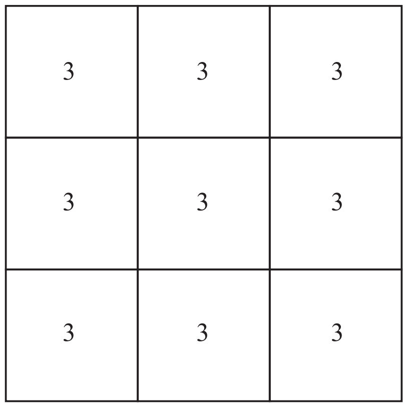


Figure b
Le carré de côté 9 est partagé en 59 carrés

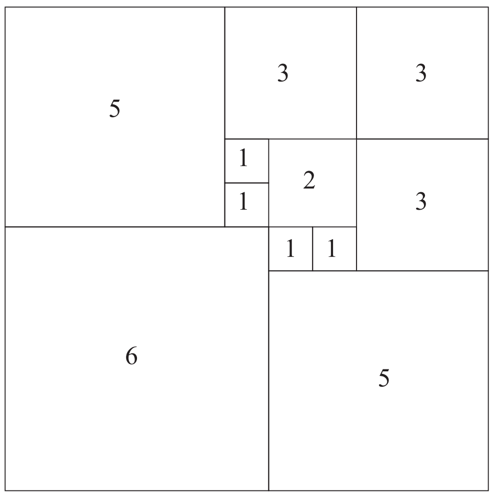


Figure c
Le carré de côté 11 est partagé en 11 carrés

1. Expliquer pourquoi 3 n'est pas *éligible*.
2. (a) Justifier par une figure que 4 est *éligible*.
   (b) Démontrer que tout nombre de la forme p^2 où p est un entier non nul est *éligible*.
3. (a) En s'inspirant de la figure a ci-dessus, justifier par une figure que 8 est *éligible*.

(b) Montrer que, pour tout $p \geqslant 1$, $(2p)^2 = (2p-2)^2 + 4(2p-1)$.

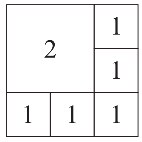
(c) En déduire que tout nombre pair supérieur ou égal à 4 est *éligible*.

4. (a) Montrer que, pour tout $p \geqslant 1, ((3p)^2 = (3p-3)^2 + 9(2p-1)$.

(b) Trouver une construction prouvant que 13 est *éligible*.

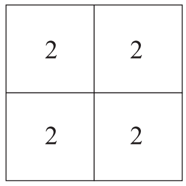
Éléments de solution

1. Pour $n = 3$, les deux seuls partages du carré de côté sont (à une symétrie près) le partage en 9 carrés de côté 1 et celui représenté ci-contre en 6 carrés :



$n = 3$ n'est donc pas éligible.

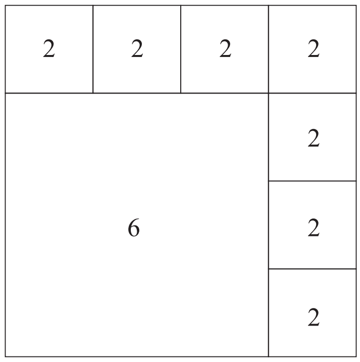
2. a) 4 est éligible.



b) Si $n = k^2$, avec k entier non nul, on peut réaliser un pavage du carré de côté n par n carrés de côté k (en quadrillant le carré par un partage de chaque côté en k segments égaux).

Donc $n = k^2$ est éligible.

3. a) 8 est éligible.
On fait apparaître un carré de côté 6 bordé de 7 carrés de côté 2.



b) $(2p-2)^2 + 4 \times (2p-1) = (2p)^2$.

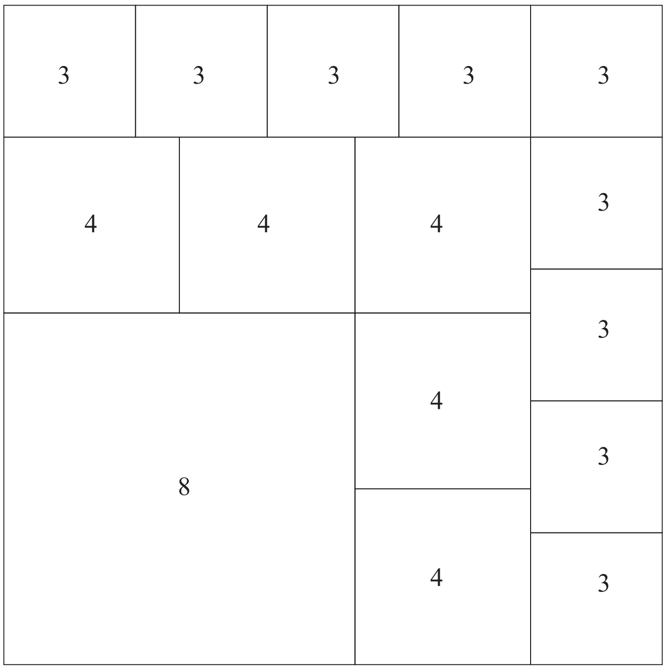
c) D'après l'égalité précédente, un carré de côté $2p$ peut se décomposer en un carré de côté $2p-2$) et $(2p-1)$ carrés de côté 2.

Il suffit de border le carré de côté $2p - 2$ sur deux côtés consécutifs de carrés de côté 2, comme il a été fait précédemment pour les carrés de côtés 6 et 8.
On vérifie qu'ainsi

- On obtient bien un carré,
- ce carré a pour côté $2p$,
- la figure contient $2p$ carrés.

4. a) $(3p-3)^2 + (2p-1) \times 9 = (3p)^2$.

b) En utilisant l'égalité précédente pour $p = 5$, on part d'un carré de côté 12 que l'on borde de 9 carrés de côtés 3. Il reste à partager le carré de côté 12 en 6 carrés. (voir la figure page suivante).



Retour au sommaire

AIX-MARSEILLE

Premier exercice

Série S

Un carreleur

Énoncé

Un carreleur dispose d'un stock (suffisant) de pavés bleus et ronds, de 10 cm de rayon, pour paver une grande salle. Il hésite entre les deux types de pavages suivants :

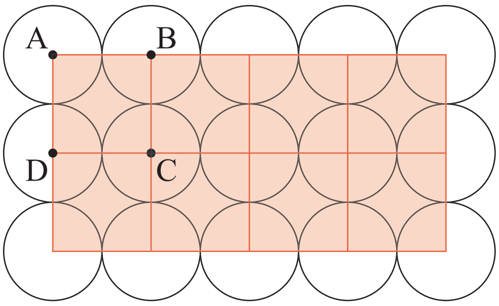


Figure 1 : pavage P_1

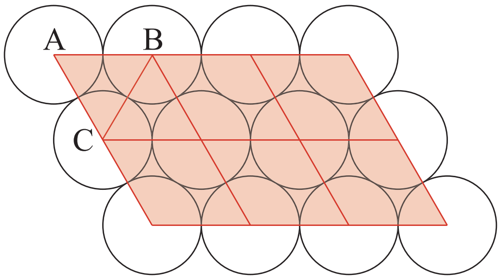


Figure 2 : pavage P_2

Sur chaque pavage, quand on relie les centres des disques adjacents, on obtient un polygone (appelé **cellule**) qui se reproduit « à l'infini ». Dans le premier pavage cette cellule est un carré et dans le second cette cellule est un triangle équilatéral.

On appelle **densité du pavage** le rapport entre la surface occupée par les portions de disques contenues dans une cellule et la surface de la cellule elle-même. On définit ainsi un indicateur de compacité du pavage : plus la densité du pavage est grande, plus le pavage est compact…

Partie I

1. Montrer que la densité du pavage P_1 arrondie à 10^{-3} est $D = \dfrac{\pi}{4} = 0,785$.
2. Calculer la densité du pavage P_2 . Quel est le « meilleur »pavage ?
3. Le carreleur choisit finalement le deuxième pavage mais trouve que la surface non recouverte par les pavés est encore trop importante. Il décide de créer des nouveaux pavés ronds, cette fois-ci de couleur marron, qui rentreront exactement dans les interstices. On admet qu'on obtient la figure 3.

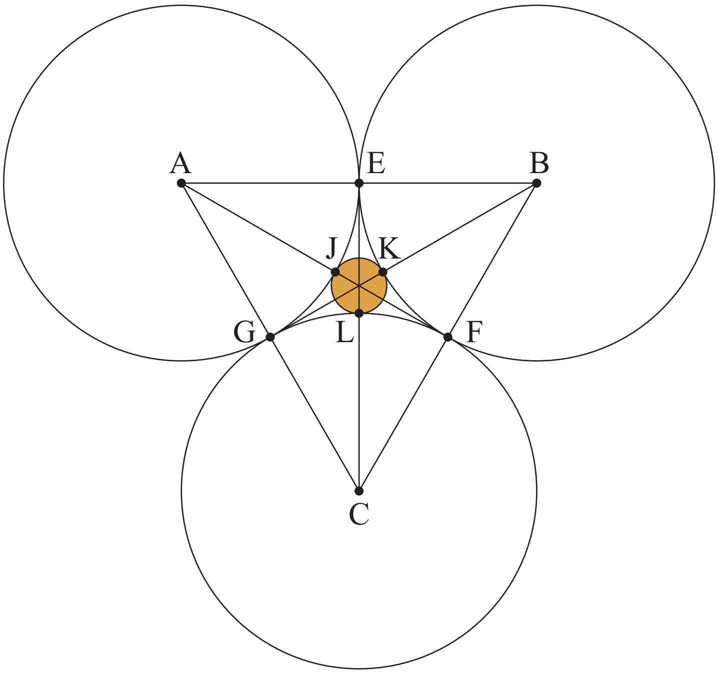


Figure 3 : des pavés marrons dans les interstices

a) En s'aidant de la figure 3, déterminer le rayon de ces nouveaux pavés.

b) Quelle est la densité de ce pavage ?

c) Le carreleur aurait-il obtenu une meilleure densité à partir de pavés bleus dun rayon différent de 10 cm ? Justifier.

Partie II

Le carreleur doit maintenant créer un motif ayant la forme d'un triangle équilatéral. Pour cela, il s'inspire du deuxième pavage : voir figure 4.

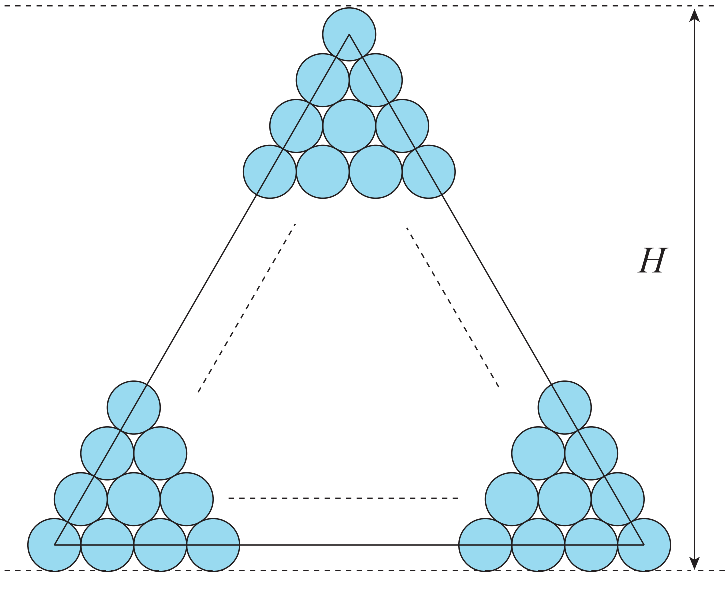
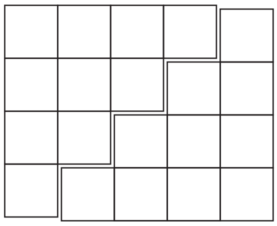


Figure 4 : motif ayant la forme d'un triangle équilatéral

1. Donner une formule donnant la valeur de $1 + 2 + \cdots + n$ en fonction de n.
   On pourra s'aider, si nécessaire, du schéma suivant :

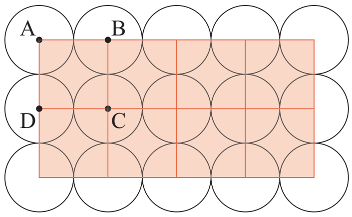


2. Le carreleur dispose de 50 paquets de 20 pavés bleus. Il souhaite remplir le motif triangulaire le plus grand possible. Combien de carreaux restera-t-il ?
3. Pour le carreleur, les contraintes porteront en général sur la hauteur du motif. Par exemple, pour une hauteur maximale de 3,50 m, quel est le nombre de pavés nécessaires pour créer le plus grand motif possible ?

Éléments de solution

Partie I

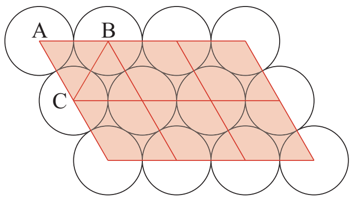
1. Raisonnons dans le carré ABCD de la figure 1 (les aires sont exprimées en cm^2) : ce carré possède un côté de 20 cm et son intérieur contient 4 quarts de disque de rayon 10 cm.



On obtient :

$$D_1 = \frac{4 \times \left(\dfrac{\pi \times 10^2}{4}\right)}{20^2} = \frac{\pi \times 100}{400} = \frac{\pi}{4} = 0,785.$$

2. Raisonnons dans le triangle équilatéral ABC de la figure 2



Ce triangle a 20 cm de côté et son intérieur contient trois portions de disque correspondant chacune à un secteur angulaire d'angle $\dfrac{\pi}{3}$,

ce qui donne $A_S = 3 \times \dfrac{\pi}{6} \times 10^2 = 50\pi$.

D'autre part, l'aire de ce triangle est $A_T = \dfrac{b \times h}{2} = \dfrac{20 \times \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} \times 20\right)}{2} = 100\sqrt{3}$.

On obtient donc : $D_2 = \dfrac{50\pi}{100\sqrt{3}} \approx 0,907$.

On constate que $D_2 > D_1$, donc le « meilleur » pavage est le second.

3. a) Le point O, intersection des médianes du triangle équilatéral ABC, est le centre de gravité de ce triangle. Donc $AO = \dfrac{2}{3}AF = \dfrac{2}{3} \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} \times 20 = \dfrac{20\sqrt{3}}{3}$.

   Par suite $OJ = AO - AJ = \dfrac{20\sqrt{3}}{3} - 10$.

   b) En se servant des résultats de la question **2.**, on obtient :

$$D_3 = \frac{50\pi + \pi \times OJ^2}{100\sqrt{3}} \approx 0,950.$$

   c) Les rapports d'aire, et donc les densités, ne sont pas modifiés par agrandissement-réduction.
   Le carreleur n'aurait pas obtenu une meilleure densité avec des pavés bleus de rayons différent de 10 cm.

Partie II

1. $1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.
2. Il s'agit de déterminer la valeur maximale entière de n vérifiant $\dfrac{n(n+1)}{2} \leqslant 1000$. La valeur cherchée est $n = 44$.

   Le nombre de pavés non utilisés est alors $1000 - \dfrac{44 \times 45}{2} = 10$.
3. L'unité choisie est le cm. Exprimons la hauteur H du motif en fonction du nombre n de pavés disposés sur le côté du triangle. Ce triangle équilatéral a un côté égal à $20(n-1)$. Sa hauteur « intérieure » est donc $\dfrac{\sqrt{3}}{2} \times 20(n-1) = 10\sqrt{3}(n-1)$ et la hauteur totale du motif est $H = 10\sqrt{3}(n-1) + 20$.
   Il s'agit donc de déterminer la valeur maximale entière de n telle que :

$$10\sqrt{3}(n-1) + 20 \leqslant 350 \Leftrightarrow n \leqslant \frac{33}{\sqrt{3}} + 1 \approx 20,05.$$

   Donc $n = 20$. Le nombre total de pavés est égal à $\dfrac{20 \times 20}{2} = 210$.

   Pour réaliser le plus grand motif possible n'excédant pas une hauteur de 3,50 m le carreleur aura besoin de 210 pavés.

Retour au sommaire

AIX-MARSEILLE

Deuxième exercice

Série S

Marche aléatoire

Énoncé

On considère deux points distincts A et B et un nombre réel p quelconque $0 < p < 1$. On s'intéresse aux marches aléatoires « infinies » sur l'ensemble A ; B respectant les conditions suivantes :

- On part du sommet A ;
- À chaque étape, on reste au point où l'on est avec la probabilité $(1-p)$ et on change de point avec la probabilité p.

On note S_k le sommet où l'on se trouve à la k-ième étape. On a donc $S_0 = \mathrm{A}$.

1. Écrire en langage naturel un algorithme qui génère une étape de cette marche aléatoire.
2. Montrer que la probabilité de se trouver au point B à la deuxième étape (c'est-à-dire la probabilité que $S_2 = \mathrm{B}$) est $2p(1-p)$.

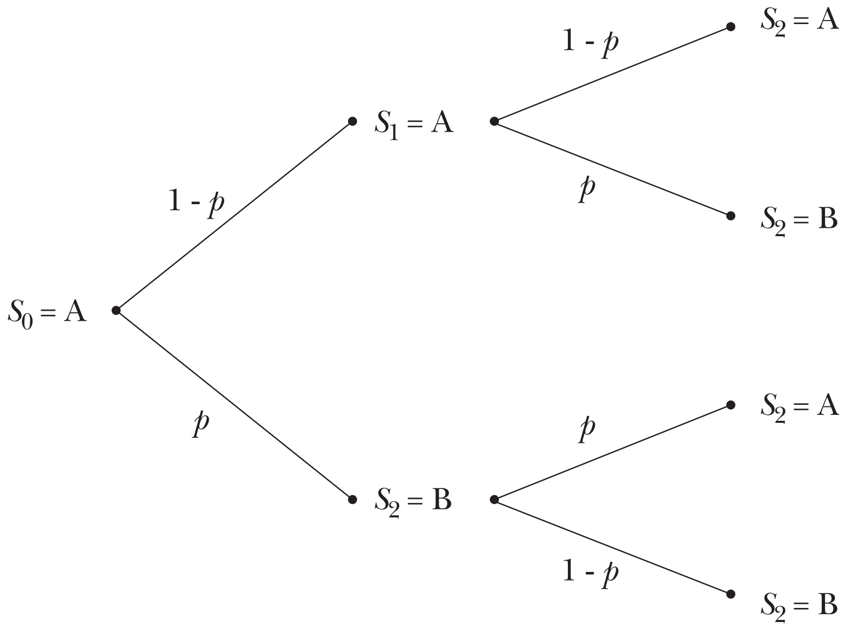
On admet que la probabilité d'être en B après la k-ième étape est $\dfrac{1-(1-2p)^k}{2}$.

3. Vérifier que cette formule est cohérente avec le résultat de la question précédente.
4. Déterminer l'ensemble des valeurs de p pour lesquelles on a plus de chance d'être en B qu'en A à la $43^{\text{ème}}$ étape.
5. Que peut-on dire des probabilités d'être en A, ou en B, quand le nombre d'étapes est suffisamment grand ?
6. On prend $p = 0,1$. Déterminer le nombre d'étapes minimal k_0 à effectuer pour que la probabilité d'être en B à partir de cette étape soit comprise entre 0,49 et 0,51.

Éléments de solution

1. On propose la solution suivante :
   - Soit a un nombre réel aléatoire dans l'intervalle $[0;1[$
   - Si $a > p$ alors $S_{k+1} = S_k$
     Sinon
     - Si $S_k = \mathrm{A}$, alors $S_{k+1} = \mathrm{B}$
     - FinSi
     - Si $S_k = \mathrm{B}$, alors $S_{k+1} = \mathrm{A}$
     - FinSi
   - FinSi

2. On fait un arbre pondéré et, par utilisation de l'arbre et du principe multiplicatif, on a :
$$P(S_2 = \text{ B}) = p \times (1-p) + (1-p) \times p = 2p(1-p).$$



3. On observe que l'on a bien
$$\frac{1-(1-2p)^2}{2} = \frac{1-(1-4p+4p^2)}{2} = \frac{4p-4p^2}{2} = 2p(1-p).$$

4. Le fait d'avoir plus de chance d'être en B qu'en A à la 43$^{\text{ème}}$ étape se traduit par :
$$P(S_{43} = \text{ B}) > P(S_{43} = \text{ A}) = 1 - P(S_{43} = \text{ B}).$$

   c'est-à-dire :
$$2.P(S_{43} = \text{ B}) > 1 \Leftrightarrow P(S_{43} = \text{ B}) > \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1-(1-2p)^{43}}{2} > \frac{1}{2} \Leftrightarrow (1-2p)^{43} < 0.$$

   43 étant un nombre impair, la dernière condition équivaut à $1 - 2p < 0$, c'est-à-dire $p < \dfrac{1}{2}$.

   Conclusion : l'ensemble des valeurs de p cherchées est l'intervalle $\left]\dfrac{1}{2};1\right]$.

5. Quand k augmente, la quantité $(1-2p)^k$ se rapproche de 0. On en déduit donc que, si k est très grand, la probabilité d'être en A est très proche de la probabilité d'être en B, ces deux probabilités étant elles-mêmes très proches de $\dfrac{1}{2}$.

6. On doit donc déterminer les valeurs de k telles que :
$$0,49 < \frac{1-(1-0,2)^k}{2} < 0,51 \Leftrightarrow 0,49 < \frac{1-0,8^k}{2} < 0,51 \Leftrightarrow -0.02 < 0,8^k < 0,02.$$

   D'après la calculatrice, le plus petit entier k qui convient est 18.

Retour au sommaire

AIX-MARSEILLE

Troisième exercice

Séries autres que S

Un autre carreleur

Énoncé

Un carreleur dispose d'un stock (suffisant) de pavés ronds de 10 cm de rayon et doit créer des motifs ayant la forme d'un triangle équilatéral :

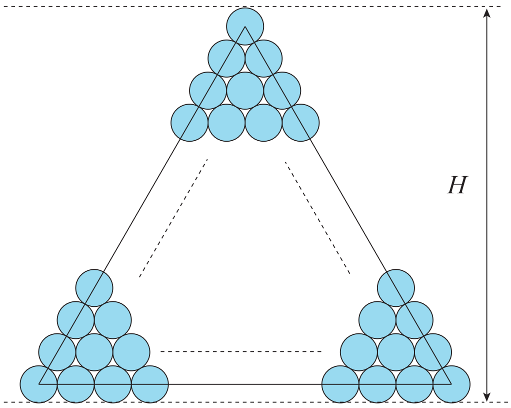


Figure 1 : motif ayant la forme d'un triangle équilatéral

1. Le carreleur a besoin de créer un motif de 15 pavés de côté. Combien de pavés doit-il prévoir au total ?
2. Le carreleur dispose de 50 paquets de 20 pavés gris. Il souhaite remplir le motif triangulaire le plus grand possible. Combien de carreaux restera-t-il ?
3. Un client demande au carreleur de réaliser la figure précédente en utilisant alternativement des lignes de pavés gris et blancs. La première ligne est faite d'un seul pavé gris. La longueur L est égale à 15 mètres.

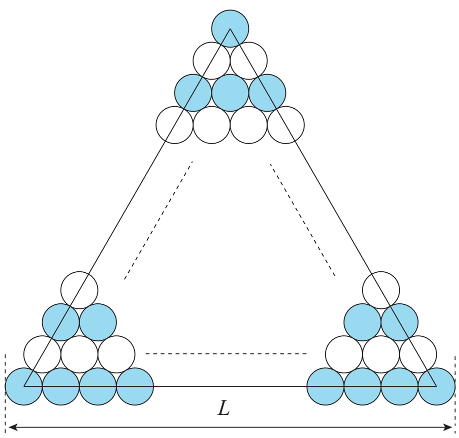


Figure 2 : motif souhaité par le client

Combien de pavés gris sont-ils nécessaires à la réalisation du motif ?

4. Pour le carreleur, les contraintes sur un mur porteront en général sur la hauteur du motif.
   Par exemple, pour une hauteur maximale de 3,50 m, quel est le nombre de pavés nécessaires pour créer le plus grand motif possible ?

$$\boxed{\text{Formulaire : } 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}}$$

Éléments de solution

1. Le carreleur doit prévoir $\dfrac{15 \times 16}{2} = 120$ pavés.
2. Il s'agit de déterminer la valeur maximale entière de n vérifiant $\dfrac{n(n+1)}{2} \leqslant 1\ 000$.
   La valeur cherchée est $n = 44$.
   Le nombre de pavés non utilisés est alors $1000 - \dfrac{44 \times 45}{2} = 10$.
3. La base du motif est composée de $\dfrac{15}{0,2} = 75$ pavés.
   Le nombre de pavés blancs est :
   $$2 + 4 + \cdots + 74 = 2(1 + 2 + \cdots + 37) = 2 \times \frac{37 \times 38}{2} = 1\ 406.$$
   Le nombre de pavés gris est donc : $\dfrac{75 \times 76}{2} - 1406 = 1444$.
   Remarque : le nombre de pavés gris est aussi égal à
   $$\underbrace{1 + 3 + \cdots + 75}_{\text{38 nombres impairs consécutifs}} = 38^2 = 1444.$$
4. L'unité choisie est le cm. Exprimons la hauteur H du motif en fonction du nombre n de pavés disposés sur le côté du triangle. Ce triangle équilatéral a un côté égal à $20(n-1)$. Sa hauteur « intérieure » est donc $\dfrac{\sqrt{3}}{2} \times 20(n-1) = 10\sqrt{3}(n-1)$ et la hauteur totale du motif est $H = 10\sqrt{3}(n-1) + 20$.
   Il s'agit donc de déterminer la valeur maximale entière de n telle que :
   $$10\sqrt{3}(n-1) + 20 \leqslant 350 \Leftrightarrow n \leqslant \frac{33}{\sqrt{3}} + 1 = 20,05.$$
   Donc $n = 20$. Le nombre total de pavés est égal à $\dfrac{20 \times 21}{2} = 210$.
   Pour réaliser le plus grand motif possible n'excédant pas une hauteur de 3,50 m le carreleur aura besoin de 210 pavés.

Retour au sommaire

AIX-MARSEILLE

Quatrième exercice

Séries autres que S

Rep-unit

Énoncé

On appelle Rep-unit un nombre s'écrivant uniquement avec des 1.
Les premiers Rep-unit sont donc : $R_1 = 1$, $R_2 = 11$, $R_3 = 111$, $R_4 = 1111$, ...
Ainsi, $R_p = 10^{p-1} + 10^{p-2} + \cdots + 10^0$.

1. Montrer que $R_3 = 111$ et $R_4 = 1111$ se décomposent chacun en produit de deux nombres entiers strictement supérieurs à 1 que l'on déterminera.
2. Dans cette question, on s'intéresse au nombre R_{12}.
   a) Vérifier que R_2 et R_3 divisent R_{12}.
   b) Montrer que, plus généralement, pour tout diviseur k de 12, R_k divise R_{12}.

Éléments de solution

1. $R_3 = 3 \times 37$ et $R_4 = 11 \times 101$.
2. a) A l'aide de la calculatrice, $R_{12} = R_2 \times 10\ 101\ 010\ 101$ et $R_{12} = R_3 \times 1\ 001\ 001\ 001$.
   b) Les diviseurs de 12 sont 1, 2, 3, 4, 6 et 12. R_{12} est évidemment divisible par R_1 et R_{12}.
   Reste à vérifier pour R_6. D'après la calculatrice, $R_{12} = R_6 \times 1\ 000\ 001$.
   Finalement, pour tout diviseur k de 12, R_k divise R_{12}.
3. a) $R_p = \overbrace{11\ldots1}^{p \text{ chiffres } 1} = \dfrac{\overbrace{99\ldots9}^{p \text{ chiffres } 9}}{9} = \dfrac{\overbrace{100\ldots0}^{p \text{ chiffres } 0} - 1}{9} = \dfrac{10^p - 1}{9}$.
   b) $(x-1)\left(\left(10^k\right)^{q-1} + \left(10^k\right)^{q-2} + \cdots + 10^k + 1\right) = \left(10^k\right)^q - 1 = 10^{k \times q} - 1 = 10^p - 1$.
   c) La formule précédente donne, pour $x = 10^k$ et $n = q$,
   $\left(10^k - 1\right)\left(\left(10^k\right)^{q-1} + \left(10^k\right)^{q-2} + \cdots + 10^k + 1\right) = \left(10^k\right)^q - 1 = 10^{k \times q} = 10^p - 1$.
   De plus, d'après la question 3.a), pour tout entier naturel n, $10^n - 1 = 9 \times R_n$.
   On en déduit : $9 \times R_k\left(\left(10^k\right)^{q-1} + \left(10^k\right)^{q-2} + \cdots + 10^k + 1\right) = 9 \times R_p$, c'est-à-dire $R_p = R_k\left(\left(10^k\right)^{q-1} + \left(10^k\right)^{q-2} + \cdots + 10^k + 1\right)$. R_k divise donc R_p.

Retour au sommaire

AMIENS

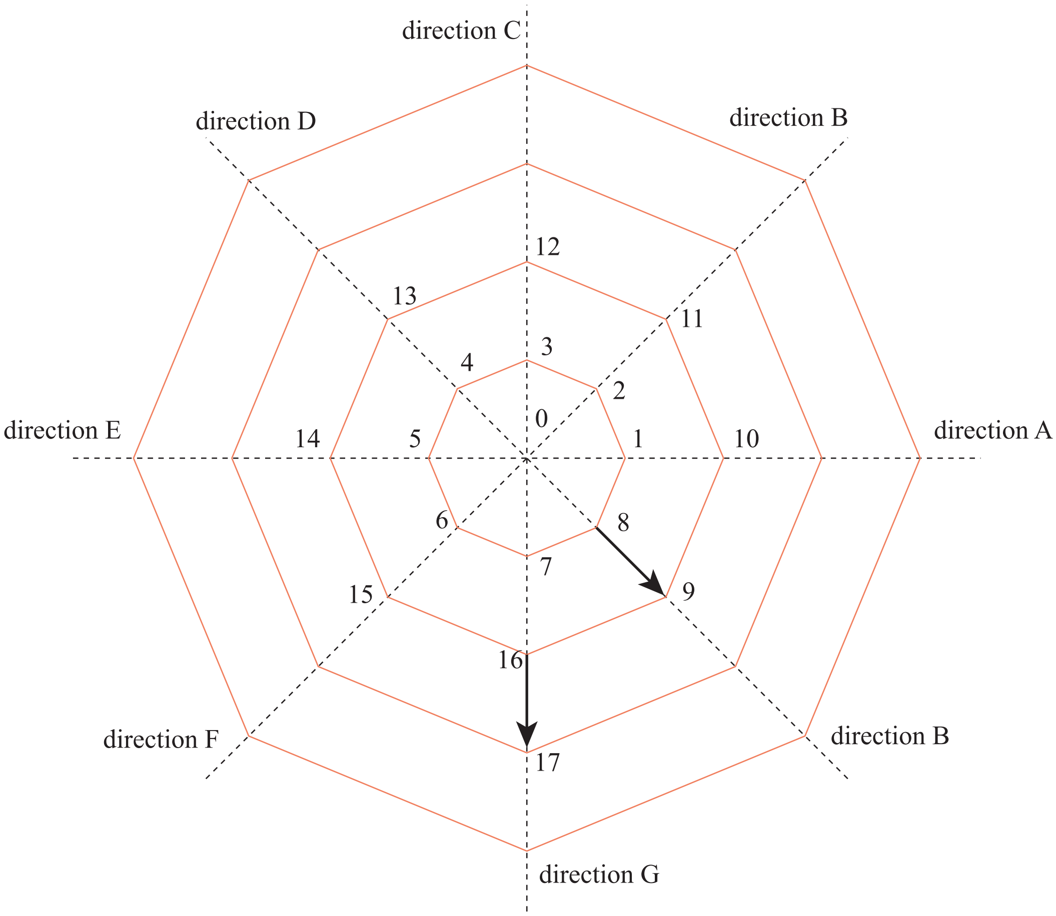
Premier exercice

Série S

Octogones

Énoncé

On considère des octogones réguliers, de même centre O.
Aux sommes de l'octogone central, on note les huit premiers entiers non nuls.
Sur les sommets du deuxième octogone, on inscrit les 8 nombres entiers suivants, avec une rotation de 45 degrés ($\frac{\pi}{4}$ radians) autour du point O.
Et ainsi de suite...
On dit que chaque nombre entier a une direction (A, B, C, D, E, F, G ou H par rapport à l'origine O).
Par exemple, 1 a pour direction A, 2 a pour direction B ...Voici une figure représentant les quatre premiers octogones :



1. Quel sera le premier entier inscrit sur le quatrième octogone ? Préciser sa direction.
2. Déterminer le premier entier inscrit sur le huitième octogone. Préciser sa direction.
3. On considère le $n^{\text{ième}}$ octogone.
   a) Exprimer en fonction de n le premier nombre inscrit sur le $n^{\text{ième}}$ octogone.
   b) On suppose dans cette question que $n = 8k$, avec $k \in N$ et $k \neq 0$
   Quelle est la direction du premier nombre inscrit sur le $n^{\text{ième}}$ octogone ?
4. Placer sur un octogone, les nombres associés aux sommets du $2012^{\text{ème}}$ octogone (la figure ne sera évidemment plus à l'échelle).
5. Sur quel octogone et dans quelle direction se placera le nombre 806 002 ?

Éléments de solution

1. Ce sera le nombre 25, dans la direction F.
2. On remarque que les nombres de 1 à 8 sont sur le 1^{er} octogone, ceux de 9 à 16 sur le $2^{\text{ème}}$, ceux de 17 à 24 sur le $3^{\text{ème}}$.
   Sur le $7^{\text{ème}}$ octogone, il y aura donc les nombres de 49 ($49 = 6\times8+1$) à 56 ($56 = 7\times8$).
   Le premier entier inscrit sur le $8^{\text{ème}}$ octogone sera donc 57.
   D'autre part, on remarque qu'à chaque nouveau tour, la direction recule d'une lettre : H pour le début du $2^{\text{ème}}$ octogone, G pour le début du $3^{\text{ème}}$, F pour le début du $4^{\text{ème}}$...
   Le début du $8^{\text{ème}}$ octogone se fera donc dans la direction B.
3. a) En suivant le même raisonnement que dans la question 2, on obtient que le premier entier inscrit sur le $n^{\text{ième}}$ octogone sera : $(n-1)8+1 = 8n-7$.
   b) On suppose que $n = 8k$. Donc n est un multiple de 8.
   On vient de voir que lorsque $n = 8$, la direction du premier inscrit sur le $8^{\text{ème}}$ octogone est la B.
   Pour $n = 8 \times 2 = 16$, la direction recule de 8 lettres : on revient sur la direction B.
   Plus généralement, pour $n = 8k$, le premier inscrit sur le $\mathrm{n}^{\text{ième}}$ octogone aura pour direction la B.
4. On a : $2012 = 2008 + 4 = 8 \times 251 + 4$.
   Le premier inscrit sur le $2008^{\text{ème}}$ octogone aura pour direction la direction B.
   En reculant de 4 lettres, on obtient que le premier inscrit sur le $2012^{\text{ème}}$ octogone aura F pour direction.
   Et le premier inscrit sera : $(2012-1) \times 8 + 1 = 8 \times 2011 + 1 = 16089$.
   Les 8 nombres seront donc : 16089, 16090, 16091, 16092, 16093, 16094, 16095 et 16096 ; dans les directions F, G, H, A, B, C, D, E.
5. On a : $806002 = 806000 + 2 = 8 \times 100750 + 2$.
   Le $100750^{\text{ème}}$ octogone se termine par le nombre 806000. Donc 806002 se trouvera sur le $100751^{\text{ème}}$ octogone.
   Ensuite $100751 = 100744 + 7 = 8 \times 12593 + 7$.
   Comme pour le 4), le premier nombre inscrit sur le $100744^{\text{ème}}$ octogone aura B pour direction.
   On recule de 7 lettres, donc le premier inscrit sur le $100751^{\text{ème}}$ octogone aura C pour direction.
   Ce premier nombre inscrit sera 806001. Et donc le suivant, 806002, aura pour direction la D.

Retour au sommaire

AMIENS

Deuxième exercice

Série S

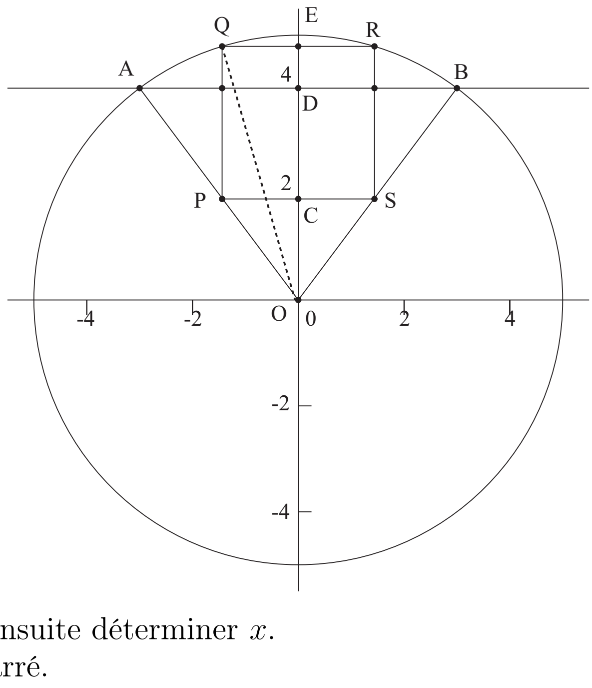
Carré inscrit

Énoncé

A et B sont deux points d'un cercle de centre O et de rayon 5 tels que $AB = 6$.
Le carré PQRS est inscrit dans le secteur angulaire OAB de sorte que P est sur le rayon [OA], S est sur le rayon [OB], Q et R sont deux points de l'arc de cercle reliant A et B.

1. Faire une figure correspondant à la situation proposée.
2. Calculer l'aire du carré PQRS.

Éléments de solution



On pose $x = DE$ et $y = EQ$.
D'après Pythagore dans OBD, on a déjà $OD = 4$.
Ensuite, on doit avoir $\dfrac{OC}{OD} = \dfrac{CP}{DA}$
D'où : $OC = OD \times \dfrac{CP}{DA} = \dfrac{4}{3}y$.
Puis $QR = EC \Leftrightarrow 2y = 4 + x - \dfrac{4}{3}y \Leftrightarrow \dfrac{10}{3}y = 4 + x$.
Enfin, d'après Pythagore dans OEQ :

$$OE^2 + EQ^2 = 5^2 \Leftrightarrow (4+x)^2 + y^2 = 25$$
$$\Leftrightarrow \left(\frac{10}{3}y\right)^2 + y^2 = 25.$$
$$\Leftrightarrow \frac{109}{9}y^2 = 25$$
$$y^2 = 25 \times \frac{9}{109} \Leftrightarrow y = \frac{15}{\sqrt{109}}.$$

Cette égalité fournit la valeur de y. On pourrait ensuite déterminer x.
Mais ce n'est pas utile, car on cherche l'aire du carré.
D'après nos équations, les valeurs de x et de y garantissent que PQRS est un carré.

On a alors : $\text{aire}_{\text{PQRS}} = (2y)^2 = 4y^2 = \dfrac{900}{109} = 8,26$.

Retour au sommaire

AMIENS

Troisième exercice

Séries ES / L / STG / ST2S

Un magicien

Énoncé

Un magicien présente un jeu non truqué de 21 cartes. Un spectateur choisit une carte, qu'il mémorise mais ne révèle pas, et remet la carte choisie n'importe où dans le tas de cartes.
Le magicien procède alors à une opération simple, décrite dans l'algorithme suivant : Il forme trois tas de cartes, dans lesquels sont distribuées les 21 cartes. Chaque tas reçoit donc une carte à tour de rôle, face visible.
Une fois que les trois tas ont été formés, le spectateur désigne le tas contenant sa carte. Le magicien prend alors un des tas qui ne contiennent pas la carte du spectateur, met le tas désigné au-dessus, suivi du troisième tas.

1. Après que cette opération a été effectuée, combien de cartes au minimum sont sous la carte choisie par le spectateur ? Combien au minimum sont au dessus ?
2. Le magicien répète l'opération une seconde fois. Combien de cartes au minimum sont sous la carte choisie par le spectateur ? Combien au minimum sont au dessus ?
3. L'opération est répétée une troisième et dernière fois. Montrer que la carte choisie par le spectateur ne peut être que dans une seule position dans le tas de cartes, et préciser cette position.

Éléments de solution

1. Chacun des 3 tas contient 7 cartes. Après la première opération, il y a donc au minimum 7 cartes en dessous, et 7 au dessus.
2. Les 7 premières cartes que le magicien dépose sont forcément mauvaises. Cela permet déjà de constituer 3 tas de 2 cartes (l'un des 3 recevant la 7$^{\text{ème}}$ carte).
   Si la bonne carte se trouve en 8$^{\text{ème}}$ ou 9$^{\text{ème}}$ position, elle sera posée sur un tas de 2 cartes.
   Si elle est en 10$^{\text{ème}}$, 11$^{\text{ème}}$ ou 12$^{\text{ème}}$ position, elle sera posée sur un tas de 3 cartes.
   Et si elle est en 13$^{\text{ème}}$ ou 14$^{\text{ème}}$ position, elle sera posée sur un tas de 4 cartes.
   (on rappelle que la bonne carte se trouve entre la position n°8 et la n°14)
   Le magicien dépose alors les 7 dernières cartes.
   Lorsqu'il superpose les 3 tas lors de la 2$^{\text{ème}}$ opération, il y a donc au minimum 9 cartes en dessous, et 9 au-dessus de la bonne (les 7 cartes d'un mauvais tas, plus les 2 issues de la distribution des 7 premières ou dernières cartes, mauvaises elles aussi).
3. Le magicien recommence alors son opération.
   La bonne carte est située en n° 10, 11 ou 12.
   Il dépose les 9 premières cartes, en 3 tas de 3 cartes.
   Il dépose ensuite les cartes 10, 11, 12, ce qui forme la 4$^{\text{ème}}$ couche de cartes. La bonne carte est donc l'une d'entre elles.
   Enfin, il dépose les 9 autres cartes, mauvaises, pour former les 3 dernières couches. La bonne carte se trouve donc exactement au milieu d'un des paquets, et lorsque le magicien superpose les tas pour reconstituer le jeu de 21 cartes, la bonne reste au milieu du jeu.
   Il n'a plus qu'à la sortir, de manière évidente.

Retour au sommaire

AMIENS

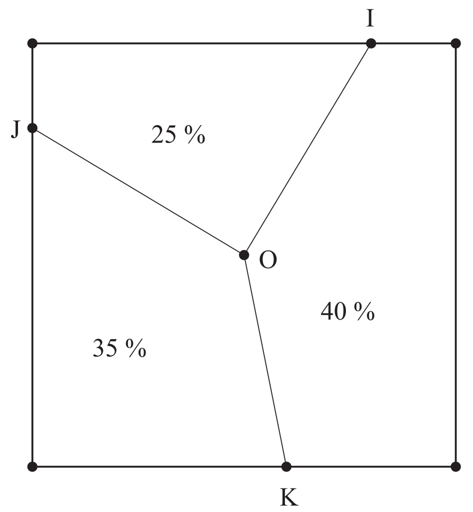
Quatrième exercice

Séries ES / L / STG / ST2S

Partage d'un carré

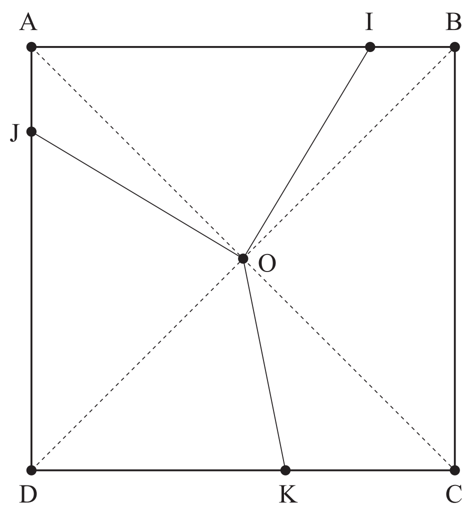
Énoncé

Dans un carré de 10 cm de côté, on veut réaliser un graphique statistique dans lequel les aires des 3 parties doivent être proportionnelles aux fréquences qu'elles représentent (O est le centre du carré).
Le point I est à 2 cm du sommet le plus proche.
Calculer les distances de J et K aux sommets du carré les plus proches.



Éléments de solution

On considère la figure suivante :



Le carré ABCD a une aire de $10^2 = 100$ cm^2.

D'après l'énoncé, on doit avoir $\text{aire}_{\text{OIAJ}} = \dfrac{25}{100} \times 100 = 25$ cm^2.

Puisque $BI = 2$ cm, on a $AI = 8$ cm, donc $\text{aire}_{\text{OIA}} = \dfrac{8 \times 5}{2} = 20$ cm^2.

Il reste donc à trouver AJ pour avoir $\text{aire}_{\text{OAJ}} = 25 - 20 = 5$ cm^2, c'est-à-dire $\dfrac{AJ \times 5}{2} = 5$.

Il faut donc que J soit à 2 cm du point A.

Ensuite, on obtient $JD = 8$ cm, donc $\text{aire}_{\text{OJD}} = \dfrac{8 \times 5}{2} = 20$ cm^2.

Il reste donc à trouver DK pour avoir $\text{aire}_{\text{ODK}} = 35 - 20 =$ cm^2, c'est-à-dire $\dfrac{DK \times 5}{2} = 15$ cm^2.

Il faut donc que K soit à 6 cm du point D, ou encore à 4 cm du point C.

On verifie avec la dernière figure : $\text{aire}_{\text{OKCBI}} = \dfrac{4 \times 5}{2} + \dfrac{10 \times 5}{2} + \dfrac{2 \times 5}{2} = 10 + 25 + 5 = 40$ cm^2.

Retour au sommaire

AMIENS

Cinquième exercice

Séries STIS2 / STD2A / STL

Moyennes

Énoncé

a et b sont deux réels non nuls et de même signe.
On définit :

- le nombre $m = \dfrac{a+b}{2}$, qui est la moyenne arithmétique de a et b ;
- le nombre $n = \sqrt{ab}$, qui est leur moyenne géométrique ;
- Le nombre p tel que $\dfrac{2}{p} = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}$, qui est leur moyenne harmonique.

1. On prend $a = 2$ et $b = 8$. Calculer m, n et p puis comparer ces trois moyennes.
2. Même question pour $a = -12$ et $b = -3$.
3. Montrer que $p = \dfrac{2ab}{a+b}$ puis calculer $m - p$ en fonction de a et b.
4. Montrer que si a et b sont des réels strictement négatifs, alors $m \leqslant p < n$.
5. a) Calculer $m^2 - n^2$ et $n^2 - p^2$ en fonction de a et b.
   b) En déduire que si a et b sont des réels strictement positifs, alors $p \leqslant n \leqslant m$.

Éléments de solution

1. Pour $a = 2$ et $b = 8$, on obtient :
   $m = \dfrac{2+8}{2} = 5$, $n = \sqrt{2 \times 8} = 4$ et $\dfrac{2}{p} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{8} \Leftrightarrow \dfrac{2}{p} = \dfrac{5}{8} \Leftrightarrow p = \dfrac{16}{5}$.
   La comparaison donne le résultat suivant : $p < n < m$.
2. Pour $a = -12$ et $b = -3$, on obtient : $m = \dfrac{-12-3}{2} = -\dfrac{15}{2} = -7,5$,
   $n = \sqrt{(-12)(-3)} = \sqrt{36} = 6$ et $\dfrac{2}{p} = \dfrac{1}{-12} + \dfrac{1}{-3} \Leftrightarrow \dfrac{2}{p} = \dfrac{5}{-12} \Leftrightarrow p = -\dfrac{24}{5} = -4,8$.
   La comparaison donne $m < p < n$.
3. On a $\dfrac{2}{p} = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} \Leftrightarrow \dfrac{2}{p} = \dfrac{b+a}{ab} \Leftrightarrow p = \dfrac{2ab}{a+b}$.
   Ensuite,on a :

   $$m-p = \frac{a+b}{2} - \frac{2ab}{a+b} = \frac{(a+b)^2 - 4ab}{2(a+b)} = \frac{a^2+b^2+2ab-4ab}{2(a+b)} = \frac{a^2+b^2-2ab}{2(a+b)} = \frac{(a-b)^2}{2(a+b)}.$$

4. On suppose que $a < 0$ et $b < 0$.
Dans ce cas, $a+b<0$. Mais $(a-b)^2 \geqslant 0$ (avec égalité lorsque $a=b$).
Par conséquent, $m-p \leqslant 0$. Donc $m \leqslant p$.
Par ailleurs, $ab > 0$, donc $p < 0$ (d'après l'expression trouvée en 3), alors que $n = \sqrt{ab} > 0$.
Donc $p < 0 < n$. Ce qui donne finalement $m \leqslant p < n$.
5. a) On a :

$$m^2 - n^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \sqrt{ab}^2 = \frac{a^2+b^2+2ab}{4} - ab = \frac{a^2+b^2+2ab-4ab}{4} = \frac{(a-b)^2}{4}$$

et

$$\begin{aligned} n^2 - p^2 = \sqrt{ab}^2 - \left(\frac{2ab}{a+b}\right)^2 &= ab - \frac{4(ab)^2}{(a+b)^2} \\ &= \frac{ab(a+b)^2 - 4(ab)^2}{(a+b)^2} = \frac{ab\left[(a+b)^2 - 4ab\right]}{(a+b)^2} = \frac{ab(a-b)^2}{(a+b)^2}. \end{aligned}$$

b) On suppose que $a > 0$ et $b > 0$.
Dans ce cas, $a+b>0$, donc $m>0$. De même, $ab>0$ donc $n>0$. Enfin, $p>0$.
Les trois moyennes sont donc positives.
On a clairement $m^2 - n^2 \geqslant 0$, donc $m^2 \geqslant n^2$. Puisque $m > 0$ et $n > 0$ alors $m \geqslant n$.
De même, $n^2 - p^2 \geqslant 0$, donc $n^2 \geqslant p^2$, puis $n \geqslant p$. D'où le résultat $p \leqslant n \leqslant m$.

Retour au sommaire

AMIENS

Sixième exercice

Séries STIS2 / STD2A / STL

Calcul mental !

Énoncé

Calculer la somme suivante sans utiliser la calculatrice :

$$\left(1^2-2^2-3^2+4^2\right)+\left(5^2-6^2-7^2+8^2\right)+\left(9^2-10^2-11^2+12^2\right)+\cdots+\left(2009^2-2010^2-2011^2+2012^2\right)$$

Éléments de solution

On calcule déjà :

$$1^2-2^2-3^2+4^2=1-4-9+16=4 \text{ et } 5^2-6^2-7^2+8^2=25-36-49+64=4$$

Voyons le calcul autrement :

$$1^2-2^2-3^2+4^2=(1-2)(1+2)+(4-3)(4+3)=-1-2+4+3=4$$

et $\quad 5^2-6^2-7^2+8^2=(5-6)(5+6)+(8-7)(8+7)=-5-6+7+8=4.$

Plus généralement, on a :

$$\begin{aligned} n^2-(n+1)^2-(n+2)^2+(n+3)^2 &= (n-(n+1))\,(n+(n+1))+((n+3)-(n+2))\,((n+3)+(n+2)) \\ &= (-1)\times(2n+1)+1\times(2n+5)=-2n-1+2n+5=4. \end{aligned}$$

Par conséquent, $2009^2-2010^2-2011^2+2012^2=4$.
La somme proposée est donc constituée de paquets valant tous 4.
Il n'y a qu'à compter le nombre de paquets.
Les nombres qui interviennent dans les sommes sont ceux de 1 à 2012.
Ils sont groupés 4 par 4, ce qui fait donc 503 paquets.
La somme vaut donc $503\times 4=2012$.

Retour au sommaire

BESANÇON

Premier exercice

Toutes séries

L'algorithme de Kaprekar

Énoncé

I. Un premier algorithme

Voici un algorithme applicable à des nombres de trois chiffres dont le chiffre des centaines n'est pas égal à celui des unités :

Étape 1 : Inverser l'ordre des chiffres (par exemple : 275 devient 572).
Étape 2 : Calculer la différence du plus grand et du plus petit de ces deux nombres.
Étape 3 : Réitérer l'étape 1 sur le nombre obtenu.
Étape 4 : Additionner ces deux derniers nombres.

1. a) Appliquer l'algorithme aux nombres 123, 448 et 946.
   b) Que peut-on conjecturer ?
2. Pour implémenter cet algorithme, l'étape 2, implicite lorsqu'on effectue les calculs « à la main », nécessite de dissocier l'entier saisi afin d'en isoler le chiffre des unités, celui des dizaines puis celui des centaines.

   Compléter l'algorithme suivant dont le rôle est d'effectuer cette dissociation. Dans cet algorithme a est le chiffre de centaines, b celui des dizaines et c celui des unités du nombre n que l'on souhaite décomposer.

   Entrée :
   n est un entier naturel
   Initialisation :
   Donner à a la valeur 0
   Donner à b la valeur 0
   Donner à c la valeur 0
   Traitement :
   Tant que $n \geqslant 100$
   Affecter à a la valeur $a + 1$
   Affecter à n la valeur $n - 100$
   Fin Tant que
   Tant que n ....
   Affecter à b la valeur ......
   Affecter à ...la valeur ......
   Fin Tant que
   Affecter à c la valeur ......
   Sortie :
   Afficher a
   Afficher b
   Afficher c
3. On se propose maintenant de démontrer la conjecture établie en 1.b).
   Pour cela, on choisit un nombre de trois chiffres que l'on écrit abc où a, b et c sont donc des entiers compris entre 0 et 9 et représentent respectivement le chiffre des centaines, le chiffre des dizaines et le chiffre des unités de n.
   On peut, sans perdre de généralité, supposer $a < c$.

a) Décomposer abc selon les puissances de 10.

b) Donner le nombre obtenu après l'étape 1 sous sa forme décomposée.

c) Montrer que le nombre obtenu après l'étape 2 peut s'écrire :
$(ca1) \times 100 + 9 \times 10 + 10 + ac$.

d) Appliquer les étapes 3 et 4 et conclure.

II – L'algorithme de Kaprekar

En mathématiques, l'algorithme de Kaprekar est un algorithme découvert en 1949 par le mathématicien indien D.R. Kaprekar pour les nombres entiers de quatre chiffres, mais qui peut être généralisé à tous les nombres entiers. Nous l'étudierons ici pour des nombres entiers de trois chiffres, tous ces chiffres étant distincts.
L'algorithme de Kaprekar consiste à associer à un nombre entier quelconque n un autre nombre $K(n)$ généré de la façon suivante :

Étape 1 : À partir des chiffres qui composent n, former le plus grand nombre possible. On le note G.
Étape 2 : À partir des chiffres qui composent n, former le plus petit nombre possible. On le note P.
Étape 3 : $K(n)$ est alors égal à la différence $G - P$.

Par exemple, partant de 539, on a $G = 953$ et $P = 359$ donc $K(539) = 953 - 359 = 594$.

1. a) Calculer $K(198), K(357)$ et $K(495)$.

   b) Écrire un algorithme dont l'entrée est un nombre n à trois chiffres tous distincts et dont la sortie est $K(n)$. Pour la séparation des chiffres des unités, des dizaines et des centaines, on pourra reprendre l'algorithme de la partie **I**.

   (a) Appliquer l'algorithme de Kaprekar en partant du nombre 198 et en itérant autant de fois que nécessaire. Recommencer avec d'autres nombres à trois chiffres tous distincts. Que peut-on conjecturer ?

2. On se propose de démontrer la conjecture émise à la question 1.
   Pour cela, on choisit un entier n composé de trois chiffres et que l'on écrit abc où a, b et c sont donc des entiers tous distincts compris entre 0 et 9 qui représentent respectivement le chiffre des centaines, le chiffre des dizaines et le chiffre des unités de n.

   a) Expliquer pourquoi on peut, sans perdre de généralité, supposer que $a < b < c$.

   b) Montrer que $K(n) = 99(ca)$.

   c) Démontrer la conjecture et préciser le nombre maximum d'itérations nécessaires.

Éléments de solution

I – Un premier algorithme

1. a) Pour 123, on obtient 321 puis 198 puis 891 et enfin 1089.
   Pour 448, on obtient 844 puis 396 puis 693 et enfin 1089.
   Pour 946, on obtient 649 puis 297 puis 792 et enfin 1089.

   b) Conjecture : quel que soit le nombre de départ, on obtient 1089 à la fin de l'étape 4.

2. **Entrée** :
   n est un entier naturel
   Initialisation :
   Donner à a la valeur 0
   Donner à b la valeur 0
   Donner à c la valeur 0
   Traitement :
   Tant que $n \geqslant 100$
   Affecter à a la valeur $a + 1$
   Affecter à n la valeur $n - 100$
   Fin Tant que
   Tant que $\boxed{n \geqslant 10}$

Affecter à b la valeur $\boxed{b+1}$
Affecter à $\boxed{n}$ la valeur $\boxed{n-10}$
Fin Tant que
Affecter à c la valeur $\boxed{n}$
Sortie :
Afficher a
Afficher b
Afficher c

3. a) $abc = a \times 10^2 + b \times 10^1 + c \times 10^0$.
   b) Le nombre obtenu après l'étape 1 est : $c \times 10^2 + b \times 10^1 + a \times 10^0$.
   c) Le nombre obtenu après l'étape 2 est :$(c \times 10^2 + b \times 10^1 + a \times 10^0)(a \times 10^2 + b \times 10^1 + c \times 10^0)$ soit $99(ca)$.
   Or, $(ca1) \times 100 + 9 \times 10 + 10 + ac = 99(ca)$
   d) Le nombre obtenu après l'étape 3 est : $(10 + a - c) \times 100 + 9 \times 10 + c - a - 1$
   et : $[(10 + a - c) \times 100 + 9 \times 10 + c - a - 1] + [(c - a - 1) \times 100 + 9 \times 10 + 10 + a - c] = 1089$.

II – L'algorithme de Kaprekar

1. a) $K(198) = 981 - 189 = 792$
   $K(357) = 753 - 357 = 396$
   $K(495) = 954 - 459 = 495$
   b) **Entrée** :
   n est un entier naturel
   Initialisation :
   Donner à a la valeur 0
   Donner à b la valeur 0
   Donner à c la valeur 0
   Traitement :
   Tant que $n \geqslant 100$
   Affecter à a la valeur $a + 1$
   Affecter à n la valeur $n - 100$
   Fin Tant que
   Tant que $n \geqslant 10$
   Affecter à b la valeur $b + 1$
   Affecter à n la valeur $n - 10$
   Fin Tant que
   Affecter à c la valeur n
   Si $a < b$ alors
   Si $b < c$ alors
   $K = (100c + 10b + a) - (100a + 10b + c)$
   Sinon
   Si $a < c$ alors
   $K = (100b + 10c + a)(100a + 10c + b)$
   Sinon
   $K = (100b + 10a + c) - (100c + 10a + b)$
   Fin de Si
   Fin de Si
   Sinon
   Si $a < c$ alors
   $K = (100c + 10a + b) - (100b + 10a + c)$
   Sinon
   Si $b < c$ alors
   $K = (100a + 10c + b) - (100b + 10c + a)$
   Sinon
   $K = (100a + 10b + c) - (100c + 10b + a)$

Fin de Si
Fin de Si
Fin de Si
Sortie :
Afficher K

2. Avec 198, on obtient 792 puis toujours 495.
   Conjecture : quel que soit le nombre de départ, on obtient 495 après plusieurs itérations.
3. a) Les rôles des variables a, b et c sont symétriques, on peut donc supposer que $a < b < c$ sans perdre de généralité.
   b) $K(n) = (100c + 10b + a) - (100a + 10b + c) = 99(c - a)$.
   c) $c - a$ est un entier compris entre 2 et 8. $K(n)$ peut donc prendre les valeurs 198, 297, 396, 495, 594, 693 et 792.
   Si on applique l'algorithme de Kaprekar autant de fois que nécessaire aux entiers précédents, on obtient toujours 495 au bout d'un certain nombre d'itérations :
   198 - 792 - 693 - 594 - 495 ; 297 - 693 - 594 - 495 ; 396 - 594 - 495 ; 495 ; 594 - 495 ;
   693 - 594 - 495 ; 792 - 693 - 594 - 495.
   On constate que le nombre 495 est atteint en cinq itérations au maximum.

Retour au sommaire

BESANÇON

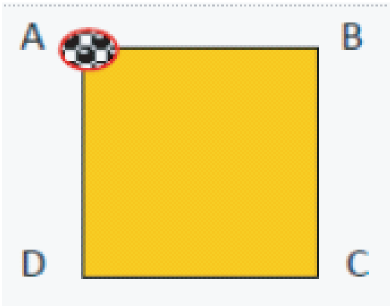
Deuxième exercice

Toutes séries

Une coccinelle

Énoncé

Une coccinelle se déplace sur les côtés d'un carré ABCD en partant du point A. Elle peut marcher à rebours si elle le souhaite.



On appelle déplacement tout trajet de la coccinelle le long dun côté du carré. Une marche est constituée de déplacements, ainsi, $A \to B \to A \to D \to C$ est une marche de quatre déplacements dont l'arrivée est le point C.

Partie A

Dans cette partie, la coccinelle se déplace de manière aléatoire sur les côtés d'un carré ABCD et l'on considère que tous ses déplacements sont équiprobables.

1. a) La coccinelle peut-elle atteindre le point B en trois déplacements ?
   b) Quelles sont les arrivées possibles pour une marche de trois déplacements ?
   c) Quelles sont les arrivées possibles si la marche compte un nombre pair de déplacements ?
   d) Quelles sont les arrivées possibles si la marche compte un nombre impair de déplacements ?
2. Dans cette question, la coccinelle effectue deux déplacements.
   Éventuellement à l'aide d'un arbre, calculer la probabilité de l'événement A_2 : « la coccinelle arrive en A en effectuant deux déplacements ».
3. Reproduire et compléter le tableau ci-dessous :

Nombre de déplacements de la marche	1	2	3	4	5
Probabilité que la cocinelle arrive en A					

Partie B

Dans cette partie, la coccinelle se déplace toujours sur les côtés du carré ABCD en partant du point A mais elle a deux fois plus de chance de se déplacer verticalement qu'horizontalement. Elle peut toujours marcher à rebours si elle le souhaite.
En revanche, elle décide de s'arrêter dès qu'elle revient en A.

1. Dans cette question, la coccinelle effectue exactement deux déplacements.
   a) Calculer la probabilité de l'événement A_2 : « la coccinelle arrive en A en effectuant deux déplacements ».
   b) Calculer la probabilité de l'événement C_2 : « la coccinelle arrive en C en effectuant deux déplacements ».
2. a) Calculer la probabilité de l'événement A_4 : « la coccinelle arrive en A en effectuant exactement quatre déplacements ».

b) Calculer la probabilité de l'événement A_6 : « la coccinelle arrive en A en effectuant exactement six déplacements ».

3. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à deux.

a) On note A_{2n} l'événement : « la coccinelle arrive en A en effectuant exactement $2n$ déplacements » et $P(A_{2n})$ la probabilité de cet événement.
Exprimer $P(A_{2n})$ en fonction de n.

Soit q un nombre réel différent de 1 et n un nombre entier naturel non nul. On rappelle que :

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

b) On note G_{2n} l'événement : « la coccinelle arrive en A en effectuant au maximum $2n$ déplacements ». Exprimer en fonction de n la probabilité de G_{2n} notée $P(G_{2n})$.

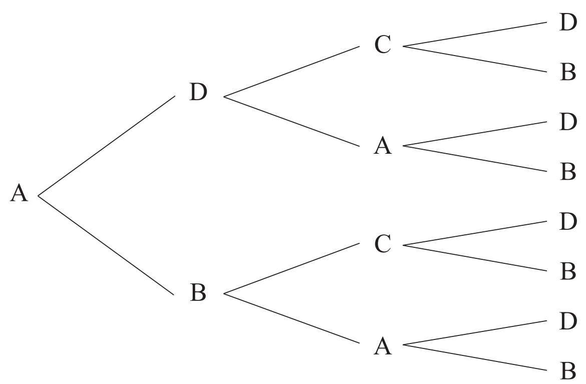
c) Quel est le plus petit entier n tel que $P(G_{2n}) \geqslant 0{,}9999$?

Éléments de solution

Partie A

1. a) Oui, par exemple avec la marche : A $\to$ B $\to$ A $\to$ B.

b) B ou D d'après l'arbre de choix suivant :



c) Par généralisation de l'arbre ci-dessus, les arrivées possibles pour les marches contenant un nombre pair de déplacements sont : A et C.

d) Les arrivées possibles pour les marches contenant un nombre impair de déplacements sont : B et D

2. A l'aide de cet arbre : $P(A_2)= 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

3.

Nombre de déplacements de la marche	1	2	3	4	5
Probabilité que la cocinelle arrive en A	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0

$P(A_2) = \frac{1}{2}$ d'après 2.

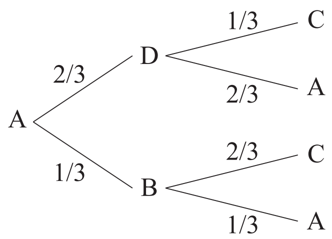
$P(A_1) = P(A_3) = P(A_5)$=0 d'après 1.d).

$P(A_4) = 8 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$ car il y a 8 marches possibles et 4 déplacements. Chaque déplacement a une probabilité de $\frac{1}{2}$.

(Deuxième justification : suite à 4 déplacements, il n'y a que deux arrivées possibles A ou C qui sont équiprobables, donc $\frac{1}{2}$).

Partie B

1. D'après l'arbre ci-dessous :

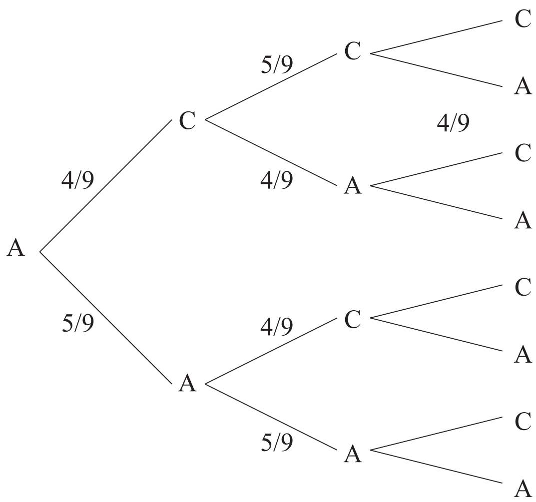


a) $P(A_2) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{5}{9}$.

b) $P(C_2) = \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{4}{9}$ ou bien $P(C_2)$= 1-$P(A_2)$.

Suite à deux déplacements, on remarque que la probabilité de revenir sur le même sommet est $\frac{5}{9}$ et la probabilité darriver sur le sommet opposé est $\frac{4}{9}$.

2. L'arbre ci-dessous illustre l'ensemble des marches dans les deux déplacements :



a) $P(A_4) = \frac{4}{9} \times \frac{4}{9} = \frac{16}{81}$.

b) $P(A_6) = \frac{4}{9} \times \frac{5}{9} \times \frac{4}{9} = \frac{80}{729}$

3. a) En raisonnant toujours tous les deux déplacements, la seule marche possible pour que la coccinelle arrive en A en effectuant exactement $2n$ déplacements est :
$A \to \underbrace{C \to C \to \dots\dots \to C}_{(n-2)\text{fois}} \to A.$

C'est-à-dire que la coccinelle doit se rendre une première fois sur le sommet opposé à A, revenir sur le même sommet C $(n-2)$ fois et enfin revenir sur le sommet opposé A.

On obtient donc $P(A_{2n}) = \frac{4}{9} \times \left(\frac{5}{9}\right)^{n-2} \times \frac{4}{9} = \left(\frac{5}{9}\right)^{n-2} \times \left(\frac{4}{9}\right)^2$.

b) $P(G_{2n}) = P(A_2) + P(A_4) + P(A_6) + \cdots + P(A_{2n})$

$$= \frac{5}{9} + \frac{4}{9} \times \frac{4}{9} + \frac{4}{9} \times \frac{5}{9} \times \frac{4}{9} + \cdots + \left(\frac{5}{9}\right)^{n-2} \times \left(\frac{4}{9}\right)^2$$

$$= \frac{5}{9} + \left(\frac{4}{9}\right)^2 \left[1 + \frac{5}{9} + \left(\frac{5}{9}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{5}{9}\right)^{n-2}\right]$$

$$= \frac{5}{9} + \left(\frac{4}{9}\right)^2 \left[\frac{1 - \left(\frac{5}{9}\right)^{n-1}}{1 - \frac{5}{9}}\right]$$

$$= \frac{5}{9} + \frac{4}{9}\left[1 - \left(\frac{5}{9}\right)^{n-1}\right]$$

$$= 1 - \frac{4}{9} \times \left(\frac{5}{9}\right)^{n-1}$$

c) $P(G_{2n}) \geqslant 0,9999$ à partir de $n = 16$ donc 32 déplacements.

Retour au sommaire

BORDEAUX

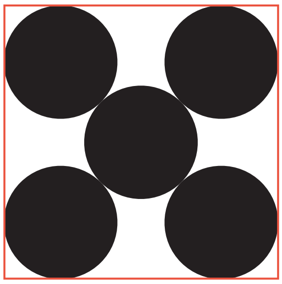
Premier exercice

Série S

Cinq cercles dans un carré

Énoncé

1. Cinq cercles de rayon 1 cm ont été placés dans un carré comme l'indique le dessin. Les cercles sont tangents entre eux et tangents aux côtés du carré.
   Déterminer la longueur d'un côté du carré.



2. On se propose de déterminer la longueur du côté du plus petit carré contenant cinq cercles de rayon 1 cm disjoints ou tangents extérieurement.

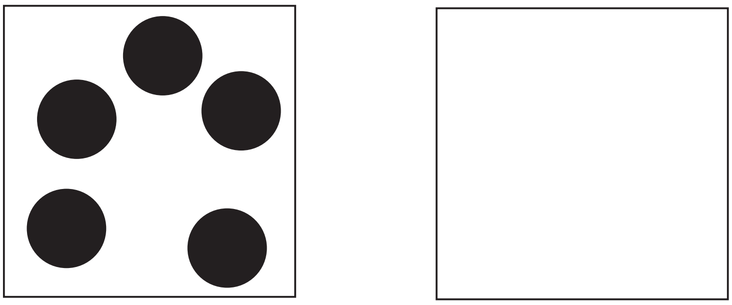


Figure 1

a) Déterminer et représenter sur la figure 1 l'ensemble D des points qui peuvent être le centre d'un cercle de rayon 1 cm, ce cercle étant intérieur au carré.

b) Quel est le côté du plus petit carré contenant deux points distants de 2 cm ? Justifier la réponse.

c) Quel est le côté du plus petit carré contenant cinq points distants, deux à deux, d'au moins 2 cm. Justifier la réponse. (On pourra s'aider de la figure 2)

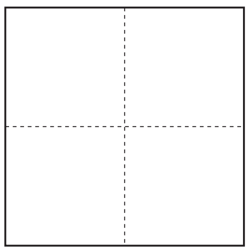
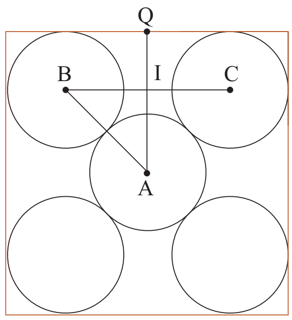


Figure 2

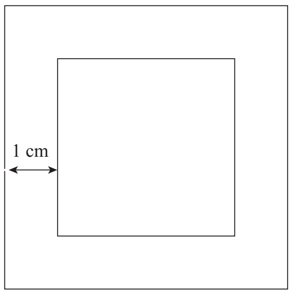
d) Conclure

Éléments de solution

1. $AB = 2, AI = \sqrt{2}, AO = 1 + \sqrt{2}$.
   Le côté du carré est donc $2\left(1 + \sqrt{2}\right)$.

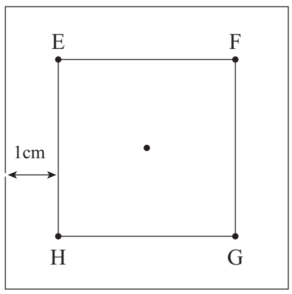


2. a)



   b) La plus longue distance entre 2 points d'un carré est celle entre deux sommets diagonalement opposés. Le plus petit carré contenant deux points distants de 2 cm a donc sa diagonale qui mesure 2 cm et a donc un côté de RAC (2).

   c) Le carré ayant été partagé en quatre, l'un des « petits » carrés contient donc au moins deux des cinq points et par conséquent mesure au moins $\sqrt{2}$ cm. Le carré intérieur mesure donc au moins $2\sqrt{2}$ cm de côtés.
   La figure ci-dessous montre que la position des cinq points est possible dans le carré de côté $2\sqrt{2}$ cm.



   d) On en conclut que la configuration étudiée au 1. est celle qui répond au problème.

Retour au sommaire

BORDEAUX

Deuxième exercice

Série S

Pavé droit

Énoncé

1. L, S et V étant trois nombres réels positifs, montrer que les triplets (a, b, c) solutions du système $\left\{\begin{array}{rcl} a+b+c & = & L \\ ab+ac+bc & = & S \\ abc & = & V \end{array}\right.$ sont tels que a, b et c sont les solutions de l'équation $X^3 - LX^2 + SX - V = 0$.
2. Déterminer les dimensions d'un pavé droit dont la somme des longueurs de toutes ses arêtes est de 20 cm, la somme des aires des six faces est de 14 cm^2 et dont le volume est de 3 cm^3.
3. Quels sont les volumes minimum et maximum d'un pavé droit dont la somme des longueurs de toutes les arêtes est de 20 cm, la somme des aires des six faces est de 14 cm^2.

Éléments de solution

1. $a^3 - La^2 + Sa - V = a^3 - (a+b+c)a^2 + (ab+bc+ca)a - abc = 0$. De même pour b et c.
2. Les dimensions de ce pavé sont les solutions de l'équation $X^3 - 5X^2 + 7X - 3 = 0$ équivalente à $(X-1)^2(X-3) = 0$. Les dimensions sont donc 1, 1 et 3.
3. Il est évident que $0 \leqslant x \leqslant 5$. On définit la fonction f sur $[0\,;5]$ par $f(x) = x^3 - 5x^2 + 7x$ et $f'(x) = 3x^2 - 10x + 7 = (x-1)(3x-7)$.

   La fonction f possède un minimum en $\dfrac{7}{3}$ égal à $\dfrac{49}{27}$ et un maximum en 1 égal à 3.

   En dehors de l'intervalle $\left[\dfrac{49}{27} : 3\right]$, l'équation $f(x) = V$ ne possède pas les trois solutions requises.

x	0		1		7/3		5
$f(x)$		$\nearrow$	3	$\searrow$	49/27	$\nearrow$	

   La valeur maximale de V est donc 3, obtenue avec $x = 1, y = 1$ et $z = 3$.

   La valeur minimale de V est égale à $\dfrac{49}{27}$ obtenue pour $x = y = \dfrac{7}{3}$ et $z = \dfrac{1}{3}$.

Retour au sommaire

BORDEAUX

Troisième exercice

Séries autres que S

Les sextuplés de Mr et Mme Logic

Énoncé

Les sextuplés de M et Mme Logic sont dans la même classe de 2^{nde}.
A la fin de la journée au cours de laquelle ils ont eu un contrôle de mathématiques, ils rentrent chez eux et présentent à leurs parents les réponses qu'ils ont fournies aux diverses questions.

	Alix	Béa	Carol	Delphine	Emile	Félix
Question 1	150	700	150	100	700	150
Question 2	103	101	101	101	103	35
Question 3	101	732	107	101	101	107
Question 4	34	125	216	28	34	34
Question 5	216	216	27	55	25	103

« Papa, peux-tu nous dire combien nous avons chacun ? »

- Je veux bien, mais vous ne m'avez pas donné les questions !
- On ne les a pas, on a dû rendre le sujet avec les réponses.
- Moi, je me rappelle qu'il fallait trouver le plus petit nombre premier après 100, dit Béa.
- Il fallait aussi calculer le volume d'un cube dont le côté était un entier, je ne me rappelle plus lequel, rajoute Félix
- On demandait aussi l'âge du capitaine de je ne sais quel bateau se souvient Carol.
- C'est tout ce que vous vous rappelez, demande le père ?
- Oui, mais en regardant rapidement les copies, le professeur nous a dit que l'un d'entre nous avait tout juste. . .et un autre tout faux !

Au bout d'un moment, leur père leur annonce qu'il connaît leurs notes.

Quelles sont ces notes (chaque réponse juste rapporte 4 points) et quel est l'âge du capitaine ? Vous détaillerez le raisonnement qui vous a conduit au résultat.

Éléments de solution

- Le plus petit nombre premier après 100 est 101.
- Le volume possible d'un cube de côté entier, en se limitant aux entiers de deux ou trois chiffres est :
$$27, 64, 125, 216, 343, 512, 729.$$
- Cherchons celui qui a tout juste.

Ce n'est pas Félix car il n'a pas répondu 101.
ni Emile, ni Delphine car leur réponse ne comporte pas de cube,
ni Béa, car l'âge du capitaine n'est pas supérieur à 100.

Si c'était Alex, aucun des autres n'aurait tout faux.

C'est donc Carol et Emile a tout faux.

Les notes sont donc :

A	B	C	D	E	F
4	4	20	4	0	8

Et la seule valeur possible pour l'âge du capitaine est 27.

Retour au sommaire

BORDEAUX

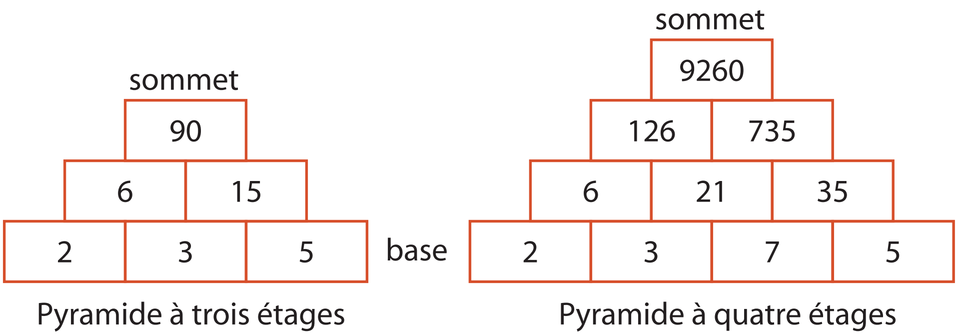
Quatrième exercice

Séries autres que S

Pyramides multiplicatives

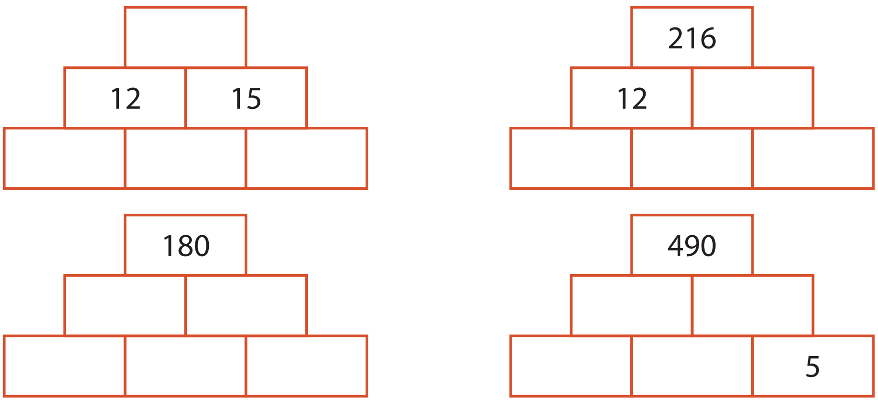
Énoncé

On appelle pyramide multiplicative une pyramide formée de nombres entiers différents de 0 et de 1 et telle que le nombre écrit dans une case est le produit des deux nombres écrits dans les cases du dessous. Exemple :

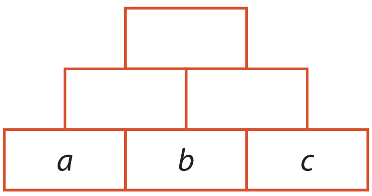


1. **Pyramides à trois étages**

   a) Donner toutes les pyramides possibles dans les cas suivants :



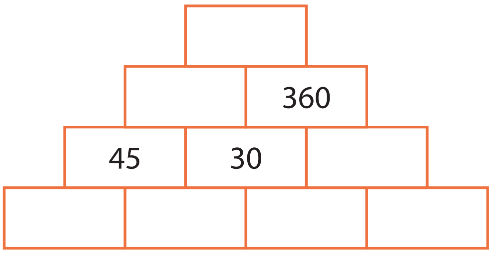
   b) Compléter la pyramide ci-dessous :

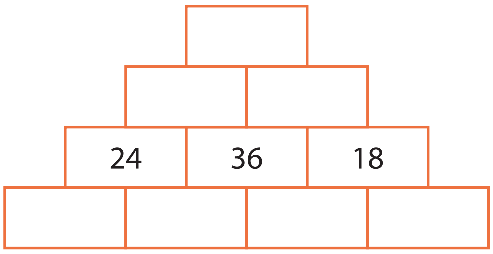


   Peut-on trouver une pyramide à trois étages dont le sommet est 110 ? 90 ? Justifier.

2. **Pyramides à quatre étages**

   a) Donner toutes les pyramides possibles dans les cas suivants :





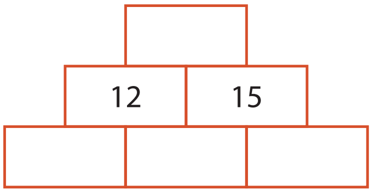
   b) Peut-on trouver une pyramide à quatre étages dont le sommet est 1260 ? Justifier.

3. Trouver une pyramide, la plus haute possible, dont le sommet est $2^4 \times 3^6 \times 5^4 \times 7^2$.

Éléments de solution

1. **Pyramides à trois étages**

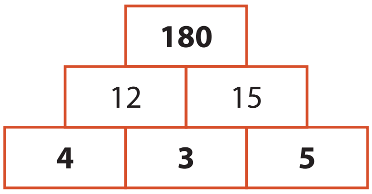
   a)



Le nombre inscrit dans la case supérieure est, par construction,

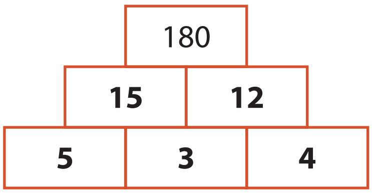
$$12 \times 15 = 180 = 2^2 \times 3^2 \times 5.$$

Le nombre inscrit dans la case centrale de la base doit être un diviseur de 12 et de 15 ; c'est donc 3 d'où l'on déduit la pyramide



Les autres pyramides de sommet 180 sont :

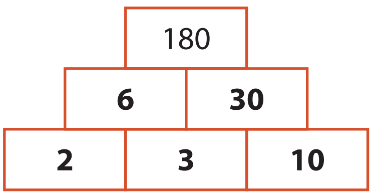
la symétrique :



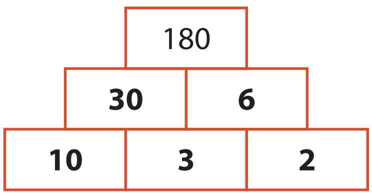
et celles dont on déduit la ligne de base $a|b|c$ de la décomposition en facteurs premiers du sommet

$$180 = 2^2 \times 3^2 \times 5 = a \times b^2 \times c$$

qui implique que $b = 2$ ou $b = 3$.



et la symetrique



180

6 30

3 2 15

et la symetrique

180

30 6

15 2 3

180

10 18

5 2 9

et la symetrique

180

18 10

9 2 5

De même, on obtient, à partir de…
la décomposition $216 = 2^3 \times^3$.

216

12 18

6 2 9

216

12 18

4 3 6

et

216

12 18

2 6 3

De même, de la décomposition $490 = 2.5.7^2$ on déduit

490

14 35

2 7 5

b) Une pyramide à trois étages est de la forme :

ab^2c

ab bc

a b c

$110 = 2 \times 5 \times 11$ ne peut se décomposer en ab^2c avec a, b, c supérieurs à 2 ; il n'y a donc pas de pyramide à trois étages de sommet 110.

$90 = 2.3^2.5$ d'où la pyramide de sommet 90 :

90

6 15

2 3 5

2. **Pyramides à quatre étages.**

   a) Après avoir complété la troisième ligne par $\dfrac{360}{30} = 12$, on doit résoudre

$$ab = 45, bc = 30 \text{ et } cd = 12.$$

c doit donc diviser 30 et 12, donc 6, mais $c = 3$ ne convient pas car alors $b = 10$ et $ab \neq 45$. On a donc $c = 2$ ou $c = 6$ et les deux pyramides

486000			
1350	360		
45	30	**12**	
3	**15**	**2**	**6**

486000			
1350	360		
45	30	**12**	
9	**5**	**6**	**2**

De même, on doit trouver a, b, c, d tels que

$$ab = 24, bc = 36, cd = 18$$

en examinant successivement $a = 12, 8, 6, 4, 3, 2$, on voit que seules conviennent les valeurs 4 et 2, d'où l'on déduit les deux pyramides

549872			
864	**648**		
24	36	18	
4	**6**	**6**	**3**

et

549872			
864	**648**		
24	36	18	
2	**12**	**3**	**6**

   b) $1260 = 2^2.3^2.5.7$ ne contient aucun facteur au cube donc ne peut être le sommet d'une pyramide à quatre étages qui admet la décomposition ab^3c^3d.

3. Soit n le nombre de cases de la base qui est aussi la hauteur de la pyramide. Appelons degré d'une case le nombre de facteurs premiers du nombre de cette case.
Par construction, le degré d'une case de la base est supérieur à 1, de la seconde ligne supérieur à 2, la troisième à 4 et la quatrième à 8...du sommet à $(n-1)^2$.
Si le sommet est $2^4.3^6.5^4.7^2$, son degré vaut $4 + 6 + 4 + 2 = 16$. On doit donc avoir $(n-1)^2 = 16$ d'où $n = 5$. et la pyramide de hauteur 5

357210000				
7560	47250			
84	90	525		
14	6	15	35	
7	2	3	5	7

ou

$2^4.3^6.5^4.7^2$				
$2^3.3^5.5.7$	$2^2.3^3.5^3.7$			
$2^2.3.7$	$2.3^2.5$	$3.5^2.7$		
2.7	2.3	3.5	5.7	
7	2	3	5	7

Retour au sommaire

CAEN

Premier exercice

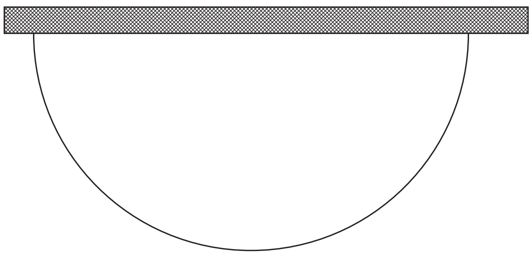
Toutes séries

Le poulailler

Énoncé

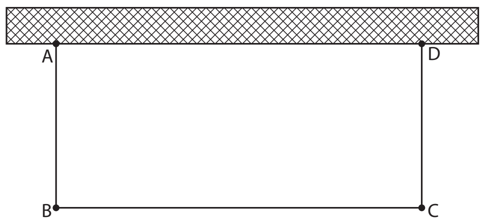
Un fermier dispose d'un grand terrain le long d'un mur et d'un grillage. Le long de ce même mur, il veut réaliser un poulailler sous forme semi-circulaire ou polygonale. Le grillage ne sera pas posé contre le mur.

Partie A. Forme semi-circulaire.
Dans cette partie, le fermier veut réaliser un poulailler sous forme de demi-cercle. Quelle est la longueur minimale du grillage si on veut clôturer une surface de 127 m^2 ? Donner une valeur approchée à 0,1 m près.

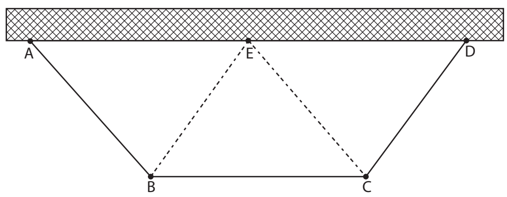


Partie B. Forme rectangulaire.
Dans cette partie, le fermier veut réaliser un poulailler sous forme rectangulaire.

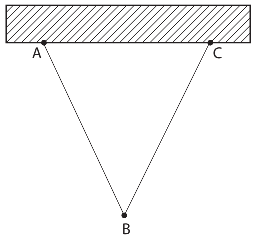
1. Le grillage est long de 108 m. Comment disposer ce grillage pour que l'aire du poulailler soit la plus grande possible ?
2. Le fermier veut clôturer une surface de 288 m^2. Quelle est la longueur minimale du grillage pour réaliser ce poulailler ?



Partie C. Forme de trapèze.
Dans cette partie, le fermier veut réaliser un poulailler sous la forme d'un trapèze composé de trois triangles équilatéraux.
Quelle est l'aire du poulailler sachant que le grillage a une longueur de 120 m (arrondir le résultat final au m^2) ?



Partie D. Forme de triangle isocèle.
Dans cette partie, le fermier veut réaliser un poulailler sous la forme d'un triangle isocèle de sommet B.
Quelle est l'aire maximale du poulailler sachant que le grillage a une longueur de 88 m ? (On pourra utiliser l'angle au sommet et le fait que $\sin\theta\cos\theta = \dfrac{\sin(2\theta)}{2}$



Éléments de solution

Partie A. Forme circulaire.
On doit avoir $\dfrac{\pi R^2}{2} = 127$. Alors, $R = \sqrt{\dfrac{254}{\pi}} \approx 9$ m. La longueur du grillage est donc $L = \pi R \approx 28,3$ m.

Partie B. Forme rectangulaire
On pose $AB = CD = x$ et $BC = y$. La longueur du grillage est $2x+y$. L'aire du poulailler est xy

1. On doit avoir $2x + y = 108$. L'aire est alors $xy = x(108 - 2x) = 108x - 2x^2$. On considère la fonction $f(x) = 108x - 2x^2$. On a $f'(x) = 108 - 4x$ et le tableau de variation de f montre que f atteint son maximum pour $x = 27$. Alors $y = 54$.
   La longueur est le double de la largeur.
2. On doit avoir $xy = 288$, donc $y = \dfrac{288}{x}$.
   La longueur du grillage est alors $g(x) = 2x + y = 2x + \dfrac{288}{x}$.
   On a $g'(x) = 2 - \dfrac{288}{x^2} = \dfrac{2x^2 - 288}{x^2}$. Le tableau de variation montre que la fonction g atteint son minimum pour $x = 12$. Alors, $y = \dfrac{288}{x} = 24$. La longueur minimale du grillage est alors $2x + y = 48$ m.

Partie C. Forme de trapèze.
Soit h la hauteur d'un triangle équilatéral de côté a. On sait que $h = a\sin 60^o = a\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. La surface du trapèze est alors $A = 3\dfrac{ah}{2}\dfrac{3}{2}a^2\sqrt{3}$.
Avec $a = \dfrac{120}{3} = 40$, on obtient $A = 2771$ m^2.

Partie D. Forme de triangle isocèle.
Soit a la longueur d'un côté du sommet et θ^o le demi-angle au sommet. La hauteur du triangle est alors $h = a\cos\theta$. Sa base est donc $b = 2a\sin\theta$. L'aire du triangle est $A = 2\dfrac{a^2\cos\theta\sin\theta}{2} = a^2\cos\theta\sin\theta = \dfrac{a^2\sin(2\theta)}{2}$. L'aire est maximale pour $\sin(2\theta) = 1$, donc, pour $2\theta = 90^o$ et $\theta = 45^o$.
On obtient alors $A = \dfrac{a^2}{2}$. Avec $a = \dfrac{88}{2} = 44$, on obtient $A = 968$ m^2.

Retour au sommaire

CAEN

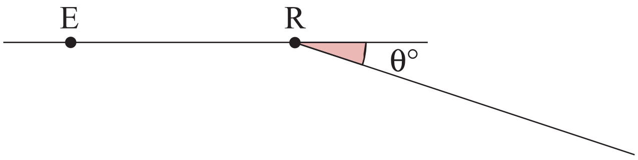
Deuxième exercice

Série S

Pierre et sa fille

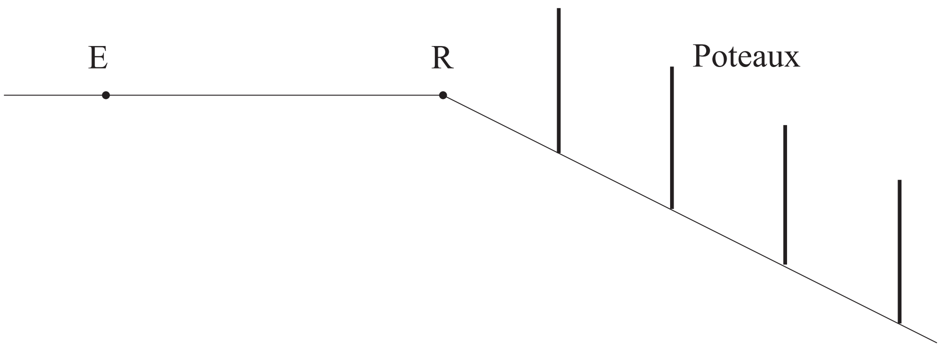
Énoncé

Pierre et sa fille Eloïse se promènent sur une route horizontale. En un point R, cette route descend faisant un angle θ de 5° avec l'horizontal (voir figure).



Éloïse, dont les yeux sont à 1,6 mètre du sol, s'arrête en un point E, à 24 mètres du point R.
Son père continuant à marcher, passe devant le point R puis s'engage dans la partie en pente de la route.

1. Quand il se trouve à 86 mètres de R, il disparaît des yeux de sa fille.
   Déterminer la hauteur de Pierre.
2. Dans la partie en pente de la route, des poteaux d'une hauteur de 6,5 mètres sont plantés verticalement tous les 28 mètres, comme sur le schéma ci-dessous.

   Le pied du premier poteau se situe à 28 mètres du point R.
   On admet l'hypothèse que les poteaux ne peuvent se masquer les uns des autres.

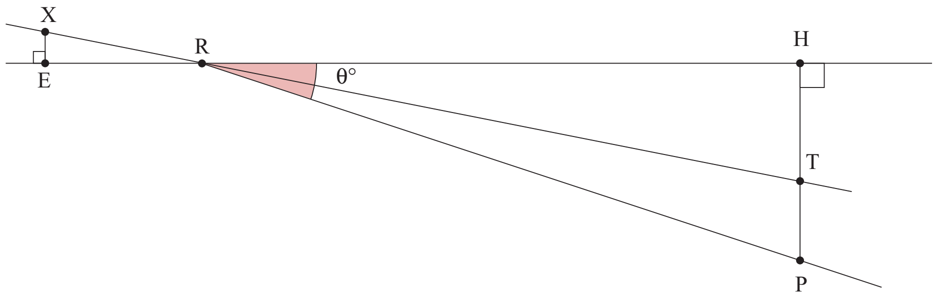
   Combien Éloïse peut-elle voir de poteaux de l'endroit où elle se trouve ?
3. Quelle est, en réalité, la mesure de l'angle θ, sachant qu'Éloïse ne voit que 5 poteaux ?

   On pourra utiliser la formule $1 + \tan^2 \theta = \dfrac{1}{\cos^2 \theta}$.

   On donnera une valeur approchée de θ à 10^{-3} près.

Éléments de solution

1. Sur la figure ci-dessous, qui n'est pas à l'échelle, X représente les yeux d'Éloïse, T le sommet de la tête de Pierre quand Éloïse cesse de le voir ; X, R et T sont donc alignés.



   On a $EX = 1,6; ER = 24$ et $RP = 86$ et $\theta = 5^o$.
   (T représente le sommet de la tête de Pierre).

   $\cos(\theta) = \dfrac{RH}{RP}$ donc $RH = RP \times \cos(\theta) = 85,67$ mètres et $\theta = 5^o$.

   $\dfrac{XE}{ER} = \dfrac{HT}{RH}$ donc $\dfrac{1,6}{24} = \dfrac{HT}{85,67}$ d'où $HT = 5,71$ mètres.

   $\sin(\theta) = \dfrac{HP}{RP}$ d'où $HP = RP\sin(\theta)$

   $HP = 7,5$ m. Donc $PT = HP - HT \approx 1,79$ m.

2. $EX = 1,6; ER = 24$ et $PT = 6,5$ et $\theta = 5^o$.
   (T représente le sommet du dernier poteau).

   $\dfrac{XE}{ER} = \dfrac{HT}{RH}$

   $\dfrac{1,6}{24} = \dfrac{HT}{RH}$ d'où $HT = \dfrac{0,2}{3}RH$.

   $\tan(\theta) = \dfrac{HP}{RH}$ donc $HP = RH \times \tan(\theta) = RH\tan(5^o)$.

   Or $HP = HT + TP$

   $$RH\tan(\theta) = \frac{0,2}{3}RH + 6,5$$

   $$RH = \frac{6,5}{\left(\tan(5^o) - \dfrac{0,2}{3}\right)} \approx 312,17 \text{ m.}$$

   $$RP = \frac{RH}{\cos(5^o)} \approx 313,36 \text{ m.}$$

   Le quotient entier de 313,36 par 28 est 11. Eloïse peut donc voir 11 poteaux.

3. Avec les notations du 2.,

   $\tan\theta = \dfrac{6,5}{x} + \dfrac{0,2}{3}$ avec $RH = x$.

$\cos\theta = \dfrac{x}{140}$

$1 + \tan^2\theta = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$

$1 + \left(\dfrac{6,5}{x} + \dfrac{0,2}{3}\right)^2 = \dfrac{140^2}{x^2}$

$1 + \dfrac{(19,5 + 0,2x)^2}{9x^2} = \dfrac{19600}{x^2}$

$9x^2 + 380,25 + 7,8x + 0,04x^2 = 175\ 400.$

$9,04x^2 + 7,8x - 175\ 019{,}75 = 0.$ $\Delta = 6\ 364\ 935$

$x_1 = \dfrac{-7,8 + \sqrt{\Delta}}{2 \times 9,04} = 139,11$ mètres, car $x > 0$

$\cos\theta = \dfrac{139,11}{140} = 0,99357.$

$\theta = 6,45^o.$

Retour au sommaire

CAEN

Troisième exercice

Séries autres que S

Le logo

Énoncé

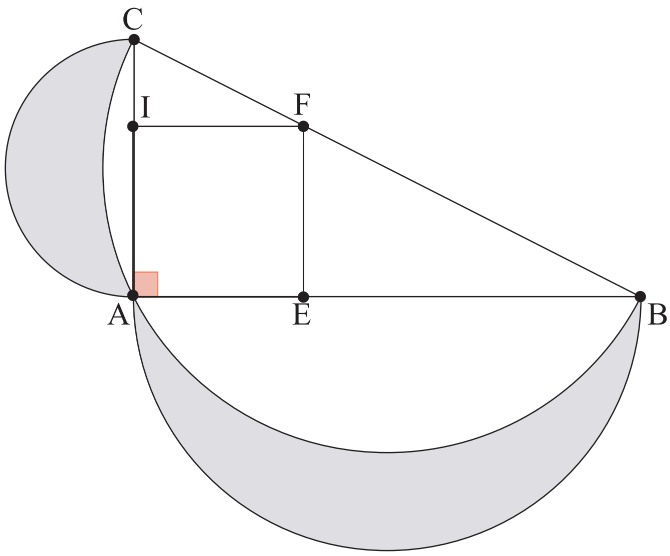
Une association souhaite créer un logo.

Ce logo a été conçu à partir de la construction suivante :

- ABC est un triangle rectangle en A,
- on pose $AC = x; AB = y$ et $BC = z$,
- On a tracé les demi-cercles de diamètres [AB], [AC], [BC] et le carré AEFI tel que E ∈ [AB), F ∈ [BC) et I ∈ [AC).

Les trois questions sont indépendantes.

1. Pour cette question on considère la figure suivante :

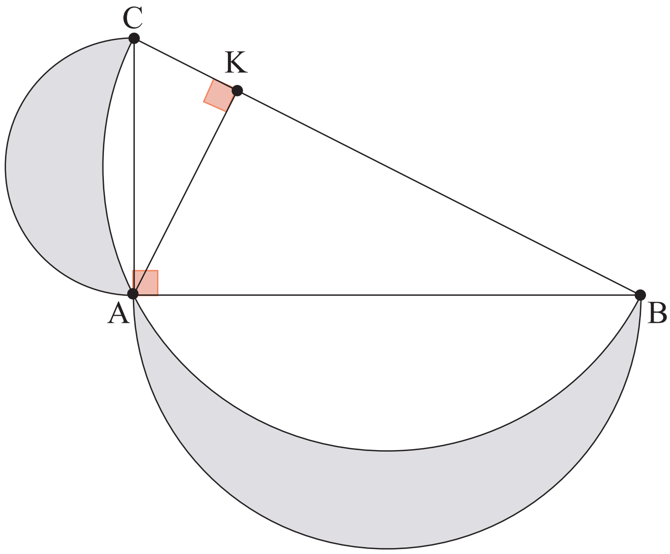


   a) Calculer la longueur du côté du carré AEFI en fonction de x et y.

   b) Que peut-on dire du point I si le triangle ABC est isocèle ? (justifier)

   c) On suppose $y = 4$. L'aire du carré AEFI peut-elle être égale à 9 ? (justifier)

2. Soit K le pied de la hauteur issue de A du triangle ABC. On pose $AK = h$.
   On a donc la figure suivante :



a) Justifier que $(x+y)^2 = z^2 + 2zh$.

b) Exprimer de même $(x-y)^2$ en fonction de z et de h. Montrer que h est inférieur à la moitié de z.

c) Est-il possible que $z = 10$ et $h = 4,8$?
Si oui, déterminer les valeurs de x et de y.

3. Comparer l'aire du triangle ABC à l'aire de la surface grisée.

Éléments de solution

1.

a) Théorème de Thalès :

$$\frac{CI}{CA} = \frac{IF}{AB} \text{ donc } \frac{x-c}{x} = \frac{c}{y}$$

$$xy - cy = cx$$

$$c = \frac{xy}{x+y}.$$

b) Si $x = y$ alors $c = \dfrac{x^2}{2x} = \dfrac{x}{2}$. Donc I est le milieu de [AC].

c) Si $y = 4$, alors $c = \dfrac{4x}{x+4} = 3$.

Alors $\dfrac{4x}{4x+4} = 3 \Leftrightarrow 4x = 3x + 12 \Leftrightarrow x = 12$.

2. a) Théorème de Pythagore : $x^2 + y^2 = z^2$.

L'aire du triangle ABC : $\dfrac{xy}{2} = \dfrac{hz}{2}$ donc $xy = hz$.

Donc $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 = z^2 + 2hz$.

b) De même $(x-y)^2 = z^2 - 2hz$.

Or $(x-y)^2 \geqslant 0$ donc $z^2 - 2hz \geqslant 0$
donc $z(z-2h) \geqslant 0$

donc $z - 2h \geqslant 0$ car $z \geqslant 0$
donc $h \leqslant \dfrac{z}{2}$.

c) Pour $z = 10$ et $h = 4,8$ on a $h \leqslant \dfrac{z}{2}$.
Donc $(x+y)^2 = 100 + 96 = 196$ donc $x + y = 14$.
$(x-y)^2 = 100 - 96 = 4$ donc $x - y = \pm 2$.
D'où $x = 8$ et $y = 6$ ou $x = 6$ et $y = 8$.

3. $A_{ABC} = \dfrac{xy}{2}$

$$\begin{aligned} A \text{ hachuré} &= \frac{1}{2}\left[\frac{\pi x^2}{4} + \frac{\pi y^2}{4} - \left(\frac{\pi\left(x^2+y^2\right)}{4} - \frac{xy}{2}\right)\right] \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi x^2 + \pi y^2 - \pi x^2 - \pi y^2 + 2xy}{4}\right) \\ &= \frac{xy}{2}. \end{aligned}$$

Donc $A_{ABC} = A$ hachuré.

Retour au sommaire

CLERMONT-FERRAND

Premier exercice

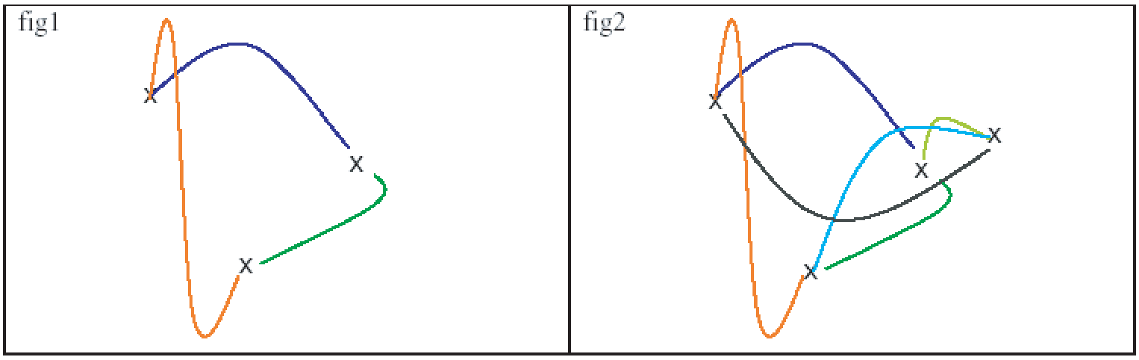
Toutes séries

De toutes les couleurs

Énoncé

Sur une toile blanche, une artiste en herbe place n points deux à deux distincts. (On suppose que $n \geqslant 2$). Elle relie alors les deux points de toute paire de points distincts par une ligne de couleur.

Toutes les couleurs utilisées doivent être deux à deux différentes. Ainsi pour une œuvre réalisée en partant de trois points, trois couleurs sont nécessaires (fig1), tandis que pour une œuvre réalisée en partant de quatre points, six couleurs sont nécessaires (fig2).



1. a) Dessiner une œuvre possible en partant de cinq points.
   b) Combien de couleurs sont nécessaires à sa réalisation ?
   c) Combien de couleurs sont nécessaires à la réalisation d'une œuvre en partant de huit points ?
2. Chacune des propositions suivantes est-elle vraie ou fausse ? Justifier votre réponse.
   - *Proposition n^o 1* : Il existe au moins un entier n supérieur ou égal à 2 pour lequel le nombre de couleurs nécessaires à la réalisation d'une œuvre soit égal au double du nombre initial n de points.
   - *Proposition n^{o}2* : Quel que soit l'entier n supérieur ou égal à 2, le nombre de couleurs nécessaires à la réalisation d'une œuvre est un multiple du nombre initial n de points.
   - *Proposition n^{o}3* : Il existe au moins un entier n supérieur ou égal à 2 pour lequel le nombre de couleurs nécessaires à la réalisation d'une œuvre soit égal au triple du nombre initial n de points.
3. a) Conjecturer une formule donnant le nombre de couleurs nécessaires à la réalisation d'une œuvre en fonction du nombre initial de points. La démontrer.

b) On considère l'algorithme ci-dessous :

k est un entier naturel non nul
Affecter à n la valeur 2
Affecter à c la valeur 1
Tant que $c < k \times n$
Affecter à n la valeur $n + 1$
Affecter à c la valeur $\dfrac{n(n-1)}{2}$
Afficher n et c

a. Faire fonctionner l'algorithme pour $k = 3$. Interpréter le résultat obtenu.

b. Est-on sûr que cet algorithme s'arrête ?

c) Déterminer pour quelles valeurs du nombre initial de points, le nombre de couleurs nécessaires est un multiple de celui-ci.

4. « Le chiffre des unités du nombre de couleurs utilisées pour une œuvre ne peut être que 0, 1, 3, 5, 6 ou 8 ». Que penser de l'affirmation ?

5. Pour peindre un triptyque, c'est à dire trois tableaux successifs, sans jamais utiliser deux fois la même couleur, l'artiste en herbe a eu besoin d'une palette de 184 couleurs. Sans tenir compte de l'ordre des tableaux, combien de points figuraient sur chacun ?

Éléments de solution

1. a) à faire

   b) Le nombre de couleurs utilisées est $\dfrac{5 \times 4}{2}$ ou $4 + 3 + 2 + 1$ soit 10.

   c) Le nombre de couleurs utilisées est $\dfrac{8 \times 7}{2}$ ou $7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1$ soit 28.

2.
   - *Proposition n°1* : **Vraie**. Pour $n = 5$, le nombre de couleurs utilisées est 10.
   - *Proposition n°2* : **Fausse**. Contre exemple : pour $n = 4$, le nombre de couleurs utilisées est 6 qui n'est pas un multiple de 4.
   - *Proposition n°3* : **Vraie**. Pour $n = 7$, le nombre de couleurs utilisées est $6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 21$.

3. a) Chacun des n points est relié aux $n - 1$ autres par une ligne de couleur. Mais comme 2 points ne sont reliés que par une seule ligne, le nombre de couleurs utilisées est finalement $\dfrac{n(n-1)}{2}$.

   b) a. Avec $k = 3$. Complétons le tableau :

n	2	3	4	5	6	7
c	1	3	6	10	15	21

Le nombre de couleurs utilisées est le triple du nombre de points initial lorsque $n = 7$.

b. Posons $c_n = \dfrac{n(n-1)}{2} - k \times n$

$c_n \geqslant 0 \Leftrightarrow \dfrac{n(n-1-2k)}{2} \geqslant 0 \Leftrightarrow n \geqslant 1 + 2k$ puisque $n \geqslant 2$ **Au bout de** $2k - 1$ **boucles l'algorithme s'arrête et** $c_{1+2k} = 0$.

c) Soit k un entier naturel non nul et n un entier naturel supérieur à 2.

$$\frac{n(n-1)}{2} = k \times n \Leftrightarrow n-1 = 2k \Leftrightarrow n = 2k+1.$$

Le nombre de couleurs utilisées est un multiple du nombre de points initial si et seulement si ce dernier est un **nombre impair** (différent de 1).

4. Examinons le chiffre des unités de l'expression $\dfrac{n(n-1)}{2}$ où n est un entier naturel.

Chiffre des unités de n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Chiffre des unités de $n-1$	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Chiffre des unités de $n(n-1)$	0	0	2	6	2	0	0	2	2	2
Chiffre des unités de $\dfrac{n(n-1)}{2}$	0 ou 5	0 ou 5	1 ou 6	3 ou 8	1 ou 6	0 ou 5	0 ou 5	1 ou 6	1 ou 6	1 ou 6

En effet, par exemple, un entier naturel se terminant par 2 s'écrit sous la forme $10p+2$ où p est un entier naturel.

Alors $\dfrac{10p+2}{2} = 5p+1$ se termine par 6.

Donc le chiffre des unités du nombre de couleurs utilisées ne peut être que 0, 1, 3, 5, 6 ou 8.

5. Listons les premières valeurs de $\dfrac{n(n-1)}{2}$, en remarquant que la suite définie par $u_n = \dfrac{n(n-1)}{2}$ pour $n \geqslant 2$ est strictement croissante. En effet, pour tout entier $n \geqslant 2$, $u_{n+1} - u_n = n > 0$.

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\dfrac{n(n-1)}{2}$	1	3	6	10	15	21	28	36	45

n	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$\dfrac{n(n-1)}{2}$	55	66	78	91	105	120	136	153	171	190

Notons a, b et c les nombres de points utilisés pour chacun des tableaux en supposant que $a \geqslant b \geqslant c \geqslant 2$ et a', b' et c' les nombres respectifs de couleurs utilisées.
Comme $a' + b' + c' = 184$ on a $a' \geqslant \dfrac{184}{3}$ soit $a' \geqslant 62$. Voici les différents cas possibles.

a'	b'	c'	somme	a	b	c
171	10	3	184	19	5	3
153	28	3	184	18	8	3
153	21	10	184	18	7	5
136	45	3	184	17	10	3
120	36	28	184	16	9	8
105	78	1	184	15	13	2
91	78	15	184	14	13	6
78	78	28	184	13	13	8
66	impossible	impossible	impossible	impossible	impossible	impossible

En effet, si $a' = 66$, soit $b' = 66$ et $c' = 52$, ce qui est impossible, soit $b' \leqslant 55$ et $c' \leqslant 55$, mais $a' + b' + c' \leqslant 176$ ce qui est aussi impossible.

L'artiste utilise pour son triptyque, **une palette de 184 couleurs dans huit cas possibles** figurant dans le tableau ci-dessus.

Retour au sommaire

CLERMONT-FERRAND

Deuxième exercice

Série S

Naissance de triplets (arithmétiques)

Énoncé

Trois entiers naturels distincts a, b, c **rangés par ordre strictement croissant**, $a < b < c$, sont **en progression arithmétique** si

$$c - b = b - a$$

On dit alors que (a, b, c) est un **triplet arithmétique**.

1. Compléter les triplets arithmétiques suivants :
   a. (57, 101, ...) ;
   b. (57, ..., 101) ;
   c. (..., 57, 101).
2. a. Peut-on trouver un triplet arithmétique (a, b, c) dont la somme vaut 2012 ?
   b. Combien y a-t-il de triplets arithmétiques (a, b, c) de somme 2013 ?
3. On prend au hasard trois nombres a, b, c dans $1, 2, 3, \ldots 10$ avec $a < b < c$. Quelle est la probabilité que (a, b, c) soit un triplet arithmétique ?
4. On rappelle qu'un entier naturel p est **premier** si $p \geqslant 2$ et si ses seuls diviseurs positifs sont 1 et p.
   a. Quels sont les cinq plus petits nombres premiers ?
   b. Donner un triplet arithmétique (a, b, c) constitué uniquement de nombres premiers. Ce triplet est-il celui pour lequel la somme $a+b+c$ est minimale ? On demande de justifier la réponse. Sinon, trouver les trois nombres premiers $a < b < c$ en progression arithmétique et de somme minimale.
   c. Peut-on trouver un triplet arithmétique (a, b, c) constitué uniquement de nombres premiers et dont la somme $a + b + c$ vaut 366 ?
5. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3. On se donne une liste $[a_1, a_2, \ldots, a_n]$, d'entiers naturels rangés par ordre strictement croissant. On veut savoir si trois de ses termes consécutifs forment un triplet arithmétique.
   a. **Dans cette question uniquement**, la liste est [1, 3, 6, 10, 15, 21, 27, 32, 39, 45]. Contient-elle un triplet arithmétique formé de trois termes consécutifs ?
   b. On revient au cas général d'une liste $[a_1, a_2, \ldots, a_n]$, d'entiers rangés par ordre strictement croissant. Écrire un algorithme qui affiche, sil existe, le premier triplet arithmétique formé de trois termes consécutifs.

c. Avec la calculatrice, programmer puis tester cet algorithme sur la liste $[a_1, a_2, \ldots, a_{20}]$ où, pour $1 \leqslant k \leqslant 20$,

$$a_k = -k^3 + 36k^2 + 9k.$$

On ne demande pas de vérifier que cette liste est formée d'entiers naturels rangés par ordre strictement croissant.

Éléments de solution

Remarque préalable : si (a, b, c) est un triplet arithmétique, alors $b - a = c - b$. On note r cette quantité.
L'entier r est strictement positif, puisque $b > a$. Ainsi, un triplet arithmétique est de la forme $(a, b, c) = (a, a + r, a + 2r)$ avec $a \in \mathbf{N}$ et $r \in \mathbf{N}*$.
Réciproquement, dès que l'on se donne des entiers $a \in \mathbf{N}$ et $r \in \mathbf{N}*$, on peut définir un triplet arithmétique par $(a, a + r, a + 2r)$.

1. a. Avec les notations précédentes, $a = 57, b = 101$ et il faut trouver c. Or $r = 101 - 57 = 44$ donc $c = b + r = 101 + 44 = 145$.

   b. Ici, il faut trouver b. Mais $2r = c - a = 101 - 57 = 44$ donc $r = 22$ et $b = a + r = 57 + 22 = 79$.

   c. Ici, il faut trouver a. Mais $r = c - b = 101 - 57 = 44$ donc $a = b - r = 57 - 44 = 13$.

2. a. Toujours avec les mêmes notations ($r = b - a = c - b$), la somme $a + b + c = 3(a + r)$ est divisible par 3. Le nombre 2012 n'étant pas divisible par 3, **on ne peut pas trouver de triplet arithmétique de somme 2012.**

   b. Pour 2013, il suffit de résoudre $3(a + r) = 2013$, donc $a + r = 671$. On veut $a \in \mathbf{N}$ et $r \in \mathbf{N}^*$, donc a peut prendre toutes les valeurs de 0 à 670 (mais pas 671 car sinon $r = 0$). Cela fait 671 choix pour a, auquel cas r est égal à $671 - a > 0$ et le triplet est alors entièrement déterminé : c'est $(a, a + r, a + 2r) = (a, 671, 1342 - a)$. **Il y a donc 671 triplets arithmétiques dont la somme vaut 2013.**

3. Il s'agit de compter le nombre N_1 de triplets arithmétiques (a, b, c) avec $1 \leqslant a < b < c \leqslant 10$ et de diviser ce nombre par le nombre N_2 de triplets (a, b, c) avec $1 \leqslant a < b < c \leqslant 10$.

   - Le calcul de N_2 est le plus facile : on choisit 3 nombres x, y, z dans $[[1,\ 10]]$, deux à deux distincts, puis on les range par ordre croissant. On a à priori 10 choix pour x, 9 pour y, 8 pour z. Mais les six triplets (x, y, z), (x, z, y), (y, x, z), (y, z, x), (z, x, y) et (z, y, x) donnent ensuite le même triplet (a, b, c) rangé par ordre croissant. On a donc compté six fois chaque triplet. Ainsi,

   $$N_2 = \frac{10 \times 9 \times 8}{6} = 120.$$

   - Le calcul de N_1 est plus délicat.

     Première méthode– Pour trouver un triplet arithmétique (a, b, c) avec $1 \leqslant a < b < c \leqslant 10$, on choisit $a \in [[1, 10]]$ puis $r \in N^*$ tels que $a + 2r \leqslant 10$, donc, en notant E la partie entière,

     $$1 \leqslant r \leqslant E\left(\frac{10 - a}{2}\right)$$

Ceci suppose $a \in [[1, 8]]$, sinon r n'existe pas. Pour un tel a, il y a $E\left(\dfrac{10-a}{2}\right)$ choix pour r.

Ainsi, $N_2 = \displaystyle\sum_{a=1}^{8} E\left(\frac{10-a}{2}\right) = \sum_{a=1}^{8} E\left(5 - \frac{a}{2}\right) = 4+4+3+3+2+2+1+1 = 20.$

Seconde méthode – On liste tous les triplets arithmétiques (a, b, c) avec $1 \leqslant a < b < c \leqslant 10$

.

Pour $a = 1$, les possibilités sont : $b = 2, c = 3$,
$b = 3, c = 5$,
$b = 4, c = 7$,
$b = 5, c = 9$,
et c'est tout, sinon $b \geqslant 6$ et alors $c \geqslant 11$.
Pour $a = 2$, les possibilités sont : $b = 3, c = 4$,
$b = 4, c = 6$,
$b = 5, c = 8$,
$b = 6, c = 10$.
Pour $a = 3$, les possibilités sont : $b = 4, c = 5$,
$b = 5, c = 7$,
$b = 6, c = 9$.
Pour $a = 4$, les possibilités sont : $b = 5, c = 6$,
$b = 6, c = 8$,
$b = 7, c = 10$.
Pour $a = 5$, les possibilités sont : $b = 6, c = 7$,
$b = 7, c = 9$.
Pour $a = 6$, les possibilités sont : $b = 7, c = 8$,
$b = 8, c = 10$.
Pour $a = 7$, la seule possibilité est $b = 8, c = 9$.
Enfin, pour $a = 8$, la seule possibilité est $b = 9, c = 10$.

On trouve bien 20 possibilités.

En conclusion, en prenant au hasard trois nombres a, b, c dans $[[1,\ 10]]$ avec $a < b < c$, la probabilité que (a, b, c) soit un triplet arithmétique vaut

$$p = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas}} = \frac{N_1}{N_2} = \frac{20}{120} = \frac{1}{6} \approx 0,17.$$

4. a. Les cinq plus petits nombres premiers sont 2, 3, 5, 7, 11.

   b. Les nombres 3, 5 et 7 sont premiers et sont en progression arithmétique. Le triplet (3, 5, 7) est celui de somme minimale.
   En effet, si l'on note encore $r = b - a \neq c - b$, alors $a + b + c = 3(a + r)$. Or a est premier, donc $a \geqslant 2$.
   Si $a = 2$ alors r ne peut valoir 1 (sinon $c = 4$ n'est pas premier), ni 2 (sinon $b = 4$), ni 3 (sinon $c = 8$ n'est pas premier) donc $r > 3$ et $a + r > 5$. Donc $a + b + c > 15$.
   Si $a = 3$ alors r ne peut valoir 1 (sinon $b = 4$ n'est pas premier) donc $r \geqslant 2$ et $a + r \geqslant 5$.
   De plus $a+b+c = 15$ seulement lorsque $r = 2$. $Sia = 4$ alors a n'est pas premier.

Si $a > 4$ alors $r \geqslant 1$ donc $a + r > 5$ et $a + b + c > 15$.
Dans tous les cas, $a + b + c = 3(a + r) \geqslant 15$: c'est la somme trouvée pour 3, 5, 7 et l'étude ci-dessus montre que (3, 5, 7) est l'unique triplet arithmétique de nombres premiers convenant.

c. La réponse est « non ». En effet $3(a + r) = 366$ donne $a + r = 122$ soit $b = 122$. Mais 122 n'est pas premier.

5. a. La liste proposée contient bien un triplet arithmétique, à savoir (15, 21, 27).

   b. Voici un algorithme possible :

```
k ← 1
a ← 44 (valeur de a_1)
b ← 154 (valeur de a_2)
c ← 324 (valeur de a_3)
tant que b − a ≠ c − b faire
        a ← b
        b ← c
        c ← −(k + 3)^3 + 36(k + 3)^2 + 9(k + 3)
        k ← k + 1
fin tant que afficher k afficher a, b, c
```

   c. On obtient $k = 11$ et $(a, b, c) = (3124, 3564, 4004)$.

Retour au sommaire

CLERMONT-FERRAND

Troisième exercice

Séries autres que S

Sudomaths !

Énoncé

Voici une grille composée de 9×9 cases ; certaine comportent déjà un chiffre compris entre 1 et 9.

3	8			9	7		*b*	*e*
7			5			*d*		
9				3	4			
				4	2	*f*	*a*	
	7						*c*	
	9	2	7	8				
			1	5				6
		9			8			5
5	4		3	2			7	9

1. Six cases comportent des lettres notées a, b, c, d, e et f. Ces lettres représentent six chiffres inconnus, deux à deux distincts, compris entre 1 et 9.

   Déterminer a, b, c, d, e et f à partir des définitions ci-dessous :
   a est le nombre de sommets d'un cube ; b est le plus grand diviseur commun à 2012 et 201 ;

   Voici un algorithme écrit en langage naturel :

   Lire un nombre entier strictement positif N
   Si N $<$ 5 alors
   A prend la valeur $3 \times N$
   Sinon A prend la valeur $3 \times N = 12$
   Afficher A

   c est le nombre affiché lorsque le nombre entré est 2 ;
   d est le nombre affiché lorsque le nombre entré est 5 ;
   e est l'un des nombres qu'il faut entrer pour obtenir 12 ;
   f est le nombre qu'il faut entrer pour obtenir 15.

2. Recopier la grille en remplaçant les six lettres par les valeurs trouvées à la question 1.

3. Il s'agit maintenant de compléter toutes les cases de la grille à l'aide de chiffres compris entre 1 et 9 en utilisant la règle suivante :
   Chaque chiffre de 1 à 9 doit figurer une et une seule fois sur chaque ligne, chaque colonne et chaque région : les régions sont les 9 carrés de 3×3 cases délimités par des traits gras.

Éléments de solution

1. $a = 8$

   $b = 1$ car $2012 = 4 \times 503$ et 503 est un nombre premier : il n'est divisible que par 1 et lui-même
   et $201 = 3 \times 67$ et 67 est un nombre premier.
   2012 et 201 sont donc premiers entre eux. Leur pgcd vaut 1.

   $c = 6$ car $2<5$ et A prend la valeur $3 \times 2 = 6$

   $d = 3$ car $5 \geqslant 5$ et A prend la valeur $3 \times 5 - 12 = 3$.

   $e = 4$ car $3 \times N = 12 \Leftrightarrow N = 4$ et $4 < 5$.

   et $3 \times N - 12 = 12 \Leftrightarrow N = 8$ et $8 \geqslant 5$.
   Mais on a déjà $a = 8$ et $c \neq a$. Donc $c = 4$.

   $f = 9$ car $3 \times N = 15 \Leftrightarrow N = 5$ mais on n'a pas $5<5$!
   tandis que $3 \times N - 12 = 15 \Leftrightarrow N = 9$ et $9 \geqslant 5$.

2 et 3 Une unique grille est possible.

3	8	5	2	9	7	7	1	4
7	2	4	5	6	1	3	5	8
9	3	6	8	3	4	7	5	2
1	5	3	6	4	2	9	8	7
4	7	8	9	1	5	2	6	3
6	9	2	7	8	3	5	4	1
8	3	7	1	5	9	4	2	6
2	6	9	4	7	8	1	3	5
5	4	1	3	2	6	8	7	9

Retour au sommaire

CORSE

Premier exercice

Toutes séries

Les nombres « Corses »

Énoncé

On appelle « grille » du plan l'ensemble des points, sommets des carrés d'un quadrillage de 1 cm de côté.

La figure 1 représente de façon simplifiée la forme du tour de la Corse, à l'aide de trois segments dont les extrémités sont des points de la grille.
La même « forme » c'est à dire avec des segments parallèles à ceux-ci , peut être obtenue avec davantage de points de la grille comme le montre la figure 2.

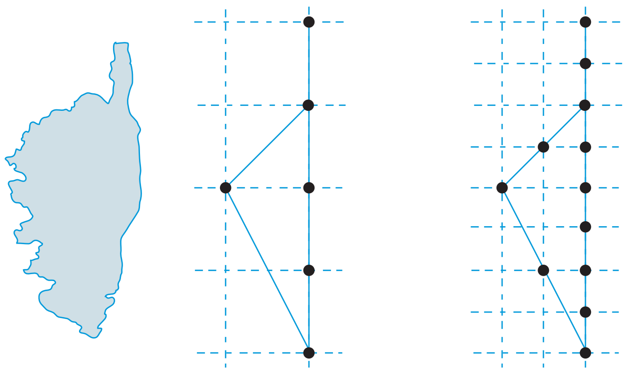
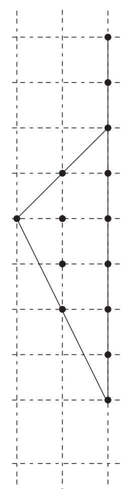


figure 1 figure 2

1. Le nombre de points de la grille situés sur ces segment est un nombre entier naturel appelé nombre « *tour de Corse* ». On note T_1, T_2,..., T_n,...les nombres « *tour de Corse* » ordonnés en ordre croissant. Ainsi T_1=6 et T_2= 12.
   a) Déterminer T_3 et T_4.
   b) Calculer T_{100} et déterminer la longueur en centimètres de la ligne brisée représentant la Corse en passant par ces points.
2. Le nombre de points de la grille situés sur le bord ou à l'intérieur de la représentation de la Corse est appelé nombre « *Corse* ». On note C_1, C_2,..., C_n,...les nombres « *Corse* »ordonnés en ordre croissant.
   Ainsi $C_1 = 6$ et $C_2 = 14$.
   a) Déterminer C_3 et C_4.
   b) Déterminer le nombre « *Corse* » le plus proche de 2012.



Éléments de solution

1. a) En faisant un dessin on constate que $T_3 = 18$ et $T_4 = 24$.

   b) A chaque étape la « Corse » est dessinée sur quatre carrés dont les sommets sont des points de la grille. Il y a autant de points de la grille sur le côté d'un carré que sur sa diagonale.

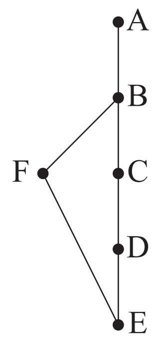
   Du fait de sa pente il y a autant de points sur [EF] que sur les autres segments. Notons a_n le nombre de points de la grille situés à l'intérieur d'un côté de ces carrés.

   A l'étape n on a donc :

   4 extrémités des trois segments : ABEF

   2 sommets des carrés (C et D)

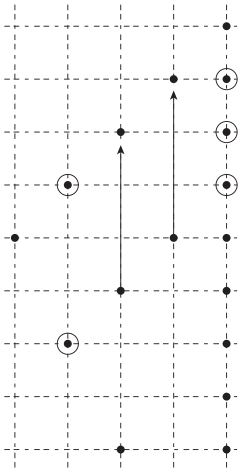
   $6a_n$ points à l'intérieur des segments



On déduit de la figure 1 qui montre le passage d'une étape à l'autre que (a_n) est une suite arithmétique de raison 1.

$a_1 = 0$ donc pour tout entier naturel n , $a_n = n - 1$.

Ainsi $T_n = 6 + 6(n - 1) = 6n$. $T_{100} = 600$ et il y a 99 points à l'intérieur de chaque segment.



Ainsi $AB = BC = CD = DE = 100$ et $BF = 100\sqrt{2}$.

D'après le théorème de Pythagore

$EF^2 = 100^2 + 200^2 = 5.100^2$ donc $EF = 100\sqrt{5}$.

La longueur totale de la ligne brisée est donc

$L = 400 + 100\sqrt{2} + 100\sqrt{5} = 100\left(4 + \sqrt{2} + \sqrt{5}\right)$

On peut aussi remarquer qu'à chaque étape la figure subit un agrandissement de rapport variable :

3/2, puis 4/3, puis 5/4. . .jusqu'à 100/99.

La longueur initiale $4+\sqrt{2}+\sqrt{5}$ est donc multipliée par $\frac{3}{2} \times \frac{4}{3} \times \cdots \times \frac{100}{99} = \frac{100}{2} = 50$.

2. a) A l'étape 3 il y a $a_3 = 2$ points intérieurs à [EB]. Sur les droites verticales issues de ces points, il y a les points « intérieurs à la Corse », 2 sur la droite la plus à gauche et 3 de plus sur la suivante.

   A l'étape 3 il y a donc $2 + 5 = 7$ points intérieurs.

   Donc $C_3 = T_3 + 5 = 18 + 7 = 25$.

   A l'étape 4, il y a $a_4 = 3$ points intérieurs à [EB]. Il y a donc $2 + 5 + 8$ points « intérieurs à la Corse », donc $C_4 = 24 + 15 = 39$.

   b) A l'étape n il y a $n-1$ points intérieurs à [EB]. Le nombre de points intérieurs à la « Corse » est donc $2+(2+3)+(2+2\times 3)+(2+3\times 3)+\cdots+(2+(n-2)\times 3)$, c'est-à-dire la somme de $n-1$ termes d'une suite arithmétique de raison 3 et de premier terme 2, soit

$$(n-1)\frac{2+(2+(n-2)\times 3)}{2} = \frac{(n-1)(3n-2)}{2}$$

Ainsi

$$C_n = 6n + \frac{(n-1)(3n-2)}{2} = \frac{12n + 3n^2 - 5n + 2}{2} = \frac{3n^2 + 7n + 2}{2}.$$

Considérons

$$C_n - 2012 = \frac{3n^2 + 7n + 2}{2} - 2012 = \frac{3n^2 + 7n + 2 - 4024}{2} = \frac{3n^2 + 7n - 4022}{2}.$$

Étudions le signe du trinôme $3x^2 + 7x - 4022$:
$\Delta = 49 + 4 \times 3 \times 4022 = 48313$; la racine réelle positive du trinôme est donc $x_1 = \dfrac{-7 + \sqrt{48313}}{6}$.
Sans calculatrice, si on remarque que $22^2 = 4 \times 181 = 484$, donc $220^2 = 48400$, on obtient alors $219^2 = (220 - 1)^2 = 48400 - 440 + 1 = 47961$.

Ainsi $\dfrac{219 - 7}{6} \leqslant x_1 \leqslant \dfrac{220 - 7}{6}$ soit $\dfrac{212}{6} \leqslant x_1 \leqslant \dfrac{213}{6}$ ce qui montre que $35 < x_1 < 36$.

Avec la calculatrice on obtient sans effort $\dfrac{-7 + \sqrt{48313}}{6} \approx 35,47$.

Donc pour $n \geqslant 36$, on a $C_n \geqslant 2012$.

La comparaison de C_{35} et C_{36} avec 2012 montre que C_{35} est le nombre « Corse » le plus proche de 2012.

$$\begin{aligned}\frac{3 \times 35^2 + 7 \times 35 + 2}{2} &= \frac{7 \times 35 \times (3 \times 5 + 1)}{2} + 1 \\ &= 7 \times 35 \times 8 + 1 = 7 \times 70 \times 4 + 1 \\ &= 490 \times 4 + 1 = 1960 + 1 = 1961\end{aligned}$$

$C_{35} = 1961$.

n	C_n	n	C_n	n	C_n	n	C_n	n	C_n
1	6	2	14	3	25	4	39	5	56
6	76	7	99	8	125	9	154	10	186
11	221	12	259	13	300	14	344	15	391
16	441	17	494	18	550	19	609	20	671
21	736	22	804	23	875	24	949	25	1026
26	1106	27	1189	28	1275	29	1364	30	1456
31	1551	32	1649	33	1750	34	1854	35	1961
36	2071	37	2184						

Retour au sommaire

CORSE

Deuxième exercice

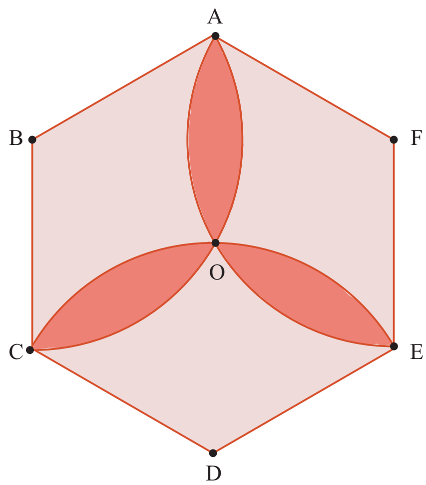
Toutes séries

Hélice d'avion

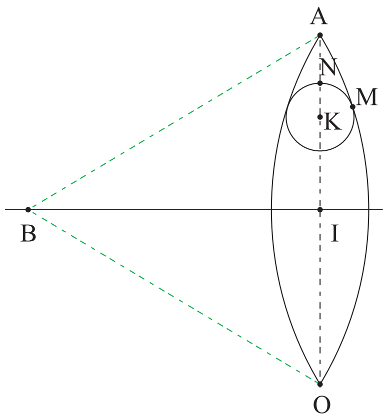
Énoncé

Le but de cet exercice est de modéliser et calculer l'aire des pales d'une hélice dont un exemple est représenté ci contre. Pour simplifier on ne considérera que des surfaces planes.

1. Pour cela on considère un hexagone régulier, c'est-à-dire un un polygone ayant six côtés, ayant tous la même longueur et dont les sommets sont sur un même cercle de centre O.
   ABCDEF est un hexagone régulier de côté R cm. On considère les cercles (C) de centre B , (C') de centre D, $(C")$ de centre F, de rayons R cm.
   a) Démontrer que les trois cercles passent par le point O.
   b) Déterminer en fonction de R, l'aire de la portion de plan limitée par les arcs de ces cercles d'extrémités A et O, représentant une pale de l'hélice.



2. On veut améliorer le modèle de la forme de chaque pale, en « arrondissant » l'extrémité . On considère donc un cercle (Γ) dont le centre K est situé sur le segment [OA], à une distance $AK = R/10$ de A, et tangent en un point M au cercle (C) de centre B et de rayon R.



a) Déterminer en fonction de R, le rayon r du cercle (Γ).
b) Sachant que la longueur ON de la pale obtenue est 1 mètre, déterminer sa largeur calculée au niveau du point I, milieu du segment [OA].

c) Déterminer dans ce cas une valeur approchée de l'aire de la pale à 1 cm^2 près par défaut.

Éléments de solution

1. (a) O étant le centre du cercle circonscrit, les triangles OAB, OBC, OCD, ODE, OEF et OFA sont isocèles et isométriques. Ils ont donc les mêmes angles en O, qui ont ainsi tous pour mesure 360/6=60°.
   Les six triangles précédents sont donc équilatéraux, ce qui permet d'affirmer que $BA = BO = BC$ et donc que le cercle de centre B et de rayon R passe par O. De même pour (C') et $(C")$.
   (b) L'aire de la demi-pale est égale à la différence entre l'aire du secteur OFA et celle du triangle équilatéral OFA, soit $R^2\left(\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)$. L'aire d'une pale est donc $R^2\left(\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.
2. a) le triangle AOB étant équilatéral, $OA = R$.
   Donc $IK = \dfrac{R}{2}-\dfrac{R}{10}=\dfrac{4R}{10}=\dfrac{2R}{5}$.
   Les cercles (C) et (Γ) étant tangents en M, les deux centres O et K sont alignés avec M.
   Ainsi $r = KM = BM - BK = R - BK$.
   Le triangle BIK est rectangle en I puisque la médiane (BI) est aussi hauteur dans le triangle équilatéral AOB. De plus $BI^2 = R^2 + (R/2)^2 = 3R^2/4$.

   CalculonsBK grâce au théorème de Pythagore appliqué au triangle BIK : $BK^2 = BI^2 + IK^2$.
   Donc : $BK^2 = \dfrac{3R^2}{4}+\dfrac{4R^2}{25}=\dfrac{75R^2+16R^2}{100}=\dfrac{91R^2}{100}$.
   Donc $BK = \dfrac{R\sqrt{91}}{10}$

   Ainsi $r = R - \dfrac{R\sqrt{91}}{10} = \left(1-\dfrac{\sqrt{91}}{10}\right)R$.

   b) $ON = OK + r = \dfrac{9}{10}R + \left(1-\dfrac{\sqrt{91}}{10}\right)R = \dfrac{19-\sqrt{91}}{10}R$. Sachant que ON=1 en mètres , on obtient donc

$$R = \frac{10}{19-\sqrt{91}} = \frac{10\left(19+\sqrt{91}\right)}{19^2-91} = \frac{19+\sqrt{91}}{27}$$

   La largeur de l'hélice est donc égale à

$$2(R-BI) = 2R\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\left(19+\sqrt{91}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)}{27}.$$

   Ainsi la largeur de la pale est environ de 28,3 cm.

c) L'aire de la pale est le double de la somme des deux aires :
L'aire A_1 d'une portion de plan limitée par les segments [OK], [KM] et l'arc OM.
L'aire A_2 de la portion de disque de centre K interceptant le petit arc MN.

Notons α une mesure en degrés de l'angle aigu $\widehat{MKN}$
$A_2 = \dfrac{\pi R^2 \alpha}{360}$.

De plus, $\widehat{IBK} = 90 - \alpha$ et donc $\widehat{OBK} = 30 + 90 - \alpha = 120 - \alpha$.
L'aire du secteur angulaire OBM est donc $\dfrac{\pi R^2(120-\alpha)}{360}$.

Donc $AI = \dfrac{\pi R^2(120-\alpha)}{360} - BI \times \dfrac{OK}{2} = \dfrac{\pi R^2(120-\alpha)}{360} = -R\dfrac{\sqrt{3}}{2} \times \dfrac{9}{10} \times \dfrac{1}{2}R$

L'aire de la pale est donc :

$$\pi\left(1 - \frac{\sqrt{91}}{10}\right)^2 R^2 \frac{\alpha}{180} + \frac{\pi R^2(120-\alpha)}{180} - R^2\frac{9\sqrt{3}}{20} = R^2$$

$$\pi R^2\left(\left(1 + \frac{91}{100} - \frac{\sqrt{91}}{5}\right)\frac{\alpha}{180} + \frac{2}{3} - \frac{\alpha}{180}\right) - R^2\frac{9\sqrt{3}}{20}$$

$$= \pi R^2\left(\frac{91}{100} - \frac{\sqrt{91}}{5}\right)\frac{\alpha}{180} + \frac{2}{3}\pi R^2 - R^2\frac{9\sqrt{3}}{20}.$$

Il reste à déterminer α : $\tan\alpha = \dfrac{IB}{IK} = \dfrac{\frac{R\sqrt{3}}{2}}{\frac{2R}{5}} = \dfrac{5\sqrt{3}}{4}$

d'où $\alpha = \tan^{-1}\dfrac{5\sqrt{3}}{4} = 65,209^o$.
L'aire de la pale est donc : 0,2003 m^2, soit 2003 cm^2.

Retour au sommaire

CRÉTEIL

Premier exercice

Série S

Taylor

Énoncé

On considère le programme suivant, nommé TAYLOR (version 2.012)

Début TAYLOR
  Variables du type nombre : a, b, c, d, t, x
  Variables du type fonction : f, f_1, f_2, p
  Saisir a, b, c, d, t
  $f(x) := ax^3 + bx^2 + cx + d$
  $f_1 :=$ dérivée de f
  $f_2 :=$ dérivée de f_1
  $p(x) := f(t) + f_1(t).(x-t) + \dfrac{f_2(t)}{2}(x-t)^2$
  Afficher $f_2(t)$
  Afficher $p(x)$
Fin TAYLOR

1. On exécute TAYLOR pour $(a, b, c, d, t) = (1, 0, 0, 0, 0)$. Qu'obtient-on en sortie ?
   Même question pour $(a, b, c, d, t) = (1, 0, 1, 0, 1)$.

   Lorsque $f_2(t) \neq 0$, nous dirons que la représentation graphique de la fonction p est la « parabole de Taylor » de f au point d'abscisse t ; on la notera (P_t).
2. On exécute TAYLOR pour $(a, b, c, d, t) = (1, 1, 1, 1, 0)$.
   Sur la figure 1, en annexe, on, a tracé la courbe (C) représentant la fonction f
   a) Vérifier que l'on obtient $f_2(0) = 2$ et $p(x) = x^2 + x + 1$.
   b) Tracer (P_0), la « parabole de Taylor » au point d'abscisse 0.
      Quelle conjecture peut-on faire sur la position relative de (C) et (P_0) ?
   c) Étudier la position relative de (C) et (P_0).
3. On exécute TAYLOR pour (a, b, c, d, t).
   On obtient
   $f_2(t) = 6at + 2b$
   $p(x) = at^3 + bt^2 + ct + d + \left(3at^2 + 2bt + c\right)(x-t) + \dfrac{(6at+2b)}{2}(x-t)^2.$
   Un logiciel de calcul formel nous donne l'écran ci-dessous :

1	f(x) := a*x^3+b*x^2+c*x +d
	$x \longrightarrow a*x^3 + b*x^2 + c*x + d$
2	p(x) := a*t^3+b*t^2+c*t +d+(3*a*t^2+2*b*t+c)*(x-t)+(6*a*t+2*b)/2*(x-t)^2
	x ðà $a*t^3 + b*t^2 + c*t + d + ((3*a)*.t^2 + (2*b)*t+c)*(x-t) + \left(\dfrac{(6*a)*t+2*b}{2}\right)$ *(x-t)2
3	factor(f(x) – p(x))
	$(x-t)^3 *a$

   a) Tester le résultat affiché par le logiciel pour $(a, b, c, d, t) = (1, 0, 1, 0, 1)$.

b) Pour t quelconque, étudier la position relative de (C) et (P_t).

c) Sur la figure 2 en annexe, on a tracé la courbe (C) représentative d'une fonction f et trois paraboles $(\Gamma_0), (\Gamma_1), (\gamma_2)$ tangentes à (C) aux points d'abscisses respectives 0, 1 et 2.
Quelles peuvent être, parmi ces trois courbes, les « paraboles de Taylor » associées à f ? Justifier.

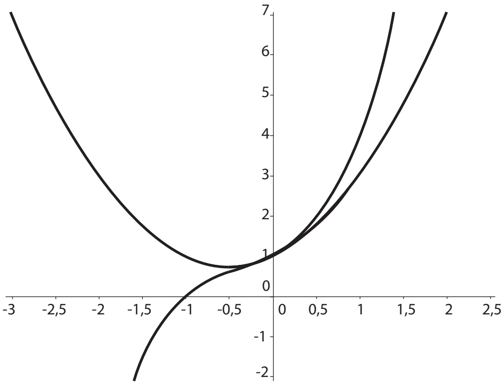
Éléments de solution

1. Pour $(a, b, c, d, t) = (1, 0, 0, 0, 0)$,
$f(x) = x^3, f_1(x) = 3x^2, f_2(x) = 6x, t = 0$
$p(x) = 0$

$(a, b, c, d, t) = (1, 0, 1, 0, 1)$,
$f(x) = x^3, f_1(x) = 3x^2 + 1, f_2(x) = 6x.$
$t = 1$
$p(x) = 2 + 4(x - 1) + 3(x - 1)^2 = 3x^2 - 2x + 1.$

2. a) $f(x) = x^3 + x^2 + x + 1, f_1(x) = 3x^2 + 2x + 1, f_2(x) = 6x + 2$
$t = 0$
$f(0) = 1, f_1(0) = 1, f_2(0) = 2$
$p(x) = 1 + x + x^2.$

b) La courbe demandée ci-contre



c) $f(x) - p(x) = x^3$
Pour x positif, (C) est au-dessus de (P_0). Pour x négatif, c'est le contraire.

3. $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

a) $f(x) = x^3 + x, p(x) = 3x^2 - 2x + 1$
$f(x) - p(x) = x^3 + x - \left(3x^2 - 2x + 1\right) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = (x - 1)^3.$

b) Si $a > 0$
Le signe de $a(x - t)^3$ est positif ou nul pour $x \geqslant t$
Le signe de $a(x - t)^3$ est négatif ou nul pour $x \leqslant t$

Si $a < 0$
Le signe de $a(x - t)^3$ est négatif ou nul pour $x \geqslant t$.
Le signe de $a(x - t)^3$ est positif ou nul pour $x \leqslant t$.

En résumé :
Pour $a > 0$, (C) est d'abord au-dessous de $P_t)$ jusqu'à $x = t$ puis elle est au-dessus.
Pour $a < 0$, elle est d'abord au-dessus puis au-dessous.

c) Ici, $a < 0$.
(C) doit être d'abord au-dessus de $P_t)$ puis au-dessous ?
Seules les paraboles (Γ_1) et (Γ_2) peuvent être des paraboles de Taylor associées à f.

ANNEXE (à rendre avec la copie)

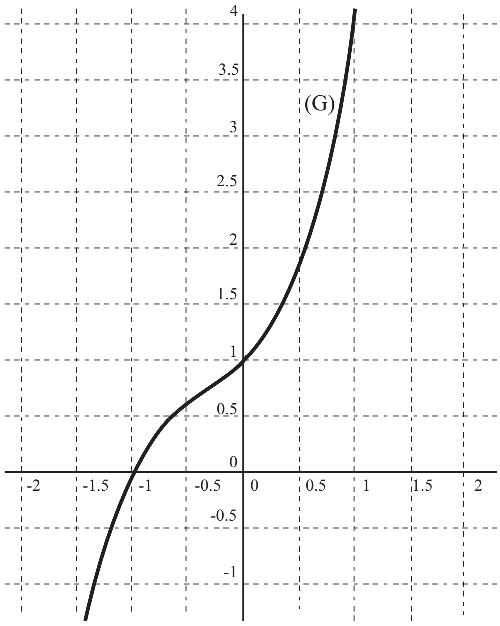


figure 1

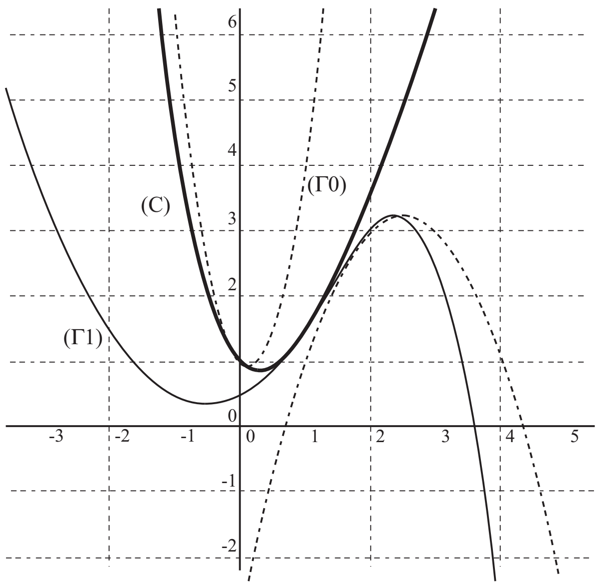


figure 2

Retour au sommaire

CRÉTEIL

Deuxième exercice

Série S

Nombredor sec

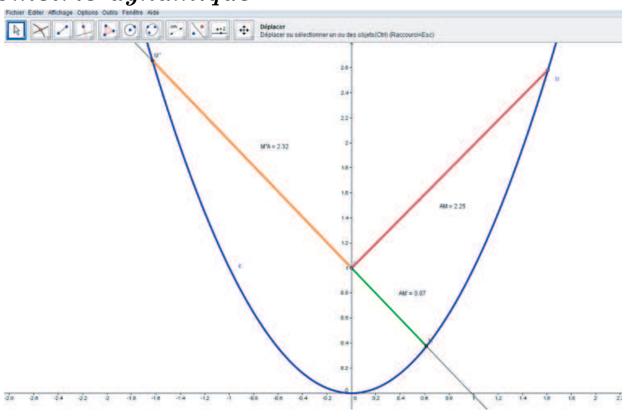
Énoncé

L'artiste Nombredor de Clichy-sous-Bois souhaite peindre un tableau représentant une parabole et un triangle rectangle isocèle « porté » par cette parabole.

Pour cela, il envisage l'étude suivante :
Il munit le plan d'un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ puis il considère la parabole (P) d'équation $y = x^2$ et le point A de coordonnées $(0\,;\,1)$.
Nous vous proposons de l'aider à déterminer toutes les positions des deux points M et M' sur la parabole tels que le triangle AMM' soit rectangle et isocèle en A.

Éléments de solution

Mise en place de conjectures avec un logiciel de géométrie dynamique



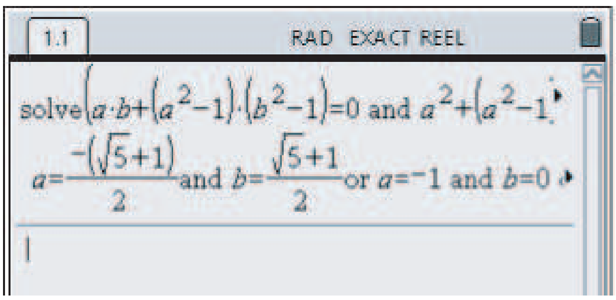
On prend un point M variable sur la parabole.
On construit la droite orthogonale à la droite (AM) passant par A.
Elle recoupe la parabole en deux points (sauf dans deux cas).

Sept positions du point M semblent satisfaire aux deux conditions (l'une d'entre elles donne deux triangles solutions).

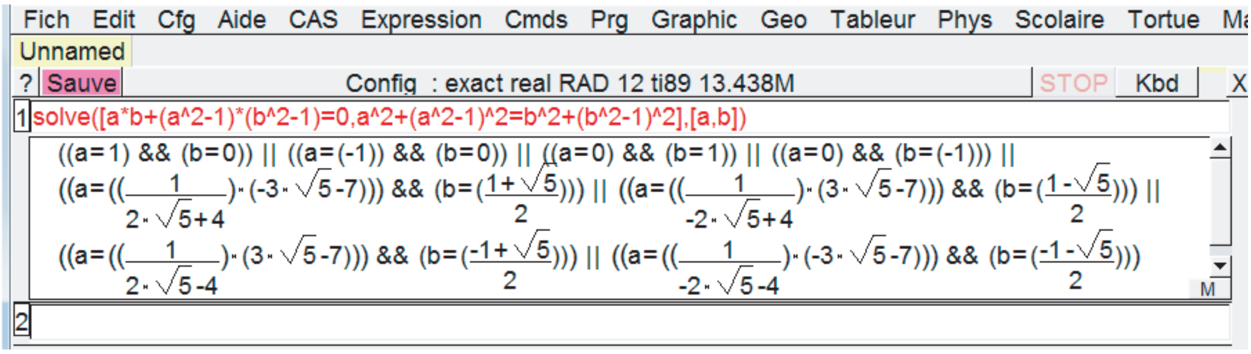
Résolution par le calcul
On considère deux points M(a, a^2) et M'$((b, b^2)$ avec $a \neq b$

$$\left\{\begin{array}{rcl} \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AM'} & = & 0 \\ AM^2 & = & AM'^2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} (a^2-1).(b^2-1) & = & 0 \\ a^2+\left(a^2-1\right)^2 & = & b^2+\left(b^2-1\right)^2 \end{array}\right.$$

Conjecture avec un logiciel de calcul formel
Sur calculatrice



Sur ordinateur



Les logiciels de calcul formel fournissent 8 couples solutions.

Recherche de solutions par le calcul. On résout le système trouvé plus haut :

$$\left\{\begin{array}{rcl} ab+\left(a^2-1\right)\left(b^2-1\right) & = & 0 \\ a^2+\left(a^2-1\right)^2 & = & b^2+\left(b^2-1\right)^2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} ab+a^2b^2-a^2-b^2+1 & = & 0 \\ a^4-b^4-a^2+b^2 & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} ab+a^2b^2-a^2-b^2+1 & = & 0 \\ \left(a^2-b^2\right)\left(a^2+b^2-1\right) & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} ab+a^2b^2-a^2-b^2+1 & = & 0 \\ a^2=b^2 & \text{ou} & a^2+b^2=1 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} ab+a^2b^2-a^2-b^2+1 = 0 \\ a=-b \end{array}\right. \quad \text{ou} \quad \left\{\begin{array}{l} ab+a^2b^2-a^2-b^2+1 = 0 \\ a^2+b^2=1 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} a^4-3a^2+1=0 \\ a=-b \end{array}\right. \quad \text{ou} \quad \left\{\begin{array}{l} ab+a^2b^2 = 0 \\ a^2+b^2=1 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} X^2-3X+1=0 \text{ et } X=a^2 \\ a=-b \end{array}\right. \quad \text{ou} \quad \left\{\begin{array}{l} ab(1+ab)=0 \\ a^2+b^2=1 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} a^2=\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2} \\ a=-b \end{array}\right. \quad \text{ou} \quad \left\{\begin{array}{l} a=0 \text{ ou } b=0 \text{ ou } ab=-1 \\ a^2+b^2=1 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} a=\pm\sqrt{\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}} \\ a=-b \end{array}\right. \quad \text{oo} \quad \left\{\begin{array}{l} a=0 \text{ ou } b=0 \text{ ou } (b=-\dfrac{1}{a} \text{ et } a\neq 0) \\ a^2+b^2=1 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} a=\pm\sqrt{\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}} \\ a=-b \end{array}\right. \quad \text{ou} \quad \left\{\begin{array}{l} (a,b)\in\{(0,1);(0,-1);(0,1);(-1,0)\} \\ \text{ou} \\ b=-\dfrac{1}{a} \text{ et } a\neq 0 \text{ et } a^2+\dfrac{1}{a^2}=1 \text{ pas de solution} \end{array}\right.$$

$(a,b)\in\{(\Phi,-\Phi),(-\Phi,\Phi),(\Phi',-\Phi'),(-\Phi',\Phi'),(0,1),(0,-1),(1,0),(-1,0)\}$

avec $\Phi=\sqrt{\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}}$ et $\Phi'=\sqrt{\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}}$

Remarque : Φ est égal au nombre d'or.

Retour au sommaire

CRÉTEIL

Troisième exercice

Séries autres que S

Paraboles

Énoncé

Le plan est muni d'un repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par : $f(x) = \dfrac{1}{4}x^2 - 2x + 5$. On note (C) sa représentation graphique.

1. a) Donner l'équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 0.

   b) Soit a un réel non nul, on appelle (T_a) la tangente à (C) au point d'abscisse a.
   Montrer que (T_a) et (T) se coupent en un point I dont on déterminera l'abscisse en fonction de a.

   c) Déduire de la question **b.** un procédé simple de construction de la tangente (T_a) lorsque a est donné.

   d) Sur la figure 1, en annexe, on a tracé (C) et (T). Construire sans utiliser le calcul de la dérivée, et avec précision, les tangentes aux points d'abscisses respectives 4, 6 et 7.

2. On définit la « parabole dérivée » (P) de la parabole (C) comme l'ensemble des points de coordonnées $(f'(x); f(x))$ où x décrit l'ensemble des réels.

   a) Calculer $f'(x)$, puis montrer que $x = 2f'(x) + 4$.

   b) Montrer que la « parabole dérivée » (P) de (C) a pour équation : $y = x^2 + 1$.

   c) Sur la figure 2 en annexe, on a tracé (C) et (P).
   Construire sans utiliser le calcul de la dérivée, et avec précision, les tangentes à (C) aux points d'abscisses respectives 2, 4 et 6.

ANNEXE (à rendre avec la copie)

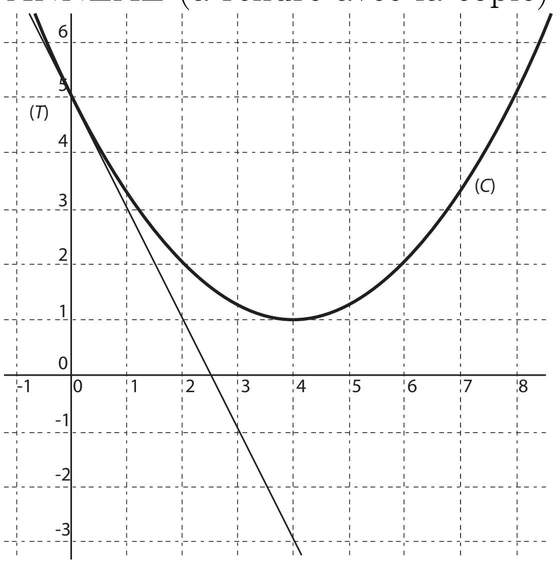


figure 1

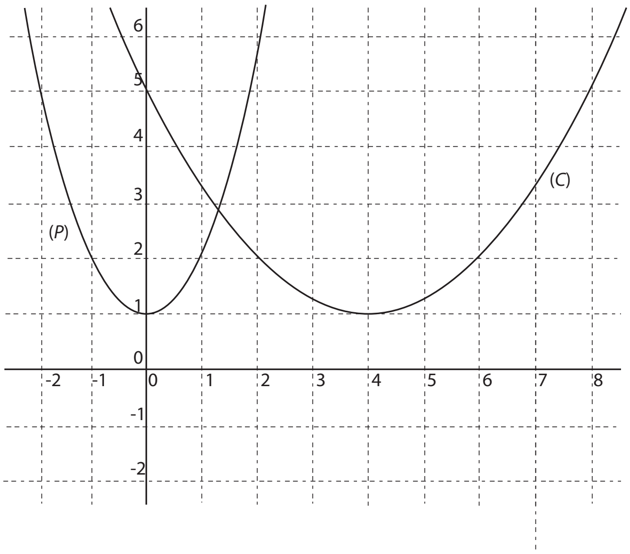
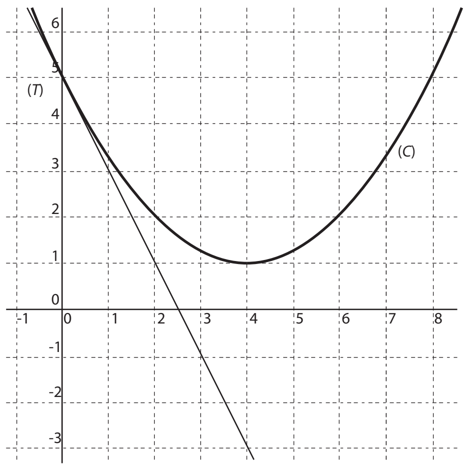


figure 2

Éléments de solution

1. a) $f'(x) = \dfrac{1}{2}x - 2,\ f'(0) = -2.$



$(T) : y = -2x + 5$

b) $$\begin{aligned}(T_a) : y &= \left(\frac{1}{2}a - 2\right)(x - a) + \frac{1}{4}a^2 - 2a + 5 \\ &= \left(\frac{1}{2}a - 2\right)x - \frac{1}{2}a^2 + 2a + \frac{1}{4}a^2 - 2a + 5 \\ &= \left(\frac{1}{2}a - 2\right)x - \frac{1}{4}a^2 + 5\end{aligned}$$

$\mathrm{M}(x, y) \in (T_a) \cap (T)$.

$y = -2x + 5$ et $y = \left(\dfrac{1}{2}a - 2\right) - x - \dfrac{1}{2}a^2 + 5$

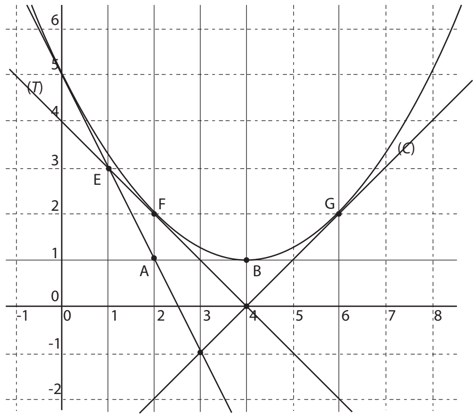
$y = -2x + 5$ et $-2x + 5 = \left(\dfrac{1}{2}a - 2\right)x - \dfrac{1}{4}a^2 + 5$

$y = -2x + 5$ et $-2x = \left(\dfrac{1}{2}a - 2\right)x - \dfrac{1}{4}a^2$

$y = -2x + 5$ et $0 = \left(\dfrac{1}{2}a\right)x - \dfrac{1}{4}a^2$

$y = -2x + 5$ et $x = \dfrac{1}{2}a$.

c) Pour construire la tangente (T_a), on trace le droite qui passe par le point de contact et le point de la tangente (T) d'abscisse $\dfrac{a}{2}$.



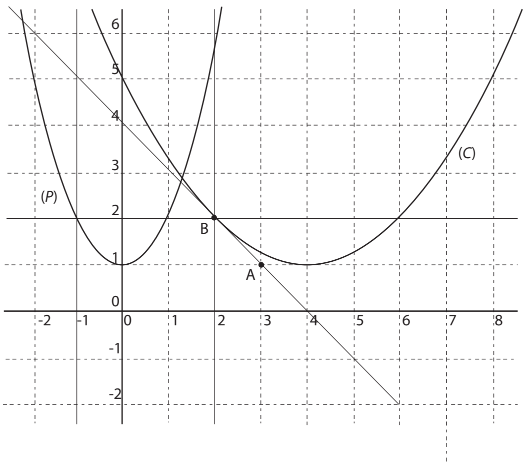
2. a) $f'(x) = \dfrac{1}{2}x - 2 \Leftrightarrow 2f'(x) = x - 4 \Leftrightarrow x = 2f'(x) + 4$

b) $f(x) = \dfrac{1}{4}\left(2f'(x) + 4\right)^2 - 2\left(2f'(x) + 4\right) + 5 = \left(f'(x)\right)^2 + 1$

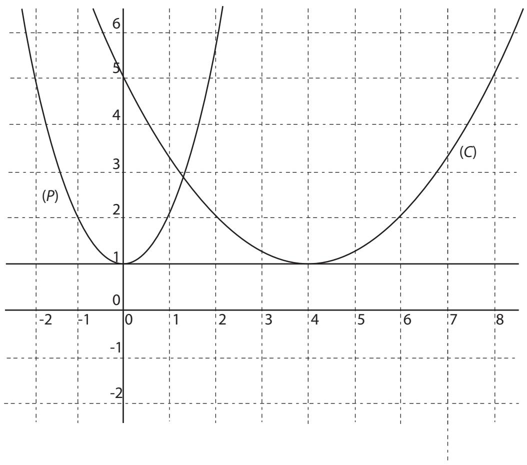
(P) admet pour équation réduite : $y = x^2 + 1$.

c)

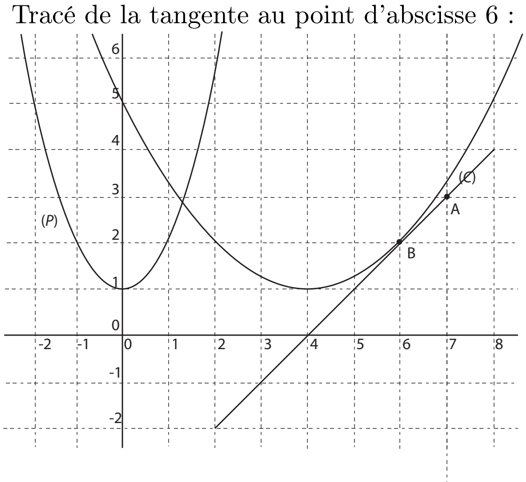
Tracé de la tangente au point d'abscisse 2 :



Tracé de la tangente au point d'abscisse 4 :



Tracé de la tangente au point d'abscisse 6 :



Retour au sommaire

CRÉTEIL

Quatrième exercice

Séries autres que S

Nombredor détaillé

Énoncé

L'artiste Nombredor de Clichy-sous-Bois souhaite peindre un tableau représentant une parabole et un triangle rectangle isocèle « porté » par cette parabole.

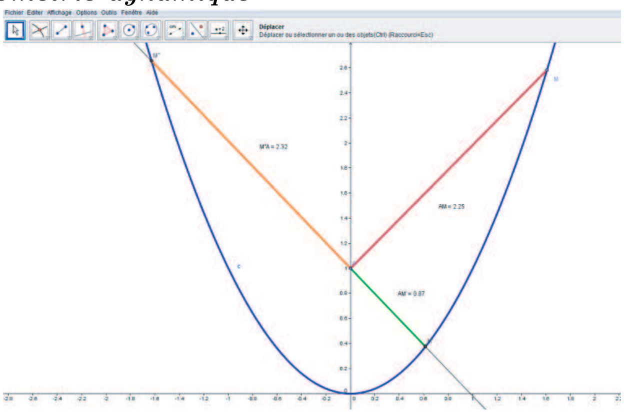
Pour cela, il envisage l'étude suivante :
Il munit le plan d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$, puis il considère la parabole (P) d'équation $y = x^2$ et le point A de coordonnées (0 ; 1).

Nous vous proposons dans cet exercice de l'aider à déterminer toutes les positions des deux points M et M' sur la parabole tels que le triangle AMM' soit rectangle et isocèle en A.

1. On note a et b les abscisses respectives de M et M'. Expliquer pourquoi on a : M$(a; a^2)$ et M'$(b; b^2)$.
2. a) Montrer, en utilisant le théorème de Pythagore, que la phrase : « AMM' *rectangle en* A » peut se traduire par l'égalité $ab + \left(a^2 - 1\right)\left(b^2 - 1\right) = 0$.
   b) Traduire par une égalité la phrase « AMM' est *isocèle en* A ».
3. 3. À l'aide des réponses apportées aux questions précédentes, déterminer toutes les positions des deux points M et M' sur la parabole tels que le triangle AMM' soit rectangle et isocèle en A.

Éléments de solution

Mise en place de conjectures avec un logiciel de géométrie dynamique



On prend un point M variable sur la parabole.
On construit la droite orthogonale à la droite (AM) passant par A.
Elle recoupe la parabole en deux points (sauf pour dans deux cas).

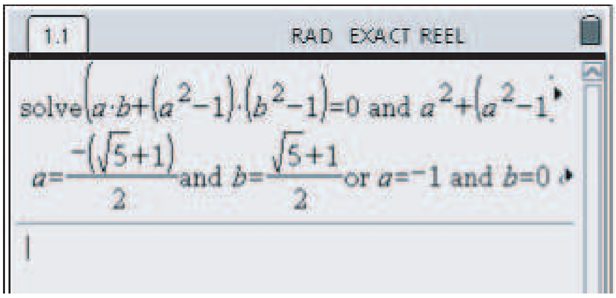
Sept positions du point M semblent satisfaire aux deux conditions (l'une d'entre elles donne deux triangles solutions).

Résolution par le calcul
On considère deux points M(a, a^2) et M'$((b, b^2)$ avec $a \neq b$

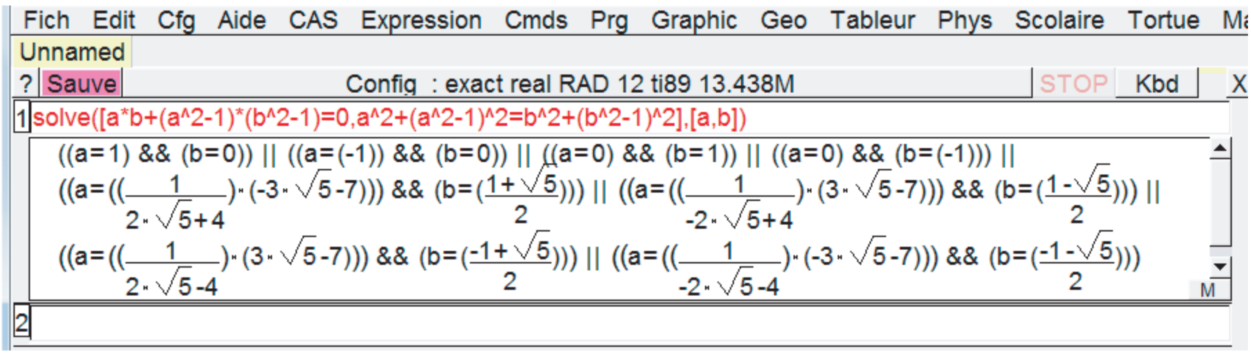
$$\left\{\begin{array}{rcl} \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AM'} & = & 0 \\ AM^2 & = & AM'^2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} ab + (a^2-1).(b^2-1) & = & 0 \\ a^2 + \left(a^2-1\right)^2 & = & b^2 + \left(b^2-1\right)^2 \end{array}\right.$$

Conjecture avec un logiciel de calcul formel

Sur calculatrice



Sur ordinateur



Les logiciels de calcul formel fournissent 8 couples solutions.

Recherche de solutions par le calcul. On résout le système trouvé plus haut :

$$\left\{\begin{array}{rcl} ab+\left(a^2-1\right)\left(b^2-1\right) & = & 0 \\ a^2+\left(a^2-1\right)^2 & = & b^2+\left(b^2-1\right)^2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} ab+a^2b^2-a^2-b^2+1 & = & 0 \\ a^4-b^4-a^2+b^2 & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} ab+a^2b^2-a^2-b^2+1 & = & 0 \\ \left(a^2-b^2\right)\left(a^2+b^2-1\right) & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} ab+a^2b^2-a^2-b^2+1 & = & 0 \\ a^2=b^2 & \text{ou} & a^2+b^2=1 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} ab+a^2b^2-a^2-b^2+1 = 0 \\ a=-b \end{array}\right. \quad \text{ou} \quad \left\{\begin{array}{l} ab+a^2b^2-a^2-b^2+1 = 0 \\ a^2+b^2=1 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} a^4-3a^2+1=0 \\ a=-b \end{array}\right. \quad \text{ou} \quad \left\{\begin{array}{l} ab+a^2b^2 = 0 \\ a^2+b^2=1 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} X^2-3X+1=0 \text{ et } X=a^2 \\ a=-b \end{array}\right. \quad \text{ou} \quad \left\{\begin{array}{l} ab(1+ab)=0 \\ a^2+b^2=1 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} a^2=\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2} \\ a=-b \end{array}\right. \quad \text{ou} \quad \left\{\begin{array}{l} a=0 \text{ ou } b=0 \text{ ou } ab=-1 \\ a^2+b^2=1 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} a=\pm\sqrt{\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}} \\ a=-b \end{array}\right. \quad \text{oo} \quad \left\{\begin{array}{l} a=0 \text{ ou } b=0 \text{ ou } (b=-\dfrac{1}{a} \text{ et } a\neq 0) \\ a^2+b^2=1 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} a=\pm\sqrt{\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}} \\ a=-b \end{array}\right. \quad \text{ou} \quad \left\{\begin{array}{l} (a,b)\in\{(0,1);(0,-1);(0,1);(-1,0)\} \\ \text{ou} \\ b=-\dfrac{1}{a} \text{ et } a\neq 0 \text{ et } a^2+\dfrac{1}{a^2}=1 \text{ pas de solution} \end{array}\right.$$

$(a,b)\in\{(\Phi,-\Phi),(-\Phi,\Phi),(\Phi',-\Phi'),(-\Phi',\Phi'),(0,1),(0,-1),(1,0),(-1,0)\}$

avec $\Phi=\sqrt{\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}}$ et $\Phi'=\sqrt{\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}}$

Remarque : Φ est égal au nombre d'or.

Retour au sommaire

DIJON

Premier exercice

Toutes séries

Le tour de magie

Énoncé

On se propose d'étudier le tour d'illusionniste suivant.
Le magicien demande à un spectateur de choisir un nombre d'au moins trois chiffres et de lui donner le reste de la division euclidienne par 9 de ce nombre. Il lui demande ensuite d'éliminer secrètement un des chiffres (non nul) du nombre choisi, de diviser le nombre obtenu par 9 et de lui communiquer le reste. Le magicien annonce alors le chiffre qui a été supprimé.

Le magicien utilise l'algorithme suivant :

- si les deux restes sont égaux, le chiffre supprimé est le 9 ;
- si le second reste est inférieur au premier, le chiffre supprimé est la différence des deux restes ;
- sinon, le chiffre supprimé est la somme du premier reste et de 9, à laquelle on retranche le second reste.

1. Émile choisit le nombre 2012. Il décide de supprimer le 1. Décrire le déroulement du tour de magie dans ce cas en détaillant les calculs.
2. Émile choisit un nombre à quatre chiffres dont le reste de la division par 9 est 6 :
   - lorsqu'il supprime le chiffre des milliers, il obtient 4 comme second reste ;
   - lorsqu'il supprime le chiffre des centaines, il obtient 1 comme second reste ;
   - lorsqu'il supprime le chiffre des dizaines, il obtient 6 comme second reste ;
   - lorsqu'il supprime le chiffre des unités, il obtient 7 comme second reste.

   Quel est le nombre choisi par Émile ?
3. Pourquoi le magicien demande-t-il au spectateur de ne pas supprimer un zéro dans le nombre qu'il a choisi ? On pourra illustrer la réponse à l'aide d'un exemple.
4. Démontrer, pour un nombre à trois chiffres, l'affirmation suivante :
   « Lorsque l'on divise un nombre par 9, le reste obtenu est le même que lorsque l'on divise la somme des chiffres de ce nombre par 9. »

   On admet désormais que ce résultat reste valable pour tout nombre entier.
5. Démontrer que pour un nombre de trois chiffres, l'algorithme du magicien renvoie toujours le bon résultat.

Éléments de solution

1. Avec 2012, le premier reste est 5, le deuxième est 4.
   $5 - 4 = 1$, donc le chiffre supprimé est 1.
2. Le nombre choisi est 2598.
3. Si l'on admet un nombre avec 0, et si le nombre contient 9, les deux restes sont égaux que l'on supprime le 0 ou le 9, et l'on ne sait pas si le chiffre supprimé est 0 ou 9.
   Exemple : avec 2019, le reste est égal à 3, que l'on supprime 0 ou 9.

4. Notons respectivement c, d, u les nombres de centaines, de dizaines, d'unités du nombre.
   La preuve repose sur l'égalité suivante :

$$100c + 10d + u = 99c + c + 10d + u = 9(11c + d) + c + d + u.$$

5. On note a, b, c les trois chiffres du nombre, écrits dans cet ordre.
   La question précédente nous autorise à considérer la somme des trois chiffres.
   Par exemple pour retrouver c, on écrit : $a + b + c = 9 \times q_1 + r_1$, puis $a + b = 9 \times q_2 + r_2$
   . On en tire : $c = 9 \times (q_1 - q_2) + r_1 - r_2$.
   Comme $0 \leqslant c < 9$ et $-9 \leqslant r_1 - r_2 \leqslant 9$, on en tire $-9 \leqslant 9 \times (q_1 - q_2) < 18$. Donc $q_1 - q_2 = 0$ ou $q_1 - q_2 = 1$.
   - 1er cas : $r_1 = r_2$. Puisque $c \neq 0$ par hypothèse, on en déduit que $c = 9$.
   - 2ème cas : $r_1 > r_2$, soit $r_1 - r_2 > 0$. Dans ce cas $q_2 = 0$ Sans quoi c serait supérieur à 9. D'où $c = r_1 - r_2$.
   - 3ème cas : $r_1 < r_2$, soit $r_1 - r_2 < 0$. Dans ce cas, $q_1 - q_2 = 1$, sans quoi c serait négatif.

   Finalement, $c = 9 + r_1 - r_2$.

Retour au sommaire

DIJON

Deuxième exercice

Série S

Drôle de distance

Énoncé

Dans le plan muni d'un repère orthonormal, on trace toutes les droites d'équation $x = m$ et $y = n$ pour tous les entiers relatifs m et n, et on considère le réseau formé de tous leurs points d'intersection. Ce réseau est donc constitué de tous les points du plan ayant des coordonnées entières. On définit la distance entre deux points A et B du réseau comme la plus courte distance reliant ces deux points, si l'on suit les lignes tracées. On la note d(A,B). On considère les points O$(0, 0)$, A$(8, 0)$, B$(3, 3)$, C$(2, -4)$. .

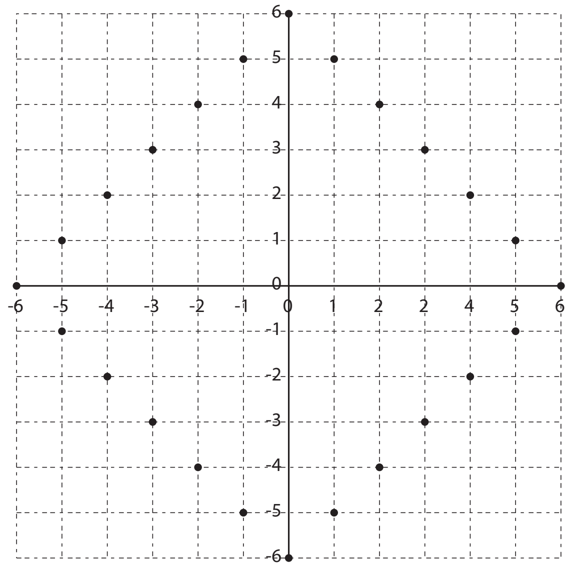
1. **Quelques généralités**
   a) Vérifier que d(A,B)=8, puis calculer les autres distances mutuelles entre les points O, A, B, C.
   b) Si M(x, y) et N(x', y') sont deux points du réseau, exprimer d(M,N) en fonction de x, x', y, y'. En déduire que la distance entre deux points du réseau est un nombre entier.
   c) Soit M, N et P trois points du réseau. Montrer que parmi les trois nombres d(M,P), d(P,N) et d(M,N) :
   - soit il y a trois nombres pairs ;
   - soit il y a un nombre pair et deux nombres impairs.
2. **Cercle**

   Si I est un point du réseau et r un entier strictement positif, le cercle de centre I et de rayon r est l'ensemble des points M du réseau tels que d(I,M)= r. On le note c (I, r).
   a) Montrer que les points B et C appartiennent à c (O, 6), puis représenter ce cercle.
   b) Combien de points y a-t-il sur un cercle de rayon r ?
3. **Médiatrice d'un segment**
   Soient I et J deux points du réseau. La médiatrice du segment [IJ] est l'ensemble des points M du réseau tels que d(M,I) = d(M,J)..
   a) Dessiner les points de la médiatrice du segment [OA] dont l'ordonnée est comprise entre -6 et 6.
   b) Dessiner les points de la médiatrice du segment [AC] dont l'ordonnée est comprise entre -8 et 4.
   c) Dessiner les point de la médiatrice du segment [OB] dont l'abscisse et l'ordonnée sont comprises entre -3 et 6.
   d) d) Que peut-on dire de la médiatrice du segment [IJ] si d(I, J) est impair ?

Éléments de solution

1. a) d(O,A)=8, d(O,B)=d(O,C)=6, d(A,B)=d(B,C)=8, d(A,C)=10
   b) d(M,N) $= |x - x'| + |y - y'|$.
   c) d(M,N) a la même parité que $(x - x') + (y - y')$. Posons P$(x", y")$.
   d(M,P) a la même parité que$(x - x") + (y - y")$ et d(N,P) a la même parité que $(x" - x') + (y" - y')$.
   La somme de ces deux nombres est égale au premier. Si les deux nombres sont pairs ou impairs tous les deux, la somme est paire, s'ils ont des parités différentes, la somme est impaire. Le résultat en découle.

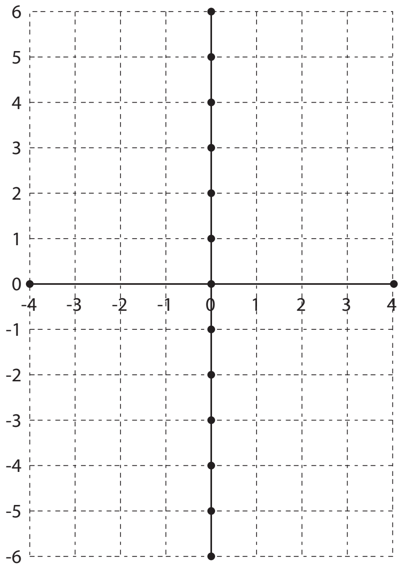
2. a) Le cercle de centre O et de rayon 6



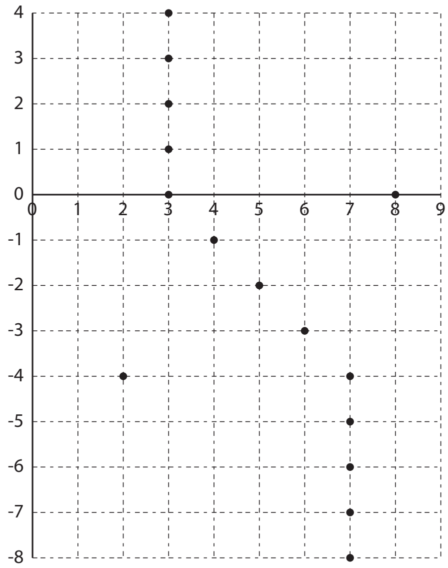
b) Le cercle contient $4r$ points.

3.

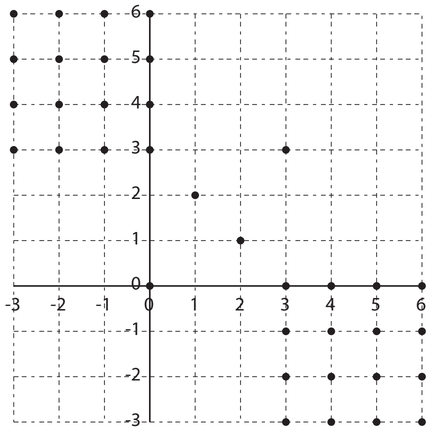
a) La médiatrice de [OA]



b) La médiatrice de [AC]



c) La médiatrice de [OB]



d) Si M appartient à la médiatrice du segment [IJ], on a $d(\mathrm{M,I}) = d(\mathrm{M,J})$. Ces deux nombres sont soit pairs soit impairs tous les deux, donc on aurait parmi les trois distances soit trois nombres impairs, soit un nombre pair et deux impairs. C'est impossible d'après 1. c).
Donc, si est impair, la médiatrice du segment [IJ] est l'ensemble vide

Retour au sommaire

DIJON

Troisième exercice

Séries autres que S

Pavage bicolore

Énoncé

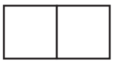
Pour paver une surface, on dispose de carreaux de faïence carrés, tous identiques : chaque carreau est séparé par une diagonale en deux moitiés, l'une est noire, l'autre blanche (figure ci-contre).

Sur un emplacement parallèle aux bords de la feuille, il y a donc quatre façons de disposer un carreau :

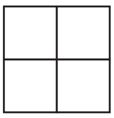
Disposition 1 Disposition 2 Disposition 3 Disposition 4

Pour les assembler, le carreleur a pour consigne de **ne jamais mettre l'un contre l'autre un côté noir d'un carreau et un côté blanc d'un autre carreau**. Cette consigne doit être respectée dans les questions suivantes.

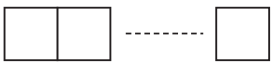
1. Représenter sur un dessin toutes les façons qu'a le carreleur de disposer les deux carreaux sur la surface suivante (1 ligne, 2 colonnes) : [1]



2. De combien de façons le carreleur peut-il placer 4 carreaux sur la surface suivante (2 lignes, 2 colonnes) ? [1]

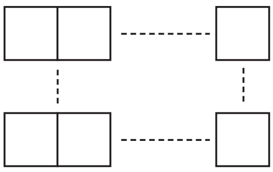


3. De combien de façons le carreleur peut-il placer les carreaux pour une frise de 2012 carreaux sur la surface suivante (1 ligne, 2012 colonnes) ? Vérifier que le résultat peut s'écrire sous forme d'une puissance de 2.



2012 carrés analogues

4. Le carreleur doit placer 320 carreaux sur la surface rectangulaire suivante, comprenant 16 lignes et 20 colonnes.



16 lignes, 20 colonnes

[1] Dans chaque question, on considère que la surface est fixe, orientée comme sur la feuille, et ne peut pas subir une rotation. Ainsi par exemple, les deux dispositions suivantes sur une surface à 1 ligne et 2 colonnes sont considérées distinctes

 et 

a) De combien de façons peut-il carreler cette surface ?

b) Si l'on impose la contrainte supplémentaire que le bord de la surface soit entièrement blanc, de combien de façons peut-il carreler la surface ?

Éléments de solution

1. Il y a quatre façons de disposer le carreau de gauche, puis deux façons de disposer celui de droite.
2. Il y a 8 façons de disposer les carreaux sur la première ligne.
   Ensuite il y a 2 façons de disposer le carreau en bas à gauche, puis une seule façon de disposer le dernier carreau.
   Au total : $8 \times 2 = 16$ dispositions possibles.
3. Il y a 4 façons de disposer le premier carreau, puis 2 façons pour chacun des suivants, soit au total 4×2^{2011} façons, ou encore 2×2^{2012} façons, ou encore 2^{2013} façons
4. a) Il y a 2^{21} façons de disposer les carreaux sur la première ligne.
   Ensuite, pour chacune des 15 lignes, il y a 2 façons de disposer chacun des carreaux de la première colonne.
   La première ligne et la première colonne étant fixées, il n'y a plus qu'une seule façon de disposer les carreaux restants.
   Le nombre total de dispositions est donc $2^{21} \times 2^{15}$, soit 2^{36}.

   Remarque : avec m lignes et n colonnes, le nombre de dispositions est 2^{m+n}.

   b) Pour que le bord de ce rectangle soit blanc, le premier carreau (du coin en haut à gauche) doit être disposé pour que son bord supérieur et son bord gauche soient tous les deux blancs :

   Chaque carreau suivant de la première ligne et de la première colonne a alors une disposition imposée par les contraintes.
   Il n'y a donc qu'une seule disposition de la première ligne et de la première colonne donc, en raisonnant comme dans la question 4.a), une seule disposition au maximum de l'ensemble des carreaux.

   Il reste à vérifier que la dernière ligne vérifie bien les contraintes. C'est le cas avec 16 lignes, ce ne serait pas le cas si le nombre de lignes était impair.

Retour au sommaire

GRENOBLE

Premier exercice

Toutes séries

Polygones manichéens

Énoncé

On note P_n un polygone convexe à n ($n \geqslant 3$) sommets.
Par ailleurs, deux triangles sont d'intérieurs disjoints s'ils n'ont pas de point commun ou si leurs points communs appartiennent à un de leurs côtés.

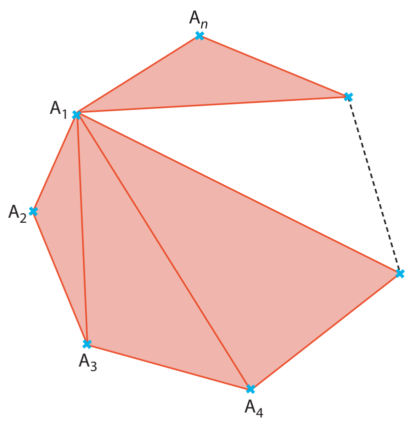
1. Montrer que tout polygone P_n est la réunion de $n-2$ triangles dont les intérieurs sont deux à deux disjoints.
   On dira qu'une telle réunion de $n-2$ triangles dont les intérieurs sont deux à deux disjoints est une triangulation de P_n , et l'on admettra dans la suite que toute triangulation de P_n contient exactement $n-2$ triangles.
2. a) Représenter toutes les triangulations comportant 2 triangles de P_4.
   b) Représenter toutes les triangulations comportant 3 triangles de P_5.
   c) Montrer que P_6 admet une triangulation dont au moins l'un des triangles n'a aucun côté au bord de P_6.
3. Montrer que l'on peut toujours colorier les triangles d'une triangulation de P_n en noir et en blanc de telle sorte que deux triangles qui ont une arête commune ont des couleurs différentes.

   On supposera dorénavant que les triangles d'une triangulation ont été coloriés en noir ou en blanc de façon à ce que deux triangles qui ont une arête commune soient toujours de couleurs différentes. Une telle triangulation sera dite admissible si tous les triangles ayant au moins une arête au bord de P_n ont la même couleur (par exemple noir).
4. Trouver, lorsqu'elles existent, toutes les triangulations admissibles de P_3, P_4, P_5 et P_6.
5. Montrer que pour tout $k \geqslant 1$, P_{3k} a au moins une triangulation admissible.
6. Montrer que toute triangulation admissible de P_{3k} a exactement $2k-1$ triangles d'une couleur et $k-1$ triangles de l'autre couleur.
7. Montrer que pour tout $k \geqslant 1$, P_{3k+1} et P_{3k+2} n'ont aucune triangulation admissible.

Éléments de solution

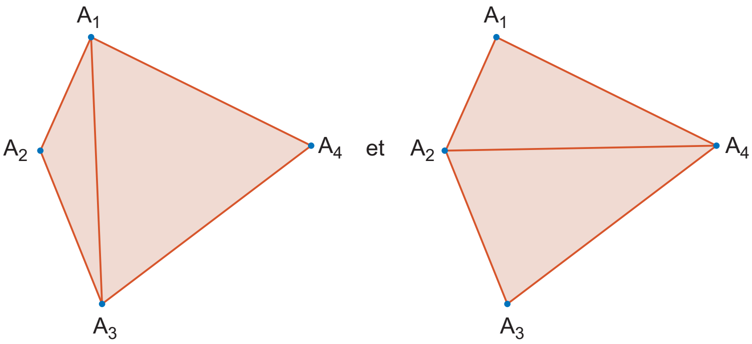
1. Soient A_1,A_2,...A_n les n sommets du polygone P_n , nommés dans le sens trigonométrique. Les triangles $A_1A_2A_3$, $A_1A_3A_4$,...$A_1A_{n-1}A_n$ sont $n-2$ triangles d'intérieurs disjoints dont la réunion forme P_n.

   Autre méthode : Si $n = 3$, il n'y a rien a faire.
   Si $n > 3$, on choisit un sommet et on retranche le triangle formé de ce sommet et de ses deux voisins de P_n.
   Cela réduit le nombre de sommets de 1 et on peut itérer cela $n-3$ fois avant d'arriver au cas $n = 3$. Il y a donc $n-3+1 = n-2$ triangles en tout.



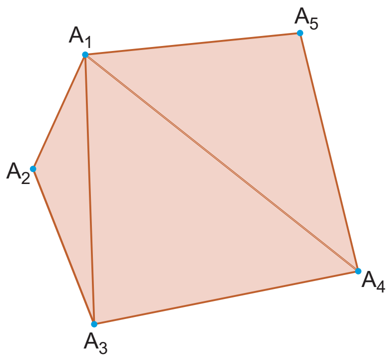
N.B. Ces raisonnements ne prouvent pas que toute triangulation comporte $n-2$ triangles.

2. a) Les triangulations comportant deux triangles de P_4 :



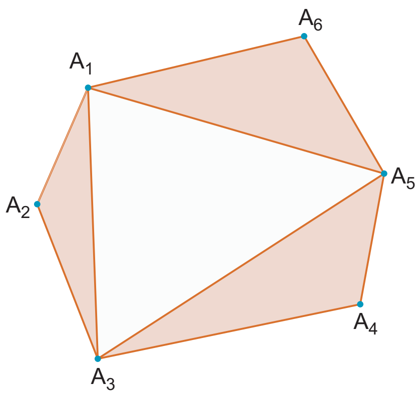
sont les seules triangulations de P_4.

b) Les triangulations comportant 3 triangles de P_3.



et quatre autres triangulation en remplaçant A_1 par A_2, puis par A_3 ...

c) c) Montrer que P_6 admet une triangulation dont au moins l'un des triangles n'a aucun côté au bord de P_6.



est une triangulation dont au moins l'un des triangles n'a aucun côté au bord de P_6.

3. On peut toujours colorier les triangles d'une triangulation de P_n en noir et en blanc de telle sorte que deux triangles qui ont une arête commune ont des couleurs différentes, en effet en reliant les centres de gravité des triangles adjacents par des segments, on voit apparaitre un arbre dont les sommets correspondent aux triangles.
Il est toujours possible de colorier les sommets d'un arbre en blanc et noir de façon à ce que les arêtes relient toujours un sommet blanc a un sommet noir.

4. La seule triangulation de P_3 est admissible. P_4 et P_5 n'ont pas de triangulation admissible (cf figures ci-dessus) P_6 a une triangulation admissible : il suffit de colorier en noir les triangles extérieurs de la triangulation donnée à la question 2.

5. P_3 a une triangulation admissible de même que P_6. Pour passer de P_{3k} à P_{3k+3}, il suffit de remplacer deux côtés consécutifs de P_{3k} appartenant à un même triangle par un pentagone convenablement

triangulé.
On obtient ainsi de proche en proche une triangulation de tout polygone dont le nombre de côtés est un multiple de 3.

6. Supposons que tous les triangles au bord d'une triangulation admissible de P_n soient noirs. Les $n-2$ triangles de la triangulation sont séparés par $n-3$ arêtes qui bordent toutes exactement un seul triangle blanc.
   Le nombre de triangles blancs est donc donné par $\dfrac{n-3}{3}$ qui vaut $k-1$ si $n=3k$.
7. Le raisonnement précédent montre que pour tout $k \geqslant 1$, P_{3k+1} et P_{3k+2} n'ont aucune triangulation admissible puisque dans ces cas $\dfrac{n-3}{3}$ n'est pas un entier.

Retour au sommaire

GRENOBLE

Deuxième exercice

Séries S et STI

Droite et naissance de l'ère industrielle

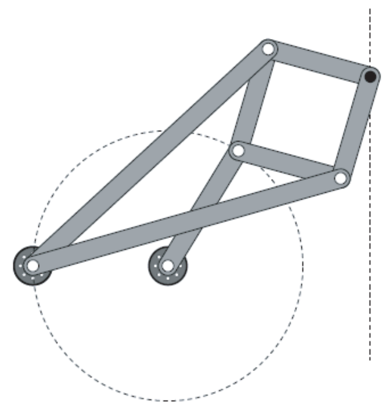
Énoncé

Si l'on devait définir une droite, on penserait à « *le plus court chemin entre deux points* » (définition intrinsèque) et à « *ce que l'on trace avec une règle* » ; mais cette deuxième définition apparemment effective n'en est pas une : on construit une droite avec une droite (la règle), c'est-à-dire que l'on copie une droite préexistante.

La question se pose donc : existe-t-il un outil, pour tracer des droites, ne faisant aucun usage d'une droite préexistante ?

Jusqu'à l'époque des premières machines à vapeur, les artisans savaient fabriquer des pièces raisonnablement droites. Mais on ne savait pas faire mouvoir une pièce dans un mouvement rectiligne parfait. Pourtant, dans pratiquement toutes les machines de production on a besoin de pièces qui se déplacent suivant un mouvement rectiligne. Ainsi toutes les nations, où l'industrie moderne se développait, cherchaient des machines produisant des mouvements rectilignes parfaits. De très grands mathématiciens ont participé à ces recherches.

La première solution exacte, dont toutes les autres découlent, est due à Charles Nicolas Peaucellier (1832-1913), officier des armées françaises.



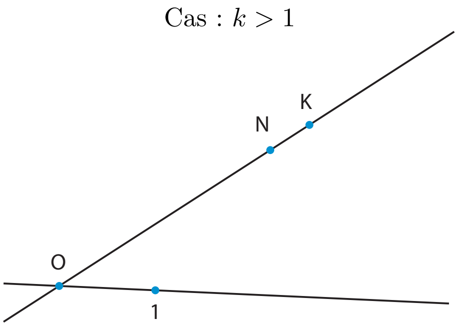
La machine de Peaucellier

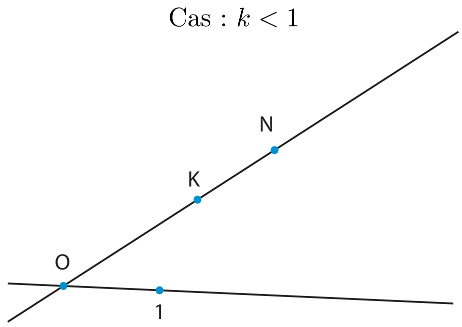
Il s'agit ici de voir pourquoi la machine de Peaucellier permet un mouvement rectiligne parfait.

I - Une nouvelle transformation : l'inversion

Définition : Étant donnés un point O du plan et un réel k positif non nul, on appelle inversion de centre O, de puissance k la transformation qui à tout point M du plan, distinct de O, fait correspondre le point M' de la demi-droite [OM) tel que $OM \times OM' = k$.

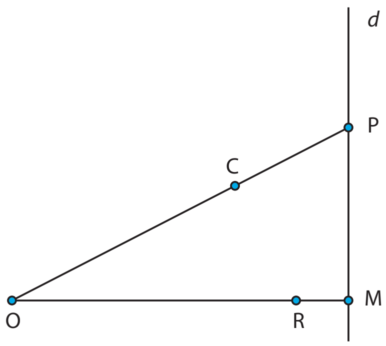
1. **Images de points** : Soit O un point donné.
   a) Soit M un point situé à 4 unités de O. Tracer l'image M' de M par l'inversion de centre O et de puissance $k = 6$.
   b) Quelle est l'image de ce point M' par cette même inversion ?
   c) Le point O a-t-il une image par cette inversion ? Pourquoi ?
   d) Existe-t-il des points du plan invariants par cette inversion de centre O, de puissance $k = 6$ (c'est-à-dire des points qui sont leur propre image par cette inversion) ? Si oui, quel ensemble décrivent-ils ?
   e) Construction dans le cas général, une unité étant choisie. Soit N un point quelconque, distinct de O.
   Compléter les figures ci-dessous en construisant, à la règle non graduée et au compas, l'image de N par l'inversion de centre O, de puissance k, réel positif quelconque fixé.





2. **Image d'une droite, image d'un cercle**

   Soit O un point donné et k un réel positif non nul.
   Soit d une droite ne passant par O. Soit M le point d'intersection de d et de la perpendiculaire à d passant par O. Soit R l'image de M par l'inversion de centre O de puissance k.
   Soit P un point quelconque de d et C son image par la même inversion.



a) Montrer que $\dfrac{OC}{OR} = \dfrac{OM}{OP}$.

b) On note C' le point d'intersection de (OP) et de la perpendiculaire à (OP) passant par R. En calculant de deux façons le cosinus de l'angle $\widehat{MOP}$ montrer que $OC = OC'$.

c) En déduire que l'angle $\widehat{OCR}$ est droit.

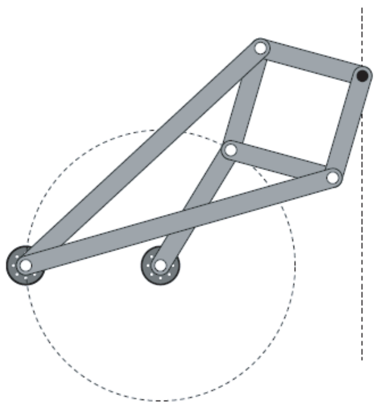
d) En déduire l'ensemble décrit par les points C quand P se déplace sur d.

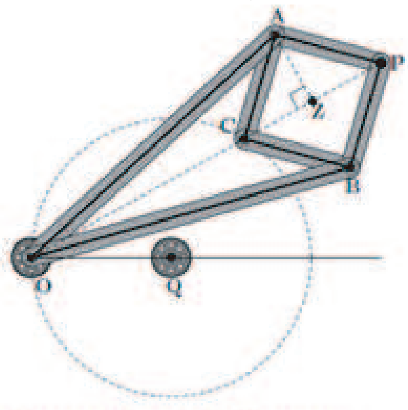
e) En déduire que l'image du cercle de diamètre [OR] par l'inversion de centre O de puissance k est incluse dans la droite d.

II - Analysons la machine de Peaucellier

L'étude conduite dans la partie I montre que dans le cas de trois points alignés O, C, P tels que le produit $OC \times OP$ est constant (égal à k), lorsque le point C décrit le cercle de diamètre [OR], le point P décrit une droite (XY) (ou d).

Considérons la machine de Peaucellier dans laquelle $OA = OB$ et ACBP est un losange :





Analyse de la machine de PEAUCELLIER

Par construction, C décrit un cercle de diamètre [OR] (où R est le symétrique de O par rapport à Q).
Il reste à vérifier que $OC \times OP$ est constant lors du mouvement du système articulé.

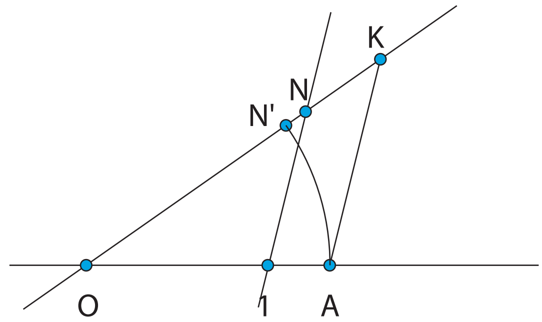
1. Montrer que les points O, C et P sont alignés, quelle que soit la position du système articulé.
2. Montrer que $OC \times OP$ est constant.
   Indication : on pourra utiliser $OC = OZ - ZP$ et $OP = OZ + ZP$.
3. Conclure.

Éléments de solution

I - Une nouvelle transformation : l'inversion

1. a) On place M' sur [OM] à 1,5 cm de O
   b) L'image de M' est le point Z tel que Z est sur [OM') avec $OM \times OZ = 6$. Il s'agit donc du point M.
   c) Le point O n'a pas d'image car d'une part la demi-droite [OO) n'est pas définie, d'autre part le produit de la distance OO avec n'importe quel réel donne 0 et non 6.
   d)) Si M est un point invariant, alors $OM.OM = 6$, soit $OM^2 = 6$, M est donc un point du cercle de centre O et de rayon $\sqrt{6}$. Réciproquement, si M est un point de ce cercle, les points O, M et M sont alignés et vérifient $OM.OM = 6$, donc M est sa propre image.
   e) Pour tout point N distinct de O, $ON.ON = k$ équivaut à $ON = \dfrac{k}{ON}$ ou encore $\dfrac{ON}{1} = \dfrac{k}{ON}$.

   On utilise le théorème de Thalès pour obtenir A, puis on reporte OA sur [ON).



2. a) R est l'image de M donc $OR.OM = k$.
   C est l'image de P donc $OC.OP = k$. Ainsi $OR.OM = OC.OP$ soit $\dfrac{OM}{OP} = \dfrac{OC}{OR}$.
   b) On a $\cos\left(\widehat{MOP}\right) = \dfrac{OC'}{OR}$ dans le triangle OC'R, rectangle en C'
   et $\cos\left(\widehat{MOP}\right) = \dfrac{OM}{OP}$ dans le triangle OMP, rectangle en M.
   Ainsi $\dfrac{OC'}{OR} = \dfrac{OC}{OR}$ donc $OC = OC'$ et C = C'.
   c) L'angle $\widehat{OCR}$ est droit puisque le triangle OC'R est rectangle en C'.
   d) $\widehat{OCR} = 90^o$ donc C appartient au cercle de diamètre [OR].
   L'ensemble des points C est donc inclus dans le cercle de diamètre [OR].
   e) Réciproquement, lorsque C est un point de ce cercle, autre que O, en désignant par P' le projeté orthogonal de P sur (OR), on montre (de la même manière) que P' et M sont confondus. Donc P est sur la perpendiculaire à (OR) en M c'est-à-dire sur la droite d.

II - Analyse de la machine de Peaucellier

1. Le système articulé est construit tel que $OA = OB, CA = CB$ et $PA = PB$.
   Ainsi O, C et P sont trois points de la médiatrice de [AB]. Ils sont donc alignés.
2. $OC.OP = (OZ - CZ)(OZ + ZP)$ (O,C,Z,P alignés)
   $= (OZ - ZP)(OZ + ZP)$
   $= OZ^2 - ZP^2$
   $= (OA^2 - AZ^2) - (AP^2 - AZ^2)$ (Théorème de Pythagore dans AZO et AZP)
   $= OA^2 - AP^2$ qui est constant.
3. Il résulte de la partie I que le point P se déplace sur la droite d. La machine de Peaucellier engendre donc un mouvement rectiligne.

Retour au sommaire

GRENOBLE

Troisième exercice

Séries autres que S et STI

Des territoires aléatoires

Énoncé

On cherche à modéliser la répartition des habitants et la surface occupée par chacun d'eux dans deux villes particulières de N habitants (où N est un nombre entier). Pour cela on étudiera deux modèles.

A.Modèle 1

On considère que la ville est une bande de terre le long de la mer. On modélise le territoire de cette ville par une suite de carrés alignés (voir la figure 1). Notons A le nombre de carrés qui composent la ville.

1	2	3	4	5	------------------		A

figure 1

La répartition des habitants suit le modèle suivant : on construit aléatoirement une liste de N nombres entiers distincts choisis entre 1 et A (correspondant à chacun des habitants), et on place chacun des N habitants au centre du carré correspondant à son numéro. On répartit alors la surface de la ville entre ses habitants en attribuant chaque point de la surface des carrés qui la composent à la personne la plus proche de ce point.

1. Dans cette question, on prend $N = 3$ et $A = 9$.

1	2	3	4	5	6	7	8	9

figure 2

On a construit de manière aléatoire la liste des 3 valeurs suivantes correspondants à chacun des 3 habitants : 2 ; 8 ; 9.
Recopier le tableau, placer ces 3 habitants et représenter par trois couleurs différentes la surface occupée par chacun d'eux. Donner alors l'aire de chacune de ces surfaces (l'unité d'aire est l'aire d'un des carrés qui composent la ville).

2. Dans cette question N et A sont deux entiers quelconques (avec $N \leqslant A$) et chaque carré a toujours une surface d'une unité.

   a) Quelle est l'aire de la plus petite surface possible pour un habitant ? (justifier)

   b) Quelle est l'aire de la plus grande surface possible pour un habitant ? (justifier)

B - Modèle 2

On considère que la ville peut être modélisée par un territoire carré.
On choisit un nombre entier A supérieur ou égal à N tel que A soit le carré d'un entier.
On divise ce « carré-ville » en A petits carrés de même taille que l'on numérote de 1 à A.
On construit aléatoirement une liste de N nombres entiers distincts choisis entre 1 et A, et on place chacun des N habitants au centre du carré correspondant à son numéro.
On répartit alors la surface de la ville en attribuant chaque point de la surface des carrés qui la composent à la personne la plus proche de ce point.

1	2	3
4	5	6
7	8	9

1. Dans cette question on prend $N = 3$ et $A = 9$.
   On conserve la liste des 3 valeurs précédentes : 2 ; 8 ; 9.
   Recopier le tableau, placer les 3 habitants, et représenter en couleur la surface occupée par chacun de ces habitants.
   Donner alors l'aire de cette surface en supposant toujours que la surface de chaque petit carré a une aire égale à une unité.
2. En général, en posant la surface de chaque petit carré égale à 1, dans un modèle à N habitants et A petits carrés (avec $N \leqslant A$).
   a) Quelle est l'aire de la surface moyenne par habitant ?
   b) Quelle est l'aire de la plus petite surface possible pour un habitant ?
   c) Montrer que l'aire de la plus grande surface possible pour un habitant n'a pas la même valeur que celle obtenue dans le modèle précédent, où la ville est située en bord de mer.

Éléments de solution

A.Modèle 1

1.

L'habitant du carré 2 a une surface de 4,5 unités, celui du carré 8, de 3,5 unités et celui du carré 9, une unité.

2. a) L'aire de la plus petite surface possible pour un habitant est une unité ou un carreau. En effet
   - Si l'habitant H est à l'extrémité de la ville, en position 1 ou A, alors (comme dans le remplissage précédent) l'habitant le plus proche ne peut être qu'en position 2 ou $A - 1$. Donc H dispose d'au moins une unité.
   - Si l'habitant n'est pas sur une extrémité, il peut être entre deux autres habitants et alors il dispose d'au moins une unité.

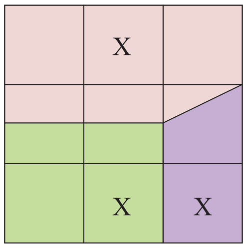
   Conclusion : la plus petite surface possible pour un habitant est d'une unité (nous avons volontairement mis de côté les cas particuliers où il n'y a qu'un habitant).

   b) Dans une ville de taille A avec N habitants,
   - si $N - 1$ habitants ont tous la surface minimale, c'est-à-dire une unité, alors le dernier habitant aura une surface de $A - N + 1$ unités. Donc la surface la plus grande est au plus $A - N + 1$.
   - si l'on met tous les habitants sur les carrés numérotés de 1 à N, on constate que l'habitant situé sur la case N aura bien une surface de $A - N + 1$ cases.

   Conclusion : La plus grande surface possible pour un habitant est de $A - N + 1$ unités (là encore nous avons écarté le cas où il n'y a qu'un habitant).

B - Modèle 2

1.



2 a pour surface 4,25 unités, 8 a pour surface 3 unités et 9 a pour surface 1,75 unités.

2. a) L'aire de la surface moyenne par habitant est $\dfrac{A}{N}$

   b) L'aire de la plus petite surface possible pour un habitant est d'une unité.

   c) Prenons le cas $A = 9$ et $N = 2$
   . Dans le cas d'une ville en bord de mer, la plus grande surface possible pour un habitant est 8 (un habitant en position 1 et l'autre en position 2).
   Dans le cas d'une ville territoire carré, la plus grande surface possible pour un habitant est 7 (un habitant en position 1 et l'autre en position 5).
   Conclusion : l'aire de la plus grande surface possible pour un habitant n'a pas la même valeur que celle obtenue dans le modèle précédent, où la ville est située en bord de mer.

Retour au sommaire

GUADELOUPE

Premier exercice

Toutes séries

Quand 7 divise n^2

Énoncé

n est un entier naturel.
Dans la division euclidienne de n par 7, n peut s'écrire $n = 7q + r$ où q et r sont des entiers naturels.

1. Que représente r ? Quelles sont les valeurs possibles pour r ?
2. On divise n^2 par 7. Quels sont les restes possibles ?
3. En déduire que si 7 divise n^2 alors 7 divise n.
4. n et m sont deux entiers naturels. On divise $n^2 + m^2$ par 7. Quels sont les restes possibles ?
5. En déduire que si 7 divise $n^2 + m^2$ alors 7 divise n et m.

Éléments de solution

1. r est le reste de la division euclidienne de n par 7. C'est alors un entier qui vérifie $0 \leqslant r < 7$.
   r peut donc prendre l'une des sept valeurs 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ou 6.
2. $n^2 = (7q + r)^2 = 49q^2 + 14qr + r^2 = 7\left(7q^2 + 2qr\right) + r^2$
   Si $r^2 = 7q' + r'$ avec $0 \leqslant r' < 7$ est la division euclidienne de r^2 par 7 alors :
   $n^2 = 7(7q^2 + 2qr) + 7q' + r' = 7\left(7q^2 + 2qr + q'\right) + r'$ avec $0 \leqslant r' < 7$. Or $Q = 7q^2 + 2qr + q' \in \mathbf{N}$ et l'écriture : $n^2 = 7Q + r'$ avec $0 \leqslant r' < 7$ est la division euclidienne de n^2 par 7.
   Autrement dit, n^2 et r^2 ont le même reste par 7
   A l'aide d'un tableau, je résume les restes possibles de r^2 par 7.

r	0	1	2	3	4	5	6
r^2	0	1	4	9	16	25	36
r' reste de r^2 par 7	0	1	4	2	2	4	1

   Les seuls restes possibles de n^2 par 7 sont donc 0, 1, 2 ou 4.
3. Dire que 7 divise n^2 signifie que le reste r' de la division de n^2 par 7 est 0. Or, d'après le tableau, ceci n'est possible que dans un seul cas, lorsque r vaut lui-même 0, autrement dit lorsque 7 divise n. En conclusion : si 7 divise n^2 alors il divise n.
4. Les seuls restes possibles de n^2 et de m^2 par 7 étant (d'après 2.) 0, 1, 2 ou 4, ici, c'est un tableau à double entrée qui me permet de résumer les restes :

m^2 n^2	0	1	2	4
0	0	1	2	4
1	1	2	3	5
2	2	3	4	6
4	4	5	6	1

   Les restes atteints sont 0, 1, 2, 3, 4, 5 et 6.
5. Toutefois, le reste 0, soit 7 divise $n^2 + m^2$ est atteint dans le seul cas où 7 divise simultanément n^2 et m^2.
   D'où la conclusion : si 7 divise $n^2 + m^2$ alors 7 divise n et m.

Retour au sommaire

GUADELOUPE

Deuxième exercice

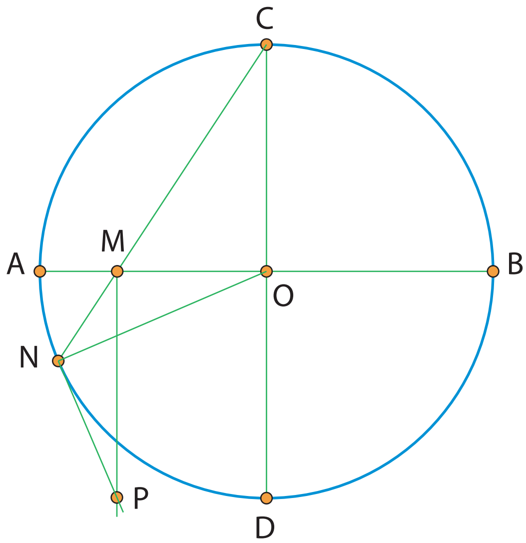
Toutes séries

Géométrie, le retour

Énoncé

On donne un cercle de centre O et deux diamètres perpendiculaires [AB] et [CD].
M étant un point du segment [AB], on trace (CM), qui recoupe le cercle en N.
La tangente en N au cercle et la perpendiculaire en M à (AB) se coupent en P.
Montrer que $OP = CM$.

Éléments de solution



Les points O,M,N,P sont cocycliques.
Cela résulte du fait que les angles $\widehat{OMP}$ et $\widehat{ONP}$ sont droits, les points M et N sont donc situés sur le cercle de diamètre OP.
Le quadrilatère OMNP étant inscriptible, on a : $\widehat{NOP} = \widehat{NMP}$ comme angles inscrits qui interceptent le même arc NP.
Or, $\widehat{NMP} = \widehat{NCD}$ comme angles correspondants
et $\widehat{NCD} = \widehat{NCO} = \widehat{ONC}$ (triangle OCN isocèle)
Donc : $\widehat{NOP} = \widehat{ONC}$.
Ces angles occupent la position d'alternes internes relativement aux droites (CN) et (OP) coupées par la sécante (ON), le parallélisme de (CM) et (OP) en découle. (CO) et (MP) d'une part et (CM) et (OP) d'autre part étant parallèles, le quadrilatère OCMP est un parallélogramme, et $OP = CM$.

Retour au sommaire

GUYANE

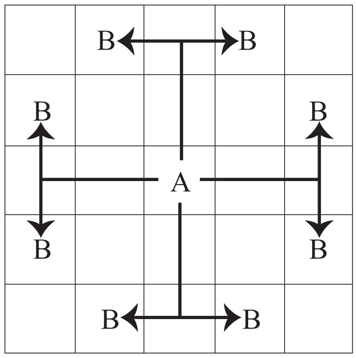
Premier exercice

Toutes séries

Le cavalier boiteux

Énoncé

Sur un échiquier, le cavalier se déplace de la manière suivante : il bouge de deux cases dans une direction puis d'une case dans une direction perpendiculaire.



Ces déplacements sont indiqués sur le schéma ci-contre.

On dit qu'une case B est accessible à partir d'une case A, si on peut arriver sur la case B après un ou plusieurs déplacements en partant de la case A.

Pour simplifier les notations, un échiquier de largeur ℓ et de longueur L sera noté $\ell \times L$.

1. (a) Sur un échiquier de 3×3, quelles sont les cases accessibles en partant du coin en bas à gauche ? (On pourra faire un dessin)
   Pourquoi la case centrale est-elle inaccessible ?

   (b) Justifier que si la taille de l'échiquier est de 3×4 ou plus grand (c'est-à-dire de largeur au moins 3 et de longueur au moins 4), alors toutes les cases de l'échiquier sont *accessibles* à partir du coin en bas à gauche.
   Pourquoi toutes les cases de l'échiquier sont alors *accessibles* en partant de n'importe quelle case ?

   (c) Si on considère un cavalier qui se déplace de 3 cases en avant (au lieu de 2) et de 1 case sur le côté, et qui part du coin en bas à gauche, pourquoi y aura-t-il toujours des cases inaccessibles à ce cavalier, quelle que soit la taille de l'échiquier ?

2. On considère maintenant le chameau, qui se déplace de 3 cases en avant puis de 2 cases sur le côté, et on va chercher le plus petit échiquier rectangulaire dans lequel toutes les cases lui sont *accessibles*.

   (a) Déterminer sur un échiquier 4×7 toutes les cases *accessibles* au chameau en partant du coin en bas à gauche.

   (b) Déterminer sur un échiquier 5×5 toutes les cases *accessibles* au chameau en partant du coin en bas à gauche.

   (c) Déterminer sur un échiquier 5×5 les cases accessibles au chameau en partant d'une case adjacente (c'est-à-dire avec un côté commun) à celle du coin en bas à gauche.

   (d) En déduire la taille du plus petit (en nombre de cases) échiquier rectangulaire (comportant au moins 2 cases) dans lequel toutes les cases sont *accessibles* au chameau.

3. On qualifiera de « boiteux » un cavalier ou un chameau qui ne peut tourner qu'à gauche après avoir avancé.
   Expliquer pourquoi il existera toujours des cases inaccessibles à un chameau ou un cavalier boiteux, quelle que soit la taille de l'échiquier.

Éléments de solution

1. (a) On représente sur un dessin les différentes cases accessibles en partant du coin en bas à gauche, en inscrivant dans chaque case un nombre correspondant au numéro du déplacement (le numéro de la case de départ sera 0) :

2	7	4
5		1
0	3	6

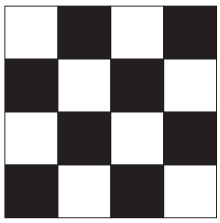
La case centrale est inaccessible car pour l'atteindre il faudrait partir d'une case éloigné d'au moins 2 carreaux horizontalement ou verticalement, ce qui est impossible vu la taille de l'échiquier.

(b) Comme à la question précédente, on va faire un dessin représentant le parcours du cavalier sur un échiquier 3×4 :

2	7	4,10	13
5	12	1	8
0	3,9	6	11

Si l'échiquier est plus grand, en partant d'une case qui ne fait pas partie du coin inférieur gauche de 3×4 représenté ci-dessus, on va pouvoir y arriver après plusieurs déplacements consécutifs, donc en faisant le déplacement à reculons, on va pouvoir atteindre ces cases en partant de la grille 3×4 du coin inférieur gauche, et donc en partant du coin en bas à gauche. Toutes les cases de l'échiquier sont alors accessibles en partant de n'importe quelle case, car les déplacements du cavalier peuvent se faire à reculons, donc si deux cases A et B sont toutes deux accessibles en partant du coin inférieur gauche, on peut donc partir de A pour arriver au coin inférieur gauche en faisant le chemin à reculons, puis aller du coin inférieur gauche à la case B.

(c) Si on colore les cases de l'échiquier en blanc et noir de telle sorte que deux cases adjacentes n'aient pas la même couleur :



un cavalier qui se déplace de 3 cases dans une direction puis d'une case dans une autre direction restera toujours sur les cases de la même couleur, la moitié de l'échiquier lui est donc inaccessible.

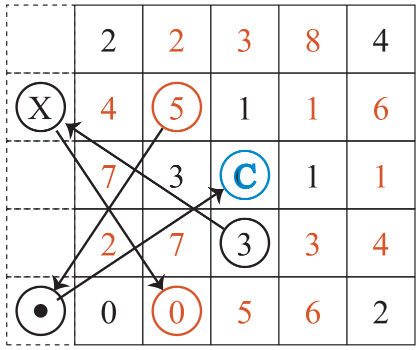
2. On considère maintenant le chameau, qui se déplace de 3 cases en avant puis de 2 cases sur le côté, et on va chercher le plus petit échiquier rectangulaire dans lequel toutes les cases lui sont accessibles.

(a) Comme précédemment, on va faire un dessin représentant le parcours du chameau :

5		1		3		3
	3		1		5	
	4		4		2	
0		4		2		2

Ici le nombre inscrit sur chaque case représente le nombre de déplacements nécessaires pour arriver sur la case en partant de la case 0. On voit que seulement la moitié des cases sont accessibles.

(b) On fait de nouveau un dessin et, comme précédemment, on inscrit en noir dans chaque case le nombre nécessaire de déplacements pour y arriver.



(c) De la même manière, on représente, ici en rouge sur le même échiquier, une succession de déplacements possibles à partir d'une case adjacente à celle du coin en bas à gauche.

(d) Le plus petit échiquier où toutes les cases sont accessibles au chameau est de taille 5×6. En effet d'après le dessin précédent, si on ajoute une ligne ou une colonne on va rajouter une case accessible à partir des cases rouges ET des cases noires (représentée par une croix sur le dessin). Elle va donc faire le lien entre les cases rouges et noires. De plus la cases centrale va elle aussi devenir accessible en passant par une case de la colonne ou ligne rajoutée (avec un point sur le dessin).
On remarque par ailleurs qu'il faut une largeur d'au moins 5, car d'après le a, même avec une longueur de 7, si la largeur est 4 cela ne suffit pas pour que toutes les cases soient accessibles.

3. Traitons le cas du cavalier (le raisonnement sera le même pour le chameau). On place des axes sur l'échiquier de telle sorte que la case de départ ait pour coordonnées (0, 0). On note (x, y) les coordonnées du cavalier dans ce repère.
Si le cavalier se déplace de 2 cases horizontalement et 1 verticalement, alors la quantité $2y - x$ reste inchangée, et s'il se déplace de 2 cases verticalement et 1 case horizontalement, la quantité $2y - x$ est augmentée ou diminuée de 3. Au final, un tel cavalier ne peux atteindre que des cases dont les coordonnées (x, y) vérifient :

$$2y - x \text{ est un multiple de } 3,$$

ce qui n'est le cas d'aucune des cases adjacentes à la case de coordonnées (0, 0). Avec un raisonnement similaire, le chameau boiteux ne peux atteindre que des cases dont les coordonnées vérifient

$$3y - 2x \text{ est un multiple de } 5,$$

ce qui, là encore, n'est le cas d'aucune des cases adjacentes à la case de coordonnées (0, 0).

Retour au sommaire

GUYANE

Deuxième exercice

Toutes séries

Jeux de NIM

Énoncé

Alice et Bob se détendent avec une petite partie de Nim. Plusieurs tas d'allumettes sont disposés devant eux et ils doivent, chacun leur tour, retirer une ou plusieurs allumettes de l'un des tas. Celui ou celle qui retire la ou les dernières allumettes a gagné.
Nous introduisons quelques notations permettant de décrire avec concision le déroulement d'une partie, à travers un exemple où l'on commence avec trois tas. A chaque étape de la partie, le nombre d'allumettes restant dans chacun des trois tas est noté (a, b, c). Un tel triplet est appelé configuration. Ainsi, s'il y a 2 allumettes dans le premier tas, 4 dans le deuxième, et seulement 1 dans le troisième, la configuration à ce stade de la partie est (2, 4, 1).
Si, à partir de la configuration (a, b, c), Alice retire k allumettes du 1$^{\text{er}}$ tas, on se retrouve dans la configuration $(a - k, b, c)$ (il faut bien sûr $k \leqslant a$). Une telle action est notée $A : (a, b, c) \to (a - k, b, c)$.
Voici un exemple de partie où l'on part de trois tas à 4 allumettes chacun, et où Bob commence

- $B : (4, 4, 4) \to (2, 4, 4)$ (Bob a retiré 2 allumettes du premier tas)
- $A : (2, 4, 4) \to (2, 0, 4)$ (Alice a retiré d'un coup les 4 allumettes du 2$^{\text{ème}}$ tas, il ne reste alors en fait plus que 2 tas)
- $B : (2, 0, 4) \to (2, 0, 1)$ (Bob a retiré 3 allumettes du troisième tas)
- $A : (2, 0, 1) \to (1, 0, 1)$ (Alice a retiré une allumette du premier tas)
- $B : (1, 0, 1) \to (1, 0, 0)$ (après cette action, il ne reste en fait qu'un seul tas, constitué d'une seule allumette)
- $A : (1, 0, 0) \to (0, 0, 0)$ (et Alice a gagné !)

1. Pourquoi le jeu n'a-t-il aucun intérêt s'il n'y a qu'un seul tas d'allumettes au départ ?
2. Pour s'échauffer, Alice et Bob décident de commencer avec 2 tas contenant chacun 3 allumettes. La configuration initiale est donc (3, 3). Bob décide de commencer.
   (a) Que signifie le coup $B : (3, 3) \to (0, 3)$? Pourquoi est-ce un très mauvais coup ?
   (b) Bob, qui n'est pas un joueur (trop) mauvais, décide de jouer $B : (3, 3) \to (1, 3)$.
   Donner le coup suivant d'Alice pour qu'elle soit sûre de gagner, et expliquer pourquoi.
   (c) Expliquer pourquoi, si Alice joue bien, Bob était sûr de perdre depuis le départ en choisissant de commencer.
3. Mécontent, Bob propose une nouvelle partie, en partant d'une configuration (4, 4). Une fois de plus, il préfère commencer.
   (a) Montrer que quelle que soit la façon de jouer de Bob, Alice peut remporter la partie en jouant bien.
   (b) Généraliser ce résultat pour n'importe quelle configuration de départ de la forme (n, n), où n est un entier strictement positif.
4. Bob et Alice commencent une nouvelle partie avec une configuration initiale (4, 6). Bob, grand seigneur, laisse cette fois Alice commencer. Y a-t-il une stratégie permettant à Alice de gagner à coup sûr ? Expliquer pourquoi, ou comment.

5. On dira qu'une configuration est *gagnante* si le joueur à qui c'est le tour peut trouver une façon de jouer permettant de gagner à coup sûr. Elle sera au contraire *perdante* si quel que soit le coup qu'il joue son adversaire pourra toujours gagner en jouant bien (autrement dit le résultat de son coup sera toujours une configuration gagnante). Ainsi, les questions précédentes ont permis de montrer qu'une configuration (n, p), avec $n, p \in \mathbf{N}^*$, est gagnante, si, et seulement si, $n \neq p$.
   On joue maintenant avec trois tas.
   (a) Montrer que pour $b \neq 0$, une configuration (a, a, b) (deux tas ont le même nombre d'allumettes) est toujours gagnante.
   (b) Montrer que la configuration (1, 2, 3) est perdante.
   (c) En déduire que pour tout entier $n >\geqslant 2$ pair, la configuration $(1, n, n+1)$ est perdante.
6. Bob et Alice jouent une dernière partie en partant d'une configuration $(n, n+1, n+2)$, avec un entier $n \geqslant 1$. Bob aimerait bien battre (enfin) Alice.
   A-t-il une façon d'y parvenir à coup sûr si c'est lui qui commence ? Expliquer pourquoi, ou comment, à partir des résultats de la question précédente (que l'on pourra bien sûr admettre même si on n'a pas réussi à les prouver).

Éléments de solution

1. S'il n'y a qu'un seul tas d'allumettes au départ, le joueur qui joue en premier peut gagner en un coup : il lui suffit de ramasser en une fois toutes les allumettes du tas (il s'agit bien d'un coup autorisé).
   On comprend qu'une telle partie représente peu d'intérêt d'un point de vue stratégique !
2. (a) Le coup $B : (3, 3) \longrightarrow (0, 3)$ signifie que Bob retire les trois allumettes du premier tas. Après un tel coup, il n'y a plus qu'un tas d'allumettes sur la table, et il suffit à Alice de le ramasser pour gagner immédiatement. Ce coup est donc très mauvais pour Bob : il ne doit surtout pas vider entièrement un des deux tas.
   (b) Comme Bob à la question précédente, Alice n'a pas intérêt à ramasser un tas entier : elle ne doit donc surtout pas jouer $A : (1, 3) \longrightarrow (0, 3)$ ou $A : (1, 3) \longrightarrow (1, 0)$.
   Mais elle peut jouer plus intelligemment $A : (1, 3) \longrightarrow (1, 1)$. Après ce coup, Bob n'a pas d'autre choix que de terminer l'un des deux tas car il ne peut pas prendre moins d'une allumette ! Au coup suivant, Alice gagnera en prenant la dernière allumette restante.
   L'alternative $A : (1, 3) \longrightarrow (1, 2)$ n'est pas un bon coup car Bob pourrait alors renverser la situation en jouant $B : (1, 2) \longrightarrow (1, 1)$ et c'est cette fois Alice qui serait piégée.
   Nous avons exploré toutes les possibilités : le seul coup qui assure à Alice la victoire est $A : (1, 3) \longrightarrow (1, 1)$.
   (c) Comme il y a autant d'allumettes dans chacun des deux tas, on peut très bien supposer que le premier coup de Bob s'effectue sur le premier tas. Il y a trois possibilités : Bob peut jouer $B : (3, 3) \longrightarrow (0, 3)$, mais on a vu à la question 2.a) que c'est un très mauvais coup. Il peut aussi jouer $B : (3, 3) \longrightarrow (1, 3)$, mais on a vu à la question 2.b) qu'Alice peut alors le battre en jouant $A : (1, 3) \longrightarrow (1, 1)$.
   La seule alternative restante pour Bob est de jouer $B : (3, 3) \longrightarrow (2, 3)$ comme premier coup. Mais alors, Alice peut ensuite jouer $A : (2, 3) \longrightarrow (2, 2)$. Ce coup d'Alice est fatal pour Bob car, s'il ne veut pas vider l'un des deux tas, il n'a alors pas d'autre choix que de jouer $B : (2, 2) \longrightarrow (1, 2)$ (ou (2, 1), ce qui revient au même), et Alice n'aura plus qu'à jouer $A : (1, 2) \longrightarrow (1, 1)$ pour être sûre de gagner.
   On constate ainsi que, quel que soit le premier coup de Bob, Alice peut enchaîner avec un coup qui ne laisse aucune possibilité à Bob de remporter la victoire.
3. (a) Comme pour la question 2.c), l'égalité du nombre d'allumettes dans chacun des deux tas au départ nous autorise à supposer que le premier coup de Bob se joue sur le premier tas. Il y a 4 premiers coups possibles, et nous allons voir que chacun d'entre eux permet à Alice de riposter avec un coup mettant Bob en fâcheuse posture :
   - Bob peut jouer $B : (4, 4) \longrightarrow (0, 4)$, mais on a maintenant bien compris que c'est la pire chose à faire.
   - Bob peut jouer aussi $B : (4, 4) \longrightarrow (1, 4)$, mais Alice peut alors répondre par $A : (1, 4) \longrightarrow (1, 1)$, et on a vu que c'était alors fatal pour Bob (question 2.b).

- Bob peut encore jouer $B : (4, 4) \longrightarrow (2, 4$, ce à quoi Alice pourra opposer $A : (2, 4) \longrightarrow (2, 2)$, interdisant ainsi la victoire à Bob, comme on l'a vu à la question 2.c).
- Bob peut enfin jouer $B : (4, 4) \longrightarrow (3, 4)$, mais la riposte $A : (3, 4) \longrightarrow (3, 3)$ ramène Bob à la configuration initiale de la partie précédente, et on a montré que Bob n'avait alors aucune chance de gagner si Alice continuait à bien jouer.

On remarque qu'à chaque fois, la bonne façon de jouer d'Alice est de **s'arranger pour transmettre à Bob une configuration où les deux tas ont un nombre identique d'allumettes.**

(b) Le résultat précédent se généralise : à partir d'une configuration (n, n), tout coup de Bob sera de la forme $B : (n, n) \longrightarrow (n - k, n)$ ou $B : (n, n) \longrightarrow (n, n - k)$, selon que Bob retire k allumettes ($k > 0$) du premier ou du deuxième tas. Alice n'aura alors qu'à retirer également k allumettes de l'autre tas, et Bob se retrouvera face à la configuration $(n - k, n - k)$. En réitérant cet enchaînement de deux coups, Bob finira forcément par récupérer la configuration (0, 0), c'est-à-dire la défaite !

4. Oui, bien sûr ! Si Alice commence, elle n'a qu'à jouer $A : (4, 6) \longrightarrow (4, 4)$, et on se retrouve dans la configuration initiale de la partie précédente, où c'est à Bob de jouer. Et on vu que le sort de la partie est alors scellé : **quoi que Bob fasse, Alice saura répondre d'une façon le conduisant irrémédiablement à la défaite.**

5. (a) Supposons $b > 0$. Le joueur se trouvant devant la configuration (a, a, b) n'a qu'à jouer $(a, a, b) \longrightarrow (a, a, 0)$: le troisième tas est vidé et la nouvelle configuration est alors équivalente à (a, a) dans une partie à deux tas. Or, nous l'avons vu, une telle configuration est perdante.
La configuration (a, a, b) est donc gagnante puisqu'il existe un coup conduisant l'adversaire à se retrouver avec la configuration perdante $(a, a, 0)$.

(b) Il s'agit de montrer que **toutes les configurations auxquelles peut conduire un coup joué à partir de (1, 2, 3) sont gagnantes**. Il y en a exactement 6. A partir de chacune d'elles, nous donnons un coup conduisant à une configuration qu'on **reconnaîtra comme perdante, ce qui prouvera qu'elles sont gagnantes :**

•$(0, 2, 3) \longrightarrow (0, 2, 2)$,	•$(1, 1, 3) \longrightarrow (1, 1, 0)$,	•$(1, 0, 3) \longrightarrow (1, 0, 1)$,
•$(1, 2, 2) \longrightarrow (0, 2, 2)$,	•$(1, 2, 1) \longrightarrow (1, 0, 1)$,	•$(1, 2, 0) \longrightarrow (1, 1, 0)$.

(c) Une démonstration rigoureuse de ce résultat fait appel à la notion de récurrence, qui ne se voit qu'en Terminale. Mais la compréhension de l'idée se cachant derrière ce nom barbare est tout à fait accessible aux élèves de Première.
Soit $n \geqslant 2$ un entier pair. Nous allons montrer que quel que soit le coup joué à partir de $(1, n, n+1)$, il conduit soit à une configuration **qu'on reconnaîtra immédiatement comme gagnante**, soit à une configuration à partir de laquelle on pourra jouer un coup amenant à **une nouvelle configuration de la forme $(1, m, m + 1)$ avec m pair**. Mais dans ce cas on ne tourne pas en rond, car $m < n$, et ce procédé peut être réitéré autant de fois qu'il faut pour **se ramener au cas $n = 2$, soit à la configuration $(1, 2, 3)$ qui est perdante** !

- Le coup $(1, n, n + 1) \longrightarrow (0, n, n + 1)$ conduit à une configuration clairement gagnante (il suffit de jouer ensuite $(0, n, n + 1) \longrightarrow (0, n, n)$).
- Le coup $(1, n, n + 1) \longrightarrow (1, n, 0)$ conduit de la même façon à une configuration gagnante (il suffit de jouer ensuite $(1, n, 0) \longrightarrow (1, 1, 0)$).
- Le coup $(1, n, n + 1) \longrightarrow (1, n, 1)$ conduit lui aussi à une configuration gagnante (il suffit bien sûr de jouer ensuite $(1, n, 1) \longrightarrow (1, 0, 1)$).
- Le coup $(1, n, n+1) \longrightarrow (1, n, n)$ conduit également à une configuration gagnante (il suffit de jouer ensuite $(1, n, n) \longrightarrow (0, n, n)$).
- D'après les cas déjà explorés, la seule façon restante de jouer en touchant au troisième tas s'écrit $(1, n, n + 1) \longrightarrow (1, n, p)$, avec $2 \leqslant p < n$. Deux cas se présentent alors :
  - Si p est pair, on a en fait $p < n - 1$, donc $p + 1 < n$, puisque $n - 1$ est impair. Le coup $(1, n, p) \longrightarrow (1, p + 1, p)$ est donc possible et ramène bien à une configuration de la forme $(1, m, m + 1)$ avec m pair et $2 \leqslant m < n$ (ici $m = p$, avec échange du $2^{\text{ème}}$ et $3^{\text{ème}}$ tas).

  - Si p est impair, on a en fait $3 \leqslant p$ et le coup $(1, n, p) \longrightarrow (1, p-1, p)$ ramène aussi à configuration de la forme $(1, m, m+1)$ avec m pair et $2 \leqslant m < n$ (ici $m = p-1$, sans échange de tas).

- Les coups $(1, n, n+1) \longrightarrow (1, 0, n+1)$ et $(1, n, n+1) \longrightarrow (1, 1, n+1)$ conduisent à des configurations gagnantes, de façon analogue à ce qui a été vu dans les cas précédents.
- Sinon, un coup touchant le deuxième tas est de la forme $(1, n, n+1) \longrightarrow (1, p, n+1)$, avec $2 \leqslant p < n$.
  Selon que p est pair ou impair, on peut riposter avec le coup $(1, p, n+1) \longrightarrow (1, p, p+1)$ ou $(1, p, n+1) \longrightarrow (1, p, p-1)$, ce qui fait à chaque fois se ramener à une configuration de la forme $(1, m, m+1)$ avec m pair et $2 \leqslant m < n$.

6. Bob a une stratégie gagnante : celle de commencer par un coup qui conduit à une configuration de la forme $(1, m, m+1)$, avec $m \geqslant 2$ et m pair. Une telle configuration étant perdante, comme on vient de le voir, elle ne laisse aucune chance à Alice. Un tel coup pour Bob est bien possible car n ou $n+1$ est pair :
   - Si n est pair, Bob peut jouer $B : (n, n+1, n+2) \longrightarrow (n, n+1, 1)$.
   - Si $n+1$ est pair, Bob n'a qu'à jouer $B : (n, n+1, n+2) \longrightarrow (1, n+1, n+2)$.

Retour au sommaire

LILLE

Premier exercice

Série S

Un podium olympique

Énoncé

On écrit les nombres entiers impairs comme ci-dessous.

1				ligne 1
3	5			ligne 2
7	9	11		ligne 3
13	15	17	19	ligne 4

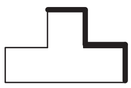
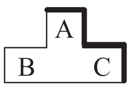
Partie 1

1. Compléter le « Triangle » en écrivant les lignes 5 et 6.
2. Écrire la ligne 11.
3. Quels sont les premier et dernier termes de la ligne 20 ?
4. On considère l'algorithme suivant :

```
X prend la valeur -1
Entrer N
Pour I allant de 1 à N
        Pour J allant de 1 à I
                X prend la valeur X + 2
        Fin du Pour
Fin du Pour
Afficher X
```

   (a) Si l'on applique cet algorithme avec $N = 3$, que va-t-il afficher.
   (b) Sachant que N représente le numéro d'une ligne, que représente X ?
   (c) Modifier l'algorithme pour qu'il calcule et affiche aussi Y, le premier terme de la ligne N.

Partie 2

On dispose maintenant d'un podium  que l'on peut déplacer sur le « triangle » de façon à encadrer trois nombres A, B, C : 

.
Dans ce cas, on dira alors que A **monte sur** (B + C).
Par exemple, sur la figure ci-dessous, on a placé le podium sur la ligne 4 et 11 monte sur $17 + 19$

1
3 5
7 9 11
13 15 17 19
21 23 25 27 29

1. Si on place le podium au début de la ligne 11, quels nombres sont encadrés ?
2. Quel nombre monte sur 2012 ?
3. Sur quel nombre monte 2011 ?
4. Le nombre A peut-il monter sur (B + C) de sorte que A + B + C = 2013 ?
5. Démontrer que l'on ne monte que sur des multiples de 4.

Éléments de solution

Partie 1

1.

					1						ligne 1
				3		5					ligne 2
			7		9		11				ligne 3
		13		15		17		19			ligne 4
	21		23		25		27		29		ligne 5
31		33		35		37		39		41	ligne 6

2. La ligne 11 est composée de 11 entiers impairs consécutifs.
   En étudiant la suite des premiers entiers de chaque ligne, on peut remarquer que le suivant est égal au précédent auquel on ajoute le double du numéro de la ligne.

   111 113 115 117 119 121 123 125 127 129 131
3. La ligne 20 commence avec 381 et se finit avec 419.
4. (a) Avec $N = 3$, l'algorithme donnera $X = 11$.
   (b) X représente le dernier entier de la ligne N.
   (c) Il suffit de remplacer la dernière ligne par :
   Y prend la valeur $X - 2(N - 1)$
   Ecrire X et Y.

Partie 2

1. Les nombres encadrés sont 91, 111 et 113. On dit alors que 91 monte sur 224.
2. $2012 = 1005 + 1007$.
   La $31^{\text{ème}}$ ligne commence par 931 et finit par 991.
   La $32^{\text{ème}}$ ligne commence par 993 et 1005 est le $7^{\text{ème}}$ nombre écrit.
   Le nombre cherché est donc $931 + 6 \times 2 = 943$.
3. 2011 est le $16^{\text{ème}}$ nombre de la $45^{\text{ème}}$ ligne, 2011 monte sur $2101 + 2103 = 4204$.
4. $637+687+689 = 2013$. A chaque mouvement du podium vers la droite ou en descendant, la somme augmente. La solution ne peut donc qu'être unique.
5. On monte sur des impairs consécutifs pouvant donc s'écrire comme $2n - 1$ et $2n + 1$ où n est un entier. Leur somme est égale à $4n$ donc multiple de 4.

Retour au sommaire

LILLE

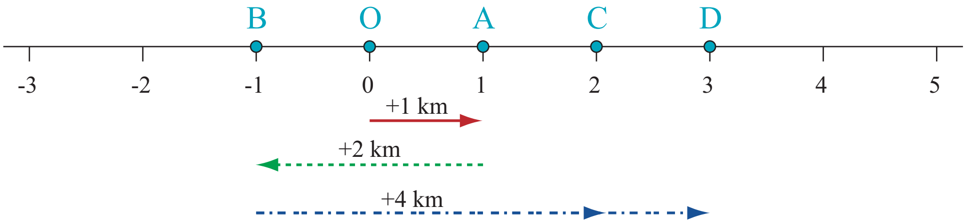
Deuxième exercice

Série S

Une chasse au trésor

Énoncé

Sur une route graduée (unité 1km), un trésor a été placé au point T d'abscisse entière n. Jérémy, placé initialement au point O d'abscisse 0, part à sa recherche. Dessin :

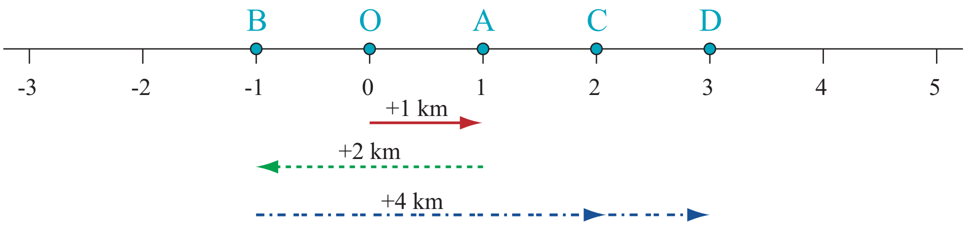


On admet que : **le fait d'être au point T permet de trouver le trésor si celui-ci s'y trouve**. Ne sachant pas où est placé le trésor, Jérémy décide d'appliquer la tactique suivante :

Ou bien il trouve le trésor au point O et il le prend, ou bien il décide de se rendre au point A d'abscisse 1 et donc de faire un kilomètre vers la droite. Si le trésor s'y trouve, sa recherche est terminée et pour le découvrir, Jérémy a parcouru 1 km. Dans le cas contraire, il décide de changer de direction et de parcourir deux kilomètres vers la gauche. Il peut ainsi découvrir le trésor si celui-ci se trouve au point B d'abscisse -1. Si le trésor s'y trouve, sa recherche est terminée et pour le découvrir, Jérémy a parcouru 3 km (1 km + 2 km). Dans le cas contraire, il décide de changer de direction et de parcourir quatre kilomètres vers la droite. Il peut ainsi découvrir le trésor si celui-ci se trouve au point C d'abscisse 2 (dans ce cas, sa recherche est terminée et pour le découvrir, Jéréemy a parcouru 1 km + 2 km + 3 km soit 6 km) mais aussi au point D d'abscisse 3. Si arrivé au point d'abscisse trois, il n'a rien trouvé, il décide de changer de direction et de parcourir huit kilomètres vers la gauche. Il peut ainsi découvrir le trésor si celui-ci se trouve aux points d'abscisses respectives $-2, -3, -4$ et -5.

Question 1
Si, arrivé au point d'abscisse -5, il n'a rien trouvé, que fait Jérémy ?

Question 2
En poursuivant éventuellement le dessin suivant, compléter le tableau ci-dessous :



Abscisse du point T	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
Nombre de kilomètres parcourus par Jérémy pour trouver le trésor					3	0	1				

Question 3 :
Par la méthode de votre choix, que vous préciserez, déterminer le nombre de kilomètres parcourus par

Jérémy pour trouver le trésor si celui-ci se trouve au point d'abscisse 50.

Question 4 :
Sachant qu'avec sa voiture, Jérémy ne peut pas parcourir plus de 900 km avec un plein d'essence, déterminer les points où peut se situer le trésor et atteignables avant que Jérémy ne tombe en panne d'essence.

Question 5 :
Déterminer pour tout entier relatif n le nombre de kilomètres parcourus pour trouver le trésor lorsqu'il est placé au point d'abscisse n.

Éléments de solution

Question 1 :
Si arrivé au point d'abscisse -5, il n'a rien trouvé, il décide de changer de direction et de parcourir seize kilomètres vers la droite. Il peut ainsi découvrir le trésor si celui-ci se trouve aux points d'abscisses respectives 4, 5, 6 etc jusque 11.

Question 2 :

Abscisse du point T	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
Nombre de kilomètres parcourus par Jérémy pour trouver le trésor	15	14	13	12	3	0	1	6	7	24	25

Question 3 :
Le parcours de Jérémy est composé de segments de longueur 1, 2, 3, 4, 8,...parcourus alternativement dans chaque sens.
Remplissons un tableau qui, pour chaque segment donne

- son numéro, p ;
- sa longueur, ℓ_p ;
- la longueur totale parcourue, L_p, une fois franchi ce segment ;
- l'abscisse a_p du point ainsi atteint ;
- l'abscisse b_p du premier trésor découvert sur ce segment.

p	ℓ_p	L_p	a_p	b_p
1	1	1	1	$1-1+1=1$
2	2	$1+2=3$	$1-2=1$	$-1+1-1=-1$
3	4	$3+4=7$	$-1+4=3$	$3-2+1=2$
4	8	$7+8=15$	$3-8=-5$	$-5+4-1=-2$
5	16	$15+16=31$	$-5+16=11$	$11-8+1=4$
6	32	$31+32=63$	$11-32=-21$	$-21+16-1=-6$
7	64	$63+64=127$	$-21+64=43$	$43-32+1=12$
8	128	$127+128=255$	$43-128=-85$	$-85+64-1=-22$
9	256	$255+256=511$	$-85+256=171$	$171-128+1=44$
10	512	$511+512=1023$	$171-512=-341$	$-341+256-1=-86$

Pour deux entiers a et b de $\mathbf{Z}$, nous notons $< a, b >$ l'ensemble des entiers compris, au sens large entre a et b et posons $a_0 = b_0 = 0$.
- *Nombre de kilomètres parcourus par Jérémy pour trouver le trésor si celui-ci se trouve au point d'abscisse 50.*
L'ensemble $< a_p, b_p >$ contient le point d'abscisse 50 d'après notre tableau si $p = 9$ et $< a_9, b_9 >$ $=< 171, 44 >$. Jérémy a atteint ce point $171-50 = 121$ kilomètres avant le point d'abscisse 171 qui serait atteint en $L_9 = 511$ kilomètres.
Il a donc parcouru $511 - 121 = 390$ kilomètres ;

Question 4 :
Points atteignables avant que Jérémy n'ait parcouru 900 kilomètres.
De $511 < 900 < 1023$, on déduit que Jérémy doit s'arrêter, faute d'essence, dans l'ensemble $< a_{10}, b_{10} >$,

123 kilomètres avant 1023, soit au point d'abscisse $a_{10} - 123 = -341 + 123 = -218$.
Jérémy trouve donc le trésor si son abscisse appartient à l'ensemble $< -218, -86 >$. Il l'avait découvert auparavant s'il appartenait aux ensembles $\{0\}, \{1\}, \{-1\}, < 3, 2 >, < -5, -2 >,$
$< 11, 4 >, < -21, -6 >, < 43, 12 >, < -85, -22 >,$
$< 171, 44 >$. La réunion de ces ensembles disjoints deux à deux est $< -278, 171 >$.

Question 5 :
Explicitons les suites introduites dans la question 3.
On a $\ell_p = 2^{p-1}$ par définition de la course.
D'où $L_p = \dfrac{2^p - 1}{2 - 1} = 2^p - 1$.

$a_p = a_{p-1} + (-1)^{p*1}\ell_p = a_{p-1} + (-2)^{p-1}$ avec $a_1 = 1$.
D'où $a_p - a_{p-1} = (-2)^{p-1}$
et $a_p = \dfrac{(-2)^p - 1}{-2 - 1} = \dfrac{1 - (-2)^p}{3}$

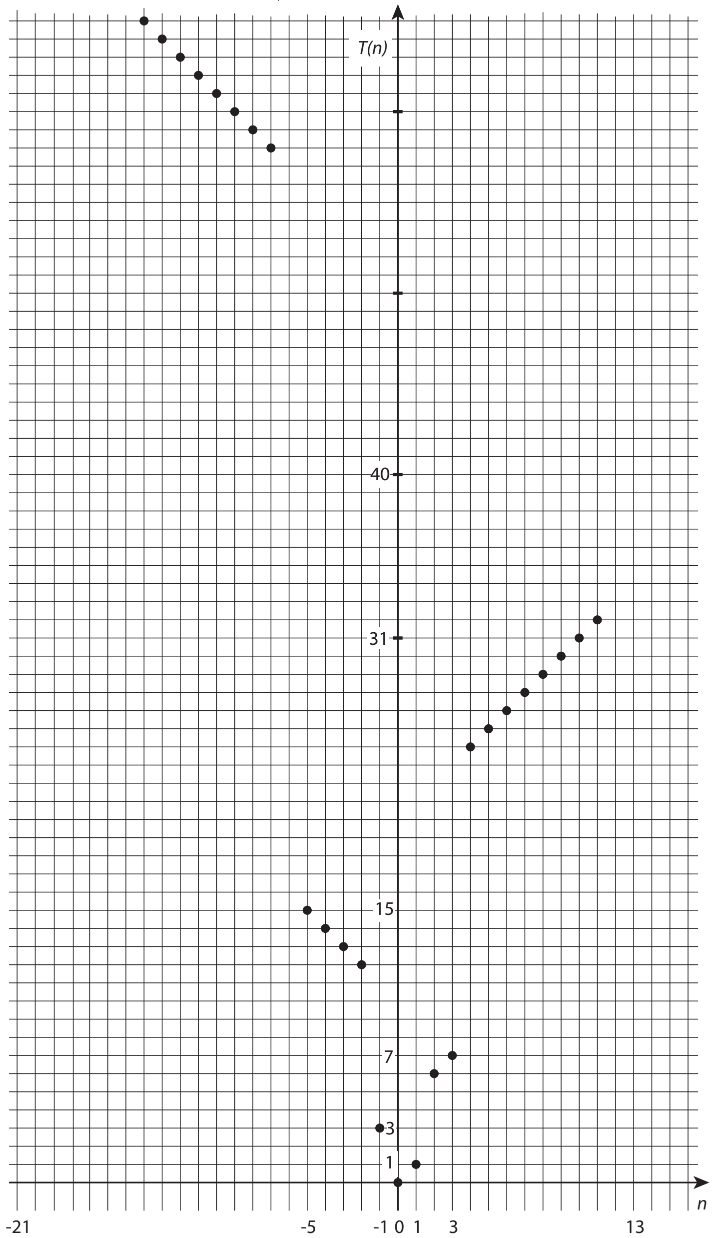
d'où aussi $a_p - a_{p-2} = (-2)^{p-2}(1 - 2) = -(-2)^{p-2}$

puis $b_p = a_p + (-1)^p\ell_{p-1} + (-1)^{p-1} = a_p + (-1)^p 2^{p-2} + (-1)^{p-1} = a_{p-2} + (-1)^{p-1}$

On en déduit que, pour $0 \leqslant p \leqslant q$, les ensembles $< b_p, a_p >$ sont disjoints et de réunion $< a_{q-1}, a_q >$, puisque les ensembles $< b_p, a_p >, p \geqslant 0$ sont disjoints et de réunion $\mathbf{Z}$.

Soit $T(n)$ le nombre de kilomètres parcourus pour atteindre n.
Pour tout n de $\mathbf{Z}$ il existe p dans $\mathbf{N}$ unique tel que n appartienne à $< b_p, a_p >$.

On a $T(a_p) = L_p = 2^p - 1$
et $T(n) = T(a_p) + n - a_p = L_p + n - a_p$
$= n + 2^p - 1 - \dfrac{1 - (-2)^p}{3}$.
Sur la figure ci-contre, on a représenté les points S$(n, T(n))$.



Retour au sommaire

LILLE

Troisième exercice

Séries autres que S

Un autre podium olympique

Énoncé

On écrit les nombres entiers impairs comme ci-dessous.

			1					ligne 1
		3		5				ligne 2
	7		9		11			ligne 3
13		15		17		19		ligne 4

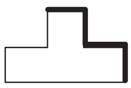
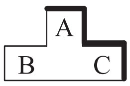
Partie 1

1. Compléter le « Triangle » en écrivant les lignes 5 et 6.
2. Écrire la ligne 11.
3. Quels sont les premier et dernier termes de la ligne 20 ?
4. On considère l'algorithme suivant :

```
X prend la valeur -1
Entrer N
Pour I allant de 1 à N
        Pour J allant de 1 à I
                X prend la valeur X + 2
        Fin du Pour
Fin du Pour
Afficher X
```

   (a) Si l'on applique cet algorithme avec $N = 3$, que va-t-il afficher ?
   (b) Sachant que N représente le numéro d'une ligne, que représente X ?
   (c) Modifier l'algorithme pour qu'il calcule et affiche aussi Y, le premier terme de la ligne N.
   (d) Sur quelle ligne est écrit 49 ? A quelle place sur cette ligne ?
   (e) Sur quelle ligne est écrit 625 ? A quelle place sur cette ligne ?

Partie 2

On dispose maintenant d'un podium  que l'on peut déplacer sur le « triangle » de façon à encadrer trois nombres A, B, C : 

.
Dans ce cas, on dira alors que A **monte sur** (B + C).
Par exemple, sur la figure ci-dessous, on a placé le podium sur la ligne 4 et 11 monte sur $17 + 19$

				1				
			3		5			
		7		9		11		
	13		15		17		19	
21		23		25		27		29

1. Si on place le podium au début de la ligne 11, quels nombres sont encadrés ? Que dira-t-on alors ?
2. Quel nombre monte sur 2012 ?
3. Sur quel nombre monte 2011 ?
4. Le nombre A peut-il monter sur (B + C) de sorte que A + B + C = 2013 ?
5. Peut-on monter sur 250 ?
6. Quels sont les nombres qui montent sur leur quadruple ?

Éléments de solution

Partie 1

1.

					1						ligne 1
				3		5					ligne 2
			7		9		11				ligne 3
		13		15		17		19			ligne 4
	21		23		25		27		29		ligne 5
31		33		35		37		39		41	ligne 6

2. La ligne 11 est composée de 11 entiers impairs consécutifs.
   En étudiant la suite des premiers entiers de chaque ligne, on peut remarquer que le suivant est égal au précédent auquel on ajoute le double du numéro de la ligne.

   111 113 115 117 119 121 123 125 127 129 131
3. La ligne 20 commence avec 381 et se finit avec 419.
4. (a) Avec $N = 3$, l'algorithme donnera $X = 11$.
   (b) X représente le dernier entier de la ligne N.
   (c) Il suffit de remplacer la dernière ligne par :
   Y prend la valeur $X - 2(N - 1)$
   Ecrire X et Y.
   (d) 9 est le nombre médian de la ligne 7.
   (e) 625 est le nombre médian de la ligne 25.
   On peut alors remarquer que le nombre médian de chaque ligne impaire n est n^2.

Partie 2

1. Les nombres encadrés sont 91, 111 et 113. On dit alors que 91 monte sur 224.
2. $2012 = 1005 + 1007$.
   La $31^{\text{ème}}$ ligne commence par 931 et finit par 991.
   La $32^{\text{ème}}$ ligne commence par 993 et 1005 est le $7^{\text{ème}}$ nombre écrit.
   Le nombre cherché est donc $931 + 6 \times 2 = 943$.
3. 2011 est le $16^{\text{ème}}$ nombre de la $45^{\text{ème}}$ ligne, 2011 monte sur $2101 + 2103 = 4204$.
4. $637+687+689 = 2013$. A chaque mouvement du podium vers la droite ou en descendant, la somme augmente. La solution ne peut donc qu'être unique.
5. On ne peut pas monter sur 250 parce que l'on ne peut pas l'écrire comme somme de deux impairs consécutifs. La situation : $\begin{array}{ccc} & Q & \\ R & & S \end{array}$
   Comme $S = R + 2$ et que nous voulons $R + S = 4Q$, le problème revient à chercher les situations $R = 2Q - 1$, soit $R - Q = Q - 1$.

   $R - Q$ est fixe pour chaque ligne. Dès la ligne 4, $R - Q$ est strictement inférieur à $Q - 1$ (facile à écrire). Donc on ne pourra pas avoir de solution.

   Conclusion : deux solutions possibles $\begin{array}{ccc} & 7 & \\ 13 & & 15 \end{array}$ $\begin{array}{ccc} & 5 & \\ 9 & & 11 \end{array}$

Retour au sommaire

LILLE

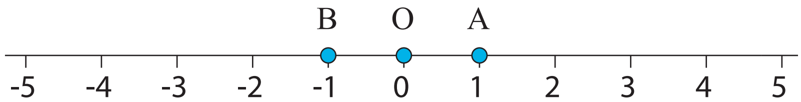
Quatrième exercice

Séries autres que S

Une autre chasse au trésor

Énoncé

Sur une route graduée (unité 1km), un trésor a été placé au point T d'abscisse entière n. Paul, placé initialement au point O d'abscisse 0, part à sa recherche. Dessin :

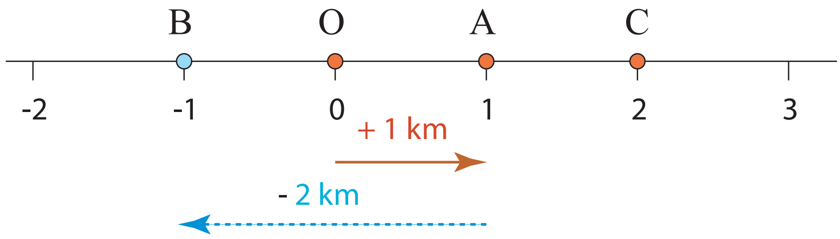


On admet que : **le fait d'être au point T permet de trouver le trésor si celui-ci s'y trouve**.

Ne sachant pas où est placé le trésor, Paul décide d'appliquer la tactique suivante :

Partant du point O, il se rend au point A d'abscisse 1. Si le trésor s'y trouve, sa recherche est terminée et pour le découvrir, Paul a parcouru 1 km. Dans le cas contraire, il se rend au point B d'abscisse -1. Si le trésor s'y trouve, sa recherche est terminée et pour le découvrir, il a parcouru 3 km (1 km + 2 km). Dans le cas contraire, il se rend au point d'abscisse 2 etc.(il explore donc les points un par un en alternant abscisse positive et abscisse négative.

Question 1
Compléter le dessin suivant, et déterminer le nombre de kilomètres parcourus pour découvrir le trésor si celui-ci se trouve au point d'abscisse 2.



Question 2 :
Compléter le tableau suivant :

Abscisse du point T	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
Nombre de kilomètres parcourus par Paul pour trouver le trésor					3	0	1				

Question 3 :
Afin d'éviter ces calculs fastidieux, Paul se propose de construire un algorithme qui déterminera pour tout entier relatif n le nombre $p(n)$ de kilomètres parcourus pour trouver le trésor lorsque celui-ci est placé au point d'abscisse n. Pour cela, il décide d'employer les variables suivantes :

N désigne l'abscisse du point où est entreposé le trésor.
K désigne le nombre de kilomètres parcourus pour trouver le trésor.
X désigne l'abscisse du point où Paul se trouve.
S désigne le sens de la marche ($S = 1$ si Paul va à droite, $S = -1$ si Paul va à gauche)
D désigne le nombre de kilomètres à parcourir dans la direction choisie.
Voici une partie de l'algorithme imaginé par Paul :

Initialisation des variables
Demander...abscisse du lieu où est entreposé le trésor
K prend la valeur 0 *au départ, Paul n'a parcouru aucun kilomètre*
X prend la valeur ...
S prend la valeur 1 *pour son premier déplacement, Paul va à droite*
D prend la valeur 1 *pour son premier déplacement, Paul doit parcourir 1 km*
Corps de programme
Tant que le trésor n'est pas trouvé, c'est-à-dire X...**faire**
X prend la valeur $X + S \times D$
K prend la valeur ...
S prend la valeur ...
D prend la valeur ...
Fin du tant que
Sortie du programme
Afficher...

Question 4 :
Pour tout entier relatif n, on décide de noter $p(n)$ le nombre de kilomètres parcourus pour trouver le trésor lorsque celui-ci se trouve au point d'abscisse n. Ainsi, $p(0) = 0, p(1) = 1$

1. Déterminer $p(-1), p(2), p(6)$ et $p(7)$.
2. Déterminer pour tout entier naturel n, le lien existant entre $p(n+1)$ et $p(n)$.
3. On pose, pour tout entier naturel n, $S(n) = 1 + 5 + 9 + \cdots + (4n-3) + (4n+1)$.
   En remarquant que $S(n) = (4n+1) + (4n-3) + \cdots 9 + 5 + 1$, calculer $2S(n)$ puis $S(n)$ en fonction de n.
4. En déduire, pour tout entier naturel n, une expression de $p(n)$ en fonction de n.

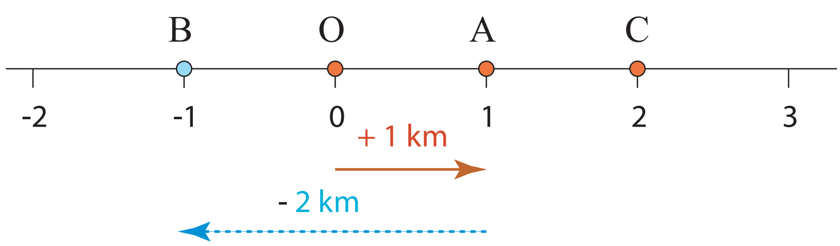
Question 5 :
Montrer que la formule trouvée à la question 4.4. est valable pour tout entier relatif n.

Question 6 :
Déterminer $p(50)$. Préciser la méthode choisie.

Question 7 :
Sachant qu'avec sa voiture, Paul ne peut pas parcourir plus de 900 km avec un plein d'essence, déterminer les points où peut se situer le trésor et atteignables avent que Paul ne tombe en panne d'essence.

Éléments de solution

Question 1 :
Compléter le dessin suivant, et déterminer le nombre de kilomètres parcourus pour découvrir le trésor si celui-ci se trouve au point d'abscisse 2.



Il suffit de faire le vecteur BC où C est le point d'abscisse 2.
(7pt] **Question 2 :**
Compléter le tableau suivant :

Abscisse du point T	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
Nombre de kilomètres parcourus par Paul pour trouver le trésor	55	36	21	10	3	0	1	6	15	28	45

Question 3 :
L'algorithme de Paul complété :

Initialisation des variables
  Demander. . .abscisse du lieu où est entreposé le trésor
  K prend la valeur 0 *au départ, Paul n'a parcouru aucun kilomètre*
  X prend la valeur $\mathbf{0}$
  S prend la valeur 1 *pour son premier déplacement, Paul va à droite*
  D prend la valeur 1 *pour son premier déplacement, Paul doit parcourir 1 km*
Corps de programme
  Tant que le trésor n'est pas trouvé, c'est-à-dire $\mathbf{X \neq N}$ **faire**
    X prend la valeur $\mathbf{X + S \times D}$
    K prend la valeur $\mathbf{K + D}$
    S prend la valeur $\mathbf{-S}$
    D prend la valeur $\mathbf{D + 1}$
  Fin du tant que
Sortie du programme
  Afficher K

Question 4 :

1. $p(-1) = 3, p(2) = 6, p(6) = 66, p(7) = 81$.
2. $p(n+1) = p(n) + 4n + 1$
3. $2S(n) = (n+1)(4n+2)$ d'où $S(n) = (n+1)(2n+1)$.
4. $p(n) = S(n-1) = n(2n-1)$

Question 5 :
Pour n négatif, on a $p(n) = p(-n) + 2p(-n) = -n(-2n-1) - 2n = -n(-2n-1+2) = n(2n-1)$.

Question 6 :
On veut calculer $p(50)$
On peut le faire à la main, avec la formule ou aussi avec un algorithme simplifié.
Dans tous les cas, on trouve : $p(50) = 50 \times 99 = 4\ 950$.

Question 7 :
On peut, par exemple, résoudre $p(n) \leqslant 900$ soit $2n^2 - n - 900 \leqslant 0$.
On trouve n compris entre -20 et 21.

Retour au sommaire

LIMOGES

Premier exercice

Toutes séries

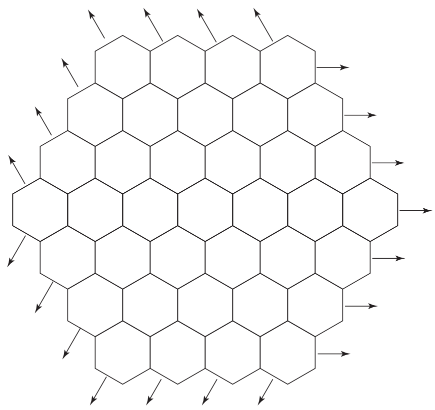
L'hexagone magique

Énoncé

Dans tout l'exercice, n est un nombre entier supérieur ou égal à 1.
On utilisera dans le problème la formule suivante qui donne la somme des entiers de 1 à n :
Formule : $1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Exemple : $1 + 2 + 3 + \cdots + 9 + 10 = \dfrac{10 \times 11}{2}$.

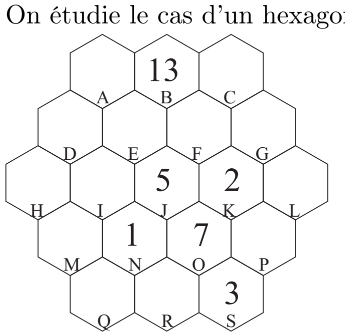
Un *hexagone d'ordre n* est une figure hexagonale régulière formée de petits hexagones réguliers avec n hexagones sur chaque côté (ci-contre hexagone d'ordre 4).
Les petits hexagones sont appelés *cellules*.
On note $C(n)$ le nombre d e cellules d'un hexagone d'ordre n.



Un *hexagone magique d'ordre n* est un hexagone d'ordre n dont les $C(n)$ cellules sont remplies par tous les entiers de 1 à $C(n)$, de telle sorte que la somme des entiers de chaque ligne (dans toutes les directions comme dans la figure ci-contre) soit toujours la même.

La somme obtenue est alors appelée *somme magique* et notée $S(n)$.

1. **Hexagone magique d'ordre 3**
   (a) Préciser le nombre de cellules $C(3)$ d'un hexagone d'ordre 3.
   (b) En utilisant la formule, calculer la somme des entiers de 1 à $C(3)$.
   (c) En déduire la somme magique $S(3)$.
   (d) On étudie le cas d'un hexagone magique d'ordre 3 déjà partiellement rempli.



Les lettres servent uniquement à repérer les cellules.

Compléter cet hexagone magique.

Justifier la position du premier nombre placé avec certitude.

2. **Etude du cas général**
   (a) Justifier que $C(n) = 3n^2 - 3n + 1$.
   (b) Quel est, en fonction de n, le nombre de lignes horizontales d'un hexagone d'ordre n ?
   (c) Quelle est la somme des entiers de 1 à $C(4)$?
   Peut-il exister un hexagone magique d'ordre 4 ?

(d) Déterminer une expression de $S(n)$ en fonction de n puis montrer que

$$32S(n) = 72n^3 - 108n^2 + 90n - 27 + \frac{5}{2n-1}.$$

(e) En déduire les valeurs de n pour lesquelles un hexagone magique d'ordre n peut exister.

Éléments de solution

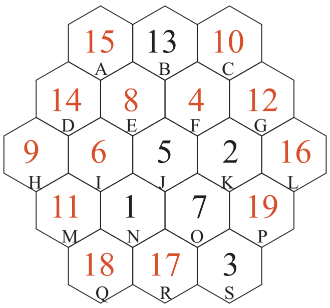
1. **Hexagone magique d'ordre 3 :**

(a) On compte $C(9) = 19$.

(b) La somme des entiers de 1 à $C(3)$ est $\dfrac{C(3)(C(3)+1)}{2} = \frac{19\times 20}{2} = 190$.

(c) Il y a 5 lignes dans chaque direction. La somme magique est donc $S(3) = \dfrac{190}{5} = 38$.

(d) On a Q + R + S = L + P + S =38 donc Q + R = L + P = 35.



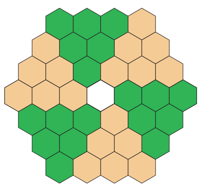
Les seules valeurs possibles sont $16 + 19 = 17 + 18 = 35$
On s'intéresse à la cellule P.

- Elle ne contient pas 16, sinon F = 7 = O
- Elle ne contient pas 17, sinon M = 13 = B
- Elle ne contient pas 18, sinon F = 5 = J.

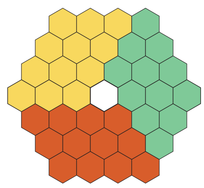
La cellule P contient donc 19.

2. **Étude du cas général**

(a) Plusieurs découpages sont possibles, par exemple



$$C(n) = 6 \times \frac{n(n-1)}{2} + 1 = 3n^2 - 3n + 1$$



$$C(n) = 3 \times n(n-1) + 1 = 3n^2 - 3n + 1$$

(b) Il y a $2n - 1$ ligne horizontales pour un hexagone d'ordre n.

(c) On a $C(4) = 3 \times 4^2 - 3 \times 4 + 1 = 37$. La somme des entiers de 1 à $C(4)$ est $\dfrac{37 \times 38}{2} = 703$.

Il y a 7 lignes dans chaque direction. La somme magique serait donc $\dfrac{703}{2}$ qui n'est pas entier.

Il ne peut donc exister un hexagone magique d'ordre 4.

(d) La somme $T(n)$ de tous les entiers jusqu'à $C(n)$ est

$$T(n) = \frac{C(n)(C(n)+1)}{2} = \frac{\left(3n^2 - 3n + 1\right)\left(3n^2 - 3n + 1\right)}{2}.$$

La somme magique est donc

$$S(n) = \frac{T(n)}{2n-1} = \frac{\left(3n^2 - 3n + 1\right)\left(3n^2 - 3n + 1\right)}{4n-2}.$$

D'une part en développant :

$$32S(n) = \frac{144n^4 - 288n^3 + 288n^2 + 144n + 32}{2n-1}.$$

D'autre part en réduisant au même dénominateur :

$$72n^3 - 108n^2 + 90n - 27 + \frac{5}{2n-1} = \frac{144n^4 - 288n^3 + 288n^2 - 144n + 32}{2n-1}.$$

(e) La somme magique est un entier, donc également $32S(n)$ et donc aussi $\dfrac{5}{2n-1}$.
Les seules valeurs qui conviennent sont $n = 1$ et $n = 3$.
Dans les deux cas, $S(n)$ est entier et un hexagone magique existe effectivement.

Retour au sommaire

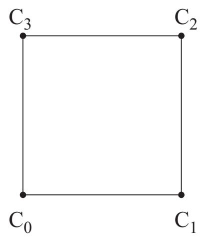
LIMOGES

Deuxième exercice

Série S

Suite de carrés

Énoncé



Soit $C_0C_1C_2C_3$ un carré
On travaillera dans le repère $(C_0; C_1, C_3)$.

1. Indiquer les coordonnées de C_0, C_1, C_2 et C_3.
2. On définit la suite de points(P_n) par : $P_0 = C_0$ et pour tout entier n, P_{n+1} est le milieu de $[P_nC_k]$ où k est le reste de la division euclidienne de $n+1$ par 4.
   - ○ P_1 est le milieu de $[P_0C_1]$
   - ○ P_2 est le milieu de $[P_1C_2]$
   - ○ P_3 est le milieu de $[P_2C_3]$
   - ○ P_4 est le milieu de $[P_3C_0]$
   - ○ P_5est le milieu de $[P_4C_1]$
   - etc.

   (a) Déterminer les coordonnées de $P_0, P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$ et P_7 sous forme exacte.

   (b) Démontrer que P_0, P_3, P_4 et P_7 sont alignés sur la droite Δ_0 d'équation $y = 2x$.

   (c) Démontrer que P_1, P_2, P_5 et P_6 sont alignés sur une droite Δ_1 parallèle à Δ_0 et dont on donnera une équation réduite.
3. (a) Soit A un point quelconque de Δ_0. Démontrer que :
      - ○ le milieu du segment $[AC_0]$ est sur Δ_0
      - ○ le milieu du segment $[AC_1]$ est sur Δ_1.

   (b) Soit B un point quelconque de Δ_1. Démontrer que
      - ○ le milieu du segment $[BC_2]$ est sur Δ_1.
      - ○ le milieu du segment $[BC_3]$ est sur Δ_0.

   (c) Que peut-on en déduire pour la suite de points (P_n) ?
4. Soit $P(x; y)$ un point quelconque du plan. On définit les points Q, R, S et T par
   - ○ Q est le milieu de $[PC_1]$
   - ○ R est le milieu de $[QC_2]$
   - ○ S est le milieu de $[RC_3]$
   - ○ Test le milieu de $[SC_0]$

   (a) Donner les coordonnées de T en fonction de x et y.

   (b) Montrer qu'il existe un unique point P tel que $T = P$.
   Donner les coordonnées de ce point P ainsi que les coordonnées des points Q, R et S correspondants.

   (c) Donner des valeurs approchées des coordonnées de P_8 et P_{12}.

   (d) Que peut-on conjecturer pour la suite de points (P_n) lorsque n tend vers $+\infty$?

Éléments de solution

1. Coordonnées : $C_0(0;0), C_1(1;0), C_2(1;1)$ et $C_3(0;1)$.
2. (a) Avec la formule des coordonnées du milieu :

   $P_0(0;0), P_1\left(\frac{1}{2};0\right), P_2\left(\frac{3}{4};\frac{1}{2}\right), P_3\left(\frac{3}{8};\frac{3}{4}\right), P_4\left(\frac{3}{16};\frac{3}{8}\right), P_5\left(\frac{19}{32};\frac{3}{16}\right)$,

   $P_6\left(\frac{51}{64};\frac{19}{32}\right)$ et $P_7\left(\frac{51}{128};\frac{51}{64}\right)$.

   (b) Les points P_0, P_3, P_4 et P_7 sont sur la droite $\Delta_0 : y = 2x$ car leurs coordonnées vérifient l'équation.

   (c) Les points P_1, P_2, P_5 et P_6 sont sur la droite $\Delta_1 : y = 2x - 1$ pour la même raison.
3. (a) Les coordonnées d'un point A quelconque de Δ_0 sont de la forme $A(x;2x)$.
   - Les coordonnées du milieu de $[AC_0]$ sont $\left(\frac{x}{2};x\right)$, donc il est sur Δ_0.

   Les coordonnées du milieu de $[AC_1]$ sont $\left(\frac{x+1}{2};x\right)$, donc il est sur Δ_1.

   (b) Les coordonnées d'un point B quelconque de Δ_1 sont de la forme $B(x;2x-1)$.
   - Les coordonnées du milieu de $[BC_2]$ sont $\left(\frac{x+1}{2};x\right)$, donc il est sur Δ_1.
   - Les coordonnées du milieu de $[BC_3]$ sont $\left(\frac{x}{2};x\right)$, donc il est sur Δ_0.

   (c) les points P_n sont sur la droite Δ_0 ou Δ_1. Pour tout enrier naturel k, P_{4k} est sur Δ_0, P_{4k+1} est sur Δ_1, P_{4k+2} est sur Δ_1 et P_{4k+3} est sur Δ_0.
4. Soit $P(x;y)$ un point quelconque du plan. On définit les points Q, R, S et T par

   - Q est le milieu de $[PC_1]$
   - R est le milieu de $[QC_2]$
   - S est le milieu de $[RC_3]$
   - Test le milieu de $[SC_0]$

   (a) On a successivement :

   $$Q\left(\frac{x+1}{2};\frac{y}{2}\right), R\left(\frac{x+3}{4};\frac{y+2}{4}\right), S\left(\frac{x+3}{8};\frac{y+6}{8}\right) \text{ et } T\left(\frac{x+3}{16};\frac{y+6}{16}\right).$$

   (b) On a $T = P$ si $x = \frac{x+3}{16}$ et $y = \frac{y+6}{16}$, c'est-à-dire $P\left(\frac{1}{5};\frac{2}{5}\right)$.

   On a alors $Q\left(\frac{3}{5};\frac{1}{5}\right), R\left(\frac{4}{5};\frac{1}{5}\right)$ et $S\left(\frac{2}{5};\frac{4}{5}\right)$.

   (c) On a $P_8\left(\frac{51}{256};\frac{51}{128}\right)$ puis, à l'aide de la question 4.a), $P_{12}\left(\frac{819}{4096};\frac{819}{2048}\right)$.
   Valeurs approchées :$P_8(0,1992;0,3984)$ à 10^{-4} et $P_{12}(0,19995;0,39990)$ à 10^{-5}.

   (d) Avec les notations de la question 4.b) : lorsque k tend vers $+\infty$
   P_{4k} tend vers P, P_{4k+1} tend vers Q, P_{4k+2} tend vers R et P_{4k+3} tend vers S.

Retour au sommaire

LIMOGES

Troisième exercice

Séries autres que S

Une calculatrice défectueuse...

Énoncé

Une calculatrice défectueuse permet seulement :

- de taper des nombres positifs ou nuls ;
- de faire l'opération suivante : à partir de trois nombres entrés successivement (x, y, z), elle affiche 0 si $x = y$ et le résultat de $\dfrac{z}{x-y}$ sinon.

$$(x, y, z) \mapsto \begin{cases} \dfrac{z}{x-y} & \text{si} \quad x \neq y \\ 0 & \text{si} \quad x = y \end{cases}$$

- l'utilisation des parenthèses qui permet de composer des calculs.

L'objectif est de déterminer si cette calculatrice permet tout de même de faire les opérations usuelles sur tous les nopmbres réels : $+$, -, $\times$, $/$.

1. En détaillant les calculs, vérifier les résultats suivants donnés par la calculatrice :
$$(0, 1, 2) \mapsto -2 \text{ et } ((2, 0, 1), 1, 1) \mapsto -2$$
2. Que donne $(2, 0, 1), (0, 2, 1)$ et $(2, 1, (2, 1, 3))$?
3. Donner un calcul permettant d'obtenir -1.
4. Vérifier que le calcul $(a, 0, 1)$ permet d'obtenir l'inverse de a pour tout $a > 0$.
5. Proposer un calcul permettant de faire la division de deux nombres positifs : $\dfrac{a}{b}$ avec $a \geqslant 0$ et $b > 0$.
6. Proposer un calcul permettant de faire la multiplication de deux nombres positifs : $a \times b$ avec $a \geqslant 0$ et $b \geqslant 0$.
7. Proposer un calcul permettant de faire la soustraction de deux nombres positifs :$a - b$ avec $a \geqslant 0$ et $b \geqslant 0$.
8. Proposer un calcul permettant d'obtenir l'opposé d'un nombre positif :$-a$ avec $a \geqslant 0$.
9. Proposer un calcul permettant de faire l'addition de deux nombres positifs :$a + b$, avec $a \geqslant 0$ et $b \geqslant 0$.
10. Proposer une décomposition du calcul suivant afin de pouvoir le réaliser avec cette calculatrice à partir des nombres donnés :
$$1 + \frac{-3}{34 \times 112 + 4}.$$

Éléments de solution

1. On a $(0, 1, 2) \mapsto \dfrac{2}{0-2} = -2$ et $((2, 0, 1), 1, 1) \mapsto \dfrac{1}{\dfrac{1}{2-0} - 1} = \dfrac{1}{-\dfrac{1}{2}} = -2.$
2. On a $(2, 0, 1) \mapsto \dfrac{1}{2-0} = \dfrac{1}{2}, (0, 2, 1) \mapsto \dfrac{1}{0-2} = -\dfrac{1}{2}$ et $(2, 1, (2, 1, 3)) \mapsto \dfrac{\dfrac{3}{2-1}}{2-1} = 3.$

3. Par exemple : $(0,1,1) \mapsto \dfrac{1}{0-1} = -1$.
4. On a $(a,0,1) \mapsto \dfrac{1}{a-0} = \dfrac{1}{a}$ pour tout $a > 0$.
5. Par exemple :$(b,0,a) \mapsto \dfrac{a}{b-0} = \dfrac{a}{b}$ pour tout $a \geqslant 0$ et $b > 0$.
6. Si $a \geqslant 0$ et $b > 0$, on a $a \times b = \dfrac{a}{\frac{1}{b}}$. On peut donc avoir $((b,0,1),0,a) \mapsto \dfrac{a}{\frac{1}{b-0} - 0} = \dfrac{a}{\frac{1}{b}} = a \times b$.

   Si $b = 0$, on a $(b,0,1) \mapsto 0$ et donc $((b,0,1),0,a) \mapsto 0 = a \times b$ également.
7. Si $a \neq b$ alors $-b = \dfrac{1}{\frac{1}{a-b}}$. On a donc $((a,b,1),0,1) \mapsto \dfrac{1}{\frac{1}{a-b} - a} = a - b$. Si $a = n$, on a $(a,b,1) \mapsto 0$ et donc $((a,b,1),0,1) \mapsto 0 = a - b$ également.
8. Par exemple : $(0,1,a) \mapsto -a$ pour tout $a \geqslant 0$.
9. Pour tout $a \geqslant 0$ et $b \geqslant 0$, on a $a + b = a - (-b)$. En utilisant les questions 7 et 8 :

$$((a,(0,1,b),1)\,,0,1) \mapsto a + b.$$

10. Décomposition du calcul
    D'après la question 6

$$((112,0,1),0,34) \mapsto 34 \times 112.$$

D'après la question 9 :

$$((((112,0,1),0,34)\,,(0,1,4),1)\,,0,1) \mapsto 34 \times 112 + 4$$

D'après la question 8 :

$$(0,1,3) \mapsto -3$$

D'après la question 5 :

$$(((((112,0,1),0,34)\,,(0,1,4),1)\,,0,1)\,,(0,1,3)) \mapsto \frac{-3}{34 \times 112 + 4}$$

D'après la question 9 :

$$((1,(0,1\,(((((112,0,1),0,34)\,,(0,1,4),1)\,,0,1)\,,0,(0,1,3)))\,,1)\,,0,1) \mapsto 1 + \frac{-3}{34 \times 112 + 4}$$

Retour au sommaire

LYON

Premier exercice

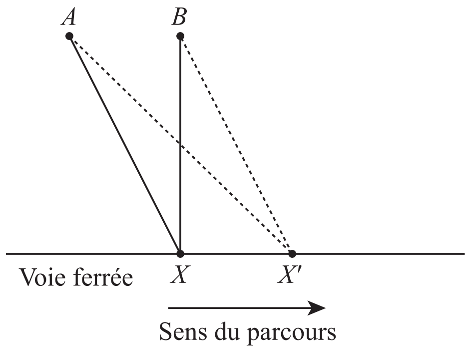
Toutes séries

Les éoliennes

Énoncé

Xavier voyage dans un train en compagnie de ses deux amies Yasmina et Zoé. La voie ferrée est rectiligne et le train circule à une vitesse constante de 90 km/h.

1. Combien de secondes le train met-il pour parcourir 100 m ?
2. D'un côté de la voie, à une distance de 200 m de celle-ci, se trouvent deux éoliennes A et B distantes l'une de l'autre de 100 m (A se trouve avant B dans le sens du parcours). Lorsque Xavier se trouve exactement à 200 m de l'éolienne B, c'est-à- dire lorsque l'angle $\widehat{X'XB}$ est droit, il mesure l'angle $\widehat{AXB}$. 4 secondes plus tard, il se trouve dans une position X' et mesure à nouveau l'angle $\widehat{AX'B}$, comme illustré sur la figure ci-dessous.



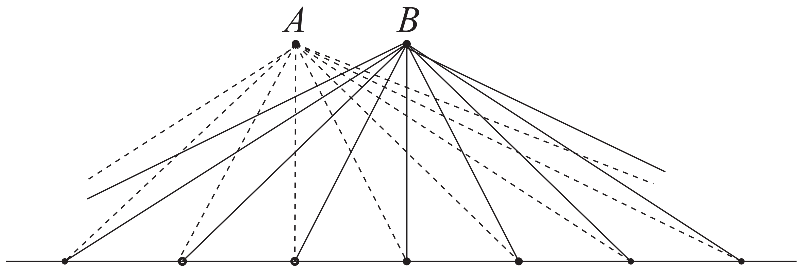
   Montrer que la somme des mesures des angles $\widehat{AXB}$ et $\widehat{AX'B}$ vaut 45°.
3. Sa camarade, Yasmina, a observé avant lui ces deux éoliennes. Toutes les 4 secondes, elle a mesuré l'angle $\widehat{AYB}$, Y étant sa position sur la voie ferrée. Elle a commencé ses mesures 8 secondes avant la première mesure de Xavier et a terminé en même temps que Xavier.
   (a) Faire une figure.
   (b) Calculer la somme des mesures de tous les angles que Yasmina a mesuré.
4. Zoé a effectué ses mesures bien longtemps en avance : elle a commencé 10 minutes avant la première mesure de Xavier et a renouvelé toutes les 4 secondes la mesure de l'angle $\widehat{AZ_0B}$, $\widehat{AZ_1B}$,...$Z_0, Z_1, \ldots$ étant les positions de Zoé sur la voie ferrée. Elle a continué ses calculs longtemps après que Xavier s'est arrêté. Démontrer que la somme des mesures de tous les angles qu'elle a mesurés est inférieure à 180°.

Éléments de solution

1. Le train met 4 secondes pour parcourir 100 m.
2. Appelons C le point d'intersection des deux diagonales du parallélogramme $ABX'X$; comme $XX' = AB = \frac{1}{2}XB$, CXX' est un triangle rectangle isocèle. Donc $\widehat{XCX'}$ vaut $\frac{\pi}{4}$, donc $\widehat{BCX'}$ vaut $\frac{3\pi}{4}$; comme enfin l'angle $\widehat{AXB}$ est égal, comme angle alterne interne, à $\widehat{XBX'}$, la somme des mesures des angles $\widehat{AXB}$ et $\widehat{AX'B}$ vaut donc $\frac{\pi}{4}$ ou 45°.

3. $\dfrac{\pi}{2}$ ou 90^{o}.

4. Lorsque Zoé se trouve en une position Z_i, notons α_i l'angle $\widehat{AZ_iB}$. Lorsque Zoé a parcouru 100 m, elle se trouve dans la position Z_{i+1} et Z_iABZ_{i+1} est un parallélogramme et l'angle α_i est égal à l'angle $\widehat{Z_iBZ_{i+1}}$. Ainsi, tous les angles α_i se retrouvent comme des angles adjacents de sommet B, comme illustré sur la figure ci-dessous. Quels que soient les points de départ et de fin des mesures, la somme de ces angles est inférieure à un angle plat. Cqfd.



Retour au sommaire

LYON

Deuxième exercice

Toutes séries

Duels tétraédriques

Énoncé

Un dé tétraédrique comporte quatre faces comme le dé représenté ci-contre. Lorsqu'on jette un tel dé, le résultat est le nombre inscrit au plus près de la base du tétraèdre. Dans notre exemple, le dé tétraédrique est tombé sur la face 4.

Antoine, Baptiste, Cyril et Diane jouent avec quatre dés tétraédriques réguliers et équilibrés mais qui ne sont pas numérotés de façon habituelle. Ainsi, le dé d'Antoine compte quatre faces numérotées 1, 6, 6 et 6. Avec ce dé, le nombre 1 est obtenu avec la probabilité $\frac{1}{4}$ et le nombre 6 avec la probabilité $\frac{3}{4}$. Le dé de Baptiste est numéroté 4, 4, 5 et 5, celui de Cyril, 3, 3, 3 et 8, et enfin, celui de Diane, 2, 2, 7 et 7.

1. Chaque joueur jette son dé tétraédrique une fois. Qui a le plus de chances d'obtenir un nombre supérieur ou égal à 6 ?
2. Les joueurs commencent une série de duels : Antoine joue contre Baptiste, Baptiste joue contre Cyril, Cyril joue contre Diane, Diane joue contre Antoine. Le gagnant de chaque duel est le joueur qui a obtenu le résultat le plus élevé.
   (a) Montrer que dans le premier duel Antoine gagne contre Baptiste avec une probabilité de $\frac{3}{4}$.
   (b) Donner les probabilités de gain des joueurs dans les trois autres duels.
3. Antoine, Baptiste, Cyril et Diane jettent simultanément leur dé. Celui des quatre joueurs qui obtient le plus grand nombre gagne.
   (a) Montrer que la probabilité que Baptiste gagne est égale à $\frac{3}{32}$.
   (b) Qui a le plus de chances de gagner ce jeu ?
4. Antoine, Baptiste, Cyril et Diane utilisent maintenant d'autres dés, numérotés avec des entiers naturels, de sorte que celui d'Antoine a des faces numérotées $a_1; a_2; a_3; a_4$ avec $a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3 \leqslant a_4$, celui de Baptiste a des faces numérotées $b_1; b_2; b_3; b_4$ avec $b_1 \leqslant b_2 \leqslant b_3 \leqslant b_4$, celui de Cyril a des faces numérotées $c_1; c_2; c_3; c_4$ avec $c_1 \leqslant c_2 \leqslant c_3 \leqslant c_4$, celui de Diane a des faces numérotées $d_1; d_2; d_3; d_4$ avec $d_1 \leqslant d_2 \leqslant d_3 \leqslant d_4$.
   Nous savons de plus qu'aucun des numéros d'un dé tétraédrique ne se retrouve sur un autre dé tétraédrique.
   Par conséquent, dans chaque duel, il y a toujours un gagnant et un perdant.
   (a) Montrer que, si $a_2 \leqslant b_2$, la probabilité qu'Antoine gagne contre Baptiste est inférieure ou égale à $\frac{5}{8}$.
   (b) Existe-t-il des dés tétraédriques tels qu'Antoine gagne contre Baptiste, Baptiste gagne contre Cyril, Cyril gagne contre Diane et Diane gagne contre Antoine, chacun avec une probabilité strictement supérieure à $\frac{5}{8}$?
   (c) Existe-t-il des dés tétraédriques tels qu'Antoine gagne contre Baptiste, Baptiste gagne contre Cyril, Cyril gagne contre Diane et Diane gagne contre Antoine, chacun avec une probabilité égale à $\frac{5}{8}$?

Éléments de solution

1. C'est Antoine qui a le plus de chances d'obtenir un nombre supérieur ou égal à 6.
2. (a) Un arbre ou un tableau à double entrée donne, sur les 16 résultats (a, b) possibles, deux couples $(1, 4)$, deux couples $(1, 5)$, six couples $(6, 4)$ et six couples $(6, 5)$.
   Antoine gagne donc contre Baptiste avec une probabilité égale à $\dfrac{12}{16} = \dfrac{3}{4}$.

   (b) Baptiste gagne contre Cyril avec une probabilité égale à $\dfrac{3}{4}$, Cyril gagne contre Diane avec une probabilité égale à $\dfrac{5}{8}$ et Diane gagne contre Antoine avec une probabilité égale à $\dfrac{5}{8}$.
   On peut remarque que toutes ces probabilités sont supérieures à $\dfrac{1}{2}$.
3. On peut utiliser les résultats des duels Antoine-Baptiste et Cyril-Diane pour trouver le nombre de quadruplets (a, b, c, d) de chaque sorte parmi les 256 possibles.

   (a) Baptiste gagne quand les quadruplets (a, b, c, d) sont $(1, 4, 3, 2)$ (il y en a 12) ou $(6, 5, 3, 2)$ (il y en a aussi 12). Donc Baptiste gagne avec une probabilité égale à $\dfrac{12+12}{256} = \dfrac{3}{32}$.

   (b) Antoine gagne quand les quadruplets sont $(6, 4, 3, 2)$ (au nombre de 36) ou $(6, 5, 3, 2)$ (au nombre de 36). Donc Antoine gagne avec une probabilité égale à $\dfrac{36+36}{256} = \dfrac{9}{32}$.
   Diane, quant à elle, gagne quand les quadruplets sont $(1, 4, 3, 7)$ ou $(1, 5, 3, 7)$ au nombre de 12 chacun ou $(5, 4, 3, 7)$ ou$(6, 5, 3, 7)$ au nombre de 36 chacun.
   La probabilité que Diane gagne est égale à $\dfrac{12+12+36+36}{256} = \dfrac{12}{32}$.
   Finalement, on en déduit que Cyril gagne avec une probabilité égale à $1 - \left(\dfrac{3}{32} + \dfrac{9}{32} + \dfrac{12}{32}\right) = \dfrac{8}{32} = \dfrac{1}{4}$.
   C'est donc Diane qui a le plus de chance de gagner à ce jeu.
4. (a) $a_2 < b_2$ donc $a_1 \leqslant a_2 < b_2 \leqslant b_3 \leqslant b_4$. Les six résultats $(a_1, b_2), (a_2, b_2), (a_1, b_3), (a_2, b_3), (a_1, b_4), (a_2, b_4)$ donnent Baptiste gagnant. Sur les 16 résultats possible, il y en a donc moins de dix qui donnent Antoine gagnant ;
   La probabilité pour qu'Antoine gagne est inférieure à $\dfrac{12}{16} = \dfrac{5}{8}$.

   (b) Pour avoir cette situation, il faudrait, d'après ce qui précède, que $a_2 \geqslant b_2$, c'est-à-dire $a_2 > b_2$ puisqu'un même nombre ne peut être présent sur deux dés différents. Puis $b_2 > c_2$, $c_2 > d_2$ et $d_2 > a_2$, ce qui est impossible. De tels cas ne peuvent donc pas exister.

   (c) Les résultats de la question 2 peuvent faire penser à changer uniquement le dé de Baptiste.
   Si $b_1 > 1$ dans le duel Antoine contre Baptiste, les quatre couples $(1, b_1), (1, b_2), (1, b_3), (1, b_4)$ donnent Baptiste gagnant. Il s'en suit que le nombre de couples qui donnent Antoine gagnant est multiple de 3, et ne peut donc pas être égal à 10. On en déduit alors que $b_1 = 0$.
   b_2 ne peut être supérieur à 6. On peut poser $b_2 = b_3 = 4$; dans ces conditions, b_4 doit être supérieur à 6, par exemple $b_4 = 9$.
   Une dernière vérification montre que ces dés conviennent pour le duel Baptiste contre Cyril.
   Cette configuration des quatre dés répond à la question, mais n'est bien sûr pas unique !

Retour au sommaire

MARTINIQUE

Premier exercice

Toutes séries

Prix du billet

Énoncé

Un organisateur de spectacle organise un concert dans une salle de 800 places. Il souhaite fixer le prix du billet pour optimiser sa recette. Une étude du marché lui apprend que :
• Si le prix du billet est de 50 euro, il vend 300 billets.
• Chaque baisse de 0,06 euro sur le prix du billet lui permet de vendre un billet supplémentaire.

Déterminer le prix du billet pour que la recette soit maximale.

Éléments de solution

Soit n le nombre de baisses successives de 0,06 euro, qui est aussi le nombre de billets supplémentaires. Pour n billets supplémentaires :

- le pris en euro du billet est $P_n = 50 - 0,06n$.
- Le nombre de billets vendus est $300 + n$.
- et la recette est $R_n = P_n \times (300 + n) = (50 - 0,06n)(300 + n)$, soit $R_n = -0,06n^2 + 32n + 15000$.

n étant un entier, le nombre de places maximum de la salle étant 800, ainsi : $0 \leqslant n \leqslant 500$.
On étudie la fonction R définie sur $[0; 500]$ par $R(x) = -0,06x^2 + 32x + 15000$.

Les variations sont :

x	0		$\frac{800}{3}$		500
$R(x)$	15000	$\nearrow$	$R\left(\frac{800}{3}\right)$	$\searrow$	16000

Comme n est entier, que $266\frac{800}{3} < 267$ et que $R(266) \approx 19266,64$ et $R(267) \approx 19266,66$:

La recette maximale est $R(267)$ et le prix du billet pour cette recette $P(267) = 50 - 0,06 \times 267 = 33,98$ euro. Naturellement, on acceptera un prix de 34 euro.

Retour au sommaire

MARTINIQUE

Deuxième exercice

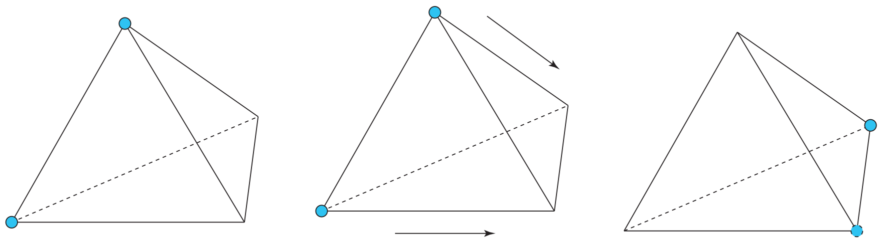
Toutes séries

Billes

Énoncé

A - sur un tétraèdre

Deux billes se trouvent sur deux sommets d'un tétraèdre. A chaque étape d'un jeu, les deux billes se déplacent simultanément, de façons aléatoires et indépendantes d'un sommet à un autre en suivant une arrête. Les déplacements possibles sont équiprobables.



A la première étape :

- Si au cours du déplacement, les deux billes se rencontrent sur une arrête, alors le jeu s'arrête et le joueur a perdu.
- Si à l'issue du déplacement, les deux billes se retrouvent sur un même sommet, alors le jeu s'arrête et le joueur a gagné.
- Sinon le jeu continue,
  et à la deuxième étape, les règles sont les mêmes qu'à la première.

Si le jeu continue à l'issue de la deuxième étape, la troisième étape sera la dernière et la règle est la suivante :

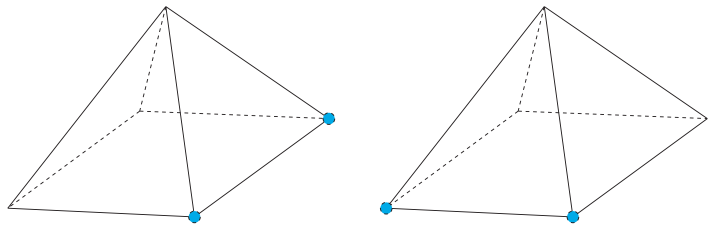
- Le joueur a gagné si à l'issue du déplacement des deux billes, elles se retrouvent sur un même sommet.
- Le joueur a perdu dans tous les autres cas.

1. (a) Démontrer que la probabilité que le joueur perde après une seule étape est égale à $\dfrac{1}{9}$.
   (b) Quelle est la probabilité que le joueur gagne après une seule étape ?
2. (a) Quelle est la probabilité que le jeu s'arrête à l'issue de la seconde étape ?
   (b) Quelle est la probabilité que le joueur gagne à l'issue de la troisième étape ?
3. Quelle est la probabilité que le joueur gagne ?

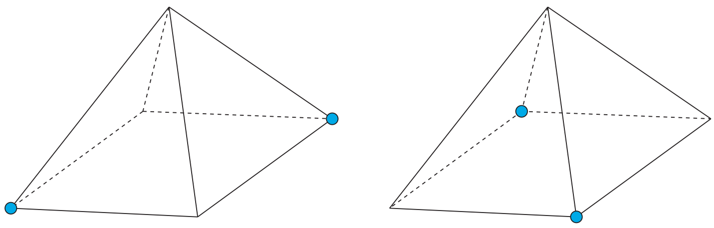
B - sur une pyramide

Dans cette nouvelle version du jeu, les deux billes sont initialement placées sur deux sommets d'une pyramide à base carrée. Par ailleurs, les règles du jeu sont identiques.
On peut alors facilement se convaincre que, tant que le jeu continue, à l'issue d'une étape, les deux billes sont nécessairement placées dans l'une des trois configurations ci-dessous

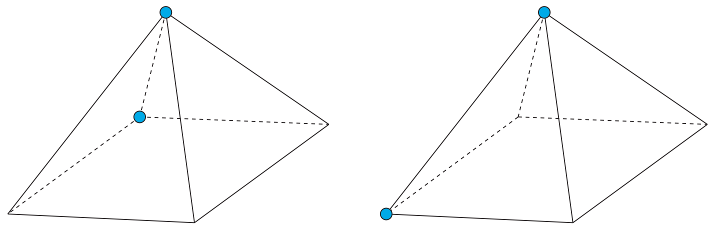
Configuration A : Les deux billes sont situées sur la base de la pyramide, aux deux extrémités d'une même arête.
Par exemple :



Configuration D : les deux billes sont situées sur la base de la pyramide et diagonalement opposées. Par exemple :



Configuration S : l'une des deux billes est située sur le sommet de la pyramide



On considère les événements :

- A_1 : A l'issue de la première étape, les billes sont en configuration A.
- D_1 : A l'issue de la première étape, les billes sont en configuration D.
- S_1 : A l'issue de la première étape les billes sont en configuration S.
- G_1 : A l'issue de la première étape, le joueur a gagné.
- F_1 : A l'issue de la première étape, le joueur a perdu.

1. deux billes sont placées initialement dans l'une des trois configurations A, D ou S. Compléter le tableau ci-dessous. *Les résultats seront donnés sans justification.*

	$P(A_1)$	$P(D_1)$	$P(S_1)$	$P(G_1)$	$P(F_1)$
Billes initialement en configuration A					
Billes initialement en configuration D					
Billes initialement en configuration S					

2. Les billes sont placées initialement en configuration A. Quelle est la probabilité que le joueur gagne ?

Éléments de solution

A - sur un tétraèdre

1. (a) A chaque étape, chacune des billes se déplace au hasard sur l'une des 3 arrêtes adjacentes au sommet sur lequel elle se trouve. La probabilité d'emprunter l'une ou l'autre des ces 3 directions est donc égale à $\dfrac{1}{3}$.

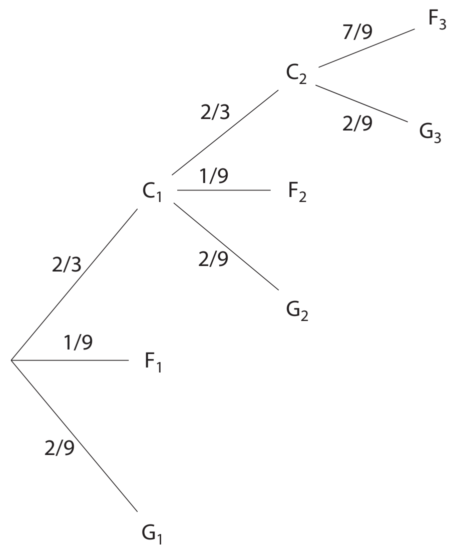
   Le joueur perd après une seule étape si et seulement si les deux billes se déplacent sur la seule arrête commune, donc la probabilité que le joueur perde après une seule étape est égale à : $\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$.

(b) . Le joueur gagne après une seule étape si et seulement si les 2 billes se déplacent vers le même sommet, celui-ci pouvant donc être n'importe lequel des deux sommets libres. La probabilité que les deux billes se déplacent en direction d'un sommet donné étant toujours égale à $\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$, la probabilité que le joueur gagne en une étape est égale à : $2 \times \frac{1}{9} = \frac{2}{9}$.

2. La probabilité que le jeu s'arrête à la première étape est la probabilité qu'au terme de cette étape le joueur gagne ou perde la partie.

   Le jeu s'arrête donc à l'issue de la première étape avec une probabilité égale à :$\frac{1}{9} + \frac{2}{9} = \frac{1}{3}$.
   Dans le cas contraire, il continue.
   La probabilité que le jeu continue au-delà de la première étape est donc égale à :$1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.

   Si le jeu continue, à chacune des étapes suivantes, les probabilités que le joueur gagne ou perdre restent inchangées.
   En notant respectivement G_i , F_i et C_i les évènements « le joueur gagne à la $i^{\text{ème}}$ étape », « le joueur perd à la $i^{\text{ème}}$ étape » et « le jeu continue à la $i^{\text{ème}}$ étape », on peut schématiser le déroulement d'une partie à l'aide de l'arbre ci-dessous :



   (a) Le jeu s'arrête à l'issue de la seconde étape si et seulement si il ne s'est pas arrêté à l'issue de la première et qu'à la seconde soit le joueur gagne, soit le joueur perd donc d'après l'arbre ci-dessus, la probabilité de cet évènement est :

   $$\frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{9} + \frac{2}{9}\right) = \frac{2}{9}.$$

   (b) De façon analogue, il apparaît que la probabilité que le joueur gagne à l'issue de la $3^{\text{ème}}$ étape est

   $$\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{9} = \frac{8}{81}.$$

3. Le joueur gagne s'il l'emporte à l'une des trois étapes donc la probabilité de cet évènement est :

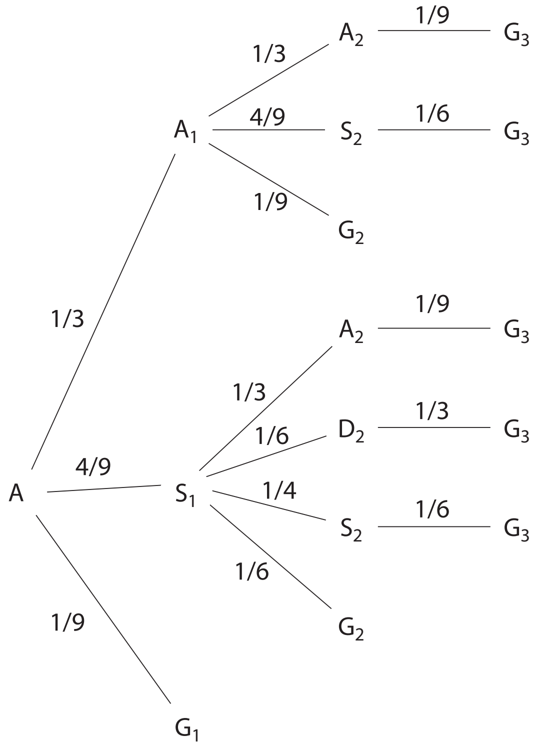
$$\frac{2}{9} + \frac{2}{3} \times \frac{2}{9} + \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{9} = \frac{38}{81} = 0,47.$$

B - sur une pyramide

1. On notera qu'une bille située sur l'un des sommets de la base de la pyramide choisit son déplacent au hasard parmi l'une des 3 arrêtes adjacentes, tandis qu'une bille placée au sommet de la pyramide a le choix entre 4 directions possibles.

	$P(A_1)$	$P(D_1)$	$P(S_1)$	$P(G_1)$	$P(F_1)$
Billes initialement en configuration A	1/3	0	4/9	1/9	1/9
Billes initialement en configuration D	0	2/9	4/9	1/3	0
Billes initialement en configuration S	1/3	1/6	1/4	1/6	1/12

2. On peut ici aussi schématiser le déroulement d'une partie à l'aide d'un arbre. Nous présentons un arbre incomplet ne schématisant que les situations permettant au joueur de gagner la partie.



La probabilité que le joueur gagne est donc égale à :

$$\frac{1}{9}+\frac{4}{9}\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{9}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{9}+\frac{4}{9}\times\frac{1}{6}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{9}\right)$$

$$=\frac{1}{9}+\frac{4}{9}\times\frac{65}{216}+\frac{1}{3}\times\frac{12}{54}=\frac{155}{486}\approx 0,319.$$

Retour au sommaire

MAYOTTE et RÉUNION (1)

Premier exercice

Toutes séries (sauf question 6)

Syracuse

Énoncé

Les questions 1 à 5 sont à traiter par tous les candidats La question 6 ne sera traitée que par les élèves inscrits dans la série S

On part d'un entier n strictement positif :

- Si n est pair, on le transforme en $\frac{n}{2}$.
- Si n est impair $(n > 1)$, on le transforme en $3n + 1$.
- Si $n = 1$, on s'arrête.

Exemples :

- Si $n = 6$, on obtient la suite : $6 \rightarrow 3 \rightarrow 10 \rightarrow 5 \rightarrow 16 \rightarrow 9 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$.
- Si $n = 13$, on obtient la suite : $13 \rightarrow 40 \rightarrow 20 \rightarrow 10 \rightarrow 5 \rightarrow 16 \rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$.

Il a été observé à l'aide d'un programme sur ordinateur, que pour chaque nombre testé, la suite aboutit toujours à 1. Mais ce résultat n'a pas été démontré à ce jour.

On peut par ailleurs, s'intéresser à la longueur de cette suite, qu'on notera $L(n)$.
Par exemple : $L(6) = 9$ et $L(13) = 10$.

A traiter par tous les candidats

1. Déterminer $L(n)$ pour les entiers allant de 1 à 12.
2. Soit p un entier, on considère l'entier $n = 2^p$.
   Exprimer $L(n)$ en fonction de p.
3. Trouver un nombre n compris entre 2^{2008} et 2^{2009}.
   Indication : On pourra chercher un nombre de la forme $2^p \times q$.
4. Soit k un entier non nul
   a) Montrer que $L(8k + 4) = L(6k + 4) + 3$.
   b) De même, montrer que $L(8k + 5) = L(6k + 4) + 3$.
   c) Montrer que $L(16k + 2) = L(16k + 3)$.
5. A défaut de réussir à prouver que la suite aboutit toujours à 1, on souhaite montrer que dans un grand nombre de cas, on est sûr d'aboutir à un moment à un entier inférieur à n.
   Par exemple : $51 \rightarrow 154 \rightarrow 77 \rightarrow 232 \rightarrow 116 \rightarrow 58 \rightarrow 26 \ldots$
   Montrer que dans les cas suivants, où k est un entier, on aboutit bien à un moment à un nombre plus petit que celui de départ :
   a) $n = 4k$
   b) $n = 4k + 1$.
   c) $n = 4k + 2$.

Quel problème rencontre-t-on pour $n = 4k + 37$?

A traiter par les élèves de la série S uniquement :

6. Écrire un algorithme en pseudo-langage permettant, pour un entier n quelconque, de déterminer si la longueur $L(n)$ est inférieure ou égale à 100 et, dans ce cas, d'afficher $L(n)$.

Éléments de solution

1.

n	Suite de nombres	$L(n)$
2	2 ; 1	2
3	3 ; 10 ; 5 ; 16 ; 8 ; 4 ; 2 ; 1	8
4	4 ; 2 ; 1	3
5	5 ; 16 ; 8 ; 4 ; 2 ; 1	6
6	6 ; 3 ; 10 ; 5 ; 16 ; 8 ; 4 ; 2 ; 1	9
7	7 ; 22 ; 11 ; 34 ; 17 ; 52 ; 26 ; 13 ; 40 ; 20 ; 10 ; 5 ; 16 ; 4 ; 2 ; 1	17
8	8 ; 4 ; 2 ; 1	4
9	9 ; 28 ; 124 ; 7 ; 22 ; 11 ; 34 ; 17 ; 52 ; 26 ; 13 ; 40 ; 20 ; 10 ; ; 5 ; 16 ; 8 ; 4 ; 2 ; 1	20
10	10 ; 5 ; 16 ; 8 ; 4 ; 2 ; 1	7
11	11 ; 34 ; 17 ; 52 ; 26 ; 13 ; 40 ; 20 ; 10 ; 5 ; 16 ; 8 ; 4 ; 2 ; 1	15
12	12 ; 6 ; 3 ; 10 ; 5 ; 16 ; 8 ; 4 ; 2 ; 1	10

2. Soit p un entier. On considère l'entier $n = 2^p$
La longueur $L(n)$ est égale à l'exposant de 2 augmenté de 1. Donc $L(n) = 2p + 1$.
3. On cherche un nombre entier n compris entre 2^{2008} et 2^{2009} solution de $L(n) = 2012$.
Supposons que n s'écrive sous la forme $2^p \times q$ en prenant q entier.
$$\underbrace{2^p \times q \to 2^{p-1} \times q \to 2^{p-2} \times q \to \ldots \to 2^1 \times q \to 2^0 \times q}_{L=p+1} = q \to \ldots \to 1$$
Par conséquent : $L(2^p \times q) = p + L(q)$.
On veut donc que $2012 = p(q) \Leftrightarrow L(q) = 2012 - p$.
Cherchons un entier q dans l'intervalle $\left]2^{2008-p}; 2^{2009-p}\right[$ de longueur $2012 - p$.
   - $p = 2008$ $\quad q \in]1; 2[$ tel que $L(q) = 4$. Impossible.
   - $p = 2007$ $\quad q \in]2; 4[$ tel que $L(q) = 5$. Le seul nombre entier dans l'intervalle est 3. Or $L(3) = 8$.
   - $p = 2006$ $\quad q \in]4; 8[$ tel que $L(q) = 6$. Les seul nombres entiers dans l'intervalle sont 5, 6 et 7. Et $L(5) = 6$. C'est bon !
4. Soit k un entier non nul.
   a) $L(8k+4) = L(4k+2)+1$
   $= L(2k+1)+2$
   $= L(6k+4)+3$

   b) $L(8k+5) = L(24k+16)+1$
   $= L(12k+8)+2$
   $= L(6k+4)+3$

   - Conclusion :$L(8k+4) = L(6k+4)+3$ et $L(8k+5) = L(6k+4)+3$.

   c) $L(16k+2) = L(8k+1)+1$
   $= L(24k+4)+2$
   $= L(12k+2)+3$
   $= L(6k+1)+4$
   $= L(18k+4)+5$

   d) $L(16k+3) = L(48k+10)+1$
   $= L(24k+5)+2$
   $= L(72k+16)+3$
   $= L(36k+8)+4$
   $= L(18k+4)+5$

   - Conclusion : $L(16k+2) = L(16k+3)$.
5. Soit k un entier.
   a) $n = 4k$, soit $4k \to 2k$ et $2k < 4k$.
   Donc le nombre obtenu est plus petit que celui de départ.
   b) $n = 4k+1$, soit $4k+1 \to 12k+4 \Leftrightarrow 6k+2 \to 3k+1$
   Or $3k < 4k \Leftrightarrow n3k+1 < 4k+1$.
   Donc le nombre obtenu est plus petit que celui de départ.
   c) $n = 4k+2$, soit $4k+2 \to 2k+1$.
   Or, $2k < 4k \Leftrightarrow 2k+1 < 4k+1$
   Donc le nombre obtenu est plus petit que celui de départ.
   d) $n = 4k+3$, soit $4k+3 \to 12k+10 \to 6k+5 \to 18k+16 \to 9k+8$.
   Or, $9k+8 > 4k+3$ et on ne sait pas si $9k+8$ est pair ou impair. D'où arrêt.
6. Proposition d'algorithme permettant, pour un entier n quelconque, de déterminer si la longueur $L(n)$ est inférieure ou égale à 100 et, dans ce cas, afficher $L(n)$. (voir page suivante)

```
Saisir N
L prend la valeur 1
Tant que N est différent de 1 et que L est inférieur ou égal à 100
        Si la partie décimale de N/2 est égale à 0
        Alors N prend la valeur N/2
        Sinon N prend la valeur 3 × N + 1
```

Retour au sommaire

MAYOTTE

Deuxième exercice

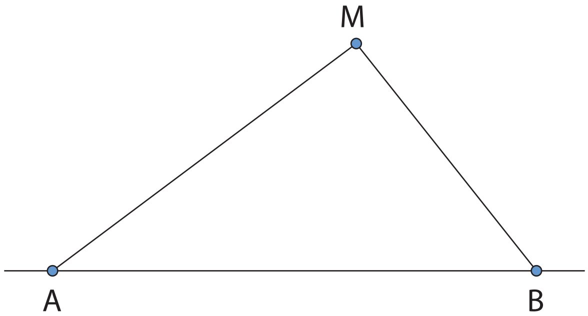
Série S

à Sakouli

Énoncé

Dans tout ce problème, on ne tiendra pas compte de la force du courant, ni de la marée !

Mogné saute d'un bateau au point M et nage *au plus court* à la vitesse de 1,5 km/h vers le rivage, représenté ci-dessous par la droite (AB). On sait que $AM = 160$ m, $MB = 120$ m et $AB = 200$ m.

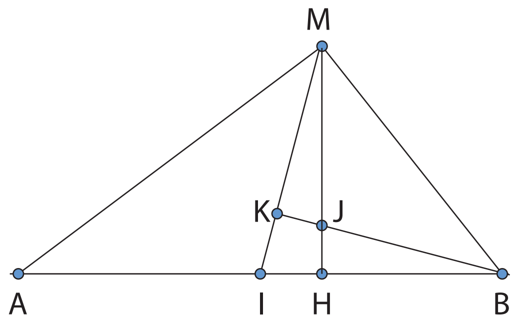


Au même instant, Bouéni, sa petite amie, ne peut résister à l'envie de nager à sa rencontre. Elle s'élance donc du point B. Pour faire la surprise à Mogné, elle prend son tuba, évite de sortir la tête de l'eau et nage en ligne droite, à la même vitesse que Mogné et calcule sa trajectoire afin qu'ils de rencontrent.

1. Réaliser une figure codée et placer le point de rencontre J.
2. A quelle distance le bateau est-il du rivage ?
3. Au bout de combien de temps, exprimé en minutes et secondes, Bouéni et Mogné se rencontrent-ils ?
4. Après leur rencontre, Bouéni et Mogné décident de continuer à nager chacun sur leur trajectoire, toujours à la même vitesse. Leur ami Ibrahim est situé au milieu I de [AB] et regarde en direction du bateau.
   Verra-t-il Bouéni à gauche, à droite ou dans l'alignement du bateau, à l'instant où Mogné atteindra le rivage ?

Éléments de solution

1.



On sait que $AM = 100$ m, $MB = 120$ m et $AB = 200$ m.

2. On remarque que MAB est rectangle en M, d'après la réciproque de Pythagore, car $MA^2 + MB^2 = 40000 = AB^2$.
   Soit H le pied de la hauteur issue de M dans le triangle MAB ; comme Mohgné nage au plus court vers le rivage, il va effectuer le trajet MH. Exprimons l'aire de MAB de deux façons :
   $$A_{MAB} = \frac{MA.MB}{2} = \frac{AB.MH}{2}, \text{ d'où } MH = \frac{MA.MB}{AB} = 96 \text{ m}$$
   .
3. Dans le triangle HBM rectangle en H, d'après le théorème de Pythagore : $HB^2 = BM^2 - MH^2 = 5184$, donc $HB = 72$ m.
   Comme Mogné et Bouéni partent au même moment et nagent à la même vitesse, on a $MJ = BJ = x$
   Dans le triangle HBI rectangle en H, d'après le théorème de Pythagore :
   $$HB^2 + HJ^2 = BJ^2 \text{ soit } 72^2 + (96 - x)^2 = x^2, \text{ d'où } x = 75 \text{ m.}$$
   Leur vitesse est de 1,5 km/h, soit $\frac{1500}{3600}$ m.s^{-1}, c'est-à-dire $\frac{5}{12}$ m.s^{-1}. Le temps mis par Bouéni et par Mogné pour se rencontrer est donc $t = \frac{d}{v} = \frac{75}{5/12} = 180$ s, soit 3 minutes.
4. Le triangle MAB est rectangle en M, donc le milieu I de l'hypoténuse [AB] est aussi le centre du cercle circonscrit à ce triangle. On a donc : $IM = IB$. D'après 3., on a aussi $JM = JB$. Les deux points I et J sont donc deux points distincts qui appartiennent à la médiatrice de [MB] donc (IJ) est la médiatrice de [MB], donc (IJ) et (MB) sont perpendiculaires. (IJ) est donc la hauteur issue de I dans le triangle IMB. Or J $\in$ [MH] et (MH) est la hauteur issue de M dans le triangle IMB. J est donc le point d'intersection de 2 hauteurs du triangle IMB, donc l'orthocentre du triangle IMB.
   Soit K le pied de la hauteur issue de B dans le triangle IMB. D'après 2., IMB est isocèle en I, donc les hauteurs [MH] et [BK] sont isométriques.
   Quand Mogné atteint le rivage, il a parcouru la distance MH. Bouéni a parcouru une distance égale, donc a parcouru la distance BK. Comme B, J et K sont alignés, Bouéni est en K quand Mogné atteint le rivage. Ibrahim verra à ce moment-là Bouéni exactement dans l'alignement du bateau.

Retour au sommaire

MAYOTTE

Troisième exercice

Séries autres que S

Silences éloquents

Énoncé

Trois participants à un jeu télévisé – habiles mathématiciens ! – doivent être départagés à l'aide d'un test de logique. Ils doivent être alignés l'un derrière l'autre et regardent tous devant eux. Pour des raisons d'équité, ils tirent d'abord au sort la place qu'ils occuperont : premier, deuxième ou troisième de la file.

L'animateur dispose de cinq rubans : deux blancs et trois rouges. Il accroche au hasard, au dos de chaque participant, un des cinq rubans. Aucun joueur ne peut voir la couleur de son propre ruban, ni celle(s) du ou des joueurs qui sont derrière lui.

Un joueur gagne s'il peut annoncer de façon certaine la couleur de son ruban.

La règle du jeu est la suivante :

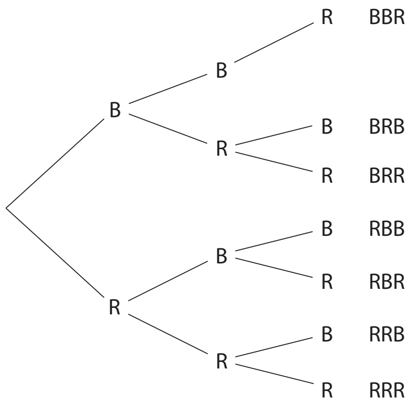
- Si les conditions sont réunies pour qu'un joueur trouve la couleur de son ruban, il est obligé de donner cette couleur sinon il est éliminé et dans ce cas, l'animateur annonce la couleur qu'il avait. Lorsqu'il a un doute raisonnable, le joueur doit se taire.
- Les joueurs peuvent se servir de l'information, ainsi fournie par l'un d'entre eux, pour deviner la couleur du ruban qui leur est attribué.

On suppose que les couleurs annoncées par les joueurs sont toujours exactes.

1. Quel joueur semble le plus avantagé ? (On n'attend pas de justification précise.)
2. De combien de manières différentes peut-on aligner les joueurs ?
3. Quelle est la probabilité pour l'un des trois joueurs d'être premier de la file ? deuxième ? troisième ?
4. L'un des joueurs proteste ! Il dit qu'il était inutile de distribuer les rubans car « **la position du joueur rend le jeu totalement inégalitaire** ».
   (a) Cette affirmation est-elle exacte ? Justifier soigneusement la réponse à l'aide d'un raisonnement logique.
   (b) Retrouver les conclusions du a) en utilisant un calcul de probabilités.

Éléments de solution

1. Le joueur occupant la troisième place, c'est-à-dire le joueur (3), semble avantagé.
2. Un choix possible est [(1) ; (2) ; (3)]. On en déduit qu'il y a autant d'alignement que de façons de permuter ces trois chiffres.
   Il y a 6 alignements possibles. Plusieurs raisonnements conduisent à ce résultat, dont celui qui consiste à exhiber les 6 alignements.
3. Il y a six alignements équiprobables, dans lesquels chaque joueur occupe exactement deux fois chacune des trois positions. D'où : $p = \dfrac{1}{3}$ pour chaque situation.
4. Un arbre de probabilité (ou un tableau) fournit les différentes répartitions des rubans.
   a) (voir l'arbre page suivante)



★ *Examinons* ***la situation BBR***

- (1) et (2) ayant obtenu un ruban blanc chacun, (3) est sûr de la couleur du sien : R.
  Quand les résultats seront demandés, il sera le premier à répondre : « j'ai un ruban rouge ».
- (1) et (2) sont alors assurés d'avoir un ruban blanc chacun (sinon (3) n'aurait pas répondu).

BBR est une situation de succès pour tous.

★ *Examinons de la même manière les autres situations.*

- BRB ; BRR ; RBB ; RBR ; RRB ; RRR sont toutes des situations de **doute raisonnable pour (3)**. Donc quand les résultats seront demandés, **(3) se tait**.
- (1) et (2) en déduisent que **la situation n'est pas BBR**.

★ *Examinons* ***les situations BRB et BRR****.*

- (2) voit (B) devant lui et (3) a un doute ; (2) en déduit immédiatement que la situation n'est pas BBR, et donc qu'il a un ruban rouge (R). Il répond : « j'ai un ruban rouge ».
- (1) est alors informé que **la couleur de (2) est (R) et (3) a un doute**. Il répond : « j'ai un ruban blanc ».

  BRB et BBR sont des situations de succès pour (1) et (2) seulement.
  A partir de cet instant, on peut dire que le jeu est inégalitaire : la position rend les chances de succès inégales.

Le jeu est-il totalement inégalitaire ?

★ *Examinons* ***la situation RBB****, par exemple.*

- (2) voit un (R) devant lui et (3) a un doute. Donc on **n'est pas dans la situation BBR et la couleur de (1) est (R)**.
  Dans ce cas, (2) peut avoir soit un (B) soit un (R).
  C'est un cas de doute pour (2), et lorsqu'il est interrogé, **il se tait**.
- (1) sait que les seules situations qui laissent les couleurs de (2) et (3) simultanément indéterminées pour eux deux, sont celles où son ruban à lui est rouge.
  Le doute simultané pour (2) et (3) signifie (R) pour lui.
  Il répond « j'ai un ruban rouge ».
  C'est un cas de succès pour (1).

Le joueur (1) a plus de chance de succès que le joueur (2), et le joueur (2) a lui-même plus de chance de succès que le joueur (3).

Donc l'affirmation est exacte : le jeu est totalement inégalitaire.

b) Pour chaque joueur, notons (S) une situation de succès et (D) une situation de doute raisonnable. On obtient le tableau suivant :

	(1)	(2)	(3)
BBR	S	S	S
BRB	S	S	D
BRR	S	S	D
RBB	S	D	D
RBR	S	D	D
RRB	S	D	D
RRR	S	D	D

- L'arbre de probabilités fait ci-dessus et le tableau ci-contre permettent le calcul des probabilités
  $p^{(1)}(S), p^{(2)}(S), p^{(3)}(S)$ pour chacun des joueurs.
  $p^{(3)}(S) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} \times 1$. $p^{(3)}(S) = 0,1$
  $p^{(2)}(S) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} \times 1 + \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} + \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} \times \frac{2}{3}$
  $p^{(2)}(S) = 0,1 + 0,1 + 0,2 = 0,4.$
  $p^{(1)}(S) = 1$ (voir le tableau ci-contre)

- On voit à nouveau que le jeu est totalement inéquitable. Le joueur (1) est sûr de gagner.

Retour au sommaire

MONTPELLIER et MAROC

Premier exercice

Série S

Le problème de Dédé

Énoncé

On lance deux dés ordinaires : le Tableau 1 suivant présente les résultats possibles du lancer des deux dés ainsi que l'ensemble des valeurs prises par la somme des valeurs obtenues pour les deux dés.

	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅
⚀	2	3	4	5	6	7
⚁	3	4	5	6	7	8
⚂	4	5	6	7	8	9
⚃	5	6	7	8	9	10
⚄	6	7	8	9	10	11
⚅	7	8	9	10	11	12

Tableau 1

Ce tableau conduit au nombre d'apparitions suivants pour chacune des sommes possibles de 2 à 12 :

Somme	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Nombre d'apparitions	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1

Tableau 2

Problème :

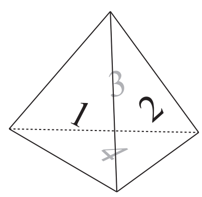
Le but de cet exercice est de montrer qu'il est possible de fabriquer une autre paire de dés cubiques, équilibrés, qui ne sont pas les dés cubiques ordinaires, permettant de retrouver en les lançant exactement le même tableau que le Tableau 2.

On se donne les règles de construction suivantes, les deux dés n'étant pas forcément identiques :

- Les chiffres figurant sur chaque face sont non nuls,
- les chiffres ne sont pas forcément entre 1 et 6,
- on peut répéter le même chiffre sur deux faces différentes.

1. **Étude d'un problème plus simple**

   On considère deux dés à quatre faces (dés tétraédriques réguliers comme sur la figure ci-contre) dont les faces sont marquées avec les chiffres de 1 à 4



a) Donner le tableau des résultats possibles pour la somme calculée en additionnant les résultats obtenus en lançant deux dés ainsi que la fréquence d'apparitions de ces sommes.

b) On essaie maintenant de fabriquer deux dés tétraédriques réguliers ne portant pas les mêmes chiffres mais donnant le même tableau que dans la question précédente. Pour cela, on essaie sur un dé les chiffres 1,2, 3 et 3 et sur l'autre dé les chiffres 1,2, 4 et 5. On obtient le Tableau 3 suivant :

Face des tétraèdres	1	2	3	3
1	2	3	4	4
2	3	4	5	5
4	5	6	7	7
5	6	7	8	8

Tableau 3

Ce tableau convient-il ?

c) Fabriquer alors deux dés différents à quatre faces qui conviennent.

d) Justifier qu'il n'existe qu'une paire de dés solution du problème.

2. **Retour au problème des dés cubiques**

On cherche une paire de dés à six faces solution du problème ci-dessus. On ordonne les faces de chaque dé dans l'ordre croissant dans un tableau comme le Tableau 3 ci-dessus. Après des essais (que l'on ne demande pas de réaliser), on s'aperçoit qu'il n'est pas possible que les quatre premières faces des deux dés soient les mêmes que celles obtenues à la question 1. d.

Donner, sans justification, une paire de dés à six faces répondant au problème posé.

Indication : La répartition des 1 et des 2 pour ces dés pas ordinaires n'est pas celle des dés ordinaires. On ne demande pas de prouver l'unicité du résultat, mais ce résultat est en effet unique.

Éléments de solution

1. a)

somme	2	3	4	5	6	7	8
nombre d'apparitions	1	2	3	4	3	2	1

b) Ce tableau 3 ne convient pas car il y a par exemple deux fois la somme 8.

c) et d) ensemble

N.B. 1 : dans les tableaux ci-dessous les faces sont énumérées dans l'ordre croissant. On parlera du dé vertical et du dé horizontal, pour désigner resp. celui dont les faces sont données verticalement et horizontalement.

N.B. 2 : Cette convention entraîne aussi que dans les tableaux, les chiffres sont toujours croissants vers la droite et vers le bas. Donc une entrée est toujours inférieure ou égale à toutes les entrées à sa droite et en dessous.
Le fait d'avoir un total qui fait 2 exige d'avoir un 1 sur chaque dé. Le fait d'avoir deux totaux 3 demande d'avoir deux fois $2 + 1$:
• *Par l'absurde* : Si on choisit de mettre un 2 sur chaque dé : on doit ensuite pour fabriquer trois fois le total 4, et se distinguer des dés ordinaires, choisir de mettre deux fois 3 sur l'un des deux dés, sans restriction de généralité.

Mais alors comme le plus grand total doit faire huit, et que ce doit être l'endroit en bas à droite du tableau, on sait aussi qu'un a un 5 sur la quatrième face du second dés, ce qui nous donne le tableau ci-contre.
Et on voit qu'il ne convient pas puisqu'on a deux fois le total 8.

	1	2	3	3
1	2	3	4	4
2	3	4	5	5
5	6	7	8	8

Conclusion : Si on veut des dés différents des dés ordinaires, on doit commencer par mettre deux 2 sur l'un des dés et donc le tableau commence par

	1	2	2	
1	2	3	3	
3	4	5	5	

$\longrightarrow$

Le fait d'avoir trois fois le total 4 impose déjà que la seconde face du dé « vertical » (cf. le N.B.) est un 3 : car sinon, toutes les entrées des deux dernières lignes seraient strictement plus grandes que 4. Donc on a déjà

	1	2	2	
1	2	3	3	
3	4	5	5	

Reste à fabriquer deux fois le total 4 ; il n'y a que deux possibilités : ou bien on rajoute deux fois encore le 3 sur le dé vertical ou bien on rajoute un 3 sur chaque dé.

Montrons que la première possibilité de convient pas : on obtiendrait :

	1	2	2	
1	2	3	3	
3	4	5	5	
3	4	5	5	
3	4	5	5	

et donc trop de totaux valant 5.

$\longrightarrow$

Donc *nécessairement*, le tableau est de la forme

	1	2	2	3
1	2	3	3	4
3	4	5	5	6
3	4	5	5	6

Pour obtenir le total maximum qui doit faire 8, la dernière face du dé vertical doit faire 8. Donc, nécessairement le tableau est le suivant :

	1	2	2	3
1	2	3	3	4
3	4	5	5	6
3	4	5	5	6
5	6	7	7	8

Réciproquement, il convient !

2. Résultat sans justification :

	1	2	2	3	3	4
1	2	3	3	4	4	5
3	4	5	5	6	6	7
4	5	6	6	7	7	8
5	6	7	7	8	8	9
6	7	8	8	9	9	10
8	9	10	10	11	11	12

Retour au sommaire

MONTPELLIER et MAROC

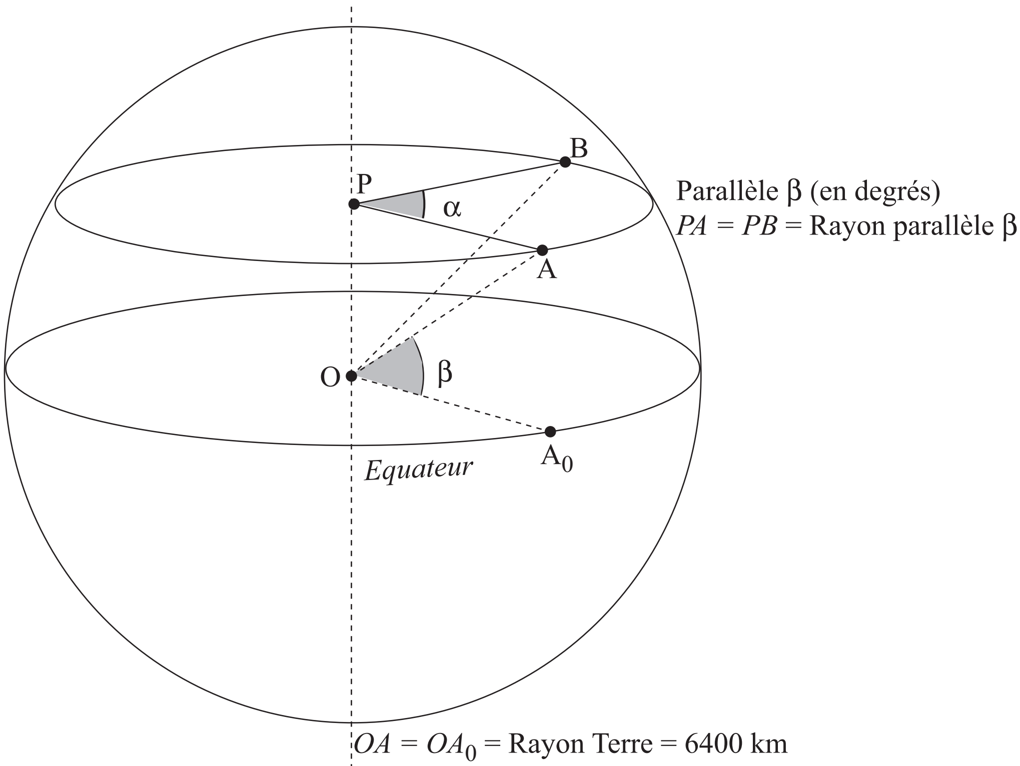
Deuxième exercice

Série S

Perdre le Nord

Énoncé

1. Sur Terre, à la latitude β (en degrés), le cercle parallèle à l'Équateur (appelé parallèle) a pour centre P et pour rayon R : montrer que lorsqu'on parcourt une distance d de 1000 km sur ce parallèle entre deux points A et B, une mesure α de l'angle $\widehat{AOB}$ est $\dfrac{d}{R}$ radians ou $\dfrac{180d}{\pi R}$ degrés.



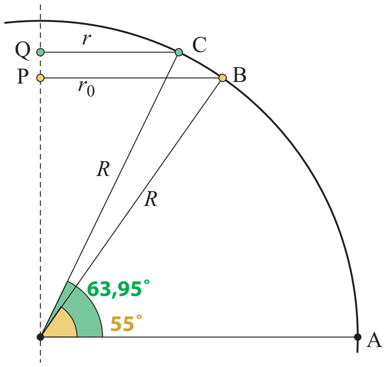
2. Igor Moustaïev part de chez lui à Novosibirsk (latitude 55° Nord) faire un tour de Sibérie. Il prend un avion qui le mène plein Nord pendant 1000 km puis il prend un deuxième avion qui l'emmène plein Est pendant 1000 km ; un troisième avion l'emmène vers le Sud pendant 1000 km et, enfin, un quatrième avion se dirigeant vers l'Ouest le ramène chez lui. Quelle est la distance parcourue par le dernier avion ?

3. Jésus Martinez rencontre son ami Paco Montaner au Bar des Amis ; la température est de 35° C. Il lui raconte la mésaventure qu'il vient de vivre : « Figure-toi qu'en déchargeant des caisses, le train dans lequel je travaillais est parti sans prévenir : j'ai fait 200 km vers le Nord, 200 km vers l'Ouest, 200 km vers le Sud et 200 km vers l'Est...et je suis revenu à mon point de départ ! »
« Amigo, c'est normal puisque...aaargh... » lui dit Paco en s'écroulant dans un dernier râle, un couteau planté entre les deux épaules...Où habitent Paco et Jésus ?

Éléments de solution

1. Pour un angle de 360^o, on parcourt $2\pi kR$ km, soit, pour 1 degré : $\dfrac{2\pi R}{360}$ et pour α ,

$$\frac{2\pi R}{360}\alpha = \frac{\pi R}{180}\alpha = d \Leftrightarrow \alpha = \frac{180}{\pi R}d \text{ ou } \frac{d}{R} \text{ en radians.}$$



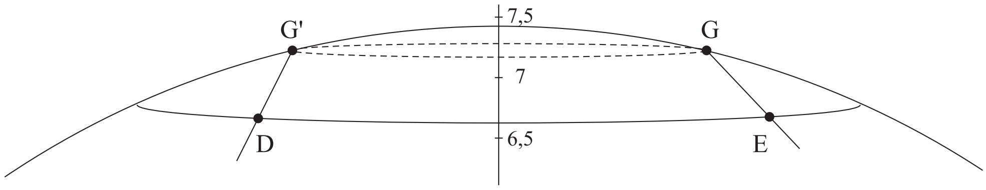
2. A la latitude 55^o le rayon du parallèle est

$$r = R\cos 55^o = 3670,89 \text{ km.}$$

En montant de 1000 km, il parcourt un angle de $\dfrac{1000}{R} = 0,156$ rad et atteint la latitude 63,95° ou $\beta = 1,116$ rad d'où, en revenant à la latitude 55° la distance

$$d' = \gamma \times r = 0,3558 \times 3670,89 = 1306,1 \text{ kl.}$$

3. Pour que cela soit possible, il faut que les 200 km vers le Nord se fassent symétriquement à l'Équateur, soit 100 km au sud de l'Équateur. . .Évidemment il pourrait aussi être un peu en-dessous du Pôle Nord et tourner plusieurs fois autour du pôle puis redescendre vers le Sud et retourner à la maison. . .



Comme il fait 35° et qu'il n'y a pas de trains au Pôle Nord, la situation ne concorde pas. . .mais les calculs peuvent être amusants. . .Serait-ce possible au Pôle Sud ?

Retour au sommaire

MONTPELLIER et MAROC

Troisième exercice

Séries autres que S

Parlons le MIU

Énoncé

Dans le jeu suivant, on appelle *mot* une suite de lettres ou chaîne de caractères.

Les *mots* que nous allons considérer n'utilisent que les trois lettres M, I et U, autant de fois que l'on veut ($IMUUIM$ est un tel mot).

Le but du jeu est de fabriquer des *mots* nouveaux à partir du seul *mot* MI.

Pour cela, il y a quatre règles, et quatre seulement, qui permettent d'agrandir la collection de *mots* :

$\mathbf{R}_1$: Si vous possédez un *mot* se terminant par I, vous pouvez lui rajouter un U à la fin.
Par exemple, avec MI vous pouvez faire MIU.

$\mathbf{R}_2$: Si vous avez un *mot* de la forme Mx où x représente n'importe quelle chaîne de caractères jusqu'à la fin du *mot*, vous pouvez faire le *mot* Mxx.
Par exemple, avec MIU vous pouvez faire $MIUIU$ et avec MI vous pouvez faire MII.

$\mathbf{R}_3$: Si dans un *mot* vous avez III (trois fois la lettre I) vous pouvez remplacer ce III par U et inversement U par III.
Par exemple avec $UIIIM$ vous pouvez faire UUM ou $IIIIIIM$.

$\mathbf{R}_4$: Si dans un *mot* vous avez UU à n'importe quel endroit du *mot* vous pouvez supprimer ce UU.
Par exemple avec $MIMUU$ vous pouvez faire MIM.

Vous pouvez appliquer ces règles dans l'ordre de votre choix.

1. Montrez qu'on peut fabriquer le *mot* $MUIUI$ (indiquer soigneusement les étapes suivies avec les numéros des règles utilisées).
2. Montrez qu'on peut fabriquer le *mot* $MUIIU$ (indiquer soigneusement les étapes là aussi)
3. Peut-on fabriquer le *mot* MU ? Si non, pourquoi ?

En tous cas, *aMIUsez*-vous bien !

Éléments de solution

1. $MI \xrightarrow{R2} MII \xrightarrow{R2} MIIII \xrightarrow{R3} MUI \xrightarrow{R2} MUIUI$
2. $MI \xrightarrow{R2} MII \xrightarrow{R2} MIIII \xrightarrow{R1} MIIIIU \xrightarrow{R3} MUIU \xrightarrow{R2} MUIUUIU \xrightarrow{R4} MUIIU$
3. Montrons qu'il est impossible d'obtenir MU.
Pour chaque mot m obtenu, notons $N(m)$ le nombre I de lettres présentes dans ce mot.
Au départ $N(MI) = 1$.
Si on a un mot m et qu'on fabrique un mot m' en utilisant une des quatre règles, avec R_1 et R_4, le nombre de I ne change pas. Avec R_2, on a $N(m') = 2N(m)$, et avec R_3, on a $N(m') = N(m) \pm 3$.
En utilisant le langage commode des congruences : modulo 3, la seule règle qui modifie $N(m)$ est R_2, et par cette règle $N(m)$ est multiplié par 2 modulo 3.
Il est donc exclu en partant de $m = MI$ avec $N(m) = 1$, d'arriver à un mot final MU avec $N(MU) = 0$.

   Au niveau première, on parlera seulement de divisibilité par 3. . .

Retour au sommaire

MONTPELLIER et MAROC

Quatrième exercice

Séries autres que S

Quitte ou double

Énoncé

Dans la suite des entiers positifs ci-dessous :

$$1, 3, 4, 5, 7, 9, 11, 12, 13, 15, 16, 17, 19, \ldots$$

les entiers qui sont absents, à savoir les nombres $2, 6, 8, 10, 14, 18, \ldots$, sont exactement les doubles de ceux qui sont présents.

1. a) Montrer que les nombres impairs sont tous présents dans le suite
   b) Montrer que les nombres de la forme $2 \times I$ où I est un nombre impair, sont tous absents de la suite.
   c) Montrer que les nombres de la forme $4 \times I$ où I est un nombre impair sont tous présenta dans le suite.
   d) Que pouvez-vous dire des nombres de la forme $8 \times I$? de la forme $16 \times I$?
2. On cherche la quantité de nombres inférieurs à 100 dans la suite en complétant le tableau suivant :

Présents	De...à...	Nombre de termes
impairs	de 1 à 99	50
les $4 \times I$	de $4 \times I$ à $4 \times 25 (= 100)$	?
les $16 \times I$	?	?
les $64 \times I$	?	?
	Total	

3. Procédez de manière semblable pour trouver le $2012^{\text{ème}}$ nombre de la suite.

Éléments de solution

1. a) Les nombres impairs sont tous présents dans la suite car il manque tous les doubles des présents : on a 1 donc il manque 2, on a alors 3 donc il manque 6, on a 4 donc il manque 8, etc. Aucun impair n'est un double donc il y a tous les impairs.
   b) Comme il y a tous les impairs, tous les $2I$ sont absents de la suite.
   c,d) Comme les $2I$ sont absents, les $4I$ sont présents, par contre les $8I$ seront absents (doubles des $4I$) et les $16I$ seront présents, etc.
2. On cherche la quantité de nombres inférieurs à 100 dans la suite :

Présents	De...à...	Nombre de termes
impairs	de 1 à 99	50
les $4 \times I$	de $4 \times I$ à $4 \times 25 (= 100)$	13
les $16 \times I$	de 16×1 à $16 \times 6 (= 96)$	3
les $64 \times I$	64 est seul	1
	Total	67

3. On procède de manière semblable pour trouver les $2012^{\text{ème}}$ nombre de la suite. Par exemple jusqu'à 3000, on a :

Présents	De...à...	Nombre de termes	Total
impairs	de 1 à 3000	1500	1500
les $4I$	de 4×1 à 4×750	375	1875
les $16I$	de 16×1 à 16×187	94	1969
les $64I$	de 64×1 à 64×46	23	1992
les $256I$	de 256×1 à 256×7	4	1996
les $1024I$	1024	1	1997

On y est presque : la réponse est 3019.

Retour au sommaire

NANCY-METZ

Premier exercice

Toutes séries

Sommes de carrés

Énoncé

1. a) Vérifier que 5 et 25 s'écrivent comme la somme des carrés de deux nombres entiers.
   Considérons à présent $A = 5 \times 25$. Vérifier que A s'écrit lui aussi comme la somme des carrés de deux nombres entiers.
   Y a-t-il unicité d'une telle écriture ?

   b) Proposer un autre exemple de produit de deux nombres s'écrivant chacun comme la somme des carrés de deux nombres entiers, et qui s'écrit lui-même comme la somme des carrés de deux nombres entiers.

2. Considérons à présent $61 = 5^2 + 6^2$ et $53 = 2^2 + 7^2$. On cherche à déterminer si le produit 53×61 peut s'écrire comme la somme des carrés de deux nombres entiers.
   Proposer un algorithme permettant de répondre à cette question et de donner une telle écriture.

3. a) Soient a, b, c, d des entiers choisis arbitrairement. Montrer que le produit $m \times n$ avec $n = a^2 + b^2$ et $m = c^2 + d^2$ peut lui-même s'écrire comme la somme des carrés de deux nombres entiers.

   b) Déterminer deux entiers e et f tels que : $53 \times 61 = e^2 + f^2$.

Éléments de solution

1. a) $5 = 1^2 + 2^2$ et $25 = 4^2 + 3^2$. $A = 5 \times 25 = 125$.
   $125 = 11^2 + 2^2$ ou $125 = 10^2 + 5^2$ (il n'y a donc pas unicité de l'écriture).

   b) $1^2 + 3^2 = 10; 2^2 + 4^2 = 20; 10 \times 20 = 200$ et $200 = 14^2 + 2^2$.

2. Algorithme
   Variables
   A, i, b, c
   Traitement
   A reçoit 53×61
   i reçoit 1
   Tant que $i \leqslant 56$ (en fait partie entière de l'écriture)
   Si $\sqrt{A - i^2} = E\left(\sqrt{A - i^2}\right)$ (ou si $\sqrt{A - 1^2}$ est entier) alors
   b reçoit i
   c reçoit $\sqrt{A - 1^2}$
   Afficher $A = b^2 + c^2$
   i reçoit 57 (pour que la boucle s'arrête)
   Sinon
   i reçoit $i + 1$
   Fin tant que

3. a) $$\begin{aligned} nm = \left(a^2 + b^2\right)\left(c^2 + d^2\right) &= a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2 \\ &= (ac + bd)^2 - 2acbd + (ad - bc)^2 + 2abdc \\ &= (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2 \end{aligned}$$
   Comme a, b, c, d sont entiers, $ac + bd$ et $ad - bc$ le sont aussi, et donc nm s'écrit comme somme de deux carrés d'entiers.

   b) $e = ac + bd = 5 \times 2 + 6 \times 7 = 52$ et $f = ad - bc = 5 \times 7 - 6 \times 2 = 23$.
   On a bien : $53 \times 61 = 52^2 + 23^2$.

Retour au sommaire

NANCY-METZ

Deuxième exercice

Toutes séries

Partages de même aire

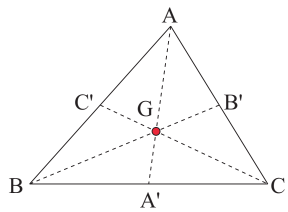
Énoncé

Le but de cet exercice est d'étudier le lien entre le centre d'un polygone et l'ensemble des droites qui le partagent en deux parties de même aire.

Le cas du triangle

On considère un triangle quelconque ABC. Le centre du triangle est G, le point d'intersection de ses médianes.

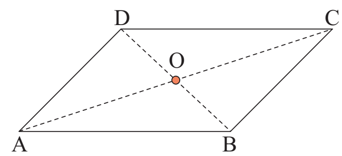
1. Donner un exemple de droite coupant le triangle en deux parties de même aire. Justifier.
2. Toutes les droites passant par G le coupent-elles en deux parties de même aire ? Si oui, justifier, si non, donner un contre-exemple.



Le cas du parallélogramme

Soit ABCD un parallélogramme quelconque. Le centre du parallélogramme est O, point d'intersection de ses diagonales

1. Donner 5 exemples de droites coupant le parallélogramme en deux parties de même aire. Justifier
2. Monter que si une droite D ne contient pas le point O, elle ne partage pas le parallélogramme en deux parties de même aire.
3. Quel est l'ensemble des droites partageant un parallélogramme en deux parties de même aire ?



Éléments de solution

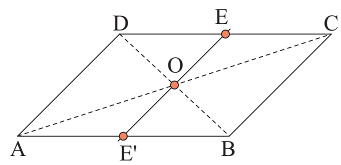
Le cas du triangle

1. N'importe quelle médiane du triangle.
   Par exemple, la médiane issue de A coupe le triangle ABC en deux triangles ABA' et AA'C.
   On remarque que ces deux triangles ont la même hauteur [AH] issue de A.

   L'aire du triangle ABA' est $\dfrac{BA' \times AH}{2}$.

   L'aire du triangle AA'C est $\dfrac{A'C \times AH}{2}$.

   [AA'] est la médiane issue de A du triangle ABC donc A' est le milieu de [BC]. Donc $BA' = A'C$. Donc les deux aires sont égales



2. Non.
   Par exemple, si on considère la droite (D) parallèle à (BC), passant par G et qui coupe [AB] en M et [AC] en N.
   Le triangle ABC est donc un agrandissement du triangle AMN puisqu'ils sont en configuration de

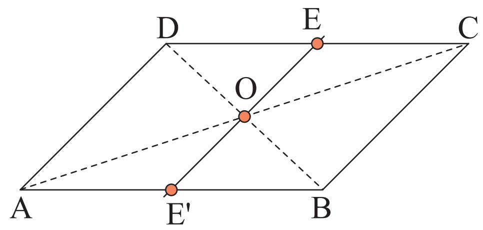
Thalès. Le coefficient d'agrandissement est $\dfrac{AA'}{AG} = \dfrac{3}{2}$.

Donc : Aire (ABC)= $\left(\dfrac{3}{2}\right)^2 \times$ Aire(AMN) $\neq 2\times$ Aire(AMN).

La droite (D) ne partage pas le triangle ABC en deux parties de même aire.

Le cas du parallélogramme

1. N'importe quelle droite passant par le centre du parallélogramme.
   Comme O est le centre de symétrie du parallélogramme, toute droite passant par O coupe ce parallélogramme en deux trapèzes identiques (c'est-à-dire deux polygones dont les côtés ont les mêmes longueurs et dont les angles ont les mêmes mesures). Ils ont donc la même aire.



2. Soit Δ une droite coupant le parallélogramme en deux parties et ne passant pas par le centre. Doit Δ' l'unique droite parallèle à Δ passant par le centre. La droite Δ' coupe le parallélogramme en deux parties de même aire. Or l'une des deux parties définies par Δ contient strictement une partie définie par la droite Δ'. Son aire est donc strictement supérieure à la moitié de l'aire du parallélogramme et Δ ne coupe donc pas le parallélogramme en deux parties de même aire.
3. L'ensemble des droites partageant un parallélogramme en deux parties de même aire est donc l'ensemble des droites passant par son centre.

Retour au sommaire

NANTES

Premier exercice

Série S

Moyennes

Énoncé

a et b sont deus réels strictement positifs.

On appelle - moyenne arithmétique des nombres a et b le nombre $m = \dfrac{a+b}{2}$

- moyenne géométrique des nombres a rt b le nombre $g = \sqrt{ab}$,

- moyenne harmonique des nombres a et b le nombre h défini par $\dfrac{2}{h} = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}$.

Ces notations seront conservées dans tout l'exercice.

1. Calculer chacune de ces trois moyennes pour $a = 50$ et $b = 18$.
2. Sur la figure 1, le demi-cercle $\mathcal{C}$ a pour centre O.
   A, B, C sont alignés avec O et sont tels que $AB = a$ et $BC = b$.

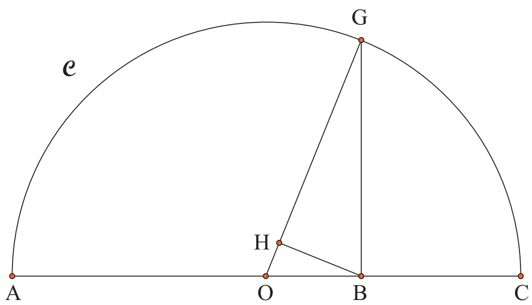
   

   Figure 1

   La perpendiculaire à (AC) en B coupe le demi-cercle $\mathcal{C}$ en G, et la perpendiculaire à (OG) passant par B coupe (OG) en H.

   a) Montrer $BG = g$ et $GH = h$.

   b) En déduire le classement des trois moyennes m, g et h dans l'ordre croissant.
3. Construire à la règle et au compas un carré de même aire que le rectangle donné en annexe (figure 2 à rendre) rendre avec la copie) en expliquant votre construction.
4. Sur la figure 3 ci-dessous, on a complété la figure 1 par le rectangle OBGD et le demi-cercle de diamètre [AE] passant par D. Montrer que $OE = h$.

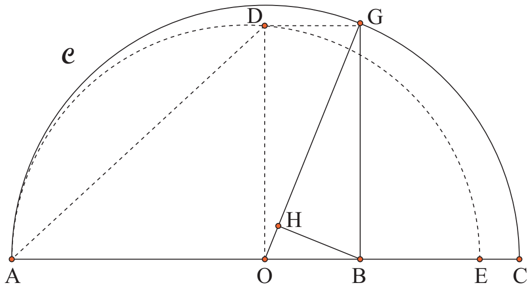


Figure 3

Annexe de l'exercice à rendre avec la copie

Figure 2

Éléments de solution

1. $a = 50, b = 18$.
   $m = 34; g = 30; h = \dfrac{450}{17}$.
2. a) ***En utilisant uniquement le théorème de Pythagore***
   Dans le triangle ABC rectangle en B
   $AB^2 + BG^2 = AG^2 \quad (1)$

   Dans le rectangle BCG rectangle en B
   $BG^2 + BC^2 = CG^2 \quad (2)$

   Dans le triangle AGC rectangle en G (inscrit dans un demi-cercle)
   $AC^2 = AG^2 + CG^2$.
   En utilisant (1) et (2), on a :
   $AC^2 = AB^2 + 2BG^2 + BC^2$.
   Mais $AC^2 = (AB + BC)^2 = AB^2 + 2AB.BC + BC^2$.
   D'où $BG^2 = AB.AC = ab = g^2$.
   Conclusion : $BG = g$.

   Avec la trigonométrie
   Dans le triangle ACG rectangle en G, $\widehat{A}$ et $\widehat{C}$ sont complémentaires .
   Dans le triangle ABG rectangle en B, $\widehat{A}$ et $\widehat{AGB}$ sont complémentaires.
   $\widehat{AGB}$ et $\widehat{C}$ sont égaux, $\tan \widehat{C} = \dfrac{BG}{BC}$ et $\tan \widehat{AGB} = \dfrac{AB}{BG}$.

   $\dfrac{BG}{BC} = \dfrac{AB}{BG}$, d'où $BG^2 = AB.BC = ab$ d'où $BG = g$

   $\widehat{BOG}$ et $\widehat{GBH}$ ont le même complémentaire $\widehat{OGB}$.

   $\sin \widehat{GBH} = \dfrac{GH}{BG}$ et $\sin \widehat{BOG} = \dfrac{BG}{OG}$.

   $GH = \dfrac{BG^2}{OG} = \dfrac{2ab}{a+b} = h$.

   Avec le produit scalaire
   $0 = \overrightarrow{GA}.\overrightarrow{GC} = \left(\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{BA}\right).\left(\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{BC}\right) = \overrightarrow{GB}^2 + \overrightarrow{GB}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$
   $= GB^2 + 0 + 0 - BA.BC$, d'où $GB^2 = ab = g^2$.

   b) Le rayon OG vaut m.
   L'hypoténuse d'un triangle rectangle est le côté le plus long.
   On a $GH \leqslant GB \leqslant OG$.
3. On construit le demi-cercle de diamètre $AB + BC$, puis le point G, puis un carré de côté BG.
4.
   Méthode 1 :
   Dans le triangle rectangle, $OD^2 = OE \times OA$

Comme $OD^2 = BG^2$, $OE = \dfrac{g^2}{m} = h$.

Méthode 2 :
D'une part, $OD = BG = g$.
D'autre part, en considérant le cercle de diamètre [AE] et en posant $a' = AO$ et $b' = OE$, on retrouve une configuration de la question 2, puisque la perpendiculaire à (AE) coupe ce nouveau cercle en D.
On en déduit $OD = \sqrt{a'b'}$.

D'après ce qui précède, on a l'égalité $a'b' = ab$, ce qui revient à $m \times OE = g^2$. On obtient finalement : $OE = \dfrac{g^2}{m} h$.

Retour au sommaire

NANTES

Deuxième exercice

Série S

Décimales d'une racine carrée

Énoncé

Nous sommes le 21-03-2012.
Le but de l'exercice est de trouver un entier naturel$M$ dont la racine carrée ait pour premières décimales exactement dans l'ordre les chiffres 21032012.
Cet entier M sera déterminé à la dernière question.

Pour tout entier naturel m, on note $D(m)$ le nombre d'entiers strictement compris entre m^2 et $(m+1)^2$.

1. Montrer que $D(3) = 6$, puis calculer $D(m)$ pour tout entier naturel m.
2. **Une première décimale**
   Pour tout entier naturel n, on note $L_1(n)$ la liste formée dans l'ordre par la première décimale de chacun des dix nombres $\sqrt{n}, \sqrt{n+1}, \dots, \sqrt{n+9}$. On reproduit ici **les quatre premières décimales** affichées par une calculatrice pour les nombres suivants :

$\sqrt{3} \approx 1,\mathbf{7}320$	$\sqrt{4} = 2,\mathbf{0}$	$\sqrt{5} \approx 2,2360$	$\sqrt{6} \approx 2,\mathbf{4}4\ 94$
$\sqrt{7} \approx 2,\mathbf{6}457$	$\sqrt{8} \approx 2,\mathbf{8}284$	$\sqrt{9} = 3,0$	$\sqrt{10} \approx 3,\mathbf{1}655$
$\sqrt{11} \approx 3,\mathbf{3}166$	$\sqrt{12} \approx 3,\mathbf{4}640$	$\sqrt{101} \approx 10,\mathbf{0}498$	$\sqrt{102} \approx 10,\mathbf{0}995$

   On a $L_1(n) = (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9)$
   a) Donner $L_1(7)$.
   b) Soit m_1 l'entier tel que $D(m_1) = 10$.
      On pose $n = m_1^2 + 1$
      Vérifier que $L_1(n) = (0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9)$
3. **Avec deux décimales**
   Pour tout entier naturel n, on note $L_2(n)$ la liste ordonnée des entiers que forment les deux premières décimales de chacun des cent nombres $\sqrt{n}, \sqrt{n+1}, \dots, \sqrt{n+99}$.
   Ainsi on a $L_2(3) = (73; 00; 23; 44; \dots; 04; 09 =$.
   On cherche un entier naturel n tel que $L_2(n) = (00; 01; 02; 03; 04; 05; \dots; 98; 99)$.
   a) Montrer qu'un tel entier n, s'il existe, ne peut pas appartenir à l'un des intervalles
      $[1; 2^2]; [2^2; 3^2]; [3^2; 4^2]; \dots; [49^2; 50^2]$.
   b) Montrer que si $0 \leqslant N < 10^2$ alors
   $$\left(\frac{10^2}{2} + \frac{N}{10^2}\right)^2 < \left(\frac{10^2}{2}\right)^2 + N + 1 < \left(\frac{10^2}{2} + \frac{N+1}{10^2}\right)^2.$$
   c) Soit m_2 l'entier tel que $D(m_2) = 100$.
      Calculer $n = m_2^2 + 1$ et montrer que $L_2(n) = (00; 01; 02; 03; 04; 05; \dots; 98; 99)$.
4. Donner un nombre entier naturel M tel que le nombre formé par **les quatre premières décimales** de $\sqrt{M}$ soit 2012, celui formé par **les quatre premières décimales** de $\sqrt{M+1}$ soit 2013 et celui formé par l**es quatre premières décimales** de $\sqrt{M+2}$ soit 2014.
5. Donner un nombre entier naturel M tel que le nombre formé par **les huit premières décimales** de $\sqrt{M}$ soit 21032012.

Éléments de solution

1. $D(3) = 4^2 - 3^2 - 1 = 6$ (ou la liste des entiers compris strictement entre 9 et 16 est (19 ; 11 ; 12 ; 13 ; 14 ; 15) qui contient 6 éléments).
   $D(m) = (m+1)^2 - m^2 - 1 = 2m$.
2. a) $L_1(7) = (6; 8; 0; 1; 3; 4; 5; 7; 8; 0)$
   b) $D(m_1) = 10$ d'où $m_1 = 5, n = 5^2 + 1 = 26$, $\sqrt{26} \approx 5,09\ldots$ etc., $\sqrt{35} \approx 5,91\ldots$
3. a) Soit $1 \leqslant m \leqslant 49$, d'où $2 \leqslant D(m) \leqslant 98$.
   Les intervalles $[m^2; (m+1)^2]$ avec m entier strictement inférieur à 50 contiennent moins de 100 entiers.
   Si n est un entier d'un de ces intervalles et $n \neq 50^2$, il existe au moins un entier i avec i allant de 1 à 99 tel que $n + i = (m+1)^2$ et les deux premières décimales de $\sqrt{n+i}$ sont nulles.
   $n = 50^2$ ne convient pas car $\sqrt{n} = \sqrt{50^2} = 50,00$ et $\sqrt{n+1} = \sqrt{50^2+1} \approx 50,00\ldots$

   b) Si $0 \leqslant N < 10^2$ alors $0 \leqslant \left(\frac{N}{10^2}\right)^2 < 1$

   Or $\left(\frac{10^2}{2} + \frac{N}{10^2}\right)^2 = \left(\frac{10^2}{2}\right)^2 + N + \left(\frac{N}{10^2}\right)^2$, d'où $\left(\frac{10^2}{2} + \frac{N}{10^2}\right)^2 < \left(\frac{10^2}{2}\right)^2 + N + 1$

   $\left(\frac{10^2}{2} + \frac{N+1}{10^2}\right)^2 = \left(\frac{10^2}{2}\right)^2 + N + 1 + \left(\frac{N+1}{10^2}\right)^2$, d'où $\left(\frac{10^2}{2}\right)^2 + N + 1 < \left(\frac{10^2}{2} + \frac{N+1}{10^2}\right)^2$

   c) Soit $n = \left(\frac{10^2}{2}\right)^2 + N + 1, (n + 1 = \left(\frac{10^2}{2}\right)^2 + (N+1) + 1, \ldots)$.

   On vient de montrer que $\sqrt{n}$ vérifie $\frac{10^2}{2} + \frac{N}{10^2} < \sqrt{n} < \frac{10^2}{2} + \frac{N+1}{10^2}$.

   On a ainsi : $\frac{10^2}{2} + \frac{N}{10^2} < \sqrt{n} < \frac{10^2}{2} + \frac{N+1}{10^2} < \sqrt{n+1} < \frac{10^2}{2} + \frac{N+2}{10^2} < \cdots$

   $D(m_2) = 100$ lorsque $m_1 = 50 = \frac{10^2}{2}$ et $n = 2501 = \left(\frac{10^2}{2}\right)^2 + 0 + 1$.

   d'où $n = \left(\frac{10^2}{2}\right)^2 + 0 + 1$ vérifie :

   $$\frac{10^2}{2} < \sqrt{n} < \frac{10^2}{2} + \frac{1}{10^2} < \sqrt{n+1} < \frac{10^2}{2} + \frac{2}{10^2} < \cdots$$

4. Des démarches analogues donnent pour les quatre premières décimales :

   $$\left(\frac{10^4}{2} + \frac{N}{10^4}\right)^2 < \left(\frac{10^4}{2}\right)^2 + N + 1 < \left(\frac{10^4}{2} + \frac{N+1}{10^4}\right]^4 < \cdots$$

   On veut $N = 2012$.

   Le nombre $\left(\frac{10^4}{2}\right)^2 + 2012 + 1 = 25\ 002\ 013$ est donc solution.
   $\sqrt{25002013} \approx 5000,\mathbf{2012}\ 96\ldots$
   $\sqrt{25002014} \approx 5000,\mathbf{2013}\ 96\ldots$
   $\sqrt{25002015} \approx 5000,\mathbf{2014}\ 96\ldots$
5. Pour avoir les huit premières décimales égales à 21032012.
   Des démarches analogues donnent, pour les huit premières décimales :

   $$\left(\frac{10^8}{2} + \frac{N}{10^8}\right)^2 < \left(\frac{10^8}{2}\right)^2 + N + 1 < \left(\frac{10^8}{2} + \frac{N+1}{10^8}\right)^2 < \cdots$$

   On veut $N = 21\ 032\ 012$.

   Le nombre $\left(\frac{10^8}{2}\right)^2 + 21\ 032\ 012 + 1 = 2\ 500\ 000\ 021\ 032\ 013$ convient.

Retour au sommaire

NANTES

Troisième exercice

Séries autres que S

Moyennes

Énoncé

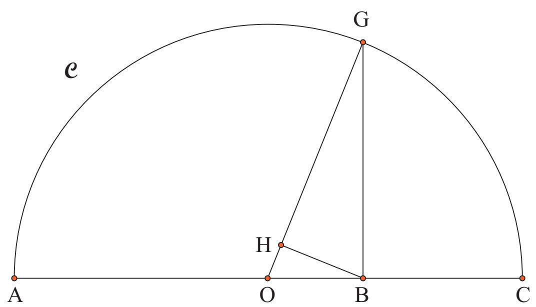
a et b sont deus réels strictement positifs.

On appelle - moyenne arithmétique des nombres a et b le nombre $m = \dfrac{a+b}{2}$

- moyenne géométrique des nombres a rt b le nombre $g = \sqrt{ab}$,
- moyenne harmonique des nombres a et b le nombre h défini par $\dfrac{2}{h} = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}$.

Ces notations seront conservées dans toute la suite de l'exercice.

1. a) Calculer chacune de ces trois moyennes lorsque $a = 50$ et $b = 18$.
   b) On sait que $h = 16$ et $g = 20$. Calculer m, a et b avec $a \leqslant b$.
2. a) Montrer que $h = \dfrac{g^2}{m}$.
   b) Soit k un réel strictement positif. Déterminer les moyennes m', g' et h' de ka et de kb en fonction de m, g et h.
3. Dans cette question, $a = 10$ et b est un entier naturel strictement supérieur à 10.
   a) Montrer que $g^2 = \dfrac{100h}{20-h}$.
   b) Trouver toutes les valeurs de b pour lesquelles m, g et h sont des entiers positifs.
4. Sur la figure ci-après, le demi-cercle $\mathcal{C}$ a pour centre O.
   A, B, C sont alignés avec O et sont tels que $AB = a$ et $BC = b$.
   La perpendiculaire à (AC) en B coupe le demi-cercle $\mathcal{C}$ en G et la perpendiculaire à (OG) passant par B coupe (OG) en H.



   a) Montrer que $BG = g$ et $GH = h$.
   b) En déduire le classement des trois moyennes dans l'ordre croissant.

Éléments de solution

1. a) $a = 50, b = 18.$ $\quad m = 34, g = 30, h = \dfrac{450}{17}$

b) $h = 16, g = 20$.

$\dfrac{2}{16} = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} = \dfrac{a+b}{ab} = \dfrac{2m}{g^2}$, d'où $m = \dfrac{400}{16} = 25$.

$a + b = 50$ et $ab = 400$, soit : $a(50 - a) - 400 = 0$;
$a^2 - 50a + 400 = 0$ et $a > 0$.
$a = 10$ et $b = 40$.

2. a) $\dfrac{2}{h} = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} = \dfrac{a+b}{ab} = \dfrac{2m}{g^2}$, d'où $h = \dfrac{g^2}{m}$

b) m, g et h sont les moyennes des nombres a et b.

$m' = \dfrac{1}{2}(ka + kb) = k\dfrac{a+b}{2} = km.$

$g' = \sqrt{(ka)(kb)} = k\sqrt{ab} = kg.$

$\dfrac{2}{h'} = \dfrac{1}{ka} + \dfrac{1}{kb} = \dfrac{1}{k}\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}\right) = \dfrac{1}{k} \times \dfrac{2}{h} \qquad h' = kh.$

3. Dans cette question $a = 10$ et b est un entier strictement supérieur à 10.

a) $h = \dfrac{ab}{m}$ avec $g^2 = ab = 10b$ et $m = \dfrac{10+b}{2}$, d'où

$h = \dfrac{20b}{10+b}$ donc $20 - h = 20 - \dfrac{20b}{10+b} = \dfrac{200}{b+10}$; on obtient $\dfrac{100h}{20-h} = 10b = g^2$.

b) Considérons $\dfrac{100h}{20-h}$, on doit rechercher des carrés divisibles par 10 pour h variant de 1 à 19.
A l'aide du tableur de la calculatrice on obtient $h = 10$ ou $h = 16$ ou $h = 18$.
La deuxième colonne du tableau nous donne g^2.
On a respectivement $g^2 = 100; g^2 = 400$ ou $g^2 = 900$.
On obtient $b = 10$ (que l'on élimine) ; $b = 40$ ou $b = 90$.

4. a) ***En utilisant uniquement le théorème de Pythagore***
Dans le triangle ABG rectangle en B, $AB^2 + BG^2 = AG^2 \qquad (1)$

Dans le triangle BCG rectangle en B, $BG^2 + BC^2 = CG^2 \qquad (2)$

Dans le triangle AGC rectangle en G (inscrit dans un demi-cercle) $AC^2 = AG^2 + CG^2$.
En utilisant (1) et (2), on a : $AC^2 = AB^2 + 2BG^2 + BC^2$
mais, $AC^2 = (AB + BC)^2 = AB^2 + 2AB.BC + BC^2$.
D'où $BG^2 = AB.AC = ab$.

De même, pour montrer que $GH = h$.

$$GH^2 = GB^2 - HB^2 = GB^2 - (OB^2 - OH^2) = GB^2 - OB^2 + OH^2 = GB^2 - OB^2 + (OG - GH)^2$$

$$GH^2 = GB^2 - OB^2 + OG^2 - 2OG \times GH + GH^2 \text{ donc } 2OG \times GH = GB^2 - OB^2 + OG^2$$

Ainsi

$$2 \times \frac{a+b}{2} \times GH = ab - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = ab - \frac{a^2 - 2ab + b^2}{4} + \frac{a^2 + 2ab + b^2}{4} = 2ab$$

Donc $GH = \dfrac{2ab}{a+b} = h$.

Avec la trigonométrie
Dans le triangle ACG rectangle en G, $\widehat{A}$ et $\widehat{C}$ sont complémentaires .
Dans le triangle ABG rectangle en B, $\widehat{A}$ et $\widehat{AGB}$ sont complémentaires.
$\widehat{AGB}$ et $\widehat{C}$ sont égaux, $\tan \widehat{C} = \dfrac{BG}{BC}$ et $\tan \widehat{AGB} = \dfrac{AB}{BG}$.

$\dfrac{BG}{BC} + \dfrac{AB}{BG}$, d'où $BG^2 = AB.BC = ab = g^2$ d'où $BG = g$

$\widehat{BOG}$ et $\widehat{GBH}$ ont le même complémentaire $\widehat{OGB}$.

$\sin\widehat{GBH} = \dfrac{GH}{BG}$ et $\sin\widehat{BOG} = \dfrac{BG}{OG}$.

$GH = \dfrac{BG^2}{OG} = \dfrac{2ab}{a+b} = h$.

b) Le rayon OG vaut m.
L'hypoténuse d'un triangle rectangle est le côté le plus long.
On a $GH \leqslant GB \leqslant OG$

Retour au sommaire

NANTES

Quatrième exercice

Séries autres que S

Nombres triangulaires et tétraédriques

Énoncé

Partie A : nombres triangulaires

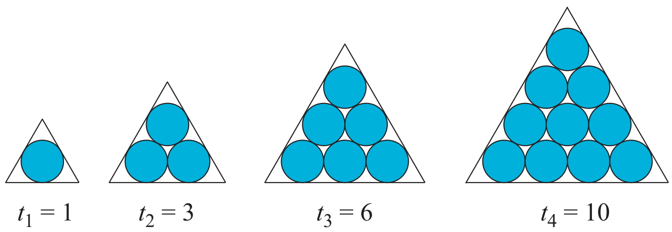


figure 1

En empilant des jetons comme le montre la figure 1, on définit des nombres triangulaires correspondant au nombre de jetons empilés.

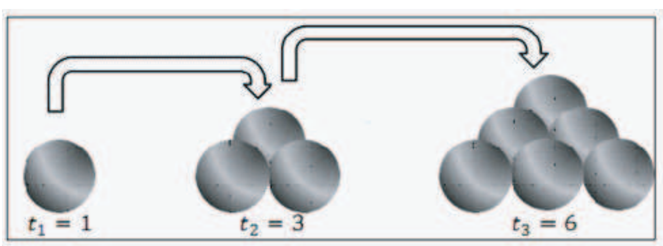
Le premier, à un niveau ou d'indice 1, est $t_1 = 1$.
Le second, d'indice 2 est $t_2 = 3$.

1. Déterminer t_5, t_6, t_7.
2. D'une manière générale, le nombre triangulaire d'indice n est défini poour tout entier naturel n non nul par : $t_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n$

   On rappelle que $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.
   Que remarque-t-on en additionnant deux termes consécurifs t_n et t_{n+1} de la suite (t_n) ?
   Démontrer ce résultat.

Partie B : nombres tétraédriques

Considérons, non plus des jetons, mais des boules identiques disposées de la même façon que dans la figure 1 (partie A), posées sur un plan horizontal, au contact les unes des autres comme le montre la figure 2. On retrouve ainsi une succession de nombres triangulaires.



puis $t_4, t_5, \ldots, t_n, \ldots$

figure 2

On procède ensuite à des empilements de boules de la façon suivante :
on dispose trois boules en triangle comme pour t_2 ci-dessus puis on pose une boule sur ce groupe de trois. On obtient ainsi un empilement à deux niveaux formé de 4 boules.
Pour obtenir un niveau supplémentaire, on pose ces quatre boules sur le groupe de six formant (voir figure 3 ci-dessous) et ainsi de suite.

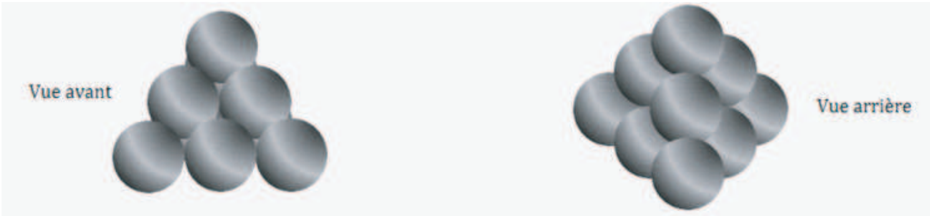


figure 3

Par ce procédé, on définit des nombres tétraédriques notés T_n donnant le nombre total de boules nécessaires pour obtenir n niveaux.
Ainsi : $T_2 = t_1 + t_2 = 4, T_3 = t_1 + t_2 + t_3 = 10$. On pose par convention $T_1 = 1$.
D'une manière générale, le nombre tétraédrique d'indice n est défini par $T_n = t_1 + t_2 + \cdots + t_n$, pour tout entier $n \geqslant 1$.

1. Calculer T_4 et T_5.
2. Soit N tel que le plus petit nombre tétraédrique T_N soit supérieur ou égal à 2012.
   a) Déterminer les valeurs de N et de T_N.
   Expliquer la démarche. L'écriture d'un algorithme dans cette question sera valorisée.
   b) Le diamètre de chaque boule étant de 1 dm, calculer la hauteur en mètres, arrondie au centième, de la pile formée par les T_N boules.

Éléments de solution

Partie A : nombres triangulaires

1. $T_4 = T_3 + t_4 = 10 + 10 = 20; T_5 = 20 + 15 = 35$.
2. a) Déterminer le plus petit entier N tel que $T_N \geqslant 2012$

   Méthode 1 :
   Recherche par essais successifs à partir du calcul des termes de la suite (T_N) jusqu'à obtention de la valeur demandée N de l'indice n.
   Algorithme

   Variables
   i, T, n entiers
   Initialisation
   $T = 0$
   Traitement
   Lire n
   Pour i allant de 1 à n
   T prend la valeur $T + \dfrac{i(i+1)}{2}$
   Fin Pour
   Sortie Afficher n
   Afficher T
   Fin

   Méthode 2 :
   Ajout de la condition sur la valeur de T_N (ici, avec Algobox) donnant directement le résultat cherché.

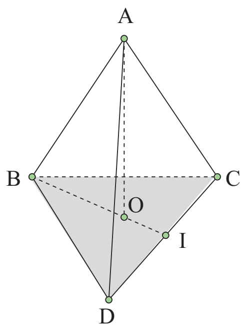
```
VARIABLES
 T EST_DU_TYPE NOMBRE
 i EST_DU_TYPE NOMBRE
 n EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT ALGORITHME
 n PREND_LA_VALEUR 0
 TANT_QUE (T<2012) FAIRE
  DEBUT TANT_QUE
```

```
    n PREND_LA_VALEUR n+1
    T PREND_LA_VALEUR 0
    POUR i ALLANT_DE 1 A n
     DEBUT_POUR
     T PREND_LA_VALEUR T+i*(i+1)/2
     FIN_POUR
    FIN_TANT_QUE
  AFFICHER T
  AFFICHER n
FIN_ALGORITHME
```

Méthode 3 :
On déduit de la question 2 de la partie A que
$t_1 + t_2 = 2^2; t_3 + t_4 = 4^2; t_5 + t_6 = 6^2 \ldots$ etc.
D'où les termes d'indice pair :
$T_{2k} = (t_1 + t_2) + (t_3 + t_4) + \cdots + (t_{2k-1} + T_{2k} = (2 \times 1)^2 + (2 \times 2)^2 + \cdots + (2 \times k)^2$
Termes d'indice impair :
$T_{2k+1} = T_{2k} + \dfrac{(2k+1)(2k+2)}{2} = T_{2k} + (2k+1)(k+1)$
(algorithme similaire à celui de la méthode 2 pour le calcul de T_{2k} en ajoutant la variable k et en modifiant la formule).

On trouve finalement : $T_{22} = 2024$ ($T_{21} = 1771$)
Ce nombre correspond à un tétraèdre de 22 niveaux ($N = 22$).

b) L'écart entre deux niveaux correspond à la hauteur d'un tétraèdre régulier d'arête 1 dm (voir ci-dessous)



Soit O le pied de la hauteur issue de A, O est le centre de gravité du triangle BCD.
Soit I le milieu de [CD]. Le triangle BDI est rectangle en I.

$$BI = \sqrt{BD^2 - DI^2} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}; BO = \frac{2}{3}BI = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Calculs en dm

$$AO = \sqrt{AB^2 - BO^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Le tétraèdre ayant 22 étages, sa hauteur h est formée de 21 écarts entre deux niveaux auxquels on ajoute deux fois le rayon d'une boule.

Alors : $h = 1 + 21\sqrt{\dfrac{2}{3}}$.
La hauteur cherchée vaut environ 18,1 dm soit environ 1,81 m.

Retour au sommaire

NICE

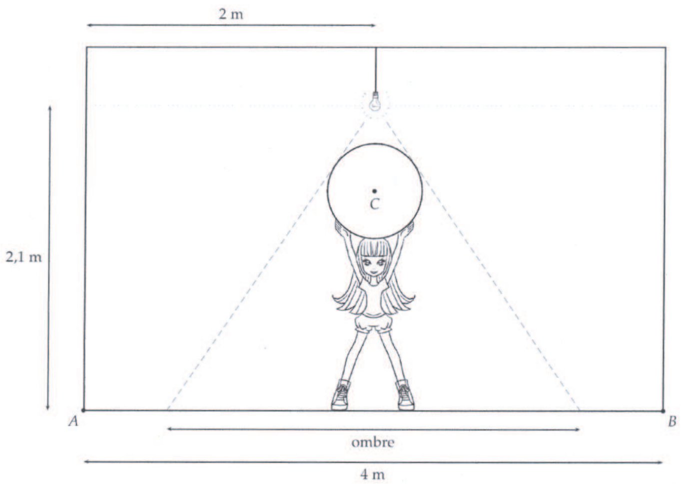
Premier exercice

Série S

La chambre de Léa

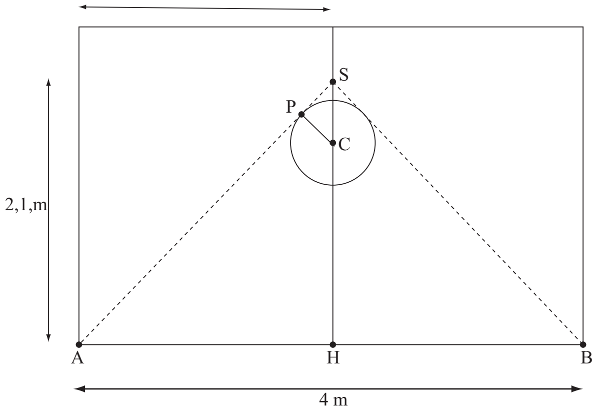
Énoncé

Le dessin ci-dessous représente une coupe transversale de la chambre de Léa.
Les dimensions de la pièce, en mètres, sont précisées sur la figure.



Léa tient dans ses mains un ballon.
Sur la figure, ce ballon est représenté par un cercle de rayon 30 cm et de centre C . L'ampoule du plafond émet une lumière qui forme une ombre au sol.
Déterminer la plus petite hauteur à partir de laquelle Léa doit tenir son ballon pour que l'ombre de ce dernier recouvre entièrement le sol AB.
On donnera la hauteur du point C ainsi que la distance AC .

Éléments de solution



Le théorème de Pythagore donne $AS^2 = AH^2 + HS^2 = 2^2 + 2,1^2 = 8,41$ donc $AS = 2,9$.

Par ailleurs, $\sin \widehat{ASH} = \dfrac{PC}{SC} = \dfrac{AH}{AS}$ donc $SC = \dfrac{0,3 \times 2,9}{2} = 0,435$.

On déduit $CH = 2,1 - 0,435 = 1,665$ qui est la hauteur cherchée.

Le théorème de Pythagore dinne $AC^2 = CH^2 + AH^2 = 1,665^2 + 2^2$.

Ainsi : $AC = \sqrt{6,772225} = 2,6$ m.

Retour au sommaire

NICE

Deuxième exercice

Série S

On lance un dé

Énoncé

On lance quatre fois de suite un dé bien équilibré à 10 faces dont les faces sont numérotées de 0 à 9.
On obtient ainsi quatre chiffres que l'on note a, b, c et d dans leur ordre de sortie.
On forme alors l'entier N dont l'écriture décimale est $abcd$.
Exemple 1 : si l'on obtient successivement 2,0,1 et 2 avec le dé alors l'entier N est 2012.
Exemple 2 : si l'on obtient successivement 0,7,8 et 3 avec le dé alors l'entier N est 783.

a.i.1. Calculer la probabilité que

a) le nombre N soit strictement supérieur à 2012.

b) le produit des quatre chiffres de N soit égal à 20.

a.i.2. Soit la fonction F qui à tout entier s associe le nombre de lancers de quatre dés tels que la somme de ces quatre lancers soit égale à s.
Exemple 1 : $F(0) = 1$ car seule la combinaison 0000 permet d'obtenir une somme égale à 0.
Exemple 2 : $F(1) = 4$ car seules les quatre combinaisons 1000, 0100, 0010 et 0001 donnent une somme égale à 1.

a) Déterminer $F(2)$

b) Calculer ma probabilité que la somme des quatre chiffres de N soit égale à 3.

c) Écrire un algorithme qui calcule et affiche $F(s)$ pour s entier donné.

a.i.3. On dit que N est « croisé » lorsque $a = c$ et $b = d$.

a) Quelle est la probabilité que N soit croisé ?

b) Un nombre croisé non nul peut-il être un carré parfait (c'est-à-dire la carré d'un entier) ?

a.i.4. Si $abcd$ et $a'b'c'd'$ sont les écritures décimales respectives de deux entiers N et N', on appelle « distance de N à N' » le nombre $D = (a - a')^2 + (b - b')^2 + (c - c')^2 + (d - d')^2$.
Déterminer, parmi tous les entiers croisés, tous ceux dont la distance à 2012 est la plus petite possible.

Éléments de solution

1a) La probabilité vaut $\dfrac{9999 - 2012}{10000} = 0,7987$

1b) $2012 = 503 \times 4$ est la meilleurs factorisation possible de 2012. Il est donc impossible de l'écrire sous la forme d'un produit de quatre entiers compris entre 0 et 9.
La probabilité vaut 0.

2a) $F(2) = 10$ et $F(3) = 20$.

2b) La probabilité vaut $\dfrac{20}{10000} = \dfrac{1}{500}$.

2c)Voir l'algorithme page suivante

```
VARIABLES
   s EST_DU_TYPE NOMBRE
   n EST_DU_TYPE NOMBRE
   a EST_DU_TYPE NOMBRE
   b EST_DU_TYPE NOMBRE
   c EST_DU_TYPE NOMBRE
   d EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT ALGORITHME
   LIRE s
   n PREND_LA_VALEUR 0
   POUR a ALLANT_DE 0 A 9
      DEBUT_POUR
      POUR b ALLANT_DE 0 A 9
         DEBUT_POUR
         POUR c ALLANT_DE 0 A 9
            DEBUT_POUR
            POUR d ALLANT_DE 0 A 9
               DEBUT_POUR
               SI (a+b+c+d=s) ALORS
                  DEBUT_SI
                  n PREND_LA_VALEUR n+1
                  FIN_SI
               FIN_POUR
            FIN_POUR
         FIN_POUR
      FIN_POUR
   AFFICHER n
FIN_ALGORITHME
```

3a) La probabilité vaut $\dfrac{100}{10000} = \dfrac{1}{100}$.

3b) Un nombre N croisé s'écrit $N = 1000a + 100b + 10a + b = 101(10a + b)$.

Si N est un carré parfait, $10a + b$ est nécessairement un multiple (non nul) de 101 car 101 est un nombre premier. Ceci est impossible car $10a + b < 100$.

Soit $abab$ un entier croisé. Sa distance à 2012 vaut $D = (2 - a)^2 + b^2 + (1 - a)^2 + (2 - b)^2$.

On déduit $D = 2a^2 - 6a + 2b^2 - 4b + 9 = 2((a - 1,5)^2 + 2(b - 1)^2 + \dfrac{5}{2}$.

Ainsi, D est minimale lorsque $(a, b) = (1, 1)$ ou $(a, b) = (2, 1)$.

Les entiers qui minimisent la distance sont 1111 et 2121 pour $D = 3$.

Retour au sommaire

NICE

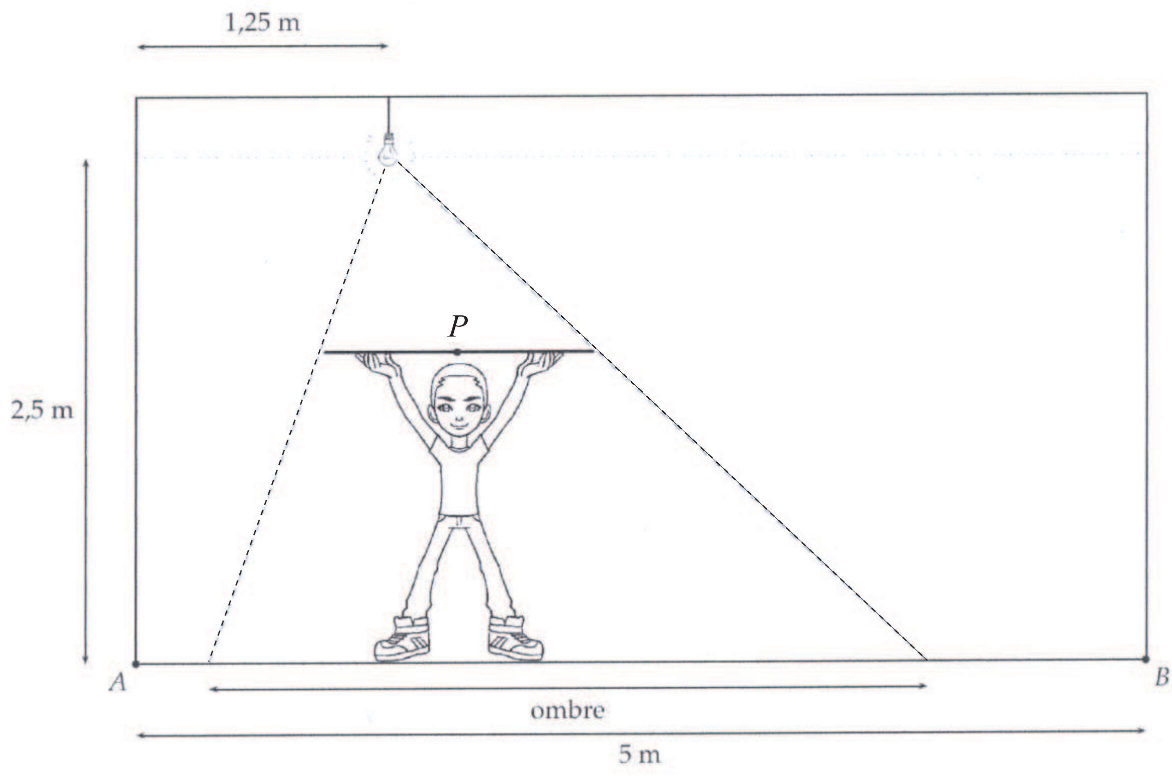
Troisième exercice

Séries autres que S

La chambre d'Adrien

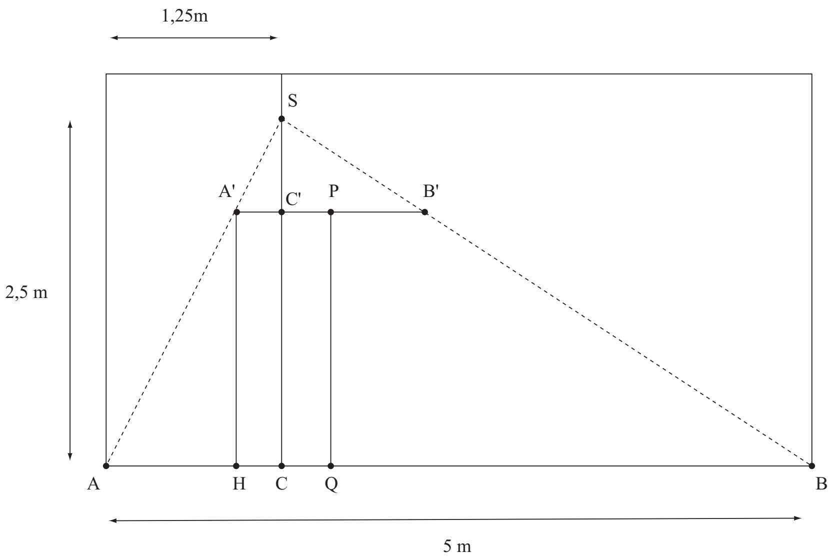
Énoncé

Le dessin ci-dessous représente une coupe transversale de la chambre d'Adrien.
Les dimensions de la pièce, en mètres, sont précisées sur la figure.



Adrien tient dans ses mains, parallèlement au sol, une plaque.
Sur la figure, cette plaque est représentée par un segment de longueur 180 cm et de centre P. L'ampoule du plafond émet une lumière qui forme une ombre au sol.
Déterminer la plus petite hauteur à partir de laquelle Adrien doit tenir la plaque pour que l'ombre de cette dernière recouvre entièrement la longueur du sol AB. Préciser dans ce cas la distance AP.

Éléments de solution



Le théorème de Thalès donne $\dfrac{SC'}{SC} = \dfrac{A'B'}{AB}$ donc $SC' = \dfrac{1,8}{5} \times 2,5 = 0,9$.

On déduit $CC' = 2,5 - 0,9 = 1,6$ m qui est la hauteur de la plaque.

Le théorème de Thalès donne $\dfrac{AH}{AC} = \dfrac{AH'}{SC}$ donc $AH = \dfrac{1,6}{2,5} \times 1,25 = 0,8$.

On déduit $AQ = AH + HQ = 0,8 + 0,5 \times 1,8 = 1,7$.

Le théorème de Pythagore donne : $AP^2 = PQ^2 + AQ^2 = 1,6^2 + 1,7^2 = 5,45$.

On déduit $AP = \sqrt{5,45} \approx 2,33$m.

Retour au sommaire

NICE

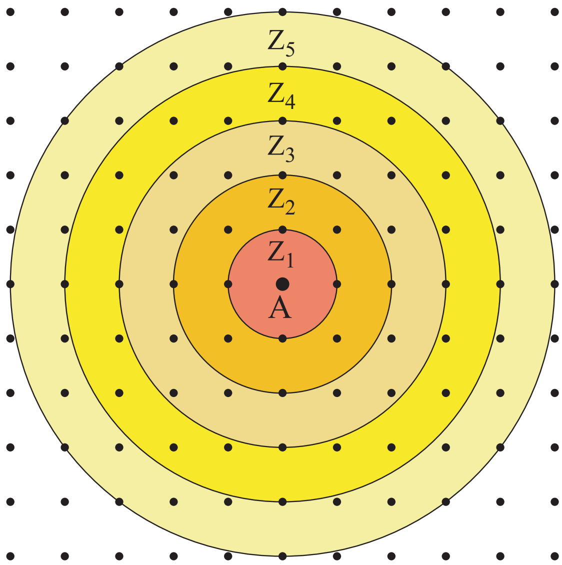
Quatrième exercice

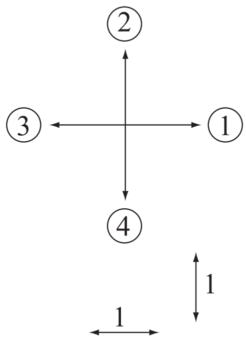
Séries autres que S

Déplacement sur un réseau

Énoncé

Un jeu consiste à se déplacer cinq fois sur un réseau de points en partant d'un point A et à suivre, de façon aléatoire et équiprobable, une des quatre directions (Nord : 2, Sud : 4, Est : 1 ou Ouest : 3).





Sur la figure,

- La zone Z_1 est le disque de centre A et de rayon 1, frontière comprise.
- La zone Z_2 est la couronne de centre A et de rayons 1 et 2 ; elle contient le cercle de centre A et de rayon 2, mais pas le cercle de centre A et de rayon 1.
- La zone Z_3 est la couronne de centre A et de rayons 2 et 3 ; elle contient le cercle de centre A et de rayon 3, mais pas le cercle de centre A et de rayon 2.
- Etc.

On simule un trajet en utilisant la calculatrice et en affichant cinq fois de suite un nombre aléatoire compris entre 1 et 4. On note ensuite le numéro de la zone dans laquelle le déplacement s'est terminé.

Exemple 1 : si la calculatrice retourne la série de nombres 2, 1, 1, 3 et 2, alors le trajet se termine dans la zone Z_3.

Exemple 2 : Si la calculatrice retourne la série de nombres 1, 2, 3, 4 et 4, alors le trajet se termine dans la zone Z_1.

a.i.1

a.i.1.a. Simuler, à l'aide de la calculatrice, 20 déplacements dans le réseau puis compléter le tableau ci-dessous :

Zone Z_1	Zone Z_2	Zone Z_3	Zone Z_4	Zone Z_5	Total
					20

b. Montrer qu'aucun trajet ne se termine au point de départ A.

c. Est-il possible d'atteindre toutes les zones à l'issue d'un trajet ? Justifier la réponse.

Exemple 3 : Si la calculatrice retourne la série de nombres 1, 1, 1, 2 et 1, alors le trajet se termine dans la zone Z_5. De même pour la série de nombres 1, 1, 1, 1 et 1. Bien que ces deux trajets soient différents, ils se terminent tous deux dans la même zone.

2. a. Combien existe-t-il de trajets différents qui se terminent dans la zone Z_5 ?

   b. Combien existe-t-il de trajets différents qui se terminent sur le cercle extérieur de la zone Z_5 ?

3. Écrire un algorithme qui simule 1000 trajets et qui affiche le nombre de ceux qui se terminent sur le cercle extérieur de la zone Z_5.

Éléments de solution

1. a) On utilise la fonction de la calculatrice qui génère un nombre pseudo–aléatoire compris entre 1 et 4, 5 fois de suite.

   b) Pour revenir au point de départ, il faudrait que le nombre de déplacements horizontaux et verticaux soit pair. Comme la somme de ces déplacements vaut 5, cela n'est pas possible.

   c) D'après le tableau, il semble que la zone Z_2 ne puisse être atteinte. Une justification possible : notons a, b, c et d le nombre de déplacements respectifs à l'Est, au Nord, à l'Ouest et au Sud. Ces quatre entiers appartiennent à l'ensemble $E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

   Si (x, y) sont les coordonnées du point d'arrivée (l'origine étant le point A), on a à l'issue des cinq déplacements $x = a - c$ et $y = b - d$. Or la zone Z_2 se compose des huit couples suivants : $(1, 1), (2, 0), (0, 2), (-1, 1), (-2, 0), (-1, -1), (0, -2), (1, -1)$.
   Par symétrie, on peut réduire la faisabilité d'un chemin reliant A à un point de la zone Z_2 aux deux couples $(1, 1)$ et $(2, 0)$.
   Pour le premier couple, on a $a - c = 1$ et $b - d = 1$ avec $a + b + c + d = 5$. On déduit $2(1 + c + d) = 5$, ce qui est absurde.
   Pour le deuxième couple, on a $a - c = 2$ et $b - d = 0$ avec $a + b + c + d = 5$. On déduit $2(1 + c + d) = 5$, ce qui est absurde.
   Il est donc impossible de terminer un trajet en zone Z_2.

2. a) Pour terminer un trajet en zone Z_5, celui-ci doit être de la forme « $XXXXX$ » ou « $YXXXX$ » ou « $XYXXX$ » ou « $XXYXX$ » ou « $XXXYX$ » ou « $XXXXY$ »
   Si $X = 1$ alors $Y = 2$ ou $Y = 4$.
   Si $X = 2$ alors $Y = 1$ ou $Y = 3$.
   Si $X = 3$ alors $Y = 2$ ou $Y = 4$.
   Si $X = 4$ alors $Y = 1$ ou $Y = 3$.
   Cela fait 11 configurations distinctes pour chaque cas donc 44 trajets possibles.

   b) Pour terminer un trajet sur la frontière extérieure de la zone Z_5, celui-ci doit être de la forme « $XXXXX$ » avec $X = 1$ ou $X = 2$ ou $X = 3$ ou $X = 4$. Cela fait donc 4 configurations distinctes.

3. Un algorithme possible (voir page suivante).

```
VARIABLES
      I EST DU TYPE NOMBRE
      J EST DU TYPE NOMBRE
      X EST DU TYPE NOMBRE
      y EST DU TYPE NOMBRE
      Z5 EST DU TYPE NOMBRE
      D EST DU TYPE NOMBRE
DEBUT ALGORITHME
   Z5 PREND LA VALEUR 0
      POUR I ALLANT DE 1 A 1000
         DEBUT POUR
         X PREND LA VALEUR 0
         Y PREND LA VALEUR 0
         POUR J ALLANT DE 1 A 5
            DEBUT POUR
            D PREND LA VALEUR ALGOBOX_ALEA_ENT(1,4)
            SI (D==1) ALORS
               DEBUT SI
               X PREND LA VALEUR X+1
               FIN SI
            SI (D==2) ALORS
               DEBUT SI
               Y PREND LA VALEUR Y+1
               FIN SI
            SI (D==3) ALORS
               DEBUT SI
               X PREND LA VALEUR X-1
               FIN SI
            SI (D==4) ALORS
               DEBUT SI
               Y PREND LA VALEUR Y-1
               FIN SI
            FIN POUR
         SI (X==-5 OU X==5 OU Y==-5 OU Y==5) ALORS
            DEBUT SI
            Z5 PREND LA VALEUR Z5+1
            FIN SI
         FIN POUR
      AFFICHER Z5
   FIN ALGORITHME
```

Retour au sommaire

ORLÉANS - TOURS

Premier exercice

Toutes séries

Des cercles à la suite...

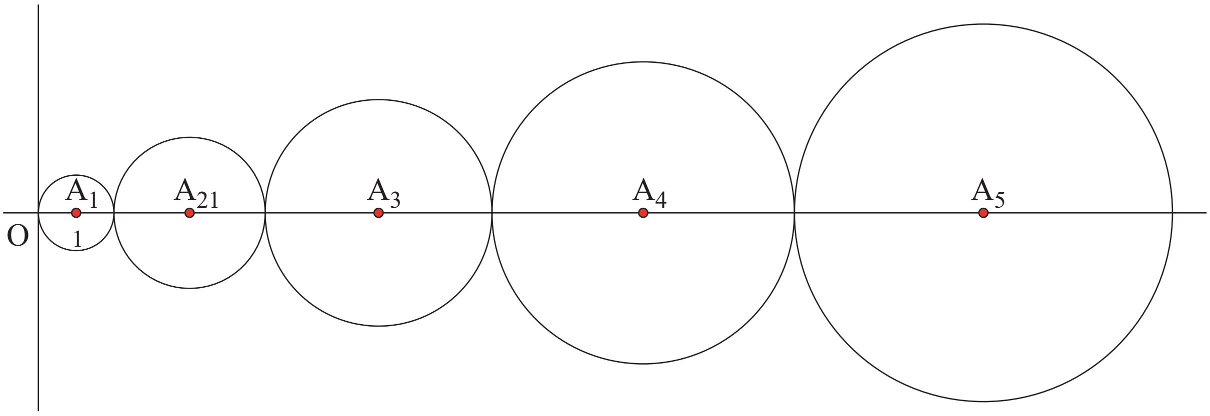
Énoncé

On rappelle que pour tout entier$n \geqslant 1$, la somme des entiers de 1 à n est donnée par

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Le plan est muni d'un repère orthonormal d'origine O.
On considère des cercles tous centrés sur l'axe des abscisses et définis de la manière suivante :

- Le cercle C_1 passe par le point O et a pour rayon 1 ;
- le cercle C_2 est tangent extérieurement au cercle C_1 et a pour rayon 2 ;
- le cercle C_3 est tangent au cercle C_2 et a pour rayon 3 ;
- et plus généralement, pour tout entier $n \geqslant 2$, le cercle C_n est tangent extérieurement au cercle C_{n-1} et a pour rayon n.



Pour tout entier $n \geqslant 1$, on désigne par A_n le centre du cercle C_n et par x_n l'abscisse du point A_n.
On rappelle que les cercles sont centrés sur l'axe des abscisses et on suppose le repère choisi de telle sorte que tous les nombres réels x_n soient positifs.

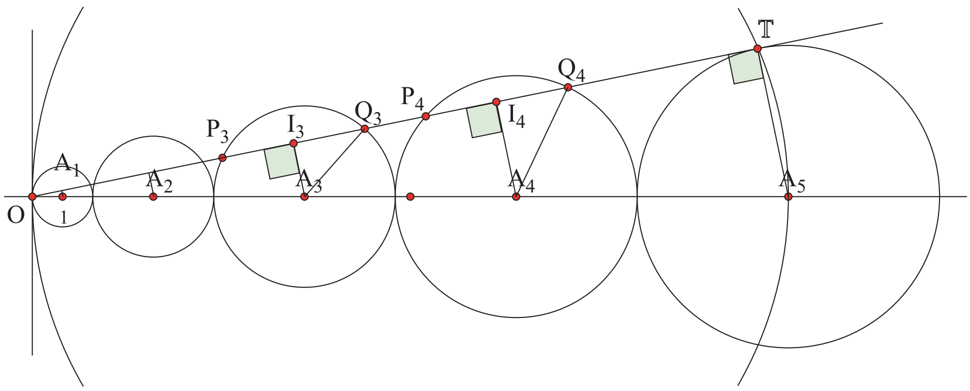
1. a) Calculer les abscisses $x_1, x_2, \ldots x_n$ respectivement des points A_1, $\mathrm{A}_2 \ldots \mathrm{A}_n$.
   b) Conjecturer l'expression, pour tout entier $n \geqslant 1$ de x_n en fonction de n.
   c) Validez votre conjecture par une démonstration.
2. On désigne par Δ une droite passant par le point O et tangente au cercle C_5.
   a) Construire Δ sur la feuille donnée en annexe. Justifier la construction.
   b) On considère les points suivants :
      - T le point de contact de la droite Δ avec le cercle C_5 ;
      - P_3 et Q_3 les deux points d'intersection de la droite Δ et du cercle C_3 ;
      - P_4 et Q_4 les points d'intersection de la droite Δ et du cercle C_4.

   Démontrer que les cordes $[\mathrm{P}_3\mathrm{Q}_3]$ et $[\mathrm{P}_4\mathrm{Q}_4]$ ont la même longueur. On pourra considérer les points I_3 et I_4 milieux respectifs de ces deux segments.

3. Dans cette question, on considère un entier naturel $n \geqslant 2$ et les n cercles de C_1 à C_n.
Une droite Δ passant par le point O et tangente au cercle C_n définit des cordes sur chacun des cercles $C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}$
   a) Pour tout entier k tel que $1 \leqslant k \leqslant n-1$, on désigne par P_k et Q_k les deux points d'intersection de la droite Δ et du cercle C_k. Démontrer que $P_kQ_k = \dfrac{2k}{n}\sqrt{n^2-k^2}$.
   b) Démontrer que, parmi les $n-1$ cordes $[\mathrm{P}_k\mathrm{Q}_k]$, , il en existe au moins deux qui ont la même longueur si et seulement si n^2 est la somme des carrés de deux entiers.
   c) Pour $n = 6$, une droite Δ passant par le point O et tangente au cercle C_6 définit des cordes sur chacun des cercles $C_1, C_2, \ldots C_5$. Parmi ces cinq cordes, en existe-t-il deux qui ont la même longueur ?
   d) Et pour $n = 10$?

Éléments de solution

1. a) $x_1 = 1, x_2 = 4, x_3 = 9, x_4 = 16, x_5 = 25, x_6 = 36$.
   b) Conjecture : pour tout entier $n \geqslant 1$, $x_n = x^2$.
   c) La relation est vérifiée pour $x = 1$.
   Dans le cas $n \geqslant 2$.
   Si on désigne par r_n le rayon du cercle C_n, on a $x_n = OA_n = 2r_1 + 2r_2 + \cdots + 2_{n-1} + r_n$.
   D'après la formule rappelée au début de l'énoncé : $x_n = (n-1)n + n = n^2$.
2. a) Le triangle OTA_5 étant rectangle en T, le point T appartient au cercle de diamètre $[\mathrm{OA}_5]$. Il est donc le point d'intersection autre que O de ce cercle et de la droite Δ.



   b) Les droites $(\mathrm{I}_3\mathrm{A}_3)$, $(\mathrm{I}_34\mathrm{A}_4)$ et (TA_5) sont parallèles puisque toutes les trois perpendiculaires à la droite Δ. On peut donc appliquer le théorème de Thalès dans les triangles OTA_5, $\mathrm{OI}_3\mathrm{A}_3$ et $\mathrm{OI}_4\mathrm{A}_4$.
   On obtient $\dfrac{I_3A_3}{OA_3} = \dfrac{I_4A_4}{OA_4} = \dfrac{TA_5}{OA_5}$. D'où $I_3A_3 = OA_3 \times \dfrac{TA_5}{OA_5}$ et $I_4A_4 = OA_4 \times \dfrac{TA_5}{OA_5}$, ce qui donne $I_3A_3 = 9 \times \dfrac{5}{25} = \dfrac{9}{5}$ et $I_4A_4 = 16 \times \dfrac{5}{25} = \dfrac{16}{5}$
   On applique alors le théorème de Pythagore dans les triangles $\mathrm{A}_3\mathrm{I}_3\mathrm{Q}_3$ et $\mathrm{A}_4\mathrm{I}_4\mathrm{Q}_4$.
   $$I_3Q_3^2 = A_3Q_3^2 - I_3A_3^2 = 3^2 - \left(\frac{9}{5}\right)^2 = \frac{144}{25} \text{ et } I_4Q_4^2 = A_4Q_4^2 - I_4A_4^2 = 4^2 - \left(\frac{16}{5}\right)^2 = \frac{144}{25}.$$
   On obtient $P_3Q_3 = P_4Q_4 = \dfrac{24}{5}$. Les deux cordes $[\mathrm{P}_3\mathrm{Q}_3]$ et $[\mathrm{P}_4\mathrm{Q}_4]$ ont la même longueur.
3. a) De même qu'au 2.b), on applique le théorème de Thalès dans les triangles OTA_n et $\mathrm{OI}_k\mathrm{A}_k$.
   On obtient $\dfrac{I_kA_k}{OA_k} = \dfrac{TA_n}{OA_n}$. D'où $I_kA_k = OA_k \times \dfrac{TA_n}{OA_n} = k^2 \times \dfrac{n}{n^2} = \dfrac{k^2}{n}$.
   Puis on applique le théorème de Pythagore dans le triangle $\mathrm{A}_k\mathrm{I}_k\mathrm{Q}_k$.
   $$I_kQ_k^2 = A_kQ_k^2 - I_kA_k^2 = k^2 - \left(\frac{k^2}{n}\right)^2 = \frac{k^2(n^2-k^2}{n^2}. \text{ D'où } P_kQ_k = 2I_kQ_k = \frac{2k}{n}\sqrt{n^2-k^2}$$

b) Soit k et k' deux entiers distincts tels que $1 \leqslant k \leqslant n-1$ et $1 \leqslant k' \leqslant n-1$.
On a les équivalences successives suivantes :

$$\begin{aligned} P_kQ_k = P_{k'}Q_{k'} &\Leftrightarrow \frac{k}{n}\sqrt{n^2-k^2} = \frac{k'}{n}\sqrt{n^2-k'^2} k^2\left(n^2-k^2\right) = k'^2\left(n^2-k'^2\right) \\ &\Leftrightarrow n^2\left(k^2-k'^2\right) = k^4-k'^4 \\ &\Leftrightarrow n^2\left(k^2-k'^2\right) = \left(k^2+k'^2\right)\left(k^2-k'^2\right). \end{aligned}$$

ce qui équivaut, puisque $\left(k^2-k'^2\right)$ est non nul, à $n^2 = k^2+k'^2$.

c) Pour $n=6$; on ne peut trouver deux cordes égales car aucune des sommes $k^2+k'^2$ ne vaut 36.

d) Pour $n=10$, on a $10^2 = 6^2+8^2$. On en déduit que les cordes $[\mathrm{P}_6\mathrm{Q}_6]$ et $[\mathrm{P}_8\mathrm{Q}_8]$ délimitées par la droite Δ sur les cercles C_6 et C_8 ont la même longueur.

Retour au sommaire

ORLÉANS - TOURS

Deuxième exercice

Toutes séries

Accrochez les wagons

Énoncé

Dans cet exercice, l'unité de masse sera la tonne et l'unité de longueur le mètre.

Un convoi ferroviaire est constitué de N wagons choisis parmi deux types :

- Wagons de type A : longueur 20 , masse totale 60 ;
- Wagons de type B : longueur 30 , masse totale 100

Un convoi de cinq wagons peut être symbolisé par une écriture du type (A,B,A,A,B), désignant les wagons dans l'ordre du convoi.
Ainsi les deux convois de trois wagons symbolisés par (A,A,B) et (A,B,A) sont considérés comme distincts.
On note L la longueur totale du convoi, **qui ne tient pas compte des espaces entre les wagons, ni des motrices**.

1. un convoi de longueur 310 admettant exactement N wagons.
   a) Pour quelle valeur de N ce convoi a-t-il une masse totale maximum ?
   b) De combien de façons distinctes peut-on former un convoi répondant aux conditions de la question précédente ?
2. Pour tout entier naturel n non nul, on note u_n le nombre de convois distincts de longueur $L = 10\times n$. Ainsi, u_5 désigne le nombre de convois distincts de longueur 50.
   a) Déterminer u_{10}, c'est-à-dire le nombre de convois distincts de longueur 100.
   b) Reproduire sur la copie et compléter le tableau suivant

n	2	3	4	5	6	7
u_n						

   c) Calculer u_8 à l'aide du tableau précédent en remarquant que tout convoi de longueur 80 se termine par un wagon B.
   d) Retrouver la valeur de u_{10}, puis calculer u_{15} et u_{20}.
3. Écrire un algorithme en langage naturel, permettant de calculer u_n, lorsque l'on saisit une valeur de n.

Éléments de solution

1. a) Notons x le nombre de wagons de type A et y celui de type B : on a donc $20x + 30y = 320$. La masse totale $M = 60x + 100y = 960 + 10y$ est maximum lorsque y est maximum. On sait que $2x + 3y = 32$ donc $0 \leqslant y \leqslant 10$. Donc $(x = 1, y = 10, N = 11, M = 1960)$ est la seule solution du problème avec $20x + 30y = 320$, La masse totale $M = 60x + 100y = 930 + 10y$ est maximum lorsque y est maximum.
   On sait que $2x+3y = 31$ donc $0 \leqslant y \leqslant 10$. Donc $(x = 2, y = 9, N = 11, M = 1830)$ est la seule solution du problème
   b) avec $20x + 30y = 320$, il faut choisir la position du wagon de type A parmi les 11 wagons ,soit 11 compositions possibles.
   Avec $20x+30y = 310$, il faut choisir la position de deux wagons de type A parmi les 11 wagons, soit $10 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 55$ compositions possibles.

2. a) Pour former un convoi de longueur 100 il faut avec les notations précédentes résoudre l'équation $2x + 3y = 10$, x et y entiers donc $x = 2y = 2$ ou $x = 5$. Il y a donc 7 convois de longueur 10 possibles (A,A,B,B),(A,B,A,B),(A,B,B,A),(B,A,A,B),(B,A,B,A),(B,B,A,A),(A,A,A,A,A)

   b)

n	2	3	4	5	6	7
u_n	1	1	1	2	2	3

   c) Si le convoi de longueur 80 se termine par un wagon A , et si on retire ce wagon il restera un convoi de longueur 60. Inversement, tous les convois de longueur 60 complétés d'un wagon de type A conviennent. Si le convoi de longueur 80 se termine par un wagon B, et si on retire ce wagon il restera un convoi de longueur 50.
   Inversement, tous les convois de longueur 50 complétés d'un wagon de type B conviennent. On a donc $u_8 = u_6 + u_5 = 4$.

   d) De la même façon, $u_9 = u_7 + u_6 = 5, u_{10} = u_8 + u_7 = 7$.
   On a donc $u_n = u_{n-2} + u_{n-3}$

n	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
u_n	4	5	7	9	12	16	21	28	37	49	65	86	114

3. Donner l'entier n
   a = 1, b = 1, c = 1
   Pour k allant de 5 à n faire
      d reçoit a + b
      a reçoit b, b reçoit c, c reçoit d
      fin faire
   afficher c

Retour au sommaire

PARIS

Premier exercice

Toutes séries

Une calculatrice cassée

Énoncé

On dispose d'une calculatrice cassée. Quand on l'allume, elle affiche 0 et se trouve en mode degré. Les touches numériques ne fonctionnent pas ; les seules touches qui sont en bon état sont les touches

$$\boxed{\tan} \quad \boxed{\tan^{-1}} \quad \boxed{\sin^{-1}} \quad \text{et} \quad \boxed{\cos^{-1}}$$

On admet que, pour tout $x \in [0;1], \cos^{-1}(x) \in [0;90]$ et $\cos(\cos^{-1}(x)) = x$

On admet que, pour tout $x \in [0;+\infty[, \tan^{-1}(x) \in [0;90[$ et $\tan(\tan^{-1}(x)) = x$.

Exemple de séquence de calcul avec cette calculatrice :
Si on allume la calculatrice : elle affiche 0 ;

si on tape alors sur la touche $\boxed{\cos}$ *, elle affiche 1 ;*

et si on tape sur la touche $\boxed{\tan^{-1}}$*, elle affiche 45.*

1. Montrer que, pour tout $z \in]0,1]$, $g(z) = \tan\left(\cos^{-1}(z)\right) = \dfrac{\sqrt{1-z^2}}{z}$.
2. Montrer que, pour tout $x \in [0,+\infty[$, $f(x) = \sin(\tan(x)) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.
3. On utilise l'algorithme suivant :

```
Début
   Choisir : un entier n > 1
   Allumer la calculatrice
   Taper sur la touche [cos] ;
   Pour i allant de 1 à n^2 − 1 faire
      Taper sur la touche [tan^-1] ;
      Taper sur la touche [sin]
   Fin pour
Fin
```

   Quel résultat obtient-on à l'écran de la calculatrice après avoir appliqué cet algorithme pour $n = 1000$?
4. Comment peut-on obtenir le nombre entier 2012 à l'écran ?

Éléments de solution

1. $\tan(y) = \dfrac{\sin(y)}{\cos(y)} = \dfrac{\sqrt{1-\cos^2(y)}}{\cos(y)}$
   En remplaçant y par $\cos^{-1}(z)$, on obtient l'égalité souhaitée.

2. $\sin(y) = \tan(y) \times \cos(y)$ et $1 + \tan^2(y) = \dfrac{1}{\cos^2(y)}$ donc $\sin(y) = \dfrac{\tan(y)}{\sqrt{1 + \tan^2(y)}}$
   En remplaçant$y$ par $\tan^{-1}$, on obtient l'égalité souhaitée.
3. On pose $f(x) = \sin\left(\tan^{-1}(x)\right) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$
   Avant de rentrer dans la boucle, on a la valeur 1.

   A la première étape de la boucle on a la veleur $f(1) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

   A la deuxième étape de la boucle on a la valeur $f\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

   A la troisième étape de la boucle on a la valeur $f\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{4}}$

   A la dernière étape de la boucle on a la valeur $f\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2-1}}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{n^2}}$

   Remarque : $f\left(\dfrac{1}{\sqrt{k}}\right) = \dfrac{\dfrac{1}{\sqrt{k}}}{\sqrt{1+\dfrac{1}{k}}} = \dfrac{1}{\sqrt{k+1}}$

   Après l'application de l'algorithme, la calculatrice affiche la valeur de $\dfrac{1}{n}$

4. $g\left(f(x)\right) = \dfrac{\sqrt{1-(f(x))^2}}{f(x)} = \dfrac{\sqrt{1-\left(\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)^2}}{\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}} = \dfrac{\sqrt{1-\dfrac{x^2}{1+x^2}}}{\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}} = \dfrac{1}{x}.$
   On applique l'algorithme précédent avec $n = 2012$ puis on tape la séquence

   $\boxed{\tan^{-1}}$ puis $\boxed{\sin}$ puis $\boxed{\cos^{-1}}$ puis $\boxed{\tan}$

   et on obtient 2012.

Retour au sommaire

PARIS

Deuxième exercice

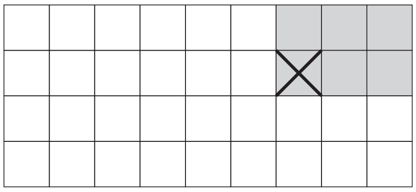
Toutes séries

Jouer sur un damier

Énoncé

Deux joueurs établissent les règles d'un jeu : sur un damier rectangulaire de dimensions quelconques $n \times p$ (n lignes et p colonnes), $n > 1$ et $p > 1$, chaque joueur à tour de rôle coche une case. La case cochée ainsi que toutes celles qui se trouvent au-dessus et à droite, lorsqu'elles existent, sont neutralisées.

Exemple : Dans le cas ci-dessous la croix désigne la case cochée, et le grisé les cases neutralisées



Le perdant est celui qui coche la dernière case. Montrer que celui qui joue le premier a une stratégie gagnante :

- dans le cas $n \times n$ (c'est-à-dire $p = n$) ;
- dans le cas $2 \times p$ (c'est-à-dire $n = 2$) ;
- dans le cas général.

Éléments de solution

On considère que les lignes sont numérotées, de haut en bas, de 1 à n ; que les colonnes sont numérotées, de gauche à droite, de 1 à p.

Premier cas
Dans le cas $n \times n$, le premier joueur ($J1$) doit cocher la case $((n-1); 2)$ de façon à obtenir une configuration ne comportant plus que la première colonne et la dernière ligne. Il reste alors $2n - 1$ cases. Quelle que soit la réponse du second joueur ($J2$), $J1$ doit jouer de manière à préserver la symétrie de la configuration et par là-même un nombre de cases impair. $J2$ ne pourra faire autrement que de cocher la dernière case.

Deuxième cas
Dans le cas $2 \times p$, $J1$ doit cocher la case $(1; p)$ (il reste alors $2p - 1$ cases).Ensuite quelque soit la réponse de $J2$ il doit toujours maintenir cet écart d'une case (il restera toujours un nombre impair de cases).
Par exemple :
Si $J2$ coche la case $(1; r)$ (avec $1 < r < p$), alors $J1$ coche $(2; (r-1)$;
si $J2$ coche la case $(1; 1)$, alors $J1$ coche $(2; 2)$, il ne reste plus alors que la case $(2; 1)$;
si $J2$ coche la case $(2; r)$ (avec $1 < r \leqslant p$), alors $J1$ coche $(1; (r-1))$.

Cas général
Il faut remarquer que ce jeu comporte un nombre fini de coups. Chaque damier permet donc de mettre en œuvre une stratégie gagnante. Il existe un premier coup pour $J1$, cocher la case $(1; n)$, tel que quelque soit la réponse de $J2$, la configuration obtenue à l'issue de ces deux coups aurait pu être obtenue par $J1$ dès le premier coup. Cela permet de conclure que le premier joueur a toujours une stratégie gagnante.

Retour au sommaire

POITIERS

Premier exercice

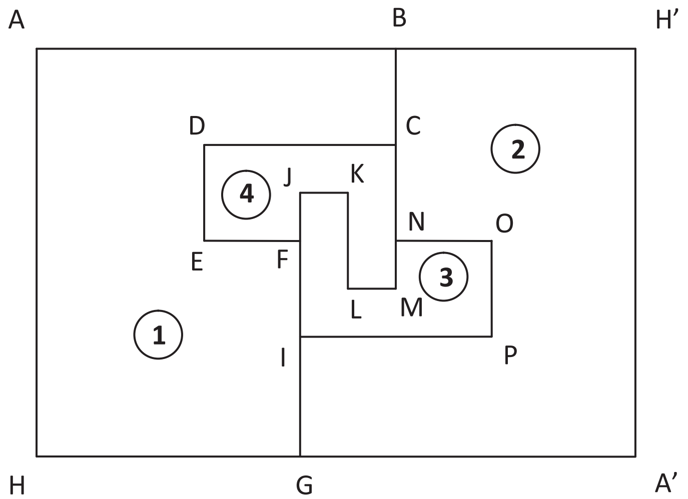
Toutes séries

Pavages

Énoncé

Le rectangle AH'A'H ci-dessous est pavé par quatre pièces numérotées 1, 2, 3 et 4, **toutes de même forme** et il y a seulement deux tailles de pièce. Les grandes pièces 1 et 2 sont identiques de même que les pièces 3 et 4. Il y a donc proportionnalité entre les côtés correspondants des grandes pièces et des petites pièces.

Pour des raisons esthétiques on impose $FG = \dfrac{AH}{2}$.



1. Pourquoi a-t-on obligatoirement $BC = DE$?
2. Si $AH = 8$ et $HG = 4$, que valent les autres côtés de la pièce 1 ? Donner aussi les longueurs des côtés de la pièce 4.
3. Même question que la précédente avec $AH = 8$ et $AB = 9$.
4. Si les dimensions du rectangle AH'A'H sont $AH' = 13$ et $AH = 12$, que valent les côtés des pièces 1 et 4 ?
5. Peut-on paver un carré de la sorte ? Justifier la réponse.

(*Idée tirée de l'article de Michael Reid « Tiling similar with polyominoes ». Source Internet.*)

Éléments de solution

1. Les pièces 3 et 4 sont identiques donc $JK = LM$. Sur la pièce 1, qui est un agrandissement de ces pièces on retrouve donc l'égalité $BC = DE$.
2. D'après la question précédente on a $BC = DE = \dfrac{FG}{2} = \dfrac{AH}{4} = 2$. Les cotés [HG] de longueur 4 et [DE] de longueur 2 sont des côtés correspondants pour les pièces 1 et 4. Les longueurs des petites pièces sont donc la moitié de celles des grandes pièces.

On a alors $EF = \frac{FG}{2} = 2, JF = \frac{EF}{2} = 1, DC = \frac{AH}{2} = 4, JK = LM = \frac{FE}{2} = 1, LK = \frac{DC}{2} = 2,$ et comme $AB = HG - EF + DC = 4 - 2 + 4 = 6, CM = \frac{AB}{2} = 3.$

3. D'après la question 1) on a $BC = DE = \frac{FG}{2} = \frac{AH}{4} = 2$. Notons k le coefficient de proportionnalité qui permet de passer des longueurs des grandes pièces à celles des petites pièces.
   On sait que $FG = \frac{AH}{2}$ donc $EF = \frac{DC}{2}$.
   On a donc $AB = 9 = HG - EF + DC = HG + EF = \frac{DE}{k} + kFG = \frac{2}{k} + 4k$. Soit maintenant à résoudre $4k^2 - 9k + 2 = 0$ dont les deux solutions sont $\frac{1}{4}$et 2.
   On cherche $k < 1$, on retient donc $k = \frac{1}{4}$. On trouve alors $HG = 4DE = 8, EF = \frac{FG}{4} = 1,$ $DC = \frac{AH}{4} = 2, JK = LM = \frac{BC}{4} = 0,5, LK = \frac{DC}{4} = 0,5, JF = \frac{EF}{4} = 0,25,$ $CM = \frac{AB}{4} = 2,25.$
4. On a $FG = \frac{AH}{2} = 6, DE = BC = \frac{AH}{4} = 3.$
   Si on note k le coefficient de proportionnalité qui permet de passer des longueurs des grandes pièces à celles des petites pièces on a $HG = \frac{DE}{k} = \frac{3}{k}, DC = kAH = 12k, EF = \frac{DC}{2} = 6k$. Comme $AB = HG-EF+DC = \frac{3}{k}-6k+12k = \frac{3}{k}+6k$ alors $AH' = AB+BH' = \frac{3}{k}+6k+\frac{3}{k} = 6(k+\frac{1}{k}) = 13.$ Soit donc à résoudre l'équation $k^2 - \frac{13k}{6} + 1 = 0$. On trouve deux solutions $\frac{2}{3}$ et $\frac{3}{2}$. Comme $k < 1$, on retient $k = \frac{2}{3}$. On trouve maintenant $HG = 4,5, DC = 8, EF = 4$, $JK = LM = \frac{EF}{2} = 2,$ $AB = AH' - HG = 8,5$, $JF = kEF = \frac{8}{3}$, $KL = kDC = \frac{16}{3}$, $CM = kAB = \frac{17}{3}$.
5. Supposons que $AH' = AH = c$. Notons $HG = a, AB = b, DC = d$ et k le coefficient de proportionnalité qui permet de passer des longueurs des grandes pièces à celles des petites pièces.
   On a donc $0 < k < 1$. On a par hypothèse $a + b = c$, on a déjà vu que $a + \frac{d}{2} = b, d = kc$ et $\frac{c}{4} = ka$.
   Des deux premières équations on tire $c - a = a + \frac{d}{2}$ et en utilisant ensuite les deux dernières équations $2a = \frac{2c}{4k} = c - \frac{d}{2} = c - \frac{kc}{2}$. D'où $\frac{c}{2k} = c(1 - \frac{k}{2})$. Puisque c n'est pas nul on doit avoir $\frac{1}{2k} = \left(1 - \frac{k}{2}\right)$ et après manipulations élémentaires $k^2 - 2k + 1 = 0$ dont on sait que l'unique solution est 1. Comme k doit être inférieur à 1, il n'est pas possible de paver de la sorte un carré.

Retour au sommaire

POITIERS

Deuxième exercice

Série S

Une fonction sur les entiers

Énoncé

Soit N_{1000} l'ensemble des nombres entiers compris entre 1 et 999.
On définit sur N_{1000} la fonction F de la manière suivante : si n appartient à N_{1000}, on remplace chaque chiffre a de l'écriture décimale de n par $2a+2$, qui est un nombre à un ou deux chiffres. Le nombre $F(n)$ est alors obtenu en écrivant à la suite ces nombres.

Par exemple, si $n = 3$, il y a un seul chiffre $a = 3$ qui est remplacé par $2 \times 3 + 2 = 8$. Donc $F(3) = 8$.

Si $n = 47$, on remplace le chiffre 7 par $2 \times 7 + 2 = 16$, le chiffre 4 par $2 \times 4 + 2 = 10$, donc $F(47) = 1016$ (10 suivi de 16).

De même, $F(526) = 12614$ (12 suivi de 6 suivi de 14).

1. Calculer $F(857)$.
2. On suppose, dans cette question seulement, que n est un nombre à deux ou trois chiffres : $n = cdu$ (u est le chiffre des unités, d est celui des dizaines et c celui des centaines). On note n' le nombre à un ou deux chiffres cd obtenu en retirant de l'écriture de n le chiffre des unités.

   Par exemple, si $n = 47, n' = 4$; si $n = 247, n' = 24$.

   Montrer que $F(n) = 10F(n') + F(u)$ ou $F(n) = 100F(n') + F(u)$. Préciser, en fonction de la valeur de u, quelle égalité on doit utiliser.
3. Montrer que l'équation $F(n) = 3n$ a trois solutions.
   Indication : Commencer par déterminer le chiffre u des unités de n, puis chercher n'...
4. L'équation $F(n) = 5n$ a-t-elle des solutions ?
5. Résoudre l'équation $F(n) = 23n$.

Éléments de solution

1. $F(857) = 181216$.
2. Supposons que c est non nul (le raisonnement est analogue et plus vite écrit si $c = 0$). Notons $U = 2u+2$, $D = 2d+2$ et $C = 2c+2$. Les nombres C, D et U ont un ou deux chiffres et le nombre $F(n)$ s'écrit CDU qui peut avoir entre trois et six chiffres.
   Supposons par exemple que C et D ont respectivement pour écriture décimale c_1c_2 et d_1d_2. Si U a un seul chiffre u_1, l'écriture décimale de $F(n)$ est $c_1c_2d_1d_2u_1$. Ce nombre vaut $10 \times c_1c_2d_1d_2 + u_1$. Vu la définition de F, $c_1c_2d_1d_2$ est l'écriture décimale de $F(n')$ et u_1 celle de $F(u)$. On a donc $F(n) = 10F(n') + F(u)$.
   Si U a deux chiffres u_1u_2, le nombre $F(n)$ s'écrit

   $$F(n) = c_1c_2d_1d_2u_1u_2 = 100 \times c_1c_2d_1d_2 + u_1u_2 = 100 \times F(n') + F(u).$$

   Ceci prouve le résultat demandé. La première formule s'applique quand $2u+2$ n'a qu'un chiffre ; c'est-à-dire quand $0 \leqslant u \leqslant 3$, la deuxième quand il a deux chiffres, pour $4 \leqslant u \leqslant 9$.
3. *Premier cas* : si n n'a qu'un chiffre, $F(n) = 2n+2$ et vaut $3n$ si et seulement si $n = 2$.

   Deuxième cas : si n a deux chiffres : $n = du$, le chiffre des unités de $F(n)$ est le chiffre des unités de $2u+2$. Le chiffre des unités de $3n$ est le chiffre des unités de $3u$. En écrivant côte-à-côte ces deux

chiffres des unités pour $u = 0, 1, \ldots, 9$, on constate qu'ils ne prennent la même valeur que pour $u = 2$.
D'après la question précédente, on a donc

$$F(n) = 10F(n') + F(2) = 10F(n') + 6 = 3n = 30n' + 6.$$

(car le nombre qui s'écrit $n'2$ vaut $10n' + 2$).
On en conclut que $F(n') = 3n'$ et donc $n' = 2$ d'après le premier cas. On a donc, dans ce cas, $n = 22$.

Troisième cas : si $n = cdu$ a trois chiffres, comme ci-dessus, $u = 2$ et $F(n) = 10F(n') + F(2)$ et le même calcul montre que $F(n') = 3n'$. Le nombre n' est donc un nombre à deux chiffres tel que $F(n') = 3n'$. Donc $n' = 22$ d'après le deuxième cas et $n = 222$.

4. Comme au-dessus, le chiffre des unités de $F(n)$ est le chiffre des unités de $2u + 2$, celui de $5n$ est le chiffre des unités de $5u$. La seule possibilité est $u = 4$ (liste comparative…). Comme $F(4) = 10 \neq 5 \times 4$, le nombre n ne peut valoir 4 et on peut écrire

$$F(n) = 100F(n') + F(4)$$

(notation et résultat de la question 2). On a donc $n = 10n' + 4$ et $F(n) = 100n' + 10$ donc

$$100F(n') + 10 = 5 \times (10n' + 4) = 50n' + 20$$

soit

$$10F(n') + 1 = 5n' + 2.$$

Le chiffre des unités du membre de gauche vaut 1. Celui de $5n'$ vaut 0 ou 5, donc celui du membre de droite vaut 2 ou 7. Ils ne peuvent être égaux et l'égalité est donc impossible.

L'équation $F(n) = 5n$ n'a donc pas de solution.

5. On observe d'abord que n a forcément au moins deux chiffres (sinon $F(n) = 2n + 2$ qui ne peut valoir $23n$). On écrit donc $n = 10n' + u$. Le chiffre des unités de $F(n)$ est comme ci-dessus celui de $2u + 2$, et celui de $23n$ est celui de $3u$. On a vu à la question 3 que la seule possibilité est $u = 2$. On a donc

$$F(n) = 10F(n') + F(2) = 10F(n') + 6 = 23(10n' + 2) = 230n' + 46$$

soit $F(n') = 23n' + 4$. Là encore il n'y a pas de solution avec un nombre n' à un chiffre. Donc $n' = 10c + d$ et le chiffre des unités de $F(n')$ est celui de $2d + 2$, alors que le chiffre des unités de $23n' + 4$ est le chiffre des unités de $3d + 4$. Ceci implique que $d = 8$ (toujours avec une liste comparative). On a donc $n' = 10c + 8$ et on conclut grâce à la question 2 que

$$F(n') = 100F(c) + F(8) = 100F(c) + 18.$$

On a aussi $F(n') = 23(10c + 8) + 4 = 230c + 188$. Finalement $100F(c) + 18 = 230c + 188$, soit $10F(c) = 23c + 17$. Comme c est un nombre à un chiffre, $F(c) = 2c + 2$ et l'égalité devient $20c + 20 = 23c + 17$, soit $c = 1$.

L'unique solution de l'équation $F(n) = 23n$ est donc $n = 182$.

Retour au sommaire

POITIERS

Troisième exercice

Séries autres que S

Robinson

Énoncé

Robinson, oublié sur son île, occupe son lundi après-midi d'été en traçant des nombres (des entiers naturels) sur le sable. Il écrit le nombre qu'il a choisi, puis, en dessous il écrit le nombre suivant qui doit décrire la composition en chiffres du nombre qu'il vient d'écrire en comptant le nombre d'apparitions des différents chiffres de 9 à 0 (dans cet ordre).
Par exemple, si le nombre choisi par Robinson est 2040, ce nombre est composé d'un 4, un 2, deux 0 (on énumère les chiffres de 2040 dans l'ordre décroissant), ce qui signifie que Robinson va tracer en dessous le nombre un-4-un-2-deux-0, c'est-à-dire : 141220.
Vous pouvez vérifier que le troisième nombre sera 14222110.

1. Quel sera le quatrième nombre tracé par Robinson ?
2. Robinson continue à rainurer le sable puis constate qu'après quelques étapes supplémentaires, il écrit toujours le même nombre. Lequel ?
3. Le mardi, la nuit ayant porté conseil et la marée ayant effacé la plage, Robinson choisit un nouveau nombre de telle sorte que le nombre suivant soit égal au premier. Il vérifie avec satisfaction que ce nombre est même le plus petit possible à posséder cette propriété. Quel est ce nombre ?
4. Le mercredi, Robinson trace une colonne de quatre nombres, mais une vague recouvre les trois premiers. Le quatrième est son année de naissance : 1632. Quel était le premier ? Comme il y a de nombreuses solutions, donnez simplement la plus petite et la plus grande d'entre elles et déterminez le nombre de solutions.
5. Le jeudi, Robinson trace un premier nombre (notons-le a), puis le nombre suivant (notons-le b, qui est différent de a), mais quand il écrit le troisième, il constate avec émerveillement qu'il est identique au nombre a. Combien vaut a ?
   Cette question a plusieurs solutions, mais serez-vous capable de trouver la plus petite valeur possible du nombre a ?

Le vendredi, Robinson trouve une trace de pas dans le sable ...

Éléments de solution

1. Le quatrième nombre tracé est 14323110.
2. On retrouve toujours le même nombre : 1433223110.
3. Mardi : le nombre tel que le second soit égal au premier est 22.
4. Mercredi : la plus petite valeurs : 22222266
   la plus grande valeurs : 66666622
   Il y a 56 solutions
5. Jeudi : La plus petite valeur de a : 152413423110.

Le vendredi, Robinson trouve une trace de pas dans le sable ...

Retour au sommaire

POLYNÉSIE

Premier exercice

Toutes séries

Une équation fonctionnelle

Énoncé

On suppose qu'il existe une fonction f définie sur l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$ vérifiant la propriété :
(E) : pour tous x et y de $\mathbb{N}$, $f(x+y) = f(x)f(y) - xy$.
Le but de cet exercice est de déterminer toutes les fonctions f vérifiant la propriété (E).

Préliminaire

Démontrer que $f(0) = 1$. On pourra admettre les résultats dans les parties suivantes.

A. Étude d'un premier exemple : on suppose ici que $f(1) = 3$.

1. Calculer $f(2)$ puis $f(3)$.
2. Montrer par deux calculs distincts que $f(4) = 60$ et que $f(4) = 63$. Conclure.

B. Étude d'un second exemple : on suppose ici que $f(1) = 0$.

1. Calculer $f(2), f(3)$ et $f(4)$.
2. Conjecturer l'expression de $f(n)$ en fonction de n.
3. Démontrer cette conjecture.
4. Prouver que pour la fonction trouvée aux 2. et 3., la propriété (E) est bien vérifiée.

C. Cas général

Première partie : on note $f(1) = a$.

1. Exprimer $f(2)$ et $f(3)$ en fonction de a.
2. Exprimer $f(4)$ en fonction de a de deux manières différentes.
3. En déduire que $a = 0$ ou $a = 2$.

Seconde partie : on étudie le second cas, on suppose ici que $f(1) = 2$.
Exprimer $f(n)$ en fonction de n. (A justifier).

Éléments de solution

Préliminaire

Pour tout x réel, $f(x+0) = f(x).f(0) - x.0$ et donc pour tout x réel, $f(x)[f(0)] = 0$.
Pour tout x réel, $f(x) = 0$ ou $f(0) = 1$.
Montrons qu'on ne peut avoir $f(x) = 0$, pour tout x réel.
Supposons que $f(x) = 0, f(1+1) = f(1).f(1) - 1 \times 1$ donnerait $0 = -1$, ce qui est impossible. Donc la fonction n'est pas nulle et on a donc $f(0) = 1$.

A.

1. On suppose que $f(1) = 3$.
   $f(2) = f(1+1) = f(1) \times f(1) - 1 \times 1 = 3 \times 3 - 1 \times 1 = 8$.
   $f(3) = f(2+1) = f(2) \times f(1) - 2 \times 1 = 8 \times 3 - 2 \times 1 = 22$.
2. $f(4) = f(3+1) = f(3) \times f(1) - 3 \times 1 = 22 \times 3 - 3 \times 1 = 63$.
   $f(4) = f(2+2) = f(2) \times f(2) - 2 \times 2 = 8 \times 8 - 2 \times 2 = 60$.
   Il y a donc contradiction, d'où f n'existe pas si $f(1) = 3$.

B.

1. $f(2) = f(1+1) = f(1) \times f(1) - 1 \times 1 = a^2 - 1 = 0^2 - 1 = -1$.
   $f(3) = f(2+1) = f(2) \times f(1) - 2 \times 1 = 0 - 2 = -2$
   $f(4) = f(3+1) = f(3) \times f(1) - 3 \to 1 = 0 - 3 = -3$.
2. Il semblerait que $f(n) = -n + 1$.
3. Pour $n \geqslant 1, f(n) = f[(n-1)+1] = f(n-1) \times f(1) - (n-1) \to 1 = -n + 1$
   Pour $n = 0$, la formule est encore vraie, d'où, pour tout n de $\mathbb{N}$, $f(n) = -n + 1$.
4. $f(x+y) = -(x+y) + 1 = -x - y + 1$
   $f(x) \times f(y) - x \times y = (-x+1)(-y+1) - xy = -x - y + 1$. La propriété est donc vérifiée.

C.

Première partie

1. $f(2) = f(1+1) = f(1) \times f(1) - 1 \times 1 = a^2 - 1$.
   $f(3) = f(2+1) = f(2) \times f(1) - 2 \to 1 = a(a^2 - 1) - 2 = a^2 - a - 2$.
2. $f(4) = f(2+2) = f(2) \times f(2) - 2 \to 2 = (a^2 - 1)^2 - 4 = a^4 - 2a^2 - 3$.
   $f(4) = f(1+3) = f(1) \times f(3) - 1 \to 3 = a(a^2 - a - 2) - 3 = a^4 - a^2 - 2a - 3$
3. On a donc $a^4 - 2a^2 - 3 = a^4 - a^2 - 2a - 3$, ce qui donne $-a^2 + 2a = 0$ d'où $a = 0$ ou $a = 2$.

Seconde partie

$f(2) = f(1+1) = f(1) \times f(1) - 1 \times 1 = a^2 - 1 = 2^2 - 1 = 3$.
$f(3) = f(2+1) = f(2) \times f(1) - 2 \times 1 = 3 \times 2 - 2 = 4$.
$f(4) = f(3+1) = f(3) \times f(1) - 3 \times 1 = 4 \times 2 - 3 = 5$.
Il semblerait que $f(n) = n + 1$.

On va exprimer, en fonction de n, $f(n+2)$ de deux manières différentes.
$f(n+2) = f(n) \times f(2) = f(n) \times f(2) - n \times 2 = 3f(n) - n$.

$f(n+1) = f(n) \times f(1) - n \times 1 = 2f(n) - n$.
$f(n+2) = f[(n+1)+1] = f(n+1) \times f(1) - (n+1) \times 1 = 2f(n+1) - n - 1 = 2[2f(n) - n] - n - 1 = 4f(n) - 3n - 1$.

On a donc $4f(n) - 3n - 1 = 3f(n) - 2n$, ce qui donne $f(n) = n + 1$.
$f(x+y) = (x+y) + 1 = x + y + 1$.
$f(x) \times f(y) - xy = (x+1)(y+1) - xy = x + y + 1$. La propriété est donc vérifiée.

Retour au sommaire

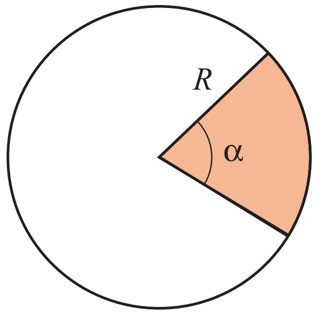
POLYNÉSIE

Deuxième exercice

Toutes séries

A la recherche de l'aire perdue

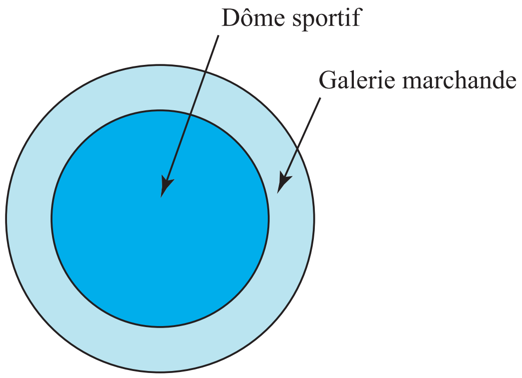
Énoncé



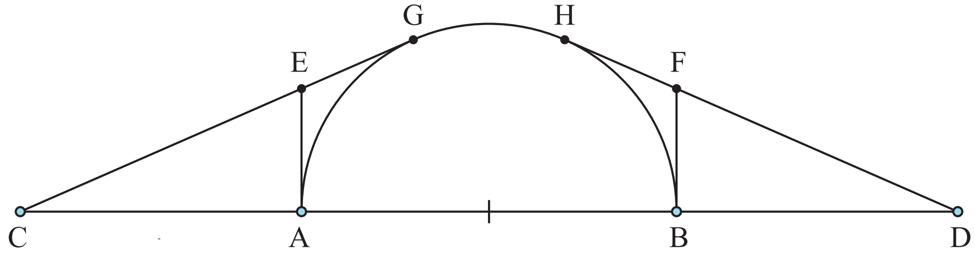
Note : les dimensions des figures sont fantaisistes, seules les formes sont à prendre en compte.

Rappel : Dans la figure ci-contre, si le rayon du disque est R, et si l'angle du secteur angulaire grisé mesure α (en degrés), alors l'aire de la portion de disque grisée vaut $\dfrac{\pi \alpha R^2}{360}$.

Un bâtiment est à l'étude pour servir de centre sportif pour les olympiades de mathématiques.
Il se compose d'un dôme (demi-sphère) de 100 m de haut entouré d'une galerie marchande circulaire. La vue de dessus donne ceci :



Vu en coupe dans un plan vertical passant par le centre du dôme, le bâtiment se présente ainsi, la galerie étant recouverte d'un toit dont la coupe est une portion de droite tangente au demi-cercle représentant en coupe la demi-sphère :

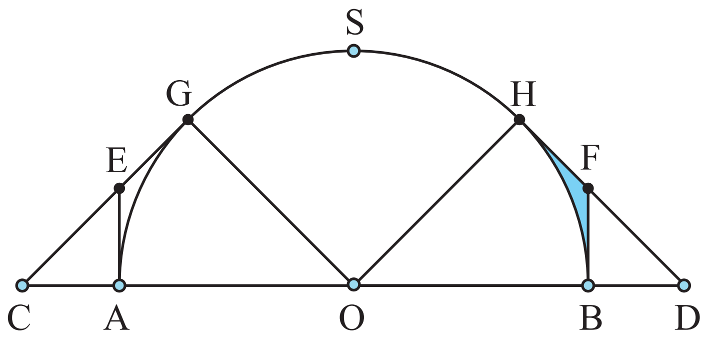


On veut obtenir la valeur exacte de l'aire perdue BHF (qui n'est pas un triangle) située entre le dôme (demi-disque AGHB) et la galerie marchande (triangle BDF) dans différents cas de figure. Le nombre π et les racines carrées apparaissent dans les résultats attendus.

1. Donner la valeur la plus petite possible qui soit supérieure dans tous les cas à l'aire perdue, même si on agrandit la galerie marchande autant qu'on veut en éloignant le point D. Un schéma pourra illustrer le résultat.

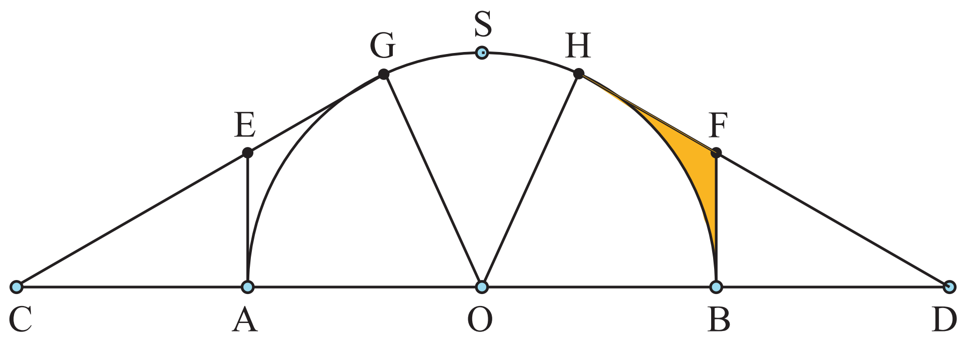
2. Justifier que le triangle BFH est isocèle. On pourra admettre ce résultat pour la suite.
3. Dans cette question uniquement on souhaite que le point H où le toit de la galerie rejoint le dôme soit équidistant du sommet S du dôme et du pied B du dôme.

Cas $SH = HB$



   a) Calculer HF.
   b) Déterminer l'aire perdue.
4. Dans cette question uniquement, on souhaite que la largeur BD de la galerie soit égale à la hauteur du dôme.

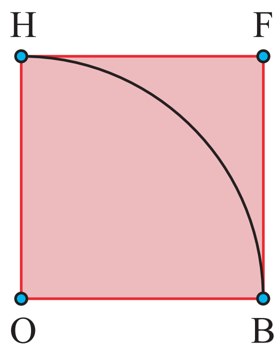
Cas $SO = BD$



5. Comparer, en justifiant, l'aire perdue et l'aire du triangle BDF.

Éléments de solution

1. Si D s'éloigne, la figure se rapproche de la figure suivante qui n'est jamais atteinte car D reste à distance finie : OBFH forme un carré contenant un quart de disque.



   L'aire vaut alors $100^2 - \dfrac{\pi 100^2}{4} = \left(1 - \dfrac{\pi}{4}\right) 100^2$.
2. B et H sont sur le même cercle de centre O donc $OH = OB$. (HF) et (FB) sont tangentes à ce cercle donc (FH) et (HO) sont perpendiculaires de même que (FB) et (BO). OHF et OBF sont donc deux triangles rectangles ayant même hypoténuse OF et $OH = OB$, donc le théorème de Pythagore permet de conclure que $FH = FB$ donc BFH est isocèle en F.

3. Cas $SH = HB$

   a) Calculer HF.
   Si $SH = HB$, $\widehat{HCB} = 45^o$. Or, on a vu plus haut que $\widehat{CHD} = 90^o$ donc $\widehat{FDB} = 45^o$ et CHD est isocèle rectangle en H.
   Or, on a vu plus haut que $\widehat{FBD} = 90^o$ donc BFD est isocèle rectangle en B.
   Donc $FD = FB\sqrt{2}$ et $100 = CH = HD = HF + FD = FB + FB\sqrt{2} = FB\left(1+\sqrt{2}\right)$.
   Donc $FB = \dfrac{100}{1+\sqrt{2}}$

   b) Déterminer l'aire perdue.
   C'est l'aire de OBFH (elle même égale au double de celle de OBF) dont on retire l'aire du huitième de disque :

$$2 \times \frac{100 \times \dfrac{100}{1+\sqrt{2}}}{2} - \pi \times \frac{100^2}{8} = \left(\frac{1}{1+\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8}\right) 100^2 = \left(\sqrt{2} - 1 - \frac{\pi}{8}\right) 100^2.$$

4. Cas $SO = BD$

   a) Calculer HF.
   $SO = OB = OH = BD = 100$

   $\sin(\widehat{ODH}) = \dfrac{OH}{OD} = \dfrac{100}{200} = \dfrac{1}{2}$ donc $\sin(\widehat{FDB}) = \dfrac{1}{2} = \dfrac{FB}{FD}$ donc $FD = 2FB$ et $\widehat{FDB} = 30^o$.

   En utilisant le triangle rectangle FBD dont le côté BD vaut 100, on en déduit que $FB = \dfrac{100}{\sqrt{3}}$
   puis en utilisant le triangle isocèle BFH que $FH = \dfrac{100}{\sqrt{3}}$.

   b) Déterminer l'aire perdue.
   $OB = BD$ donc (FB) est médiatrice de [OD] et $\widehat{FOB} = \widehat{FDB} = 30^o$.
   C'est l'aire de OBFH (elle-même égale au double de celle de OBF) dont on retire l'aire de $\dfrac{60}{360} = \dfrac{1}{6}$ de disque :

$$2 \times \frac{100 \times \dfrac{100}{\sqrt{3}}}{2} - \pi\frac{100^2}{6} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{\pi}{6}\right) 100^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\pi}{6}\right) 100^2.$$

5. Comparer, en justifiant, l'aire perdue et l'aire du triangle BDF.
   L'aire perdue est majorée par l'aire du triangle BHF.
   Si on note α la mesure de l'angle $\widehat{BDF}$, on a :

$$\text{Aire(BHF)} = \frac{BF \times (HF\cos\alpha)}{2} \text{ et Aire(BDF)} = \frac{BF \times (FD\cos\alpha)}{2}$$

   donc les deux aires sont rangées dans le même ordre que HF et FD.
   On a vu que $HF = FB$ à la question 2. et $FB = FD\sin\alpha$, or $\sin\alpha \leqslant 1$ donc $HF \leqslant FD$.
   On en déduit que l'aire perdue est inférieure à l'aire du triangle BDF.

Retour au sommaire

REIMS

Premier exercice

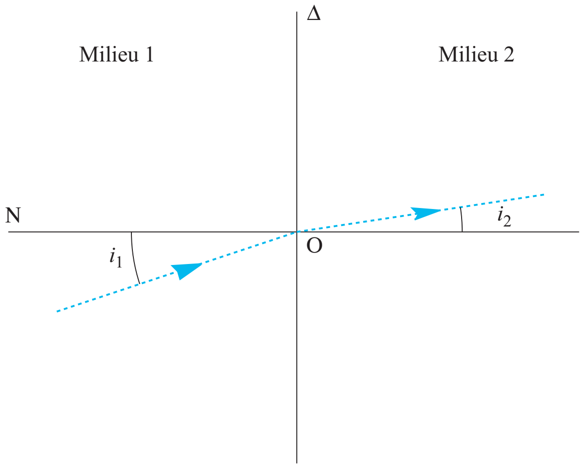
Toutes séries

Réflexions, réfraction et lois de Descartes

Énoncé

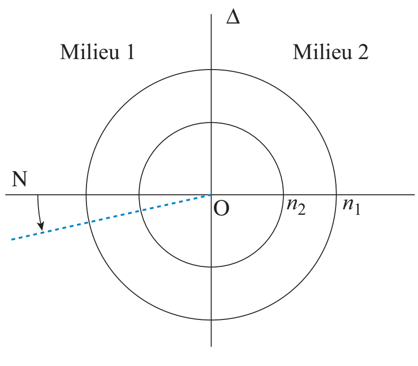
Un plan P est séparé par une droite Δ en deux demi-plans correspondant à des milieux différents, d'indices de réfraction n_1 et n_2, par exemple l'eau et l'air, l'air et le verre...
Des rayons lumineux se propagent dans le plan. Si un rayon lumineux atteint la droite Δ au point O, il est dévié selon la loi de réfraction de Descartes : si l'on note N la droite perpendiculaire à Δ au point O, si l'on note i_1 et i_2 les angles que font les rayons avec cette droite N, alors

$$n_1 \sin(i_1) = n_2 \sin(i_2).$$



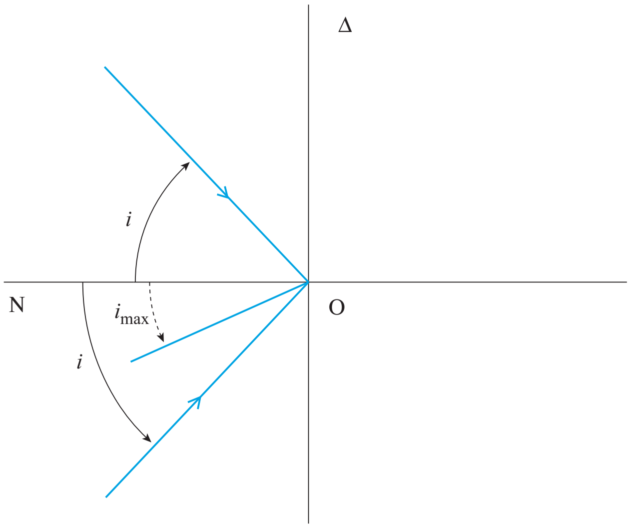
Les indices n_1 et n_2 sont des réels supérieurs ou égaux à 1 (1 pour le vide, 1,00027 pour l'air).

1. Si le rayon arrive perpendiculairement à Δ, est-il dévié ?
2. On trace deux cercles centrés sur O et de rayons respectifs n_1 et n_2.
   Proposer une construction géométrique pour tracer le rayon réfracté.

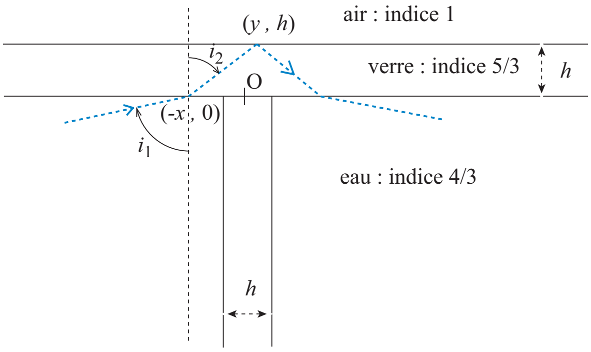


3. A quelle condition sur n_1 et n_2 le rayon réfracté se rapproche-t-il de la droite N ?
4. On suppose dans cette question que le milieu 2 est moins réfringent que le milieu 1, c'est-à-dire que $n_1 > n_2$.
   Montrer qu'il existe un angle maximal d'incidence, i_{max} appartenant à l'intervalle $[0,\pi/2]$ pour

lequel le rayon réfracté suit ?, préciser le sinus de cet angle.
On admet que, si le rayon incident fait un angle $i > i_{max}$ avec la droite N, il est réfléchi, le rayon réfléchi faisant un angle i avec la droite N :



5. Une personne possède un aquarium, séparé en deux compartiments A et B par une paroi opaque. Cet aquarium est recouvert par un couvercle de verre. La personne souhaite utiliser la propriété de réfraction limite vue dans la question précédente pour éclairer une partie de B par une lampe située dans A. Le rayon, réfracté au passage de l'eau au verre, est réfléchi au passage entre le verre et l'air, selon la figure ci-dessous.

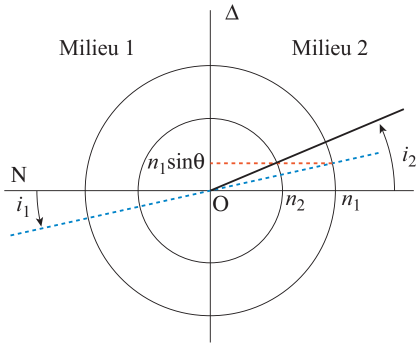


On suppose que l'angle incident i_1 est connu par son sinus : $\sin(i_1) = \dfrac{5\sqrt{2}}{8}$.
Le point O est situé à la moitié de la paroi opaque. On suppose que l'épaisseur du verre et de la paroi sont les mêmes : $h = 2$ centimètres. Le réel x représente la distance à laquelle le rayon incident rencontre le verre dans le compartiment de gauche.
Dans ces conditions, démontrer qu'il existe des x tels que le rayon parvienne dans le compartiment de droite au terme de ses réfractions et réflexion.

Éléments de solution

1. Le rayon qui arrive perpendiculairement à Δ n'est pas dévié car $i_1 = 0$ donc $n_1 \sin(i_1) = 0 = n_2 \sin(i_2)$ et $i_2 = 0$.

2. Construction géométrique pour tracer le rayon réfracté



3. A quelle condition sur n_1 et n_2 le rayon réfracté se rapproche-t-il de la droite N ?
   Il se rapproche de N si $i_1 > i_2$. Or sinus croît sur $[0,\pi/2]$ donc $i_1 > i_2$.si et seulement si $\sin i_1 > \sin i_2$. Comme $n_1 \sin(i_1) = n_2 \sin(i_2)$, cela équivaut à $n_1 < n_2$.
4. On suppose dans cette question que le milieu 2 est moins réfringent que le milieu 1, c'est-à-dire que $n_1 > n_2$.
   Montrer qu'il existe un angle maximal d'incidence, i_{max} appartenant à l'intervalle $[0,\pi/2]$ pour lequel le rayon réfracté suit Δ, préciser le sinus de cet angle.

   Le rayon réfracté suit Δ si $i_2 = \dfrac{\pi}{2}$.
   Cela donne $n_1 \sin(i_1) = n_2 \sin(i_2) = n_2$, donc $\sin(i_1) = \dfrac{n_2}{n_1}$: $\sin(i_{max}) = \dfrac{n_2}{n_1}$.
5. Dans ces conditions, démontrer qu'il existe des x tels que le rayon parvienne dans le compartiment de droite au terme de ses réfractions et réflexion.

   $\sin(i_2) = \dfrac{n_1}{n_2}\sin(i_1) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ donc $i_2 = \dfrac{\pi}{4}$. L'angle d'incidence maximal (au-delà duquel il n'y a plus réfraction) est $\dfrac{3}{5}$ (quotient des indices). Or $i_2 > \dfrac{3}{5}$ et le rayon est réfléchi. Le point (y, h) de rencontre avec le bord supérieur de la vitre est en $y = -x + h$. Après réflexion, le rayon atteint le bord inférieur du verre en $-x + 2h$. Il faut donc que $-x < -\dfrac{x}{2}$ pour que le rayon parte de A et $-x + 2h > \dfrac{h}{2}$ pour qu'il ressorte en B. Donc pour x tel que h/2 <x< 3h/2, le rayon part de A et arrive dans B.

Retour au sommaire

REIMS

Deuxième exercice

Série S

Construction par origami d'une racine cubique

Énoncé

L'origami est l'art japonais du pliage du papier.

On admet que le pliage suivant est réalisable : étant données deux droites perpendiculaires, et deux points non situés sur ces droites, il existe un pliage envoyant un des points sur une des droites, et l'autre point sur l'autre droite.
L'exercice donne une application de ce pliage à la construction d'une racine cubique.
Soit m un réel non nul.
Dans un repère orthonormé, on considère le point A de coordonnées $(1/2, m)$ et le point B de coordonnées $(1, m/2)$. Soit un pliage envoyant A sur un point A' de l'axe des abscisses de coordonnées $(a, 0)$, et B sur un point B' de l'axe des ordonnées de coordonnées (0, b).
Les droites (AA') et (BB') sont donc parallèles et soit p leur coefficient directeur.

1. Calculer a et b en fonction de m et p.
2. Soit A" le milieu de [AA'], et B" le milieu de [BB']. Calculer le coefficient directeur de la droite (A"B").
3. En déduire que que $p^3 = m$. On utilisera, sans le démontrer, le fait que deux droites non parallèles aux axes de coordonnées sont perpendiculaires si et seulement si le produit de leurs coefficients directeurs est égal à 1.
4. Soit H la projection orthogonale de B sur l'axe des ordonnées. Prouver que $(B'H)^3 = m$

(utiliser le résultat de la question précédente). Faire une figure.

Éléments de solution

1. On trouve $b = m/2 - p$ et $a = 1/2 - m/p$. On remarque que $p \neq 0$ et $p \neq \infty$ car (AA') n'est pas parallèle à un des axes, puisque $m \neq 0$.
2. On calcule les coordonnées de A"$((1/2)(1 - m/p), m/2)$ et B"$(1/2, (1/2(m - p))$, et le coefficient directeur de (A"B") est $-p^2/m$.
3. Le pli (A"B") est la médiatrice de AA', donc $p(-p^2/m) = -1$, et $p^3 = m$.
4. La pente de (BB') est $B'H/BH = B'H$. D'où le résultat.

Retour au sommaire

REIMS

Troisième exercice

Séries autres que S

Paul attend Virginie qui ne vient pas

Énoncé

Paul attend Virginie qui n'arrive pas.
La première fois, il décide de l'attendre encore une demi-heure mais elle n'arrive pas.

Il décide de l'attendre encore un peu, durant moitié moins de temps (soit $1/4$ d'heure) mais elle n'arrive pas.
Il décide de l'attendre encore un peu, durant moitié moins de temps (soit $1/8$ d'heure) mais elle n'arrive pas.
Il décide de l'attendre encore un peu, durant moitié moins de temps (soit $1/16$ d'heure) mais elle n'arrive pas.
Il décide de l'attendre encore un peu, durant moitié moins de temps (soit $1/32$ d'heure) mais elle n'arrive pas.
Et ainsi de suite...

Paul va-t-il attendre indéfiniment Virginie ? Sinon, combien de temps au total va-t-il attendre ?

La seconde fois Paul attend Virginie une demi-heure, mais elle n'arrive pas !
Paul l'attend encore une demi-heure mais elle n'arrive pas.
Paul l'attend encore $1/3$ d'heure mais elle n'arrive pas.
Paul l'attend encore $1/4$ d'heure mais elle n'arrive pas.
Paul l'attend encore $1/5$ d'heure mais elle n'arrive pas.
Paul l'attend encore $1/6$ d'heure mais elle n'arrive pas.
Paul l'attend encore $1/7$ d'heure mais elle n'arrive pas.
Paul l'attend encore $1/8$ d'heure mais elle n'arrive pas.
Paul l'attend encore $1/9$ d'heure mais elle n'arrive pas.
Paul l'attend encore $1/10$ d'heure mais elle n'arrive pas.
Et ainsi de suite...

Montrer, sans faire le calcul, que :

$$\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\frac{1}{14}+\frac{1}{15}>\frac{1}{2}$$

Paul va-t-il attendre indéfiniment Virginie ?

Éléments de solution

Paul semble parti pour attendre une heure au total.
Et on peut le prouver ainsi, en partant de l'idée qu'il a une heure à passer à attendre Virginie :

$1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ donc il lui reste ensuite une demi-heure à attendre

Puis $\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$ donc il lui reste ensuite un quart d'heure à attendre.

Puis $\frac{1}{4}-\frac{1}{8}=\frac{1}{8}$ donc il lui reste ensuite un huitième d'heure à attendre

Le fait est que si l'on démarre avec l'idée qu'il attendra une heure, le temps qu'il attend à une étape représente la moitié du temps qu'il lui reste, il lui restera donc ensuite à attendre moitié moins de temps à la prochaine étape et ainsi de suite.

Évidemment ce raisonnement est une récurrence dissimulée, notre jury a en fait retenu tous les essais de démonstration qui présentait une certaine rigueur. Il a accepté ainsi les raisonnements à pointillés pourvu qu'une étape soit présentée dans sa généralité. Il a bien sûr aussi retenu toutes les autres méthodes rigoureuses.

On a ensuite :

$$\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\frac{1}{14}+\frac{1}{15} > \frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16} > 8\times\frac{1}{16}=\frac{1}{2}.$$

On a alors :

$$\underbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}_{>\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}+\underbrace{\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}}_{>\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}}+\underbrace{\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\frac{1}{14}+\frac{1}{15}}_{>\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}}+\underbrace{\frac{1}{16}+\frac{1}{17}+\frac{1}{18}}_{>\frac{1}{32}+\frac{1}{32}+\cdots}$$

$$\underbrace{\frac{1}{32}+\frac{1}{33}+\frac{1}{34}}_{>\frac{1}{64}+\frac{1}{64}}+\underbrace{\frac{1}{64}+\cdots}_{>\frac{1}{128}+\frac{1}{128}\cdots}+\underbrace{\frac{1}{2^k}\cdots}_{>\frac{\frac{1}{2^{k+1}}}{128}+\cdots}$$

$$\text{Donc } \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\cdots\frac{1}{18}+\cdots+\frac{1}{32}+\frac{1}{33}+\frac{1}{34}+\cdots+\frac{1}{64}\cdots+\frac{1}{2^k}\cdots$$

$$> 2.\frac{1}{4}+4.\frac{1}{8}+8.\frac{1}{16}+16.\frac{1}{32}+32.\frac{1}{64}+64.\frac{1}{128}+\cdots+2^k.\frac{1}{2^{k+1}}+\cdots=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots$$

ce qui prouve que Paul ne finira jamais d'attendre Virginie.

Retour au sommaire

RENNES

Premier exercice

Toutes séries

Martin et le défi de calculator

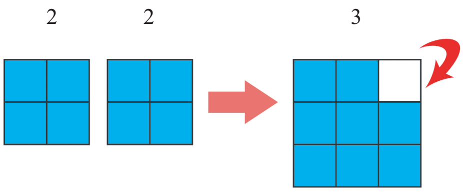
Énoncé

C'est la semaine des défis mathématiques dans le lycée **Al Gorismus**. Le savant Calculator est invité à cette occasion à faire une démonstration de ses talents.

Il annonce ainsi aux élèves présents :

« **On dit que le carré d'un nombre b est un quasi-double du carré d'un nombre a si le carré de b est égal au double du carré de a à 1 unité près** . »

Pour mieux se faire comprendre, Calculator donne des exemples :
Le carré de 3 est un quasi-double du carré de 2 car $2 \times 2^2 = 3^2 - 1$.



De même, le carré de 41 est un quasi-double du carré de 29 car $2 \times 29^2 = 41^2 + 1$.

Puis, le défi est lancé par Calculator :

« **Je vous donne une journée pour me dire si cette affirmation est vraie ou fausse :**
Le carré de 318 281 039 est un quasi-double du carré de 225 058 681 ».

Martin, surnommé le petit génie de l'algorithmique, est bien décidé à relever ce défi.

Rentré à la maison, il commence à chercher et constate alors que sa calculatrice ne lui donne pas directement le résultat.
Qu'à cela ne tienne ! Il l'utilise tout de même pour construire un tableau donnant tous les couples d'entiers inférieurs à 100 dont le carré de l'un est un quasi-double du carré de l'autre.
Martin suppose ensuite que le carré de b est un quasi-double du carré de a, a et b étant des entiers naturels tous deux non nuls. Il établit alors un procédé qui, à partir du couple (a, b), lui permet d'obtenir d'autres couples vérifiant la même propriété. Il faut dire que le tableau précédent l'a aidé à formuler une conjecture pour ce travail.
Le reste de la recherche, il en fait son affaire Martin peut dormir tranquille, il va pouvoir répondre au défi du savant Calculator.

Question : Retrouver la démarche qu'a pu suivre Martin (ou bien en proposer une autre qu'il aurait pu suivre) afin de relever le défi du savant Calculator.

Éléments de solution

• Dans le tableau ci-dessous, le carré de b est un quasi-double du carré de a :

a	0	1	2	5	12	29	70
b	1	1	3	7	17	41	99

(En utilisant la table de la calculatrice, puis vérification des arrondis)
• Procédé qui à partir du couple (a, b) permet d'obtenir d'autres couples vérifiant la même propriété : b quasi-double de a avec $a \geqslant 1$ et $b \geqslant 1$.

Conjecture : d'après le tableau, si on note a' le successeur de a et b' le successeur de b, ou bien (a', b') couple successeur de (a, b). Il semble alors que
$(S)\left\{\begin{array}{lll} a' & = & a+b \\ b' & = & 2a+b \end{array}\right.$ On vérifie $(b')^2 - 2(a')^2 = 2a^2 - b^2 = \pm 1$

et on a $a' > a$ car $b \geqslant 1$ et $b' > b$ car $a \geqslant 1$.

En inversant le système (S), on a $\left\{\begin{array}{lll} a & = & b' - a' \\ b & = & 2a' - b' \end{array}\right.$

Si (a', b') fixé d'après le tableau, $\left\{\begin{array}{lll} a' & \geqslant & 2 \\ b & \geqslant & 3 \end{array}\right.$, alors (a, b) est un prédécesseur de (a', b') et, d'après l'étude précédente, $a < a'$ et $b < b'$.

Changeons de notation : en considérant un couple (a, b) fixé de qussi-double et en notant $(a", b")$ son prédécesseur, on a $\left\{\begin{array}{lll} a" & = & b-a \\ b" & = & 2a-b \end{array}\right.$.

Comme $a" < a$ et $b" < b$, on obtient une suite de nombres $a"$ strictement décroissante et une suite de nombres $b"$ strictement décroissante. Au bout d'un nombre fini d'opérations (prédécesseur), on va arriver à $a" < 100$ et $b" < 100$ donc avec des valeurs qui sont dans le tableau donné au début de l'exercice. Ce qui assure l'unicité d'une telle suite de prédécesseurs.

• Proposition d'un algorithme

Saisie : a et b
Rangement de a et b : u prend la valeur Min(a, b) et v prend la valeur Max(a, b)
L est la liste [u ; v]

Traitement : tant que u>1, faire : w prend la valeur u
t prend la valeur v
u prend la valeur t - w
v prend la valeur 2w - t
L prend la valeur (u, L, v)

Sortie :Si u = 1 et v = 1, afficher (a, b) quasi-double
Sinon, afficher $2a^2 - b^2, 2b^2 - a^2$
Et en conclusion,
Le carré de 318 281 039 est un quasi-double de 225 058 681.

Retour au sommaire

RENNES

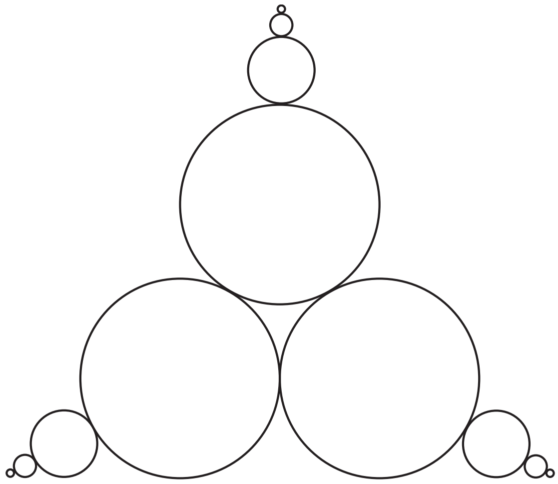
Deuxième exercice

Série S

Les fêtes de Kerondec

Énoncé

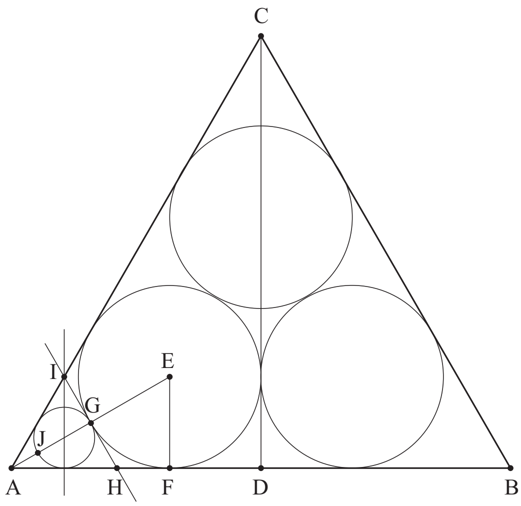
Les fêtes de Kérondec approchent et pour les célébrer dignement en portant le costume traditionnel de la région, Marie veut reproduire le tablier de dentelle porté par une de ses aïeules et visible sur la photo ci-jointe. Elle relève alors un des motifs composé de douze disques réalisés en dentelle.

(Photographie Puyo, Constant (1857-1933) CC-BY-SA-3.0. via Wikipedia Commons)

Marie souhaite le reconstituer fidèlement pour un faire un patron à partir d'un triangle équilatéral de côté égal à 18 centimètres.

Ce motif a été construit à partir d'un triangle équilatéral ABC dans lequel on a tracé trois grands cercles identiques, chacun tangent aux deux autres et chacun tangent à deux côtés du triangle.



1. On note a la longueur du côté du triangle équilatéral ABC.
   a) Donner la hauteur h de ce triangle

   b) Donner le rayon r du cercle inscrit (C) dans ce triangle équilatéral. On notera O le centre de ce cercle.

2. Sur la figure ci-dessus, on note D le milieu de [AB], (C_1) le cercle de centre E inscrit dans le triangle ACD ; (C_1) est tangent au côté [AB] en F.

   On appelle r_1 le rayon du cercle (C_1). Montrer que $r_1 = \dfrac{\sqrt{3}-1}{4}a$.

3. (C_1) coupe [AE] en G ; la tangente en G au cercle (C_1) coupe respectivement les segments [AB] et [AC] en H et I. Déterminer :

   a) le milieu de [AE] ;

   b) le rayon r_2 du cercle (C_2), inscrit dans le triangle ABC.

4. Le cercle (C_2) a pour diamètre [GJ] et la tangente à ce cercle en J coupe respectivement les côtés [AB] et [AC] en H' et I'.
   Déterminer le rayon r_3 du cercle (C_3), inscrit dans le triangle AH'I'.

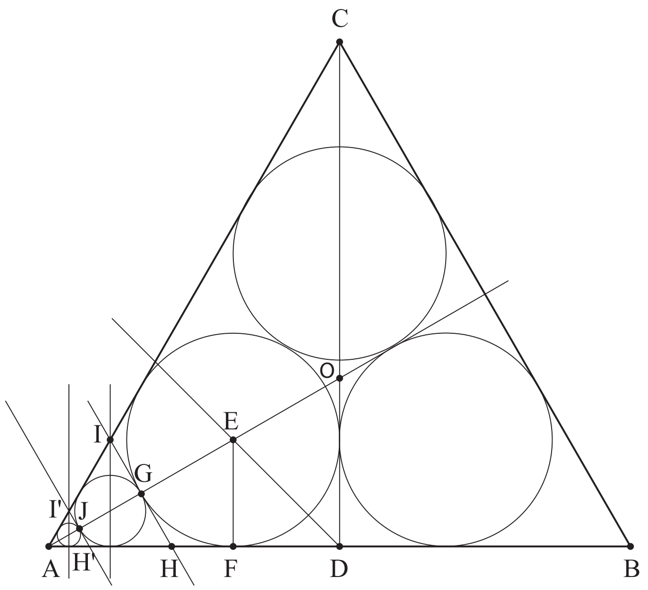
5. Déterminer le rayon r_4 du dernier cercle, tangent aux côtés [AB], [AC] ainsi qu'au cercle (C_3).

6. Réaliser, sur une feuille de papier millimétré, le motif à partir d'un triangle équilatéral de côté égal à 18 cm.

Éléments de solution

1. On note a la longueur du côté du triangle équilatéral ABC.

   a) La hauteur du triangle équilatéral ABC de côté a est égale à : $h = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.



   b) Dans le triangle équilatéral ABC, la hauteur, la médiane, la bissectrice issues d'un même sommet et la médiatrice du segment opposé sont confondues.
   Par ailleurs, le centre O du cercle inscrit dans le triangle équilatéral ABC et le centre de gravité sont confondus.
   Soit D le milieu de [AB], alors D est le projeté orthogonal de O sur [AB].
   Comme le point O se trouve au deux tiers de la médiane en partant du sommet, alors le rayon r du cercle inscrit est égal au tiers de la longueur h de la médiane.

   D'où : $r = OD = \dfrac{1}{3}h = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$.

   On a aussi : $OA = OB = OC = \dfrac{2}{3}h = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

2. E est le centre du cercle inscrit dans le triangle ACD, donc (AE) est la bissectrice de l'angle $\widehat{CAD}$, donc les points A , E , O sont alignés.
Le cercle (C_1) de centre E est tangent au côté [AB] en F, donc (EF)$\perp$ (AB).
Par ailleurs, on a aussi : (CD) $\perp$ (AB), donc (EF)$//$(CD).
. Dans les triangles AEF et AOD, on a (EF)$//$(OD), donc d'après le théorème de Thalès, on a :

$$\frac{AE}{AO}=\frac{AF}{AD}=\frac{EF}{OD}$$

$$\frac{AE}{\frac{a\sqrt{3}}{3}}=\frac{AF}{\frac{a}{2}}=\frac{r_1}{\frac{a\sqrt{3}}{6}}$$

D'où $AF = r - 1\sqrt{3}$.
Par ailleurs, on sait que le triangle EDF est rectangle en F.
Or (DE) est la bissectrice de l'angle $\widehat{ADC}$, donc $\widehat{EDF}=\frac{1}{2}\widehat{ADC}=45^{\circ}$. Donc le triangle rectangle EFD est rectangle isocèle en F.
Donc $EF = FD = r_1$

on obtient alors :

$\frac{a}{2}-r_1=r_1\sqrt{3};\left(\sqrt{3}+1\right)r_1=\frac{a}{2};r_1=\frac{a}{\left(\sqrt{3}+1\right)}=\frac{a\left(\sqrt{3}-1\right)}{4}$

3. a) On a montré que $\frac{AE}{\frac{a\sqrt{3}}{3}}=\frac{r_1}{\frac{a\sqrt{3}}{6}}$ d'où $AE = 2r_1$.

   Comme G $\in (C_1)$, alors $EG = r_1$.

   Et comme G $\in$ [AE], alors G est le milieu de [AE].

   b) On sait que (AO) est axe de symétrie pour le triangle équilatéral ABC et que H $\in$ [AB], donc son symétrique par rapport à (AO) appartient à [AC].
   Comme (GH) est la perpendiculaire à (AO) passant par H, alors le symétrique de H par rapport à (AO) appartient à (GH).
   Donc I est le symétrique de H par rapport à (AO).
   Donc AIH est isocèle de sommet A.
   Comme $\widehat{HAI}=\widehat{BAC}=60^{\circ}$, alors le triangle AIH est équilatéral.

   [AG] est la hauteur issue de A.
   Comme $\widehat{HAI}=\widehat{BAC}=60^{\circ}$, alors le triangle AIH est équilatéral. [AG] est la hauteur issue de A.
   Donc le rayon r_2 du cercle (C_2) inscrit dans le triangle AHI est tel que

$$r_2=\frac{1}{3}AG=\frac{1}{3}r_1=\frac{\sqrt{3}-1}{12}a.$$

4. On procède comme dans la question précédente pour montrer que le triangle on a

$$AJ=AG-GJ=r_1-2r_2=\frac{\sqrt{3}-1}{4}a-\frac{2\left(\sqrt{3}-1\right)}{12}a=\frac{\sqrt{3}-1}{12}a=r_2.$$

Donc le rayon r_3 du cercle (C_3), inscrit dans le triangle AH'I' est tel que :

$$r_3=\frac{1}{3}r_2=\frac{\sqrt{3}-1}{36}a.$$

5. Le cercle (C_3) a pour diamètre [JJ'] , la tangente en J' au cercle (C_3) coupe les côtés [AB] et [AC] respectivement en H" et I".
En procédant comme précédemment, on montre que AI"H" est équilatéral.
La hauteur issue de A est (AJ').

$$AJ'=AJ-JJ'=r_2-2r_3=\frac{\sqrt{3}-1}{12}a-\frac{2\left(\sqrt{3}-1\right)}{36}a=\frac{\sqrt{3}-1}{108}a=r_3.$$

Donc r_4 du dernier cercle, tangent aux côtés [AB], [AC] ainsi qu'au cercle (C_3) est tel que :

$$r_4 = \frac{1}{3} r_3 = \frac{\sqrt{3} - 1}{108} a.$$

6. ***Motif à partir d'un triangle équilatéral de côté égal à 18 cm***.
   Nous laissons au lecteur le plaisir à réaliser ce motif.

Retour au sommaire

RENNES

Troisième exercice

Séries autres que S

Les amies

Énoncé

Aziliz, Bleuenn, Clervie, Diana et Enora sont toutes dans la même classe.
On s'intéresse aux relations d'amitié entre elles. On considère qu'une fille ne peut pas être sa propre amie et que l'amitié est réciproque (ce qui signifie que : si A est une amie de B alors B est une amie de A).

Monsieur Kontan, leur professeur de mathématiques fait les observations suivantes :

a) Aziliz est une amie de Diana **et** Clervie n'a qu'une seule amie.

b) Aziliz a exactement deux amies **et** une des amies d'Aziliz est une amie de Diana.

c) Clervie et Aziliz ont les mêmes amies **et** Diana et Enora ne sont pas amies.

d) Bleuenn est une amie d'Aziliz **et** Enora est une amie de Clervie.

e) Diana n'a pas d'amie **et** Clervie est une amie de Bleuenn.

1. Montrer que Monsieur Kontan se trompe au moins une fois, c'est-à-dire que l'une au moins des cinq observations précédentes est fausse.
2. Montrer que si l'observation e) est vraie, alors il y a au moins deux des quatre observations restantes qui sont fausses.
3. Montrer que, dans tous les cas, Monsieur Kontan s'est trompé au moins deux fois dans ses observations.

On suppose, pour la suite de l'exercice, que Monsieur Kontan s'est trompé exactement deux fois.

Madame Skrivan, leur professeure de français (qui elle ne se trompe pas) observe ce groupe de cinq filles et annonce l'affirmation notée f) :

f) « Chaque fille a au moins une amie, aucune n'est amie avec toutes les autres et il y a exactement une fille du groupe qui a exactement trois amies dans le groupe . »

4. Combien Enora a-t-elle d'amies dans le groupe ? (on pourra étudier tous les cas possibles).

Éléments de solution

On notera : A pour Aziliz, B pour Bleuenn, C pour Clervie, D pour Diana et E pour Enora.

1. On remarque que les propositions a) et e) ne peuvent être vraies en même temps car si a) est vraie, D a une amie qui est A et si e) est vraie, D n'a pas d'amie. Monsieur Kontan s'est donc trompé au moins une fois.
2. Supposons que l'affirmation e) soit vraie. Alors, D n'a pas d'amie donc a) (d'après 1) et b) (« Une des amies de A est une amie de D ») sont toutes deux fausses. Ainsi Monsieur Kontan s'est trompé au moins deux fois.
3. Si e) est vraie, d'après ce qui précède, le professeur s'est trompé au moins deux fois. Supposons que Monsieur Kontan ne se soit trompé qu'une seule fois. Alors e) est fausse et donc, a), b), c) et d) sont toutes les 4 vraies. D'après a), C n'a qu'une seule amie, d'après b), A a deux amies. Or d'après

c), C et A ont les mêmes amies ce qui est impossible.
Monsieur Kontan s'est trompé au moins deux fois.

Notons au passage que nous avons prouvé que a), b) et c) ne peuvent être vraies toutes les trois en même temps.

4. Si e) est vraie, D n'a pas d'amie ce qui n'est pas vrai d'après Madame Skrivan. Donc la proposition e) est fausse. Une des propositions a), b), c) et d) est fausse.

Plusieurs cas se présentent.

Cas 1 : a), b) et d) sont vraies.
Remplissons le tableau suivant (O pour la relation d'amitié correspondante, N lorsqu'il n'y a pas de relation d'amitié entre les personnes correspondantes).

	A (2 amies)	B	C (1 amie)	D	E
A (2 amies)		O (d)		O (a)	
B	O (d)				
C (1 amie)					O (d)
D	O (a)				
E			O (d)		

On peut compléter le tableau en remarquant que :

- C n'a qu'une amie qui est E.
- A a exactement deux amies (d'après b).
- Une des amies de A est une amie de D (cela ne peut être que B).

D'où le tableau :

	A (2 amies a)	B	C (1 amie b)	D	E
A (2 amies)	N	O	N	O	N
B	O	N	N	O	
C (1 amie)	N	N	N	N	O
D	O	O	N	N	
E	N		O		N

Si E a 3 amies alors elle est amie avec B et D mais alors, B et D ont aussi chacune 3 amies ce qui contredit Madame Skrivan donc ce n'est pas E qui a 3 amies, c'est B ou D (mais pas les deux à la fois). Dans ce cas, E a deux amies.

Cas 2 : a), c) et d) sont vraies
C n'a qu'une seule amie (d'après a)) et C et A ont les mêmes amies (d'après c)) donc A n'a qu'une seule amie. Mais D et B sont toutes deux des amies de A (d'après a)) et d)). Il n'est donc pas possible que a), c) et d) soient les propositions vraies.

Cas 3 : b), c) et d) sont vraies
Remplissons le tableau suivant (O pour la relation d'amitié correspondante, N lorsqu'il n'y a pas de relation d'amitié entre les personnes correspondantes).

	A (2 amies)	B	C	D	E
A (2 amies)	N	O (d)			
B	O (d)	N			
C			N		O (d)
D				N	N (c)
E			O (d)	N (c)	N

On peut compléter le tableau en remarquant que :

- C et A ont les mêmes amies.
- A a exactement deux amies.

	A (2 amies)	B	C	D	E
A (2 amies)	N	O	N	N	O
B	O	N	O	O (cf. ci-dessous)	
C	N	O	N	N	O
D	N	O (cf. ci-dessous)	N	N	N
E	O		O	N	N

D a une amie qui est une amie de A cela ne peut être que B.

E a 2 ou 3 amies d'après le tableau précédent. Si elle a 3 amies, cela signifie qu'elle est amie avec B et donc que B est amie avec toutes les filles ce qui contredit Madame Skrivan. E a donc 2 amies.

Conclusion

Dans tous les cas, Enora a 2 amies.

Retour au sommaire

RÉUNION

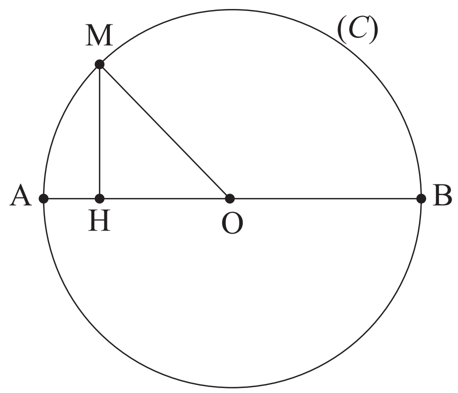
Deuxième exercice

Série S

Moyennes

Énoncé

On considère un cercle (C) de centre O et de diamètre [AB], un point M de (C) et son projeté orthogonal H sur [AB].



1. Soient a et b deux réels positifs, on appelle « moyenne arithmétique de a et b » le nombre $\dfrac{a+b}{2}$ et « moyenne géométrique de a et b » le nombre $\sqrt{a \times b}$.
   Montrer que OM et MH sont respectivement les moyennes arithmétique et géométrique de AH et HB.
2. Montrer que le cercle de centre A et de rayon MH est tangent à la droite (OM).
3. On considère maintenant que le cercle (C) a pour rayon 10. Existe-t-il une position de M sur (C) telle que l'aire du triangle OHM soit égale à 20 ?

Éléments de solution

1. Comme A, H et B sont alignés dans cet ordre, $AH + HB = AB$. De plus, AB est un diamètre et OM un rayon du cercle, donc $AB = 2OM$, d'où $OM = \dfrac{1}{2}(AH + HB)$.

   Pour $MH = \sqrt{AH.HB}$, plusieurs méthodes.

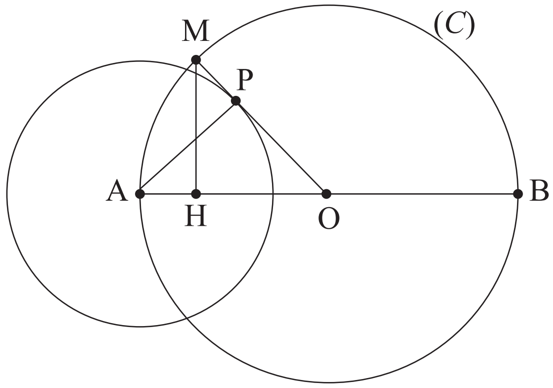
   Théorème de Pythagore
   Dans le triangle AHM rectangle en H, $AM^2 = MH^2 + AH^2$.
   Dans le triangle BHM rectangle en H, $BM^2 = MH^2 + HB^2$.
   Comme M est sur le cercle (C), de diamètre [AB], le triangle AMB est rectangle en M et $AM^2 + MB^2 = AB^2$.
   Ainsi $AB^2 = \left(MH^2 + AH^2\right) + \left(MH^2 + HB^2\right) = AH^2 + 2MH^2 + HB^2$.
   En outre, $AB = AH + HB$ donc, en élevant au carré, $AB^2 = AH^2 + 2AH.HB + HB^2$. En comparant les deux expressions de AB^2, on obtient $MH^2 = AH.HB$ d'où $MH = \sqrt{AH.HB}$.

   Trigonométrie
   Notons R le rayon du cercle (C) et θ l'angle géométrique $\widehat{HOM}$.
   Alors $MH = R\sin\theta$ et $OH = R\cos\theta$.

Donc $AH = AO - OH = R(1-\cos\theta)R(1+\cos\theta) = R^2(1-\cos^2\theta) = R^2\sin^2\theta = MH^2$ et $MH = \sqrt{AH.HB}$.

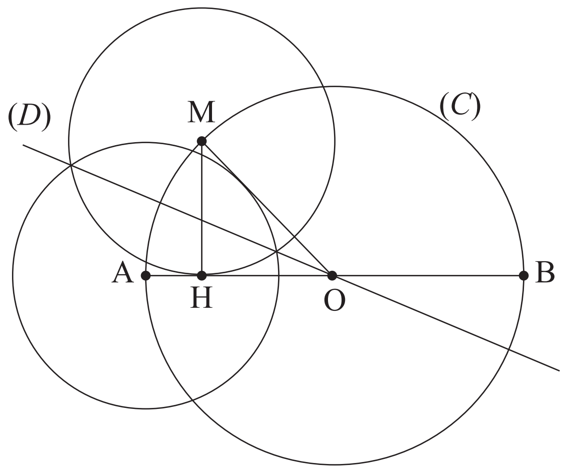
2. A nouveau plusieurs méthodes :

Trigonométrie



Nommons P le projeté orthogonal de A sur la droite (OM). Notons toujours θ l'angle géométrique $\widehat{HOM}$. C'est aussi l'angle géométrique $\widehat{AOP}$.
Dans le triangle APO rectangle en O, on a $AP = AO\sin\widehat{AOP} = R\sin\theta$.
Mais on a aussi $R\sin\theta = MH$ dans le triangle MHO rectangle en H.
Donc $AP = MH$. Cela signifie que le point P est sur le cercle de centre A et de rayon MH.
Or la droite (OM) est perpendiculaire au segment [AP], donc elle est tangente au dit cercle.

Symétrie



Puisque $OA = OM$, le point O se situe sur la médiatrice (D) du segment [AM].
De plus, les droites (OM) et (OA) sont symétriques autour de cette médiatrice (D).
Par construction, le cercle de centre M et de rayon MH est tangent à la droite (OA), puisque H est le projeté orthogonal de M sur (OA).
Il s'ensuit que le cercle de centre A et de rayon MH, symétrique du précédent autour de la droite (D) est tangent à la droite (OM), symétrique de (OA) autour de (D).

3. Soit $x = OH$.
Dans OHM rectangle en H, $OH^2 + HM^2 = OM^2 = 10^2 = 100$ et donc $HM = \sqrt{100 - OH^2} = \sqrt{100 - x^2}$.
Donc l'aire de OHM $A_{OHM} = \dfrac{1}{2}OH \times HM = \dfrac{1}{2}x\sqrt{100 - x^2}$.
S'offrent alors plusieurs possibilités.

Équation bicarrée :
$A_{OHM} = 20$ ssi $\dfrac{1}{2}x\sqrt{100 - x^2} = 20$, donc ssi $x\sqrt{100 - x^2} = 40$.
ou encore ssi en élevant au carré $x^2(100 - x^2) = 1600$ (avec $o \leqslant x \leqslant 10$).

Soit $-x^4+100x^2-1600=0$.
On pose $X=x^2$ et on doit alors résoudre $-X^2+100X-1600=0$ avec $X\geqslant 0$).

$$\Delta = 100^2-4(-1)\times(-1600)=3600.$$

$\Delta>0$ donc il y a deux solutions réelles : $X_1=\dfrac{-100-\sqrt{3600}}{-2}=80$ et $X_2=\dfrac{-100+\sqrt{3600}}{-2}=20$.

Donc, comme $x\geqslant 0$, on a deux solutions $\boxed{x_1=\sqrt{80}=4\sqrt{5} \text{ et } x_2=20=2\sqrt{5}}$
et on vérifie que $0\leqslant x_1\leqslant 10$ et $0\leqslant x_2\leqslant 10$.

Étude du sens de variation (outil dont ne disposent pas les élèves)
Etudions le sens de variation de A_{OHM} :

$$A'_{OHM}(x)=\frac{1}{2}\left(1\times\sqrt{100-x^2}+x\times\frac{-2x}{2\sqrt{100-x^2}}\right)=\cdots=\frac{100-2x^2}{\sqrt{100-x^2}}.$$

$A'_{OHM}=0$ ssi $100-2x^2=0$ donc ssi $x=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$.
D'où

x	0	$5\sqrt{2}$	10
$A_{OHM}(x)$	0 $\nearrow$	25	$\searrow$ 0

Et donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, $A_{OHM}=20$ a deux solutions (ce qui donne 8 positions possibles pour M sur (C)).

On peut aussi s'attendre à une approximation à l'aide de la calculatrice :

x	A_{OHM}
4	18.33
5	21.65

x	A_{OHM}
4.4	19.75
4.5	21.65

x	A_{OHM}
4.47	19.99
4.48	20.026

x	A_{OHM}
8	24
9	19.615

x	A_{OHM}
8.9	20.29
9	19.615

x	A_{OHM}
8.94	20.029
8.95	19.961

Retour au sommaire

RÉUNION

Troisième exercice

Série S

Listes

Énoncé

Une liste initiale contient tous les entiers de 1 à 2012 dans un ordre quelconque, écrits une seule fois.

L'opération suivante lui sera appliquée de manière répétée :
Si la première valeur de la liste est le nombre k, alors les k premières valeurs sont réécrites dans l'ordre inverse de celui où elles étaient (les autres valeurs restent inchangées).
Notons que si $k = 1$, la liste n'est pas modifiée.

Exemple : Si la liste initiale est $(5\,;\,29\,;\,7\,;\,14\,;\,21\,;\,10\,;\ldots.)$ alors $k = 5$ (c'est le premier nombre de la liste) et on obtient donc après la première opération, la liste : $(21\,;\,14\,;\,7\,;\,29\,;\,5\,;\,10\,;\ldots)$.

1. Existe-t-il une liste initiale telle qu'après lui avoir appliqué l'opération quatre fois successivement, le nombre 1 apparaisse en première position (sans que 1 soit apparu plus tôt en première position) ?
2. Existe-t-il une liste initiale telle qu'après lui avoir appliqué l'opération dix-sept fois successivement, le nombre 1 apparaisse en première position (sans que 1 soit apparu plus tôt en première position) ?
3. Existe-t-il, pour tout entier naturel n tel que $1 \leqslant n \leqslant 2012$, une liste initiale telle qu'après lui avoir appliqué l'opération n fois successivement, le nombre 1 apparaisse en première position (sans que 1 soit apparu plus tôt en première position) ?
4. Pour toute liste initiale, existe-t-il nécessairement un entier naturel n tel qu'après avoir appliqué l'opération à la liste n fois successivement, le nombre 1 apparaisse en première position ?

Éléments de solution

Pour tout k entier, on notera I_k la suite obtenue au bout de k opérations.

1. On prend la suite initiale $I_0 = \{2, 3, 4, 5, 1, 5, \ldots 2012\}$.

   Alors, $I_1 = \{3, 2, 4, 5, 1, 3, \ldots 2012\}$
   $I_2 = \{4, 2, 3, 5, 1, 6, \ldots 2012\}$
   $I_3 = \{5, 3, 2, 4, 1, 6, \ldots 2012\}$
   $I_4 = \{1, 4, 2, 3, 5, 6, \ldots 2012\}$
2. On prend la suite initiale $I_0 = 2, 3, \ldots, 18, 1, 19, \ldots; 2012$

   Alors, $I_1 = \{3, 2, 4, \ldots, 18, 1, 19, \ldots, 2012\}$
   $I_2 = \{4, 2, 3, 5, \ldots, 18, 1, 19, \ldots, 2012\}$
   $I_3 = \{5, 3, 2, 4, 6, \ldots, 18, 1, 19, \ldots, 2012\}$
   $\ldots$
   $I_16 = \{18, \ldots, \ldots, 17, 1, 19, \ldots, 2012\}$
   $I_17 = \{1, 17, \ldots, 18, 19, \ldots, 2012\}$
3. Soit n un entier naturel tel que $1 \leqslant n \leqslant 2012$. On prend $I_0 = \{2, 3, \ldots, \text{n+1}, 1, \text{n+2}, \ldots, 2012\}$.

   Alors, $I_{n-1} = \{n+1, \ldots, n, 1, n+2, \ldots, 2012\}$
   $I_n = \{1, n, \ldots, n+1, n, n+2, \ldots, 2012\}$.

   Le nombre 1 ne peut pas apparaître plus tôt en première position puisque lors des $n-1$ premières opérations, le nombre 1 reste toujours à la même position.
   Il existe donc toujours une telle suite.

4. Tout d'abord on constate le point suivant : il n'y a « que » 2012 permutations, donc un nombre fini de possibilités pour arranger la suite. Comme ce nombre est défini, l'opération va donc, à un moment donné, décrire une boucle. En effet, si une fois on arrive à une suite qu'on a déjà trouvée précédemment, il va nécessairement y avoir une boucle.
   Soit **K** l'ensemble de tous les nombres qui vont arriver en premier lieu après un certain nombre d'opérations.
   Si le plus grand nombre de **K** arrive en premier lieu, il sera renvoyé sur une place où il ne pourra jamais être « libéré » par un des autres nombres, vu qu'ils lui sont inférieurs. On réitère pour le $2^{\text{ème}}$ nombre, pour le $3^{\text{ème}}$, etc. jusqu'au nombre le plus petit de **K**. Or, si ce nombre n'était pas 1, il y aurait un nombre plus petit que le minimum qui figurerait en premier lieu. Par suite, la construction de **K** serait fausse, ce qui n'est pas possible, vu le fait que **k** ne peut compter que 2012 nombres au maximum. Par suite, à partir d'un moment donné, le nombre 1 va figurer éternellement en premier lieu.

Retour au sommaire

ROUEN et AEFE AFRIQUE

Premier exercice

Toutes séries

La machine à algorithmes

Énoncé

Pierre se présente devant une machine à algorithmes.
La machine lui demande de choisir un réel x au hasard.
La machine applique alors à x l'un des deux algorithmes suivants.
Dans deux cas sur trois, elle choisit l'algorithme n° 1 et donc, dans un cas sur trois, l'algorithme n° 2.

Algorithme 1	**Algorithme 2**
VARIABLES x EST_DU_TYPE_NOMBRE y EST_DU_TYPE_NOMBRE DEBUT_ALGORITHME LIRE x y PREND_LA_VALEUR $x-1$ y PREND_LA_VALEUR $y \times y$ y PREND_LA_VALEUR $y-5$ AFFICHER y FIN_ALGORITHME	VARIABLES x EST_DU_TYPE_NOMBRE y EST _DU_TYPE_NOMBRE DEBUT_ALGORITHME LIRE x y PREND_LA_VALEUR $x-1$ y PREND_LA_VALEUR $6 : y$ y PREND_LA_VALEUR $2+y$ AFFICHER y FIN_ALGORITHME

1. Pierre entre le nombre 2 dans la machine.
   Quelle est la probabilité que la machine affiche 8 ?
2. La machine affiche -4.
   Quels nombres Pierre a-t-il pu entrer ?
3. a) Exprimer en fonction de x la valeur de y obtenue à l'affichage de l'algorithme 1.
   On notera $f(x)$ cette expression.

   b) Exprimer en fonction de x la valeur de y obtenue à l'affichage de l'algorithme 2.
   On notera $g(x)$ cette expression.
4. Pierre choisit un nombre au hasard dans l'intervalle $[-5; 5]$ et l'introduit dans la machine.
   Quelle est la probabilité que le nombre affiché par la machine se trouve dans l'intervalle $[-4; 4]$?

Éléments de solution

1. Aves l'algorithme 1 : $2 \longrightarrow 1 \longrightarrow 1 \longrightarrow -4$
   Avec l'algorithme 2 : $2 \longrightarrow 1 \longrightarrow 6 \longrightarrow 8$.
   Or la machine choisit l'algorithme 2 avec une probabilité de $\dfrac{1}{3}$;

   donc la probabilité que la machine affiche 8 est $\dfrac{1}{3}$.

2. Avec l'algorithme 1 :

$$\begin{tikzcd}
 & & -1 \arrow[dl] & 0 \arrow[l] \\
-4 & 1 \arrow[l] & & \\
 & & 1 \arrow[ul] & 2 \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

Avec l'algorithme 2 :

$$-4 \longleftarrow -6 \longleftarrow -1 \longleftarrow 0$$

Pour que la machine affiche -4, Pierre a pu entrer 0 ou 2.

3. a) $f(x) = (x-1)^2 - 5$

   b) $g(x = \dfrac{6}{x-1} + 2$.

4. • A quelle condition a-t-on $-4 \leqslant f(x) \leqslant 4$?
   f est une fonction trinôme, on peut appliquer une méthode algébrique :
   $f(x) = x^2 - 2x - 4$

   $$\begin{cases} f(x) \geqslant -4 & \Leftrightarrow & x^2 - 2x \geqslant 0 & \Leftrightarrow & x \in [-5;0] \cup [2;5] \\ f(x) \leqslant 4 & \Leftrightarrow & x^2 - 2x - 8 \leqslant 0 & \Leftrightarrow & x \in [-2;4] \end{cases}$$

   Finalement, $-4 \leqslant f(x) \leqslant 4 \Leftrightarrow x \in [-2;0] \cup [2;4]$.
   Si on suppose que x est choisi au hasard et uniformément dans l'intervalle $[-5;5]$, alors la probabilité que $-4 \leqslant f(x) \leqslant 4$ est $\dfrac{4}{10} = \dfrac{2}{5}$.

   • A quelle condition a-t-on $-4 \leqslant g(x) \leqslant 4$?
   Le signe de $(x-1)$ doit être pris en compte dans les inégalités ; les élèves auraient intérêt à utiliser une méthode analytique.

   $g'(x) = -\dfrac{6}{x-1}$, d'où le tableau suivant :

x	-5	0	1		4	5
$g(x)$	1 ↘	-4 ↘	$-\infty$ ‖	$+\infty$ ↘	4 ↘	3.2

   Finalement, $-4 \leqslant g(x) \leqslant 4 \Leftrightarrow x \in [-5;0] \cup [4;5]$.

   Donc la probabilité que $-4 \leqslant g(x) \leqslant 4$ est $\frac{6}{10} = \frac{3}{5}$.

   La probabilité cherchée est donc : $\dfrac{2}{3} \times \dfrac{2}{5} + \dfrac{1}{3} \times \dfrac{3}{5} = \dfrac{7}{15}$.

Retour au sommaire

ROUEN et AEFE AFRIQUE

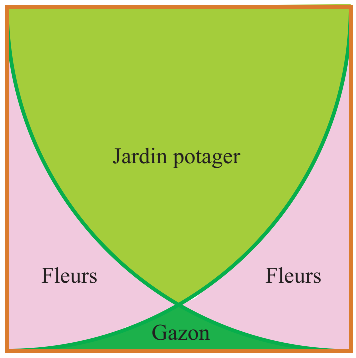
Deuxième exercice

Série S

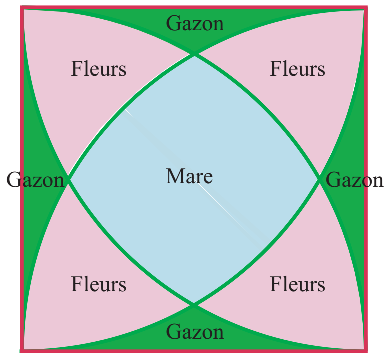
Le jardin de Madame Olympe

Énoncé

Madame Olympe vient d'hériter d'un champ carré de côté 1 hectomètre.

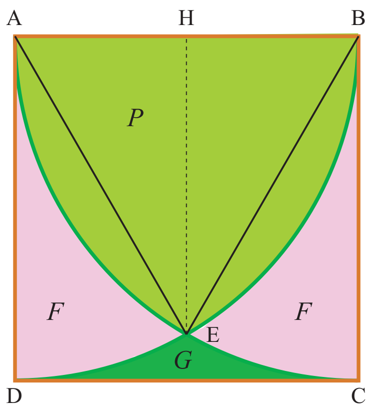


1. Dans un premier temps, elle partage son champ en quatre parties à l'aide de deux quarts de cercle.
   Dans la partie inférieure, elle sème du gazon, dans les deux parties latérales, elle plante des fleurs.
   Elle réserve la partie supérieure pour y faire un jardin potager.
   a) Calculer l'aire réservée au gazon.
   b) Calculer l'aire réservée aux fleurs.
   c) Calculer l'aire réservée au jardin potager.



2. Déçue par son jardin potager, elle décide de modifier la configuration de son champ et de rajouter deux autres quarts de cercle de manière à pouvoir crée une mare.
   Elle partage alors son terrain de la manière exposée ci-contre.
   a) Calculer l'aire réservée au gazon.
   b) Calculer l'aire réservée aux fleurs.
   c) Calculer l'aire réservée à la mare

Éléments de solution



1. a) ***Aire de la partie réservée au gazon***.
   On place les points A, B, C, D, E, H comme sur le schéma ci-contre.
   ABE est un triangle équilatéral car E est à l'intersection des arcs de cercles de rayon [AB] et de centres respectifs A et B.

$$Aire_{Gazon} = Aire_{\text{ABCD}} - Aire_{\text{AEB}} - Aire_{\widehat{\text{DAE}}}$$

   Où $\widehat{\text{DAE}}$ est le secteur angulaire associé à l'angle $\widehat{\text{DAE}}$ qui mesure 30°

$Aire_{\text{ABCD}} = 1 \text{ hm}^2$

$Aire_{\text{AEB}} = \dfrac{HE \times AB}{2}$ avec $EH = AE \times \sin 60^o = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ hm.

Donc $Aire_{\text{AEB}} = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$ hm^2

$Aire_{\widehat{\text{DAE}}} = \pi \times \dfrac{\widehat{\text{DAE}}}{360} \times AD = \pi \times \dfrac{30}{360} \times 1 = \dfrac{\pi}{12}$ hm^2.

Donc

$$Aire_{\text{Gazon}} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{4} - 2 \times \frac{\pi}{12} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{6} \approx 0,043 \text{ hm}^2.$$

b) ***Partie réservée aux fleurs***.

Calculons l'aire d'une des deux parties réservées aux fleurs, notée F sur le schéma.
On remarque que la surface du terrain située en dehors du secteur angulaire $\widehat{\text{DAE}}$ contient une zone de fleurs F et la zone garonnée G.
Donc on a :

$$Aire_F + Aire_G = Aire_{\text{ABCD}} - Aire_{\widehat{\text{DAE}}}$$

$$Aire_F = 1 - \frac{\pi}{4} - \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$Aire_F = \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{12} \text{ hm}^2.$$

Donc

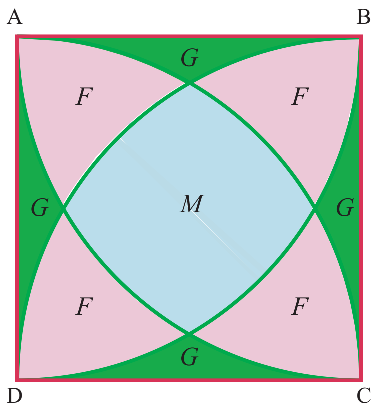
$$Aire_{\text{Fleurs}} = 2 \times Aire_F = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6} \approx 0,342 \text{ hm}^2.$$

c) ***Partie réservée au potager***.

$$Aire_{\text{Potager}} = Aire_{\text{ABCD}} - Aire_{\text{ABCD}} - Aire_{\text{Gazon}} - Aire_{\text{Fleurs}}$$

$$Aire_{\text{Potager}} = 1 - \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{6}\right) - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$Aire_{\text{Potager}} = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} \approx 0,614 \text{ hm}^2.$$



2. a) ***Partie réservée au gazon***.

$$Aire_{\text{Gazon}} = 4 \times Aire_G$$

Où $Aire_G$ est l'aire de la partie gazonnée dans la configuration précédente.

$$Aire_{\text{Gazon}} = 4\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{6}\right) = 4 - \sqrt{3} - \frac{2\pi}{3} \approx 0,174 \text{ hm}^2$$

b) ***Partie réservée aux fleurs***.

La surface de terrain située en dehors du secteur angulaire $\widehat{\text{ABC}}$ est constituée d'une surface de fleurs F et de deux surfaces de gazon G.
Donc

$$Aire_F + 2 \times Aire_G = Aire_{\text{ABCD}} - Aite_{\widehat{\text{ABC}}}$$

$$Aire_F = 1 - \frac{\pi}{4} - 2 \times \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{6}\right) = -1 + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{12} \text{ hm}^2$$

Et

$$Aire_{\text{Fleurs}} = 4 \times Aire_F = -4 \times 2\sqrt{3} + \frac{\pi}{3} \approx 0,511 \text{ hm}^2$$

c) ***Partie réservée à la mare***.

$$Aire_{\text{Mare}} = Aire_{\text{ABCD}} - Aire_{\text{Gazon}} - Aire_{\text{Fleurs}}$$

$$Aire_{\text{Mare}} = 1 - \left(4 - \sqrt{3} - \frac{2\pi}{3}\right) - \left(-4 + 2\sqrt{3} + \frac{\pi}{3}\right) = 1 - \sqrt{3} + \frac{\pi}{3} \approx 0,315 \text{ hm}^2.$$

Retour au sommaire

ROUEN et AEFE AFRIQUE

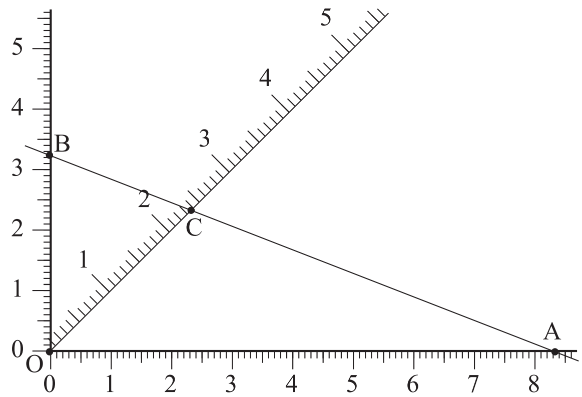
Troisième exercice

Séries autres que S et STI

Un instrument de calcul

Énoncé

Ci-dessous est présenté un instrument de calcul.
L'objectif de l'exercice est d'en déterminer la fonction.



On considère un repère orthonormé $(\mathrm{O}\,;\vec{i},\vec{j})$.
A est un point de la demi-droite $[\mathrm{O}\,;\vec{i})$, distinct de O et B est un point de la demi-droite $[\mathrm{O}\,;\vec{j})$ distinct de O. C est un point de la bissectrice issue de O dans le triangle OAB tel que les points A, B et C soient alignés.

On note a et c les abscisses respectives des points A et C dans le repère $(\mathrm{O}\,;\vec{i},\vec{j})$

On note b l'ordonnée du point B dans le repère $(\mathrm{O}\,;\vec{i},\vec{j})$.

1. a) Démontrer que $c = \dfrac{ab}{a+b}$

   b) En déduire que $\dfrac{1}{c} = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}$
2. Expliquer alors l'usage que l'on peut faire de l'instrument de calcul représenté ci-dessus.

Éléments de solution

1. a) $\mathrm{A}(a\,;0)$ et $\mathrm{B}(0\,;b)$ donc (AB) admet pour équation réduite : $y = -\dfrac{b}{a}x + b$.
   C appartient à la droite d'équation : $y = x$ donc C a pour coordonnées $(c;c)$ C appartient à la droite (AB) donc $c = -\dfrac{b}{a}c + b$, puis $c = \dfrac{ab}{a+b}$.

   b) $\dfrac{1}{c} = \dfrac{a+b}{ab} = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}$.
2. Le diagramme précédent, appelé **abaque** ou bien encore **nomogramme** de la relation $\dfrac{1}{c} = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}$ permet de lire, au point d'intersection des deux droites, la valeur de l'inverse de la somme des inverses de a et b.

Retour au sommaire

STRASBOURG

Premier exercice

Série S

Un professeur d'EPS

Énoncé

Le professeur d'éducation physique et sportive demande aux élèves de son groupe de 24 garçons de se mettre en rangs pour former 6 lignes et 4 colonnes. Tous les garçons sont de tailles différentes.
Il sélectionne alors le plus grand de chaque ligne pour un tournoi de basket-ball et le plus petit de chaque colonne pour une course à cheval.

1. Un même élève peut-il être sélectionné à la fois comme basketteur et comme cavalier ?
2. Un cavalier peut-il être plus grand qu'un basketteur ?

Éléments de solution

1. Oui, un élève peut être sélectionné aux deux. Par exemple, disons que les tailles sont de 165 cm à 188 cm . L'élève de 170 cm a dans sa ligne les tailles 169, 168 et 165 et dans sa colonne les tailles 171, 173, 175, 180 et 185. Il sera alors sélectionné aux deux.
2. Non, ce n'est pas possible. Prenons un basketteur B, de taille b et un cavalier C, de taille c. Le but est de voir que l'on ne peut pas avoir c supérieur à b. Si B et C coïncident, alors $b = c$ (c'est le même individu). Si B n'est pas C, alors b et c sont différents (tailles toutes différentes). Alors, si B et C sont sur la même colonne, $c < b$, si B et C sont sur la même ligne, $b > c$, si B et C ne sont ni sur la même ligne ni la même colonne, notons D celui qui est à l'intersection de la ligne de B et de la colonne de C, alors $b > d$ et $d > c$, donc $b > c$, en notant d la taille de D.

Retour au sommaire

STRASBOURG

Deuxième exercice

Série S

Un dé tétraédrique

Énoncé

Les quatre faces d'un dé tétraédrique posé sur une table sont numérotées de 1 à 4. Ce dé est posé sur la face numérotée 1. A chaque étape, Nicolas fait basculer le dé autour de l'une des arêtes de la face sur laquelle il est posé et note le numéro de la face sur laquelle il se retrouve posé.

Au bout de 2012 basculements, Nicolas fait la somme S des 2012 chiffres qu'il a notés.

1. Donner la valeur maximale M et la valeur minimale m de la somme S ainsi obtenue.
2. La somme S peut-elle prendre toutes les valeurs entières entre m et M ?

Éléments de solution

1. Il est facile de voir que le minimum est obtenu en basculant 2 puis 1 et en recommençant cela 1006 fois, donc que $m = 3018$. De même 4 puis 3 répété 1006 fois donne $M = 7042$.
2. Tous les intermédiaires peuvent être atteints. Par exemple 3019 avec 3 puis 1, 2 puis 1 etc. Les suivants ne sont pas plus compliqués.

Retour au sommaire

STRASBOURG

Troisième exercice

Séries autres que S

Le Kougelhopf

Énoncé

Armelle laisse ses neveux pour un goûter d'anniversaire au Kougelhopf doré.
Ils ont le choix entre deux formules mais doivent tous prendre la même :
- la formule A est à 7 euros pour les grands, et 3 euros pour les petits ;
- la formule B est à 6 euros pour les grands, et 2 euros pour les petits.

Armelle n'a dans son porte-monnaie que des billets de 10 euros.
Avant de partir elle annonce à l'animatrice à laquelle elle confie ses neveux :
« Quel que soit le choix de mes neveux, 3 billets seront insuffisants. Voici donc 4 billets, mais je sais que c'est trop, il en restera. »

Combien a-t-elle de grands et de petits neveux ?

Éléments de solution

Soit p et g le nombre de neveux, petits et grands.

S'ils choisissent la formule A, ils doivent payer $7g + 3p$ euros
S'ils choisissent la formule B, ils doivent payer $6g + 2p$ euros

On doit donc avoir les quatre inégalités :
$31 \leqslant 7g + 3p \leqslant 39$ et $31 \leqslant 6g + 2p \leqslant 39$.
Comme g et p sont positifs, on a $6g + 2p \leqslant 7g + 3p$.
Il suffit donc de satisfaire les deux conditions :
$31 \leqslant 6g + 2p$ et $7g + 3p \leqslant 39$.

Solution arithmétique

g et p étant entiers, $6g + 2p$ est pair et donc supérieur à 32,
d'où $3g + p \geqslant 16$ puis $3p \geqslant 48 - 9g$
et comme $3p \leqslant 39 - 7g$, $48 - 9g \leqslant 39 - 7g$ d'où $9 \leqslant 2g$ donc $g \geqslant 53$.
Mais $7g \leqslant 39$ et $g \leqslant 5$ donc $g = 5$.
Alors $2p \geqslant 31 - 6 \times 5 = 1$ d'où $p \geqslant 1$.
et $3p \leqslant 39 - 7g = 4$. D'où $p \leqslant 1$.
Finalement $p = 1$.

Solution analytique et géométrique

Traçons sur une feuille quadrillée les deux droites d'équation

$$6y + 2x = 31 \text{ et } 7y + 3x = 39$$

. Puis hachurons la zone définie par

$$6y + 2x \geqslant 31 \text{ et } 7y + 3x \leqslant 39$$

intersection de deux demi-plans.
Un agrandissement sur cette zone montre que le seul point à coorodnnées entières est le point $(1\,;\,5)$.

Retour au sommaire

STRASBOURG

Quatrième exercice

Séries autres que S

Nombres à quatre chiffres

Énoncé

On écrit tous les nombres à quatre chiffres formés avec les chiffres 1,2,3,4 sans répétition.

1. Combien y-en-a-t-il ?
2. Que vaut la somme de tous ces nombres ?

Éléments de solution

1. Les quatre chiffres étant distincts, il y a quatre possibilités pour le chiffre des unités, puis trois pour celui des dizaines, deux pour celui des centaines et il n'en reste qu'une pour celui des milliers.
   Soit en tous 24 nombres.
   On peut dire aussi qu'à chaque nombre correspond biunivoquement une permutation de 1, 2, 3, 4 et on retrouve $4! = 24$.
2. Soit $\overline{abcd}$ un des nombres écrit dans le système décimal.
   On a $\overline{abcd} = d + 10.c + 100.b + 1000.a$
   Pour faire leur somme, écrivons les 24 nombres les uns au dessous des autres. Dans chaque colonne, il y a 6 fois chacun des quatre chiffres 1, 2, 3, 4 et $1 + 2 + 3 + 4 = 10$
   La somme des 24 nombres est donc

$$6.10.(1 + 10 + 100 + 1000) = 60 \times 1111 = 66660.$$

Retour au sommaire

TOULOUSE

Premier exercice

Toutes séries

Le concours d'Olympie

Énoncé

Tous les ans, la ville d'Olympie organise un concours. Ce concours débute à 14 heures précises.

1. Deux amis Raymond et Eddie qui habitent dans le même village à 10 km d'Olympie décident de se rendre à ce concours. Ils disposent d'un seul vélo qui ne peut transporter qu'une seule personne (pas de porte-bagages !). Ils estiment que leur vitesse moyenne à vélo est de 20 km/h et que leur vitesse moyenne à pied est de 5 km/h.
   Ils décident de partir à 12 h 30.
   a) Raymond propose l'organisation suivante : il fait le début du parcours à vélo. Arrivé chez son cousin Albert qui habite à 3 km d'Olympie, il dépose son vélo et poursuit à pied. Lorsque Eddie arrivera chez Albert, il récupèrera le vélo et finira le parcours avec.
   A quelle heure le dernier des deux amis va-t-il arriver à Olympie ?

   Dans la suite, on suppose que l'on peut laisser le vélo, sans surveillance, n'importe où sur le chemin d'Olympie.

   b) Raymond propose de laisser son vélo entre la maison d'Albert et Olympie. Le dernier des deux amis arrivera-t-il plus tard à Olympie que si Raymond laisse le vélo chez Albert ?
   c) A combien de kilomètres d'Olympie Raymond doit-il déposer le vélo pour que la durée du trajet du plus lent des deux amis soit la plus courte possible ?
   A quelle heure au plus tard peuvent-ils partir pour être tous les deux à l'heure au concours ?
2. Au dernier moment, Jeannie, camarade de Raymond et Eddie, se joint à eux pour aller au concours. On considère qu'elle se déplace, à vélo et à pied, aux mêmes vitesses moyennes que Raymond et Eddie.
   Raymond, Eddie et Jeannie veulent partir ensemble le plus tard possible et être à l'heure pour le début du concours.
   a) S'ils disposent d'un seul vélo, à quelle heure doivent-ils partir au plus tard pour être à l'heure au concours et comment doivent-ils s'organiser ?
   b) Jeannie décide finalement d'amener son vélo, lui aussi sans porte-bagages. Les trois amis disposeront donc de deux vélos pouvant transporter chacun une seule personne. A quelle heure doivent-ils partir au plus tard pour être à l'heure au concours ?
3. Jeannie se dit alors : « Si nous étions sept à vouloir aller à ce concours dans les mêmes conditions avec des bicyclettes sans porte-bagages, il en faudrait au moins cinq pour y arriver en moins d'une heure ». Jeannie a-t-elle raison ?

Éléments de solution

1. **Une bicyclette et deux concurrents**
   a) Raymond fait 7 km à vélo et 2 km à pied ; durée $\dfrac{7}{20}$ h + $\dfrac{3}{5}$ h = $\dfrac{19}{20}$ h.

   Eddie fait 3 km à vélo et 7 km à pied ; durée : $\dfrac{7}{5}$ h + $\dfrac{3}{20}$ h = $\dfrac{31}{20}$ h.

   Il faut 1 h 33 à Eddie pour arriver !
   Eddie arrive à 14 h 03.

b) Si le vélo est resté après chez Albert, cela ralentit encore plus Eddie.

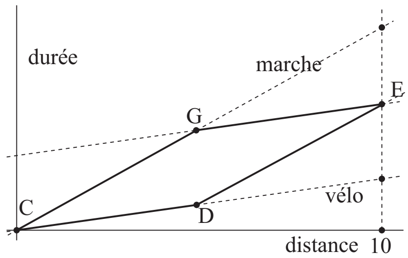
c) Soit x la distance parcourue par Raymond à vélo ($0 < x \leqslant 10$).
Raymond fait x km à vélo et $10 - x$ km à pied ; durée : $\dfrac{40-3x}{20}$ h.
Eddie fait $10 - x$ km à pied et x km à vélo ; durée : $\dfrac{3x+10}{20}$ h.
Partant ensemble, ils arrivent ensemble pour x valant 5 (km) ; sinon Raymond ou bien Eddie arrive après l'autre et il met plus de temps que dans la première option ($x = 5$).
Durée optimale : 1 heure 15.
Ils peuvent partir à 13 h 45 et c'est l'horaire maximum.

Plus généralement : pour la distance D km, les vitesses v km/h et V km/h (marche et vélo respectivement), pour x km à vélo de X, les durées sont :

- pour Raymond : $\dfrac{x}{V} + \dfrac{D-x}{v}$ h.

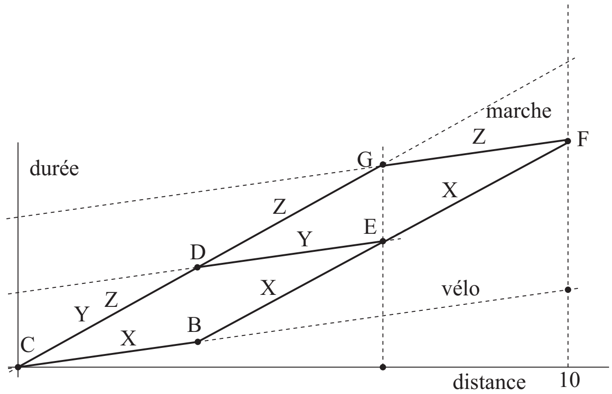
- pour Eddie : $\dfrac{x}{v} + \dfrac{D-x}{V}$ h.

Avec le même raisonnement, l'optimum est pour $x = \dfrac{D}{2}$ km avec la durée $D.\left(\dfrac{1}{2v} + \dfrac{1}{2V}\right)$ h, soit $\dfrac{D}{2}.\dfrac{v+V}{v.V}$ h
Il n'y a que simplicité sans inconvénient à ce que Raymond fasse tout son lot de vélo de prime abord. On a alors le schéma

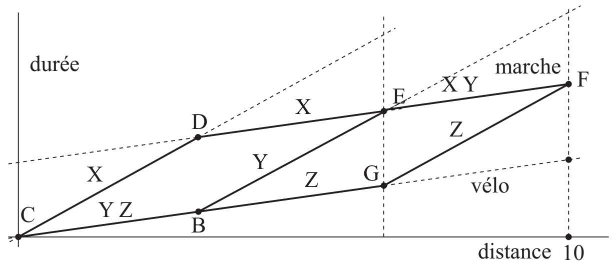


2. a) **Une bicyclette et trois concurrents**
Raymond fait x km à vélo, $D - x$ km à pied. Durée : $\dfrac{x}{V} + \dfrac{D-x}{v}$ h.
Eddie fait y km à vélo et $D - y$ km à pied. Durée : $\dfrac{y}{V} + \dfrac{D-y}{v}$ h.
Jannie fait $D - x - y$ km à vélo et $x + y$ km à pied. Durée : $\dfrac{D-x-y}{V} + \dfrac{x+y}{v}$ h.
Partant ensemble, il arrivent ensemble pour $x = y = \dfrac{D}{3}$; hors de cela, l'un arrive après les autres et dans une durée supérieure à la première option.
L'optimum de durée vaut $\dfrac{D}{3} \times \dfrac{v+2V}{vV}$ h.
Application : $D = 10, v = 5, V = 20$; durée : 1 h 30.

Il n'y a que simplicité sans inconvénient à ce que Raymond fasse tout son lot de vélo de prime abord, suivi de Y. . .On a alors le schéma



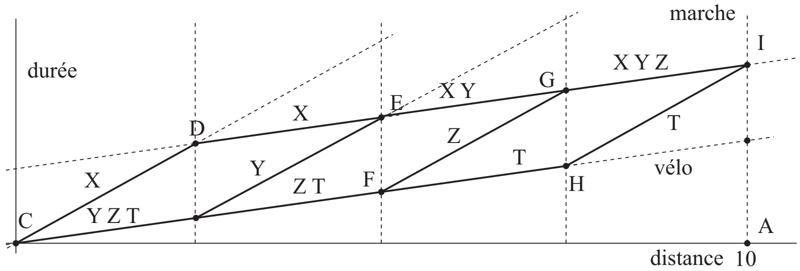
b) **Deux bicyclettes et trois concurrents**
Raymond utilise le vélo 1 sur x_1 km et le vélo 2 sur x_2 km.
Eddie utilise le vélo 1 sur y_1 km et le vélo 2 sur y_2 km.
Jeannie utilise le vélo 1 sur z_1 km et le vélo 2 sur z_2 km.
Par ailleurs, $x_1 + y_1 + z_1 = D$ et $x_2 + y_2 + z_2 = D$.
La durée est la même pour les trois lorsque $x_1 + x_2 = y_1 + y_2 = z_1 + z_2$; en ce cas , $x_1 + x_2 = y_1 + y_2 = z_1 + z_2 = 2\frac{D}{3}$ et chacun marche sur un tiers du parcours.
Il n'y a que simplicité sans inconvénient à ce que Jeannie fasse tout son lot de marche de prime abord, suivie de Eddie puis de Raymond. Cela implique x_1 ou x_2 égal à $\frac{D}{3}$...Si $x_1 = \frac{D}{3}$, x_2 aussi, etc.
La durée optimale : $\frac{D}{3} \times \frac{2v + V}{vV}$ h.
On a alors le schéma :



Application : $D = 10, v = 5, V = 20$; durée : 1 heure.

3. Après l'étude du 2), c'est comme s'il suffisait d'un concurrent et demi par vélo. Avec cinq vélos, sept concurrents ne mettront pas plus d'une heure.

Complément : **Pour trois bicyclettes et quatre concurrents**, ce sera



Avec la durée : $\frac{D}{4} \times \frac{3v + 2V}{vV}$ h.

$$\boxed{\text{Pour } m \text{ bicyclettes et } k \text{ concurrents } (k > m) : \frac{D}{k} \times \frac{mv + (k - m)V}{vV} \text{ h.}}$$

Retour au sommaire

TOULOUSE

Deuxième exercice

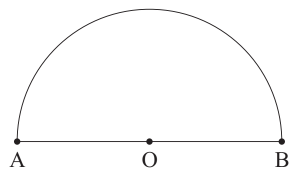
Série S

Largeur constante

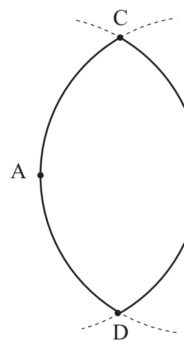
Énoncé

On considère une courbe fermée du plan et un point M de cette courbe.
On peut alors toujours trouver un point N sur la courbe, pas forcément unique, pour lequel la distance MN - c'est-à-dire la longueur du segment [MN] - est maximale.
Cette valeur maximale est appelée « largeur en M » de la courbe ; on la note $L(M)$.
On dit qu'une courbe est à largeur constante si la largeur est la même en chacun de ses points.
Dans cet exercice on étudie quelques courbes fermées et on examine si leur largeur est constante.

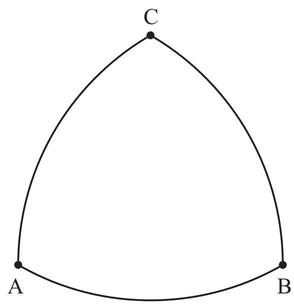
1. Soit la courbe fermée constituée par un segment [AB] de longueur $2R$ et un demi-cercle de diamètre [AB] ; on note O le milieu de [AB]



   a) Déterminer en fonction de R, la largeur en O de la courbe : $L(O)$.
   b) Déterminer en fonction de R, la largeur en A de la courbe : $L(A)$.
   c) Cette courbe est-elle à largeur constante ?
2. Un cercle de centre O et de rayon R est une courbe fermée. Est-elle à largeur constante ?



3. La courbe fermée ci-contre est constituée des deux arcs de cercle tracés en trait plein. L'un des deux a pour centre A, l'autre a pour centre B. Ils ont tous les deux pour rayon AB et pour extrémités les points C et D communs aux deux cercles.
   Cette courbe est-elle à largeur constante ?



4. La courbe fermée ci-contre est appelée « triangle » de Reuleaux. Elle est construite à partir des sommets d'un triangle équilatéral ABC de côté d. Elle est composée de trois arcs de cercle centrés respectivement en A, B et C et ayant pour extrémités les deux autres sommets du triangle équilatéral ABC.
   a) M étant un point de l'arc BC autre que B et C, quel est le point du « triangle » de Reuleaux le plus éloigné de M ?
   b) Le « triangle » de Reuleaux est-il une courbe à largeur constante ?
5. a) Construire sur la copie un « triangle » de Reuleaux de sommets A, B et C (on prendra 8 cm pour d) et les points d'intersection A', B' et C' des médiatrices des segments [BC], [AC] et [AB] avec les arcs de cercle composant le « triangle » de Reuleaux.

b) Quelle est la nature du triangle A'B'C' ?

6. Un triangle équilatéral MNP étant donné, proposer au moins trois courbes fermées à largeur constante passant par ses trois sommets.

N.B. : Le « triangle » de Reuleaux doit son nom à l'ingénieur allemand Franz Reuleaux (1829-1905), qui fut au XIX[e] siècle un pionnier du génie mécanique ; ce « triangle » est associé au moteur à piston rotatif dont le rotor, qui n'est pas cylindrique, est à la base un « triangle » de Reuleaux.

Éléments de solution

1. a) Quel que soit le point X de la courbe :
   - ou bien X appartient au demi-cercle : $OX = R$,
   - ou bien X appartient au diamètre [AB] : $OX \leqslant R$.

   Par conséquent $L(O) = R$.

   b) Quel que soit le point X de la courbe, que X appartienne au diamètre [AB] ou qu'il appartienne au demi-cercle : $AX \leqslant 2R$.
   Du fait que $AB = 2R, L(A) = 2R$.

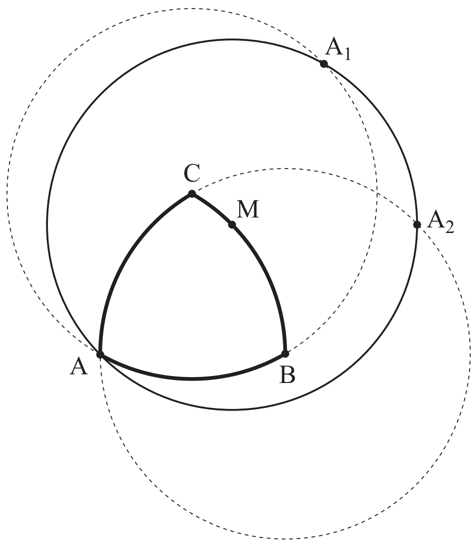
   c) Ce qui précède suffit pour affirmer que la figure n'est pas à largeur constante.

2. Quel que soit le point M de la courbe, le point M' diamétralement opposé sur le cercle vérifie : $MM' = 2R$; quel que soit le point X de la courbe $MX \leqslant MM'$.
   Par conséquent quel que soit le point M de la courbe, $L(M) = 2R$; la courbe est à largeur constante.

3. La définition de la courbe implique : chacun des deux arcs la composant est intérieur au disque déterminé par l'autre.
   Étudions la largeur en A. Quel que soit le point X de la courbe :
   - ou bien il appartient à l'arc contenant A : $AX \leqslant R$,
   - ou bien il appartient à l'arc contenant B : $AX = R$.

   De là $L(A) = R$.
   Par ailleurs $CD = R\sqrt{3}$; de là : $L(C) \neq R$.
   Par conséquent la courbe n'est pas à largeur constante.

4 a) En reprenant les arguments de la question 3, la distance de A, B ou C respectivement à un point M du « triangle » de Reuleaux est inférieure ou égale à R.
Soit M un point de l'arc BC, distinct de B et de C. Par construction $AM = d$.
Soit C_{M} le cercle de centre M et de rayon d, C_{C} celui de centre C et de rayon d et C_{B} celui de centre B et de rayon d. C_{M} et C_{C} sont sécants en A et A_1, C_{M} et C_{B} sont sécants en A et A_2.
(Les cercles C_{M} et C_{C} ne sont pas tangents, car sinon, les rayons AM et AC seraient confondus ; de même pour les deux autres cercles).
On a vu que la distance MB est inférieure à R, donc B est un point intérieur au cercle C_{M}. Par suite l'arc AB est tout entier inclus dans l'arc intérieur AA_1.
Par conséquent le « triangle de Reuleaux » est intérieur au cercle CM et donc la distance de M à tout point du « triangle de Reuleaux » autre que A est strictement inférieure à d.
Par conséquent le point le plus éloigné de M est le point A.



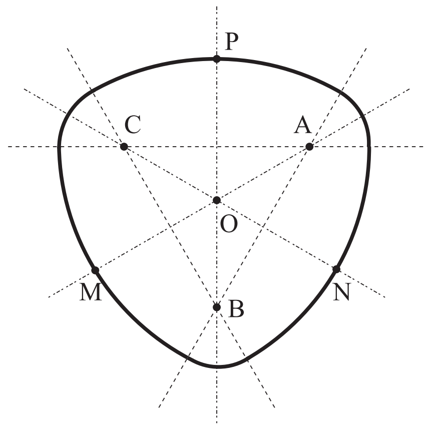
b) On a montré précédemment que pour tout point M de l'arc BC, distinct de B et de C, $L(\mathrm{M}) = d$. On a aussi $L(\mathrm{B}) = L(\mathrm{C}) = d$ et par un raisonnement du même type sur les arcs AB et AC on montre que pour tout point M du « triangle de Reuleaux », $L(\mathrm{M}) = d$ donc cette figure est à largeur constante.

5. a) Réalisation de figure...

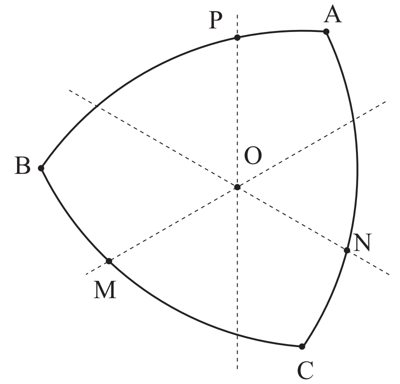
   b) Le « triangle de Reuleaux » admet les droites (AA'), (BB'), (CC') comme axes de symétrie. Par la symétrie d'axe (AA'), les arcs AB et AC sont associés, par conséquent aussi les points C' et B' ...De là $A'B' = B'C' = C'A'$; le triangle A'B'C' est équilatéral.

6. Soit un triangle équilatéral MNP de côté c.

   - le cercle circonscrit de ce triangle contient les trois points M, N, P ; il est à largeur constante $2c$.
   - le « triangle de Reuleaux » construit sur le triangle équilatéral MNP par la définition du 4) contient les trois points M, N, P ; il est à largeur constante $\dfrac{2}{\sqrt{3}}c$.
   - une analyse de la figure du 5) b) montre que le côté c' du triangle A'B'C' est fonction de celui de ABC, d, par la formule $c' = d\left(\sqrt{3}-1\right)$.
     Avec le triangle MNP de côté c dont on désigne par O le centre, on construit A, B, C sur les médiatrices de MNP – respectivement opposés à A', B', C' par rapport à O – de sorte que $OA = OB = OC = \dfrac{c}{\left(\sqrt{3}-1\right)\sqrt{3}} = \dfrac{c}{3-\sqrt{3}}$. Le « triangle de Reuleaux » déterminé par le triangle ABC contient les points M, N, P, il est à largeur constante $\dfrac{c}{\sqrt{3}-1}$.



   - Avec le triangle MNP de côté c dont on désigne par O le centre, on construit A, B, C sur les médiatrices de MNP respectivement opposés à M, N, P par rapport à O.
     On construit trois arcs de cercle de centres respectifs A, B, C passant par M, N, P et délimités par les droites supports de côtés de ABC (voir figure) ; puis trois arcs de cercle de centres respectifs A, B, C les joignant.
     La courbe déterminée par la réunion de ces six arcs passe par M, N, P est à largeur constante supérieure à c.



   - Avec le triangle MNP de côté c dont on désigne par O le centre, on choisit un point A tel que $OA = \dfrac{c}{3-\sqrt{3}}$; par rotation de A de centre O d'angle 120° on détermine le point B, puis par rotation identique sur B, le point C. Le « triangle de Reuleaux » déterminé par le triangle ABC contient les points M, N, P, il est à largeur constante $\dfrac{c}{\sqrt{3}-1}$.

Retour au sommaire

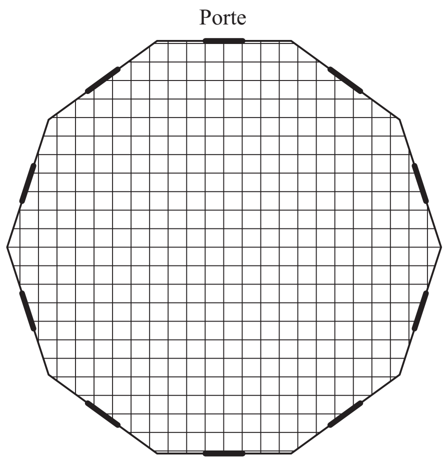
TOULOUSE

Troisième exercice

Séries autres que S

Peintures et gravures

Énoncé



Dans le salon en rotonde sont accrochés dix beaux tableaux à des clous équidistants les uns des autres : une gravure du port de Rouen (R), une nature morte de Paul Cézanne (Cz), une peinture de grand-père (GP), une gravure de Toulouse-Lautrec (TL), une peinture de la Tour Eiffel (TE), une peinture de Bernard Buffet (BB), une peinture de Paul Klee (K), une vieille carte du Monde gravée (CM), une gravure chinoise (Ch), une gravure japonaise (J).

Aujourd'hui, Maman propose de repenser la disposition des tableaux. Nous discutons donc de la meilleure façon de les accrocher ; il y a finalement six souhaits :

S1- *d'abord*, dit Maman, *gravures et peintures doivent être alternées.*

S2- *et puis*, dit Papa, *la gravure du port de Rouen ne doit surtout pas avoisiner la nature morte de Paul Cézanne ; ni la peinture de grand-père.*

S3- *je voudrais que la gravure de Toulouse-Lautrec et la peinture de la Tour Eiffel soient diamétralement opposées*, dit mon grand-oncle Arthur.

S4- *...que la peinture de Bernard Buffet soit à côté de la vieille carte du monde,* dit ma petite sœur, *mais que cette dernière soit elle-même voisine de la peinture de la tour Eiffel.*

S5- *la peinture du grand-père et la nature morte de Cézanne doivent encadrer la gravure chinoise*, demande mon petit frère.

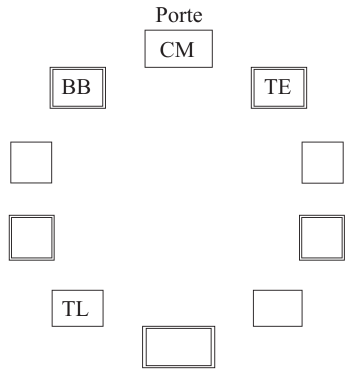
S6- *et moi*, dis-je enfin, *je souhaite simplement que le tableau de Bernard Buffet n'avoisine pas la gravure japonaise.*

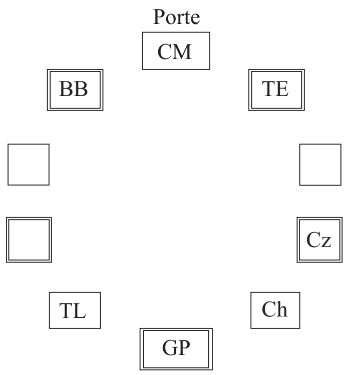
1. Par ailleurs Maman commence par placer la carte du Monde au dessus de la porte ; elle réussit finalement à accrocher tous les tableaux en faisant plaisir à tout le monde.
   a) Proposer une disposition satisfaisant les six souhaits.
   b) Y en a-t-il d'autres ? Si oui combien ?
2. Si c'est plutôt la peinture de Paul Klee que Maman avait choisi de placer au dessus de la porte, aurait-il été possible de disposer les tableaux ? Si oui, de combien de manières ?
3. Sans décider d'avance quel tableau est accroché au dessus de la porte, combien y a-t-il de dispositions possibles des tableaux respectant les six souhaits ?
4. a) Il semble que le nombre de tableaux s'intercalant entre la carte du Monde et la peinture de Paul Klee soit indépendant de la disposition des tableaux. Est-ce vrai ?
   b) Est-ce vrai pour la peinture de Paul Klee et la peinture de grand-père ?
      - le nombre de tableaux s'intercalant entre eux ne dépend pas de la disposition ;
      - le nombre de tableaux s'intercalant entre eux dépend de la disposition.

Éléments de solution

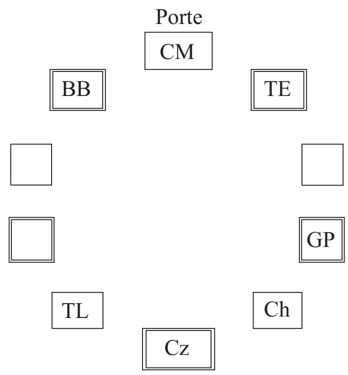
Les gravures (bordées d'un trait) alternent avec les peintures (bordées d'un double trait). De par le quatrième vœu, on place la carte (CM), la Tour Eiffel (TE), le Bernard Buffet (BB) à une symétrie près par rapport à l'axe de la porte (CM) ; il s'ensuit que le Toulouse-Lautrec est face à la Tour Eiffel.

Par ailleurs, le vœu sur la peinture du grand-père (GP), situe la gravure chinoise (Ch) entourée du Cézanne (Cz) et de celle-ci . . .une seule place pour (Ch), avec une permutation éventuelle pour les deux autres :

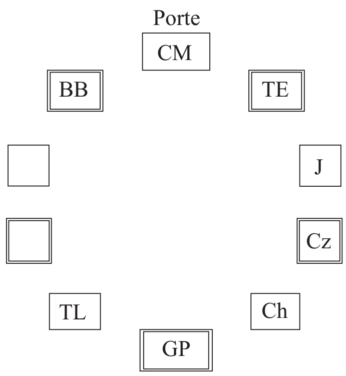




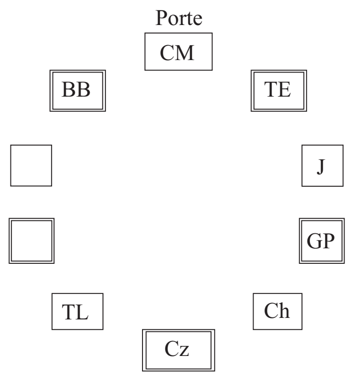
ou bien



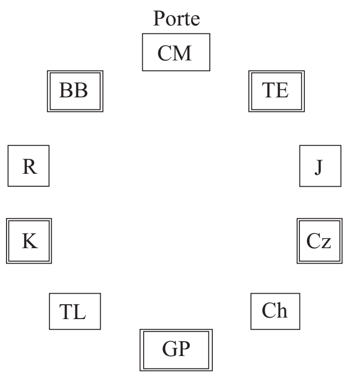
La gravure japonaise (J) n'a qu'une position possible dans chacun des cas :



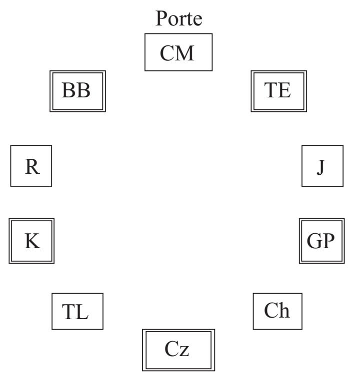
ou bien



On en déduit où sont nécessairement placés le Klee (K) et la gravure de Rouen (R) :

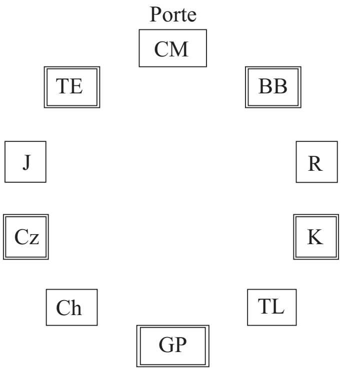


ou bien

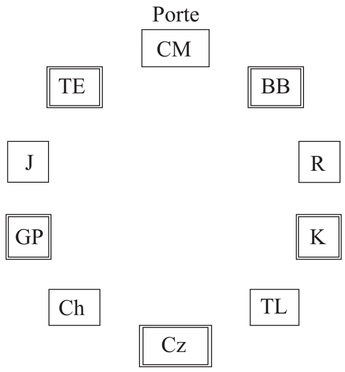


Ce qui, de la sorte, respecte le vœu de Papa !

1. a) et b) Il y a exactement quatre dispositions possibles : le Bernard Buffet et la Tour Eiffel peuvent permuter ; cela étant, pour chaque choix, il y a permutation possible du Cézanne et de la peinture de grand-père. C'est-à-dire en sus des deux données ci-dessus :



ou bien



2. De même, il suffit de faire tourner pour que le Paul Klee soit au-dessus de la porte.
3. Il y en a quatre pour chaque choix au-dessus de la porte, soit 40 en tout.
4. a) Un tableau donné étant au-dessus de la porte (exemplairement la carte du Monde), entre elle et le Klee, il y a toujours deux tableaux (au plus court) quelle que soit la disposition (les mêmes !) ; cela ne dépend pas de ce qui est placé au-dessus de la porte.

   b) Ce n'est pas vrai du Klee et de la peinture de grand-père (tantôt un, tantôt trois tableaux au plus court entre eux).

   c) Dans un choix au hasard de deux tableaux, 45 paires sont possibles.
   - pour 31 paires, le nombre de tableaux intercalés est indépendant,
   - pour 14 paires, ce nombre est dépendant.

     Il est plus probable que le nombre de tableaux soit indépendant.

	CM	BB	R	K	TL	Cz	Ch	GP	J	TE
CM		Ind	Ind	Ind	Ind	Dep	Ind	Dep	Ind	Ind
BB			Ind	Ind	Ind	Dep	Ind	Dep	Ind	Ind
R				Ind	Ind	Dep	Ind	Dep	Ind	Ind
K					Ind	Dep	Ind	Dep	Ind	Ind
TL						Dep	Ind	Dep	Ind	Ind
Cz							Ind	Ind	Dep	Dep
Ch								Ind	Ind	Ind
GP									Dep	Dep
J										Ind

Retour au sommaire

VERSAILLES

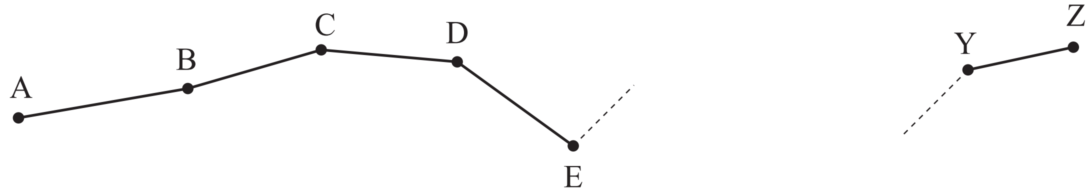
Premier exercice

Toutes séries

Inauguration

Énoncé

Olympiade-Ville va bientôt avoir sa ligne de métro. La longueur de trois sections (*) consécutives devra toujours être inférieure ou égale à 16 km et la longueur de cinq sections consécutives devra toujours être supérieure ou égale à 27 km.

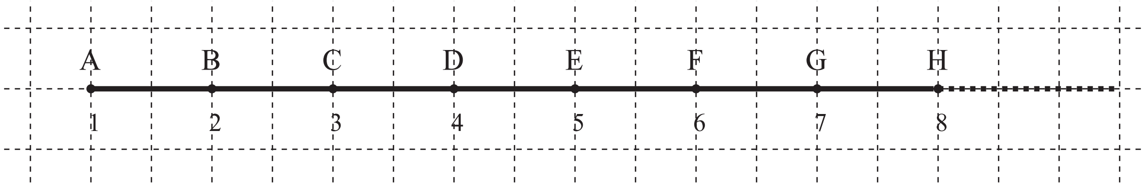


Combien cette ligne a-t-elle de stations ?

(*) *Une section est un intervalle entre deux stations de métro.*

Éléments de solution

Supposons que la ligne possède 8 stations ou plus. Représentons ces stations comme des points d'un axe gradué (seules les distances comptent).



Pour aller de A à F, il y a 5 sections. La distance totale est supérieure à 27, mais la distance de C à F est inférieure à 16. La distance de A à C est donc supérieure à 11. On peut aussi dire que la distance de D à F est supérieure à 11.

Pour aller de C à H, l'analyse est la même. On peut affirmer que la distance de C à E est supérieure à 11, et aussi que la distance de F à H est supérieure à 11.

Pour aller de B à G, l'analyse est la même. On peut affirmer que la distance de B à D est supérieure à 11, et aussi que la distance de E à G est supérieure à 11.

Pour aller de A à G, on parcourt deux séries de trois sections : la distance est inférieure à 32.

Pour aller de A à G, on va de A à C puis de C à E, puis de E à G. La distance est supérieure à 33.

Contradiction.
Il y a donc moins de 8 stations.

La distribution 5-6-5-5-6-5 offre un exemple de ligne à 7 stations répondant aux conditions imposées. 6 stations est également un effectif possible.

Retour au sommaire

VERSAILLES

Deuxième exercice

Série S

Mille et une lampes

Énoncé

Soit n un entier supérieur ou égal à 1.

Sur un cercle, on dispose n lampes, régulièrement espacées, entre lesquelles sont disposés n commutateurs. Chaque commutateur a deux positions, « I » et « O ». Toute lampe est éteinte si elle se trouve entre deux commutateurs de même position, allumée si elle se trouve entre deux commutateurs placés dans des positions contraires.

1. Si $n = 8$, est-il possible que toutes les lampes soient allumées ?
   Si $n = 5$, est-il possible que toutes les lampes soient allumées ?
2. Si $n = 2012$, déterminer le nombre maximum de lampes qui peuvent être allumées, et donner les positions des commutateurs correspondants.
   Même question avec $n = 2011$.
3. Si $n = 2012$, est-il possible que la moitié exactement des lampes soit allumées ?
   Même question avec $n = 10$.
4. Dans cette question, on suppose que $n = 2012$.
   a) Est-il possible d'allumer exactement 4 lampes et que celles-ci se trouvent aux sommets d'un carré ?
   b) Est-il possible d'allumer exactement 8 lampes et que celles-ci se trouvent aux sommets d'un hexagone ?
   c) Est-il possible d'allumer exactement 503 lampes et que celles-ci se trouvent aux sommets d'un polygone régulier à 503 côtés ?

Éléments de solution

Un problème de parité

Dans les conditions indiquées par l'énoncé, le nombre de lampes allumées est égal au nombre de changements de position observés lorsqu'on suit la liste des $n + 1$ interrupteurs, du numéro 1 au numéro n puis au numéro 1. Comme les deux bouts de la chaîne sont dans la même position, le nombre de changements de position est pair. Le nombre de lampes allumées ne saurait donc qu'être pair.

Des problèmes de répartition

Question 2, cas $n = 2011$
On peut allumer 2 010 lampes. Les 2 011 interrupteurs qu'elles séparent sont dans des positions alternativement ouverte et fermée. Aux deux bouts de la chaîne, les interrupteurs sont, par exemple , en position O. Ils sont situés de part et d'autre de la 2 011$^{\text{ème}}$ lampe, éteinte.

Question 3, cas $n = 2\,012$
On allume 1 006 lampes consécutives. Les 1 007 interrupteurs qu'elles séparent sont dans des positions alternativement ouverte et fermée. Aux deux bouts de la chaîne, les interrupteurs sont, par exemple, en position O.
Si tous les autres interrupteurs sont eux aussi en position O, il n'y a que 1 006 lampes allumées.

Question 4. *a.*
Entre deux lampes allumées consécutives, il y a 503 interrupteurs dans la même position et 502 lampes

éteintes. Ce bloc joue le rôle d'un unique interrupteur dans le cas $n = 4$. Comme 4 est pair, allumer seulement quatre lampes aux sommets d'un carré est possible. Cet argument – analogie entre un bloc de lampes éteintes séparées par des interrupteurs tous dans la même position – aurait pu servir pour 503. . .si 503 était pair.

Question 4. *b*.
Là, c'est un problème de divisibilité. 2 012 n'est pas multiple de 8.

Retour au sommaire

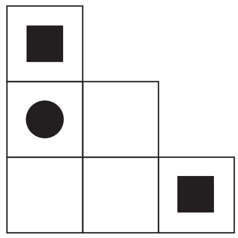
VERSAILLES

Troisième exercice

Séries autres que S

Tableaux triangulaires

Énoncé



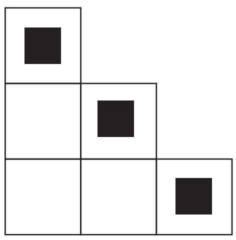
Un **tableau alternant de taille 3** (appelé dans la suite « tableau A3 ») est un tableau de la forme illustrée ci-contre, dont les cases sont soit vides soit occupées par un jeton carré ou par un jeton rond, en respectant la consigne suivante :

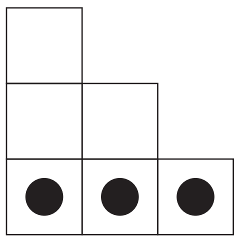
- A gauche d'un jeton carré, toutes les cases sont vides ;
- Au dessous d'un jeton rond, toutes les cases sont vides.

1. Donner un exemple de tableau A3 contenant 3 jetons carrés. Donner un exemple de tableau A3 contenant 3 jetons ronds.
2. Combien peut-il y avoir de jetons carrés dans un tableau A3 ?
3. Est-il possible que toutes les cases d'un tableau A3 soient occupées ? Combien de cases peuvent-elles être occupées, au maximum ? Donner un exemple.
4. Un **tableau alternant de taille** $\boldsymbol{n}$ (appelé « tableau A_n ») est constitué de la même manière et avec les mêmes règles sur une base de n cases.
   a) Représenter un tableau A5.
   b) Combien peut-il y avoir de jetons carrés dans un tableau A5 ?
   c) Combien de cases d'un tableau A_n peuvent-elles être occupées, au maximum ?

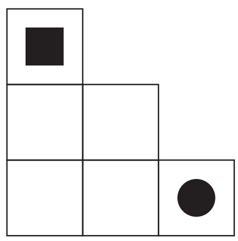
Éléments de solution

1. Exemples



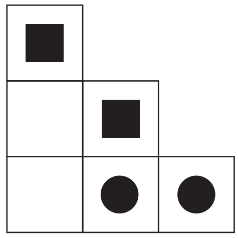


2. Un jeton carré est seul sur sa ligne. Le maximum est donc 3.

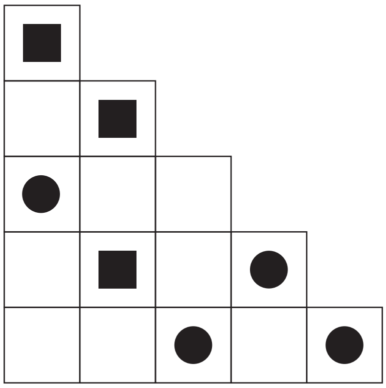


3. Le maximum de jetons ronds est également 3, il ne peut y en avoir plus d'un par colonne. Mais deux cases n'appartiennent, l'une qu'à une seule ligne, l'autre qu'à une seule colonne. Tout remplissage optimal débute donc par :

Le remplissage optimal de la deuxième colonne conduit au tableau à droite, mais alors il n'y a plus qu'une case utilisable dans la première.
5 jetons est donc le maximum pour un tableau A3.



4. Voici un tableau A5 :



Un tableau A5 possède au maximum un jeton carré par ligne, soit 5. De même, il possède au maximum un jeton rond par colonne, soit 5. On peut optimiser le remplissage, comme précédemment, en installant un jeton rond par colonne, et les jetons carrés au-dessus, à raison de pas plus d'un par ligne. On peut aussi commencer par des jetons carrés...
Dans tous les cas, il y aura deux jetons par colonne sauf dans la colonne qui n'a qu'une case, ou deux jetons par ligne, sauf sur la ligne qui n'a qu'une case. Le remplissage optimal d'un tableau An occupe donc $2n-1$ cases.

Retour au sommaire