Association des Professeurs
de Mathématiques de
l'Enseignement Public

LES OLYMPIADES ACADÉMIQUES DE MATHÉMATIQUES 2013

Brochure APMEP n° 1000
978-2-912846-76-1

Coordination : Paul-Louis HENNEQUIN
Mise en forme : Jean BARBIER

LES OLYMPIADES ACADÉMIQUES DE MATHÉMATIQUES 2013

TABLEAU SYNTHÉTIQUE

Le tableau des pages suivantes vous permet de choisir un exercice et les éléments de sa solution en fonction de quatre critères.

- La première colonne donne la liste des exercices et l'académie concernée
- Les douze suivantes précisent le (ou les) domaine(s) mathématique(s) impliqué(s)
- La suivante (Nombre de questions) offre le choix entre les énoncés brefs laissant une large marge d'initiative dans la recherche et ceux beaucoup plus longs qui font gravir marche par marche lŠescalier qui conduit à la solution.
- La quinzième donne la longueur d'une solution détaillée évaluée en nombre de demi-pages
- L'avant–dernière précise les sections concernées, un même thème d'exercice pouvant être proposé à deux niveaux
- La dernière enfin donne le titre de chaque énoncé ;nous avons rajouté cette colonne car ces titres sont empreints de fantaisie et permettent de retrouver immédiatement des thèmes classiques tels que : nombres Harshad, billard, nombres parfaits, triplets pythagoriciens, dominos, algorithme de Prabekhar, tours de Hanoï...

Par rapport aux années précédentes, on notera l'augmentation significative des colonnes algorithmique et probabilités aux dépens de la colonne statistique-pourcentages et en liaison avec l'évolution des programmes

Pour accéder directement aux articles qui vous intéressent, vous pouvez cliquer sur le début de la ligne des exercices cherchés. Par exemple pour accéder à l'exercice Paris 1, cliquez sur la case Paris 1.

OLYMPIADES DE MATHEMATIQUES 2013
TABLEAU SYNTHETIQUE

2013	algorithmique	arithmétique	numération	dénombrement	logique	inégalités	suites	équationq-fonctions	géométrie plane	géométrie espace	probablités	statistique pourcentages	nombre de questions	longueur solution	sections	titre
National 1			X				X						14	2	TOUTES	Nombres Harshad
National 2										X			5	10	TOUTES	Billard rectangulaire
Aix-Marseille 1		X					X						8	2	S	Fibonacci-Diophante
Aix-Marseille 2						X			X				7	1	S	L'aiguille de Kakeya
Aix-Marseille 3	X												3	1	Autres	Deux énigmes
Aix-Marseille 4	X												5	1	Autres	Marche à 29
Amiens 1		X		X			X						7	2	TOUTES	Le compteur
Amiens 2													3	2	S	La tente improvisée
Amiens 3								X		X			1	1	STI2D/STDZA/STL	Le radeau de Robinson
Amiens 4		X											1	3	Autres	Les âges dans la famille Martin
Besançon 1		X											18	4	TOUTES	Nombres parfaits
Besançon 2				X							X	X	21	3	TOUTES	La collection de figurines
Bordeaux 1			X					X	X				5	2	S	La somme des chiffres
Bordeaux 2								X	X				7	2	S	Des triangles rectangles de périmètre 1
Bordeaux 3	X							X					2	2	Autres	Un carré tronqué
Bordeaux 4				X		X							7	1	Autres	Avec Dédé
Caen 1								X		X			4	3	TOUTES	Les parallèles terrestres
Caen 2	X									X			8	2	S	L'avion
Caen 3		X		X			X						10	2	Autres	Passons à la suite
Clermont 1	X								X				11	5	TOUTES	Un peu de vexillologie
Clermont 2									X		X		8	3	S	Les cibles
Clermont 3								X		X			10	3	Autres	Feu d'artifice
Corse 1		X				X	X						20	3	TOUTES	Les tandems

2013	algorithmique	arithmétique	numération	dénombrement	logique	inégalités	suites	équations-fonctions	géométrie plane	géométrie espace	probablités	statistique pourcentages	nombre de questions	longueur solution	sections	titre
Corse 2								X	X				12	4	TOUTES	Géométrie et chirurgie
Créteil 1			X	X									7	2	TOUTES	Les nombres merveilleux
Créteil 2								X	X				7	3	S	Double moitié
Créteil 3		X					X						6	1	Autres	Sommons les doublons
Dijon 1		X		X			X						6	2	TOUTES	Autour d'un polygone
Dijon 2									X				6	1	S	Les trois cercles et l'ogive
Dijon 3	X		X										11	1	Autres	Le tour de magie
Grenoble 1				X							X		6	2	TOUTES	L'art de bien bluffer
Grenoble 2								X	X				8	3	S, STL	Le meuble pour téléviseur
Grenoble 3						X			X				9	2	Autres	Distances sur un réseau ferroviaire
Guadeloupe 1	X			X									1	1	TOUTES	Jeux interdits
Guadeloupe 2								X	X				2	1	TOUTES	Géométrie du temps qui passe
Guyane 1		X					X						11	6	TOUTES	Nombres beaucarrés
Guyane 2				X		X	X						10	10	TOUTES	Longchemin
Lille 1				X	X								17	10	TOUTES	A la recherche d'une dame
Lille 2							X	X	X				12	5	S	Carrés et parabole
Lille 3	X	X									X		13	7	Autres	Un carré remarquable
Limoges 1	X	X						X					16	2	TOUTES	Triplets pythagoriciens
Limoges 2				X			X			X			9	2	S	Coloriage du plan
Limoges 3	X			X			X						11	2	Autres	Lights out
Lyon 1									X				4	3	TOUTES	Pousser les bords
Lyon 2		X											10	3	TOUTES	Sommes d'entiers consécutifs
Martinique et AEFE Amérique 1											X		6	2	TOUTES	Histoire de parapluies
Martinique et AEFE Amérique 2		X		X									4	2	TOUTES	Décompositions
Martinique et AEFE Amérique 3							X		X				5	2	TOUTES	Cercles tangents à une même droite
Martinique et AEFE Amérique 4				X			X						12	3	TOUTES	Paul et les « isomurs »
Mayotte 1				X						X			6	1	TOUTES	Les dominos

2013	algorithmique	arithmétique	numération	dénombrement	logique	inégalités	suites	Equat;-Fonctions	géométrie plane	géométrie espace	probablités	statistique pourcentages	nombre de questions	longueur solution	sections	titre
Montpellier-Maroc1	X							X	X				9	2	S	Un trapèze
Montpellier-Maroc 2									X				1	1	S	Trois cercles
Montpellier-Maroc 3									X				5	5	Autres	Le gateau troué
Montpellier-Maroc 4								X					8	4	Autres	Embouteillages
Nancy-Metz 1	X			X							X		8	3	TOUTES	Le magicien gagnera très probablement
Nancy-Metz 2		X							X				7	1	TOUTES	Triangles entiers à hauteurs entières
Nantes-AEFE Afrique 1		X				X							11	4	S	Une calculatrice spéciale
Nantes-AEFE Afrique 2									X				8	4	S	Pentagone, trapèze et triangle
Nantes-AEFE Afrique 3		X				X							9	3	Autres	La calculatrice revisitée
Nantes -AEFE Afrique 4				X		X			X	X			9	6	Autres	Parcours d'un dé
Nice 1	X			X					X				9	2	S	Les lampadaires
Nice 2		X							X		X		9	2	S	Les triangles olympiques
Nice 3	X			X									6	1	Autres	Le château de cartes
Nice 4	X			X		X							7	1	Autres	Les sacs de billes
Orléans-Tours 1								X		X			7	2	TOUTES	Fourmidables
Orléans-Tours 2		X							X				10	4	TOUTES	Tourner en carrés
Paris 1										X	X		3	1	TOUTES	Dés tetraédriques
Paris 2	X	X					X						12	3	TOUTES	Algorithme de Prabekhar
Poitiers 1	X	X							X		X		11	6	TOUTES	Les triplets pythagoriciens
Poitiers 2	X	X							X		X		10	2	S	Sur un échiquier
Poitiers 3		X						X					9	1	Autres	Le casse-tête électronique
Polynésie 1								X	X		X		5	2	TOUTES	Jeu de fléchettes
Polynésie 2						X			X				10	2	TOUTES	Gendarmes et voleurs
Reims 1	X	X						X					7	2	TOUTES	Les nombres fâchés
Reims 2	X							X					5	3	S	Algorithme
Reims 3						X							3	1	Autres	Quadrilatères
Rennes 1			X	X			X						11	4	TOUTES	L'afficheur

2013

2013	algorithmique	arithmétique	numération	dénombrement	logique	inégalités	suites	équations-fonctions	géométrie plane	géométrie espace	probablités	statistique pourcentages	nombre de questions	longueur solution	sections	titre
Rennes 2								X					9	2	S, STI	Le théorème de Pythagore revisité
Rennes 3							X						2	2	Autres	Les oies sauvages
Réunion 1 et Mayotte 2	X								X		X		10	3	S	Marche aléatoire
Réunion 2									X				4	2	S	Demi-cercles
Réunion 3				X									4	1	Autres	Sorties randonnées
Réunion 4 et Mayotte 3				X			X						5	2	Autres	Tours de Hanoï
Rouen AEFE Afrique occidentale 1													6	1	TOUTES	Les osselets
Rouen AEFE Afrique occidentale 2													7	2	S, STI 2D	Lancer de fléchettes
Rouen AEFE Afrique occidentale 3													6	1	Autres	Algorithme glouton,
Strasbourg 1				X							X		4	1	S	Hélène et Helene
Strasbourg 2		X		X			X						6	1	S	Produit plus un
Strasbourg 3				X							X		3	1	Autres	Marie
Strasbourg 4												X	1	1	Autres	Le baril
Toulouse AEFE Ibérique 1		X		X									7	2	S	Vous avez la monnaie, s'il vous plaît ?
Toulouse AEFE Ibérique 2	X									X	X		12	2	S	Réseau HAN hémisphérique
Toulouse AEFE Ibérique 3				X	X								3	1	Autres	Les bonbons à l'anis
Toulouse AEFE Ibérique 4	X								X	X			5	2	Autres	La pyramide
Versailles 1		X						X					1	1	S	La devinette de Clara
Versailles 2		X											7	3	S	Sommes de sommets
Versailles 3		X	X										1	1	ES,L, STAG, STD2A	Quand les carrés sont partis
Versailles 4		X	X										3	1	ES,L, STAG, STD2A	Les petits papiers
Versailles 5								X	X				1	1	Autres	Un triangle qui prend l'aire
Versailles 6		X						X					1	1	Autres	17 et 23 en leit motiv
TOTAL	23	30	7	28	2	11	18	23	31	12	14	2				

SUJET NATIONAL (Europe–Afrique–Asie)

Premier exercice

Toutes séries

Les nombres Harshad

Énoncé

Un entier naturel non nul est un nombre Harshad s'il est divisible par la somme de ses chiffres.
Par exemple, $n = 24$ est un nombre Harshad car la somme de ses chiffres est $2 + 4 = 6$, et 24 est bien divisible par 6.

1. a) Montrer que 364 est un nombre Harshad.
   b) Quel est le plus petit entier qui ne soit pas un nombre Harshad ?
2. a) Donner un nombre Harshad de 4 chiffres.
   b) Soit n un entier non nul. Donner un nombre Harshad de n chiffres.
3. a) Montrer que 110, 111, 112 forment une liste de trois nombres Harshad consécutifs.
   b) En insérant judicieusement le chiffre 0 dans l'écriture décimale des nombres précédents, construire une autre liste de trois nombres Harshad consécutifs.
   c) Justifier l'existence d'une infinité de listes de trois nombres Harshad consécutifs.
4. a) Soit $A = 30 \times 31 \times 32 \times 33$. Calculer la somme des chiffres de A.
   b) En déduire que 98 208 030, 98 208 031, 98 208 032 et 98 208 033 forment une liste de quatre nombres Harshad consécutifs.
   c) Justifier l'existence d'une infinité de listes de quatre nombres Harshad consécutifs.
5. a) En s'inspirant de la question 4, trouver une liste de cinq nombres Harshad consécutifs.
   b) Justifier l'existence d'une infinité de listes de cinq nombres Harshad consécutifs.
6. a) Soit i un chiffre compris entre 0 et 8.
   Soit p un entier dont le chiffre des dizaines est i et le chiffre des unités est 9.
   Montrer que soit la somme des chiffres du nombre p soit celle de $p + 2$ est un nombre pair.
   En déduire que p et $p + 2$ ne peuvent pas être tous les deux des nombres Harshad.
   b) Existe-t-il une liste de 22 nombres Harshad consécutifs ?

Éléments de solution [1]

1. a) $3 + 6 + 4 = 13$ et $364 = 13 \times 28$ donc 364 est un nombre Harshad.
   b) 11 est le plus petit entier qui ne soit pas un nombre Harshad.
2. a) 1000 par exemple.
   b) 10^{n1} par exemple.
3. a) 110 est pair, 111 est divisible par 3 et 112 est divisible par 4 car 12 l'est. Donc 110, 111, 112 forment une liste de trois nombres Harshad consécutifs

1. Solution proposée par l'académie de Clermont-Ferrand

b) 1**0**10 ; 1**0**11 et 1**0**12 sont trois nombres Harshad consécutifs.

c) 1**0**. . . **0**10 ; 1**0**. . . **0**11 ; 1**0**. . . **0**12 sont trois nombres Harshad consécutifs (avec autant de **0** que l'on veut).

4. a) $A = 982\,080$. La somme de ses chiffres est 27.

b) $98\,208\,030 = 100 \times A + 30$ La somme de ses chiffres est $27 + 3 = 30$. Donc 98 205 030 est divisible par 30 puisque A l'est. Le raisonnement est identique pour les trois autres nombres.
Donc 98 208 030, 98 208 031, 98 208 032 et 98 208 033 forment une liste de quatre nombres Harshad consécutifs.

c) 98208**0**. . . **0**30, 98208**0**. . . **0**31, 98208**0**. . . **0**32, 98208**0**. . . **0**33 forment une liste de quatre nombres Harshad consécutifs.

5. a) $B = A \times 34 = 33\ 390\ 720$. La somme de ses chiffres est 27.
Alors les cinq nombres 3 339 072 030 ; 3 339 072 031 ; 3 339 072 032 ; 3 339 072 033 ; 3 339 072 034 forment une liste de cinq nombres Harshad consécutifs. (raisonnement analogue à celui de la question 4.b)).

b) En insérant autant de **0** que l'on veut dans l'écriture décimale des nombres précédents, on obtient une infinité de de listes de cinq nombres Harshad consécutifs, telles que : 33 390 72**0**. . . **0**30, 33 390 72**0**. . . **0**31, 33 390 72**0**. . . **0**32, 33 390 72**0**. . . **0**33, 33 390 72**0**. . . **0**34.

6. a) Le chiffre des unités de $p + 2$ est 1, celui des dizaines est $i + 1$ et les autres son,t ceux de p.
Si l'on note $s(p)$ la somme des chiffres de p, il vient : $s(p+2) = s(p) - i - 9 + 1 + (i+1) = s(p) - 7$.
Donc $s(p)$ et $s(p + 2)$ sont de parités différentes.
Or p et $p + 2$ sont tous les deux impairs donc non divisibles par 2.
L'un de ces deux nombres ayant une somme de chiffres paire, il ne peut être un nombre Harshad.

b) D'après la question 6.a), les couples de terminaisons incompatibles sont : 09-11 ; 19-21 ; 29-31. . . ; 79-8 ; 89-91.
La plus longue série possible évitant ces couples est $90 - 91 - 92 - \cdots - 99 - 00 - 01 - \cdots 08 - 09 - 10$
. Elle a une longueur de 21. Il existe donc au maximum 21 nombres Harshad consécutifs.
Il n'existe pas de liste de 22 nombre Harshad consécutifs.

Remarque :le théorème de Grundman ramène ce nombre maximum à 20 (démonstration plus difficile).
Grundman a montré l'existence d'une telle liste de 20 Harshad consécutifs ; les nombres de cette liste ont 44 363 342 786 chiffres. . .

RETOUR AU SOMMAIRE

SUJET NATIONAL (Europe–Afrique–Asie)

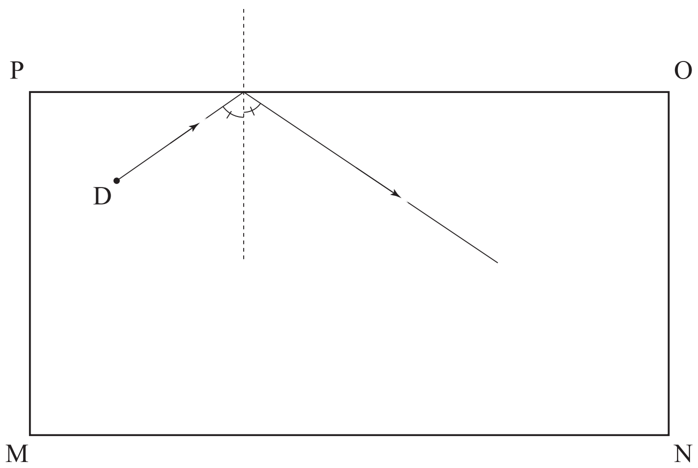
Deuxième exercice

Toutes séries

Billard rectangulaire

Énoncé

On considère un billard de forme rectangulaire, de longueur 300 cm et de largeur 160 cm dont les boules sont assimilées à des points.
Entre deux rebonds toutes les trajectoires sont rectilignes.
Lorsque la boule atteint l'un des bords (rails) du billard, elle y rebondit suivant les règles de la physique des chocs élastiques : l'angle d'incidence $\widehat{i}$ étant égal à l'angle de réflexion $\widehat{r}$, comme sur la figure ci-dessous ($\widehat{i} = \widehat{r}$).

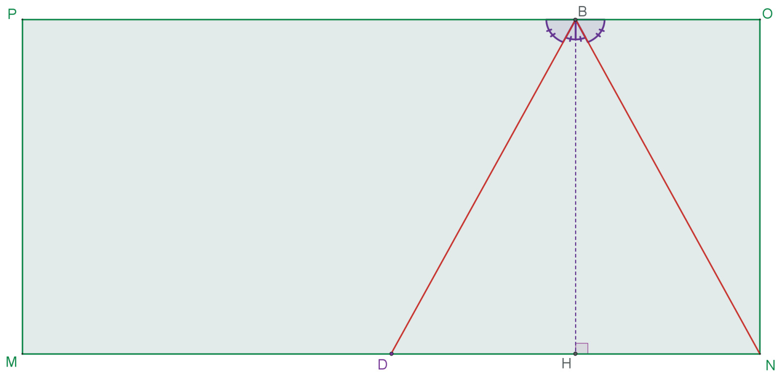


1. On frappe une boule placée au milieu du rail [MN].
   a) Quel point du rail [PO] peut-on viser pour que la boule atteigne le point N en une bande (c'est-à-dire avec un seul rebond) ?
   b) Quel point du rail [PO] peut-on viser pour que la boule atteigne en une bande le milieu du rail [NO] ?
   c) Quel point du rail [NO] peut-on viser pour que la boule revienne à son point de départ en trois bandes (c'est-à-dire après exactement trois rebonds) ?
2. On frappe une boule placée en un point quelconque du rail [MN].
   a) Est-il possible d'atteindre en une bande n'importe quelle boule placée sur la surface de jeu ?
   b) Est-il toujours possible de la frapper de sorte qu'elle revienne en trois bandes à son point initial ?

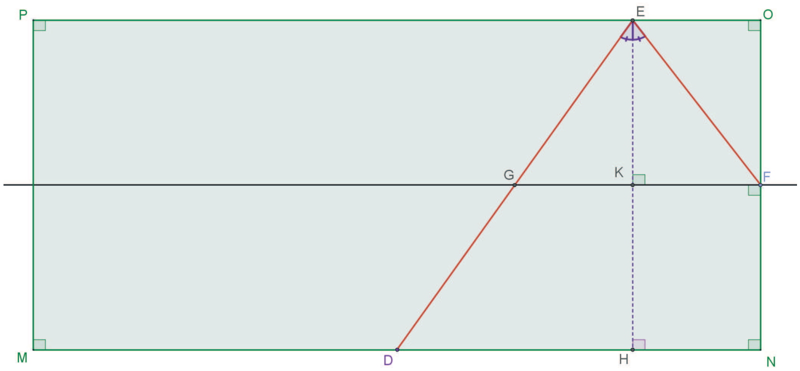
Éléments de solution [1]

1. La bille est placée initialement en D, milieu de [MN].

   a) Si on vise un point B du rail [MN] et que la bille atteint M, suivant les règles de la réflexion, la perpendiculaire à [PO] en B est la bissectrice de l'angle $\widehat{DBN}$ et confondue avec la hauteur issue de B dans le triangle ABN.
   Le triangle DBN est donc isocèle en B, et la droite (HN) est la médiatrice de [DN] ($DN = \dfrac{300}{2} = 150$ cm).
   Il faut donc viser le point B du segment [PO] situé à 75 cm de O ($DH = HN = BO$.)



   b) Quel point du rail [PQ] faut-il viser pour que la bille atteigne en une bande le milieu du rail [NO] ?



   Le point E étant le point du rail [PQ] visé, le point F étant le milieu du rail [NO] à atteindre, le point G étant le point d'intersection de la médiatrice du segment [NO] et du segment [DE], par les arguments précédents, on a cette fois :

   GEF isocèle en E et $GK = KF$.

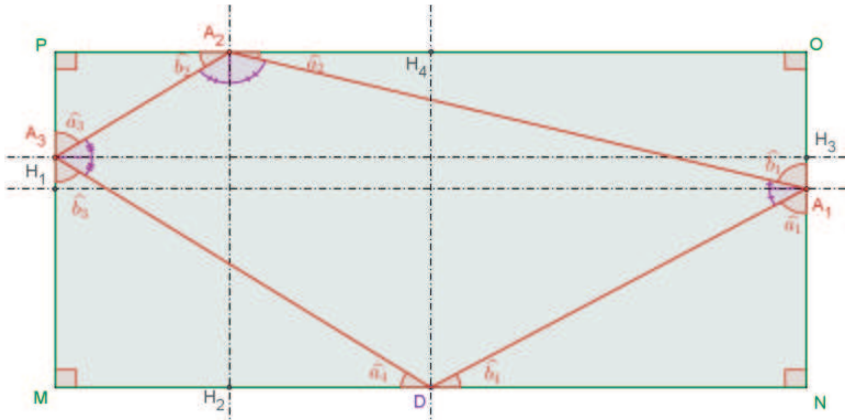
   Par ailleurs, dans le triangle DEH, G$\in$ [DE], K est le milieu de [EH], et (GK)//(DH), donc, par la réciproque du théorème des milieux, $DH = 2GK$.

   Enfin, $EO = HN = KF = GK$ et $DN = DH + HN$, donc : $EO = \dfrac{DN}{3} = \dfrac{150}{3} = 50$ cm.
   Il faut donc viser le point E du segment [PO] situé à 50 cm de O.

   c) Quel point du rail [NO] faut-il viser pour que la bille revienne à son point de départ en trois bandes (c'est-à-dire après avoir touché exactement trois rails) ?
   Il est assez aisé de deviner que la ligne brisée joignant les milieux des trois rails répond à la question, on viserait donc le milieu du rail [NO], puis de vérifier que cette trajectoire convient.
   On peut cependant montrer que c'est l'unique solution (la démonstration permettra ensuite de répondre immédiatement à la question 2.b.) :
   Considérons une hypothétique trajectoire à trois bandes dans laquelle la bille part de D, touche les rails en $A_1 \in$ [NO], $A_2 \in$ [OP], $A_3 \in$ [PM] puis revient en D.

1. Solution proposée par l'académie de Paris

• *Schéma*



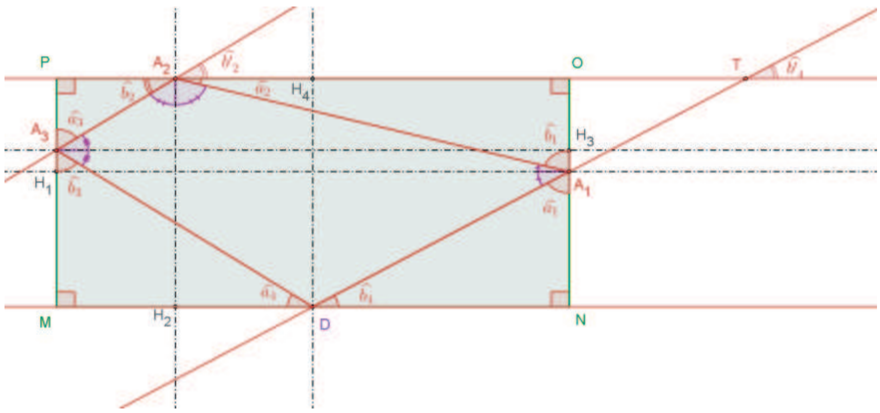
Les droites en traits tiretés sont des perpendiculaires aux rails.

Par les règles de la réflexion, tous les angles d'un même couple $(\widehat{a_i};\widehat{b_i})$ $(1 \leqslant i \leqslant 3)$ sont de même mesure car leurs complémentaires sont de même mesure.
Mais aussi en tant que couple d'angles aigus aux sommets d'un même triangle rectangle, chaque couples $(\widehat{b_i};\widehat{a_{i+1}})$ $(1 \leqslant i \leqslant 3)$ est aussi un couple d'angles complémentaires. Et il en est de même pour le couple $(\widehat{b_4};\widehat{a_1})$.
Il s'ensuit les égalités :

$$\widehat{b_4} = \widehat{a_2} = \widehat{b_2} = \widehat{a_4} \text{ et } \widehat{a_1} = \widehat{b_1} = \widehat{a_3} = \widehat{b_3}$$

Par ailleurs, en considérant les droites parallèles (PO) et (MN), et la droite (D,A$_1$) sécante à (MN) en D, et à (PO) en T, on a l'égalité des mesures des angles correspondants $\widehat{b'_4}$ et $\widehat{b_4}$.
Et en considérant les droites (PO) et (A$_2$ A$_3$), on a l'égalité des mesures des angles aux sommets $\widehat{b'_2}$ et $\widehat{b_2}$.
En combinant avec les égalités (1), il vient que $\widehat{b'_2}$ et $\widehat{b'_4}$, c'est-à-dire qu'on a une égalités des mesures des angles correspondants relativement aux droites (DA$_1$) et (A$_2$ A$_3$) coupées par la sécante (PO).
On en déduit que les côtés opposés [DA$_1$] et [A$_2$ A$_3$] dans le quadrilatère DA$_1$ A$_2$ A$_3$ sont parallèles.
On montre de même que les côtés opposés [A$_1$ A$_2$] et [A$_3$ D] sont parallèles.

La trajectoire fermée en trois bandes D,A$_1$,A$_2$,A$_3$ forme donc un parallélogramme.

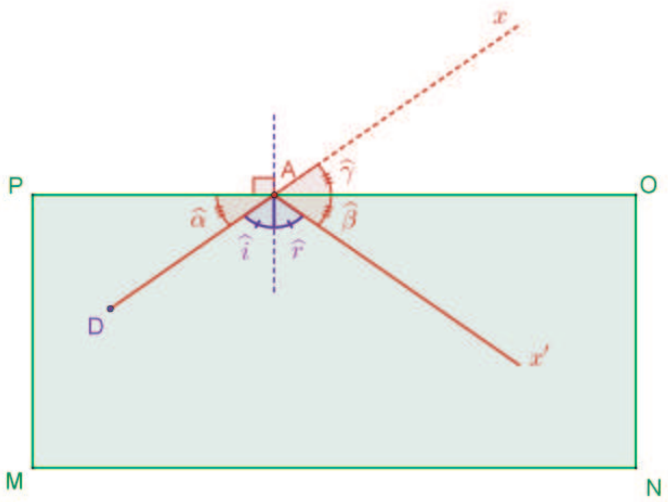


Le point D étant le milieu de [MN], et les angles $\widehat{a_4}$ et $\widehat{b_4}$ de même mesure, les triangles rectangles DNA$_1$ et DMA$_3$ sont symétriques par rapport à la médiatrice du rail [MN], ce qui donne l'égalité des longueurs DA_1 et DA_3. Le parallélogramme DA$_1$ A$_2$ A$_3$ est donc un losange. Les triangles DNA$_1$ et A$_1$OA$_2$ étant rectangles et semblables car $\widehat{a_1} = \widehat{b_1}$ et $\widehat{b_4} = \widehat{a_2}$ comme aussi leurs hypoténuses sont de même longueur ($DA_1 = A_1A_2$, côtés consécutifs du losange DA$_1$A$_2$A$_3$), les côtés NA$_1$ et A$_1$O sont de même longueur.

On en conclut que le point N est nécessairement le milieu du rail [NO], c'est le point qu'il faut viser.

Les résultats précédents assurent que suivant les règles de la réflexion, la bille retournera en D.

2. La construction de la trajectoire de la bille au-delà d'un rebond, conformément aux règles de la réflexion peut se faire par symétrie axiale par rapport au rail heurté.
Ainsi, si la bille part d'un point D et heurte un rail en A, sa poursuite de trajectoire (demi-droite [A,x") est le symétrique de la demi-droite [Ax), prolongement du segment [DA] :

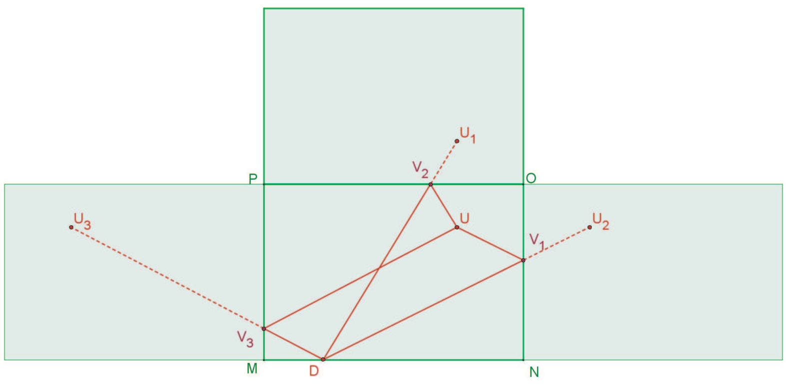


En effet, suivant les lois de la réflexion, les angles $\widehat{\alpha}$ et $\widehat{\beta}$, complémentaires respectifs des angles de même mesure $\widehat{i}$ et $\widehat{r}$, sont encore de même mesure, tandis que les angles $\widehat{\beta}$ et $\widehat{\gamma}$ sont de même mesure, par symétrie.

En cas de rebonds multiples, on peut, de la même façon, obtenir la trajectoire complète, en multipliant les symétries à partir du prolongement rectiligne de la trajectoire initiale.

Ceci permet de répondre aisément aux questions 1.a., 1.b. et 1.c. et plus encore aux questions 2.a. et 2.b.

a) On note D la position initiale de la bille, et U le point à atteindre.



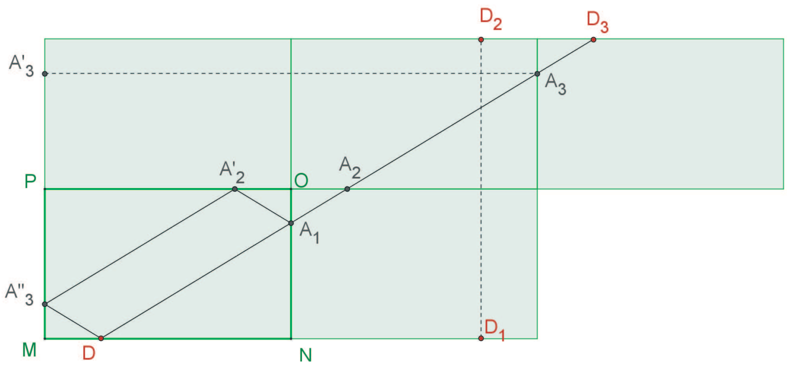
Sur la figure ci-dessus, où l'on a placé les points U_1, U_2, U_3 symétriques respectifs du point U à atteindre par rapport aux rails [NO], [OP] et [PM], atteindre le point U en une bande sur l'un de ces rails, revient à atteindre l'un des symétriques U_1, U_2, U_3 par une trajectoire rectiligne rencontrant le rail par rapport auquel le symétrique est construit.
Il y a sur cet exemple trois façons d'atteindre le point U.

S'il s'agit de savoir si l'on peut atteindre un point quelconque du billard, on cherchera s'il est possible d'atteindre un symétrique quelconque par une trajectoire rectiligne rencontrant la rail par rapport auquel est construit le symétrique.

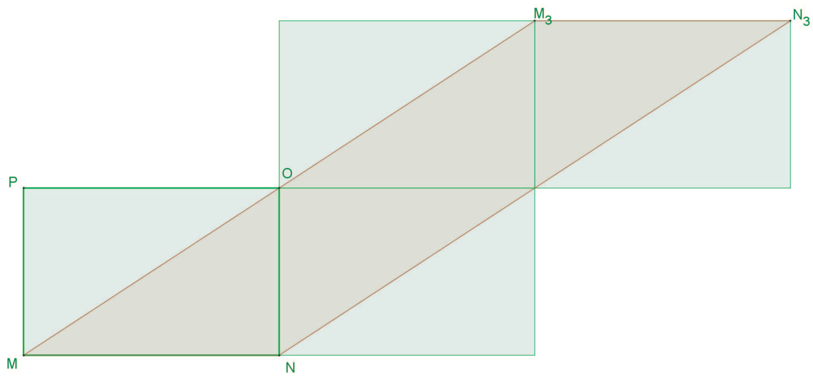
Où que soit situé le point D le long du rail [MN], il est possible d'atteindre tout point situé sur n'importe où à l'intérieur des trois rectangles figurant les symétriques de la surface de jeu par rapport à chacun des rails [NO], [OP] et [PM], il est donc possible d'atteindre tout point U de la surface de jeu en une bande, et ce de trois façons possibles toujours.

b) On peut répondre en reprenant les résultats du 1.c. (si l'on a cherché toutes les trajectoires possibles – on reprend le résultat selon lequel la trajectoire est nécessairement un parallélogramme ; si l'on a « intuité » qu'il s'agissait au 1.b. d'un losange, ce n'est pas possible). Ci-dessous, une autre méthode.

S'il s'agit de revenir au point initial en trois bandes, on cherchera des solutions en étudiant la possibilité de trajectoires rectilignes traversant trois symétriques de la surface jeu par rapport à des rails et atteignant l'image de D par la composée de ces trois symétries.
Ci-dessous la façon de revenir en un point D du rail [MO] en trois bandes avec rebonds en A_1, A'_2 et A''_3 :



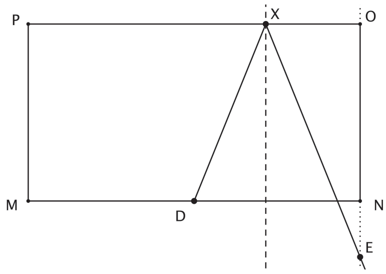
La même construction est possible à partir de tout point D situé le long du rail [MN], puisque le parallélogramme $NN_3\ MM_3$ est inclus dans la surface de jeu et les trois surfaces symétriques à considérer, et pour tout point D du rail [MN], le point D_3 construit comme au-dessus par composition de trois symétries est tel que le segment $[DD_3]$ est inclus dans ce parallélogramme :



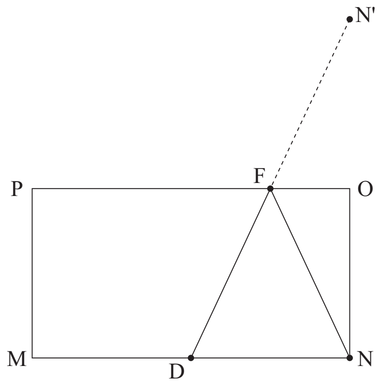
Éléments de solution [2]

1. a) D étant le milieu de [MN], X un point de [OP], impact sur la bande, après le rebond le point atteint se trouve nécessairement sur la demi droite symétrique de la demi-droite [XD) par rapport à la perpendiculaire en X à (OP). A la condition que la distance OX soit inférieure à ND, celle-ci coupe (NO) au point E.
La symétrie implique l'alignement des points D, X et du symétrique N' de N par rapport à (OP). E est N si et seulement si les points D, X, N' symétrique de N par rapport à (OP) sont alignés.

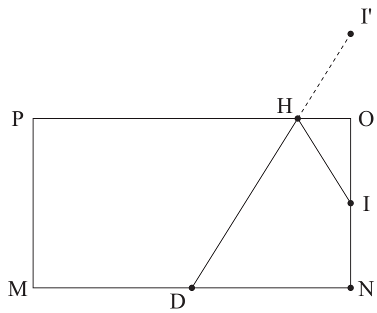
2. Solution proposée par l'académie de Toulouse



D'où une construction : placer N', déterminer F intersection de (DN') et (OP)...
N.B. : F est tel que $FO = \frac{1}{4}PO$; à partir de D un rebond entre F et O envoie sur [ON] ; un rebond entre G, milieu de [OP] et F envoie sur [MN].

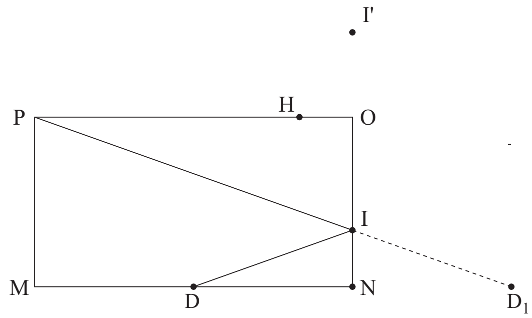


b) Semblablement... I étant milieu de [NO] et I' son symétrique... On détermine l'impact H sur [OP]. H est tel que $HO = \frac{1}{6}PO$.

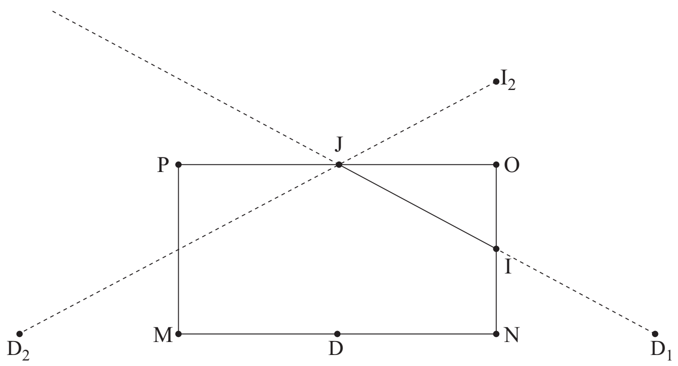


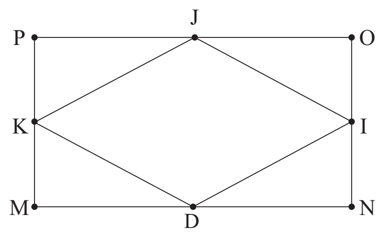
c) De D, avec un rebond en I sur [NO], on atteint un point de [OP] ou un point de [PM] ; la trajectoire après le rebond est déterminée par (D_1I) où D_1 est symétrique de D par rapport à (NO) :

- on atteint P lorsque I est tel que $NI = \frac{1}{3}NO$,
- on atteint [PM] lorsque $NI < \frac{1}{3}NO$, en ce cas les rebonds suivants ne peuvent renvoyer sur D,
- on atteint [OP] lorsque $NI > \frac{1}{3}NO$, en un point noté J.



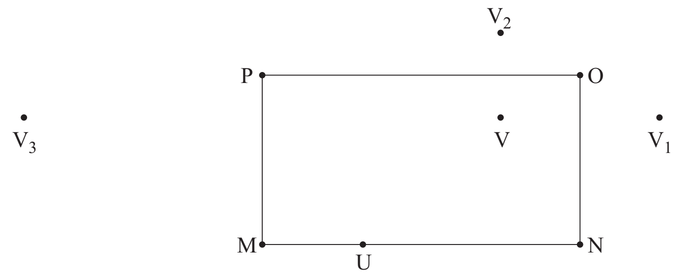
En ce dernier cas, la trajectoire après le rebond en J est déterminée par (I_2J) où I_2 est symétrique de I par rapport à (OP).
Le rebond sur [PM] renvoie sur le point D si et seulement si les trois points I_2, J et D_3 symétrique de D par rapport à (PM) sont alignés.
Nécessairement, de par la symétrie, la perpendiculaire en J à (OP) est axe de symétrie du triangle D_1JD_2. D étant milieu de [MN] comme de [D_1D_3], cet axe de symétrie est (DJ).
Il en résulte que J est milieu de [OP].
La condition est suffisante.
La trajectoire cherchée est unique et joint successivement D aux milieux de [NO], [OP], [PM].





De D, par les milieux I, J, K en trois impacts, on atteint D.

2. a) Étant donné un point U de [MN] et un point V du billard (sous entendu, bords exclus).
Pour atteindre V par un rebond sur [NO], il suffit de viser V_1 symétrique de V par rapport à (ON), c'est toujours possible.
Pour atteindre V par un rebond sur [OP], il suffit de viser V_2 symétrique de V par rapport à (OP), c'est toujours possible (sauf l'exception de U égal au projeté de V sur [MN], on atteint V avant le rebond. . .).
Pour atteindre V par un rebond sur [NO], il suffit de viser V_3 symétrique de V par rapport à (PM), c'est toujours possible.

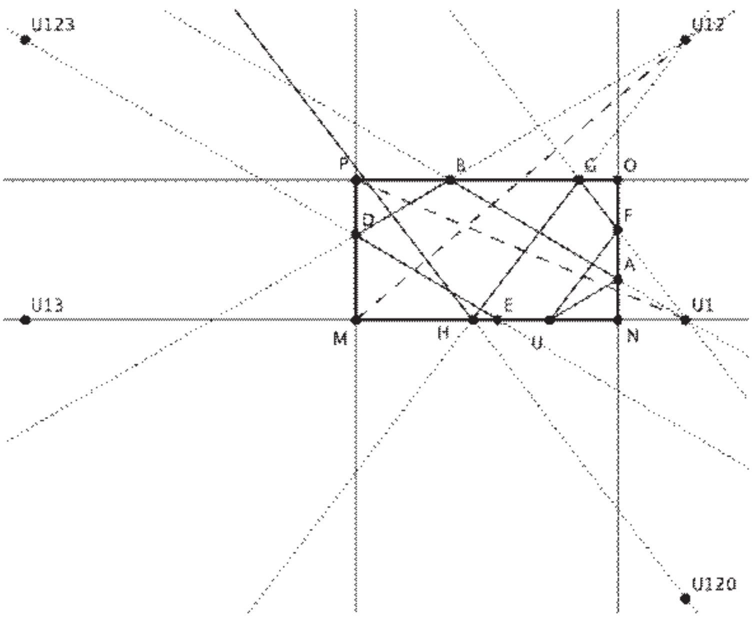


b) Soit U sur [MN], on exclut des rebonds aux sommets du rectangle.
Le premier rebond peut être sur [NO] (cas 1), sur [OP] (cas 2), sur [PM] (cas 3).
Une symétrie d'axe la médiatrice de [MN] associe à toute trajectoire issue dŠun point de [MN] de premier rebond sur [NO] une trajectoire issue d'un point de [MN] de premier rebond sur [PM] et inversement. Le cas 3 est semblable au cas 1.

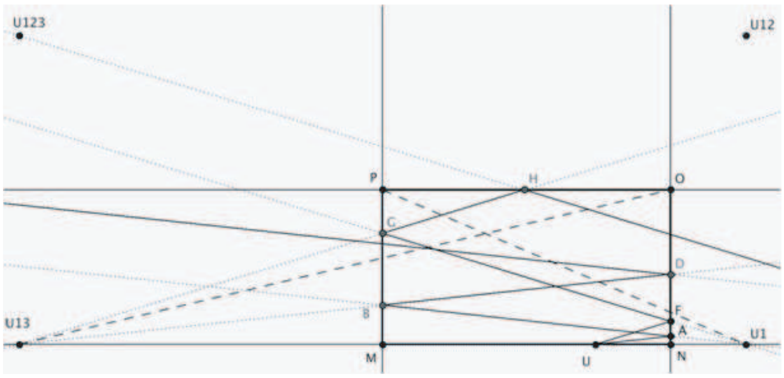
Cas 1 :
Le premier rebond dévie la trajectoire selon une symétrie par rapport à (NO), après ce rebond, elle est portée par une droite passant par U1 symétrique de U par rapport à (NO) :

<table>
<tr><td colspan="2">- ou bien le deuxième rebond a lieu sur [OP]. Soit U12 le symétrique de U1 par rapport à (OP) ; ce point détermine la trajectoire après le deuxième rebond.</td><td colspan="2">ou bien le deuxième rebond lieu sur [PM]. Soit U13 le symétrique de U1 par rapport à (PM) ; ce point détermine la trajectoire après le deuxième rebond</td></tr>
<tr><td>- ou bien le troisième rebond a lieu sur [PM]. Soit U123 le symétrique de U12 par rapport à (MP), ce point détermine la trajectoire après le troisième rebond.</td><td>- ou bien le troisième rebond a lieu sur [MN]. Soit U120 le symétrique de U12 par rapport à (MN), ce point détermine la trajectoire après le troisième rebond</td><td>- ou bien le troisième rebond a lieu sur [OP]. Soit U132 le symétrique de U13 par rapport à (0P), ce point détermine la trajectoire après le troisième rebond</td><td>- ou bien le troisième rebond a lieu sur [ON]. Soit U131 le symétrique de U13 par rapport à (ON), ce point détermine la trajectoire après le troisième rebond</td></tr>
</table>

De la sorte, deux exemples de trajectoires (UABDE et UFGH) d'impact sur [NO], [OP], puis sur [PM] ou [MN] :

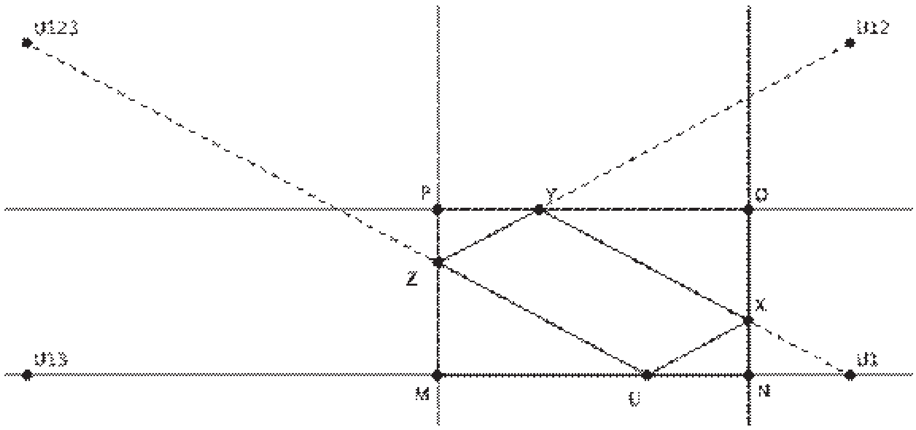


Puis, deux exemples de trajectoires (UABD et UFGH) d'impact sur [NO], [MP], puis sur [NO] ou [OP] :



Des quatre situations possibles pour la trajectoire, avec un premier impact sur [NO], une seule est susceptible de l'envoyer vers [MN] après le troisième rebond : en ce cas avec deuxième rebond sur [OP], troisième sur [MP].
De là une construction :

- le troisième impact Z est donné par l'intersection de [U123U] et [MP], le deuxième Y par celle de [ZU12], le premier X par celle de [U1Y].
- cette construction est possible quel que soit le point U.



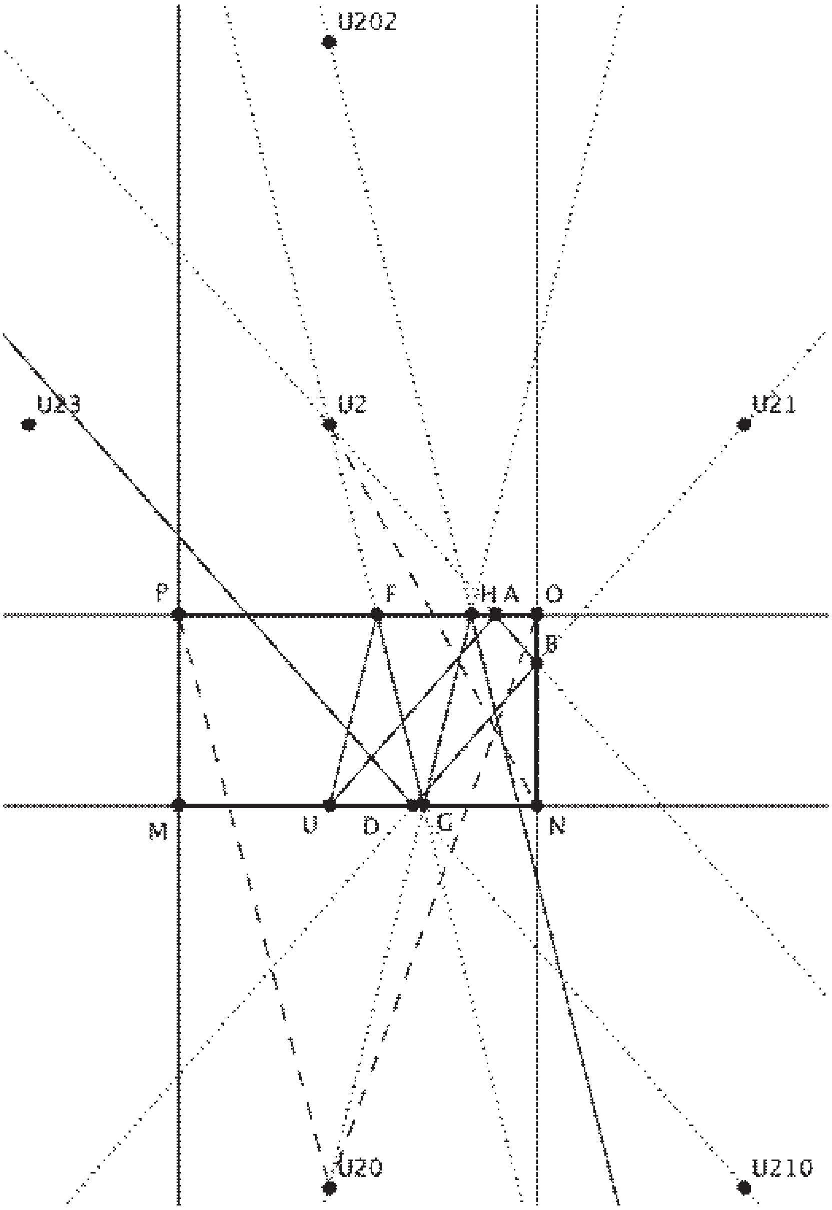
Cas 2 ;
Le premier rebond a lieu sur [OP] Ĕ
Commençons par un cas spécifique : de U viser perpendiculairement à (OP) renvoie sur U après un rebond

- si on est physicien, on admettra peu qu'il faille poursuivre par deux rebonds semblables Ĕ
- si on est mathématicien, cela peut éventuellement se concevoir, tout nombre impair de rebonds renvoie sur U ; par exemple trois.

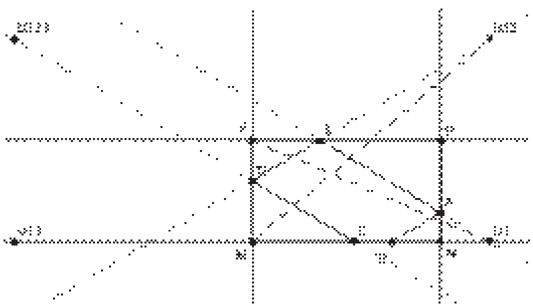
Ce cas étant désormais, mis de côté… Le premier rebond dévie la trajectoire selon une symétrie par rapport à (OP), après ce rebond, elle est portée par une droite passant par U2 symétrique de U par rapport à (OP) :

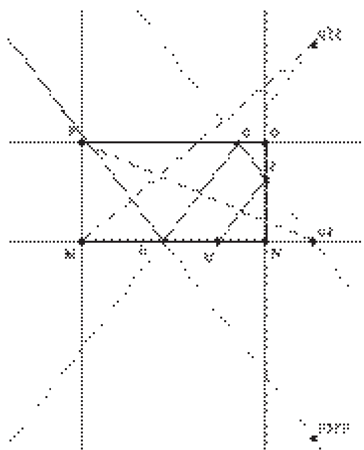
- ou bien le deuxième rebond a lieu sur [NO]. Soit U21 le symétrique de U2 par rapport à (NO) ; ce point détermine la trajectoire après le deuxième rebond. - le troisième rebond a lieu sur[MN]	- ou bien le deuxième rebond lieu sur [MN] (U est déjà exclu). Soit U20 le symétrique de U2 par rapport à (MN) ; ce point détermine la trajectoire après le deuxième rebond. - le troisième rebond peut avoir lieu sur [NO], [OP] ou bien [PM].	- ou bien le deuxième rebond lieu sur [PM]. Soit U23 le symétrique de U2 par rapport à (PM) ; ce point détermine la trajectoire après le deuxième rebond. - le troisième rebond a lieu sur [MN].

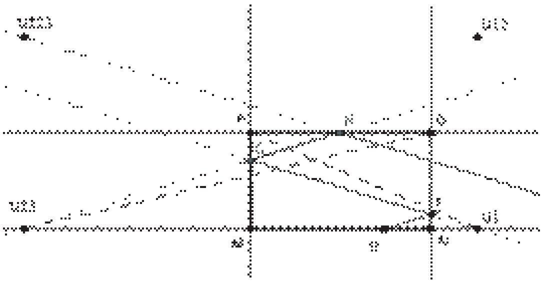
Dans aucun de ces cas un point de [MN] ne peut être atteint après le troisième rebond.

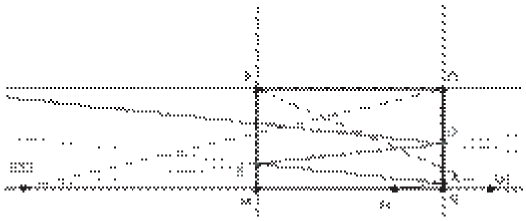


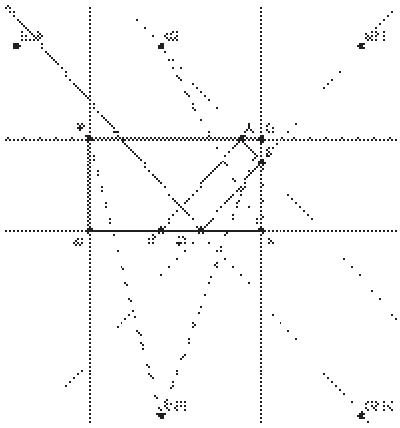
Neuf cas de figure des trois premiers rebonds (quatre autres sont symétriques des quatre premiers par rapport à la médiatrice de [MN] :

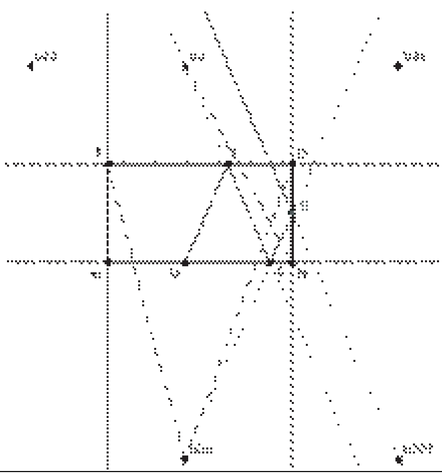


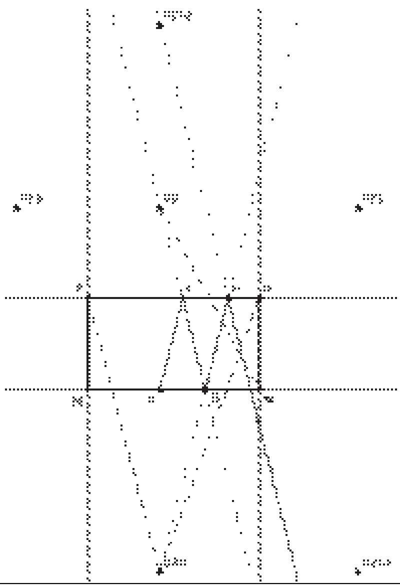


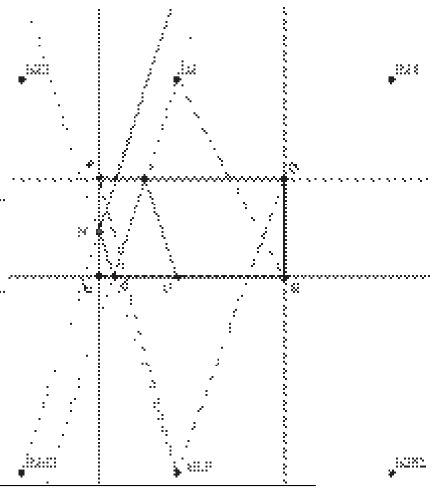


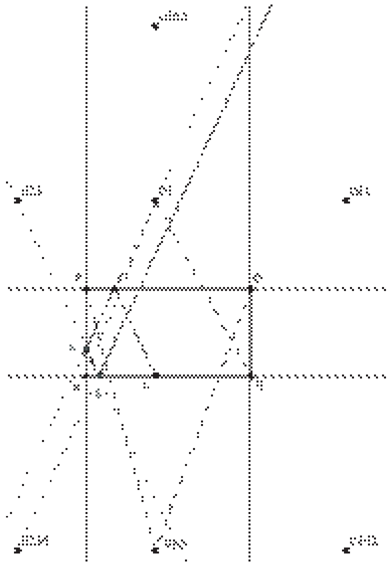












RETOUR AU SOMMAIRE

AIX-MARSEILLE

Premier exercice

Série S

Fibonacci - Diophante

Énoncé

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.

Première partie :

À partir de deux entiers positifs, on construit une liste de nombres où chaque nombre est la somme des deux précédents.

1. Choisir deux nombres entiers positifs inférieurs à 10 et déterminer les dix premiers nombres de la liste définie précédemment.
2. Un mathé-magicien prétend être capable de déterminer rapidement et exactement la somme des dix premiers nombres d'une liste quelconque ainsi construite. Montrer que, quels que soient les nombres de départ, cette somme est multiple d'un des nombres de la liste dont on déterminera la position.

Deuxième partie

1. On considère l'équation :

$$81a + 125b + 149c = 2013 \qquad (E)$$

où a, b et c sont des entiers positifs.

   a) Justifier que a est nécessairement compris entre 0 et 24.
   Donner un encadrement possible des valeurs prises respectivement par b puis par c.

   b) Écrire un algorithme permettant :

      - de tester chacune des valeurs a, b et c prises dans les encadrements précédemment définis afin de vérifier si $81a + 125b + 149c = 2013$;
      - d'afficher les valeurs a, b et c, si elles existent, solutions de (E) .

   c) On fixe $a = 15$. En utilisant la méthode de votre choix, déterminer tous les triplets $(15, b, c)$ de nombres entiers positifs, s'il en existe, solutions de (E).

2. À partir de trois entiers positifs, on construit une liste de nombres où chaque nombre est la somme des trois précédents. a) Déterminer le $12^{\text{ème}}$ nombre de la liste si les trois premiers nombres sont, dans l'ordre, 0, 1 et 1. b) Comment choisir les trois premiers entiers pour que le $12^{\text{ème}}$ nombre de la liste soit 2013 ?

Éléments de solution

Première partie :

1. Par exemple, à partir de 1 et 1, on construit la suite de nombres suivante :

$$1; 1; 2; 3; 5; 8; 13; 21; 34; 55.$$

2. À partir de deux nombres quelconques a et b, on construit la suite de nombre suivante :

$$a; b; a+b; a+2b; 2a+3b; 3a+5b; 5a+8b; 8a+13b; 13a+21b; 21a+34b.$$

La somme de ces 10 nombres est : $55a + 88b = 11(5a + 8b)$.
Cette somme est égale à 11 fois le $7^{\text{ème}}$ nombre de la liste.

Deuxième partie

1. a) a est un entier positif et $81a \leqslant 2013 \Leftrightarrow a \leqslant 24$.
b est un entier positif et $125b \leqslant 2013 \Leftrightarrow b \leqslant 16$.
c est un entier positif et $149c \leqslant 2013 \Leftrightarrow c \leqslant 13$.

b) Pour a allant de 0 à 24
    Pour b allant de 0 à 16
      pour c allant de 0 à 13
        Si $81a + 125b + 149c = 2013$
          Afficher a, b, c.

c) (15 ; 4 ; 2) est la seule solution de (E).

2. a) La liste des nombres ainsi obtenue est

$$0; 1; 1; 2; 4; 7; 13 : 24; 44; 81; 149; 274.$$

b) Si les trois premiers nombres sont a, b, c, la liste des nombres obtenue est :
$a - b - c$; $a + b + c$; $a + 2b + 2c$; $2a + 3b + 4c$; $4a + 6b + 7c$; $7a + 11b + 13c$; $13a + 20b + 24c$; $24a + 37b + 44c$; $44a + 68b + 85c$; $81a + 125b + 149c$.
D'après l la question 1.c), on doit choisir $a = 15, b = 4$ et $c = 2$.

RETOUR AU SOMMAIRE

AIX-MARSEILLE

Deuxième exercice

Série S

L'aiguille de Kakeya

Énoncé

On dispose d'une aiguille de longueur 1. L'objectif de cet exercice est d'étudier certaines surfaces permettant à cette aiguille d'effectuer un demi-tour sans sortir de la surface.
La succession de schémas qui suit montre que c'est possible dans un disque de diamètre 1.

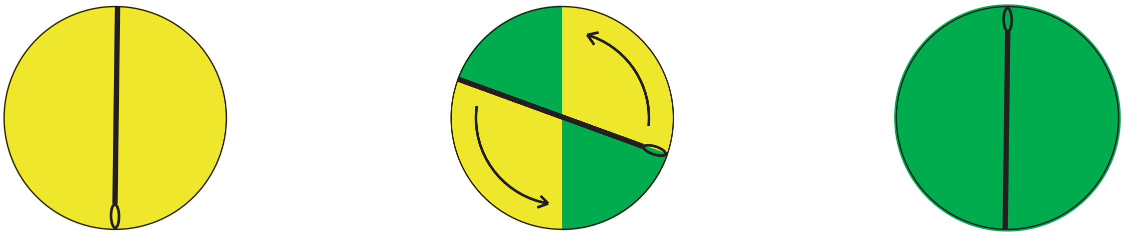


Figure 1 : exemple du disque

I On considère un triangle équilatéral de hauteur 1. On dispose l'aiguille le long d'une hauteur de ce triangle.

1. Montrer, par une succession de schémas à compléter en annexe à rendre avec la copie, qu'il est possible de faire effectuer un demi-tour à cette aiguille dans ce triangle équilatéral.
2. Calculer l'aire de ce triangle équilatéral.
   Montrer qu'elle est inférieure à celle du disque de diamètre 1.

II. On considère une famille de surfaces particulières : les « trisectangles ».
La figure 2 montre quelques éléments de cette famille.

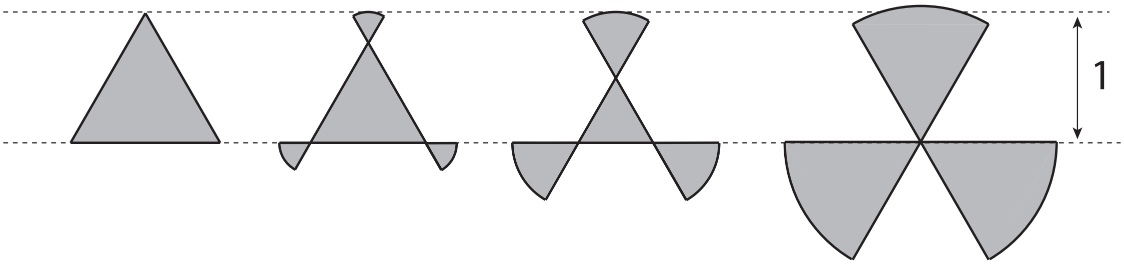


Figure 2 : Famille de trisectangles

La figure 3 explique comment les trisectangles sont construits : cette surface est formée d'un triangle équilatéral et d'un secteur angulaire à chacun de ses trois sommets, chaque côté d'un secteur étant le prolongement d'un côté du triangle. Les trois secteurs sont superposables.

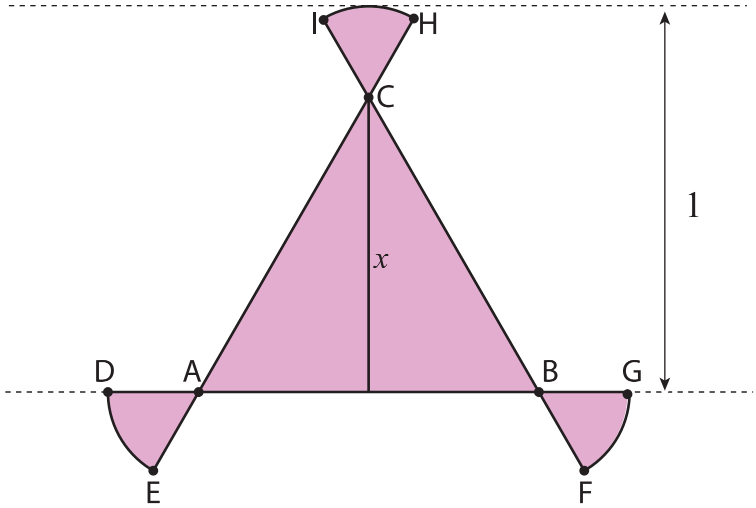


Figure 3 : construction d'un trisectangle

1. Montrer, par une succession de schémas à compléter en annexe à rendre avec la copie, qu'il est possible de faire effectuer un demi-tour à cette aiguille dans un trisectangle.
2. On recherche désormais un trisectangle d'aire minimale.
   On note x la hauteur du triangle équilatéral inclus dans le trisectangle.
   a) Exprimer l'aire du trisectangle en fonction de x.
   b) En déduire l'aire minimale d'un tel trisectangle.
   c) Quel pourcentage de l'aire du disque de diamètre 1 représente l'aire du trisectangle d'aire minimale.

On doit le problème mathématique étudié ici au mathématicien japonais Sôichi Kakeya (1886-1947) qui s'est posé la question suivante au début du XX$^{\text{e}}$ *siècle : quelle est la plus petite surface à l'intérieur de laquelle il est possible de déplacer une aiguille de manière à la retourner complètement ? L'exercice ci-dessus propose une catégorie particulière de surfaces candidates à la solution de ce problème.*

Éléments de solution

I. 2. Le côté du triangle apour longueur $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$. L'aire de ce triangle équilatéral est donc $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, et $\dfrac{1}{\sqrt{3}} < \dfrac{3}{4}$.

II. 2. a) Par construction, $x \in [0;1]$.
L'aire d'un trisectangle est la somme de l'aire d'un triangle équilatéral de hauteur x (donc de côté $\dfrac{2x}{\sqrt{3}}$) et des aires des trois secteurs angulaires identiques de rayon $1-x$ et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$. L'aire d'un trisectangle est donc :

$$A(x) = \frac{1}{2} \times \frac{2x}{\sqrt{3}} \times x + 3 \times \frac{1}{6} \times \pi \times (1-x)^2 = \frac{x^2}{\sqrt{3}} + \frac{\pi}{2}(1-x)^2 :$$

$$A(x) = \left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) x^2 - \pi x + \frac{\pi}{2}.$$

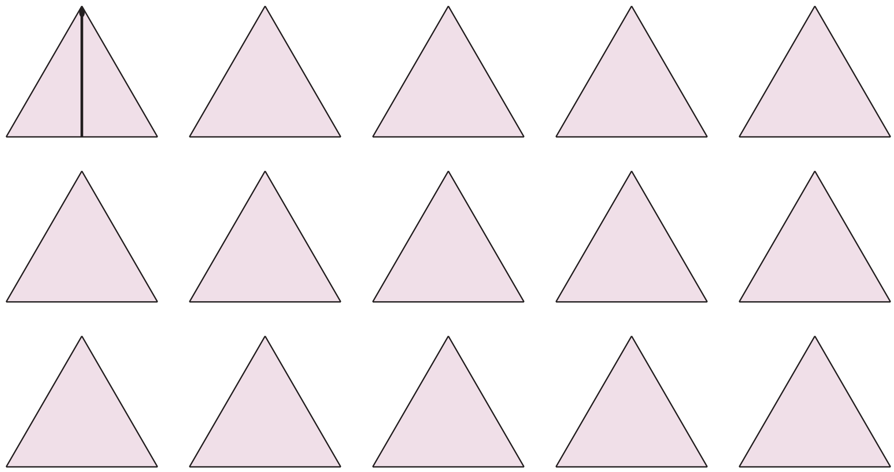
b) $\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}>0$. La courbe représentative est donc une parabole orientée vers le haut.
L'abscisse de son sommet est $\dfrac{\pi}{\pi+\dfrac{2}{\sqrt{3}}}\approx 0,731$.

L'aire minimale est donc $A\left(\dfrac{\pi}{\pi+\dfrac{2}{\sqrt{3}}}\right)=\dfrac{\pi}{\pi\sqrt{3}+2}\approx 0,422$.

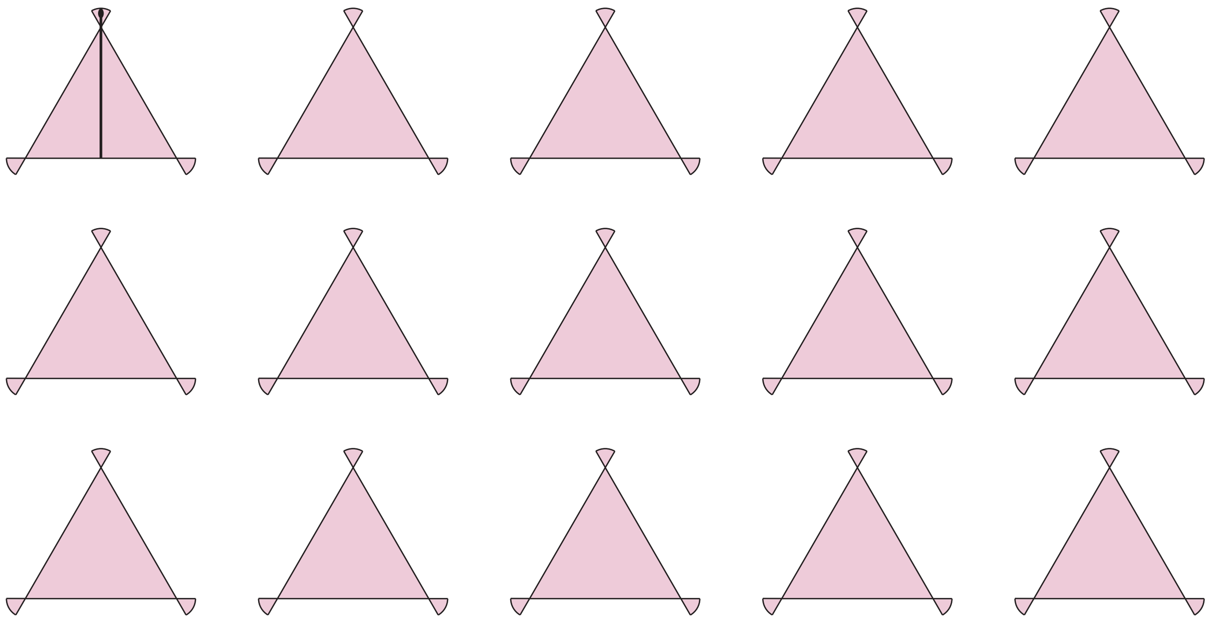
c) Cela représente un pourcentage de $\dfrac{\pi}{\pi\sqrt{3}+2}\times\dfrac{4}{\pi}=\dfrac{4}{\pi\sqrt{3}+2}\approx 53,75\%$.

Annexe à rendre avec la copie

I.1.



II.1.



RETOUR AU SOMMAIRE

AIX-MARSEILLE

Troisième exercice

Séries ES, L et technologiques

Énigmes

Énoncé

Les deux énigmes suivantes sont indépendantes. Les résoudre.

Énigme 1

À partir de deux entiers positifs, on construit une liste de nombres où chaque nombre est la somme des deux précédents.

1. Question préliminaire :
   Choisir deux nombres entiers positifs inférieurs à 10 et déterminer les dix premiers nombres de la liste définie précédemment.
2. Un mathé-magicien prétend être capable de déterminer rapidement et exactement la somme des dix premiers nombres d'une liste quelconque ainsi construite.
   Montrer que, quels que soient les nombres de départ, cette somme est multiple d'un des nombres de la liste dont on déterminera la position.

Énigme 2 :

Une famille décide d'aller au restaurant pour fêter un anniversaire.
Le restaurateur propose pour chaque adulte un menu à 15 euro, et pour chaque enfant un menu à 11 euro.
La facture s'élève à 250 euro.
Combien y avait-il d'adultes et d'enfants ?

Éléments de solution

Énigme 1

1. Par exemple, à partir de 1 et 1, on construit la suite de nombres suivante :
   1 : 1 : 2 : 3 : 5 : 8 : 13 : 21 : 34 : 55.
2. À partir de deux nombres quelconques a et b, on construit la suite de nombre suivante :

   $$a\ ;\ b\ ;\ a+b\ ;\ a+2b\ ;\ 2a+3b\ ;\ 3a+5b\ ;\ 5a+8b\ ;\ 8a+13b\ ;\ 13a+21b\ ;\ 21a+34b.$$

   La somme de ces 10 nombres est : $55a+88b=11(5a+8b)$.
   Cette somme égale à 11 fois le $7^{\text{ème}}$ nombre de la liste.

Énigme 2 : Soit x le nombre d'adultes et y le nombre d'enfants.
Il s'agit de déterminer x et y pour que $15x + 11y = 250$.
x et y étant entiers naturels, $0 \leqslant 15x \leqslant 250$, d'où $0 \leqslant x \leqslant 16$.
De plus, $y = \dfrac{250 - 15x}{11}$.
En testant les valeurs de x de 0 à 16, on obtient $x = 2$ et $y = 20$ ou bien $x = 13$ et $y = 5$.
Les deux solutions sont « possibles », mais la deuxième semble plus réaliste pour une famille…

RETOUR AU SOMMAIRE

AIX-MARSEILLE

Quatrième exercice

Séries ES, L et technologiques

Marche à 29

Énonce

1. a) En partant de 12 589 et en comptant de 29 en 29, peut-on atteindre le nombre 12 705 ?
   b) En partant de 1 485 et en comptant de 29 en 29, peut-on atteindre le nombre 310 190 ?
   Expliquer comment vous avez trouvé.
2. Quel est le plus petit entier positif à partir duquel, en comptant de 29 en 29, on peut atteindre 2 013 ?
3. Existe-t-il des entiers positifs inférieurs à 2 013 à partir desquels il est possible d'atteindre ce nombre aussi bien en comptant de 29 en 29 qu'en comptant de 31 en 31 ? Si oui, les trouver tous.

Éléments de solution

1. On peut remarquer que si la différence de deux nombres est divisible par 29, il est possible de les « joindre » en comptant de 29 en 29.
   a) $12\,705 - 12\,589 = 116 = 4 \times 29$. En partant de 12 589 et en comptant de 29 en 29, on peut atteindre le nombre 12 705.
   b) $310\,190 - 1485 = 308\,705 = 10\,645 \times 29$. En partant de 1 485 et en comptant de 29 en 29, on peut atteindre le nombre 310 190.
2. Il s'agit du reste de la division euclidienne de 2 013 par 29.
   $2\,013 = 29 \times 69 + 12$.
   En partant de 12 et en comptant de 29 en 29, on peut atteindre le nombre 2 013.
3. $899 = 29 \times 31$ est le plus petit multiple commun à 29 et à 31. Ainsi, trouver des nombres qui permettent d'atteindre 2 013 aussi bien en comptant de 29 en 29 que de 31 en 31, revient à déterminer les nombres qui permettent d'atteindre 2 013 en comptant de 899 en 899.
   Il y en a deux : 215 et 1 114.

RETOUR AU SOMMAIRE

AMIENS

Premier exercice

Toutes séries

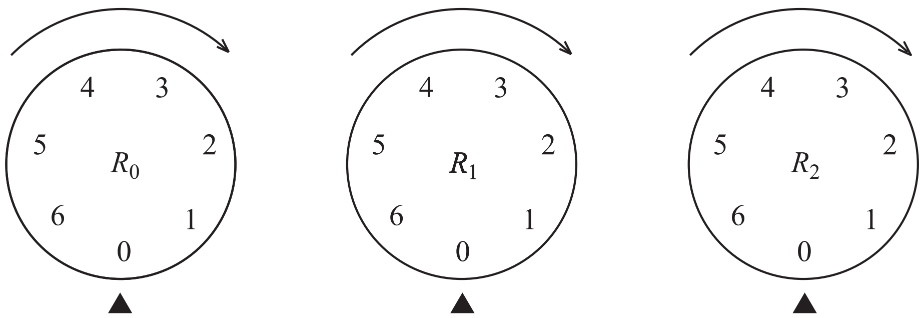
Le compteur

Énoncé

Un compteur est composé de trois roues crantées, nommées R_0, R_1 et R_2 comportant toutes les trois 7 crans, numérotés de 0 à 6. Ce compteur est conçu de sorte que :

- Les roues tournent toujours d'un cran vers le cran suivant, dans cet ordre : $0 \to 1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 5 \to 6 \to 0$.
- Lorsque la roue R_0 effectue un tour complet, c'est-à-dire lorsqu'elle tourne de 7 crans, alors la roue R_1 tourne d'un cran.
- Lorsque la roue R_1 effectue un tour complet, c'est-à-dire lorsqu'elle tourne de 7 crans, alors la roue R_2 tourne d'un cran.
- Initialement, les roues R_0, R_1 et R_2 affichent toutes 0.

Les roues ne peuvent tourner que dans ce sens



Les flèches noires indiquent les numéros affichés par ces roues.

Entre chaque question, le compteur est remis à zéro, c'est-à-dire que chaque roue affiche de nouveau 0.

1. On tourne la roue R_0 de 15 crans. Quels sont alors les numéros affichés par les roues ?
2. On tourne la roue R_0 de 100 crans. Quels sont alors les numéros affichés par les roues ?
3. On tourne la roue R_0 jusqu'à ce que la roue R_2 affiche 5 pour la première fois. De combien de crans a-t-on tourné R_0 ?
4. De combien de crans faut-il tourner R_0 pour les roues reviennent pour la première fois en même temps à 0 ?
5. On tourne la roue R_0 de 3580 crans. Quels sont alors les numéros affichés par les roues ?
6. Soit $N = k_0 + k_1 \times 7 + k_2 \times 7^2$, où k_0, k_1 et k_2 sont trois entiers de $\{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\ ,6\}$. De combien de crans faut-il tourner la roue R_0 pour que, simultanément et pour la première fois, R_0 affiche k_0 , R_1 affiche k_1 et R_2 affiche k_2 ?
7. Après avoir tourné de n crans la roue R_0, les roues R_0, R_1 et R_2 affichent respectivement 1, 2 et 3. Quelles sont les valeurs possibles de n ?

Éléments de solution

1. Les numéros affichés par les roues sont 1 - 2 - 0. ($15 = \mathbf{1} \times 7^0 + \mathbf{2} \times 7 + \mathbf{0} \times 7^2$)
2. Les numéros affichés par les roues sont 2 - 0 - 2. ($100 = \mathbf{2} \times 7^0 + \mathbf{0} \times 7 + \mathbf{2} \times 7^2$)
3. On a tourné la roue R_0 de 245 crans. (Opération : $7 \times 7 \times 5 = 245$.)
4. Il faut tourner R_0 de 343 crans. (Opération : $7 \times 7 \times 7 = 343$.)
5. Les numéros affichés par les roues sont 3 - 0 - 3.
   En effet, $3580 = 343 \times 10 + 150$.
   Or $150 = 3 \times 7^0 + 0 \times 7 + 3 \times 7^2$
6. Il faut la tourner de N crans. Après $k_2 \times 7^2$ crans, la roue R_2 affichera k_2 . Elle ne bougera plus. Après $k_1 \times 7$ crans supplémentaires, la roue R_1 affichera k_1 . Elle non plus ne bougera plus. Après k_0 crans de plus, c'est la roue R_0 seule qui bougera, pour afficher k_0.
7. Les valeurs possibles pour les cadrans sont $n = 1 + 2 \times 7 + 3 \times 7^2 + k \times 343$, où $k \in \mathbb{N}$.

RETOUR AU SOMMAIRE

AMIENS

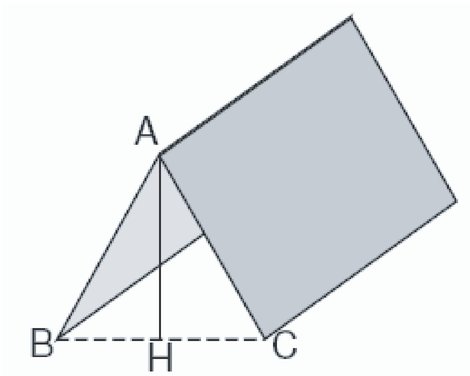
Deuxième exercice

Série S

La tente improvisée

Énoncé

Un campeur, arrivé dans un camping sans autre équipement pour dormir qu'une bâche carrée de 3 m de côté, souhaite l'utiliser comme toile de tente pour essayer de dormir dans les mêmes conditions que son voisin



On pose $x = AH$ la hauteur de la tente improvisée et on considère que le triangle ABC est isocèle.
On assimile la forme de la tente à un prisme de base ce triangle.

1. Déterminer l'aire de ABC en fonction de x.
2. Quelle hauteur x de piquet choisir pour que le volume de la tente soit maximal ? Quel sera alors le volume de la tente ? *On pourra étudier la fonction correspondant au carré du volume...*

Éléments de solution

1. Tout d'abord, $x \in]0; 1,5[$.
   DŠaprès le théorème de Pythagore dans le triangle ABH rectangle en H, on a : $BH^2 + x^=1,5^2$.
   Donc $BH = \sqrt{1,5^2 - x^2}$.
   Si on note $A(x)$ l'aire du triangle ABC lorsque $AH = x$, on a :
   $$A(x) = x \times BH = x\sqrt{15^2 - x^2} \text{ où } x \in]0; 1,5[.$$
2. On note $v(x)$ le volume de la tente lorsque la hauteur du piquet est x.
   Exprimons $v(x)$ en fonction de x.
   $$v(x) = 3A(x).$$
   $v(x)$ maximal $\Leftrightarrow 3A(x)$maximal $\Leftrightarrow A(x)^2$ maximal.
   Or $A(x)^2 = x^2(2,25 - x^2) = -x^4 + 2,25x^2$. C'est un polynôme que l'on sait dériver. Pour trouver ses extrema, on peut chercher les valeurs annulant sa dérivée.
   On note $f(x) = A(x)^2$ afin d'alléger l'écriture ;
   $f'(x) = x(4x^2 + 4,5)$

Les seules valeurs annulant f' sur $]0;1,5[$ sont 0 et $\sqrt{\dfrac{4,5}{4}}$

Le tableau de variations de f indique que f sera maximale en $x_0 = \sqrt{\dfrac{4,5}{4}}$.

$$v(x_0) = 3\sqrt{\frac{4,5}{4}} \times \sqrt{2,25 - \frac{4,5}{4}} = 3\left(\sqrt{\frac{4,5}{4}}\right)^2.$$

Conclusion : La hauteur du piquet pour que le volume de la tente soit maximal est $\sqrt{\dfrac{4,5}{4}}$ m. Dans ce cas, le volume sera 3,375 m^3.

RETOUR AU SOMMAIRE

AMIENS

Troisième exercice

Séries STI2D/STD2A/STL

Le radeau de Robinson

Énoncé

Robinson construit un radeau rectangulaire. Il place sur celui-ci un mat fixé en haut par des cordes aux quatre coins du radeau. Les longueurs des cordes opposées sont de 14 mètres et de 8 mètres et celle d'une des deux autres est de 2 mètres. Quelle est la longueur de la dernière corde ?

Éléments de solution

Soit ABCD le radeau, S le sommet du mat, H le pied du mat et $SH = h$.
Les triangles SHA , SHC , SHD et SHB sont rectangles en H donc d'après le théorème de Pythagore $SA^2 = AH^2 + HS^2$ soit $64 = AH^2 + h^2$.

De même $SC^2 = 196 = CH^2 + h^2$
$SB^2 = 4 = BH^2 + h^2$
$SD^2 = x^2 = DH^2 + h^2$.

Si A', B', C' et D' sont les projetés orthogonaux de H sur [AB], [BC], [CD] et [DA], on obtient des triangles rectangles
Et $DH^2 + BH^2 = (DD'^2 + D'H^2) + (BB'^2 + B'H^2)$
Or $DD'^2 = CB'^2, D'H^2 = AA'^2$ et $BB'^2 = AH^2$
Donc $DH^2 + BH^2 = AA'^2 + CB'^2 + A'H^2 + B'H^2 = AA'^2 + A'H^2 + CB'^2 + B'H^2 = AH^2 + CH^2$.
Donc $x^2 - h^2 + 4 - h^2 = 64h^2 + 196 - h^2$
D'où $x = 16$ m.

RETOUR AU SOMMAIRE

AMIENS

Quatrième exercice

Séries IES/L/STMG/ST2S

Les âges dans la famille Martin

Énoncé

Lors d'un dîner avec des amis, monsieur et madame Martin et leurs deux enfants sont interrogés sur leurs âges respectifs.
Monsieur Martin répond : « À nous quatre, nous avons 128 ans. »
Cette réponse paraissant insuffisante à leurs amis, madame Martin ajoute : « À nous deux, mon mari et moi sommes trois fois plus âgés que nos deux fils. »
Ces derniers prennent alors la parole :
L'aîné précise qu'il a moins de la moitié de l'âge de sa mère.
Le cadet remarque que la différence d'âge entre son père et sa mère est sept fois plus grande que la différence d'âge entre son frère et lui.
Quels sont les âges des quatre membres de la famille Martin ?
Les réponses recherchées sont des nombres entiers.

Éléments de solution

On pose x l'âge de la mère, y celui du père, z l'âge du frère aîné et t celui du cadet.

$$\begin{array}{ll} x+y+z+t=128 & (1) \\ x+y=3(z+t) & (2) \\ z \leqslant \dfrac{x}{2} & (3) \\ y-x=7(z-t) & (4) \end{array}$$

De (1) et (2) on obtient $z+t=32$ et $x+y=96$.
Comme $y \geqslant x$, on obtient $x \leqslant 48$. **La mère a moins de 48 ans.**

D'après l'équation (4), on sait que la différence d'âge entre le père et la mère est un multiple de 7. $y=7k$ où $k \in \mathbb{N}$
Par ailleurs, en remplaçant dans $x+y=96$, on obtient :
$x+y=96 \Leftrightarrow x+x+7k=96 \Leftrightarrow 2x+7k=96$, ce qui implique que k est pair.

Ainsi les choix pour k sont 2, 4 ou 6. **La différence d'âge entre le père et a mère est donc égale à 14, 28 ou 42 ans.**

Étudions ces trois cas afin de voir les solutions possibles à ce problème.

- Si $y-x=14$
  Dans ce cas, $2x=96-14 \Leftrightarrow x=41$
  On a également $\left\{\begin{array}{l} x+t=32 \\ \\ z-t=2 \end{array}\right. \Rightarrow z=17$
  Ces deux résultats ne contredisent pas l'inéquation (1) $z \leqslant \dfrac{x}{2}$. On calcule donc $y=55$ et $t=15$.

Le quadruplet $\{414,\ 55,\ 17,\ 15\}$ satisfait donc aux conditions du problème. C'est une solution possible.

- Si $y - x = 28$
  Dans ce cas, $2x = 96 - 28 \Leftrightarrow x = 34$.
  On a également $\begin{cases} z + t = 32 \\ \\ z - t = 4 \end{cases} \Rightarrow z = 18$
  Ces deux résultats contredisent l'inéquation (3) $z \leqslant \dfrac{x}{2}$. C'est impossible.
- Si $y - x = 42$
  Dans ce cas, $2x = 96 - 42 \Leftrightarrow x = 27$
  On a également $\begin{cases} z + t = 32 \\ \\ z - t = 6 \end{cases} \Rightarrow z = 19$
  Ces deux résultats contredisent l'inéquation (3) $z \leqslant \dfrac{x}{2}$. C'est impossible.

Conclusion :
Les âges de la famille Martin sont les suivants :
La mère a 41 ans,
le père a 55 ans,
le fils aîné a 17 ans,
le cadet a 15 ans.

Cela doit être agréable de les recevoir à dîner…

RETOUR AU SOMMAIRE

BESANÇON

Premier exercice

Toutes séries

Nombres parfaits

Énoncé

On définit la fonction σ sur l'ensemble $\mathbf{N}^*$ des entiers naturels non nuls, qui à n associe la somme de ses diviseurs.

Exemple : $\sigma(21) = 32$ car les diviseurs de 21 sont $1\,;\,3\,;\,7\,;\,21$ et $1+3+7+21=32$.

Définition : Un entier naturel p est dit *premier* s'il admet deux diviseurs distincts : 1 et p.

Théorème 1 (*Décomposition en facteurs premiers*)

Tout nombre entier naturel supérieur ou égal à 2 peut s'écrire comme un produit de nombres premiers (non nécessairement distincts).

Exemple : $72 = 2^3 \times 3^2$.

On rappelle également les deux propriétés suivantes :

Propriété 1

Pour tout entier naturel non nul n :

$$1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Propriété 2

Pour tout réel $x \neq 1$ et *pour tout entier naturel* n

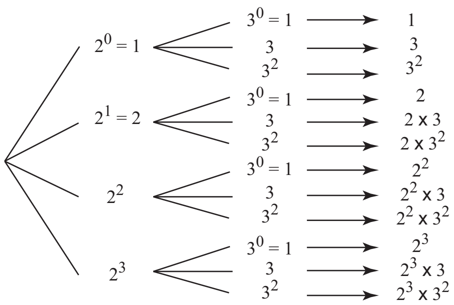
$$1+x+x^2+\cdots+x^n = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}.$$

Partie I : Obtention des diviseurs d'un nombre entier naturel

La décomposition en facteurs premiers d'un entier naturel permet d'obtenir tous ses diviseurs de manière systématique.
On a vu par exemple que $72 = 2^3 \times 3^2$. Les diviseurs de 72 sont alors :

$$1\ ;\ 2\ ;\ 2^2\ ;\ 2^3\ ;\ 3\ ;\ 3^2\ ;\ 2\times 3\ ;\ 2^2\times 3\ ;\ 2^3\times 3\ ;\ 2^3\times 3\ ;\ 2\times 3^2\ ;\ 2^2\times 3^2\ ;\ 2^3\times 3^2.$$

On peut s'aider d'un arbre pour lister ces diviseurs :



1. Donner la décomposition en facteurs premiers de 350 et en déduire la liste de ses diviseurs. Calculer $\sigma(350)$.
2. On considère l'algorithme incomplet suivant dont le rôle est de calculer $\sigma(n)$ connaissant n :

   Entrée : n entier naturel non nul
   Initialisation : σ prend la valeur 0
   Traitement : Pour k allant de ... à ... faire :
   | Si le reste de la division euclidienne de n par k est 0, alors :
   | | Affecter à σ la valeur ...
   | Fin Si
   Fin Pour
   Sortie : Afficher σ

   Recopier et compléter cet algorithme en remplaçant la condition « le reste dans la division euclidienne de n par k est 0 » par une instruction mathématique.

Partie II : **Quelques propriétés de σ**

1. Déterminer $\sigma(n)$ pour $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$, $n = 4$, $n = 5$ et $n = 6$.
2. Si p est un nombre premier, que vaut $\sigma(p)$?
3. a) Montrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, $\sigma(n) \geqslant n + 1$.
   b) Montrer que pour tout entier naturel non nul n, $\sigma(n) \leqslant \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Partie III : **Nombres parfaits**

Définition : Un entier naturel non nul n est dit *parfait* s'il est égal à la somme de ses diviseurs autres que lui-même.

Exemple : 28 est un nombre parfait car les diviseurs de 28, différents de 28, sont 1 ; 2 ; 4 ; 7 ; 14 et on a :

$$28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$$

1. Justifier que si n est un entier naturel parfait, alors $\sigma(n) = 2n$.
2. Existe-t-il des nombres premiers parfaits ?
3. a) Déterminer tous les nombres parfaits inférieurs ou égaux à 10.
   b) Vérifier que l'on peut trouver un entier naturel non nul n tel que :
   - $28 = 2^n\left(2^{n+1} - 1\right)$
   - $2^{n+1} - 1$ est un nombre premier.

   c) Montrer que les autres nombres parfaits trouvés s'écrivent aussi sous la forme $2^n\left(2^{n+1} - 1\right)$, où n un entier naturel non nul et $2^{n+1} - 1$ un nombre premier.
4. Nous allons démontrer que pour tout entier naturel non nul n tel que $2^{n+1} - 1$ est un nombre premier, le nombre $2^n\left(2^{n+1} - 1\right)$ est parfait.
   a) Soit n un entier naturel non nul et soit p un nombre premier différent de 2.
   Lister les diviseurs de $2^n p$ et calculer leur somme en fonction de n et p.
   b) Soit n un entier naturel non nul tel que $2^{n+1} - 1$ soit un nombre premier.
   Exprimer $\sigma\left(2^n\left(2^{n+1} - 1\right)\right)$ en fonction de n et en déduire que $2^n\left(2^{n+1} - 1\right)$ est parfait.
   c) Soit n un entier naturel non nul et soit p un nombre premier différent de 2.
   Démontrer que si le nombre $2^n p$ est parfait, alors $p = 2^{n+1} - 1$.
   d) Donner un nombre parfait différent de ceux déjà cités.
5. Un entier naturel non nul n est dit *presque parfait* si $\sigma(n) = 2n - 1$.
   a) Déterminer tous les nombres presque parfaits inférieurs ou égaux à 16.
   b) Quelle conjecture peut-on faire sur les nombres presque parfaits ?
   c) Démontrer que si k est un entier naturel, alors 2^k est un nombre presque parfait.

Éléments de solution

Partie I : Obtention des diviseurs d'un entier

1. $350 = 2 \times 5^2 \times 7$ donc les diviseurs de 350 sont : 1 ; 2 ; 5 ; 7 ; 10 ; 14 ; 25 ; 35 ; 50 ; 70 ; 175 ; 350.
   On a donc : $\sigma(350) = 1 + 2 + 5 + 7 + 10 + 14 + 25 + 35 + 50 + 70 + 175 + 350 = 744$.
2. L'algorithme complet est le suivant :

Entrée	:	n entier naturel non nul
Initialisation	:	σ prend la valeur 0
Traitement	:	Pour k allant de 1 à n faire :
		| Si $n/k == floor(n/k)$, alors :
		| | Affecter à σ la valeur $\sigma + k$
		| Fin Si
		Fin Pour
Sortie	:	Afficher σ

N.B. la commande « floor{val} »renvoie la valeur inférieure de val.

Partie II : Quelques propriétés de σ

1. $\sigma(1) = 1$; $\sigma(2) = 1 + 2 = 3$; $\sigma(3) = 1 + 3 = 4$; $\sigma(4) = 1 + 2 + 4 = 7$; $\sigma(5) = 1 + 5 = 6$ et $\sigma(6) = 1 + 2 + 3 + 6 = 12$.
2. Si p est un nombre premier, alors ses seuls diviseurs sont 1 et p (avec $p \neq 1$) donc $\sigma(p) = p + 1$.
3. a) Si $n \geqslant 2$, alors n est au moins divisible par 1 et par lui-même (avec $n \neq 1$).
   D'où $\sigma(n) \geqslant n + 1$.

   b) Soit n un entier naturel non nul. n est au plus divisible par tous les entiers naturels non nuls qui le précèdent. On a donc :

$$\sigma(n) \leqslant 1 + 2 + 3 + \ldots + n$$

$$\sigma(n) \leqslant \frac{n(n+1)}{2} \qquad \text{d'après la } \textbf{propriété 1}$$

Partie III : Nombres parfaits

1. Si n est un entier naturel parfait, alors $n = \sigma(n) - n$, c'est-à-dire $\sigma(n) = 2n$.
2. On a vu à la question **II 2.** que si p est un nombre premier, alors $\sigma(p) = p + 1$. Or, l'équation $p + 1 = 2p$ a pour solution $p = 1$ qui n'est pas un nombre premier.
   Il n'existe donc pas de nombre premier parfait.
3. a) D'après la question précédente, il suffit de traiter les cas $n = 1$, $n = 4$, $n = 6$, $n = 8$, $n = 9$ et $n = 10$.

   $\sigma(1) = 1 \neq 2 \times 1$
   $\sigma(4) = 7 \neq 2 \times 4$
   $\sigma(6) = 12 = 2 \times 6$
   $\sigma(8) = 15 \neq 2 \times 8$
   $\sigma(9) = 13 \neq 2 \times 9$
   $\sigma(10) = 18 \neq 2 \times 10$

   Le seul nombre parfait inférieur ou égal à 10 est donc 6.

   b) Avec $n = 2$ on peut écrire $28 = 2^2\left(2^{2+1} - 1\right)$ avec $2^{2+1} - 1 = 7$ nombre premier.

   c) $6 = 2^1\left(2^{1+1} - 1\right)$ avec $2^{1+1} - 1 = 3$ nombre premier.
4. a) Soit n un entier naturel non nul et soit p un nombre premier.
   Les diviseurs de $2^n p$ sont : 1 ; 2 ; 2^2 ; … ; 2^n ; p ; $2p$; 2^2p ; … ; $2^n p$.
   On a donc :

$$\begin{aligned}
\sigma(2^n p) &= 1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^n + p + 2p + 2^2p \ldots + 2^n p \\
&= (1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^n) + p(1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^n) \\
&= (1 + p)(1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^n) \\
&= (1 + p)\frac{2^{n+1} - 1}{2 - 1} \qquad \text{d'après la } \textbf{propriété 2} \\
\sigma(2^n p) &= (1 + p)\left(2^{n+1} - 1\right)
\end{aligned}$$

b) Avec $p = 2^{n+1} - 1$, on obtient :

$$\begin{aligned}\sigma\left(2^n\left(2^{n+1}-1\right)\right) &= \left(1+2^{n+1}-1\right)\left(2^{n+1}-1\right)\\ &= 2^{n+1}\left(2^{n+1}-1\right)\\ &= 2\times 2^n\left(2^{n+1}-1\right)\end{aligned}$$

Donc $2^n\left(2^{n+1}-1\right)$ est parfait.

c) Si $2^n p$ est parfait, alors :

$$\begin{aligned}\sigma(2^n p) = 2\times 2^n p &\iff (1+p)\left(2^{n+1}-1\right) = 2^{n+1}p\\ &\iff 2^{n+1}-1+\left(2^{n+1}-1\right)p = 2^{n+1}p\\ &\iff p = 2^{n+1}-1\end{aligned}$$

d) On peut, par exemple, pendre $n = 4$ et obtenir le nombre parfait $2^4\left(2^{4+1}-1\right) = 16\times 31 = 496$ (31 est bien un nombre premier) ou encore $n = 6$ et obtenir le nombre parfait $2^6\left(2^{6+1}-1\right) = 64\times 127 = 8\,128$ (127 est encore un nombre premier).

5. a) Parmi les valeurs déjà calculées, on trouve que :
1 est presque parfait car $\sigma(1) = 1 = 2\times 1 - 1$;
2 est presque parfait car $\sigma(2) = 3 = 2\times 2 - 1$;
4 est presque parfait car $\sigma(4) = 7 = 2\times 4 - 1$;
8 est presque parfait car $\sigma(8) = 15 = 2\times 8 - 1$.
Pour les entiers de 11 à 16, seul 16 est presque parfait car $\sigma(16) = 31 = 2\times 16 - 1$.

b) On peut conjecturer que tous les nombres presque parfaits sont des puissances de 2.

c) On démontre un sens de cette affirmation :
Soit k un entier naturel. Les diviseurs de 2^k sont : 1 ; 2 ; 2^2 ; … ; 2^k.
On a donc :

$$\begin{aligned}\sigma(2^k) &= 1+2+2^2+\ldots+2^k\\ &= \frac{2^{k+1}-1}{2-1} \qquad \text{d'après la } \textbf{propriété 2}\\ &= 2^{k+1}-1\\ \sigma(2^k) &= 2\times 2^k - 1\end{aligned}$$

ce qui démontre que toutes les puissances de 2 sont des nombres presque parfaits.

RETOUR AU SOMMAIRE

BESANÇON

Deuxième exercice

Toutes séries

La collection de figurines

Énoncé

Lors du lancement d'un nouveau biscuit, une figurine est insérée dans l'emballage de chacune des boîtes. La collection est composée de plusieurs figurines distinctes et on admet que celles-ci sont réparties au hasard dans les boîtes, dans les mêmes proportions.
L'objectif de cet exercice est de donner des pistes de réponse à la question suivante :
« Combien Timéo doit-il acheter de boîtes de biscuits pour obtenir la collection complète de figurines, sans faire aucun échange ? »

Partie I : Cas où il n'y a que deux figurines distinctes
Dans toute la partie I, on considère que la collection est composée de seulement deux figurines. Timéo achète les boîtes de biscuits les unes après les autres et extrait les figurines après chaque achat.

1. Quel nombre minimum de boîtes de biscuits Timéo devra-t-il acheter pour espérer avoir toutes les figurines dans sa collection ?
2. Quelle est la probabilité d'avoir deux figurines distinctes en achetant deux boîtes de biscuits seulement ?
3. On note C_3 l'événement : « La collection de Timéo est complète après l'achat de trois boîtes de biscuits, mais pas après l'achat de deux boîtes. »
   Déterminer la probabilité de l'événement C_3. On pourra éventuellement s'aider d'un arbre.
4. On note C_4 l'événement : « La collection de Timéo est complète après l'achat de quatre boîtes de biscuits, mais pas après l'achat de trois boîtes. »
   Déterminer la probabilité de l'événement C_4. On pourra éventuellement s'aider d'un arbre.
5. Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On considère l'événement E : « Après l'achat de n boîtes de biscuits, Timéo ne possède qu'une seule figurine sur les deux, en n exemplaires. »
   a) Justifier que $P(E) = \dfrac{1}{2^{n-1}}$.
   b) En déduire la probabilité de l'événement F : « Timéo possède les deux figurines en ayant acheté n boîtes de biscuits ou moins de n boîtes de biscuits. »
   c) À l'aide de la calculatrice, déterminer le plus petit entier n supérieur ou égal à 2 tel que $P(F) > 0,999$.

Partie II : Cas général
On suppose maintenant qu'il y a s figurines à collectionner où s est un entier supérieur ou égal à 2.
Pour différentes valeurs du nombre s, on a simulé 100 000 fois l'expérience aléatoire qui consiste à acheter successivement des boîtes de biscuits et à s'arrêter dès que la collection complète des s figurines est obtenue. Pour les 100 000 expériences simulées, on comptabilise le nombre de boîtes nécessaires pour réunir la collection complète et on détermine la moyenne, le premier décile, le premier quartile, la médiane, le troisième quartile et le neuvième décile de la série statistique des 100 000 valeurs ainsi obtenue.

On rappelle que :

- le premier décile d'une série statistique est la plus petite valeur D_1 de cette série telle qu'au moins 10 % des valeurs de la série sont inférieures ou égales à D_1.
- le neuvième décile d'une série statistique est la plus petite valeur D_9 de cette série telle qu'au moins 90 % des valeurs de la série sont inférieures ou égales à D_9.

On a consigné les résultats dans le tableau ci-dessous :

Nombre s de figurines à collectionner	**Moyenne**	**Premier décile**	**Premier quartile**	**Médiane**	**Troisième quartile**	**Neuvième décile**
2	$3,0$	2	2	2	3	5
3	$5,5$	3	4	5	7	9
4	$8,3$	5	6	7	10	13
5	$11,4$	6	8	10	14	18
6	$14,7$	8	10	13	18	23
7	$18,2$	10	13	17	22	28
8	$21,7$	13	16	20	26	33
9	$25,4$	15	18	23	30	38
10	$29,2$	17	21	27	35	44
11	$33,2$	20	24	31	39	49
12	$37,3$	23	28	35	44	55
13	$41,4$	25	31	38	49	61
14	$45,6$	28	34	42	54	67
15	$49,7$	31	37	46	58	73
16	$54,1$	34	41	51	63	79
17	$58,5$	37	44	55	68	85
18	$63,0$	40	48	59	74	91
19	$67,5$	43	52	63	79	97
20	$71,9$	46	55	67	84	103

A. Une première approche

À l'aide des simulations effectuées, estimer :

1. le nombre de figurines distinctes à mettre en circulation pour qu'en moyenne, les amateurs de biscuits achètent 30 boîtes de biscuits pour les obtenir toutes.
2. le nombre de figurines distinctes à mettre en circulation pour que 50 % des amateurs de biscuits aient la collection complète avec 35 boîtes de biscuits ou moins.
3. le plus grand nombre de figurines distinctes à mettre en circulation pour qu'il y ait au plus 10 % de mécontents, sachant qu'un mécontent est une personne qui doit acheter 50 boîtes de biscuits ou plus pour avoir la collection complète.
4. le plus petit nombre de figurines distinctes à mettre en circulation pour qu'il y ait au plus 10 % de collectionneurs qui réunissent toutes les figurines en achetant 16 boîtes de biscuits ou moins.

Dans toute la suite, on choisit de mettre en circulation 11 figurines distinctes (c'est-à-dire que $s = 11$).

B. Coût de la collection complète

Une boîte de biscuits est vendue $2,50$ euro l'unité. Chaque figurine peut être achetée séparément chez le libraire à $8,90$ euro l'unité.

1. Si Timéo achète toutes ses figurines chez le libraire, quel est le montant de sa collection complète ?
2. Avec cet argent, combien peut-il acheter de boîtes de biscuits ? Peut-on estimer la probabilité qu'a Timéo de compléter sa collection de figurines en achetant ce nombre de boîtes de biscuits ?
3. À combien faudrait-il fixer le prix unitaire d'une boîte de biscuits pour que la probabilité que Timéo obtienne toutes les figurines en achetant des biscuits pour un montant égal au coût de la collection complète chez le libraire soit d'environ $0,9$?
   On arrondira le résultat à 10^{-2} près.

C. Quelques résultats théoriques

1. Quel nombre minimum de boîtes de biscuits Timéo devra-t-il acheter pour espérer avoir toutes les figurines dans sa collection ?
2. Soit n un entier supérieur ou égal à 2.
   a) Exprimer, en fonction de n, la probabilité, notée q_n, de l'événement « Timéo n'a obtenu qu'une seule figurine en ayant acheté n boîtes de biscuits. » On pourra s'appuyer sur un arbre.
   b) Déterminer, à l'aide de la calculatrice, le plus petit entier n tel que q_n soit inférieure ou égale à 10^{-6}.
3. On souhaite calculer la probabilité, notée p_{11}, de l'événement « Timéo réunit la collection complète des 11 figurines en achetant exactement 11 boîtes de biscuits. »
   a) À l'aide du tableau donné en début de partie **II**, donner un majorant de cette probabilité.
   b) Combien existe-t-il de façons différentes d'obtenir une suite de 11 figurines non nécessairement distinctes en achetant succesivement 11 boîtes de biscuits ?
   c) Combien existe-t-il de façons différentes de réunir 11 figurines <u>distinctes</u> en achetant successivement 11 boîtes de biscuits ? On pourra s'aider d'un arbre.
   d) En déduire la probabilité p_{11}.
   On arrondira le résultat à 10^{-5} *près.*

Éléments de solution

Partie I : Cas où il n'y a que deux figurines distinctes

1. Il faut acheter au moins deux boîtes pour espérer avoir deux figurines.
2. P(« Obtenir deux figurines en achetant deux boîtes ») $= \dfrac{1}{2}$.
3. $P(C_3)=P(\text{fig}_1\text{–fig}_1\text{–fig}_2)+P(\text{fig}_2\text{–fig}_2\text{–fig}_1) = \dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{8}=\dfrac{1}{4}$.
4. $P(C_4)=P(\text{fig}_1\text{–fig}_1\text{–fig}_1\text{–fig}_2)+P(\text{fig}_2\text{–fig}_2\text{–fig}_2\text{–fig}_1) = \dfrac{1}{16}+\dfrac{1}{16}=\dfrac{1}{8}$.
5. a) $P(E) = P(\underbrace{\text{fig}_1\text{–fig}_1 \ldots\text{–fig}_1}_{n \text{ fois}}) + P(\underbrace{\text{fig}_2\text{–fig}_2 \ldots\text{–fig}_2}_{n \text{ fois}}) = \dfrac{1}{2^n}+\dfrac{1}{2^n}=\dfrac{1}{2^{n-1}}$.
   b) $P(F)=P(\overline{E})=1\text{-}P(E)= 1-\dfrac{1}{2^{n-1}}$.
   c)

$$\begin{aligned} P(F) > 0,999 &\Longleftrightarrow 1-\frac{1}{2^{n-1}} > 0,999 \\ &\Longleftrightarrow n \geqslant 11 \end{aligned}$$

Partie II : Cas général

A. Une première approche

1. D'après le tableau, le nombre moyen de boîtes nécessaires pour obtenir la collection complète appartient à l'intervalle $]29\,;30]$ lorsque $s = 10$.
2. D'après le tableau, les médianes sont inférieures ou égales à 35 jusqu'à $s = 12$.
3. D'après le tableau, les neuvièmes déciles sont inférieurs ou égaux à 50 jusqu'à $s = 11$.
4. D'après le tableau, les premiers déciles sont strictement supérieurs à 16 à partir de $s = 10$.

B. Coût de la collection complète

1. $11 \times 8,90 = 97,90$ euro.
2. $97,90 = 39 \times 2,50 + 0,40$ donc Timéo peut acheter 39 boîtes de biscuits avec cet argent.
   Or, d'après le tableau, avec $s = 11$, on a $Q_3 = 39$. On peut donc estimer la probabilité que Timéo obtienne la collection complète avec ses 39 boîtes à $0,75$.

3. D'après le tableau, si l'on veut que cette probabilité soit de $0,9$, il faut qu'il puisse acheter 49 boîtes ($D_9 = 49$). Il faudrait donc fixer le prix unitaire de la boîte de biscuits à $\dfrac{97,90}{49} \approx 2,00$ euro.

C. Quelques résultats théoriques

1. Il faut acheter au moins onze boîtes pour espérer avoir onze figurines.
2. a) $q_n = 11 \times \mathrm{P}\left(\underbrace{\text{fig}_1\text{–fig}_1 \ldots\text{–fig}_1}_{n \text{ fois}}\right) = 11 \times \left(\dfrac{1}{11}\right)^n = \dfrac{1}{11^{n-1}}$.

   b) $q_n \leq 10^{-6} \iff n \geq 7$.
3. a) D'après le tableau, avec $s = 11$, au moins 10 % des simulations ont nécessité jusqu'à 20 boîtes donc $p_{11} < 0,1$.

   b) Il y a 11 figurines possibles à chacune des 11 répétitions identiques et indépendantes du tirage soit $\underbrace{11 \times 11 \times \ldots \times 11}_{n \text{ fois}} = 11^{11}$ façons différentes d'obtenir une suite de 11 figurines non nécessairement distinctes.

   c) Il y a 11 figurines non encore obtenues à l'ouverture de la première boîte, 10 à l'ouverture de la deuxième, 9 à l'ouverture de la troisième, *etc.*
   On a donc $11 \times 10 \times 9 \times \ldots \times 1 = 39\,916\,800$ façons différentes d'obtenir les 11 figurines distinctes.

   d) On en déduit que $p_{11} = \dfrac{39\,916\,800}{11^{11}} \approx 1,4 \times 10^{-4}$.

RETOUR AU SOMMAIRE

BORDEAUX

Premier exercice

Série S

La somme des chiffres

Énoncé

Pour tout entier naturel n, on désigne par $s(n)$ la somme des chiffres de l'écriture décimale de n.
Ainsi $s(2013) = 2+0+1+3 = 6$.
On se propose de déterminer l'ensemble E des couples (a, b) d'entiers naturels qui vérifient les trois conditions suivantes :

$$\textbf{(C1)} \quad b < a \qquad \textbf{(C2)} \quad b \text{ est un multiple de } 9 \qquad \textbf{(C3)} \quad a = (s(b))^2$$

1. Vérifier que le couple (324, 189) appartient à l'ensemble E.
2. On désigne par (a, b) un couple d'entiers naturels qui appartient à E.
   a) Démontrer que l'entier a est un multiple de 81.
   b) Soit k le nombre de chiffres de l'écriture décimale de b, le premier chiffre à gauche étant non nul.
   Démontrer que $k \leqslant 4$. En déduire que $a \leqslant 1296$.
   c) En déduire les valeurs possibles de a et celles de $s(b)$.
3. Déterminer tous les couples appartenant à l'ensemble E.

Éléments de solution

1. (324 ; 189) appartient à E
   car $189 < 324, 189 = 9 \times 21$ est un multiple de 9 et $[s(189)]^2 = 18^2 = 324$.
2. a) Comme b est un multiple de 9, $s(b)$ est un multiple de 9 donc il existe un entier naturel u tel que $s(b) = 9u$. On a alors $a = (s(b))^2 = 81u^2$. Comme u^2 est un entier, a est un multiple de 81.
   b) Comme b s'écrit avec k chiffres, $10^{k-1} \leqslant b \leqslant 10^k$. De plus, $s(b) \leqslant 9k$ donc $a \leqslant 81k^2$ et comme $b < a$, on a $b < 81k^2$, d'où $10^{k-1} \leqslant 81k^2$, soit $\dfrac{10^{k-1}}{k^2} \leqslant 81$.

   Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbf{N}^*$ par $u_n = \dfrac{10^{n-1}}{n^2}$.

   Pour tout entier $n \geqslant 1$, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{10^{n+1}}{(n+1)^2} - \dfrac{10^n}{n^2} = \dfrac{10^n}{n^2(n+1)^2}\left(9n^2 - 2n - 1\right)$.
   Comme $n \geqslant 1$, $n^2 \geqslant n$ donc $9n^2 - 2n - 1 \geqslant 7n - 1 \geqslant 7 - 1 \geqslant 6 > 0$ d'où $u_{n+1} - u_n > 0$.
   La suite (u_n) est donc croissante.
   De plus $u_k \leqslant 81$ et $u_5 = \dfrac{10^4}{25} = 400 > 81$, donc $k < 5$. Ainsi $k \leqslant 4$ puisque k est un entier.
   Comme $a \leqslant 81k^2$ et $k \leqslant 4$, on a $a \leqslant 81 \times 4^2$ donc $a \leqslant 1296$.

3. Comme $b \geqslant 0$ et $b < a$, a est strictement positif.
   D'après la question 2, $a = 81u^2$ et $a \leqslant 1296$, donc $u^2 \leqslant 16$ d'où $u \leqslant 4$. Ce qui donne 4 valeurs possibles pour u : 1, 2, 3, 4.

   - Pour $u = 1$, on obtient : $a = 81$, $s(b) = 9$ et comme $b < a, b \in \{9, 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72\}$. On obtient les couples (81, 9), (81, 18), (81, 27), (81, 36), (81, 45), (81, 54), (81, 63), (81, 72) qui conviennent tous.
   - Pour $u = 2$, on obtient : $a = 324, s(b) = 18$ et comme $b < a, b \in \{99, 189, 198, 279, 288, 297\}$.
     On obtient les couples (324, 99), (324, 189), (324, 198), (324, 279), (324, 288), (324, 297) qui conviennent tous.
   - Pour $u = 3$, on obtient : $a = 729, s(b) = 27$ et comme $b < a, s(b) \leqslant 7 + 9 + 9 = 25$. il n'y a donc pas de solution.
   - Pour $u = 4$, on obtient : $a = 1296, s(b) = 36$ et comme $b < a, s(b) \leqslant 1 + 9 + 9 + 9 = 28$. il n'y a donc pas de solution.

   Finalement les éléments de E sont les couples : (81, 9), (81, 18), (81, 27), (81, 36), (81, 45), (81, 54), (81, 63), (81, 72), (324, 99), (324, 189), (324, 198), (324, 279), (324, 288), (324, 297).

RETOUR AU SOMMAIRE

BORDEAUX

Deuxième exercice

Série S

Des triangles rectangles de périmètre 1

Énoncé

L'objet de l'exercice est d'étudier l'ensemble F des couples (x, y) de réels tels que x et y sont les mesures des longueurs de deux côtés d'un triangle rectangle dont le périmètre est égal à 1.

1. Parmi les couples suivants lesquels appartiennent à F ?

   a) $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{4}\right)$ b) $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{6}\right)$ c) $\left(\frac{13}{30}, \frac{1}{6}\right)$

2. On désigne par (a, b) un couple appartenant à l'ensemble F.

   a) Le couple (b, a) appartient-il à F ?

   b) Démontrer que les réels a et b appartiennent tous les deux à l'intervalle $\left]0, \frac{1}{2}\right[$.

3. On désigne par ABC un triangle rectangle en C dont le périmètre est égal à 1 et on pose $a = BC, b = CA$ et $c = AB$.

a) Démontrer que $b = \dfrac{1-2a}{2(1-a)}$.

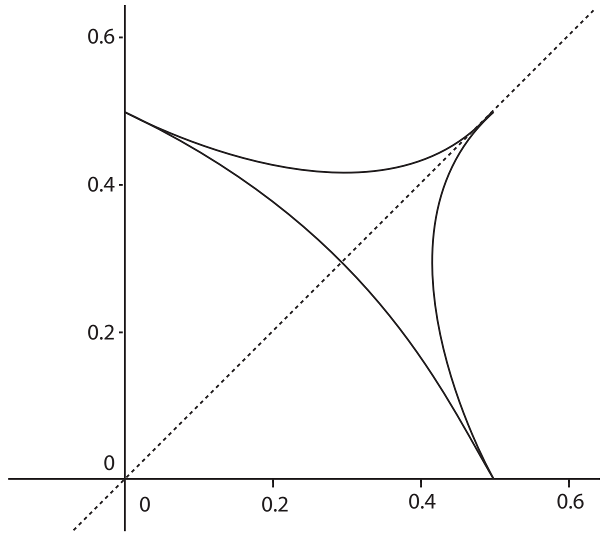
b) Exprimer c en fonction de a.

4. Soient f et g les fonctions définies sur l'intervalle $\left]0, \frac{1}{2}\right[$ par :

$$f(x) = \frac{1-2x}{2(1-x)} \text{ et } g(x) = -x + \frac{1}{2(1-x)}.$$

   Vérifier que pour tout réel x de l'intervalle $\left]0, \frac{1}{2}\right[$, les couples $(x, f(x))$ et $(x, g(x))$ appartiennent à F.

5. Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on a représenté ci-dessous l'ensemble des points $\mathrm{M}(x, y)$ où (x, y) appartient à F.



Déterminer les valeurs de y pour lesquelles il existe quatre couples distincts $(x_1, y), (x_2, y), (x_3, y), (x_4, y)$ appartenant à l'ensemble F.

Éléments de solution

1. $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{4}\right)$ appartient à F car $\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{9} + \frac{1}{16} = \frac{25}{144} = \left(\frac{5}{12}\right)^2$ et $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{5}{12} = 1$.

   $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{6}\right)$ n'appartient pas à F car $1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{7}{12}$ et $\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{6}\right)^2 \neq \left(\frac{7}{12}\right)^2$

   $\left(\frac{13}{30}, \frac{1}{6}\right)$ appartient à F car $1 - \frac{13}{30} - \frac{1}{6} = \frac{2}{5}$ et $\left(\frac{13}{30}\right)^2 = \left(\frac{1}{6}\right)^2 + \left(\frac{2}{5}\right)^2$.

2. a) Oui puisque b et a sont les mesures de deux côtés d'un triangle rectangle de périmètre 1.

   b) Si RST est un triangle rectangle en S de périmètre 1, $RS + ST > RT$ donc $1 > 2RT$ d'où $RT < \frac{1}{2}$. L'hypoténuse étant le plus grand côté, les mesures des trois côtés sont dans $\left]0, \frac{1}{2}\right[$.

3. a) $c = 1 - a - b$ et $c^2 = a^2 + b^2$ donc $(1 - a - b)^2 = a^2 + b^2$ d'où $1 - 2a - 2b - 2ab = 0$.

   Ainsi $1 - 2a = 2(1 - a)b$, d'où $\frac{1 - 2a}{2(1 - a)} = b$ puisque $a \neq 1$.

   b) $c = 1 - a - b = 1 - a - \frac{1 - 2a}{2(1 - a)} = -a + \frac{1}{2(1 - a)}$.

4. Comme $x \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$, on a $x > 0, f(x) > 0$.

   $g(x) = -x + \frac{1}{2(1 - x)} = \frac{2x^2 - 2x + 1}{2(1 - x)}$ a le même signe que $2x^2 - 2x + 1 = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}$ donc $g(x) > 0$.

   De plus, $x + f(x) + g(x) = x + \frac{1 - 2x}{2(1 - x)} - x + \frac{1}{2(1 - x)} = \frac{2 - 2x}{2(1 - x)} = 1$ et

$$\begin{aligned}(g(x))^2 = \left(-x + \frac{1}{2(1 - x)}\right)^2 &= x^2 - \frac{x}{1 - x} + \frac{1}{4(1 - x)^2} = x^2 + \frac{1 - 4x + 4x^2}{4(1 - x)^2} \\ &= x^2 + \frac{(1 - 2x)^2}{4(1 - x)^2} \\ &= x^2 + (f(x))^2.\end{aligned}$$

Donc x, $f(x)$ et $g(x)$ sont les meures des trois côtés d'un triangle rectangle.
Ainsi les couples $(x, f(x))$ et $(x, g(x))$ appartiennent ï£¡ F.

5. Il existe 4 couples d'ordonnée y appartenant à F si et seulement si $m < y < \dfrac{1}{2}$ où m est le minimum de la fonction représentée par l'arc de courbe reliant les points de coordonnées $(0\,;0{,}5)$ et $(0{,}5\,;0{,}5)$. Cette fonction est la fonction g.

   Pour $x \in \left]0, \dfrac{1}{2}\right[$, $g'(x) = -1 + \dfrac{1}{2(1-x)^2} = \dfrac{1-2(1-x)^2}{2(1-x)^2} = \dfrac{-2x^2+4x-1}{2(1-x)^2}$ a le même signe que le trinôme $-2x^2+4x-1$.

   On en déduit le tableau de variation de g sur l'intervalle $\left]0, \dfrac{1}{2}\right[$. Le minimum est atteint pour $x = 1 - \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ et vaut $m = -1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}} = -1 + \sqrt{2}$.

   Il existe 4 couples d'ordonnée y appartenant à F si et seulement si $\sqrt{2} - 1 < y < \dfrac{1}{2}$.

RETOUR AU SOMMAIRE

BORDEAUX

Troisième exercice

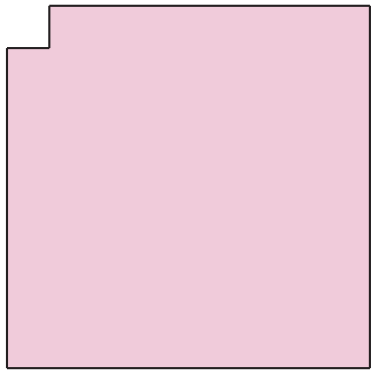
Séries autres que S

Un carré tronqué

Énoncé

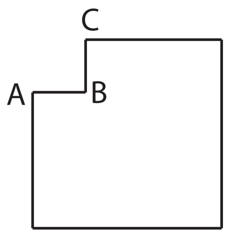
On dispose d'un carré de 8 cm de côté. Dans un des coins, on a découpé un petit carré de 1 cm de côté comme sur le schéma ci-contre qui n'est pas en vraie grandeur.

1. On désire partager le polygone obtenu en n carrés d'aires égales. Quelle est la valeur minimale de n ?
2. Reprendre la question 1 avec des rectangles d'aires égales.
3. Reprendre la question 1 avec des triangles d'aires égales.
   Les réponses seront soigneusement justifiées.



Éléments de solution

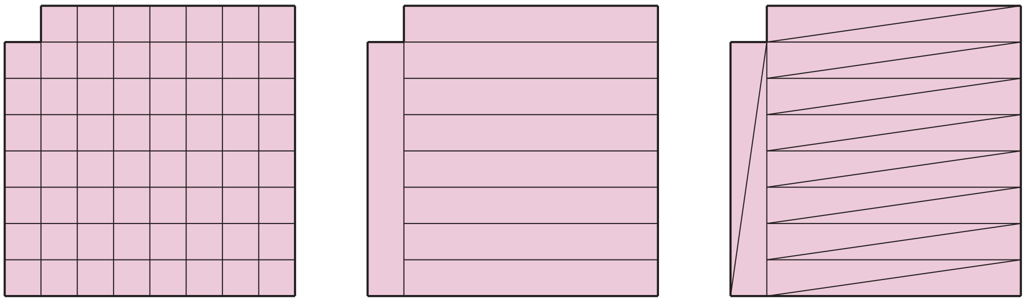
1. 1. Si on partage le polygone en n carrés de même côté c, l'un des carrés s'appuie sur le côté [AB] et un autre sur le côté [BC].
   Ces deux carrés n'ont pas de partie en commun donc $c \leqslant 1$.

   L'aire des carrés est donc inférieure ou égale à 1 cm^2.
   Comme l'aire du polygone est égale 63 cm^2, on en déduit que $n \geqslant 63$.
   La valeur minimale de n est 63. Elle est obtenue avec des carrés de 1cm^2.
2. En raisonnant de la même façon que précédemment, on en déduit que la largeur des rectangles est inférieure ou égale à 1 cm et la longueur inférieure ou égale à 7 cm. L'aire de ces rectangles est donc inférieure ou égale à 7 cm^2. On a alors $n \geqslant \dfrac{63}{7}$ soit $n \geqslant 9$.
   La valeur minimale de n est 9. Elle est obtenue avec des rectangles dont les côtés mesurent 1 cm et 7 cm.
3. Si le coté du triangle qui s'appuie sur le côté [AB] mesure plus d'un centimètre celui qui s'appuie sur le côté [BC] mesure au plus un centimètre et la hauteur correspondante mesure au plus 7 cm donc son aire est au plus 3,5 cm^2.
   De même si le côté du triangle qui s'appuie sur [AB] mesure au plus 1 cm, la hauteur correspondante mesure au plus 7 cm donc son aire est au plus 3,5 cm^2.

On a donc $n \geqslant \dfrac{63}{3,5}$ soit $n \geqslant 18$.
La valeur minimale de n est 18. Elle est obtenue avec des triangles rectangles dont les côtés de l'angle droit mesurent 1 cm et 7 cm.

Voici 3 solutions donnant les valeurs minimales de n



RETOUR AU SOMMAIRE

BORDEAUX

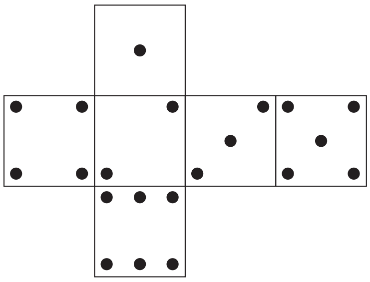
Quatrième exercice

Séries autres que S

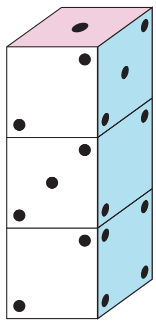
Avec Dédé...

Énoncé

On dispose de plusieurs dés, tous identiques, dont un patron est donné ci-dessous.



1. En empilant trois de ces dés, on a obtenu la colonne ci-contre.
   a) Calculer la somme des points inscrits sur les faces visibles de la pile (attention, le dessin ne montre pas toutes les faces visibles).
   b) Calculer le produit des points inscrits sur les faces visibles de la pile.
   c) Quelle est la plus grande somme que l'on peut obtenir avec les faces visibles en empilant trois dés ? Représenter une colonne de trois dés correspondant à cette somme maximale.
   d) Quel est le plus grand produit que l'on peut obtenir avec les faces visibles en empilant trois dés ? Représenter une colonne de trois dés correspondant à ce produit maximal.



2. On empile à nouveau plusieurs de ces dés. La somme des points marqués sur les faces visibles est égale à 143.
   Combien y a-t-il de dés ? Quel est le nombre inscrit sur la face supérieure de la pile ?
3. Un certain nombre de dés ont été jetés sur la table. La somme des points marqués sur les faces supérieures est égale à 18, leur produit est égal à 135. Combien y a-t-il de dés ?

Éléments de solution

1. a) Sur chaque dé, la somme des points des faces latérales est égale à 14 donc la somme des points des faces visibles est égale à 43.
   b) Les faces visibles de chaque dé 2, 3, 4, 5 et 1 pour le dé supérieur. Le produit est donc égal à 120^3 soit 1 728 000.
   c) La somme maximale est 48 avec 6 sur la face supérieure.
   d) Le produit maximal est $120^3 \times 6 = 10\ 368\ 000$.
2. $143 = 14 \times 10 + 3$. Il y a donc 10 dés et le nombre inscrit sur la face supérieure est 3.

3. $135 = 5 \times 3 \times 3 \times 3$: un dé indique 5, trois dés indiquent 3 et les autres (s'il y en a) indiquent 1. Comme la somme des points est égale à 18 et $5 + 3 + 3 + 3 = 14$, il y a quatre dés qui indiquent 1. Finalement, il y a 8 dés.

RETOUR AU SOMMAIRE

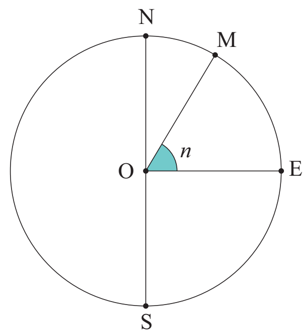
CAEN

Premier exercice

Toutes séries

Les parallèles terrestres

Énoncé



On suppose que la Terre vérifie les propriétés suivantes :

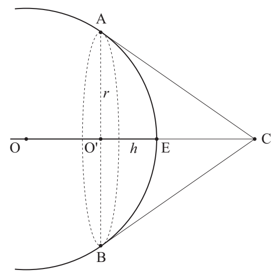
a) Elle tourne autour d'un axe (NS) en 24 h.

b) Son rayon est de 6400 km.

c) Elle est parfaitement sphérique.

d) Le n$^{\text{ième}}$ parallèle est l'ensemble des points M telle que $\widehat{EOM} = n$ (en degrés).

1. Quelle est en km/h la vitesse de rotation maximale d'un point situé à la surface de la terre ?
2. Calculer en km/h la vitesse de rotation de la ville de Paris, située sur le 48$^{\text{ème}}$ parallèle.
3. Quels sont les parallèles dont les points tournent à la vitesse du son, soit 330 m/s ?



4. La station spatiale internationale tourne autour de la terre à une altitude moyenne de 400 km. A son passage à la verticale de l'équateur, elle forme le sommet d'un cône tronqué, dont la base est une calotte sphérique de la surface de la terre.
   Quelle portion de la surface de la terre est visible depuis la station spatiale ?

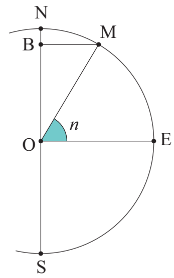
Rappels :

- La surface d'une calotte sphérique de rayon $r = AO'$ et de hauteur $h = EO'$ est $S(\text{calotte}) = \pi\left(r^2 + h^2\right)$.
- La surface d'une sphère de rayon R est $S(\text{sphère}) = 4\pi r^2$.

Éléments de solution

1. Les points qui ont une vitesse de rotation maximale se trouvent sur l'équateur. La vitesse est $V(\text{équateur}) = \dfrac{d}{t} = \dfrac{2\pi R}{24} \approx 1675,5$ km/h.

2. Soit B le point d'intersection de (ON) et de la parallèle à (OE) passant par M. Le périmètre du n$^{\text{ème}}$ parallèle est $P = 2\pi \times BM$.



Or on a $\sin \widehat{MOB} = \dfrac{BM}{OM}$, donc $\sin(90-n) = \dfrac{BM}{6400}$.

Alors $BM = 6\,400 \sin(90-n)$. Le périmètre est donc

$$P = 2\pi \times 6\,400 \sin(90-n) = 12\,800\pi \sin(90-48) = 26\,907,3\text{km}.$$

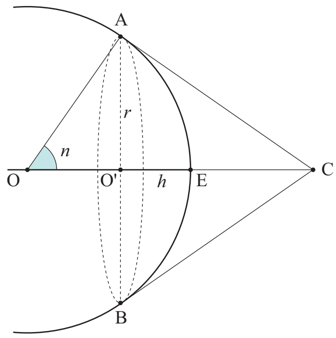
La vitesse de rotation de Paris est donc :

$$v = \frac{d}{t} = \frac{26\,907,2}{24} = 1121,14 \text{ km/h}.$$

3. Si la vitesse de rotation est $v = 330 \times \dfrac{3600}{1000} = 1188$km/h, alors le périmètre du n$^{\text{ème}}$ parallèle correspondant est $p = d = vt = 1188 \times 24 = 28\,512$.

D'autre part, $P = 2\pi \times 6400 \sin(90-n)$. Ainsi $\sin(90-n) = \dfrac{28512}{2\pi \times 6400} \approx 0,709$, ce qui donne $90 - n \approx \arcsin(0,709) \approx 45,16^\circ$ et donc $n \approx 90 - 45,16 \approx 44,84^\circ$.

4. Le pourtour du secteur visible par la station spatiale est un cercle de centre O' et de diamètre [AB]. Les points A et B sont sur deux parallèles symétriques, d'angles n.



Calcul de n

La droite (AC) est tangente au cercle en A. On a

$$\cos(n) = \frac{OA}{OC} = \frac{6400}{6400+400} = \frac{6400}{6800}.$$

Alors $n \approx 19,75^\circ$.

Calcul du rayon r D'autre part, on a $\sin(n) = \dfrac{AO'}{OA}$, soit $\sin(19,75) = \dfrac{AO'}{6400}$ et donc $AO' = 6400 \sin(19,75) \approx 2162,7$ km.

Le rayon de la calotte sphérique est donc $r = AO' \approx 2162,7$ km.

Calcul de la hauteur h

On a aussi $\cos(n) = \dfrac{OO'}{OA}$, soit $\cos(19,75) = \dfrac{OO'}{6400}$ et donc $OO' = 6400 \cos(19,75) \approx 6023,5$ km.

La hauteur de la surface sphérique est donc

$$h = OE - OO' \approx 6400 - 6023,5 \approx 376,5 \text{ km}.$$

Calcul de la surface de la calotte

La surface d'une calotte sphérique de rayon r et de hauteur h est

$$S(\text{calotte}) = \pi(r^2 + h^2) \approx \pi(2162,7^2 + 376,5^2) \approx 1,5 \times 10^7 \text{ km}^2.$$

Calcul de la surface de la Terre

La surface de la Terre est : $S(\text{Terre}) = 4\pi R^2 \approx 4\pi \times 6400^2 \approx 5,1 \times 10^8$ km².

Calcul du pourcentage

Ainsi, le pourcentage de la calotte sphérique par rapport à la terre est

$$\frac{S(\text{calotte})}{S(\text{Terre})} = \frac{1,5 \times 10^7}{5,1 \times 10^8} \approx 0,03, \text{ soit } 3\%.$$

RETOUR AU SOMMAIRE

CAEN

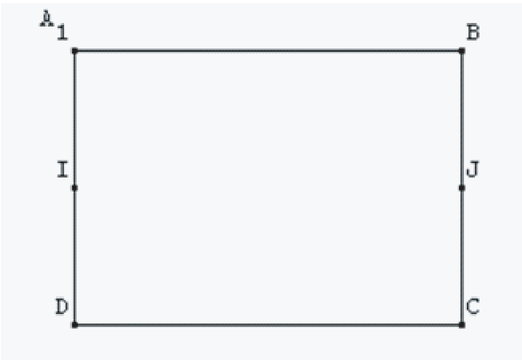
Deuxième exercice

Série S

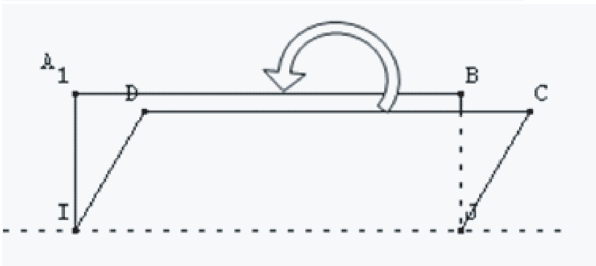
L'avion

Énoncé

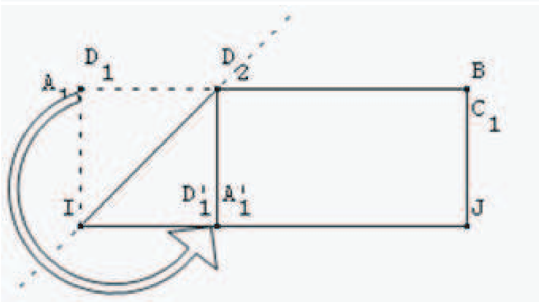
Éléonore s'ennuie !
Elle se met à construire des avions en papier. Voici sa méthode :



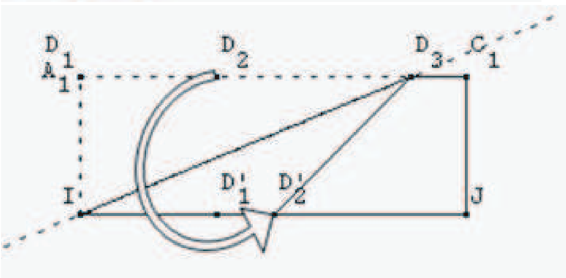
1. Elle dispose une feuille de papier rectangulaire de format A4 (21 cm $\times$ 29,7 cm) dans la position paysage.
   Soit A_1BCD ce rectangle.
   Soient I et J les milieux respectifs de $[A_1D]$ et de [BC].



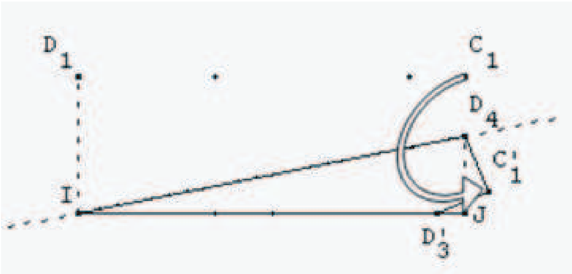
2. Elle plie la feuille de papier dans le sens de la longueur, le long de (IJ).
   Soit D_1 la nouvelle position de D. D_1 et A_1 sont confondus.
   Soit C_1 la nouvelle position de C. C_1 et B sont confondus.



3. Elle replie le coin supérieur gauche, D_1 sur (IJ) en D'_1 . L'axe de pliage coupe (A_1B) en D_2.
   Elle fait de même avec A_1, de l'autre côté de la feuille : elle replie A_1 sur (IJ) en A'_1.
   L'axe de pliage coupe (A_1B) en A_2. D'_1 et A'_1 sont confondus et D_2 et A_2 sont confondus.



4. Elle replie D_2 sur (IJ) en D'_2.
   L'axe de pliage coupe (A_1B) en D_3.
   Elle fait de même avec A_2 , de l'autre côté de la feuille : elle replie A_2 sur (IJ) en A'_2.
   L'axe de pliage coupe (A_1B) en A_3. D'_2 et A'_2 sont confondus D_3 et et A_3 sont confondus.



5. Elle replie D_3 sur (IJ) en D'$_3$.
   L'axe de pliage coupe (BJ) en D_4.
   Elle fait de même avec A_3, de l'autre côté de la feuille : elle replie A_3 sur (IJ) en A'$_3$.
   L'axe de pliage coupe (BJ) en A_4. D'$_3$ et A'$_3$ sont confondus et D_4 et A_4 sont confondus.
   Soit C'$_1$ la nouvelle position de C_1.

5. Éléonore déplie partiellement le dernier pliage de telle façon que les plans ID_4B' et ID_4J soient orthogonaux. L'avion est alors prêt.

On considère que

- Les ailes de l'avion sont les quadrilatères $ID_3C_1D_4$ et IA_3BA_4.
- Le fuselage est le triangle IJD_4.

Vous pouvez réaliser ce pliage en vous aidant des feuilles de papier à votre disposition.

Première partie

1. Quelle est la mesure des angles $\widehat{JID_2}$, $\widehat{JID_3}$ et $\widehat{JID_4}$?
2. Montrer que $D'_3 \in$ [IJ].
3. Quelle est l'aire du fuselage ? Quelle est l'aire des ailes ?

Seconde partie
Eléonore dispose maintenant d'une feuille de papier rectangulaire de dimensions : $L \times \ell$.
Après avoir disposé la feuille de papier dans le format paysage et après l'avoir plié en deux le long de la plus grande médiane du rectangle, on commence à compter le nombre de pliages en utilisant le même protocole de pliage que précédemment. Elle s'arrête lorsque l'axe de pliage coupe la feuille de papier sur [BJ].

1. Est-il possible d'avoir un seul pliage ?
   Est-il possible d'avoir deux pliages ? Quand cela pourrait-il arriver ?
2. Voici un algorithme :

Variables	- ℓ un réel - L un réel - n un entier
Entrée ;	Demander la valeur de ℓ Demander la valeur de L
Initialisation :	Affecter à n la valeur 1
Traitement :	Tant que $2\tan\dfrac{90^\circ}{2^n} > \dfrac{\ell}{L}$ Affecter à n la valeur $n+1$ Fin Tant que
Sortie :	Afficher n.

   a) Qu'affiche-t-il pour $L = 29,7$ cm et $\ell = 21$ cm ?
   b) Quel est l'intérêt de cet algorithme pour Éléonore ?

Éléments de solution

Première partie

1. Les angles $\widehat{JID_2}, \widehat{JID_3}$ et $\widehat{JID_4}$ mesurent respectivement $\dfrac{90}{2} = 45^\circ$, $\dfrac{90}{2^2} = 22,5^\circ$ et $\dfrac{90}{2^3} = 11,25^\circ$.
2. D'$_3 \in [IJ] \Leftrightarrow ID_3 \leqslant 29,7$ cm car $ID'_3 = ID_3$.
   Or $ID_3 = \dfrac{ID_1}{\cos\widehat{D_1ID_3}} = \dfrac{10,5}{\cos(90-22,5)} \approx 27,44$ cm.

3. Soit A_1 l'aire du fuselage. Elle correspond à celle du triangle IJD_4.

$$A_f = \frac{IJ \times JD_4}{2} = \frac{29,7 \times 29,7 \times \tan 11,25^\circ}{2} \approx 87,73\text{cm}^2.$$

Soit A_a l'aire des ailes. Elle correspond à deux fois celle du trapèze $\text{ID}_4\text{B'D'}_3$. Or celle-ci correspond à l'aire du rectangle IJBD_1 à laquelle on retranche l'aire du triangle ID_1D_3 et celle du triangle IJD_4.

$$\begin{aligned} A_e &= \left(IJ \times ID_1 - \frac{ID_1 \times D_1D_3}{2} - \frac{IJ \times JD_4}{2}\right) \times 2 \\ &= \left(IJ \times ID_1 - \frac{ID_1 \times ID_3 \times \cos \widehat{D_1D_3I}}{2} - A_f\right) \times 2. \end{aligned}$$

On a donc

$$= \left(10,5 \times 29,7 - \frac{27,44 \times \cos 22,56^\circ \times 10,5}{2} - 87,73\right) \times 2 \approx 182,05\text{cm}^2.$$

Deuxième partie

1. On ne peut pas avoir l'axe de pliage coupant [BJ] dès le premier pliage car on aurait : $\tan 45^\circ < \dfrac{\ell/2}{L}$ c'est-à-dire $2L < \ell$, ce qui est impossible car $L > \ell$.
   Cependant on peut avoir l'axe de pliage coupant [BJ] au deuxième pliage car on aurait $\tan \dfrac{45^\circ}{2} < \dfrac{\ell/2}{L}$ c'est-à-dire $2L \times \tan \dfrac{45^\circ}{2} < \ell$. Soit $0,83 \times L < \ell < L$.
2. Pour que l'axe de pliage coupe la feuille de papier sur [BJ] en exactement n pliages, il faut que $\tan \dfrac{45^\circ}{2^n} < \dfrac{\ell/2}{L} < \tan \dfrac{45^\circ}{2^{n-1}}$. C'est-à-dire $2\tan \dfrac{45^\circ}{2^n} < \dfrac{\ell}{L} < 2\tan \dfrac{45^\circ}{2^{n-1}}$.
3. a) Pour $L = 19,7$ cm et $\ell = 21$ cm, on retrouve $n = 4$.
   b) Éléonore pourra construire son avion.

RETOUR AU SOMMAIRE

CAEN

Troisième exercice

Séries autres que S

Passons à la suite

Énoncé

Observez, peut-être avec une certaine surprise, les trois lignes suivantes :

① $1+2=3$
② $4+5+6=7+8$
③ $9+10+11+12=13+14+15$

1. Écrire les égalités ④ et ⑤ suivantes.
2. Il existe une égalité qui commence par 1024, sauriez-vous dire :
   a) Quel est le numéro de cette ligne ?
   b) Combien le membre de gauche a-t-il de termes ?
   c) Quel est le dernier terme du membre de droite ?
3. A votre avis :
   a) Dans quelle égalité du même genre verra-t-on le terme 2013 ?
   b) Dans quel membre se situe-t-il ? (gauche ou droite)
   c) Donnez alors le premier et le dernier terme de chaque membre de cette égalité.
4. Démontrer la $\text{n}^{\text{ième}}$ égalité.
5. En déduire la somme des termes d'un des membres où se situe 2013.

On rappelle que la somme des n premiers entiers naturels (non nul !) est $\dfrac{n(n+14)}{2}$.

Éléments de solution

1. ④ $16+17+18+19+20=21+22+23+24$
   ⑤ $25+26+27+28+29+30=31+32+33+34+35$.
2. Il est utile de remarquer que chaque ligne commence par un carré (le numéro de la ligne)
   Pour la ligne ④, elle commence par $④^2=16$; elle possède ④ $+\ 1$ termes dans le membre de gauche et ④ termes dans le membre de droite.
   a) Comme $1024=32^2$, cette égalité est la $32^{\text{ème}}$.
   b) Il y a $32+1=33$ termes dans le membre gauche.
   c) Le dernier terme du membre de droite est alors $33^2-1=1089-1=1088$.
3. a) Le carré inférieur à 2013 est 44 puisque $\sqrt{2013}=44,87$ ($44^2=1936$) ; ainsi 2013 est dans la $44^{\text{ème}}$ égalité.
   b) le membre de gauche a 45 termes et comme $1936+44=1980$ (dernier terme du membre de gauche) cela entraine que 2013 est dans le membre de droite.
   c) $1936+\cdots+1980=1981+\cdots+2024$.

4. Factorisons le premier membre de l'égalité de la n$^{\text{ème}}$ ligne $A = n^2 + \big(n^2+1\big) + \big(n^2+2\big) + \cdots + \big(n^2+n\big) = (n+1)\times n^2 + \frac{n(n+1)}{2} = (n+1)\times\left(n^2+\dfrac{n}{2}\right)$

   $A = (n+1)\times n\times\left(n+\dfrac{1}{2}\right) = n\times(n+1)\times\dfrac{2n+1}{2} = \dfrac{n\times(n+1)\times(2n+1)}{2}$

   $A = \dfrac{n\times(n+1)\times(2n+1)}{2}$.

   B= $\big(n^2+n+1\big) + \big(n^2+n+2\big) + \cdots + \big(n^2+n+n\big) = n\times n^2 + n\times n + \dfrac{n\times(n+1)}{2}$

   $= n\times\left(n^2+n+\dfrac{n+1}{2}\right) = n\times\left((n+1)\times n+\dfrac{n+1}{2}\right) = n\times\left((n+1)\times\left(n+\dfrac{1}{2}\right)\right)$

   $= n\times\left((n+1)\times\left(\dfrac{2n+1}{2}\right)\right) = \dfrac{n\times(n+1)\times(2n+1)}{2}$

   $B = \dfrac{n\times(n+1)\times(2n+1)}{2}$.

   Ainsi $A = B$.

5. Pour $n = 44$

$$A = \frac{44\times(44+1)\times(2\times 44+1)}{2} = \frac{44\times 45\times 89}{2} = 88\,110.$$

RETOUR AU SOMMAIRE

CLERMONT-FERRAND

Premier exercice

Toutes séries

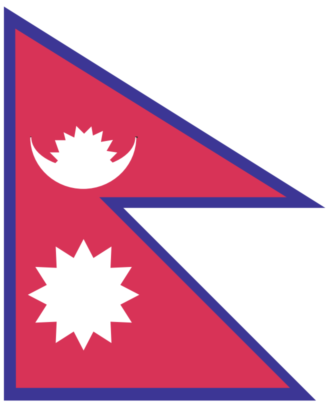
Un peu de vexillologie…

Énoncé

La vexillologie est un terme qui désigne l'étude des drapeaux.

I. Le Togo a été admis à l'ONU en 1960 et possède le drapeau suivant :

1. Le drapeau du Togo est de forme rectangulaire, et sa construction suit le protocole suivant. Construire un carré ABCD de côté de longueur 4. Placer le point M, milieu de [AB] puis le point E sur [AB) tel que $MC = ME$. Placer enfin le point F de telle sorte que AEFD soit un rectangle.
2. Quelle est la longueur de ce rectangle ?
3. Répondre à la même question si la longueur du côté du carré est égale à x.
4. Calculer la proportion de ce drapeau, c'est-à-dire le quotient $\dfrac{\text{largeur}}{\text{longueur}}$. En donner une valeur approchée au millième. (Le Togo est le seul pays dont le drapeau a cette proportion qui est le nombre d'or, noté Φ)
5. Devant le siège de l'ONU, x est égal à 180 cm. Quelle est la longueur du drapeau (arrondir au centimètre près) ?



II. Le Népal est devenu membre de l'ONU en 1955. Le drapeau actuel du Népal (figurant page précédente) a été adopté en 1962. Il possède deux particularités : la première est celle d'être plus haut que large et la seconde d'être le seul drapeau national qui n'est pas rectangulaire.

1. Sur le site du consulat du Népal, on trouve une méthode de construction du drapeau, dont voici une version, en différentes langues étrangères. Traduire celle de votre choix en français

How to make the national flag

1) Draw an [AB] segment of the required lenght.
2) Draw an (AC) line perpendicular to (AB) going through A. Mark C so that AC = AB + 1/3 AB.
3) On [AC] mark D so that AD = AB. Draw [BD].
4) Mark E on [BD] so that BE = AB.
4) Draw the line parallel to (AB) trough E. It crosses [AC] through F.
6) Mark G on (EF) on one of the two sides of (AC) and on the same side as B so that FG = AB.
7) Draw [CG].

Methode zur Konstruktion der nationalen Fahne

1) Zeichnen Sie ein Segment [AB] mit der gewünschten Länge.
2) Zeichnen Sie die Gerade (AC), die senkrecht zu der Gerade (AB) ist. Der Schnittpunkt ist A. Setzen Sie C so dass AC = AB + 1/3 AB.
3) Setzen Sie D auf [AC], so dass AD = AB. Zeichnen Sie [BD].
4) Setzen Sie E auf [BD] so dass BE = AB.
5) Zeichnen Sie die Parallele zu (AB) ; Der Schnittpunkt ist E. Sie schneidet (AC) bei F.
6) Setzen Sie auf (EF), auf die selbe Seite wie B in Bezug auf (AC) so dass FG = AB.
7) Zeichnen Sie [CG].

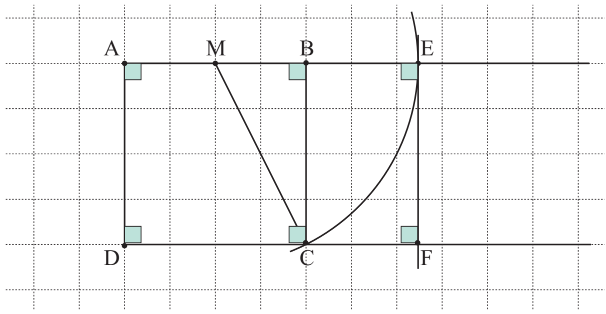
Método de construcción de la bandera nacional

1) Trazar un segmento [AB] de longitud cualquiera.
2) Trazar una recta (AC) perpendicular a (AB) que pase por A. Colocar C de tal modo que AC = AB + 1/3 AB.
3) En [AC], colocar D de tal modo que AD =AB. Trazar [BD]..
4) Colocar E en [BD] de tal modo que BE = AB.
5) Trazar la recta paralela a (AB) que pasa por E. Corta a (AC) en F.
6) Colocar G en (EF) del mismo lado que B con respecto a (AC) de tal modo que FG = AB.
7) Trazar [CG].

2) Construire un drapeau népalais tel que AB = 6 cm
3) On pose AB = x. Calculer la proportion $\dfrac{\text{largeur}}{\text{hauteur}}$ de ce drapeau.
4) Calculer l'aire d'un drapeau népalais en fonction de x = AB.
5) Dans le règlement de l'ONU, il est écrit que tout drapeau flottant au siège de l'ONU est rectangulaire. Heureusement pour le Népal, une exception est faite à condition que l'aire du drapeau ne dépasse pas celle de celui du Togo. Déterminer alors la longueur AB maximale que peut avoir le côté du drapeau népalais (arrondir au centimètre près).

Éléments de solution

I. 1. Voici la construction (page suivante) :



2. Dans le triangle MBC rectangle en B, on applique le théorème de Pythagore :
   $MC^2 = MB^2 + BC^2$
   $MC^2 = 2^2 + 4^2 = 16 + 4 = 20$
   $MC = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$
   Les points A, M et E étant alignés dans cet ordre, $AE = AM + ME = 2 + 2\sqrt{5} = 2\left(1 + \sqrt{5}\right)$.
   La longueur de ce rectangle est égale à $2\left(1 + \sqrt{5}\right)$.

3. On raisonne de la même manière si la longueur est égale à x et on obtient : $AE = \frac{x}{2}\left(1 + \sqrt{5}\right) = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}x$.

4. $\Phi = \frac{\text{longueur}}{\text{largeur}} = \frac{AE}{AD} = \frac{\frac{1+\sqrt{5}}{2}x}{x} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,618$.

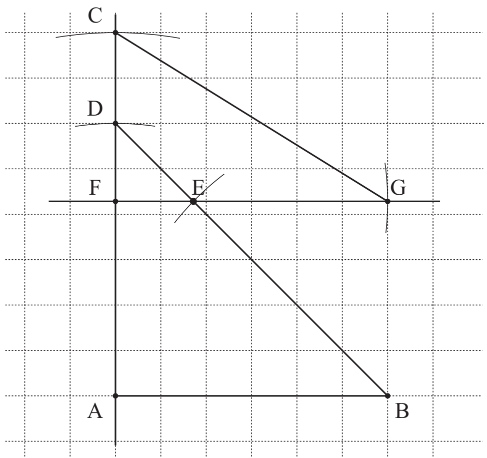
5. $AE = 180 \times \Phi \approx 291$ cm

II. 1.

Méthode de construction du drapeau national

1) Tracer un segment [AB] de la longueur souhaitée.
2) Tracer une droite (AC) perpendiculaire à (AB) passant par A. Placer C tel que $AC = AB + \frac{1}{3}AB$.
3) Sur le segment [AC], placer D tel que $AD = AB$. Tracer [BD].
4) Placer E sur [BD] tel que $BE = AB$.
5) Tracer la droite parallèle à (AB) passant par E. Elle coupe (AC) en F.
6) Placer G sur (EF) du même côté que B par rapport à (AC) tel que $FG = AB$.
7. Tracer [CG].

2. Voici la construction :



3. Pour calculer la proportion de ce drapeau, il nous faut connaître la longueur AC : $AC = AB + \frac{1}{3}AB = \frac{4}{3}x$.

   Donc $\dfrac{\text{longueur}}{\text{largeur}} = \dfrac{\frac{4}{3}x}{x} = \dfrac{4}{3}$.
4. Notons $\mathrm{A_N}$ l'aire du drapeau népalais. $\mathrm{A_{ABD}}$ l'aire du triangle ABD, $\mathrm{A_{CGF}}$ l'aire du triangle CGF et $\mathrm{A_{EFD}}$ l'aire du triangle EFD.
   Or $\mathrm{A_N} = \mathrm{A_{ABD}} + \mathrm{A_{CGF}} - \mathrm{A_{EFD}}$

   Calcul de $\mathrm{A_{ABD}}$: $\mathrm{A_{EFD}} = \dfrac{x^2}{2}$.

   Calcul de $\mathrm{A_{CGF}}$: $\mathrm{A_{CGF}} = \dfrac{FG \times FC}{2}$

   $FG = AB = x$
   F, D et C étant alignés dans cet ordre, $FC = FD + DC$

   $DC = \dfrac{1}{3}x$

   Il nous reste à calculer la longueur DF.
   D, E et B étant trois points alignés dans cet ordre, $DE = DB - EB = \sqrt{2}x - x = \left(\sqrt{2}-1\right)x$.
   Le triangle DEF est une réduction du triangle DBA. Donc DEF est rectangle en F et $DF = FE$.

   $DE = \sqrt{2}DF$ donc $DF = \dfrac{DE}{\sqrt{2}} = \left(1 - \dfrac{\sqrt{2}}{2}x\right)$.

   Donc $FC = \dfrac{1}{3}x + \left(1 - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)x = \left(\dfrac{4}{3} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)x$.

   Donc $\mathrm{A_{CGF}} = \dfrac{FG \times FC}{2} = \dfrac{1}{2} \times x \times \left(\dfrac{4}{3} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)x = \dfrac{1}{2} \times \left(\dfrac{4}{3} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)x^2$

   Calcul de $\mathrm{A_{EFD}}$:

   $$\mathrm{A_{EFD}} = \frac{DF \times EF}{2} = \frac{DF^2}{2} = \frac{1}{2}\times\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 x^2 = \frac{1}{2}\times\left(1 + \frac{1}{2} - \sqrt{2}\right)x^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} - \sqrt{2}\right)x^2.$$

   $$\text{Ainsi } \mathrm{A_N} = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\times\left(\frac{4}{3} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)x^2 - \frac{1}{2}\times\left(\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)x^2 = \frac{1}{2}\times x^2 \times\left(1 + \frac{4}{3} - \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{3}{2} + \sqrt{2}\right).$$

   Soit $\boxed{\mathrm{A_N} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{5}{6} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)x^2}$.
5. Notons $\mathrm{A_T}$ l'aire du drapeau du Togo ;
   $\mathrm{A_T} = 180 \times 180 \times \Phi = 32\,400\Phi \approx 180 \times 291 \approx 52\,424\text{cm}^2$.
   Il nous faut donc résoudre l'inéquation $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{5}{6} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)x^2 \leqslant 32\,400\Phi \quad \Leftrightarrow \dfrac{5+3\sqrt{2}}{12}x^2 \leqslant 32\,400\Phi$

   $$\Leftrightarrow x^2 \leqslant \frac{6}{5+3\sqrt{2}} \times 32\,400\Phi \quad \Leftrightarrow x \in \left[-\sqrt{\frac{6}{5+3\sqrt{2}} \times 32\,400\Phi}\ ;\ \sqrt{\frac{6}{5+3\sqrt{2}} \times 32\,400\Phi}\right].$$

   x étant une longueur, x est positif et $\sqrt{\dfrac{6}{5+3\sqrt{2}} \times 32\,400\Phi} \approx 184,47$ donc la longueur maximale que peut prendre AB est 184 cm (à un centimètre près).

RETOUR AU SOMMAIRE

CLERMONT-FERRAND

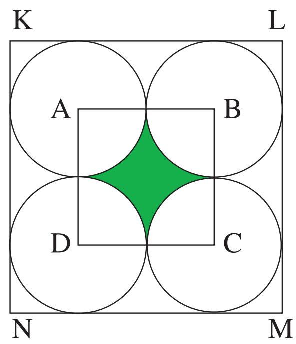
Deuxième exercice

Série S

Les cibles

Énoncé

Partie A



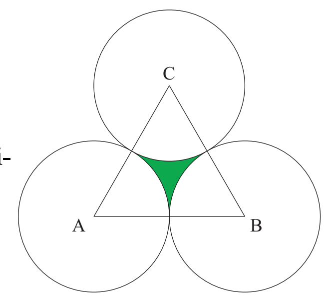
ABCD est un carré de côté 2.
On construit quatre cercles C_A , C_B, C_C et C_{AD} centrés en A, B, C et D respectivement et tangents deux à deux, ainsi que le carré NMLK, comme sur la figure ci-contre.

a) Quelle est l'aire du carré NMLK ?

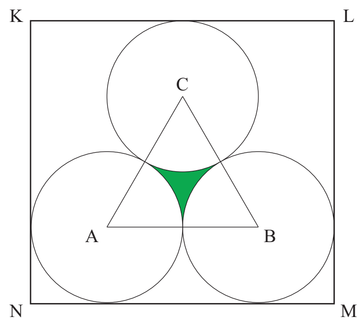
b) Déterminer l'aire de la partie colorée en vert.

c) On considère que NMLK est une cible. On lance une fléchette. On suppose que la fléchette atteint toujours la cible. On gagne si elle tombe dans la partie colorée en vert.
Quelle est la probabilité de gagner ?

Partie B

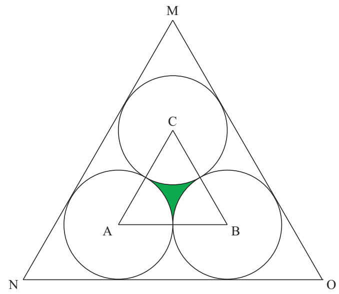


1. ABC est un triangle équilatéral de côté 2.
   a) Quelle est l'aire du triangle ABC ?
   b) On construit trois cercles C_A , C_B, C_C, centrés en A, B et C respectivement et tangents deux à deux, comme sur la figure ci-contre.
   Déterminer l'aire de la partie colorée.



2. On construit le rectangle MNLK de la façon suivante :
   (NM) est parallèle à (AB) et tangente à C_A et à C_B ;
   (NK) est tangente à C_A ;
   (KL) est tangente à C_C ;
   (ML) est tangente à C_B ;
   les trois cercles sont à l'intérieur du rectangle.

   Déterminer les dimensions du rectangle NMLK.



3. On construit le triangle équilatéral NOM de la façon suivante :
   (NO) est parallèle à (AB) et tangente à $\mathrm{C_A}$ et à $\mathrm{C_A}$
   (NM) est parallèle à (AC) et tangente à $\mathrm{C_A}$ et à $\mathrm{C_B}$
   (MO) est parallèle à (CB) et tangente à $\mathrm{C_C}$ et à $\mathrm{C_B}$
   Déterminer la mesure de son côté.

4. On construit deux cibles, l'une rectangulaire, l'autre triangulaire, avec chacun des modèles précédents.
   On lance une fléchette : on gagne si elle tombe dans la partie colorée en vert.
   On suppose que la fléchette atteint toujours la cible.
   Sous l'hypothèse d'équiprobabilité, avec quelle cible a-t-on le plus de chance de gagner ?

Éléments de solution

Partie A

a) $NM = 2AB = 4$ donc aire(NMLK)$= 4^2 = 16$.

b) Aire de la partie colorée en vert = aire ABCD - 4 × aire d'un quart de disque de rayon 1

$$= 2^2 - 4 \times \frac{\pi \times 1^2}{4} = 4 - \pi$$

c) $p(\text{gagner}) = \dfrac{\text{aire partie en vert}}{\text{aire cible}} = \dfrac{4-\pi}{16} \approx 0,054.$

Partie B

1. a) La hauteur h d'un triangle équilatéral de côté c mesure : $h = c\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (s'obtient en utilisant le théorème de Pythagore dans un demi-triangle équilatéral).

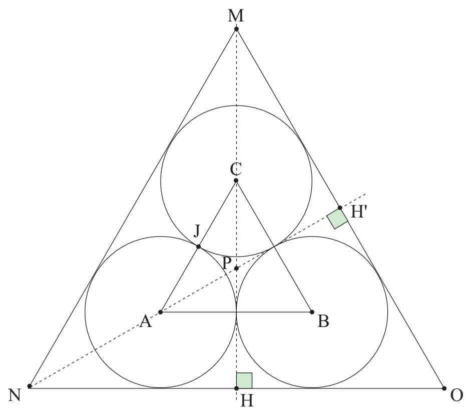
   Aire du triangle ABC $= \dfrac{AB \times h}{2} = \dfrac{2 \times 2\frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \sqrt{3}.$

   b) Aire de la partie colorée en vert = aire du triangle ABC - 3× aire d'un sixième de disque de rayon 1.

   Aire de la partie colorée en vert $= \sqrt{3} - 3 \times \dfrac{\pi \times 1^2}{6} = \sqrt{3} - \dfrac{\pi}{2}.$

2. $NM = 1 + AB + 1 = 4.$
   $NK = 1 +$ hauteur du triangle ABC $+ 1 = 2 + \sqrt{3} \approx 3,7.$

3. Dans un triangle équilatéral, hauteurs, médianes, bissectrices sont confondues.



   Soit P le point d'intersection des hauteurs du triangle ABC mais aussi du triangle NOM.
   H est le pied de la hauteur issue de M du triangle NOM,
   H' celui de la hauteur issue de N,
   J est le pied de la hauteur issue de C du triangle ABC.

   On a $MH = MO\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $CJ = 2 \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}.$
   P est aussi le centre de gravité du triangle NOM et du triangle ABC :

   $PH = \dfrac{1}{3}MH = \dfrac{\sqrt{3}}{3}MO$ et $PJ = \dfrac{1}{3}CJ = \dfrac{\sqrt{3}}{3}.$

   Or $PH = PJ + JH = PJ + 1 = \dfrac{\sqrt{3}}{3} + 1.$

   D'où $\dfrac{\sqrt{3}}{6}MO = \dfrac{\sqrt{3}}{3} + 1 \Leftrightarrow MO = \dfrac{6}{\sqrt{3}}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3} + 1\right) = 2 + 2\sqrt{3}.$

<u>*Autre méthode :*</u> Si A' est le point du segment [NH] tel que le triangle NA'A soit rectangle en A', alors $AA' = 1$ et $\widehat{A'NA} = 30^o$.
Pour des raisons de symétrie, $NO = 2NA' + AH = \dfrac{2}{\tan(30^o)} + 2 = 2\sqrt{3} + 2$.

4. **Cible rectangulaire** : $p(\text{gagner}) = \dfrac{\text{aire partie verte}}{\text{aire rectangle}} = \dfrac{\sqrt{3} - \frac{\pi}{2}}{NM \times ML} = \dfrac{\sqrt{3} - \frac{\pi}{2}}{4 \times \left(2 + \sqrt{3}\right)} \approx 0,0108$.

   Cible triangulaire : $p(\text{gagner}) = \dfrac{\text{aire partie verte}}{\text{aire triangle NOM}} = \dfrac{\sqrt{3} - \frac{\pi}{2}}{\frac{1}{2} \times MO \times MH}$

$$= \frac{2 \times \left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{2}\right)}{MO \times MO\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{4 \times \left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{2}\right)}{\left(2 + 2\sqrt{3}\right)^2 \sqrt{3}}.$$

$$p(\text{gagner}) = \frac{\sqrt{3} - \frac{\pi}{2}}{\left(1 + \sqrt{3}\right)^2 \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3} - \frac{\pi}{2}}{6 + 4\sqrt{3}} \approx 0,0125.$$

   On a plus de chance de gagner avec la cible triangulaire.

RETOUR AU SOMMAIRE

CLERMONT-FERRAND

Troisième exercice

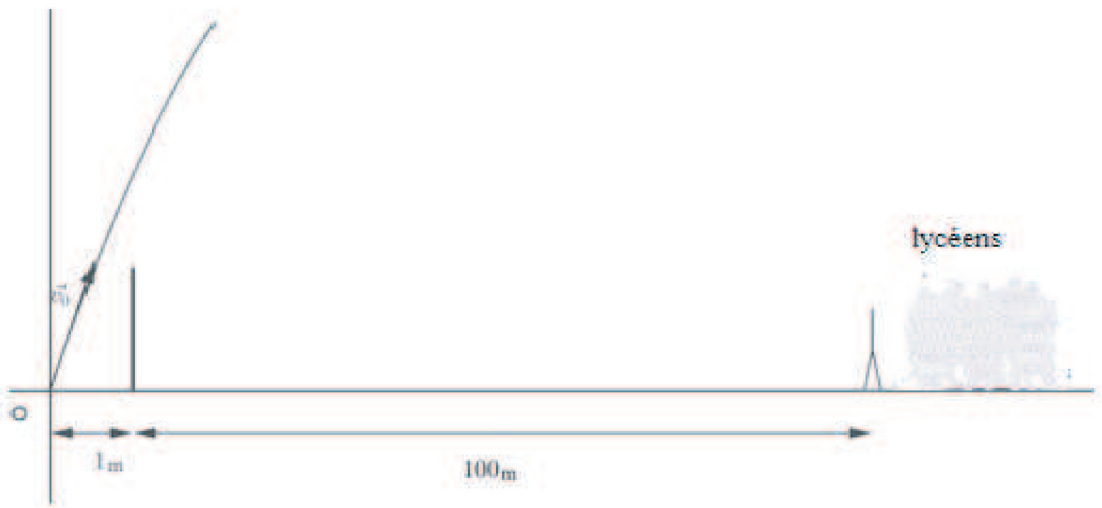
Séries autres que S

Feu d'artifice

Énoncé

Pour fêter les 50 ans du lycée Vercingétorix, un feu d'artifice sera lancé avec une vitesse initiale v_0 (en m.s^{-1}).

Les artificiers sont cachés des lycéens par un mur, de hauteur 2 m, placé à 1 m du point de lancement de la fusée. Les lycéens sont placés à 100 m du mur, derrière des barrières de sécurité.



La trajectoire (hauteur en m) de la fusée est décrite par l'équation : $y = \dfrac{-50}{v_0^2}x^2 + 3x$.

La fusée doit passer au-dessus du mur, tout en retombant, en cas de non-explosion en l'air, avant les barrières de sécurité.

1. La vitesse initiale v_0 peut-elle être égale à 5 m.s^{-1} ?
2. a) Si la vitesse initiale est 50 m.s^{-1} et que la fusée n'explose pas en l'air, à quelle distance du mur retombe-t-elle ?

   b) La vitesse initiale peut-elle être égale à 50 m.s^{-1} ?
3. La vitesse initiale v_0 peut-elle être égale à 25 m.s^{-1} ?
4. Quelles sont les valeurs possibles de v_0 ?
5. En agglomération, on ne peut pas dépasser 50 km.h^{-1}. La fusée peut-elle être lancée à 50 km.h^{-1} ?

Éléments de solution

Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{-50}{v_0^2}x^2 + 3x$.

1. Si $v_0 = 5\text{m};\text{s}^{-1}$, alors $f(x) = -2x^2 + 3x$.
   $f(1) = 1 < 2$: **la fusée ne passe pas au-dessus du mur.**
2. a) Si $v_0 = 50$ m.s^{-1}, alors $f(x) = \dfrac{-1}{50}x^2 + 3x$.
   - $f(1) = \dfrac{-1}{50} + 3 = \dfrac{149}{50} = 2.98 > 2$: **la fusée passe au-dessus du mur**.
   - $f(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{-1}{50}x^2 + 3x = 0 \Leftrightarrow x\left(\dfrac{-1}{50}x + 3\right) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $\dfrac{-1}{50}x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 150$.
     $x = 0$ correspond à la position initiale de la fusée. **La fusée retombe à 149 m du mur**.

   b) C'est-à-dire que **la fusée tombe sur les lycéens**. La vitesse initiale ne peut pas être égale à 50 m.s^{-1}.
3. Si $v_0 = 25$ m.s^{-1}, alors $f(x) = \dfrac{-2}{25}x^2 + 3x$.
   - $f(1) = \dfrac{-2}{25} + 3 = \dfrac{73}{25} = 2,92 > 2$: **La fusée passe au-dessus du mur.**
   - $f(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{-2}{25}x^2 + 3x = 0 \Leftrightarrow x\left(\dfrac{-2}{25}x + 3\right) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $\dfrac{-2}{25}x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = \dfrac{75}{2} = 37,5 < 101$.
     Si la fusée n'explose pas en vol, elle retombe bien avant les lycéens.
4. v_0 doit varifier deux conditions :
   - la fusée passe au-dessus du mur $\Leftrightarrow f(1) > 2$.
   - La fusée retombe avant les barrières de sécurité $\Leftrightarrow$ le réel x tel que $f(x) = 0$ est inférieur à 101.

   $f(1) > 2 \Leftrightarrow \dfrac{-50}{v_0^2} + 3 > 2 \Leftrightarrow \dfrac{50}{v_0^2} < 1 \Leftrightarrow 50 < v_0^2 \Leftrightarrow v_0^2 - 50 > 0 \Leftrightarrow \left(v_0 - 5\sqrt{2}\right)\left(v_0 + 5\sqrt{2}\right) > 0$

   Et comme v_0 est une vitesse, c'est un réel strictement positif, on obtient : $v_0 > 5\sqrt{2}$ (avec $5\sqrt{2} \approx 7,07$).

   $f(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{-50}{v_0^2}x^2 + 3x = 0 \Leftrightarrow x\left(\dfrac{-50}{v_0^2}x + 3\right) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $\dfrac{-50}{v_0^2}x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = \dfrac{3v_0^2}{50}$.

   Or ce dernier réel x doit être inférieur à 101, d'où :

   $$\frac{3v_0^2}{50} < 101 \Leftrightarrow 3v_0^2 < 5050 \Leftrightarrow v_0^2 - \frac{5050}{3} < 0 \Leftrightarrow \left(v_0 - \frac{5\sqrt{202}}{\sqrt{3}}\right)\left(v_0 + \frac{5\sqrt{202}}{\sqrt{3}}\right) < 0$$
   $$\Leftrightarrow \frac{-5\sqrt{202}}{\sqrt{3}} < v_0 < \frac{5\sqrt{202}}{\sqrt{3}}.$$

   En tenant compte que $v_0 > 0$, on obtient : $0 < v_0 < \dfrac{5\sqrt{202}}{\sqrt{3}}$ avec $\dfrac{5\sqrt{202}}{\sqrt{3}} \approx 41,03$.

   Finalement $\boxed{5\sqrt{2} < v_0 < \dfrac{5\sqrt{202}}{\sqrt{3}}}$.
5. 50 km.h^{-1} $= \dfrac{50000}{3600}$ m.s^{-1} $= \dfrac{125}{9}$ m.s^{-1} $\approx 13,89$ m.s^{-1}.

   Donc $\boxed{\dfrac{125}{9} \in \left]5\sqrt{2}\ ;\ \dfrac{5\sqrt{202}}{\sqrt{3}}\right[}$

   La fusée peut être lancée à 50 km.h^{-1}.

RETOUR AU SOMMAIRE

CORSE

Premier exercice

Toutes séries

Les tandems

Énoncé

On dit qu'un couple d'entiers naturels (a, b) est un tandem s'il vérifie $a \leqslant b$ et $\dfrac{a^2+b^2}{1+ab}$ est un entier naturel.

Si c'est le cas, on note $n = \dfrac{a^2+b^2}{1+ab}$ cet entier et on dit que le couple (a, b) est un tandem de type n.

1. a. Le couple (2, 8) est-il un tandem ? Même question pour les couples (3, 5) et (27, 3).
   b. Tout couple $(0, b)$ (avec b entier naturel) est-il un tandem ? Si oui, préciser son type.
   c. Trouver tous les tandems (a, b) pour lesquels $b = 3$.
2. Trouver tous les tandems de type 0.
3. dans cette question, on cherche les tandems (a, b) pour lesquels $a = b$.
   a. Montrer pour tout entier a l'inégalité $\dfrac{2a^2}{1+a^2} < 2$.
      En déduire qu'un tandem (a, a) est de type 0 ou 1.
   b. Déterminer tous les tandems de forme (a, a).
4. Dans cette question on cherche les tandems de type 1.
   a. Si (a, b) est un tandem de type 1, montrer, en utilisant une identité remarquable, que $b - a$ vaut 0 ou 1.
   b. Déterminer tous les tandems de type 1.
5. Existe-t-il des tandems de type 2 ?
6. Désormais on s'intéresse aux tandems (a, b) de type n pour lesquels $0 < a < b$ et dont le type n vérifie $n \geqslant 2$.
   a. On appelle successeur du couple (a, b) le couple $(a_1, b_1) = (b, nb - a)$.
      Montrer que le successeur d'un tandem (a, b) de type n est également un tandem de type n.
   b. On appelle prédécesseur du couple (a, b) le couple $(a_{-1}, b_{-1}) = (na - b, a)$.
      Montrer que le prédécesseur d'un tandem (a, b) de type n est également un tandem de type n.
   c. Quel est le prédécesseur du successeur de (a, b) ? Quel est le successeur du prédécesseur de (a, b) ?
   d. On note (a_{-2}, b_{-2}) le prédécesseur de (a_{-1}, b_{-1}), (a_{-3}, b_{-3}) le prédécesseur de (a_{-2}, b_{-2}) …
      Les prédécesseurs successifs de (a, b) seront notés (a_{-p}, b_{-p}) pour tout entier naturel non nul p.
      Démontrer que l'un des prédécesseurs successifs de (a, b) vérifie $a_{-p} = 0$. Que peut-on en déduire sur le type n d'un tandem si $n \geqslant 2$?
7. a. Déterminer tous les tandems de type 3.
   b. Déterminer tous les tandems (a, b) de type 4 vérifiant $b \leqslant 3000$.
   c. Déterminer tous les tandems (a, b) de type 9 vérifiant $b \leqslant 3000$.

Éléments de solution

1. a) • $2 \leqslant 8$ et $\dfrac{2^2+8^2}{1+2\times 8} = \dfrac{68}{17} = 4$ est entier, donc $(2,8)$ est un tandem.

   • $\dfrac{3^2+5^2}{1+3\times 5} = \dfrac{34}{16} = \dfrac{17}{8}$ n'est pas un entier donc $(3,5)$ n'est pas un tandem.

   • $27 > 3$ donc $(27,3)$ n'est pas un tandem.

   b) Le couple $(0,b)$ est un tandem de type b^2 car $0 \leqslant b$ et $\dfrac{0^2+b^2}{1+0\times b} = b^2$ est entier.

   c) On teste les couples $(0,3)$; $(1,3)$; $(2,3)$ et $(3,3)$ et on constate que seul $(0,3)$ convient (les divers quotients valent respectivement $9; \dfrac{5}{2}; \dfrac{13}{7}$ et $\dfrac{9}{5}$).

2. Si (a,b) est un tandem de type 0 on a $a^2+b^2 = 0$ donc a et b sont nuls. Le couple $(0,0)$ étant bien un tandem, c'est donc le seul de type 0.

3. a) $\dfrac{2a^2}{1+a^2} < 2 \Longleftrightarrow 2a^2 < 2a^2+2 \Longleftrightarrow 0 < 2$. Si (a,a) est un tandem alors $n = \dfrac{2a^2}{1+a^2} < 2$ donc n vaut 0 ou 1.

   b) Les tandems de la forme (a,a) sont ou bien de type 0 (et on a vu que le seul est $(0,0)$) ou bien de type 1, et alors $n = \dfrac{2a^2}{1+a^2} = 1$ donc $2a^2 = 1+a^2$ donc $a^2 = 1$ et comme a est positif, c'est que $a = 1$. Réciproquement le couple $(1,1)$ est bien un tandem de type 1.

   Finalement les seuls tandems de la forme (a,a) sont $(0,0)$ et $(1,1)$.

4. a) Si (a,b) est un tandem de type 1 on a

$$\frac{a^2+b^2}{1+ab} = 1 \implies a^2+b^2 = 1+ab \implies a^2-2ab+b^2 = 1-ab \implies (b-a)^2 = 1-ab$$
$$\implies (b-a)^2 \leqslant 1\,.$$

   L'entier positif ou nul $b-a$ vaut donc 0 ou 1.

   b) • Si (a,b) est un tandem de type 1 et $b-a = 0$, c'est un tandem de la forme (a,a) donc c'est $(0,0)$ ou $(1,1)$, mais le couple $(0,0)$ doit être exclu car il est de type 0, il reste donc $(1,1)$.

   • Si (a,b) est un tandem de type 1 et $b-a = 1$, alors comme on l'a vu :

$$a^2+b^2 = 1+ab \implies a^2+(a+1)^2 = 1+a(a+1) \implies 2a^2+2a+1 = a^2+a+1 \implies a^2+a = 0 \implies a = 0\,.$$

   Le seul couple possible de ce type est donc $(0,1)$.

5. Si (a,b) est un tandem de type 2 on a

$$\frac{a^2+b^2}{1+ab} = 2 \implies a^2+b^2 = 2+2ab \implies a^2-2ab+b^2 = 2 \implies (b-a)^2 = 2\,,$$

   ce qui est impossible car 2 n'est pas le carré d'un entier. On en déduit qu'il n'y a pas de tandem de type 2.

6. a) • Montrons que $\dfrac{a_1^2+b_1^2}{1+a_1b_1} = n$. Par hypothèse, on a $a^2+b^2 = n(1+ab)$, donc

$$\begin{aligned} a_1^2+b_1^2-n(1+a_1b_1) &= b^2+(nb-a)^2-n(1+b(nb-a)) \\ &= a^2+b^2-2nab+n^2b^2-n-n^2b^2+nab \\ &= a^2+b^2-n(1+ab) \;=\; 0\,. \end{aligned}$$

   • Montrons que $b_1 \geqslant a_1$. Puisqu'on a supposé $n \geqslant 2$ et $b \geqslant a$, on a

$$b_1 \;=\; nb-a \;\geqslant\; 2b-a \;\geqslant\; b \;=\; a_1\,.$$

   Cela montre également que b_1 est bien un entier naturel.

b) • Un calcul analogue à celui de la question précédente prouve que $\dfrac{a_{-1}^2 + b_{-1}^2}{1 + a_{-1}b_{-1}} = n$,

• Montrons que $a_{-1} \leqslant b_{-1}$. On a

$$\begin{aligned} a_{-1} \leqslant b_{-1} &\iff na - b \leqslant a \iff na \leqslant a + b \\ &\iff a(a^2 + b^2) \leqslant (a + b)(1 + ab) \iff a^3 \leqslant a + b + a^2 b\,. \end{aligned}$$

La dernière inégalité écrite est vérifiée puisque $a^3 \leqslant a^2 b$. En anticipant la question (d), on remarque qu'on a même l'inégalité stricte $a_{-1} < b_{-1}$ ou autrement dit $a_{-1} < a$.

• Montrons enfin que $a_{-1} \geqslant 0$. Puisque $a_{-1}^2 + b_{-1}^2 = n(1 + a_{-1}b_{-1})$, c'est que $1 + a_{-1}b_{-1} > 0$ donc, étant entier, $1 + a_{-1}b_{-1} \geqslant 1$ donc $a_{-1}b_{-1} \geqslant 0$ et comme $b_{-1} > 0$, on obtient $a_{-1} \geqslant 0$.

c) Le prédécesseur de (a_1, b_1) est $(na_1 - b_1, a_1) = (nb - (nb - a), b) = (a, b)$, et de la même manière on voit que le successeur de (a_{-1}, b_{-1}) est (a, b).

d,e) Partant de (a, b), on calcule ses prédécesseurs successifs $(a_{-1}, b_{-1}), \dots, (a_{-p}, b_{-p})$ et on continue tant que c'est possible, c'est-à-dire tant que la condition $a_{-p} > 0$ est vérifiée. Or ça ne peut se produire indéfiniment sinon les entiers $a, a_{-1}, \dots, a_{-p}, \dots$ formeraient une suite d'entiers naturels strictement décroissante, ce qui est impossible. Après un certain nombre p d'étapes on a donc $a_{-p} = 0$, donc le type n du tandem (a_{-p}, b_{-p}) est $n = b_{-p}^2$: c'est bien le carré d'un entier.

7. a) Il n'y a pas de tandem de type 3 car 3 n'est pas le carré d'un entier.

b) D'après les questions 6.(c) et 6.(d) les tandems de type 4 sont les divers successeurs de $(0, 2)$. Les premiers sont

$$(0, 2)\ ;\ (2, 8)\ ;\ (8, 30)\ ;\ (30, 112)\ ;\ (112, 418)\ ;\ (418, 1560)\,.$$

Le suivant est $(1560, 5822)$ et il ne vérifie pas la condition « $b \leqslant 3000$ », pas plus que les suivants car la suite des entiers b_p est croissante. On a donc trouvé toutes les solutions.

c) De même, ceux de type 9 sont les divers successeurs de $(0, 3)$. Ceux pour lesquels $b \leqslant 3000$ sont, pour des raisons analogues,

$$(0, 3)\ ;\ (3, 27)\ ;\ (27, 240)\ ;\ (240, 2133)\,.$$

RETOUR AU SOMMAIRE

CORSE

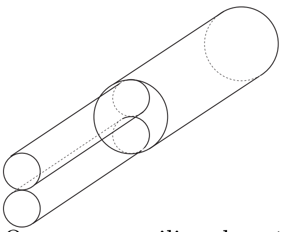
Deuxième exercice

Toutes séries

Géométrie et chirurgie

Énoncé

Un anévrisme d'un vaisseau sanguin est un gonflement ponctuel qui fait que les parois ne sont plus parallèles et il y a alors risque de rupture. Les chirurgiens peuvent installer une « endoprothèse », sorte de cylindre qui se place dans le vaisseau au niveau du gonflement et qui canalise le sang et ainsi isole les parois abîmées du flux sanguin.
Cependant certains anévrismes peuvent se situer au niveau d'une jonction de plusieurs artères et l'endoprothèse doit, à la fois isoler les parois du flux sanguin mais aussi le distribuer dans les différentes artères. Elle prend alors la forme d'un cylindre qui se prolonge par plusieurs cylindres de diamètres inférieurs. Le dessin ci dessous montre un exemple d'endoprothèse où un cylindre de rayon R débouche sur deux cylindres de rayons égaux à $\frac{R}{2}$.

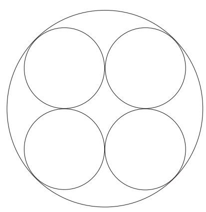


Il existe des endoprothèses où le cylindre principal se prolonge par trois ou quatre cylindres pouvant être de diamètres différents.
Nous allons étudier les relations entre les rayons de ces cylindres pour une artère souple modélisée par un cylindre de section circulaire déformable, dont le rayon intérieur est 1 cm.

On pourra utiliser les résultats suivant :

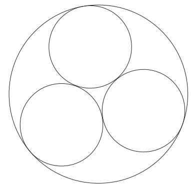
- Si deux cercles sont tangents en un point M, alors le point M est aligné avec les centres des deux cercles.
- Si une droite est tangente en un point M à un cercle de centre O, alors elle est perpendiculaire à la droite (OM).
- Un angle au centre d'un cercle de rayon r, dont la mesure en degrés est x, intercepte un arc de ce cercle de longueur $\frac{\pi r x}{180}$.

1. Une endoprothèse comporte quatre cylindres. Comme l'indique la figure les bases sont quatre disques de même rayon tangents entre eux et tangents intérieurement au cercle représentant le bord de la base du cylindre principal. L'artère épouse la forme du disque extérieur

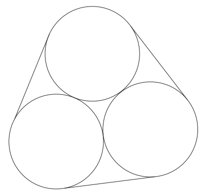


   a) Démontrer que les centres A, B, C et D des quatre cercles de même rayon, sont les sommets d'un losange.
   b) Démontrer que les points A, B, C, D sont sur un même cercle dont le centre est celui du cercle extérieur.
   c) Démontrer que ABCD est un carré.
   d) Démontrer que le rayon, en centimètres, des quatre cercles intérieurs est $\sqrt{2} - 1$.

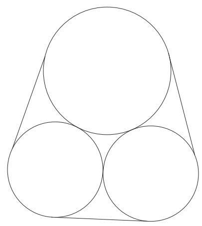
2. Un autre type d'endoprothèse comporte trois cylindres de bases tangentes entre elles et au cercle représentant le bord de la base du cylindre principal. Dans les mêmes conditions que précédemment calculer le rayon des trois cercles intérieurs.



3. Les chercheurs imaginent un nouveau type d'endoprothèse où la base du cylindre principal ne serait plus un disque mais une forme dont les bords sont des arcs de cercles ou des segments tangents aux cercles, de façon à ce que l'artère, qui est souple, épouse mieux les cylindres. En considérant que **l'artère épouse sans s'élargir** la forme extérieure de l'endoprothèse, calculer le rayon des trois cercles intérieurs.



4. Une nouvelle endoprothèse comporte trois cylindres de bases tangentes deux à deux ; le rayon des deux petites bases est égal aux 2/3 du rayon de la plus grande base. On considère que l'artère épouse sans s'élargir la forme extérieure de l'endoprothèse.



   a) Soit A le centre du grand cercle, noté X_A, B et C ceux des petits cercles, notés X_B et X_C. Soit D le point de contact des cercles X_B et X_C ; la tangente commune aux cercles X_A et X_B est tangente respectivement en E et F ; la tangente commune aux cercles X_A et X_C est tangente respectivement en G et H. La perpendiculaire à (AG) issue de C, coupe (AG) en I et (AD) en K. Calculer AD et IC.

   b) Démontrer que $\widehat{IAK} = \widehat{DCI}$.

   c) En considérant les triangles KAI et KCD, calculer KA et KI.

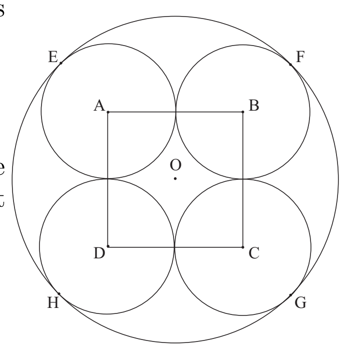
   d) Déterminer le cosinus de $\widehat{IAK}$.

   e) Déterminer une valeur approchée à 10^{-2} près du rayon r du cercle X_A

Éléments de solution

1. a) Soient A, B, C et D les centres des quatre cercles intérieurs de rayons tous égaux à r.
   Le quadrilatère ABCD a quatre côtés égaux à $2r$.

   $\boxed{\text{ABCD est donc un losange}}$.

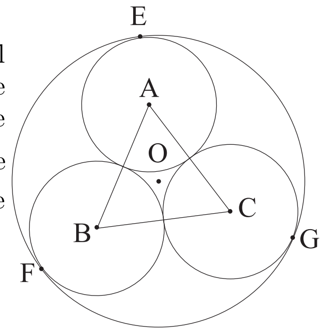


   b) Soient E, F, G, H les points de contact de chaque cercle avec le cercle extérieur de centre O et de rayon R. EAO sont alignés et donc $R = OA + r$.
   De même $R = OB + r = OC + r = OD + r$.
   Cela montre que $OA = OB = OC = OD$.

   $\boxed{\text{ABC et D sont donc sur un même cercle de centre O}}$.

   c) Le centre du cercle circonscrit du triangle ABD est sur la médiatrice de [BD], c'est aussi le centre du cercle circonscrit à ADB qui est sur la médiatrice de AC. Ce centre O est donc l'intersection de [AC] et [BD] c'est-à-dire l'intersection des diagonales du losange, qui sont donc des diamètres. Ainsi les diagonales ont la même longueur et donc $\boxed{\text{ABCD est un carré}}$.

   d) le triangle OAB est rectangle isocèle. D'après le théorème de Pythagore $2 \times OA^2 = AB^2$, donc $OA^2 = \dfrac{(2r)^2}{2} = 2r^2$ donc $OA = r\sqrt{2}$. On en déduit $R = OA + r = r(\sqrt{2} + 1)$. Or $R = 1$ donc $r = \dfrac{1}{\sqrt{2}+1} = \boxed{\sqrt{2} - 1}$.



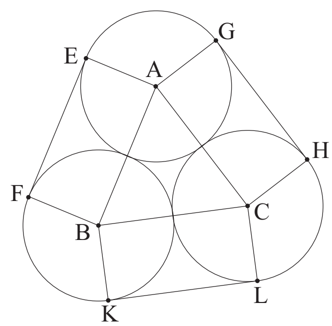
2. Les centres A, B, C des cercles intérieurs forment un triangle équilatéral de côté $2r$. Comme précédemment on démontre que le centre O du cercle extérieur est équidistant de A, B, et C et est donc le centre du cercle circonscrit à ABC. O est aussi le centre de gravité de ABC aux $\frac{2}{3}$ de chaque médiane. Ce sont aussi les hauteurs. Le côté du triangle étant de longueur $2r$, celle de la hauteur est $\frac{2r\sqrt{3}}{2} = r\sqrt{3}$.

   $OA = r\sqrt{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2r\sqrt{3}}{3}$.

   $R = OA + r = \frac{2r\sqrt{3}}{3} + r = r\left(\frac{2\sqrt{3}}{3+1}\right)$ donc $r = \dfrac{1}{\frac{2\sqrt{3}}{3}+1}$

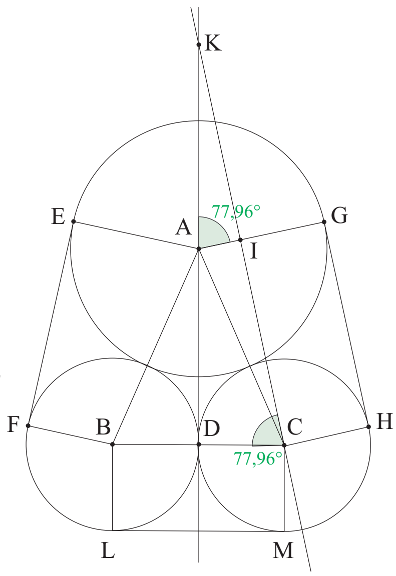
   Donc $r = \frac{3}{2\sqrt{3}+3} = \frac{3\left(2\sqrt{3}-3\right)}{3} = 2\sqrt{3}-3$.

   $\boxed{r = 2\sqrt{3}-3}$



3. Calculons le périmètre de la base en fonction de r. Les centres ABC des cercles intérieurs forment un triangle équilatéral de côté $2r$. Le segment [EF] est tangent à deux cercles en E et F. Les rayons [AE] et [BF] sont perpendiculaires à [EF]. Ainsi les droites (AE) et (FB) sont parallèles. De plus $AE = FB$, donc AEFB est un parallélogramme. Il a un angle droit, c'est donc un rectangle. Ainsi $EF = AB = 2r$.
   Par ailleurs $\widehat{ZAG} = 360 - 60 - 2 \times 90 = 120$, donc la longueur de l'arc EG est $\frac{2\pi r}{3}$. L'ensemble des trois arcs représente une longueur $2\pi r$.
   Le périmètre est donc $2\pi r + 3 \times 2r = 2r(\pi + 3)$.
   Or ce périmètre est celui de l'aorte de rayon 1 qui se déforme sans s'élargir soit 2π.

   Donc $2r(\pi+3) = 2\pi$ donc $\boxed{r = \frac{\pi}{\pi+3}}$



4) a) $AB = r + \frac{2r}{3} = \frac{5r}{3}$, de même pour AC, donc $AB = AC$.
   $BD = DC = \frac{2r}{3}$ donc La droite (AD) est la médiatrice de [BC].
   Dans le triangle ADC rectangle en D, le théorème de Pythagore amène : $AD^2 = AC^2 - DC^2 = \left(\frac{5r}{3}\right)^2 - \left(\frac{2r}{3}\right)^2$.

   Donc $\boxed{AD = \frac{r\sqrt{21}}{3}}$.

   La tangente (GH) étant perpendiculaires aux rayons aux points de contact avec les deux cercles, et (IC) étant perpendiculaire à (CH), le quadrilatère ICHG est un rectangle et donc $IG = \frac{2r}{3}$.
   Dans le triangle CIA rectangle en I, $IC^2 = AC^2 - AI^2$.

   Donc $IC^2 = \left(\frac{5r}{3}\right)^2 - \left(\frac{r}{3}\right)^2 = \frac{24r^2}{3}$ soit $\boxed{IC = \frac{2r\sqrt{6}}{3}}$

   b) Les triangles rectangles DAC et CIA ont la même hypoténuse. Les points D, C, I et A sont donc sur un même cercle dont le centre est le milieu de [AC]. Les angles $\widehat{DAI}$ et $\widehat{DCI}$ sont donc supplémentaires.

On peut le prouver autrement. En posant $\widehat{DAC} = \alpha$ et $\widehat{CAI} = \beta$ on aura $\widehat{DAI} = \alpha + \beta$, $\widehat{DCA} = 90 - \alpha$ et $\widehat{ACI} = 90 - \beta$.

Ainsi $\widehat{DCI} = \widehat{DCA} + \widehat{ACI} = 90 - \alpha + 90 - \beta = 180 - \widehat{DAI}$.
Mais D, A et K étant alignés, $\widehat{IAK} = 180 - \widehat{DAI}$,

donc $\boxed{\widehat{IAK} = \widehat{DCI}}$.

c) Les triangles rectangles KAI et KCD ont les mêmes angles (triangles semblables), $\widehat{IAK} = \widehat{DCI}$; écrivons les cosinus et tangente dans les deux triangles, car ils font intervenir AI et DC, car $DC = 2AI$. On obtiendra ainsi des rapports égaux.

$\dfrac{AI}{KA} = \dfrac{DC}{KC}$ et $\dfrac{KI}{AI} = \dfrac{KD}{DC}$. Ce qui devient : $AI \times KC = DC \times KA$ et $KI \times DC = KD \times AI$.

Posons $KI = x$ et $KA = y$, il vient $\left(\dfrac{r}{3}\right)\left(x + \dfrac{2\sqrt{6}}{3}\right) = \left(\dfrac{2r}{3}\right) y$ et $x \times \dfrac{2r}{3} = \left(\dfrac{r}{3}\right)\left(y + \dfrac{r\sqrt{21}}{3}\right)$.

En simplifiant on obtient $x + \dfrac{2\sqrt{6}}{3} = 2y$ et $2x = y + \dfrac{r\sqrt{21}}{3}$.

Qui donne par substitution : $4x = x + \dfrac{2r\sqrt{6}}{3} + \dfrac{2r\sqrt{21}}{3}$ soit $x = \dfrac{2r\sqrt{6} + 2r\sqrt{21}}{9}$.

De même $y = 2x - \dfrac{r\sqrt{21}}{3} = \dfrac{4r\sqrt{6} + 4r\sqrt{21}}{9} - \dfrac{3r\sqrt{21}}{9} = \dfrac{4r\sqrt{6} + r\sqrt{21}}{9}$.

Donc : $KI = \dfrac{2\sqrt{6} + 2\sqrt{21}}{9} r$ et $KA = \dfrac{4\sqrt{6} + \sqrt{21}}{9} r$.

d) La valeur exacte du cosinus de $\widehat{IAK}$ est $\dfrac{AI}{KA} = \dfrac{\dfrac{r}{3}}{\dfrac{4\sqrt{6} + \sqrt{21}}{9} r} = \dfrac{3}{4\sqrt{6} + \sqrt{21}}$.

$$\boxed{\cos \widehat{IAK} = \frac{3}{4\sqrt{6} + \sqrt{21}}}.$$

A l'aide de la calculatrice, $\cos^{-1} \dfrac{3}{4\sqrt{6} + \sqrt{21}}$ donne en degrés une valeur approchée de $\widehat{IAK}$ à 10^{-2} près, soit, environ $\boxed{77{,}96^0}$ ou 1,36 radian.

e) Notons α cette mesure en radians. On établit la longueur des arcs de cercle :
EG intercepte un arc de mesure 2α donc sa longueur est $2r\alpha$
MH intercepte un arc de mesure $\pi - \alpha$ donc sa longueur est $\left(\dfrac{2r}{3}\right)(\pi - \alpha)$; de même pour FL.

Par ailleurs en considérant les rectangles BCML et CHGI, $CH = IC = \dfrac{2r\sqrt{6}}{3}$ et $LM = \dfrac{4r}{3}$.
Le périmètre est donc :

$$\begin{aligned} 2r\alpha + 2\left(\frac{2r}{3}\right)(\pi - \alpha) + 2\frac{2r\sqrt{6}}{3} + \frac{4r}{3} &= r\left(2\alpha + \frac{4}{3}(\pi - \alpha) + \frac{4\sqrt{6}}{3} + \frac{4}{3}\right) \\ &= \frac{2r}{3}\left(3\alpha + 2\pi - 2\alpha + 2\sqrt{6} + 2\right) \\ &= \frac{2r}{3}\left(\alpha + 2\pi + 2\sqrt{6} + 2\right) \end{aligned}$$

or ce périmètre est celui de l'aorte, soit 2π ; en conséquence : $\dfrac{2r}{3}\left(\alpha + 2\pi + 2\sqrt{6} + 2\right) = 2\pi$. Ce qui donne : $r = \dfrac{2\pi}{\dfrac{2}{3}\left(\alpha + 2\pi + 2\sqrt{6} + 2\right)} = \dfrac{3\pi}{\alpha + 2\pi + 2\sqrt{6} + 2}$

donc $\boxed{r = 0,65\text{cm}}$.

RETOUR AU SOMMAIRE

CRÉTEIL

Premier exercice

Toutes séries

Les nombres merveilleux

Énoncé

1. Écrire tous les nombres à trois chiffres que l'on peut former en permutant les chiffres du nombre 158.
   Montrer que deux de ces nombres ont une somme égale à une puissance de dix.

   Dans la suite, on appellera « nombre merveilleux » un nombre dont l'écriture ne contient aucun chiffre « 0 » et tel qu'en lui ajoutant un nombre obtenu à partir d'une permutation de ses chiffres, on obtienne une puissance de dix. Ainsi par exemple, 45 545 et 54 455 sont deux nombres merveilleux car $54\,455 + 45\,545 = 100\,000 = 10^5$.
   On dira que 45 545 et 54 455 sont deux nombres merveilleux « conjugués ».
2. Trouvez tous les nombres merveilleux à trois chiffres dont le chiffre des unités est un 5.
   Existe-t-il d'autres nombres merveilleux à trois chiffres ?
3. On part d'un nombre $N = \overline{abcde} = 10^4 \times a + 10^3 \times b + 10^2 \times c + 10^1 \times d + e$.
   Soit $N' = \overline{a'b'c'd'e'}$ un nombre obtenu à partir d'une permutation des chiffres du nombre N.
   Montrez que la condition $N + N' = 10^5$ impose que l'on ait $e = 5$ et que les chiffres a, b, c, d soient groupés par paires de chiffres de somme 9.
   En déduire qu'il n'existe pas de nombres merveilleux s'écrivant avec un nombre pair de chiffres.
4. Combien existe-t-il de nombre merveilleux à 5 chiffres ?

Éléments de solution

1. 158, 185, 518, 581, 815, 851. $185 + 815 = 1000 = 10^3$..
2. Il existe 8 nombres merveilleux a trois chiffres dont le chiffre des unités est un 5 :
   185, 275, 365, 455, 545, 635, 725 et 815.
   En effet, $185 + 815 = 275 + 725 = 365 + 635 = 455 + 545 = 10^3$.
   Montrons qu'il n'en existe aucun autre.
   Considérons un nombre merveilleux égal à $100c + 10d + u$ et son conjugue égal à $100c' + 10d' + u'$.
   On doit avoir $c + c' = 9$; $d + d' = 9$ et $u + u' = 10$.
   Ces trois égalités imposent que l'on ait $c' = d, d' = c$ et $u' = u$, d'où $u = 5$.
3. Les chiffres de ces deux nombres merveilleux conjugués à 5 chiffres doivent s'additionner comme suit :

   $$\begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \\ a' & b' & c' & d' & e' \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 9 & 9 & 9 & 9 & 0 \end{array}$$

   On a alors $2(a + b + c + d + e) = 4 \times 9 + 10$.
   Les chiffres de somme 9 vont par paires ($1 + 8$ ou $2 + 7$ ou $3 + 6$ ou $4 + 5$), les deux chiffres de chaque paire devant être présents dans les rangs autres que celui des unités.
   Le chiffre des unités est donc obligatoirement un « 5 ».

Si un nombre N s'écrit $\overline{abcd}\ldots$, on a $a+b+c+d+\cdots = 4,5(n-1)+5$ où n est le nombre de chiffres de N.
Cette somme n'est entière que si n est impair.
On en déduit qu'il n'existe pas de nombres merveilleux s'écrivant avec un nombre pair de chiffres.

4. Les nombres merveilleux à 5 chiffres sont de l'une des formes $aabb5$, $abab5$, $abba5$, $baab5$, $baba5$, $bbaa5$ où $a < b$ et $a+b=9$; $abcd5$ et toutes les formes obtenues par permutation de abcd (24 formes au total) avec $a+b=c+d=9$, $a<b$, $c<d$, $a<c$ et $\{a;b\}$ différent de $\{c;d\}$. Les paires de chiffres de somme 9 sont à choisir parmi 1 ; 8. 2 ; 7. 3 ; 6. 4 ; 5. On aura donc au total $6 \times 4 + 24 \times 6$, soit 168 nombres merveilleux a cinq chiffres.

RETOUR AU SOMMAIRE

CRÉTEIL

Deuxième exercice

Séries S et STI2D

Double moitié

Énoncé

Soit ABC un triangle tel que $AB = 8$, $AC = 6$ et $BC = 10$.
On souhaite déterminer s'il existe une droite D partageant le triangle en formant deux polygones ayant même périmètre et même aire.

1. Calculer le périmètre et l'aire du triangle ABC.
2. Sur la figure 1, la droite (D) divise le périmètre du triangle ABC en deux car $AM + AN$ vaut la moitié du périmètre de ABC.
   La droite D répond-elle au problème ?

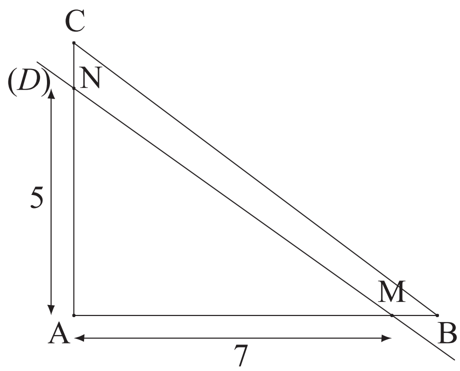


Figure 1

3. Montrer qu'une droite répondant au problème ne peut passer par aucun des sommets A, B ou C du triangle ABC.
4. Soit (D) une droite coupant [AB] en M et [AC] en N comme à la figure 2. On pose $AM = x$ et $AN = y$.

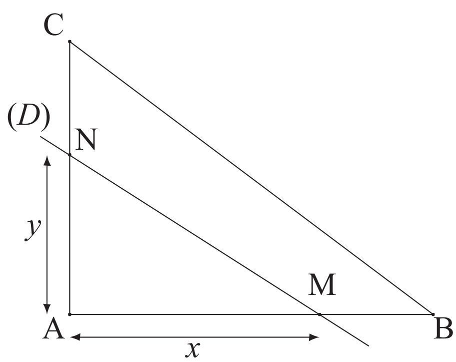


Figure 2

a) Montrer que si (D) répond à la question alors $(x; y)$ est solution du système : $\left\{\begin{array}{rcl} x+y & = & 12 \\ xy & = & 24 \end{array}\right.$

b) Résoudre ce système. Une telle droite (D) peut-elle être solution du problème ?

5. On s'intéresse maintenant aux configurations des figures 3 et 4 où la droite (D) coupe [BC] en M et, respectivement, [AC] en N (figure 3) et [AB] en N (figure 4).

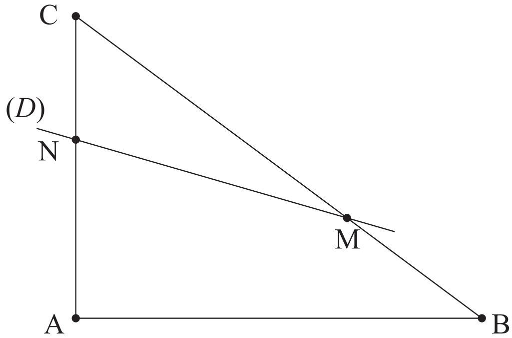


Figure 3

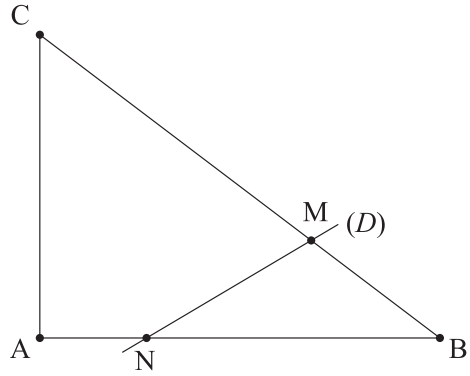


Figure 4

Déterminer, pour chacune, s'il existe une droite (D) solution au problème puis conclure.

Éléments de solution

1. Le périmètre du triangle ABC : $AB + AC + BC = 8 + 6 + 10 = 24$.
   $BC^2 = AB^2 + AC^2$ et le triangle ABC est rectangle en A.
   Par conséquent, l'aire de ABC vaut $\frac{1}{2} \times AB \times AC = 24$.

2. Sur la figure 1, le triangle AMN est rectangle en A et l'aire de AMN vaut $\frac{1}{2} \times AM \times AN = \frac{35}{2} = 17,5$.
   $17,5 \neq 24$. Donc la droite (D) ne partage pas ABC en deux polygones de même aire et (D) ne convient pas.

3. Supposons que la droite (D) passe par un sommet du triangle ABC. (D) partage alors le triangle ABC en deux triangles. Pour que ces deux triangles aient la même aire, il faut que la droite (D) soit une médiane du triangle ABC. Mais alors, la condition sur l'égalité des périmètres ne peut être satisfaite, le triangle ABC n'étant pas isocèle. Une telle droite (D) ne convient pas, et une droite (D) répondant au problème posé ne peut passer par aucun des sommets du triangle ABC.

4. a) Sur la figure 2, le triangle AMN est rectangle en A et l'aire de AMN vaut $\frac{1}{2} \times AM \times AN = \frac{xy}{2}$.
   Si la droite (D) est solution, l'aire de AMN vaut la moitié de celle de ABC, d'où : $xy = 24$.
   Le périmètre de AMN doit aussi être égal à celui du quadrilatère MNCB.
   $AM + AN + MN = MN + NC + CB + BM$ soit $AM + AN = NC + CB + BM$.
   Or $NC + CB + BM = (AB + BC + CA) - (AM + AN) = 24 - (AM + AN)$.
   On en déduit la condition : $2 \times (AM + AN) = 24$ soit $x + y = 12$.
   Si (D) répond à la question, alors $(x; y)$ est solution du système : $\left\{\begin{array}{rcl} x+y & = & 12 \\ xy & = & 24 \end{array}\right.$

   b) Les solutions du système précédent s'obtiennent comme solutions de l'équation du second degré $X^2 - 12X + 24 = 0$.
   Le discriminant réduit de cette équation vaut $\Delta = 48 = \left(4\sqrt{3}\right)^2$ d'où les solutions :
   $X_1 = 6 + 2\sqrt{3}$ et $X_2 = 6 - 2\sqrt{3}$.
   On obtient une condition nécessaire pour x et y : $(x; y) = (X_1; X_2)$ ou $x; y) = (X_2; X_1)$.
   Par ailleurs, x et y doivent vérifier les conditions supplémentaires suivantes, compte tenu de la question 3 et du fait que $\mathrm{M} \in [\mathrm{AB}]$ et $\mathrm{N} \in [\mathrm{AC}]$.
   $0 < AM < AB$ et $0 < AN < AC$ soit $0 < x < 8$ et $0 < y < 6$.
   La condition sur y impose $y = X_2 = 6 - 2\sqrt{3}$; la condition sur x n'est alors pas vérifiée $8 < X_1$.
   Par suite, une droite (D) telle qu'à la figure 2 ne peut être solution du problème.

5. ***Cas de la figure 3***
On note $CN = x$ et $CM = y$; $0 < x < 6$ et $0 < y < 10$.
Soit H le projeté orthogonal du point M sur le segment [AC], on pose $h = HM$.
La condition sur les aires s'écrit : aire(MNC) $= \dfrac{1}{2}$ aire(ABC) soit $\dfrac{1}{2}xh = \dfrac{24}{2}$; $xh = 24$. Les droites (HM) et (AB) sont parallèles ; le théorème de Thalès donne :
$\dfrac{HM}{AB} = \dfrac{CM}{CB}$ d'où $\dfrac{h}{8} = \dfrac{y}{10}$ et $h = \dfrac{4}{5}y$.
On obtient : $\dfrac{4}{5}xy = 24$ et $xy = 30$.
La condition sur le périmètre s'écrit, comme pour la question 4.a) : $x + y = 12$.
Si (D) répond à la question, alors $(x; y)$ est solution du système : $\begin{cases} x+y & = & 12 \\ xy & = & 30 \end{cases}$
On résout cette fois l'équation : $X^2 - 12X + 30 = 0$. $\Delta = 24 = \left(2\sqrt{6}\right)^2$; $X_1 = 6 + \sqrt{6}$ et $X_2 = 6 - \sqrt{6}$.
$0 < 6 - \sqrt{6} < 6$ et $6 + \sqrt{6} < 10$ donc $x = 6 - \sqrt{6}$ et $y = 6 + \sqrt{6}$.
Par conséquent, la droite $(D) =$ (MN) déterminée par M $\in$ [BC] et N $\in$ [AC] tels que $AN = \sqrt{6}$ et $CM = 6 + \sqrt{6}$ répond un problème posé.

Cas de la figure 4
On note $BN = x$ et $BM = y$; $0 < x < 8$ et $0 < y < 10$.
Soit H le projeté orthogonal du point M sur le segment [AB] ; on pose $h = HM$.
La condition sur les aires s'écrit : aire(MNB)$= \dfrac{1}{2}$ aire(ABC) soit $\dfrac{1}{2}xy = \dfrac{24}{2}$; $xh = 24$.
Les droites (HM) et (AC) sont parallèles ; le théorème de Thalès donne :
$\dfrac{HM}{AC} = \dfrac{BM}{BC}$ d'où $\dfrac{h}{6} = \dfrac{y}{10}$ et $h = \dfrac{3}{5}y$.
On obtient : $\dfrac{3}{5}xy = 24$ et $xy = 40$.
La condition sur le périmètre s'écrit, comme précédemment : $x + y = 12$.
Si (D) répond à la question alors $(x; y)$ est solution du système : $\begin{cases} x+y & = & 12 \\ xy & = & 40 \end{cases}$
On résout cette fois l'équation : $X^2 - 12X + 40 = 0$. Ici $\Delta = -16 < 0$; l'équation n'a pas de solution et la configuration de la figure 4 ne donne aucune droite (D) solution.

Conclusion : Au fur et à mesure des questions de l'exercice, on a raisonné par disjonction des cas sur la façon dont la droite (D) peut partager le triangle ABC. Par conséquent, on en déduit qu'il n'y a finalement qu'une seule droite (D) partageant le triangle ABC en deux polygones ayant même périmètre et même aire (cas de la figure 3 ci-dessus).

RETOUR AU SOMMAIRE

CRÉTEIL

Troisième exercice

Séries L, ES et STG

Sommons les doublons

Énoncé

On appelle suite des doublons, la suite de nombres entiers naturels non nuls telle que :

- chaque entier naturel non nul apparaît exactement deux fois ;
- la suite est croissante.

1. a) Vérifier que le $11^{\text{ème}}$ terme de la suite des doublons est l'entier 6.
   b) Quel est son $2013^{\text{ème}}$ terme ?

2. On s'intéresse maintenant à la somme, pour $n \geqslant 1$, des n premiers termes de la suite des doublons, somme que l'on note $s(n)$.
   a) Recopier et compléter le tableau :

n	1	3	5	7	9	11
$s(n)$						

   Que remarque-t-on ?
   b) Conjecturer alors la valeur de $s(2013)$.
3. Démontrer le résultat conjecturé à la question précédente.
4. Déterminer $s(2014)$.

Éléments de solution

1. a) On écrit les premiers termes de la suite des doublons : 1 - 1 - 2 - 2 - 3 - 3 - 4 - 4 - 5 - 5 - 6 et le 11^{e} terme de la suite des doublons est bien 6.
   b) On remarque que :
   le 2^{e} terme de la suite est 1, le 1^{er}aussi ;
   le 4^{e} terme est 2, le 3^{e} aussi ;
   le 6^{e} terme est 3, le 5^{e} aussi ;
   etc. Donc le 2014^{e} terme vaut $\dfrac{2014}{2} = 1007$ et par conséquent, le 2013^{e} vaut également 1007
2. a) Tableau donnant $s(n)$ pour les premiers entiers impairs :

n	1	3	5	7	9	11
$s(n)$	1	4	9	16	25	36

   On remarque que $s(n)$ est un carré pour les premières valeurs de n impair.
   On peut alors conjecturer que pour tout entier $p \geqslant 1$, $s(2p-1) = p^2$.
   b) Si on admet la conjecture, $s(2013) = s(2 \times 1007 - 1) = 1007^2 = 101\,4049$.
3. Pour tout $p \geqslant 1$, $s(2p-1) = 1 + 1 + 2 + 2 + \cdots + (p-1) + (p-1) + p$
   $s(2p-1) = 2 \times (1 + 2 + \cdots + (p-1)) + p$
   $s(2p-1) = 2 \times \dfrac{(p-1) \times p}{2} + p = p(p-1) + p = p^2$.
4. Pour tout $p \geqslant 1$, $s(2p) = s(2p-1) + p = p^2 + p = p(p+1)$.
   Avec $2p = 2014, p = 1007$ et $s(2014) = 1007 \times 1008 = 1015056$.

RETOUR AU SOMMAIRE

DIJON

Premier exercice

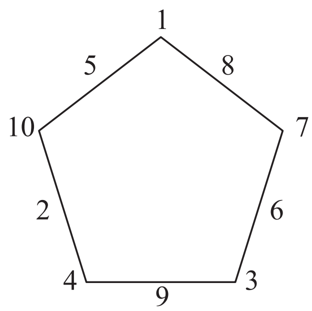
Toutes séries

Autour d'un polygone

Énoncé

1. Les entiers de 1 à 10 sont placés aux sommets et sur les côtés d'un pentagone, de sorte que la somme S des entiers associés à chaque côté (celui placé sur le côté du pentagone et les deux placés sur les sommets qui délimitent ce côté) soit la même pour chaque côté.

   La figure ci-contre donne un exemple pour lequel la somme S est égale à 16.



   a) Pour un placement possible, quelle est la plus petite somme S que l'on peut obtenir ?

   b) Donner un exemple de tel placement.

Dans la suite, pour n entier supérieur ou égal à 3, on place lorsque c'est possible les entiers de 1 à aux sommets et sur les côtés d'un polygone à n côtés, de sorte que la somme S des entiers associés à chaque côté (celui placé sur le côté du polygone et les deux placés sur les sommets qui délimitent ce côté) soit la même pour chaque côté.

2. Dans chacun des cas suivants, montrer que le placement est possible, et donner une configuration pour laquelle la somme S est minimale :

   a) $n = 3$;

   b) $n = 4$.

3. Dans cette question, on suppose que le placement est possible.

   Montrer que l'on a : $\dfrac{5n+3}{2} \leqslant S \leqslant \dfrac{7n+3}{2}$.

   (On pourra utiliser l'égalité $1 + 2 + \cdots + N = \dfrac{N(N+1)}{2}$, valable pour tout entier $N \geqslant 1$.)

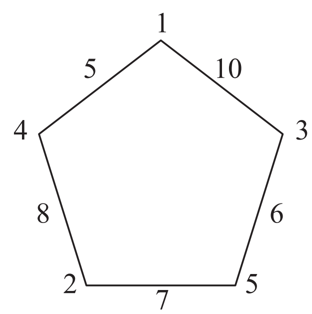
4. Dans cette question, on suppose que n est impair, et l'on pose $n = 2k+1$, avec k entier et $k \geqslant 1$.

   Indiquer une façon de disposer les entiers de 1 à $2n$ de sorte que la configuration soit possible, et que la somme S soit minimale. (On pourra faire un schéma.)

Éléments de solution

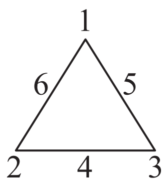
1. a) La somme des nombres placés sur les cinq côtés est égale à $5S$. Elle est aussi égale à la somme de tous les entiers de 1 à 10, augmentée de celle des entiers placés sur les sommets (puisque ces derniers doivent être comptés deux fois).
   On a : $1 + 2 + \cdots + 10 = 55$, et la somme des entiers placés sur les sommets vaut au minimum $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$, et au maximum $6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 40$.
   D'où $55 + 15 \leqslant 5S \leqslant 55 + 40$. On en déduit $14 \leqslant S \leqslant 19$.

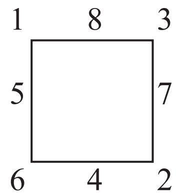
   b) On peut obtenir la valeur $S = 14$ avec la configuration ci-contre ;



   La valeur 14 est donc la valeur minimale.

2. Par un raisonnement analogue au précédent, on trouve que :
   a) Si $n = 3$, on a $9 \leqslant S \leqslant 12$
   b) Si $n = 4$, on a $11,5 \leqslant S \leqslant 15,5$.
   Les minimums sont respectivement $S = 9$ et $S = 12$, atteints avec les configurations suivantes :





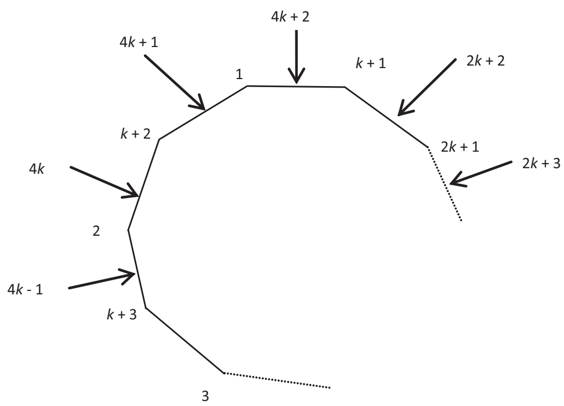
3. En raisonnant comme en 1.a), on obtient :

$$(1 + \cdots + 2n) + (1 + \cdots + n) \leqslant nS \leqslant (1 + \cdots + 2n) + (n + 1 + \cdots + 2n).$$

Soit $n(2n+1) + \dfrac{n(n+1)}{2} \leqslant nS \leqslant n(2n+1) + \left[n(2n+1) - \dfrac{n(n+1)}{2}\right]$.

En simplifiant, on obtient : $\dfrac{5n+3}{2} \leqslant S \leqslant \dfrac{7n+3}{2}$.

4. Si $n = 2k + 1$, le minimum théorique de s est $\dfrac{5(2k+1)+3}{2} = 5k + 4$.
   On peut atteindre ce minimum en plaçant les entiers de 1 jusqu'à $2k + 1$ en partant d'un sommet et en sautant de deux en deux dans le même sens.
   Puis on place les entiers de $2k + 2$ à $4k + 2$ sur les côtés en tournant dans l'autre sens (figure suivante)



RETOUR AU SOMMAIRE

DIJON

Deuxième exercice

Série S

Les trois cercles et l'ogive

Énoncé

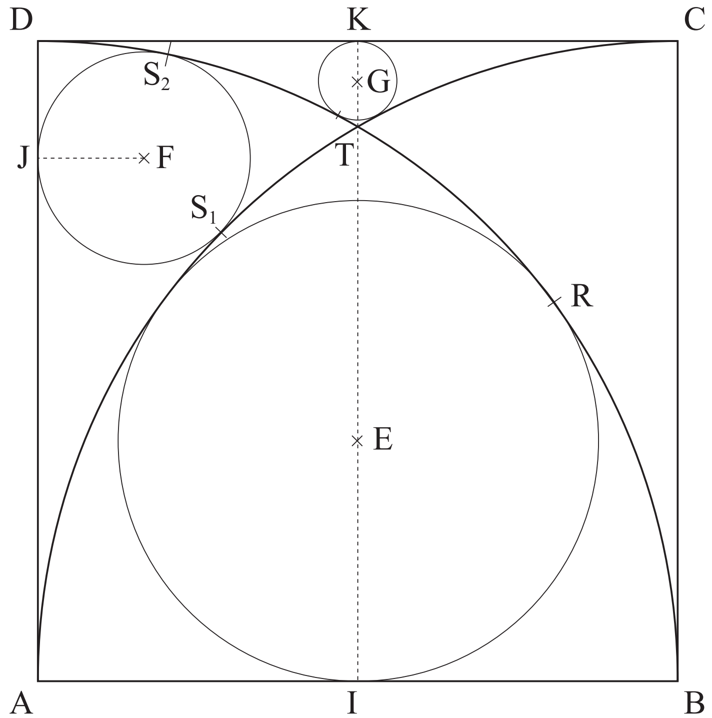
Sur la figure suivante, ABCD est un carré de côté 48. On a tracé le quart de cercle de centre A passant par B et le quart de cercle de centre B passant par A. Chacun des trois cercles tracés est tangent aux deux quarts de cercle.

Le grand cercle est aussi tangent au côté [AB] en I ; on note E son centre et r son rayon.

Le moyen cercle est aussi tangent au côté [AD] en J ; on note F son centre et s son rayon.

Le petit cercle est aussi tangent au côté [DC] en K ; on note G son centre et t son rayon.

Note : on dit que deux cercles sont tangents en un point s'ils admettent la même tangente en ce point.



1. Soit R le point de contact du grand cercle avec l'arc BD.
   a) Exprimer AE^2 en fonction de r.
   b) Démontrer que les points A, E et R sont alignés.
   c) En déduire la valeur du rayon r du grand cercle.
2. Par une méthode analogue à celle de la question 1, calculer le rayon t du petit cercle (on pourra faire intervenir le point de contact T du petit cercle avec l'arc BD).
3. Soit S_1 et S_2 les points de contact respectifs du moyen cercle avec les arcs AC et BD.

a) En utilisant d'autres alignements, démontrer les égalités : $\left\{\begin{array}{lcl} AF+s & = & 48 \\ BF-s & = & 48 \end{array}\right.$

b) En calculant $BF^2 - AF^2$ de deux façons différentes, calculer le rayon s du moyen cercle.

Éléments de solution

1. a) Dans le triangle AIE, rectangle en I, le théorème de Pythagore donne : $AE^2 = r^2 + 24^2$.

   b) Les droites (AR) et (ER) sont perpendiculaires à la tangente commune en R au quart de cercle de centre A et au grand cercle, donc elles sont parallèles. Ayant le point R en commun, elles sont égales. On en déduit que les point A, E, R sont alignés.

   c) On a donc $AR = 48$ (rayon du quart de cercle) et, d'après l'alignement : $AR = AE + ER = AE + r$.
   On en déduit l'égalité $r^2 + 24 = AE^2 = (48 - r)^2$.
   En développant, il vient $96r = 48^2 - 24^2$, d'où $r = 18$.

2. On démontre, comme à la question 1, que les points A, T, G sont alignés,
   donc : $48 = AT = AG - GT = AG - t$.
   D'autre part (théorème de Pythagore dans le triangle AIG) :

   $$AG^2 = IG^2 + AI^2 = (48 - t)^2 + 24^2.$$

   On en tire : $(t + 48)^2 = (48 - t)^2 + 24^2$, d'où en développant : $192t = 24^2$.
   Conclusion : $t = 3$.

3. a) En adaptant le raisonnement de la question 1, on déduit que :
   - Les points A, F et S_2 sont alignés, d'où $AF + FS_2 = AS_2$, soit encore $AF + s = 48$.
   - Les points B, S_1 et F sont alignés, d'où $BS_1 + S_1F = BF$, soit encore $BF - s = 48$.

   b) Dans le triangle rectangle AJF, on a $AF^2 = AJ^2 + s^2$.
   Si la droite (JF) coupe (BC) en J', on a aussi : $BF^2 = BJ'^2 + (48 - s)^2$. Compte tenu de ce que $AJ = BJ'$, on en déduit : $BF^2 - AF^2 = (48 - s)^2 - s^2$.
   D'autre part $BF^2 - AF^2 = (BF + AF)(BF - AF) = 96 \times 2s$, en utilisant les deux égalités du a).
   Des deux expressions précédentes, on déduit : $(48 - s)^2 - s^2 = 192s$, d'où $s = 8$.

RETOUR AU SOMMAIRE

DIJON

Troisième exercice

Séries autres que S

Le tour de magie

Énoncé

Voici un algorithme en langage naturel (algorithme 1) :

> « *Choisir un nombre entier naturel à trois chiffres deux à deux distincts. Écrire tous les nombres entiers naturels possibles à deux chiffres, composés des chiffres du nombre précédent, puis les additionner. Diviser la somme obtenue par la somme des chiffres du nombre initial et annoncer le résultat.* »

Voici un algorithme transcrit dans un langage de programmation (algorithme 2) :

```
VARIABLES
   c EST_ DU_ TYPE NOMBRE
   d EST_ DU_ TYPE NOMBRE
   u EST_ DU_ TYPE NOMBRE
   S1 EST_ DU_ TYPE NOMBRE
   S2 EST_ DU_ TYPE NOMBRE
   R EST_ DU_ TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
   LIRE c
   LIRE d
   LIRE u
   S1 PREND_LA_VALEUR (10*c+d)+(10*d+c)+(10*c+u)+(10*u+c)+(10*d+u)+(10*u+d)
   S2 PREND_LA_VALEUR c+d+u
   R PREND_LA_VALEUR S1/S2
   AFFICHER R
FIN_ALGORITHME
```

1. Choisir un nombre entier naturel quelconque, s'écrivant avec trois chiffres distincts deux à deux. Vérifier que chacun des deux algorithmes donne le même résultat avec ce nombre.
2. Recommencer avec deux autres entiers naturels, s'écrivant avec trois chiffres deux à deux distincts. Que peut-on conjecturer sur le résultat obtenu avec un nombre de départ quelconque ?
3. Démontrer votre conjecture pour un nombre initial de trois chiffres deux à deux distincts.
4. a) Donner tous les nombres entiers naturels distincts à deux chiffres, composés avec les chiffres du nombre 424, puis faire fonctionner l'algorithme 1 en français pour 424
   b) Faire fonctionner l'algorithme 2 pour le nombre 424.
   c) Expliquer les différences observées.

Dans les questions suivantes, on continue toujours de former des nombres à deux chiffres à partir de ceux du nombre initial, dont on suppose les chiffres deux à deux distincts.

5. a) Qu'obtient-on pour des nombres entiers naturels initiaux à deux chiffres ?
   Démontrer votre affirmation.
   b) Même question pour des nombres entiers initiaux à quatre chiffres.
6. Que peut-on conjecturer si l'on choisit un entier initial à 5 chiffres ? à n chiffres ?

Éléments de solution

1. Le résultat est égal à 22.
2. On peut conjecturer que le résultat est toujours égal à 22.
3. Si le nombre choisi s'écrit $100c + 10d + u$, la somme s'écrit :
   $(10c + d) + (10d + c) + (10c + u) + (10u + c) + (10d + u) + (10u + d)$
   soit encore $22(c + d + u)$.
   En divisant par la somme des chiffres $(c + d + u)$, on trouve 22.
4. a) Il y a trois nombres possibles : 24, 42 et 44.
   $24 + 42 + 44 = 110$, et $\dfrac{110}{4+2+4} = 11$. L'algorithme donne 11.

   b) Avec l'algorithme écrit en langage de programmation, on trouve 22.

   c) On remarque que dans l'algorithme en français, on demande que les chiffres soient distincts, ce qui n'est pas le cas pour 424.
   Si l'on considérait les chiffres de 424 comme trois chiffres distincts, on composerait les nombres 42, 24, 44, 44, 24, 42 et le résultat final serait bien 22. C'est exactement ce que fait l'algorithme programmé.
5. a) Pour deux chiffres, on obtient 11.
   (Par exemple, pour 25, $\dfrac{25+52}{2+5} = 11$).

   Démonstration : $(10d + u) + (10u + d) = 11(d + u)$..

   b) Avec des nombres à 4 chiffres, on obtient 33.

   Démonstration :
   $(10m + c) + (10m + d) + 10m + u) + (10c + d) + (10c + u) + (10d + u) + (10c + m) +$
   $(10d + m) + (10u + m) + (10d + c) + (10u + c) + (10u + d) = 33(m + c + d + u)$.
6. Conjectures
   - pour 5 chiffres, on obtient 44 ;
   - pour n chiffres, on obtient $11(n - 1)$.

RETOUR AU SOMMAIRE

GRENOBLE

Premier exercice

Toutes séries

L'art de bien bluffer

Énoncé

Alembert et Bayes jouent au jeu suivant :

Ils mettent dans un pot une mise de départ (1 euro pour Alembert et 3 € pour Bayes).
Alembert lance un dé équilibré à six faces. Il regarde le résultat et cache le dé pour que Bayes ne puisse pas voir le numéro obtenu. Pendant toute la phase suivante, le dé restera caché dans la même position.

Alembert peut choisir entre :

1. abandonner et Bayes remporte alors le contenu du pot.
2. augmenter sa mise de 4 euros ce qui oblige Bayes à choisir entre :
   a) abandonner et Alembert remporte alors le contenu du pot.
   b) augmenter lui aussi sa mise de 4 €.

   Si ni l'un ni l'autre n'a abandonné, on s'intéresse alors au résultat du dé :
   - si le dé indique 6, Alembert remporte le contenu du pot.
   - sinon, c'est Bayes qui remporte le contenu du pot.

Le gain algébrique d'Alembert pourra donc être de 7 €, 3 €, -1 € ou -5 €, selon que l'un des joueurs abandonne ou pas.

Première partie : une partie sans bluff

Dans cette partie, Alembert augmente sa mise si le dé indique 6 et sinon, il abandonne.
Quant à Bayes, il abandonne dès qu'Alembert augmente sa mise.

A quel joueur ce jeu est-il le plus favorable et quel est son gain en moyenne ?

Deuxième partie : une partie avec bluff

Dans cette partie

- si le dé indique 6, Alembert augmente sa mise.
- sinon, Alembert augmente sa mise avec une probabilité p.

Si Alembert a augmenté sa mise, Bayes augmente lui aussi sa mise, mais avec une probabilité q.

1. Dans cette question, $p = \frac{1}{5}$ et $q = \frac{1}{3}$.

   Quelle va être en moyenne le gain ou la perte de chaque joueur ?
2. Dans cette question, $p = \frac{1}{10}$ et $q = \frac{1}{2}$.

   Quelle va être en moyenne le gain ou la perte de chaque joueur ?
3. Dans cette question, $p = \frac{1}{10}$ et $q = \frac{1}{3}$.

   Quelle va être en moyenne le gain ou la perte de chaque joueur ?

4. Dans cette question, l'augmentation des mises n'est plus de 4 € mais de 5 €.
   Avec quelle probabilité p Alembert doit-il bluffer pour gagner le maximum d'argent en moyenne ? Quel sera alors son gain moyen ?

Éléments de solution

Première partie : une partie sans bluff

Si le dé indique sur 6, ce qui arrive dans un cas sur six, Alembert gagne 3 €. Sinon, dans cinq cas sur six, Alembert perd 1 €.

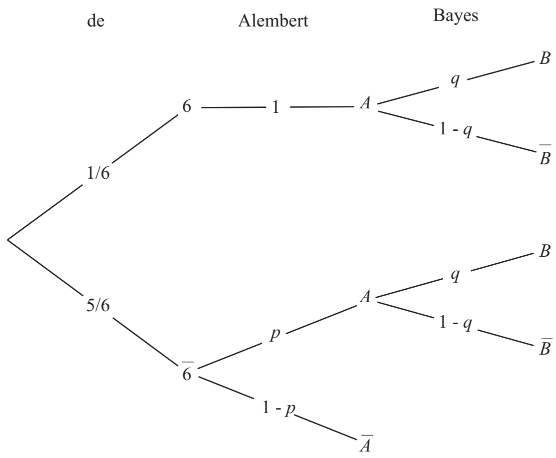
En moyenne, il va « gagner » $\dfrac{1\times 3 - 5\times 1}{6} = -\dfrac{1}{3}$ c'est-à-dire qu'il va perdre 1/3 € par partie et le jeu est favorable à Bayes.

Deuxième partie : une partie avec bluff

Dans le cas général, le gain moyen d'Alembert est

$$G = \frac{1}{6}(q7 + (1-q)3) + \frac{5}{6}(p(q(-5) + (1-q)3) + (1-p)(-1)$$

soit $G = \dfrac{-20pq + 10p + 2q - 1}{3}$.



1. Alembert gagne en moyenne $g = \dfrac{1}{3}$.
2. $G = 0$ le jeu est équitable.
3. $G = 0$, le jeu est équitable.
4. On recalcule $G = \dfrac{-45pq + 20p + 5q - 2}{6}$.

   Soit p_0 la stratégie d'Alembert. Quelle va être celle de Bayes ?

   Bayez veut minimiser G. Or $G'(q) = \dfrac{5(1-9p_0)}{6}$.

   - $p_0 \leqslant \dfrac{1}{9}$ alors G' est positive donc Bayes a intérêt à choisir $q = 0$, ce qui donne $G = \dfrac{20p_0 - 2}{6}$. Pour maximiser ses chances, Alembert choisit la plus grande valeur de $p_0 \leqslant \dfrac{1}{9}$, soit $p_0 = \dfrac{1}{9}$, ce qui donne $G = \dfrac{1}{27}$.
   - $p_0 \geqslant \dfrac{1}{9}$ alors G' est négative donc Bayes a intérêt à choisir $q = 1$ et $G = \dfrac{3 - 25p_0}{6}$. Pour maximiser ses chances, Alembert choisit la plus petite valeur de $p_0 \geqslant \dfrac{1}{9}$ soit $p_0 = \dfrac{1}{9}$, ce qui donne $G = \dfrac{1}{27}$.

   Finalement, Alembert choisit $p = \dfrac{1}{9}$ pour un gain moyen de $\dfrac{1}{27}$.

RETOUR AU SOMMAIRE

GRENOBLE

Deuxième exercice

Série S

Le meuble pour téléviseur

Énoncé

Dans cet exercice, on s'intéresse à un petit meuble pour télévision dont on donne deux photos ci-dessous :

fig. 1

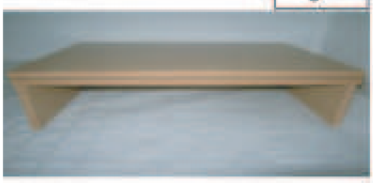
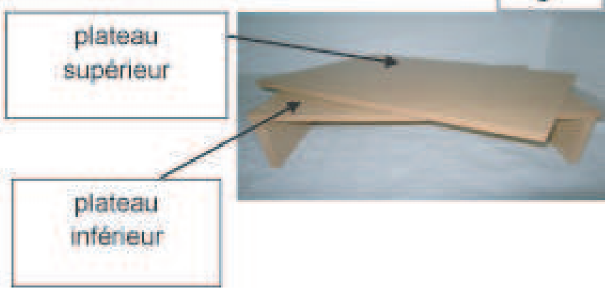


fig. 2



Les deux plateaux sont assimilés à deux rectangles ayant tous les deux les mêmes dimensions : 50 cm de longueur et 35 cm de largeur.
Le plateau supérieur peut pivoter autour d'un axe passant par le centre des deux plateaux.
Sur la figure 1, le plateau supérieur est en position initiale.
Sur la figure 2, le plateau supérieur a tourné d'un certain angle par rapport à sa position initiale.

Pour la suite, on précise que :

- on néglige l'épaisseur des plateaux ainsi que l'espace présent entre le plateau inférieur et le plateau supérieur,
- on fait tourner le plateau supérieur dans le sens des aiguilles d'une montre.
  La figure 3 ci-contre schématise la situation de la figure 2 :
- le rectangle ABCD représente le plateau inférieur, avec $AB = 50$ cm et $BC = 35$ cm,
- le rectangle A'B'C'D' représente le plateau supérieur ayant tourné d'un angle α, dans le sens des aiguilles d'une montre, par rapport à sa position initiale ($\alpha = \widehat{BOB'} = \widehat{COC'} = \widehat{DOD'} = \widehat{AOA'}$
- le point O est le centre des rectangles ABCD et A'B'C'D'

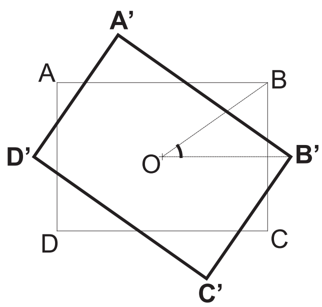


fig.3

Première partie

Le meuble est placé dans l'angle d'une pièce, comme indiqué sur la figure 4 (le côté [AD] est parallèle au MUR 1 et le côté [AB] est parallèle au MUR 2).

Déterminer à quelles distances minimales d_1 et d_2 on doit placer le meuble pour que le plateau supérieur puisse tourner sans buter contre les murs (arrondir les résultats au mm).

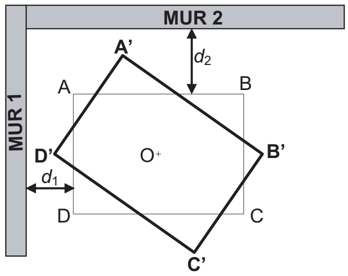


fig.4

Deuxième partie

On s'intéresse dans la suite, dans différents cas, à l'aire de la surface visible du plateau inférieur.

Par exemple :

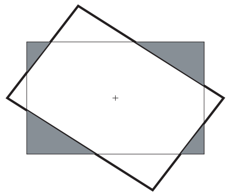


fig.5

- quand le plateau supérieur est en position initiale (fig.1), cette aire est égale à 0 (le plateau inférieur est entièrement recouvert par le plateau supérieur),
- sur la figure 5 ci-contre, cette aire est celle de la surface grisée, formée dans ce cas de quatre triangles rectangles.

1. a) En prenant modèle sur la figure 5, faire une figure représentant le cas où le plateau supérieur a tourné d'un quart de tour par rapport à sa position initiale et colorier en gris la surface visible du plateau inférieur.
   b) Calculer dans ce cas l'aire de la surface visible du plateau inférieur.

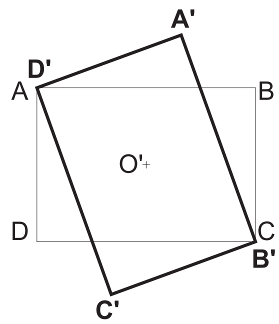


fig.6

2. La figure 6 représente le cas où la diagonale [B'D'] du rectangle représentant le plateau supérieur est confondue avec la diagonale [AC] du rectangle représentant le plateau inférieur.
   a) Déterminer dans ce cas la mesure de l'angle β dont a tourné le plateau supérieur par rapport à sa position initiale (arrondir le résultat au degré).
   b) Calculer, au cm^2 près, l'aire de la surface visible du plateau inférieur.

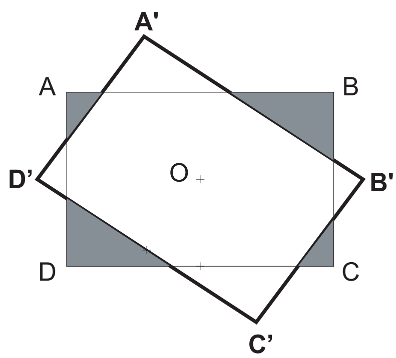


fig.7

3. La figure 7 représente un cas où le plateau supérieur a tourné d'un angle α compris entre 0^o et la valeur β déterminée à la question 2)a). On appelle K le milieu du segment [DC], K' le milieu du segment [D'C'], J le point d'intersection de [DC] et [D'C'] et L le point d'intersection de [D'C'] et [AD].
   a) Exprimer la mesure de l'angle $\widehat{KOJ}$.
   b) Exprimer l'aire du triangle LDJ en fonction de α.

On ne demande pas de déterminer l'aire des trois autres triangles grisés ; celui ayant B comme sommet a la même aire de LDJ et, par un raisonnement analogue, on pourrait trouver l'aire des deux autres triangles.

4. On se place enfin dans le cas où le plateau supérieur a tourné d'un angle α compris entre la valeur

β déterminée à la question 2.a) et 90°. Exprimer dans ce cas l'aire de la surface visible du plateau inférieur en fonction de α.

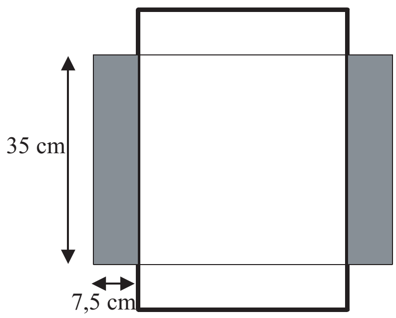
Éléments de solution

Première partie

Longueur (en cm) de la demi-diagonale du plateau : $OB' \approx 30,5123 \approx 30,52$ par excès.
$d_1 \approx 30,52 - 25 \approx 5,52$; $d_2 \approx 30,52 - 17,5 \approx 1302$.
Il faut donc placer le meuble au minimum à 5,52 cm du mur 1 et à 13,02 cm du mur 2 pour que le plateau puisse tourner sans buter contre les murs.

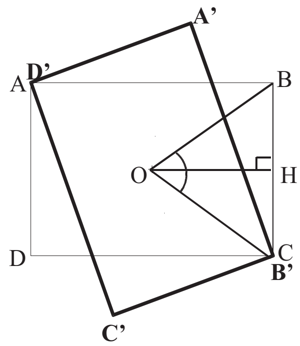
Deuxième partie

1. a)

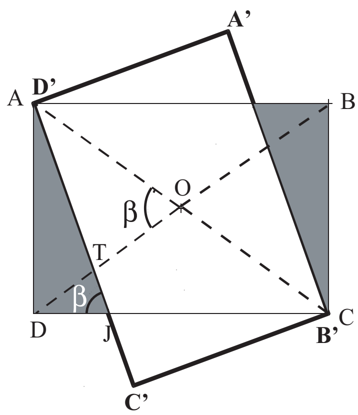


b) $2 \times (35 \times 7,5) = 525$ Dans ce cas, la surface visible du plateau inférieur a pour aire 525 cm².

2. a) On cherche la mesure β de l'angle $\widehat{BOC}$.
Soit H le pied de la hauteur issue de O dans le triangle BOB' ;
Ce triangle étant isocèle en O, H est aussi le milieu de [BB'].
De plus, (OH) est la bissectrice de l'angle $\widehat{BOC}$ et $\beta = 2\widehat{HOB}$.
Dans le triangle BOH rectangle en H, $\tan\dfrac{\beta}{2} = \dfrac{35}{50} = 0,7$
D'où $\beta = 2\tan^{-1} 0,7 \approx 70°$
(ou $\beta = 18 - 2\widehat{OBH} = 180 - 2\tan^{-1} 1,43 \approx 180 - 2 \times 55 = 70°$).



b) Soit T le point d'intersection des segments [OD] et [D'C'] et soit J le point d'intersection des segments [DC] et [D'C'].
Les angles $\widehat{DTJ}$ et $\widehat{ATO}$ sont opposés par le sommet donc ils ont la même mesure.
De plus, $\widehat{TAO} = \widehat{ACA'} = \dfrac{\beta}{2} = \tan^{-1} 0,7$
Or $\widehat{ATO} = 180 - \widehat{TAO} - \widehat{AOT} = 180 - \dfrac{3\beta}{2}$ et $\widehat{TDJ} = \widehat{OBA} = \dfrac{\beta}{2}$
donc $\widehat{DJT} = 180 - \widehat{TDJ} - \widehat{DTJ} = 180 - \left(180 - \dfrac{3\beta}{2}\right) - \dfrac{\beta}{2} = \beta$.
Dans le triangle ADJ rectangle en D, $\tan\beta = \dfrac{DA}{DJ}$
donc $DJ = \dfrac{DA}{\tan\beta}$.
Aire de la surface grisée (en cm²) :
$AD \times DJ = \dfrac{DA^2}{\tan\beta} = \dfrac{35^2}{2,747} \approx 446.$

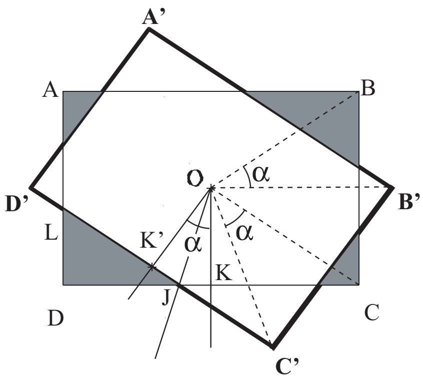


3. a)

▶ **Commençons par montrer que** $\widehat{K'OK} = \alpha$

On a $\widehat{K'OK} = \widehat{COK'} - \widehat{COK} = \alpha + \widehat{C'OK'} - \widehat{COK} = \alpha$

Car $\widehat{C'OK'} = \widehat{COK}$.



▶ **Montrons que** $\widehat{KOJ} = \widehat{K'OJ}$

Les triangles OKJ et OK'J sont rectangles respectivement en K et K'.

De plus, ils ont le côté [OJ] en commun et les longueurs OK et OK' sont égales.

En utilisant le théorème de Pythagore, on peut alors montrer que les longueurs JK et JK' sont égales.

Cela signifie que le point J est équidistant des côtés de l'angle $\widehat{KOK'}$ et appartient donc à la bissectrice de cet angle.

Ainsi la droite (OJ) est la bissectrice de l'angle.

D'où : $\widehat{KOJ} = \widehat{K'OJ}$.

3. b) Dans le triangle JOK, rectangle en K, $\tan\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{JK}{OK}$, soit $\tan\alpha = \dfrac{JK}{17,5}$

donc $JK = 17,5\tan\dfrac{\alpha}{2}$.

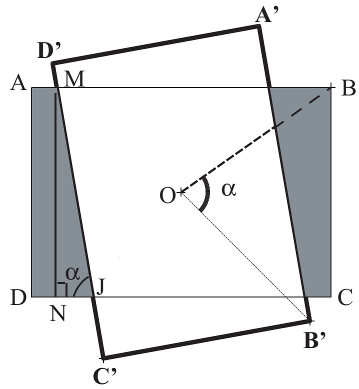
On en déduit : $DJ = DK - JK = 25 - 17,5\tan\dfrac{\alpha}{2}$.

D'autre part, dans le triangle LDJ rectangle en D, on a $\widehat{DJL} = \alpha$ (même raisonnement que dans la question 2.b)) et $\tan\alpha = \dfrac{LD}{DJ}$.

Donc $LD = DJ \times \tan\alpha = (25 - 17,5\tan\dfrac{\alpha}{2}) \times \tan\alpha$.

Aire du triangle LDJ (en cm²) : $\dfrac{1}{2} \times DJ \times LD = \dfrac{1}{2}(25 - 17,5\tan\dfrac{\alpha}{2})^2\tan\alpha$.

4. Dans un tel cas, la surface visible du plateau inférieur est composée de deux trapèzes superposables.



Aire de la surface grisée $= 2\times$ Aire du trapèze AMJD
$= (DJ + AM) \times 35$.

De même que précédemment, on a $DJ = 25 - 17,5\tan\dfrac{\alpha}{2}$
$AM = DJ - JN$.

Dans le triangle MNJ rectangle en N, $\tan\alpha = \dfrac{NM}{NJ}$ soit $\tan\alpha = \dfrac{35}{NJ}$

donc $JN = \dfrac{35}{\tan\alpha}$ et $AM = 25 - 17,5\tan\dfrac{\alpha}{2} - \dfrac{35}{\tan\alpha}$.

ainsi l'aire grisée est égale à $\left(50 - 35\tan\dfrac{\alpha}{2} - \dfrac{35}{\tan\alpha}\right) \times 35$.

RETOUR AU SOMMAIRE

GRENOBLE

Troisième exercice

Séries autres que S

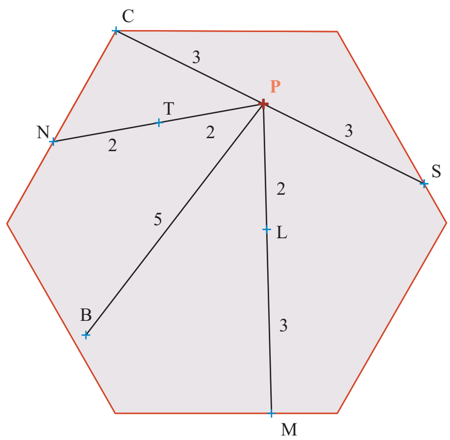
Distances sur un réseau ferroviaire

Énoncé

A - Dans un pays imaginaire...

Toutes les villes sont reliées par des voies de chemin de fer à la capitale P.
Il n'existe en revanche aucune liaison directe entre deux villes qui ne sont pas sur une même droite passant par P.

On note AB la distance habituelle (appelée distance euclidienne) entre deux points A et B, exprimée dans une certaine unité de longueur u.
La distance à parcourir pour aller de A à B en utilisant le réseau ferroviaire sera notée d(A,B), elle sera dans la suite appelée distance ferroviaire.



Ainsi, la « distance ferroviaire » du point M au point B est d(M,B) $= MP + PB = 10$, tandis que la « distance ferroviaire » du point M au point L est d(M,L) $= ML = 3$.

1. Quelles sont, parmi les villes représentées sur la carte, celles qui sont situées à une distance ferroviaire inférieure ou égale à cinq unités de la ville L ?
2. La distance habituelle vérifie la propriété suivante :
   « Pour trois points A, B et C du plan, $AC = AB + BC$ si et seulement si les points A, B et C sont alignés dans cet ordre ».
   Cette propriété est-elle vérifiée par la distance ferroviaire ?

B - Une modélisation

Dans la suite, on munit le plan d'un repère orthonormé $(P; \overrightarrow{i}\,; \overrightarrow{j}\,)$ dont le centre représente la capitale.
R est le point de coordonnées (2 ; 0) et S est le point de coordonnées (1 ; 0).
On supposera dans cette modélisation que tout point du plan (et plus seulement les villes) est rélié par une ligne imaginaire au point P et, comme dans la partie A, qu'il n'existe pas de ligne entre deux points quelconques du plan non alignés avec le point P.
Enfin, par « distance », il faut toujours entendre « distance sur ce réseau ferroviaire ».

1. Cercles et disques ferroviaires.
   a) Quel est l'ensemble des points du plan situés à une distance 2 du point P ?
   b) Quel est l'ensemble des points du plan situés à une distance inférieure ou égale à 1 du point R ? Quel est l'ensemble des points situés à une distance égale à 3 du point R ?
2. Égalités de distances
   a) Quels sont les points du plan situés plus près de R que de P ?
   b) Quels sont les points du plan situés à la même distance de R que de P ?
   c) Quel est l'ensemble des points équidistants des points R et S ?

3. Le chemin le plus court.
   Quel est, dans le plan muni de la distance ferroviaire, le chemin le plus court d'un point quelconque A à un point quelconque B ?

Éléments de solution

A - Dans un pays imaginaire

1. Les villes représentées sur la carte situées à une distance ferroviaire inférieure ou égale à cinq unités de la ville L sont : L, M, P, S, C et T.
   (aucune justification n'est exigée)
2. Un contre-exemple : $LT = LP + PT$.

B - Une modélisation

1. Cercles et disques ferroviaires.
   a) Tout point est relié à P par le réseau, donc un point du plan est situé à une distance 2 sur le réseau ferroviaire si et seulement il est à une distance 2 du point P, c'est-à-dire si et seulement si il est sur le cercle de centre P et de rayon 2.
   b) Les seuls points reliés à R et situés à une distance inférieure ou égale à 1 du point R sont les points de la droite (RP) tels que $RP \leqslant 1$. Il s'agit donc du segment [SS'] où S' est le point de coordonnées (3 ;0).

   L'ensemble des points situés à une distance égale à 3 du point R est constitué des points M
   - de la droite (RP) tels que $RM = 3$, à savoir les points C(-1 ;0) et D(5 ;0),
   - du plan situés hors de (RP) tels que $d(\mathrm{R};\mathrm{M}) = RP + PM = 3$, ce qui équivaut à $PM = 1$.

   La réunion de ces deux ensembles est la réunion du point D(5 ;0) avec le cercle de centre P et de rayon 1, privé du point S.
2. Égalité des distances.
   a) *Points du plan situés plus près de R que de P ?*
   Pour tout point M extérieur à (RP), on a $d(\mathrm{M};\mathrm{R}) = MP + PR > MP$; les seuls points à envisager sont donc les points de la droite (RP), il s'agit du segment [SS'] privé de ses extrémités.
   b) *Points du plan situés à la même distance de R que de P ?*
   Il résulte de la question précédente que seul le point S convient.
   c) *Quel est l'ensemble des points équidistants des points R et S ?*
   En procédant de même, le seul point qui convient est U(1,5 ;0).
3. Le chemin le plus court

   Si A et B sont alignés avec P (et en particulier s'ils sont égaux. . .), alors la distance sur le réseau est égale à la distance habituelle, le chemin le plus court est donc la ligne droite.

   Si P n'est pas un point de la droite (AB) alors le chemin le plus court est la ligne brisée constituée des deux segments [AP] et [PB].

RETOUR AU SOMMAIRE

GUADELOUPE

Premier exercice

Toutes séries

Jeux interdits

Énoncé

Au départ du jeu on a une liste de sept nombres entiers : 12 ; 43 ; 4 ; 321 ; 17 ; 88 ; 104.
Une partie consiste en trois étapes :

a) On choisit un nombre entier arbitraire a, qui peut être un nombre négatif.

b) On choisit quatre nombres parmi les sept de la liste.

c) On additionne le nombre a, à chacun des quatre nombres choisis.

On obtient alors une nouvelle liste de sept nombres.
Le nombre a peut être choisi différent dans chaque partie.
Sera-t-il possible, après un certain nombre de parties, d'obtenir la liste suivante : 78 ; 34 ; 123 ; 218 ; 37 ; 95 ; 21 ?

Éléments de solution

Quel que soit le nombre a, la somme des nombres de la liste obtenue est égale à $589 + 4a$, qui est un nombre impair.

La somme des nombres $78 + 34 + 123 + 218 + 37 + 95 + 21 = 606$, est un nombre pair.

RETOUR AU SOMMAIRE

GUADELOUPE

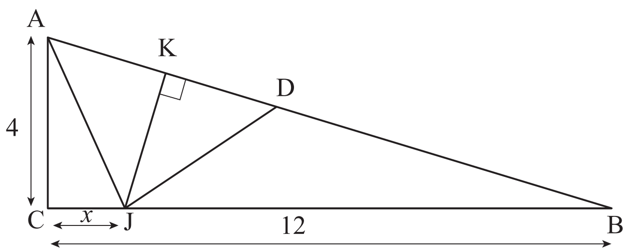
Deuxième exercice

Toutes séries

Géométrie du temps qui passe

Énoncé

BCA est un triangle rectangle en C.
$AC = 4$ et $CB = 12$.
J est un point de [BC] et D un point de [AB] tels que le triangle AJD soit un triangle équilatéral de hauteur JK.
On pose $JC = x$.
Montrer que x est solution de l'équation du second degré : $13^2 + 48x - 48 = 0$. En déduire x.



Éléments de solution

Pour montrer que x est solution de l'équation du second degré $13^2 + 48x - 48 = 0$,on peut calculer l'aire du triangle ACB de deux façons.

Première méthode :
Aire ACB = Aire ACJ + Aire AJB

$$\frac{4 \times 12}{2} = \frac{1}{2}4x + \frac{1}{2}JK \times AB \text{ [1]}$$

Deuxième méthode :

$JK = \frac{1}{2}\sqrt{3}AJ$ (Hauteur du triangle équilatéral AJD de côté AJ)

$AJ = \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + 4^2}$ (théorème de Pythagore dans le triangle rectangle ACJ).

$AB = \sqrt{4^2 + 12^2} = \sqrt{160}$ (théorème de Pythagore dans le triangle rectangle ACB).

L'égalité [1] s'écrit
$24 = 2x + \sqrt{30(x^2 + 16)}$
$24 - 2x = \sqrt{30(x^2 + 16)}$.
En élevant les deux membres au carré, car x est compris entre 0 et 12 et donc $24 - 2x$ est positif.
$(24 - 2x)^2 = 30(x^2 + 16) \Leftrightarrow 576 - 96x + 4x^2 = 30x^2 + 480 \Leftrightarrow 30x^2 - 4x^2 + 96x - 96 = 0$
$26x^2 + 96x - 96 = 0 \Leftrightarrow 13x^2 + 48x - 48 = 0$

Résolution de l'équation
Le discriminant

$48^2 - 4(13)(-48) = 4800$ est positif et l'équation admet deux racines : $\dfrac{-48 \pm \sqrt{48^2 - 4(13)(-48)}}{2(13)}$

Soit $x = \dfrac{-24 + 20\sqrt{3}}{13}$ et $y = \dfrac{-24 - 20\sqrt{3}}{13}$.

y est à exclure car négatif.
Il reste à vérifier que x est compris entre 0 et 12.

RETOUR AU SOMMAIRE

GUYANE

Premier exercice

Toutes séries

Nombres beaucarrés

Énoncé

Dans tout cet exercice on appellera « beaucarré » tout nombre qui s'écrit comme une somme d'au moins deux entiers non nuls, dont la somme des carrés est le carré d'un entier.
Par exemple, 4 est « beaucarré »car on peut écrire

$$4 = 1 + 1 + 1 + 1 \text{ avec } 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 = 4 = 2^2.$$

De même, 14 est « beaucarré »car on peut écrire

$$14 = 8 + 6 \text{ avec } 8^2 + 6^2 = 100 = 10^2.$$

1. **Les beaucarrés jusqu'à 7.**
   a) Montrer que 5 est beaucarré.
   b) Montrer que 3 n'est pas beaucarré.
   c) Déterminer tous les nombres beaucarrés inférieurs ou égaux à 7.
2. **Les multiples de beaucarrés sont beaucarrés.**
   a) A partir de la décomposition $4 = 1 + 1 + 1 + 1$ prouvant que 4 est beaucarré, montrer que 8 est beaucarré.
   b) A partir de votre décomposition de la question 1.a) prouvant que 5 est beaucarré, montrer que 15 est beaucarré.
   c) De façon générale, montrer que si n est beaucarré, alors pour tout k entier, kn est beaucarré également.
3. **Détermination de tous les beaucarrés.**
   a) En vous inspirant de la décomposition $4 = 1 + 1 + 1 + 1$ prouvant que 4 est beaucarré, montrer que tout entier s'écrivant n^2, avec n un entier non nul, est beaucarré.
   b) Montrer à partir de la décomposition $16 = 1 + 1 + \cdots + 1$ que les nombres 14 et 12 sont beaucarrés.
   c) Plus généralement, montrer que tous les nombres de la forme $n^2 - 2p$, avec p un entier non nul tels que $n^2 - 2p \geqslant \dfrac{n^2}{2}$, sont beaucarrés.
   d) En déduire que tous les nombres pairs $\geqslant 8$ et tous les nombres impairs $\geqslant 13$ sont beaucarrés.
   e) Déterminer l'ensemble de tous les nombres beaucarrés.

Éléments de solution

1. **Les beaucarrés jusqu'à 7.**

   a) 5 est beaucarré car on peut écrire
   $$5 = 1 + 2 + 2 \text{ avec } 1^2 + 2^2 + 2^2 = 3^2.$$

   b) Les seules façons de décomposer 3 en somme d'au moins deux entiers strictement positifs sont les suivantes :
   $$3 = 1 + 1 + 1 \text{ avec } 1^1 + 1^1 + 1^1 = 3,$$
   et
   $$3 = 1 + 2 \text{ avec } 1^1 + 2^2 = 5.$$
   Or ni 3 ni 5 ne sont des carrés d'entiers. Donc 3 n'est pas un beaucarré.

   c) On va étudier le caractère beaucarré des nombres 1,2,3,4,5,6,7.
   - 1 n'est pas beaucarré, car on ne peut pas écrire 1 comme somme de deux entiers strictement positifs.
   - 2 n'est pas beaucarré, car la seule décomposition possible est
   $$2 = 1 + 1 avec 12 + 12 = 2$$
   et 2 n'est pas un carré.
   - 3 n'est pas beaucarré, on l'a prouvé dans la question précédente.
   - 4 est beaucarré car on peut écrire
   $$4 = 1 + 1 + 1 + 1 \text{ avec } 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 = 2^2.$$
   - 5 est beaucarré, on l'a prouvé dans la question précédente.
   - 6 n'est pas beaucarré. En effet, les décomposition possibles sont les suivantes :
   $$\begin{array}{rcl} 6 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 & \text{avec} & 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 = 6 \\ 6 = 1 + 1 + 1 + 1 + 2 & \text{avec} & 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 2^2 = 8 \\ 6 = 1 + 1 + 2 + 2 & \text{avec} & 1^2 + 1^2 + 2^2 + 2^2 = 10 \\ 6 = 2 + 2 + 2 & \text{avec} & 2^2 + 2^2 + 2^2 = 12 \\ 6 = 1 + 1 + 1 + 3 & \text{avec} & 1^2 + 1^2 + 1^2 + 3^2 = 12 \\ 6 = 3 + 3 & \text{avec} & 3^2 + 3^2 = 18 \\ 6 = 1 + 2 + 3 & \text{avec} & 1^2 + 2^2 + 3^2 = 14 \end{array}$$
   et 6,8,10,12,14,18 ne sont pas des carrés d'entiers.
   - Enfin 7 est beaucarré, on a par exemple le fameux triplet pythagoricien 3 ; 4 ; 5 qui nous l'assure :
   $$7 = 3 + 4 \text{ avec } 3^2 + 4^2 = 5^2.$$

2. **Les multiples de beaucarrés sont beaucarrés.**

   a) On peut écrire
   $$8 = 2 \times 4 donc 8 = 2 + 2 + 2 + 2 \text{ avec } 2^2 + 2^2 + 2^2 + 2^2 = 16 = 4^2.$$
   Donc 8 est beaucarré.

   b) On connaît la décomposition $5 = 1 + 2 + 2$ qui nous assure que 5 est beaucarré. Comme $15 = 3 \times 5$, on en déduit
   $$15 = 3 \times 1 + 3 \times 2 + 3 \times 2 = 3 + 6 + 6 \text{ avec } 3^3 + 6^2 + 6^2 = 81 = 9^2.$$
   Donc 15 est beaucarré.

   c) Si n est beaucarré, on peut par définition écrire n comme une somme d'entiers dont la somme des carrés est un carré. Notons ce nombre p^2.
   Si on multiplie tous les termes de cette décomposition par k, on obtient une décomposition de l'entier kn comme somme d'entiers dont la somme des carrés vaut $k^2p^2 = (kp)^2$, donc kn est bien beaucarré.

3. **Détermination de tous les beaucarrés.**

a) n^2 peut se décomposer comme suit :

$$\underbrace{1+1+1+\cdots+1+1}_{n^2 \text{ fois}} \text{ avec } \underbrace{1^2+1^2+\cdots+1^2+1^2=n^2}_{n^2 \text{ fois}}.$$

Donc n^2 est beaucarré

b) On a

$$9 = 1+1+1+1+1+1+1+1+1 \text{ avec } 1^2+1^2+1^2+1^2+1^2+1^2+1^2+1^2+1^2 = 3^2$$

Dans la somme de droite, si on remplace $1^2+1^2+1^2+1^2$ par 2^2, on ne change pas le résultat, qui vaut toujours 9, et on obtient

$$7 = 1+1+1+1+1+2 \text{ avec } 1^2+1^2+1^2+1^2+1^2+2^2 = 3^2.$$

Donc 7 est beaucarré.
Si on réitère cette opération (remplacer $1+1+1+1$ par 2 dans la somme de gauche), on obtient :

$$5 = 1+2+2 \text{ avec } 1^2+2^2+2^2 = 3^2,$$

nous assurant que 5 est beaucarré.

c) D'après la question 3.a on sait que n^2 est beaucarré avec une décomposition ne contenant que des "1". Si on applique ce qu'on a fait dans la question précédente, on se retrouve avec

$$n^2-2 = \underbrace{1+1+\cdots+1}_{n-4 \text{ fois}}+2 \text{ avec } \underbrace{1^2+1^2+\cdots+1^2+1^2}_{n^2-4 \text{ fois}}+2^2 = n^2.$$

Si on effectue p fois ce remplacement de $1+1+1+1$ par 2 dans la décomposition de gauche, on se retrouve avec

$$n^2-2p = \underbrace{1+\cdots+1}_{n^2-4p \text{ fois}}+\underbrace{2+\cdots+2}_{p \text{ fois}} \text{ avec } \underbrace{1^2+\cdots+1^2}_{n^2-4p \text{ fois}}+\underbrace{2^2+\cdots+2^2}_{p \text{ fois}} = n^2.$$

Ce procédé s'arrête évidemment quand on n'a plus assez de "1" dans la décomposition. Il faut donc que

$$n^2-4p \geqslant 0 \Leftrightarrow \frac{n^2}{2}-2p \geqslant 0 \Leftrightarrow n^2-2p \geqslant \frac{n^2}{2}.$$

d) D'après la question 3.a., 16 est beaucarré car c'est le carré de 4. D'après la question 3.c. on en déduit que les nombres pais compris entre 16 et $\frac{16}{2}=8$ sont beaucarrés.
On considère ensuite 36 qui est le carré de 6. On déduit de la même manière que les entiers pairs entre 36 et 18 sont beaucarrés, ce qui nous donne au final tous les entiers pairs entre 8 et 36 beaucarrés.
On continue ainsi en prenant les carrés des nombres pairs suivants et on s'aperçoit que les nombres pairs $\geqslant 8$ sont tous beaucarrés.

On applique le même raisonnement pour les nombres impairs :
25 est beaucarré, et tous les impairs entre 25 et 13 sont aussi beaucarrés. Ensuite 49 est beaucarré, donc tous les nombre impairs entre 25 et 49 sont beaucarrés, ce qui nous donne tous les nombres impairs entre 13 et 49 qui sont beaucarrés. En continuant ainsi, on obtient tous les nombres impairs $\geqslant 13$ qui sont beaucarrés.

e) On a déterminé les beaucarrés qui sont $\leqslant 7$, les beaucarrés pairs qui sont $\geqslant 8$ et les beaucarrés impairs qui sont $\geqslant 13$. Il nous reste donc à déterminer si les nombres impairs 9 et 11 sont beaucarrés.
9 est évidemment beaucarré car c'est le carré de 3.
11 est beaucarré ; on peut par exemple écrire

$$11 = 6+3+2 \text{ avec } 6^2+3^2+2^2 = 7^2,$$

ou encore

$$11 = 3 + 2 + 2 + 2 + 2 \text{ avec } 3^2 + 2^2 + 2^2 + 2^2 + 2^2 = 5^2,$$

ou même

$$11 = 4 + 2 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 \text{ avec } 4^2 + 2^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 = 5^2.$$

On en déduit que les nombres beaucarrés sont tous les entiers strictement positifs, en dehors de 1, 2, 3 et 6.

RETOUR AU SOMMAIRE

GUYANE

Deuxième exercice

Toutes séries

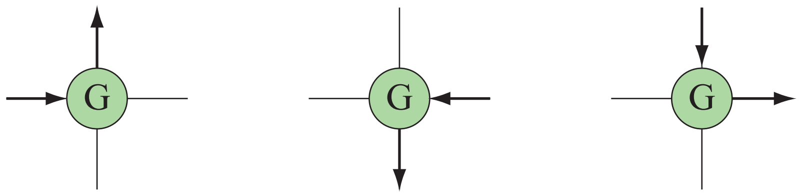
Longchemin

Énoncé

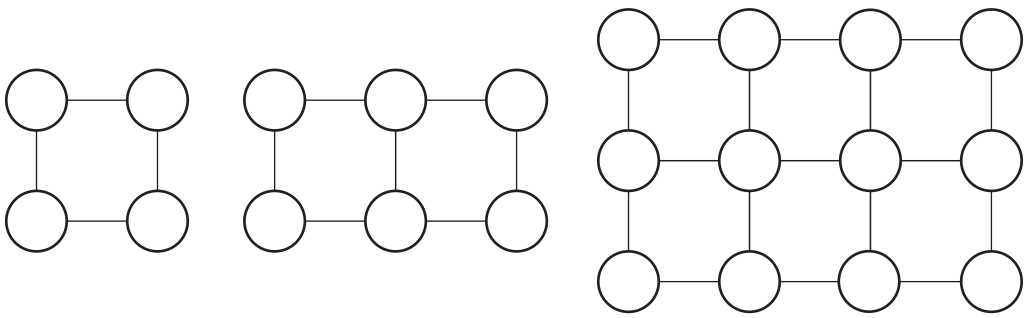
Dans la ville de Longchemin, Kévin le plaisantin s'amuse à mettre des panneaux « obligation de tourner à droite » ou « obligation de tourner à gauche » ou enfin « obligation d'aller tout droit » à chaque intersection des rues de la ville, pour que les habitants parcourent la plus grande distance possible avant de revenir à leur point de départ. Les habitants de Longchemin, étant très respectueux du code de la route, suivent systématiquement les instructions des panneaux. Sur les schémas les panneaux seront indiqués par les symboles suivants :

- un « G » pour tourner à gauche.
- un « D » pour tourner à droite.
- un « T » pour aller tout droit.

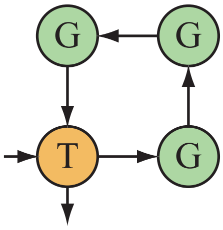
On notera bien qu'un panneau placé à une intersection est valable quelle que soit la rue d'où l'on vient, et que la direction à suivre s'obtient en se mettant à la place du conducteur. L'exemple suivant montre 3 trajets possibles d'un véhicule arrivant à une intersection « G », selon sa provenance :

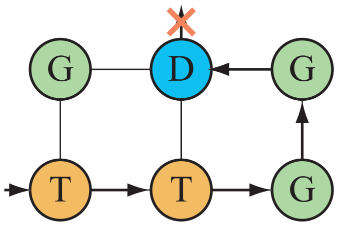


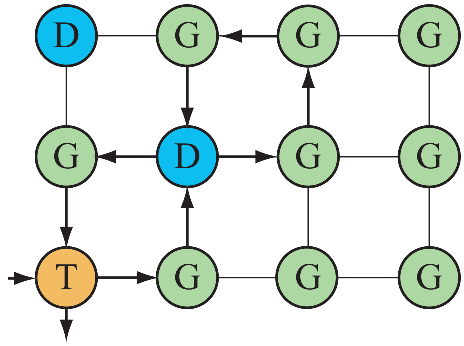
Dans ce problème, nous allons aider Kévin à placer les panneaux à toutes les intersections de rues pour différents quartiers de formes rectangulaire de la ville de Longchemin. On appellera réseau le plan d'un tel quartier. Les intersections de rues seront aussi appelées carrefours. Un réseau est déterminé par ses dimensions, correspondant à la largeur et la longueur du rectangle, en nombre de rues.
Par exemple, les réseaux suivants sont respectivement de dimensions 1-1, 1-2, et 2-3.



Une *configuration* d'un réseau est la donnée des indications « G », « D », ou « T » pour chaque carrefour. Une fois un réseau configuré, on pourra identifier le chemin parcouru par une voiture entrant dans le quartier, et suivant scrupuleusement les indications de chaque carrefour. On supposera à chaque fois que le chemin commence par le carrefour situé dans le coin en bas à gauche. Voici des exemples de configurations pour les trois réseaux donnés plus haut :







La *longueur* d'un chemin est le nombre de rues parcourues entre le premier carrefour rencontré en rentrant dans le réseau et le dernier avant d'en sortir.

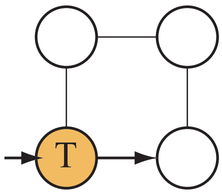
Dans les exemples précédents, la première configuration donne un chemin de longueur 4 : on sort du réseau après avoir parcouru 4 rues.

La deuxième configuration donne aussi un chemin de longueur 4, mais une telle configuration ne sera pas valide car on n'accepte que les configurations pour lesquelles le chemin se termine au carrefour de départ.

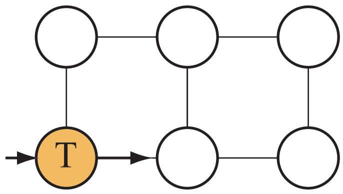
Enfin la dernière configuration donne un chemin de longueur 8.

Pour tous les réseaux considérés, on supposera que le carrefour de départ (celui du coin en bas à gauche) est déjà fixé avec un panneau « tout droit », et qu'on entre dans le réseau en venant de la gauche du plan, comme dans les trois exemples précédents. Une configuration valide se terminera ainsi par une sortie de ce même carrefour vers le bas, comme dans le premier et troisième exemple.

1. **Réseaux 1-p**
   a) Aidez Kévin à placer les panneaux pour que les chemins soient les plus longs possibles dans les réseaux suivants et précisez dans chaque cas la longueur du chemin.

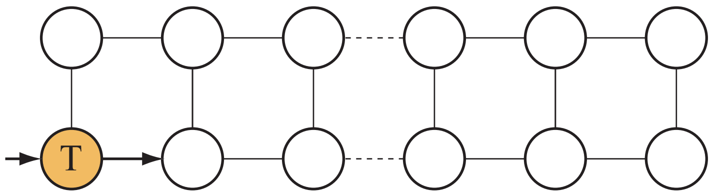


cas n° 1



cas n° 2

   b) En vous inspirant de la question précédente, déterminer les panneaux à placer sur le réseau $1-p$, qui contient $2(p+1)$ carrefours (p étant un entier) pour obtenir le plus long chemin possible.
   Donner la longueur de ce chemin en fonction de p.



2. **Longueur théorique du plus long chemin**
   Dans cette partie, on considère deux entiers naturels n et p non nuls et un réseau $n-p$. On va déterminer la longueur théorique du plus long chemin que peut donner une configuration. Pour ce faire, on se donne une configuration valide quelconque, qu'on notera $\mathcal{C}$.
   a) Expliciter en fonction de n et p le nombre de carrefours du réseau $n-p$ et, parmi ces derniers, combien se situent sur le contour du réseau.
   b) Justifier que le chemin donné par $\mathcal{C}$ ne passe au plus qu'une seule fois par les carrefours situés aux coins du réseau, autres que celui de départ.

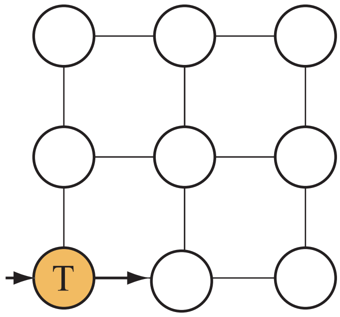
c) Justifier que le chemin donné par $\mathcal{C}$ ne passe au plus que 4 fois par les carrefours situés à l'intérieur du réseau (c'est-à-dire pas sur le contour).

d) Justifier enfin que le chemin donné par $\mathcal{C}$ ne passe au plus que 2 fois par les carrefours situés sur les contours du réseau, autres que les coins.

e) Déduire des 4 questions précédentes que la longueur du chemin donné par $\mathcal{C}$ ne peut pas dépasser $4np$.

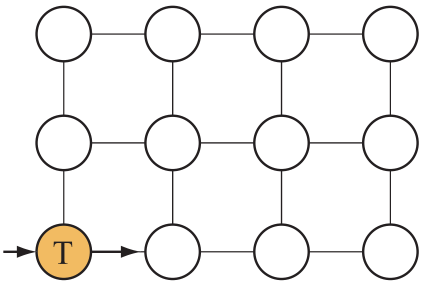
3. **Réseau 2 - *p***

a) Commençons par considérer le réseau 2-2.

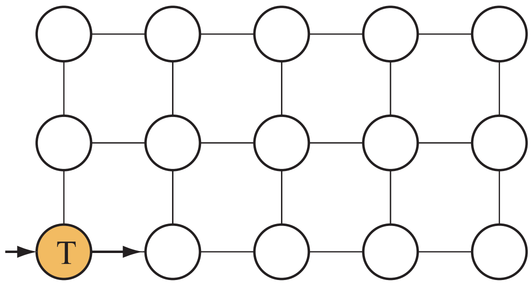


D'après la partie 2, la longueur d'un plus long chemin est au plus 16.
Justifier que pour atteindre cette longueur de 16, il est nécessaire de mettre des panneaux « G » sur tous les carrefours du contour, autres que celui de départ. En déduire une configuration donnant un chemin de longueur 16.

b) Donner les longueurs théoriques d'un plus long chemin pour les réseaux 2-3 et 2-4 suivants. En raisonnant comme à la question précédente, trouver des configurations donnant des chemins qui ont réellement ces longueurs.

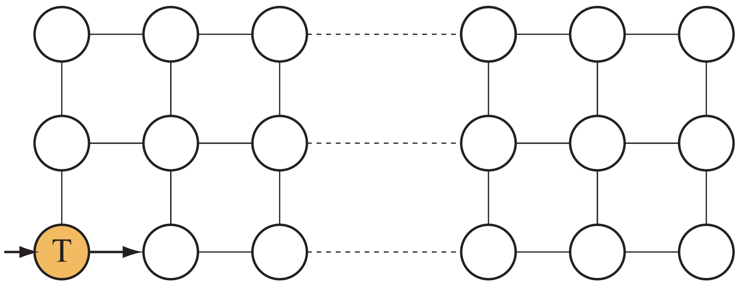


cas nº 1



cas nº 2

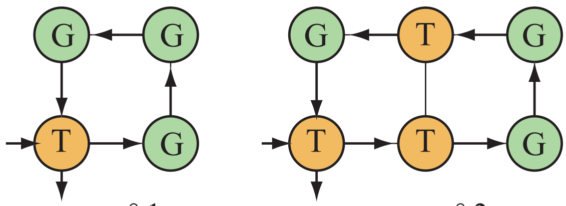
c) Pour un entier $p \geqslant 3$ quelconque, déterminer la longueur du plus long chemin possible pour le réseau 2-p, et donner une configuration donnant un tel chemin. Toute explication honnête, même non rigoureuse, sera favorablement prise en compte.



Éléments de solution

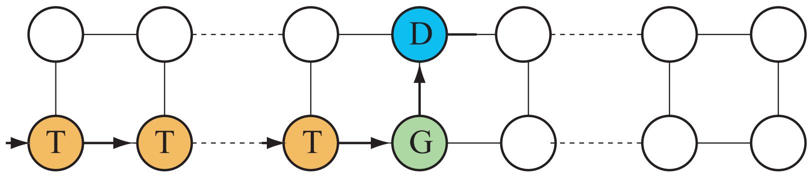
1. **Réseaux 1 - *p***

a) Pour le cas n° 1, celui du réseau 1-1, une seule configuration est valide : il s'agit de celle donnée en exemple dans l'énoncé, et elle fournit un chemin de longueur 4.
Pour le cas nn° 2, celui du réseau 1-2, on se convainc aisément qu'un chemin de longueur maximale fait le « tour du réseau ». Ce chemin s'obtient avec une configuration où l'on place un panneau « G » aux trois autres coins, et un panneau « T » sur les deux panneaux restant. Le chemin résultant est de longueur 6.



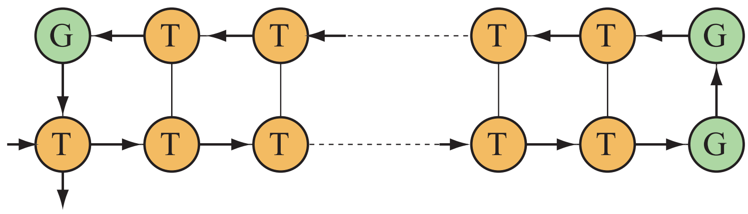
cas n° 1 cas n° 2

b)
- S'il s'agit de « D », on sort du réseau. La configuration n'est pas valide.
- S'il s'agit de « G », on se rend alors sur le bord supérieur du réseau. Si alors le panneau suivant est « T », la configuration n'est pas valide.
  S'il s'agit de « D », la situation est la suivante :



  Si l'on espère un jour revenir au carrefour initial, il faudra repasser par l'un des deux carrefours « G » et « D » par lesquels on vient de passer. Mais dans chaque cas, l'indication nous fera sortir du réseau : une telle configuration n'est pas valide.
  Le panneau rencontré après le « G » ne peut donc être ni « T », ni « D » : c'est donc forcément un autre « G ».

Dès lors, on comprend bien que pour éviter de sortir avant le retour au carrefour initial, il faudra suivre le bord supérieur jusqu'au coin supérieur gauche. Un tel chemin sera de longueur maximal si la première « bifurcation » s'effectue au « bout » du réseau : ce chemin « fait le tour » du réseau :



Pour le réseau 1-p, un chemin maximal est donné par la configuration indiquée dans le schéma précédent, et il est de longueur $2p+2$ (soit le « périmètre » du réseau).

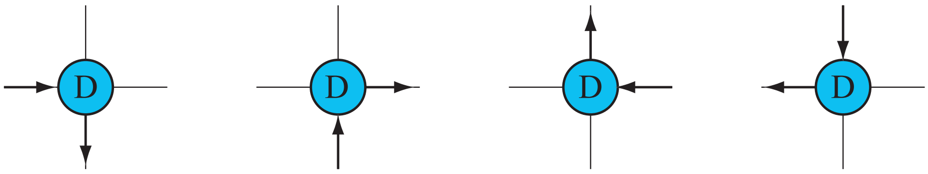
2. **Longueur théorique du plus long chemin**

a) Il est clair que le réseau n-p possède $(n+1)(p+1)$ carrefours (par exemple le réseau 1-2 a $6 = 2 \times 3$ carrefours).
Le « périmètre » du réseau n-p, en nombres de rue, est $2n+2p$. Mais il y a bien sûr autant de rues que de carrefours sur un contour (de même qu'un polygone a autant de sommets que de côtés). Il y a donc $2(n+p)$ carrefours sur le contour.

b) Un carrefour de coin ne connecte que deux rues, et il n'y a donc que deux façons de le traverser. D'autre part, puisqu'il faut nécessairement y « tourner », Un tel carrefour ne peut pas être noté « T », sinon la configuration ne serait pas valide. Mais s'il est noté « D » ou « G », seule l'une des deux façons évoquées ci-dessus pour le traverser est possible. Par exemple pour « D » au coin supérieur droit :

Si le chemin donné par $\mathcal{C}$ passe deux fois par un même carrefour de coin, autre que celui de départ, il doit donc y passer *de la même façon*, ce qui est absurde. En effet, un tel chemin repasserait forcément par le carrefour de départ entre ces deux passages.
Le chemin donné par $\mathcal{C}$ ne peut donc passer qu'une fois par un carrefour de coin (autre que celui de départ).

c) On vient de voir à la question précédente que le chemin donné par $\mathcal{C}$ ne peut passer deux fois par un même carrefour de la même façon. Il suffit donc de compter le nombre de façons différentes de passer par un carrefour situé à l'intérieur du réseau. Un tel carrefour connectant 4 rues, il y a 4 façons d'arriver au carrefour, donc 4 façons de le traverser puisque l'indication du panneau impose la façon de le quitter. Voici par exemple les 4 passages possibles avec un panneau « D » :



Le chemin donné par $\mathcal{C}$ ne passe au plus que 4 fois par un carrefour intérieur.

d) Comme pour la question précédente, on compte le nombre de façons différentes qu'il y a de passer par un carrefour situé sur le contour du réseau, sans être un coin. Un tel carrefour connecte 3 rues, et il y a donc un total de $3 \times 2 = 6$ façons de le traverser.
Chaque panneau donne 2 passages possibles. Par exemple pour un carrefour situé sur le bord supérieur, avec un panneau « G » :

Le chemin donné par $\mathcal{C}$ ne passe au plus que 2 fois par un carrefour de bord.

e) De la question (a), on peut déduire qu'il y a $(n-1)(p-1)$ carrefours intérieurs (ou voir directement que c'est le nombre de carrefours d'un réseau $(n-2)-(p-2)$). On en déduit aussi qu'il y a $2(n+p)-4$ carrefours de bords, autres que les coins.

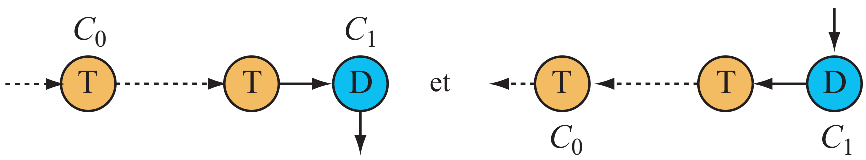
D'après les questions (b), (c), et (d), le chemin donné par $\mathcal{C}$ ne peut donc passer plus de $4 \times (n-1)(p-1)$ fois par un carrefour intérieur, plus de $2 \times 2(n+p)-4$ fois un carrefour de bord (autre que contour), et plus de 3×1 fois par un carrefour de coin autre que celui de départ.
Ainsi, le chemin donné par $\mathcal{C}$ ne peut pas effectuer plus de

$$4(n-1)(p-1) + 4(n+p) - 8 + 3 = 4np - 1$$

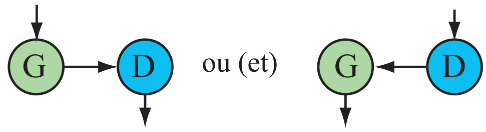
traversées de carrefours, autres que celui de départ. A chacun de ces carrefours correspond une rue parcourue. En ajoutant la rue finale permettant de rejoindre le carrefour de départ, la longueur du chemin donné pas $\mathcal{C}$ ne peut pas dépasser $4np$.

3. **Réseaux 2-p**

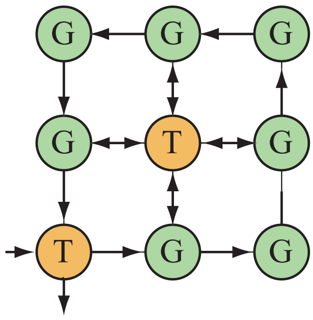
a) On sait déjà que les carrefours de coins ne peuvent être notés « T » pour une configuration valide. Voyons maintenant pourquoi c'est aussi le cas pour un carrefour de bord autre que coin, si l'on veut obtenir un chemin de longueur $4np$ (ici $4 \times 2 \times 2 = 16$). Pour atteindre cette longueur, il faut que le nombre indépassable de passages, obtenu aux questions 2.(b-c-d), soit atteint pour chaque carrefour. En particulier un carrefour de bord autre que coin doit être traversé 2 fois, ce qui n'est pas possible s'il est noté « T ».
En effet, notons c_0 un tel carrefour et considérons le plus proche carrefour c_1 de ce même bord qui n'est pas noté « T » (il y en a forcément au moins 1 : un coin). Si c_0 est traversé dans les deux sens, alors c_1 également, ce qui nécessite que c_1 puisse conduire à la fois à gauche et à droite à partir de c_0 : c_0 et c_1 ne peuvent donc pas être sur un bord. Par exemple :



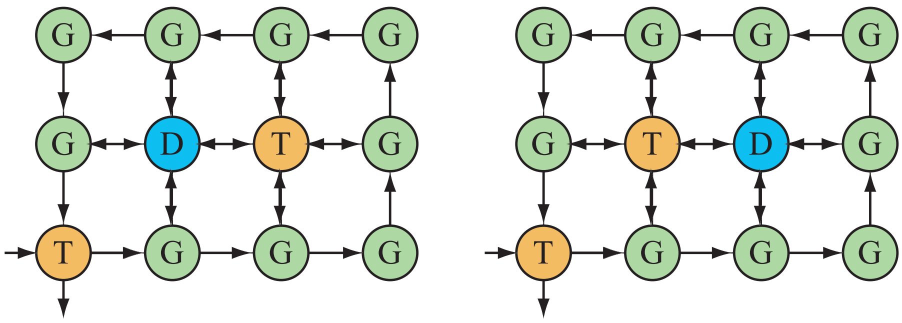
Ainsi tous les carrefours du bord, autres que celui de départ, doivent être notés "D" ou « G »si l'on espère obtenir une configuration donnant un chemin de longueur $4np$.
Mais pour une telle configuration, tous ces carrefours doivent en fait être notés « G ». S'il existe en effet une « connexion G-D » sur un bord, elle doit être empruntée au moins une fois (exactement deux en fait) :



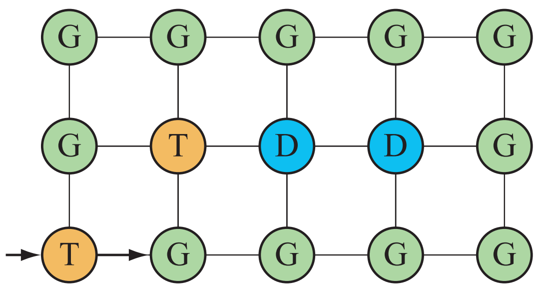
Cela est impossible avec des carrefours situés sur le bord.
Puisque par ailleurs le carrefour suivant immédiatement le carrefour de départ ne peut être noté « D », tous les carrefours du contour (autre que celui de départ) sont notés « G ».
Pour le réseau 2-2, il ne reste que le carrefour « central » à déterminer, ce qui laisse trois possibilités de configurations. Celle qui convient est la suivante :



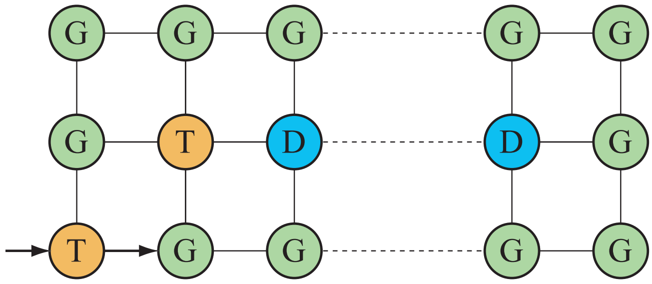
b) On utilise la formule $4np$ donnant la longueur théorique d'un plus long chemin pour le réseau n-p, d'après la question 2.(e).
Pour le réseau 2-3, cette longueur est donc 24. Pour le réseau 2-4, elle vaut 32.
Le raisonnement de la question précédente est encore valable ici Si des configurations donnant effectivement ces longueurs maximales existent pour les réseaux 2-3 et 2-4, leur contour ne contient que des carrefours notés « G » (sauf celui de départ).
On peut alors tester toutes les possibilités de choix pour les carrefours « intérieurs ».
Pour le réseau 2-3, les configurations suivante donnent chacune un chemin de longueur 24, soit la longueur maximale théorique :



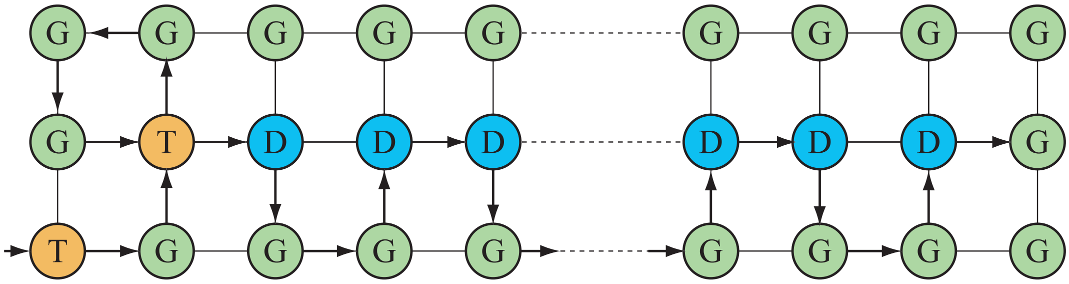
Pour le réseau 2-4, on trouve de même que les configurations pour lesquelles on place un « T » et deux « D » donnent bien des chemins de longueurs 32, et ce, peu importe le positionnement du « T » et des deux « D » parmi les trois carrefours intérieurs. Par exemple, la configuration suivante convient :



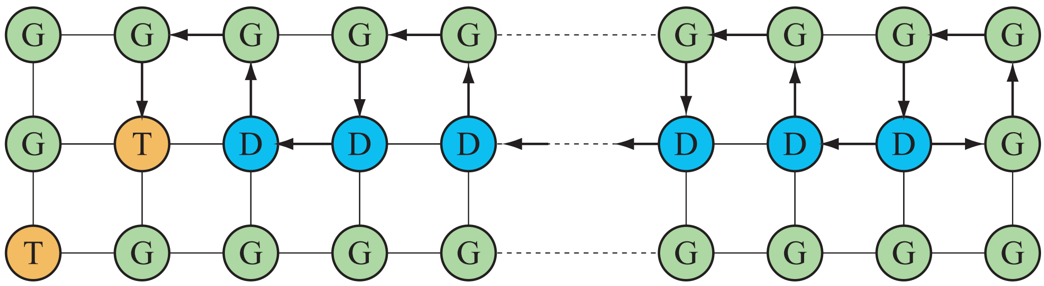
c) Soit un entier $p \geqslant 3$ quelconque. la longueur du plus long chemin possible pour le réseau 2-p est $\underline{8p}$, en appliquant toujours la même formule. Comme pour les réseaux 2-3 et 2-4, une configuration donnant effectivement un chemin de longueur $8p$ n'aura que des carrefours notés « G » sur son contour. L'intuition nous conduit à généraliser la configuration trouvée pour le réseau 2-4, et à examiner la configuration ou un seul carrefour intérieur est noté « T », et les $p-2$ autres sont notés « D » :



Le chemin donné par une telle configuration commence par une petite « boucle » passant par le coin supérieur gauche, puis serpente en « créneaux » dans la partie inférieure du réseau, jusqu'à son extrémité droite :



Le schéma ci-dessus présente la situation pour le réseau $2-p$ dans le cas où p est pair.
Le cas p impair est analogue.
À ce stade le chemin est de longueur $2p+3$.
Ensuite ce chemin effectue un petit « crochet » par un des deux coins et repart en « créneau » dans la partie supérieure du réseau, jusqu'à rencontrer le « T » de l'extrémité gauche. Voici la suite du parcours (toujours pour le cas p pair) :



Dans les deux cas, cette partie du parcours est de longueur $2p-1$. A ce stade, la longueur du chemin parcourue est donc $\underline{4p+2}$.

Le chemin vient d'effectuer un « aller-retour » du réseau. Ce passage par « T » va lui donner l'occasion d'en effectuer un second, qui va s'effectuer de nouveau en « créneaux », mais ceux-ci vont être « décalés » par rapport à la première fois. Ainsi, ce second aller-retour va emprunter toutes les connections qui ne l'avaient pas été lors du premier.
Au terme de ce second aller-retour, le chemin repasse une quatrième fois par ce « T » intérieur et s'achève deux rues plus loin sur le carrefour de départ. De « T » à « T », ce second aller-retour est de longueur $4(p-1)$. La longueur totale du parcours est donc $4p-2+4(p-1)+2 = 8p$, ce qui confirme bien que notre configuration donne un chemin de longueur maximale.

RETOUR AU SOMMAIRE

LILLE

Premier exercice

Toutes séries

A la recherche d'une dame

Énoncé

Voici quelques connaissances sur le Bridge pour traiter les exercices ci-dessous : Au Bridge, deux équipes composées chacune de deux partenaires Nord/Sud(Equipe1) et Est/Ouest (Équipe2) s'affrontent.
N.B.On se limite ici au cas où aucun atout n'a été choisi.

- On distribue la totalité d'un jeu de 52 cartes. Chacun des quatre joueurs dispose donc de 13 cartes.
- L'ordre des cartes est le suivant : As, Roi, Dame, Valet, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2.
- La seule obligation à ce jeu est de fournir quand on le peut une carte de la couleur (Pique, Cœur, Carreau ou Trèfle) demandée par celui qui joue le premier. Quand ce n'est pas possible, on doit fournir une carte quelconque (dans ce cas on dit qu'on défausse).
- On joue dans le sens des aiguilles d'une montre. Si Ouest joue en premier, Nord, Est et Sud déposeront leur carte dans cet ordre.
- Celui des quatre joueurs qui a la plus grosse des cartes de la couleur demandée remporte la levée et doit rejouer.
- Le jeu se termine lorsque les 52 cartes ont été jouées. Chaque joueur disposant de treize cartes, il y a donc treize tours donc treize levées possibles.
- Avant de jouer, les enchères ont permis de déterminer le camp du déclarant qui, par convenance, est Sud dans chacun des exercices. De ce fait, Ouest est le premier à jouer une carte, on dit qu'il entame. Nord étale alors son jeu (on dit que c'est le « mort ») qui devient visible des trois autres joueurs. Chaque joueur voit donc deux jeux, le sien et celui du mort. Sud joue ses cartes et celles de son partenaire Nord.

Partie A : Un petit exemple

Voici les cartes possédées par chacun des joueurs. Il est rappelé que chaque joueur voit ses cartes et celles de Nord.

	♠ 10 5 3	
	♥ A D 10	
	♦ R 9 7 5 2	
	♣ 10 8 2	
♠ R D 9 8 2	Nord	♠ V
♥ 4 3	Ouest Est	♥ V 8 7 6 5 2
♦ D 8 3		♦ 6 4
♣ D 9 7	Sud	♣ R 5 4
	♠ A 7 6 4	
	♥ R 9	
	♦ A V 10	
	♣ A V 6 3	

(Ici, il y a mal donne.Le 5 de carreau devrait être en Est et non en Nord).
Ouest entame du Roi de Pique ; voici les quatre premières levées :

	Ouest	Nord	Est	Sud
Tour 1	♠ R	♠ 3	♠ V	♠ A
Tour 2	♦ 3	♦ 2	♦ 4	♦ A
Tour 3	♦ D	♦ R	♦ 6	♦ V
Tour 4	♣	♣ 2	♣ 4	♣ V
Tour 5	♠ D	♠		♠

Sachant qu'Ouest a remporté la quatrième levée, quelle carte a-t-il fournie ? Complétez la levée
A cet instant, quelle est l'équipe qui a remporté le plus de levées ?

Partie B : Prendre la Dame

La partie précédente étant terminée, les cartes ont été redistribuées. Nous voici donc dans une nouvelle situation. Alors que dix levées ont déjà été faites, voici les cartes restantes pour le camp Nord/Sud en Pique. Est/ Ouest ayant fourni trois Piques en cours de partie, Nord/Sud sait qu'il reste en Est-Ouest :

- en Pique : La Dame, le 7, Le 6 Le 5 .
- en Cœur : le 8 et le 4

	♠ R 10 8	
	Nord	
	Ouest Est	
	Sud	
	♠ A V 9	

Question 1 : Sachant que c'est à Sud de jouer, voici ce que Sud se propose de jouer pour gagner les trois dernières levées :

	Sud	Ouest	Nord	Est
Tour 1	♠ A		♠ 8	
Tour 2	♠ 9		♠ R	
Tour 3	♠ V		♠ 10	

a) Si les trois cartes possédées par Est sont la Dame de Pique et les deux Cœurs, Sud gagnera-t-il les trois dernières levées ? Pourquoi ?

b) Proposez une autre répartition des six cartes restantes permettant à Sud de gagner les trois dernières levées.

c) Proposez une répartition des six cartes restantes ne permettant pas à Sud de gagner les trois dernières levées. Expliquer votre démarche.

Question 2 : Sud est persuadé que la Dame de Pique est en Ouest. Afin de gagner quoi qu'il arrive les trois dernières levées, voici son raisonnement :
Je vais jouer l'as.
Si la Dame est seule en Ouest avec les deux Cœurs :
    alors je jouerai . . . et j'ai gagné avec mes trois levées.
Si la Dame ne tombe pas
    alors je jouerai le Valet :
        si Ouest met la Dame
            alors je mettrai le . . . puis je jouerai le . . . et j'ai gagné mes trois levées.

sinon je mettrai le ... puis je jouerai ... et j'ai gagné mes trois levées.

Question 3 : Si Sud est persuadé que la Dame de Pique est en Est, proposez sur le modèle précédent un raisonnement qui lui permette de gagner les trois dernières levées quoi qu'il arrive.

Partie C : Dame où es-tu ?

Voici les jeux possédés par le camp N/S :

	♠ R 10 8	
	♥ 4 3 2	
	♦ 4 3 2	
	♣ 5 4 3 2	
♠	Nord	♠
♥	Ouest Est	♥
♦		♦
♣	Sud	♣
	♠ A V 9	
	♥ A R D	
	♦ A R D	
	♣ A R D V	

Ouest entame et dépose sur la table le V de cœur. Sud s'étant promis de faire les treize levées, voici ce qu'il joue et ce qu'il voit :

	Sud	Ouest	Nord	Est
Tour 1	♥ A	♥ V	♥ 2	♥ 7
Tour 2	♥ R	♥ 5	♥ 3	♠ 2
Tour 3	♥ D	♥ 6	♥ 4	♠ 3
Tour 4	♦ A	♦ 5	♦ 2	♦ 8
Tour 5	♦ R	♦ 6	♦ 3	♦ 9
Tour 6	♦ D	♦ 7	♦ 4	♦ 10
Tour 7	♣ A	♣ 10	♣ 2	♣ 9
Tour 8	♣ R	♣ 8	♣ 3	♣ 7
Tour 9	♣ D	♣ 6	♣ 4	♠ 4

Cas 1 Voici le tour 10 :

	Sud	Ouest	Nord	Est
Tour 10	♣ V	♥ 8	♣ 5	♦ V

a) A cet instant, il réfléchit et affirme : Je connais déjà douze des cartes d'Ouest et la couleur de la treizième. Pouvez-vous indiquer lesquelles et la nature de la dernière carte ?

b) Pour gagner les trois dernières levées, il doit trouver la Dame de Pique. Complétez le raisonnement suivant :

> Si la Dame de Pique est en Ouest
> alors les trois dernières cartes d'Ouest sont ......
> sinon Ouest possède un Pique parmi les cartes suivantes ...... et ......

c) Sud imagine deux stratégies pour terminer la partie et remplir son contrat.

Stratégie 1 :

	Sud	Ouest	Nord	Est
Tour 11	♠ A		♠ 8	
Tour 12	♠ 9		♠ R	
Tour 13	♠		♠ 10	

Stratégie 2 :

	Sud	Ouest	Nord	Est
Tour 11	♠ 9		♠ R	
Tour 12	♠ A		♠ 8	
Tour 13	♠ V		♠	

- Existe-t-il, pour chacune des deux hypothèses une répartition des cartes entre Est et Ouest qui permette à Sud de remporter la dernière levée ?
  Si oui, proposez en une.
- Existe-t-il, pour chacune des deux hypothèses une répartition des cartes entre Est et Ouest qui ne permette pas à Sud de remporter la dernière levée ?
  Si oui, proposez en une.
- Trouvez sous forme d'algorithme un moyen de gagner les trois dernières levées dans tous les cas.

Cas 2 :
Quelles conclusions doit tirer Sud si, au tour 10, il voit :

	Sud	Ouest	Nord	Est
Tour 10	♣ V	♦ V	♣ 5	♠ 5

Quelle stratégie doit-il appliquer dans ce cas pour gagner les trois dernières levées ?

Éléments de solution

Partie A : Un petit exemple

Sachant qu'Ouest a remporté la quatrième levée, quelle carte a-t-il fournie ? Complétez la levée 5. A cet instant, quelle est l'équipe qui a remporté le plus de levées ?

	Ouest	Nord	Est	Sud
Tour 1	♠ R	♠ 3	♠ V	♠ A
Tour 2	♦ 3	♦ 2	♦ 4	♦ A
Tour 3	♦ D	♦ R	♦ 6	♦ V
Tour 4	**♣ D**	♣ 2	♣ 4	♣ V
Tour 5	♠ D	**♠ 5**	**Il défausse**	**♠ 3**

Nord/Sud a remporté trois levées, Est/Ouest deux levées.

Partie B : Prendre la dame

La partie précédente étant terminée, les cartes ont été redistribuées. Nous voici donc dans une nouvelle situation.
Alors que dix levées ont déjà été faites, voici les cartes restantes pour le camp Nord/Sud en Pique.
Est/ Ouest ayant fourni trois Piques en cours de partie, Nord/Sud sait qu'il reste en Est-Ouest :
- en Pique : La Dame, le 7, Le 6 Le 5 .
- en Cœur : le 8 et le 4

	♠ R 10 8	
	Nord	
	Ouest Est	
	Sud	
	♠ A V 9	

Question 1 : Sachant que c'est à Sud de jouer, voici ce que Sud se propose de jouer pour gagner les trois dernières levées :

	Sud	Ouest	Nord	Est
Tour 1	♠ A		♠ 8	
Tour 2	♠ A 9		♠ R	
Tour 3	♠ V		♠ 10	

a) Si les trois cartes possédées par Est sont la Dame de Pique et les deux Cœurs, Sud gagnera-t-il les trois dernières levées ? Pourquoi ?
Oui car la dame tombera au premier tour, le Valet remportera donc la troisième levée.

b) Proposez une autre répartition des six cartes restantes permettant à Sud de gagner les trois dernières levées.
Par exemple, la Dame de Pique, un Pique et un Cœur. Dans ce cas, la Dame tombera au second tour donc le Valet sera maître au troisième.

c) Proposez une répartition des six cartes restantes ne permettant pas à Sud de gagner les trois dernières levées. Expliquer votre démarche.
Il faut et il suffit que la Dame ne tombe pas lors des deux premiers tours. Il faut donc que Est ou Ouest possède trois Piques dont la Dame.

Question 2 : Sud est persuadé que la Dame de Pique est en Ouest. Afin de gagner quoi qu'il arrive les trois dernières levées, voici son raisonnement :
Je vais jouer l'As.
Si la Dame est seule en Ouest avec les deux Cœurs :
alors je jouerai **le Valet puis le 10** et j'ai gagné avec mes trois levées.
Si la Dame ne tombe pas
alors je jouerai le Valet :
si Ouest met la Dame
alors je mettrai le **Roi** puis je jouerai le **10** et j'ai gagné mes trois levées.
sinon je mettrai le **10** puis je jouerai **9** et j'ai gagné mes trois levées.

Question 3 : Si Sud est persuadé que la Dame de Pique est en Est, proposez sur le modèle précédent un raisonnement qui lui permette de gagner les trois dernières levées quoi qu'il arrive.
Il suffit d'appliquer un raisonnement symétrique :

Partie C : Dame où es-tu ?

Voici les jeux possédés par le camp N/S :

	♠ R 10 8	
	♥ 4 3 2	
	♦ 4 3 2	
	♣ 5 4 3 2	
♠	Nord	♠
♥	Ouest Est	♥
♦		♦
♣	Sud	♣
	♠ A V 9	
	♥ A R D	
	♦ A R D	
	♣ A R D V	

Ouest entame et dépose sur la table le Valet de Cœur. Sud s'étant promis de faire les treize levées, voici ce qu'il joue et ce qu'il voit :

	Sud	Ouest	Nord	Est
Tour 1	♥ A	♥ V	♥ 2	♥ 7
Tour 2	♥ R	♥ 5	♥ 3	♠ 2
Tour 3	♥ D	♥ 6	♥ 4	♠ 3
Tour 4	♦ A	♦ 5	♦ 2	♦ 8
Tour 5	♦ R	♦ 6	♦ 3	♦ 9
Tour 6	♦ D	♦ 7	♦ 4	♦ 10
Tour 7	♣ A	♣ 10	♣ 2	♣ 9
Tour 8	♣ R	♣ 8	♣ 3	♣ 7
Tour 9	♣ D	♣ 6	♣ 4	♠ 4

Cas 1 Voici le tour 10 :

	Sud	Ouest	Nord	Est
Tour 10	♣ V	♥ 8	♣ 5	♦ V

a) A cet instant, il réfléchit et affirme : Je connais déjà douze des cartes d'Ouest et la couleur de la treizième. Pouvez-vous indiquer lesquelles et la nature de la dernière carte ?

b) Pour gagner les trois dernières levées, il doit trouver la Dame de Pique. Complétez le raisonnement suivant :

> Si la Dame de Pique est en Ouest
> alors les trois dernières cartes d'Ouest sont Dame de Pique et le 8 et 9 de Cœur . . .
> sinon Ouest possède un Pique parmi les cartes suivantes 7, 6 et 5 .
> Fin du Si

c) Sud imagine deux stratégies pour terminer la partie et remplir son contrat.

Stratégie 1 :

	Sud	Ouest	Nord	Est
Tour 11	♠ A		♠ 8	
Tour 12	♠ 9		♠ R	
Tour 13	♠		♠ 10	

Stratégie 2 :

	Sud	Ouest	Nord	Est
Tour 11	♠ 9		♠ R	
Tour 12	♠ A		♠ 8	
Tour 13	♠ V		♠	

- Existe-t-il, pour chacune des deux hypothèses une répartition des cartes entre Est et Ouest qui permette à Sud de remporter la dernière levée ?
  Si oui, proposez en une.
  Oui : Ouest possède la Dame de Pique
- Existe-t-il, pour chacune des deux hypothèses une répartition des cartes entre Est et Ouest qui ne permette pas à Sud de remporter la dernière levée ?
  Si oui, proposez en une.
  Oui, Ouest possède le dernier Carreau. Donc Est possède les trois derniers Piques.
- Trouvez sous forme d'algorithme un moyen de gagner les trois dernières levées dans tous les cas.
  Je vais jouer le 9 de Pique.
  Si la Dame est en Ouest alors elle est seule donc je la prends avec le Roi et c'est fini
  sinon
  Si Est fournit un petit Pique alors C'est Est qui a la Dame donc
  je mets le Roi puis je joue le 10 qui permettra de prendre la dame avec l'As au douzième tour et c'est fini
  Sinon Est a les trois Piques donc je mets le Roi puis je joue le 10 qui permettra de prendre la Dame avec l'As au douzième ou treizième tour et c'est fini

Cas 2 :
Quelles conclusions doit tirer Sud si, au tour 10, il voit :

	Sud	Ouest	Nord	Est
Tour 10	♣ V	♦ V	♣ 5	♠ 5

Quelle stratégie doit-il appliquer dans ce cas pour gagner les trois dernières levées ?
Dans ce cas, le problème est simple, ouest a encore trois cIJurs, donc la Dame est en Est. On peut alors appliquer ce qui a été vu Partie B.

RETOUR AU SOMMAIRE

LILLE

Deuxième exercice

Série S

Carrés et parabole

Énoncé

Soit k un nombre réel strictement positif fixé et f la fonction définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par $f(x) = kx^2$. On note C_f la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé d'origine le point noté O_1. On inscrit dans la courbe C_f un carré $\mathrm{O}_1\mathrm{A}_1\mathrm{O}_2\mathrm{B}_1$, noté C_1, tel que les points A_1 (d'abscisse positive) et B_1 appartiennent à la courbe C_f et le point O_2 à l'axe des ordonnées (voir figure 1).

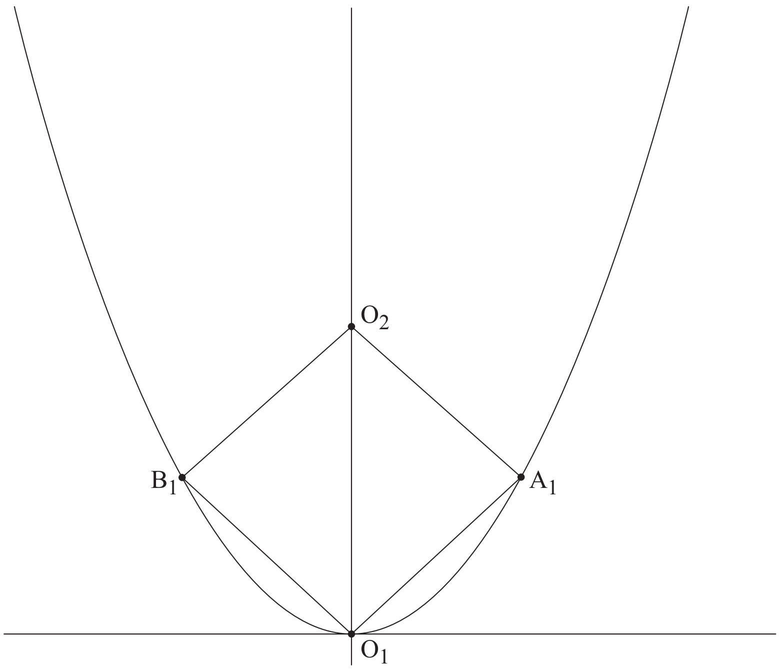


Figure 1

Partie A

1. Construction du carré C_1.
   a) Reproduire la figure 1 sur le document réponse 1, en justifiant la construction des points A_1, O_2 et B_1.
   b) Déterminer en fonction du nombre réel k les coordonnées des points A_1, B_1 et O_2.
2. Montrer que le périmètre du carré C_1 est égal à $4\dfrac{\sqrt{2}}{k}$.
3. On inscrit par récurrence une suite de carrés dans la courbe C_f , comme indiqué sur la figure 2. On note O_n , A_n ,O_{n+1} et B_n les sommets respectifs du carré noté C_n. Construire sur la copie le carrťé $\mathrm{O}_2\mathrm{A}_2\mathrm{O}_3\mathrm{B}_2$ puis déterminer les coordonnées des points A_2 et O_3.

Partie B

Pour tout entier naturel n non nul, on note $(x_n; y_n)$ les coordonnées du point A_n et $(0; z_n)$ les coordonnées du point O_n.

1. Justifier que, pour tout entier naturel n non nul, $y_n = x_n + z_n$.
2. Justifier que, pour tout entier naturel n non nul, $z_{n+1} = z_n + 2x_n$.
3. En déduire que pour tout entier naturel n non nul $y_{n+1} - y_n = x_{n+1} + x_n$.
4. Justifier alors que la suite (x_n) est une suite arithmétique de raison $\dfrac{1}{k}$.
5. Déduire de ce qui précède la nature de la suite (ℓ_n) où, pour tout entier naturel n non nul, ℓ_n désigne la longueur du carré C_n.

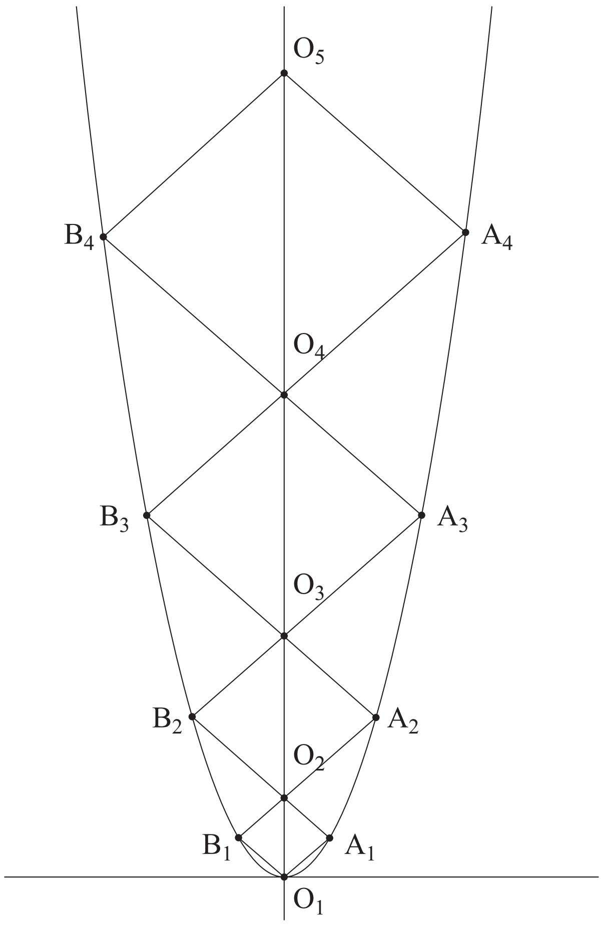
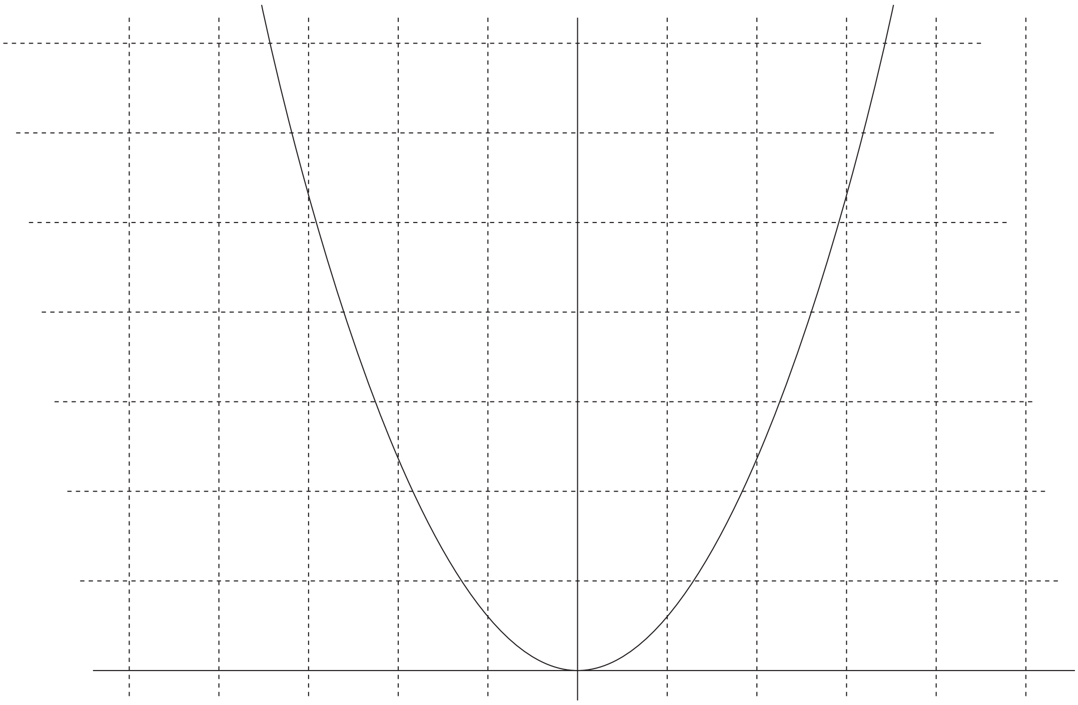


Figure 2

Partie C

1. Sachant que la longueur d'un côté du carré C_1 a pour longueur π, déterminer la valeur du nombre réel k.
   Pour ces deux dernières questions, on suppose que k a pour valeur le réel trouvé à la question précédente.
2. n étant un entier naturel non nul, écrire un algorithme qui calcule et affiche (en sortie) la somme des aires des n premiers carrés.
3. 'A l'aide de cet algorithme, ou de la méthode de votre choix que vous expliciterez, déterminer le plus petit entier naturel N_0 pour lequel la somme des aires des N_0 premiers carrés soit supérieure ou égale à 20132013 unités d'aire.



Éléments de solution

Partie A

1. Construction du carré C_1.

   a) Reproduire la figure 1 sur le document réponse 1, en justifiant la construction des points A_1, O_2 et B_1.
   Aucun commentaire.

   b) Déterminer en fonction du nombre réel k les coordonnées des points A_1, B_1 et O_2.
   Le point A-1 est à l'intersection de la droite D d' équation $y = x$ et de la parabole d'où :
   $x = kx^2$ **soit** $x = 1/k$ **d'où** $\mathbf{A}_1(1/k; 1/k)$**,** $\mathbf{B}_1(-1/k; 1/k)$ **et** $\mathbf{O}_2(0; 2/k)$**.**

2. Montrer que le périmètre du carré C_1 est égal à $4\dfrac{\sqrt{2}}{k}$.
   Le côté a pour longueur $\dfrac{\sqrt{2}}{k}$ **donc le périmètre du carré C1 est égal à** $4\dfrac{\sqrt{2}}{k}$**.**

3. On inscrit par récurrence une suite de carrés dans la courbe C_f , comme indiqué sur la figure 2. On note O_n , A_n ,O_{n+1} et B_n les sommets respectifs du carré noté C_n. Construire sur la copie le carré $O_2A_2O_3B_2$ puis déterminer les coordonnées des points A_2 et O_3.
   Dessin puis $\mathbf{A}_2(2/k; 4/k)$ **et** $\mathbf{O}_3(0; 6/k)$**.**

Partie B

Pour tout entier naturel n non nul, on note $(x_n; y_n)$ les coordonnées du point A_n et $(0; z_n)$ les coordonnées du point O_n.

1. Justifier que, pour tout entier naturel n non nul, $y_n = x_n + z_n$.
   On peut, par exemple, considérer le triangle rectangle isocèle en $\mathbf{A}_n$ $\mathbf{O}_n\mathbf{A}_n\mathbf{O}_{n+1}$**. La relation s'en déduit immédiatement.**

2. Justifier que, pour tout entier naturel n non nul, $z_{n+1} = z_n + 2x_n$. **Le même triangle permet de conclure**

3. En déduire que pour tout entier naturel n non nul $y_{n+1} - y_n = x_{n+1} + x_n$.
   On a $y_{n+1} - y_n = x_{n+1} + z_{n+1} - (x_n + z_n) = x_{n+1} + z_n + 2x_n - (x_n + z_n) = x_{n+1} + x_n$**.**

4. Justifier alors que la suite (x_n) est une suite arithmétique de raison $\frac{1}{k}$.

   En remplaçant y_n par kx_n^2, puis en simplifiant, on trouve la réponse demandée.

5. Déduire de ce qui précède la nature de la suite (ℓ_n) où, pour tout entier naturel n non nul, ℓ_n désigne la longueur du carré C_n.

   Pour tout entier n, $\mathrm{l}_n = 4\sqrt{2}x_n$ donc (l_n) est une suite arithmétique de raison $4\frac{\sqrt{2}}{k}$

Partie C

1. Sachant qu'un côté du carré C_1 a pour longueur π, déterminer la valeur du nombre réel k.

   On a : $= \frac{\sqrt{2}}{\pi}k$, donc C_1 a pour côté π, de ce fait C_n a pour côté $n\pi$

   Pour ces deux dernières questions, on suppose que k a pour valeur le réel trouvé à la question précédente.

2. n étant un entier naturel non nul, écrire un algorithme qui calcule et affiche (en sortie) la somme des aires des n premiers carrés.

   Mettre 0 dans S
   Mettre 0 dans I
   Tant que Sπ^2 <20132013
   Mettre I+1 dans I
   Mettre S+ I² dans S
   Mettre I+1 dans I
   Fin du Tant que
   Afficher I

3. À l'aide de cet algorithme, ou de la méthode de votre choix que vous expliciterez, déterminer le plus petit entier naturel N_0 pour lequel la somme des aires des N_0 premiers carrés soit supérieure ou égale à 20 132 013 unités d'aire.

   On trouve I = 183

RETOUR AU SOMMAIRE

LILLE

Troisième exercice

Séries autres que S

Un carré remarquable

Énoncé

Partie A

Adepte du calcul mental, un professeur construit un carré mental de 4 lignes et 4 colonnes puis le remplit avec tous les nombres de 1 à 9 avant de demander à ses élèves de faire les produits par ligne et par colonne pour obtenir par exemple le résultat suivant :

4	7	2	P = 56
9	1	8	P = 72
3	5	6	P = 90
P = 108	P = 35	P = 96	

Étourdi, il a oublié de recopier deux des produits et les nombres choisis pour obtenir le tableau ci-dessous. Proposez un tableau correspondant aux produits donnés. Y-a-t-il plusieurs solutions ? Expliquez clairement votre raisonnement.

			P = 27
			P = ...
			P = 70
P = 30	P = ...	P = 168	

Construire un tableau où le minimum des produits est supérieur ou égal à 50 et le maximum des produits est inférieur ou égal à 120. Expliquez votre démarche ;

			P = ...
			P = ...
			P = ...
P = ...	P = ...	P = ...	

Partie B : Lecture et compréhension d'un algorithme

On considère l'algorithme suivant :

```
Création de la liste L1 : L1 = [1,2,3,4,5,6,7,8,9]
Création de la liste L2 : L2 = [0,0,0,0,0,0,0,0,0]
Initialiser la variable K à 1
Tant que K < 10
    Tirer au hasard un entier A entre 1 et 9
    Si L1(A) n'est pas nul
        alors
            mettre A dans L2(K)
            mettre 0 dans L1(A)
            Augmenter K de 1
    Fin du Si
    Afficher L2 et K
Fin du Tant que
```

Remarque : L1(A) désigne le A$^{\text{ème}}$ élément de la liste L1. Ainsi si L1=[2,5,7], L1(2)=5.

Question 1 : On exécute le programme. Compléter, à la sortie de chaque passage du tant que, l'état des variables L1, L2 et K dans le cas suivant :

	Passage 1	Passage 2	Passage 3	Passage 4	Passage 5
Variable A tirée					
L1					
L2					
K					

Quel est le rôle de cet algorithme ?

Partie C : Construction d'un carré mental T

Ce professeur propose à ses élèves d'écrire un algorithme permettant d'automatiser la construction d'un carré mental noté T du même type que celui donné dans la partie A.
Les notations suivantes sont imposées :

Pour tout entier i et tout entier j compris entre 1 et 3 :

T(i, j) est le nombre placé ligne i colonne j. Ainsi dans l'exemple présenté au début du texte T(2,3)=8.

T(i, 4) contient le produit des trois nombres situés dans les trois premières colonnes de la ligne i.

T(4,j) contient le produit des trois nombres situés dans les trois premières lignes de la colonne j.

Sur le brouillon d'Alice on peut lire les grandes étapes de l'algorithme qu'elle propose pour construire ce carré mental :

```
1) Création et initialisation du tableau T à 0 (les 16 cases contiennent donc 0)
2) Mise en place des nombres de 1 à 9 :
    mélange des nombres
    ..........................................................................................
    remplissage du tableau
    ..........................................................................................
3) Calcul des produits par ligne
     Pour I allant de 1 à 3
        calcul du produit de la ligne 1
        .........
        stockage dans la case T(i,4)
    Fin du Pour I
4) Calcul des Produits par colonne
    .........
5) Afficher le tableau T
```

Répondre aux questions suivantes pour aider Aline à terminer son travail d'investigation.
Compléter l'algorithme pour

1. Mélanger les nombres entiers de 1 à 9

2. Remplir le tableau, c'est-à-dire placer les neuf nombres dans le tableau T.
3. Calculer le produit de la ligne i
4. Calculer les produits par colonne.

Partie C : Construction d'un carré mental (seconde méthode)

Un second élève a proposé l'idée suivante :

1. On construit le tableau

1	2	3	0
4	5	6	0
7	8	9	0
0	0	0	0

2. On procède à mille échanges entre deux cases choisies au hasard parmi celles contenant un des entiers compris entre 1 et 9.
3. On calcule et stocke les produits par ligne.
4. On affiche le tableau.

Voici le début de l'algorithme écrit par cet élève :

```
1) Création et initialisation du tableau T à 0 (les seize cases contiennent donc 0)
Construction du tableau initial :
    Pour J allant de 0 à 2
        Pour I allant de 1 à 3
            Mettre I + 3J dans T(I,J+1)
        Fin du Pour I
    Fin du Pour J
2) Échangé des cases
    Pour I allant de 1 à 1000





    Fin du Pour I
3) Calcul des produits
4) Afficher le tableau T.
```

Expliquer dans quel ordre se remplit le tableau initial.
Compléter la partie Échange des cases.

Éléments de solution

Partie A

Tableau correspondant aux produits donnés par le professeur :

1	**9**	**3**	P = 27
6	**4**	**8**	P = **192**
5	**2**	**7**	P = 70
P = 30	P = **72**	P = 168	

2) Construire un tableau où le minimum des produits est supérieur ou égal à 50 et le maximum des produits est inférieur ou égal à 120. Expliquer votre démarche.
Il suffit de vérifier les calculs...

Partie B

On considère l'algorithme suivant :

```
Création de la liste L1 : L1 = [1,2,3,4,5,6,7,8,9]
Création de la liste L2 : L2 = [0,0,0,0,0,0,0,0,0]
Initialiser la variable K à 1MTant que K < 10
    Tirer au hasard un entier A entre 1 et 9
    Si L1(A) n'est pas nul
        alors
            mettre A dans L2(K)
            mettre 0 dans L1(A)
            Augmenter K de 1
    Fin du Si
    Afficher L2 et K
Fin du Tant que
```

Remarque : L1(A) désigne le A$^{\text{ième}}$ élément de la liste L1. Ainsi si L1=[2,5,7], L1(2)=5

Question 1 : On exécute le programme. Compléter, à la sortie de chaque passage du tant que, l'état des variables L1, L2 et K dans le cas suivant :

	Passage 1	Passage 2	Passage 3	Passage 4	Passage 5
Variable A tirée	2	9	3	2	5
L1	1 0 3 4 5 6 7 8 9	1 0 3 4 5 6 7 8 0	1 0 0 4 5 6 7 8 0	1 0 0 4 5 6 7 8 0	1 0 0 4 0 6 7 8 0
L2	2 0 0 0 0 0 0 0 0	2 9 0 0 0 0 0 0 0	2 9 3 0 0 0 0 0 0	2 9 3 0 0 0 0 0 0	2 9 3 5 0 0 0 0
K	2	3	4	4	5

Question 2 : Quel est le rôle de cet algorithme ?
Cet algorithme permet de mélanger la liste des 9 premiers nombres entiers

Partie C

Répondre aux questions suivantes pour aider Alice à terminer son travail d'investigation
Compléter l'algorithme pour

1. Mélanger les nombres entiers de 1 à 9 : **il suffit de reprendre le travail précédent**
2. Remplir le tableau, c'est-à-dire placer les neuf nombres dans le tableau T
   Pour I allant de 1 à 3 Pour J allant de 1 à 3
   Mettre L2(3(I-1)+J) va dans T(I,J)
   Fin du pour J
   Fin du pour I
3. Calculer le produit de la ligne i : **T(I,1)*T(I,2)*T(I,3) va dans T(I,4)**
4. Calculer les produits par colonne.
   Pour J allant de 1 à 3
   T(1,J)*T(2,J)*T(3,J) va dans T(4,J)
   Fin du Pour J

Partie C

Un second élève a proposé l'idée suivante :

1. On construit le tableau

1	2	3	0
4	5	6	0
7	8	9	0
0	0	0	0

2. On procède à mille échanges entre deux cases choisies au hasard parmi celles contenant un des entiers compris entre 1 et 9.
3. On calcule et stocke les produits par ligne.

4. On affiche le tableau.

Voici le début de l'algorithme écrit par cet élève :

```
1) Création et initialisation du tableau T à 0 (les seize cases contiennent donc 0)
Construction du tableau initial :
    Pour J allant de 0 à 2
        Pour I allant de 1 à 3
            Mettre I + 3J dans T(I,J+1)
        Fin du Pour I
    Fin du Pour J
2) Échangé des cases
    Pour I allant de 1 à 1000




    Fin du Pour I
3) Calcul des produits
4) Afficher le tableau T.
```

1. Expliquer dans quel ordre se remplit le tableau initial.
   Compléter la partie Échange des cases. **Il remplit la colonne 1 puis 2 puis 3. En fait il construit le tableau**

1	4	7	0
2	5	8	0
3	6	9	0
0	0	0	0

2. 2) Compléter la partie échange des cases.

Pour U allant de 1 à 1000
tirer une ligne I au hasard entre 1 et 3 : Tirer une colonne J au hasard entre 1 et 3
tirer une ligne L au hasard entre 1 et 3 : Tirer une colonne K au hasard entre 1 et 3
Mettre T(I,J) dans X
Mettre T(L,K) dans T(I,J)
Mettre X dans T(L,K)
Fin du Pour U

RETOUR AU SOMMAIRE

LIMOGES

Premier exercice

Toutes séries

Triplets pythagoriciens

Énoncé

Soit x, y et z trois entiers naturels non nuls avec $x \leqslant y < z$.
On dit que $(x;y;z)$ est un triplet pythagoricien si les entiers vérifient $x^2 + y^2 = z^2$.
L'entier z sera appelé l'hypoténuse et les entiers x et y seront appelés les *cathètes*.

1. Montrer qu'il n'existe pas de triplets pythagoriciens d'hypoténuse inférieure ou égale à 4.
   Montrer qu'il n'existe qu'un triplet pythagoricien d'hypoténuse 5 : (3 ; 4 ; 5).
2. Soit k un entier naturel non nul et $(x;y;z)$ un triplet pythagoricien. Montrer que $(kx;ky;kz)$ est aussi un triplet pythagoricien.
   Donner un exemple de triplet pythagoricien d'hypoténuse 15.
3. Compléter le tableau suivant avec la valeur de $u^2 + v^2$ dans les cases non grisées.

v \ u	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2									
2	5	8								
3	10	13	18							
4	17	20	25	32						
5	26	29	34	41	50					
6										
7										
8										
9										
10										

4. À l'aide du tableau, justifier qu'il n'y a que deux triplets pythagoriciens $(x;y;z)$ avec $z^2 \leqslant 100$.
   Le tableau permet-il d'affirmer qu'il n'y a que deux triplets pythagoriciens $(x;y;z)$ avec $z^2 \leqslant 200$?
5. Soit a et b deux entiers naturels non nuls tels que $a < b$.
   Montrer que le triplet de cathètes $b^2 - a^2$ et $2ab$ et d'hypoténuse $z = a^2 + b^2$ est un triplet pythagoricien.
6. En déduire que : si z est la somme de deux carrés d'entiers non nuls et distincts alors il existe un triplet pythagoricien d'hypoténuse z.
   La réciproque est-elle vraie ?
7. En utilisant judicieusement le tableau, donner un triplet pythagoricien d'hypoténuse 13.
8. On étudie l'algorithme suivant :

Variables : a, b, x, y, z, entiers naturels non nuls.
pour b *allant de 2 à 10* **faire**
  pour a *allant de 1 à* $b-1$, **faire**
    x prend la valeur $b^2 - a^2$
    y prend la valeur $2ab$
    z prend la valeur $a^2 + b^2$
    Afficher b, a, x, y, z et aller à la ligne
  fin
fin

a) Quelles sont les deux premières lignes écrites ?

b) voici un extrait de la sortie :
. . .
5 2 21 20 29
5 3 16 30 34
Quelles sont les deux lignes suivantes ?

9. On cherche des triplets pythagoriciens d'hypoténuse 1189. On note que $1189 = 29 \times 41$.

a) En utilisant la sortie de l'algorithme, donner deux triplets pythagoriciens d'hypoténuse 1189.

b) Démontrer l'égalité (E) : $\left(a^2+b^2\right)\left(c^2+d^2\right) = (ac+bd)^2 + (ad-bc)^2$.

c) Trouver un troisième triplet pythagoricien d'hypoténuse 1189.

Éléments de solution

1. On teste les différentes valeurs possibles ; on ne trouve que $3^2 + 4^2 = 5^2$.
2. On a $(kx)^2 + (ky)^2 = k^2\left(x^2+y^2\right) = k^2z^2 = (kz)^2$.
   En multipliant le triplet (3 ; 4 ; 5) par 3, on obtient (9 ; 12 ; 15).
3. Tableau

v \ u	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2									
2	5	8								
3	10	13	18							
4	17	20	25	32						
5	26	29	34	41	50					
6	37	40	45	52	61	72				
7	50	53	58	65	74	85	98			
8	65	68	73	80	89	100	113	128		
9	82	85	90	97	106	117	130	145	162	
10	101	104	109	116	125	136	149	164	181	200

4. Si $x^2 \leqslant 100$, alors $x < 10$ et $y < 10$. Dans le tableau, il n'y a que deux carrés (25 et 100) qui correspondent aux triplets (3 ; 4 ; 5) et (6 ; 8 ; 10).
   On ne peut pas affirmer qu'il n'y a que deux triplets pythagoriciens $(x;y;z)$ avec $x^2 \leqslant 200$ car il est possible d'avoir$u^2 + v^2 \leqslant 200$ avec $v > 10$, donc hors du tableau (il y a effectivement un autre triplet : question 7).
5. On vérifie simplement $\left(b^2-a^2\right)^2 + (2ab)^2 = b^4 + 2a^2b^2 + a^4$ et $\left(a^2+b^2\right)^2 = a^4 + 2a^2b^2 + b^4$.
6. Si $z = a^2 + b^2$ alors, en prenant $b^2 - a^2$ et $2ab$ pour cathètes, on obtient un triplet pythagoricien d'hypoténuse z.
   La réciproque est fausse, comme le montre le triplet (9 ; 12 ; 15) de la question 2.
7. Dans le tableau, on trouve $13 = 2^2 + 3^2$. On calcule $3^2 - 2^2 = 5$ et $2 \times 2 \times 3 = 12$, ce qui donne le triplet (5 ; 112 ; 13).
8. a) Les deux premières lignes correspondent à $b = 2, a = 1$ puis $b = 3, a = 1$ donc
   2 1 3 4 5
   3 1 8 6 101

   b) Les deux lignes proposées correspondent à $b = 5, a = 2$ puis $b = 5, a = 3$
   Les deux lignes suivantes correspondent donc à $b = 5, a = 4$ puis $b = 6, a = 1$, c'est-à-dire
   5 4 9 402 41
   6 1 35 12 37
9. a) La première ligne proposée en sortie donne le triplet (20 ; 21 ; 29). En multipliant par 41 : (820 ; 861 ; 1189).
   La première ligne calculée en sortie donne le triplet (9 ; 40 ; 451). En multipliant par 29 : (261 ; 1160 ; 1189).

   b) On développe $\left(a^2+b^2\right)\left(c^2+d^2\right) = a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2$ et

$$(ac+bd)^2 + (adbc)^2 = a^2c^2 + 2abcd + b^2d^2 + a^2d^2 - 2abcd + b^2c^2 = a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2.$$

c) on a $29 = 2^2 + 5^2$ et $41 = 4^2 + 5^2$ (dans le tableau ou en sortie de l'algorithme).
En utilisant l'identité démontrée :

$$1189 = 29\times41 = \left(2^2 + 5^2\right)\times\left(4^21 + 5^2\right) = (2\times4+5\times5)^2+(2\times5-5\times4)^2 = 33^2+(-10)^2 = 33^2+10^2.$$

On obtient : $33^2 - 10^2 = 989$ et $2 \times 10 \times 33 = 660$ qui donne le triplet $(660\,;\, 989\,;\, 1189)$.

d) En permutant certains nombres

$$1189 = 29\times41 = \left(2^2 + 5^2\right)\times\left(5^2 + 4^2\right) = (2\times5+5\times4)^2+(2\times4-5\times5)^2 = 30^2+(-17)^2 = 30^2+17^2.$$

On obtient : $30^2 - 17^2 = 989$ et $2 \times 17 \times 30 = 1020$, ce qui donne le triplet $(611\,;\, 1020\,;\, 1189)$.
Bien sûr les deux triplets peuvent être trouvés dans l'ordre inverse.

RETOUR AU SOMMAIRE

LIMOGES

Deuxième exercice

Série S

Coloriage du plan

Énoncé

On se place dans le plan muni d'une unité de longueur quelconque. On colorie l'ensemble des points du plan avec un certain nombre de couleurs distinctes en respectant la condition $(\mathcal{C})$ suivante :
$(\mathcal{C})$: *La distance entre deux points de même couleur n'est jamais égale à 1.*

On étudie le nombre minimum N de couleurs nécessaires pour colorier le plan en respectant la condition $(\mathcal{C})$.

Les deux parties sont indépendantes

A - Coloriage avec des hexagones

1. On étudie la figure 1 ci-contre formée de deux hexagones réguliers de côté a (un hexagone régulier est formé de six triangles équilatéraux). Exprimer les longueurs AD, AE, AF, AG en fonction de a. Montrer en particulier que $AF = \sqrt{7} \times a$.
2. On colorie le plan avec des motifs identiques formés de 7 hexagones réguliers coloriés (Voir la figure 2). Chaque petit hexagone est entièrement colorié d'une couleur unique donnée par le numéro. Chaque numéro correspond à une même couleur. Les petits hexagones ont pour côté a.
   a) Quelle est, en fonction de a, la distance maximale entre deux points d'un même petit hexagone ?
   b) Quelle est, en fonction de a, la distance minimale entre deux points de même couleur, mais dans deux hexagones différents ?
   c) Comment choisir a pour que la condition $(\mathcal{C})$ soit respectée ? Proposer une valeur pour a.
   d) Que peut-on en déduire pour N ?

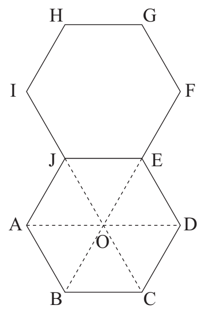


Figure 1

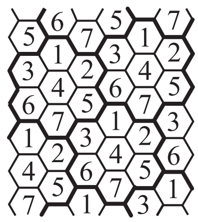


Figure 2

B - Graphe de Moser

On étudie la figure 3 (appelée graphe de Moser).
Chaque segment tracé a pour longueur 1.

1. Comment construire cette figure à la règle non graduée et au compas à partir d'un segment donné de longueur 1 ?
   (On ne détaillera pas la construction d'un triangle équilatéral à partir d'un côté donné).
2. Quel est le nombre minimum de couleurs nécessaires pour colorier les points A, B, C, D, E, F et G de manière à ce qu'il n'existe pas deux points de même couleur distants de 1.
3. Que peut-on en déduire pour N ?

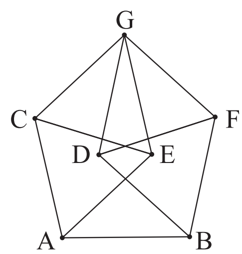


Figure 3

Éléments de solution

A - Coloriage du plan complet

1. On a $AD = 2a$.
   Pour calculer AE, on introduit le point K milieu de [OJ] et [AE].
   Soit on sait que $AK = \dfrac{\sqrt{3}}{2}a$ soit on le démontre en utilisant un triangle rectangle AKJ.
   On obtient $AE = \sqrt{3}a$.
   Le triangle ADF est rectangle en D avec $AD = 2a$ et $DF = AE = \sqrt{3}a$.
   On en déduit $AF^2 = AD^2 + DF^2 = 4a^2 + 3a^2 = 7a^2$ et donc $AF = \sqrt{7}a$.
   Et enfin $AG = 3a$.
   Les seules longueurs importantes sont AD (évidente) et AF (donnée)
2. a) La distance maximale entre deux points d'un même petit hexagone est $2a$.
   b) La distance minimale entre deux points de même couleur dans deux hexagones différents est $\sqrt{7}a$.
   c) Pour qu'il n'existe pas deux points de même couleur distants de 1, il suffit
      - que le diamètre d'un hexagone soit plus petit que 1,
      - et que la distance minimale entre deux hexagones de même couleur soit plus grande que 1, c'est-à-dire $2a < 1 < \sqrt{7}a$.

      La première inégalité donne $a < \dfrac{1}{2} = 0,5$. La seconde donne $a > \dfrac{1}{\sqrt{7}} \approx 0,378$.
      On peut prendre n'importe quelle valeur entre les deux.
   d) Il existe un coloriage de 7 couleurs respectant la condition.
      Le nombre minimum N est donc inférieur ou égal à 7.

B - Graphe de Moser

1. On trace le triangle ACE puis le triangle CEG.
   Le point B est l'intersection du cercle de centre A passant par E et du cercle de centre G passant par A.
   Les points D et F sont les intersections des cercles de centres respectifs B et G et de rayon 1.
2. Supposons qu'il n'y a que trois couleurs :
   Les points G, C et E sont de couleurs différentes donc A est de la même couleur que G.
   De même, B est de la même couleur que G donc A et B sont de la même couleur, ce qui est impossible.
   Il faut donc au moins quatre couleurs et on trouve facilement un coloriage qui convient.
3. Il faut donc quatre couleurs pour colorier les 7 points de la figure en respectant la condition. Il faut donc au moins quatre couleurs pour colorier tout le plan ! c'est-à-dire $N \geqslant 4$.

RETOUR AU SOMMAIRE

LIMOGES

Troisième exercice

Séries autres que S

Lights out

Énoncé

Un tableau est constitué de boutons. Sur chacun des boutons est affiché un chiffre pouvant prendre la valeur 0 ou 1. En appuyant sur un bouton, on change la valeur de ce bouton, ainsi que celle des boutons voisins horizontaux et verticaux immédiats (si ceux-ci existent) : un chiffre 1 est remplacé par 0 et vice-versa.

But du jeu : à partir d'une configuration initiale donnée, il s'agit, en appuyant sur les boutons, d'obtenir une grille constituée uniquement de zéros.
Pour suivre la séquence donnant la solution éventuelle, on repère les boutons du tableau par des lettres.

Ainsi, un tableau de taille 4×4 sera repéré $\begin{pmatrix} \text{A} & \text{B} & \text{C} & \text{D} \\ \text{E} & \text{F} & \text{G} & \text{H} \\ \text{I} & \text{J} & \text{K} & \text{L} \\ \text{M} & \text{N} & \text{O} & \text{P} \end{pmatrix}$

Exemple : on donne comme tableau initial le tableau $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

En appuyant successivement sur les boutons G, I et A, on résout le problème, comme le montre la séquence ci-dessous :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \mathbf{1} & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{bouton G}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \boxed{0} & 0 \\ 0 & \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{0} \\ \mathbf{1} & 1 & \boxed{0} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{bouton I}} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 1 & 0 & 0 \\ \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\ \boxed{0} & \boxed{0} & 0 & 0 \\ \boxed{0} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{bouton A}} \begin{pmatrix} \boxed{0} & \boxed{0} & 0 & 0 \\ \boxed{0} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La suite des lettres associée à la solution est : **GIA**.

1. ***Grille*** 2×2

   Les boutons sont repérés ainsi : $\begin{pmatrix} \text{A} & \text{B} \\ \text{C} & \text{D} \end{pmatrix}$

   a) A partir de la configuration $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, proposer une séquence donnant une solution au jeu.

   b) Montrer qu'à partir de n'importe quelle configuration initiale, on parvient toujours à une solution au jeu.

2. ***Grille*** 3×3

   Les boutons sont repérés ainsi : $\begin{pmatrix} \text{A} & \text{B} & \text{C} \\ \text{D} & \text{E} & \text{F} \\ G & H & I \end{pmatrix}$

a) Recopier et compléter la séquence suivante qui mène à une solution du jeu :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{bouton F}} \begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{bouton} \ldots} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{bouton D}} \begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{bouton} \ldots} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b) On considère l'algorithme suivant :

```
Parcourir les boutons D à I successivement.
Pour chaque bouton parcouru
    si  le chiffre situé immédiatement eu-dessus est égal à 1 alors
            Appuyer sur ce bouton
    sinon
            Ne pas appuyer sur ce bouton

Fin parcours
```

Montrer qu'en appliquant l'algorithme à la configuration initiale : $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, on aboutit à la configuration finale suivante $T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Donner la suite des lettres associée à cette séquence.

c) Donner une séquence de lettres permettant de passer du tableau final T au tableau initial S.

d On étudie la configuration finale T obtenue à la question (b).
On applique à cette configuration une « correction d'algorithme » en appuyant tout d'abord sur le bouton A, puis on applique au tableau obtenu l'algorithme précédent.
Montrer qu'avec cette correction d'algorithme on parvient à résoudre le jeu. En déduire la suite de lettres associée donnant la solution du jeu à partir de la configuration initiale S.

e Quelles sont toutes les configurations finales possibles que l'on peut obtenir en appliquant l'algorithme à une configuration initiale quelconque ?

f) À partir d'une grille vide, on appuie sur la touche A, puis sur la touche B, et on applique l'algorithme. Quelle configuration finale (parmi celles trouvées à la question (e)) obtient-on ?
En déduire une « correction d'algorithme » permettant de résoudre cette configuration finale.

g) En s'inspirant de la question précédente, résoudre toutes les configurations finales trouvées à la question (e).

Éléments de solution

1. **Grille** 2×2

   a) S $\rightarrow$ BAC $\rightarrow$ 0 par exemple.

   b) Par symétrie, toute configuration avec un chiffre « 1 » se résout.
   La question a) montre après appui sur B que les configurations avec deux chiffres « 1 » en colonne ou en ligne se résolvent.
   Avec trois chiffres c'est trivial.
   Avec 4 chiffres, en appuyant sur A on se ramène au cas à un chiffre.

2. **Grille** 3×3

   a) $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{bouton F}} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{bouton } \mathbf{E}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{bouton D}} \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{bouton } \mathbf{I}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b) S → DFH → T

c) T → DFH → S par exemple, ou encore HFD (l'ordre des lettres n'est pas important en fait). Ce phénomène de « réversibilité » est essentiel pour les dernières questions.

d) T → ADEGI → 0, d'où la solution complète : S→ DFHADEGI → 0.

e) Il y en a 8 en comptant la grille vide (voir à la fin).

f) $0 \rightarrow \mathrm{T} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Par réversibilité, on en déduit la correction d'algorithme : $\mathrm{T} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \mathrm{ABFGI} \rightarrow 0.$

g) C'est la question la plus longue. En essayant toutes « corrections d'algorithme » possibles à la 1ère ligne (en partant d'une grille vide), on en déduit les séquences de résolution de toutes les configurations finales. Cela donne le tableau suivant :

Configuration finale (dernière ligne)	Corrections d'algorithme sur la première ligne
(0 0 0)	aucune
(0 0 4)	B C
(0 1 0)	A B C
(0 1 1)	A
(1 0 0)	A B
(1 0 1)	A C
(1 1 0)	C
(1 1 1)	B

Cela permet de résoudre toutes les configurations initiales dans le jeu 3 × 3.

À noter que cela ne marche pas toujours dans des grilles de tailles différentes, certaines configurations finales n'étant jamais « atteintes ». Il y a donc des configurations sans solution (par exemple dans le jeu original à 5 × 5).

RETOUR AU SOMMAIRE

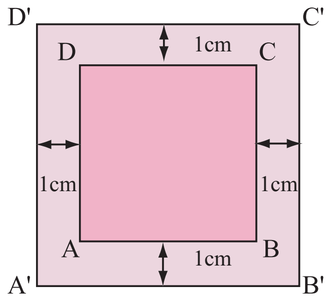
LYON

Premier exercice

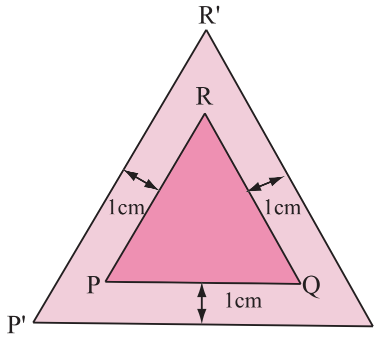
Toutes séries

Pousser les bords...

Énoncé



1. Tous les côtés d'un carré de périmètre 12 cm sont dé- placés vers l'extérieur de 1 cm comme indiqué sur la figure. Montrer que l'aire du carré augmente ainsi de 16 cm^2.



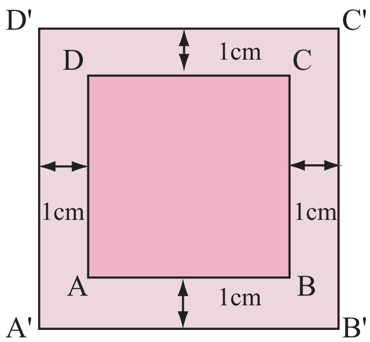
2. Tous les côtés d'un triangle équilatéral de périmètre 12 cm sont déplacés vers l'extérieur de 1 cm. Calculer en cm^2 l'augmentation de l'aire du triangle.

3. On considère maintenant un polygone convexe quelconque (on rappelle qu'un polygone est convexe lorsque chacun de ses angles a une mesure inférieure à 180° et que la somme des mesures des angles d'un polygone convexe à n côtés est $(n-2)\times 180^\circ$). Tous les côtés d'un polygone convexe de périmètre 12 cm sont déplacés vers l'extérieur de 1 cm. Démontrer que son aire augmente de plus de 15 cm^2.

4. Existe-t-il un polygone convexe de périmètre 12 cm dont l'aire augmente de moins de 15,5 cm^2 si l'on déplace tous ses côtés de 1 cm vers l'extérieur ? Justifier la réponse.

Éléments de solution

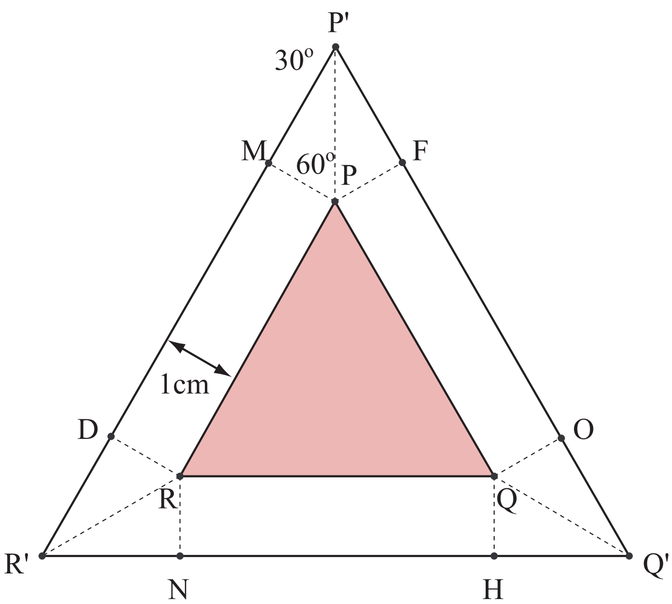
1. *Première solution*



Nous avons $AB = 3$ et A'B' $=$ 5. L'aire augmente ainsi de $25 - 9 = 16$cm^2.

Deuxième solution
La différence entre l'aire de A'B'C'D' et l'aire de ABCD se décompose en quatre rectangles de taille 3×1 (construits respectivement sur les segments [AB], [BC], [CD] et [DA]), et quatre carrés de taille 1×1 (dont les diagonales sont [AA'], [BB'], [CC'] et [DD']). L'aire augmente ainsi de $4 \times 3 \times 1 + 4 \times 1 \times 1 = 12 + 4$cm^2.

2. *Première solution*
La portion de plan ainsi ajoutée au triangle PQR pour obtenir le triangle P'Q'R' est la réunion de trois rectangles de dimensions 4×1 (construits respectivement sur les segments [PQ], [QR] et [RP]), et de trois quadrilatères isométriques dont les diagonales [PP'], [QQ'] et [RR'] sont axes de symétrie. Nous pouvons regarder la même décomposition si la longueur PQ ne vaut pas 4 mais seulement 0, c'est-à-dire si le triangle équilatéral PQR est réduit à un point O.
Les trois rectangles disparaissent ainsi, mais les trois quadrilatères sont translatés comme les pièces d'un puzzle (qui colle bien car deux côtés opposés d'un rectangle sont toujours parallèles et de même longueur), et forment un nouveau triangle équilatéral P'Q'R', dont le centre O est à la distance 1 de chaque côté.
Soit M lla projection orthogonale de P sur (P'R'). Le triangle PMP' est rectangle en M avec $\widehat{MPP'} = 60^o$ et $\widehat{MP'P} = 30^o$.
Par conséquent, $PM = 1$, $PP' = 2$, $P'M = \sqrt{3}$ et l'aire de PMP' vaut $3\sqrt{3}$.
Enfin, l'aire du nouveau triangle équilatéral P'Q'R' (avec P $=$ Q $=$ R $=$ 0) est six fois plus grande que celle de PMP' et vaut donc $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
Finalement, l'aire augmente de $3 \times 4 \times 1 + 3\sqrt{3} = 12 + 3\sqrt{3}$cm^2.



Deuxième solution
L'aire du triangle équilatéral augmente de trois fois l'aire du rectangle DMPR plus six fois

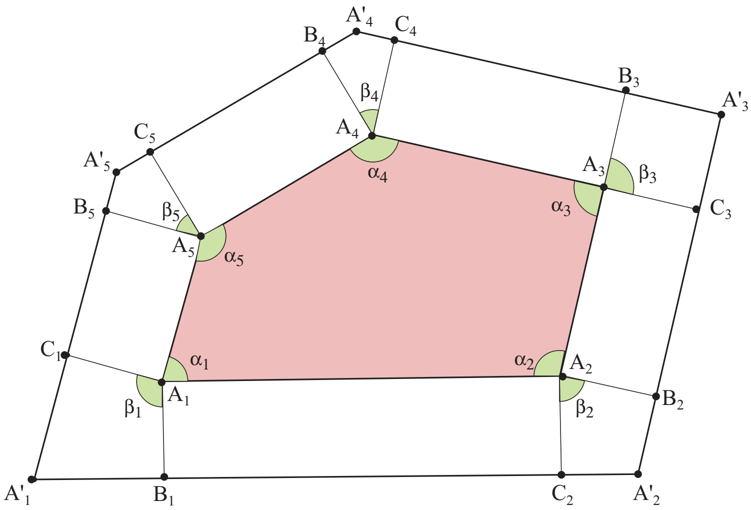
l'aire du triangle rectangle P'MP.

L'aire du rectangle DMPR est égale $PR \times 1 = \dfrac{12}{3} \times 1 = 4$.

L'aire du quadrilatère MPFP' est égale à deux fois l'aire du triangle rectangle P'MP. L'angle $\widehat{MP'P}$ est correspondant avec la moitié d'un angle au sommet du triangle équilatéral PQR donc il mesure 30° et son complémentaire $\widehat{MPP'}$ mesure 60° . Donc l'aire de MPP' est égale à $\dfrac{MP \times MP'}{2} = \dfrac{1 \times \tan 60}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

L'aire du triangle équilatéral augmente donc de $3 \times 4 + 6 \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 12 + 3\sqrt{3}$.

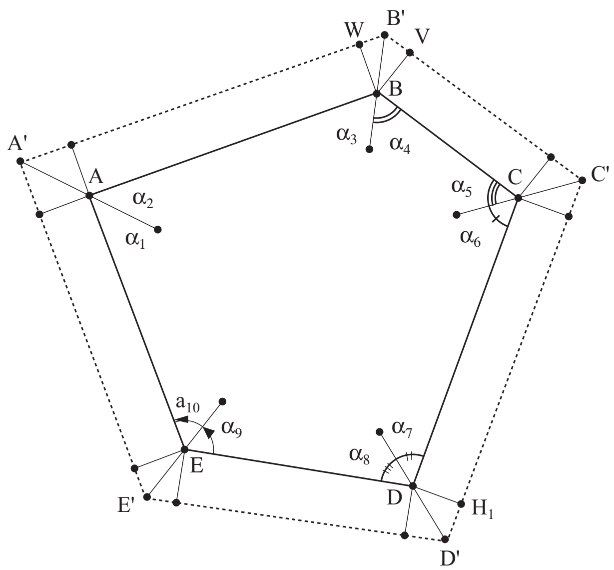
3. *Première solution*



La portion de plan ainsi ajoutée au polygone se décompose de nouveau en n rectangles construits sur les côtés du polygone intérieur et n quadrilatères. La somme des aires des n rectangles vaut 12 ; et pour calculer la somme des aires des n quadrilatères, nous pouvons supposer que le polygone intérieur est réduit á un point O, qui est donc á la distance 1 de chaque côté du nouveau polygone extérieur. Par conséquent, notre nouveau polygone extérieur contient un cercle de centre O, de rayon 1 et d'aire π. Son aire est donc $> \pi > 3{,}1$.

Finalement, l'augmentation de l'aire est supérieure à $12 + \pi > 12 + 3,1 > 15$.

Deuxième solution



La portion de plan ainsi ajoutée est la réunion de n rectangles construits sur les côtés du polygone initial et de $2n$ triangles rectangles. L'augmentation de l'aire du polygone est l'aire de cette portion de plan ajoutée.

Les n rectangles ont pour dimensions 1 et c_i avec $n = \sum_{i=1}^{n} \times c_1$ = périmètre du polygone initial = 12, donc la somme des aires de ces rectangles est :

$$\text{Somme des aires des n rectangles} = \sum_{i=1}^{n} \times c_1 = 12$$

Pour chacun des $2n$ triangles rectangles remplissant les coins du polygone on peut raisonner comme pour le triangle rectangle BWB' ci-dessus. L'aire de BWB' est supérieure à celle du secteur circulaire de centre B, de rayon $BW = 1$ et d'angle au centre $90 - \alpha_3$ qui mesure $\frac{\pi}{360} \times (90 - \alpha_3)$. Donc on peut minorer la somme des aires de ces $2n$ triangles rectangles par :

$$\text{Somme des aires des 2n triangles rectangles} \geqslant \sum_{i=1}^{2n} \frac{\pi}{360} \times (90 - \alpha_n).$$

De plus, on a la somme d'angles $\sum_{i=1}^{2n} \alpha_n$ égale la somme des angles intérieurs du polygone à n sommets donc $\sum_{i=1}^{2n} \alpha_n = (n-2) \times 180^{\circ}$. Donc on a :

$$\begin{aligned}
\text{Somme des aires des } 2n \text{ triangles rectangles} &\geqslant \frac{\pi}{360} \times \left(\sum_{i=1}^{2n} 90 - \sum_{i=1}^{2n} \alpha_n \right) \\
\text{Somme des aires des } 2n \text{ triangles rectangles} &\geqslant \frac{\pi}{360} \times (90 \times 2n - (n-2) \times 180) \\
\text{Somme des aires des } 2n \text{ triangles rectangles} &\geqslant \frac{\pi}{360} \times 360 \\
\text{Somme des aires des } 2n \text{ triangles rectangles} &\geqslant \pi.
\end{aligned}$$

On en déduit que :
Augmentation de l'aire du polygone $\geqslant \sum$ des aires des n rectangles $+ \sum$ des aires des $2n$ triangles rectangles
Augmentation de l'aire du polygone $\geqslant 12 + \pi$.

Or $\pi > 3.1$ donc : Augmentation de l'aire du polygone $\geqslant 15,1$.

4. Oui

Première solution
Le nouveau polygone extérieur peut se rapprocher d'un cercle aussi bien qu'on veut. Dans ce cas, la différence d'aire entre nos anciens polygones se rapproche aussi bien qu'on veut de $12 + \pi < 15,5$.

Deuxième solution
Prenons un hexagone régulier de périmètre 12 et déplaçons ses côtés vers l'extérieur de 1.
La différence entre les aires se décompose en six rectangles construits sur les côtés de l'hexagone et six quadrilatères.
La somme des aires des six rectangles vaut 12 ; et pour calculer la somme des aires des six quadrilatères, nous pouvons supposer que l'hexagone intérieur est réduit à un point O qui est à la la distance 1 de chaque côté du nouvel hexagone extérieur. Son aire vaut donc 6 fois l'aire d'un triangle équilatéral de hauteur 1, c'est-à-dire $6 \times \frac{\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$
Finalement, l'augmentation de l'aire est $12 + 2\sqrt{3} < 15,5$.

RETOUR AU SOMMAIRE

LYON

Deuxième exercice

Toutes séries

Sommes d'entiers consécutifs

Énoncé

On s'intéresse dans ce problème à la décomposition d'un nombre entier naturel sous la forme d'une somme d'au moins deux nombres entiers relatifs consécutifs.
Par exemple : 3 peut être décomposé en la somme de 2 entiers consécutifs :

$$1+2=3$$

mais aussi comme somme de 6 entiers consécutifs :

$$3=-2+(-1)+0+1+2+3$$

ou bien, 18 peut se décomposer comme somme de 3 entiers consécutifs :

$$18=5+6+7$$

mais aussi comme somme de 36 entiers consécutifs :

$$18=-17+(-16)+(-15)+\cdots+17+18$$

1. Décomposer l'entier 2013 en une somme de deux entiers consécutifs. En une somme de trois entiers consécutifs. En une somme de six entiers consécutifs.
2. Montrer que l'entier 2013 ne peut pas se décomposer en une somme de quatre entiers consécutifs.
3. L'entier 2013 peut-il se décomposer en une somme de cinq entiers consécutifs ?
4. Soit N un entier naturel qui s'écrit comme somme de k entiers consécutifs.
   a) Montrer que si k est pair, $\dfrac{k}{2}$ divise N
   b) Montrer que si k est impair, k divise N.

   On pourra utiliser le résultat : $1+2+\cdots+k=\dfrac{k(k+1)}{2}$ *pour* $k \geqslant 2$.
5. Déterminer et écrire toutes les décompositions de l'entier 2013 en somme d'entiers consécutifs (On rappelle que $2013=3\times 11\times 61$)
6. Expliquer pourquoi l'entier 2048 ne possède qu'une seule décomposition en somme d'entiers consécutifs
7. Si N est un nombre entier strictement positif, ϕ_N le nombre de diviseurs impairs de N et D_N le nombre de décompositions en somme d'entiers consécutifs, démontrer que :

$$D_N=2\times\phi_N-1.$$

Éléments de solution

1. $2013 = 1006 + 1007 = 670 + 671 + 672 = 333 + 334 + 335 + 336 + 337 + 338$
2. Si on pouvait trouver quatre entiers consécutifs $n-1; n; n+1; n+2$ dont la somme $4n+2$ soit égale à 2013, alors 2011 serait divisible par 4, ce qui n'est pas le cas.
3. De même, si on pouvait trouver cinq entiers consécutifs $n-2; n-1; n; n+1; n+2$ dont la somme $5n$ était égale à 2013, alors 2013 serait multiple de 5, ce qui n'est pas le cas.
4. On pose $N = \sum_{i=0}^{k-1} n+i$ On a alors :

$$N = \sum_{i=0}^{k-1} n+i = k \times n + \frac{(k-1)k}{2} = \frac{k}{2}(2n+k-1).$$

Donc, si k est pair, $\frac{k}{2}$ est un entier et il divise N.

Si k est impair, $2n+k-1$ est pair, donc $\frac{2n+k-1}{2}$ est un entier et k divise N.

5. L'ensemble des diviseurs de 2013 et leurs doubles est : $3; 6; 11; 22; 33; 61; 66; 132; 183; 366; 671; 1342; 2013; 4026$

Si k est pair, 2013 peut donc s'écrire :

- $2013 = \frac{2}{2}(2n+2-1) = 2n+1$ donc $n = 1006$ et on retrouve le résultat de la question 1.
- $2013 = \frac{6}{2}(2n+6-1) = 6n+15$ donc $n = 333$ et on retrouve encore le résultat de la question 1.
- $2013 = 11(2n+21) = 22n+231$ donc $n = 81$ et $2013 = 81 + 82 + \cdots + 102$.
- $2013 = 33(2n+65)$ donc $n = -2$ et $2013 = -2 + (-1) + \cdots + 63$.
- $2013 = 61(2n+121)$ donc $n = -44$ et $2013 = -44 + \cdots + 77$.
- $2013 = 183(2n+365)$ donc $n = -177$ et $2013 = -177 + \cdots + 188$.
- $2013 = 671(2n+1341)$ donc $n = -669$ et $2013 = -669 + \cdots + 672$.
- $2013 = 2013(2n+4025)$ donc $n = -2012$ et $2013 = -2012 + \cdots + 2013$.

Si k est impair, 2013 peut alors s'écrire :

- $2013 = 1 \times \frac{2n}{2}$ et $n = 2013$ solution à rejeter puisqu'une somme comprend au moins deux termes.
- $2013 = 3 \times \frac{2n+2}{2}$ et $n = 670$ et on retrouve la solution de la première question.
- $2013 = 11(n+5)$ donc $n = 178$ et $2013 = 178 + \cdots + 188$.
- $2013 = 33(n+16)$ donc $n = 45$ et $2013 = 45 + \cdots + 77$.
- $2013 = 61(n+30)$ donc $n = 3$ et $2013 = 3 + \cdots + 63$.
- $2013 = 183(n+91)$ donc $n = -80$ et $2013 = -80 + \cdots + 102$.
- $2013 = 671(n+335)$ donc $n = -332$ et $2013 = -332 + \cdots + 338$.
- $2013 = 2013(n+1006)$ donc $n = -1005$ et $2013 = -1005 + \cdots + 1007$.

6. Si 2048 se décompose en une somme de k entiers consécutifs alors :

$$2048 = \frac{k}{2} \times (2n + k11)$$

$\boxed{Cas1}$ k impair
k divise 2048 d'après (6) donc $k = 1$ qui est le seul diviseur impair de 2048 et alors on a $n = 2048$, c'est la décomposition triviale que l'on exclut.

$\boxed{Cas2}$ k pair

k vérifie (6) donc $k(2n+k-1) = 2048 \times 2 = 2^{12}$. Comme k est pair, $2n+k-1$ est impair. Le seul diviseur impair de 2048 est 1 donc on doit avoir $2n+k-1 = 1$ et $k = 2 \times 2048$. Donc il faut que $n = \dfrac{2 - 2 \times 2048}{2} = -2047$. On retrouve la décomposition $-2047 + \cdots + 2048 = 2048$.

7. Soit N un entier
   Premier cas : k impair.
   k doit et peut alors être n'importe quel diviseur impair de N ; puis on calcule $\dfrac{N}{k} = n + \dfrac{k-1}{2}$ et enfin n.
   Deuxième cas : k pair.
   $2n+k-1$ doit et peut alors être n'importe quel diviseur impair de N ; puis on calcule $\dfrac{N}{2n+k-1} = \dfrac{k}{2}$ et donc k (pair) et enfin n.

RETOUR AU SOMMAIRE

MARTINIQUE et AEFE Amérique

Premier exercice

Toutes séries

Histoire de parapluies

Énoncé

Par un temps pluvieux, n personnes se rendent à une réunion. Elles sont toutes munies d'un parapluie qu'elles déposent dans un bac à l'entrée de la salle. On suppose que tous les parapluies sont étiquetés au nom de leur propriétaire. À la fin de la réunion, les participants récupèrent, chacun un parapluie, au hasard, les uns après les autres.

1. On suppose que $n = 2$.
   Quelle est la probabilité que personne ne reparte avec son parapluie ?
2. Même question, en supposant $n = 4$.
3. On suppose que $n = 6$.
   a) Quelle est la probabilité que les deux premières personnes soient les seules à repartir, chacune avec son parapluie ?
   b) Quelle est la probabilité pour que seulement deux personnes repartent, chacune avec son parapluie ?
4. On suppose que $n \geqslant 3$.
   a) Quelle est la probabilité que la deuxième personne soit la première à repartir avec son parapluie ?
   b) b. Quelle est la probabilité que la troisième personne soit la première à repartir avec son parapluie ?

Éléments de solution

1. Faire un arbre ou lister les différentes possibilités. Cette probabilité est de $\dfrac{1}{2}$.
2. Faire un arbre ou lister méthodiquement les possibilités. Cette probabilité est de $\dfrac{9}{24}$, soit $\dfrac{3}{8}$.
3. a) Les 2 premières personnes repartent avec leur parapluie avec une probabilité de $\dfrac{1}{6 \times 5}$. Aucune des 4 autres ne repart avec son parapluie avec une probabilité de $\dfrac{3}{8}$ (question précédente). Donc la probabilité recherchée est de $\dfrac{1}{6 \times 5} \times \dfrac{3}{8} = \dfrac{1}{80}$.
   b) Il y a $\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} = 15$ façons de choisir les 2 personnes repartant avec leur parapluie, et pour chaque cas une probabilité de $\dfrac{1}{80}$ (question précédente).
   La probabilité recherchée est : $\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} \times \dfrac{1}{6 \times 5} \times \dfrac{3}{8} = 15 \times \dfrac{1}{80} = \dfrac{3}{16}$.

4. a) La deuxième personne est la première à repartir avec son parapluie, donc la première personne ne prend ni son parapluie ni celui de la deuxième personne.

   La probabilité est donc : $\dfrac{n-2}{n} \times \dfrac{1}{n-1} = \dfrac{n-2}{n(n-1)}$.

   b) La troisième personne est la première à repartir avec son parapluie, donc ni la première ni la deuxième ne prennent leur parapluie ni le parapluie de la troisième personne.
   Deux cas possibles :

   - la première personne prend le parapluie de la deuxième, la deuxième ne prend pas celui de la troisième, et la troisième prend son parapluie ; la probabilité de ce cas est

   $$\frac{1}{n} \times \frac{n-2}{n-1} \times \frac{1}{n-2} = \frac{n-2}{n(n-1)(n-2)}$$

   ;

   - La première personne ne prend ni son parapluie ni celui de la deuxième, ni celui de la troisième, la deuxième personne ne prend ni le sien, ni celui de la troisième, et la troisième prend son parapluie ; la probabilité de ce cas est

   $$\frac{n-3}{n} \times \frac{n-3}{n-1} \times \frac{1}{n-2} = \frac{(n-3)^2}{n(n-1)(n-2)}.$$

   La probabilité cherchée est donc : $\dfrac{n-2-(n-3)^2}{n(n-1)(n-2)} = \dfrac{n^2-5n+7}{n(n-1)(n-2)}$.

RETOUR AU SOMMAIRE

MARTINIQUE et AEFE Amérique

Deuxième exercice

Toutes

Décompositions

Énoncé

On considère un nombre entier non nul n produit de deux nombres entiers p et q : $n = pq$.
On cherche à décomposer l'ensemble des n premiers entiers consécutifs non nuls $1; 2; \dots ; n$ en p parties, deux à deux disjointes (d'intersection vide) tels que :

- chaque partie contient q éléments ;
- la somme des éléments de chaque partie est la même.

Par exemple, la décomposition est possible pour $n = 4, p = q = 2$. L'ensemble $1; 2; 3; 4$ peut être décomposé en 2 parties ($p = 2$) disjointes, chaque partie ayant 2 éléments ($q = 2$) et la somme des éléments de chaque partie est la même : $1; 4$ et $2; 3$ (la somme commune est 5).

1. On suppose que $n = 12$.
   a) La décomposition est-elle possible pour $p = 3$ (3 parties) et $q = 4$ (4 éléments) ?
   b) Même question pour $p = 4$ (4 parties) et $q = 3$ (3 éléments).
2. Donner une condition nécessaire portant sur n et q pour que la décomposition soit possible.
3. Montrer que la décomposition est possible pour $n = 972, p = 81$ (81 parties) et $q = 12$ (12 éléments).

On rappelle que la somme des n premiers entiers consécutifs non nuls est donnée par la formule :

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

.

Éléments de solution

1. a) Comme $12 = 3 \times 4$, on peut décomposer cet ensemble en 3 parties de 4 éléments. Reste à vérifier les autres conditions.

   La somme des 12 premiers entiers naturels non nuls est : $\dfrac{12 \times 13}{2} = 78$.
   De plus, $\dfrac{78}{3} = 26$ donc la somme des éléments de chaque partie doit être égale à 26.
   On a $26 = 6,5 \times 4$ donc le milieu de la série des 12 entiers est situé entre 6 et 7.
   On compose une partie « centrale » 5 ; 6 ; 7 ; 8 (la somme des éléments vaut bien 26) puis les 2 autres parties en choisissant 2 entiers consécutifs situés de manière symétrique par rapport à cette partie « centrale ».
   On obtient ainsi les 3 parties suivantes : 5 ; 6 ; 7 ; 8, 3 ; 4 ; 9 ; 10 et 1 ; 2 ; 11 ; 12. La décomposition n'est pas unique

   b) On raisonne de même. La somme des éléments de chaque partie devrait être $\dfrac{78}{4} = 19,5$.Mais ce nombre n'est pas entier et ne peut représenter la somme commune.
   Donc la décomposition avec $n = 12, p = 4$ et $q = 3$ n'est pas possible.

2. On considère les entiers n, p, q tels que $n = p.q$.
   Comme on a $1+2+\cdots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$, la somme des éléments de chacune des p parties doit valoir $\dfrac{n(n+1)}{2p} = \dfrac{pq(n+1)}{2p} = \dfrac{q(n+1)}{2}$.
   Si la décomposition est possible, $\dfrac{q(n+1)}{2}$ est un nombre entier, c'est-à-dire que le produit $q(n+1)$ est divisible par 2. IL faut donc que q ou $n+1$ soit pair, ou encore q pair ou n impair.
   Une condition nécessaire pour que la décomposition soit possible est : q pair ou n impair.
   Si q est impair et n pair, la décomposition n'est pas possible.
3. . $972 = 81 \times 12$ donc on peut en effet décomposer cet ensemble en 81 parties de 12 éléments. Reste à montrer qu'ils peuvent être tous distincts.
   La somme des 972 premiers entiers non nuls est $\dfrac{972 \times 973}{2} = 412878$ et $\dfrac{472878}{81} = 5838$. Donc la somme des éléments de chaque partie doit être de $5838 = 486,5 \times 12$.
   Pour composer les parties, on utilise 486,5 comme pivot, en généralisant la méthode utilisée au 1-a).

   $\boxed{\text{On obtient ainsi les parties } A_k = \{486-(6k+i); 487+(6k+i); i \in \{0,\ldots,5\}\}, \text{ pour } k \in \{0,\ldots,80\}.}$

RETOUR AU SOMMAIRE

MARTINIQUE et AEFE Amérique

Troisième exercice

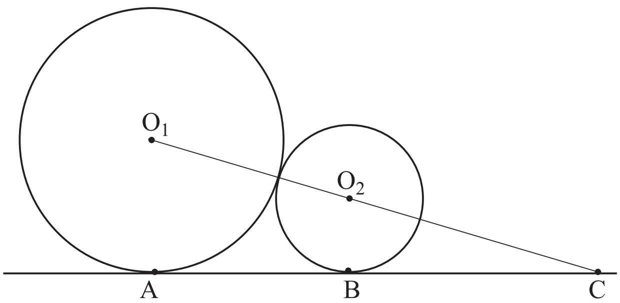
Toutes séries

Cercles tangents à une même droite

Énoncé

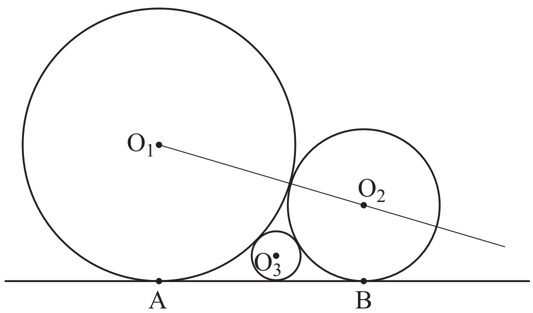
PARTIE 1 : Cas de deux cercles

Deux cercles de centres respectifs O_1 et O_2 et de rayons respectifs R_1 et R_2 sont tangents entre eux et tangents en A et B à la droite (AB).



1. Dans cette question on suppose que $R_1 = 9$ cm et $R_2 = 4$ cm.
   a) Prouver que $O_1O_2 = 13$cm.
   b) Quelle est la nature du quadrilatère $\mathrm{AO_1O_2B}$?
   c) c. Calculer la distance AB.
2. Montrer que dans le cas général on a $AB = 2\sqrt{R_1R_2}$.

PARTIE 2 : Cas de trois cercles



Les cercles de centres respectifs O_1, O_2 et O_3 et de rayons respectifs R_1, R_2 et R_3 sont tangents à une droite et tangents entre eux. On suppose de plus que $R_1 > R_2 > R_3$.

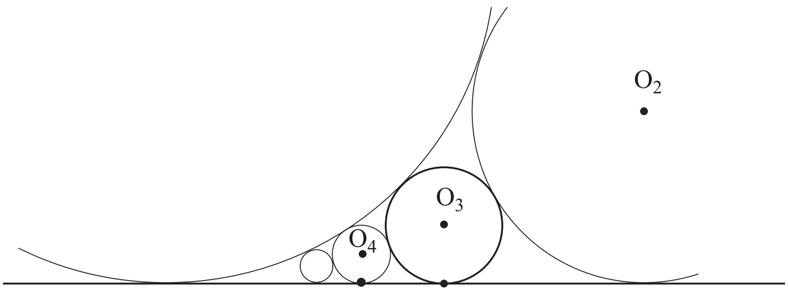
1. Montrer que $\dfrac{1}{\sqrt{R_3}} = \dfrac{1}{\sqrt{R_1}} + \dfrac{1}{\sqrt{R_2}}$.

2. On cherche les triplets (a, b, c) d'entiers naturels non nuls vérifiant

$$1 \leqslant a < b < c \leqslant 100 \text{ et } \frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{b}} + \frac{1}{\sqrt{c}}.$$

   Écrire un algorithme qui affiche, sils existent, le(s) triplet(s) répondant au problème posé.
3. À l'aide éventuellement dŠ'une calculatrice, programmer l'algorithme trouvé à la question 2. Quels résultats fournit-elle ?

PARTIE 3 : Quatre cercles et plus. . .



(a) Montrer que $\dfrac{1}{\sqrt{R_4}} = \dfrac{2}{\sqrt{R_1}} + \dfrac{1}{\sqrt{R_2}}$

(b) La chaîne de cercles tangents se poursuivant, comme sur la figure, sur la gauche, comment calculer le rayon du n$^{\text{ème}}$ cercle ?

Éléments de solution

Partie 1

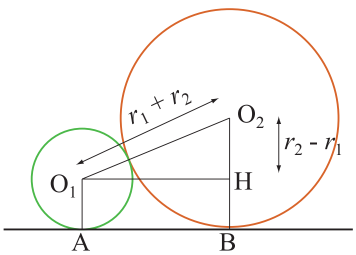
1. a) Les deux cercles étant tangents, le point de tangence est aligné avec les centres des cercles. Donc $O_1O_2 = R_1 + R_2 = 13$.

   b) Les droites (O_1A) et (O_2B) sont parallèles car toutes deux perpendiculaires à (AB). Le quadrilatère AO_1O_2B ayant deux côtés opposés parallèles et un angle droit est un **trapèze rectangle**.

   c) Dans le triangle O_1O_2H rectangle en H (voir figure ci-dessous), on utilise le théorème de Pythagore :

$$AB^2 = (9+4)^2 - (9-4)^2 = 169 - 25 \text{ donc } AB = \sqrt{144} = 12.$$

2. Dans le cas général, on a de même $AB^2 = (R_2 + R_1)^2 - (R_2 - R_1)^2$.
   Donc $\boxed{AB^2 = 4R_1R_2}$.



Partie 2

1. a) D'après la question précédente, dans le cas général, on a de même $AB^2 = 4R_1R_2$, $BC^2 = 4R_2R_3$ et $AC^2 = 4R_1R_3$.
   Donc $AB = \sqrt{4R_1R_2} = 2\sqrt{R_1R_2}$, $BC = 2\sqrt{R_2R_3}$ et $AC = 2\sqrt{R_1R_3}$.

   Puisque $AB = AC + CB$, il vient $\sqrt{R_1R_2} = \sqrt{R_1R_3} + \sqrt{R_2R_3}$, ce qui donne, en divisant les deux membres par $\sqrt{R_1R_2R_3}$:

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{R_3}} = \frac{1}{\sqrt{R_1}} + \frac{1}{\sqrt{R_2}}}$$

b) On cherche les triplets (a, b, c) d'entiers naturels non nuls vérifiant

$$1 \leqslant a < b < c \leqslant 100 \text{ et } \frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{b}} + \frac{1}{\sqrt{c}}$$

• Algorithme

Pour b de 1 jusqu'à 100
  Pour c de $b+1$ jusqu'à 100
    a prend la valeur $\dfrac{1}{\sqrt{b}} + \dfrac{1}{\sqrt{c}}$
    d prend la valeur $\dfrac{1}{a^2}$
    Si la valeur de d est égale à sa partie entière alors
      Afficher d, b, c
    FinSi
  FinPour
FinPour

• Programme sur TI

```
PROGRAM:SANGAKU
:For(A,1,100)
:For(B,A+1,100)
:1/√(A)+1/√(B)→C

:1/C^2→D
:If D=int(D)
:Then
```

```
:Disp D,A,B
:End
:End
:End
```

c) On obtient à l'affichage deux triplets :
(4 ; 9 ; 36). Celui-ci correspond à l'exemple traité à la question B.1.
(8 ; 16 ; 72).

Partie 3

1. D'après la partie 2, on déduit

   • en considérant les cercles (C_1), (C_2) et (C_3) : $\dfrac{1}{\sqrt{R_3}} = \dfrac{1}{\sqrt{R_1}} + \dfrac{1}{\sqrt{R_2}}$

   • en considérant les cercles (C_1), (C_3) et (C_4) $\dfrac{1}{\sqrt{R_4}} = \dfrac{1}{\sqrt{R_1}} + \dfrac{1}{\sqrt{R_3}}$

   d'où la relation cherchée : $\dfrac{1}{\sqrt{R_4}} = \dfrac{1}{\sqrt{R_1}} + \dfrac{1}{\sqrt{R_2}}$

2. Sous les hypothèses de construction, on a :

$$\frac{1}{\sqrt{R_n}} = \frac{1}{\sqrt{R_{n-1}}} + \frac{1}{\sqrt{R_1}}$$

   D'où la relation

$$\frac{1}{\sqrt{R_n}} = \frac{n-2}{\sqrt{R_1}} + \frac{1}{\sqrt{R_2}}$$

RETOUR AU SOMMAIRE

MARTINIQUE et AEFE Amérique

Quatrième exercice

Toutes séries

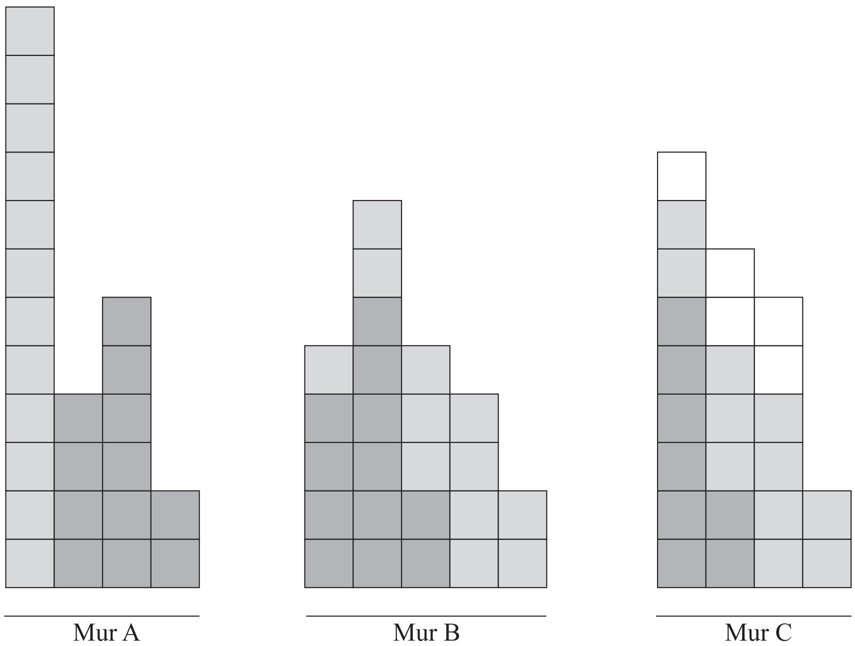
Paul et les « isomurs »

Énoncé

Paul est face à un « mur » constitué de briques identiques issues d'un jeu de construction.
Ce mur, d'un seul tenant, est constitué de piles (comme par exemple le mur A ci-dessous).
Il effectue alors la manipulation suivante :
Il prend les briques de la première pile (la plus à gauche) et les distribue sur les piles suivantes en en posant une sur la deuxième pile, deux sur la troisième etc. jusqu'à épuiser les briques, en créant, si besoin est, de nouvelles piles. S'il constate qu'il ne lui reste plus assez de briques pour poursuivre le processus, il dépose malgré tout ces briques restantes sur la pile suivante.

Exemple :

Le mur A ci-dessous, est constitué de 24 briques réparties en quatre piles. Paul prend alors les 12 briques de la première pile puis pose 1 brique sur la deuxième pile, puis 2 briques sur la troisième pile, puis 3 briques sur la quatrième. Avec les six briques restantes, il crée une nouvelle pile constituée de 4 briques. Il lui reste alors 2 briques avec lesquelles il créé une dernière pile.
Après la manipulation il obtient le mur B à 5 piles ci-dessous.
Si Paul recommence l'opération à partir du mur B, en distribuant les cinq briques de la première pile, il obtient le mur C suivant.



Dans la suite il sera pratique de représenter un mur par la liste des nombres entiers naturels correspondant aux nombres de briques de chacune des piles du mur, en les considérant de gauche à droite.

Ainsi le mur A est représenté par (12, 4, 6, 2), le mur B par (5, 8, 5, 4, 2) et le mur C par (9, 7, 6, 2).

Partie A :*Deux caractéristiques décrivant l'évolution des murs lors de manipulations successives*

Paul part du mur M_1 : (1, 1, 4).
Après plusieurs manipulations successives il obtient les murs
M_2 : (2, 4) ; M_3 : (5, 1) ; M_4 : (2, 2, 2) ; M_5 : (3, 3) ; M_6 : (4, 2) ; M_7 : (3, 2, 1) et M_8 : (3, 3).
On pourra, pour décrire l'évolution de ce mur, utiliser la notation suivante :
$(1,1,4) \to (2,4) \to (5,1) \to (2,2,2) \to \boxed{(3,3)} \to (4,2) \to (3,2,1) \to \boxed{(3,3)}$.

Paul remarque alors que les murs M_5 et M_8 sont identiques et que, de ce fait, les manipulations suivantes donneront constamment la même séquence des 3 murs M_5 M_6 M_7 qui se répètera indéfiniment.
Paul a donc observé 2 phases dans l'évolution :

- une phase tout d'abord « anarchique », avec les 4 murs M_1 , M_2 , M_3 , M_4 ;
- puis une phase plus « régulière » avec la répétition des 3 murs M_5 , M_6 , M_7.

Il décide d'appeler **latence** le nombre de murs de la phase anarchique et **période** le nombre de murs de la séquence répétitive de la phase régulière. Le mur (1, 1, 4) est donc de latence 4 et de période 3.

1. Quelles sont la latence et la période du mur (9) qui n'est constitué que d'une pile de 9 briques ?
2. Même question pour les murs (4, 5, 2) et (3, 3, 2).

Partie B *la recherche des isomurs de longueur 4*

Paul observe que dans l'évolution de certains murs le nombre de piles du mur change au cours des manipulations alors pour d'autres le nombre de piles ne change pas. Il décide d'appeler **longueur** d'un mur le nombre de piles de ce mur et **isomur** un mur dont la longueur ne change jamais au cours de manipulations successives.

1. 1Y a-t-il des isomurs parmi les murs des questions 1. et 2. de la partie A ?

Dans toute la suite de l'exercice on s'intéresse aux murs de longueurs 4.
Soit un mur (*a, b, c, d*) de longueur 4 où *a, b, c* et *d* sont quatre entiers naturels non nuls.

2. a) À quelle condition nécessaire et suffisante sur l'entier a obtient-on, après une manipulation, un mur de longueur 4 ?
   b) Écrire à l'aide de a, b, c et d le nouveau mur obtenu.
3. Montrer que si (a, b, c, d) est un isomur, alors il est de latence 0 et de période au plus 4. Préciser les conditions nécessaires et suffisantes sur a, b, c, d pour pouvoir construire un tel mur.
4. Écrire, à l'aide de l'entier a, la forme d'un isomur de période 1.
   Vérifier qu'il y a quatre isomurs de période 1 dont on dressera la liste.
5. Montrer qu'il existe des isomurs de période 2 et les écrire à l'aide des entiers a et b.
   Écrire un algorithme permettant d'en dresser la liste. Combien y en a-t-il ?
6. Existe-t-il des isomurs de période 3 ?
7. Combien y a-t-il d'isomurs de période 4 ?

Éléments de solution

Partie A

1. $(9) \to (1,2,3,3) \to \boxed{(3,3,3)} \to (4,5) \to (6,2,1) \to \boxed{(3,3,3)}$ c'est un mur de latence 2 et de période 3.
2. $\boxed{(4,5,2)} \to (6,4,1) \to (5,3,3) \to \boxed{(4,5,2)}$ c'est un mur de latence 0 et de période 3.
   $\boxed{(3,3,2)} \to (4,4) \to (5,2,1) \to \boxed{(3,3,2)}$ c'est un mur de latence 0 et de période 3.

Partie B

1. Seul le mur (4,5,2) est un isomur et sa longueur est 3.

2. a) Pour que le mur conserve sa longueur il faut que, la première pile disparaissant, a soit suffisamment grand pour qu'une nouvelle pile soit créée, et suffisamment petit pour quŠ'aucune autre pile ne soit créée,
   d'où $\boxed{1+2+3 < a \leqslant 1+2+3+4}$ soit $6 < a \leqslant 10$.

   b) Le nouveau mur est $(b+1, c+2, d+3, x)$.
   Mais le nombre jetons ne changeant pas, on doit avoir $a+b+c+d = (b+1)+(c+2)+(d+3)+x$ soit $x = a-6$. Le mur obtenu après une manipulation est donc $\boxed{(b+1, c+2, d+3, a-6)}$.

3. On a vu qu'après la première manipulation on obtenait $(b+1, c+2, d+3, a-6)$ pour que le mur conserve pour la seconde manipulation sa longueur il faut et suffit que $6 < b+1 \leqslant 10$ soit que $5 < b \leqslant 9$ on obtient alors le mur $(c+3, d+5, a-3, b-5)$. Pour pouvoir faire une troisième manipulation il faut donc que $6 < c+3 = \leqslant 10$ soit
   $3 < c \leqslant 7$ et on obtient $(d+6, a-1, b-2, c-3)$. Et pour effectuer une quatrième manipulation, il faut que $6 < d+6 \leqslant 10$ soit $0 < d \leqslant 4$ et on obtient le mur (a, b, c, d).
   Donc on constate que tout $\boxed{\textbf{isomur de longueur 4 est au plus de période 4.}}$
   Pour pouvoir le construire il est nécessaire et suffisant que $\boxed{6 < a \leqslant 10, 5 < b \leqslant 9, 3 < c \leqslant 7et0 < d \leqslant 4}$.

4. Pour obtenir un mur de latence 0 et de période 1 il faut et suffit que a, b, c et d vérifient les conditions $a = b+1, b = c+2, c = d+3, d = a-6$ et $6 < a \leqslant 10$.
   On obtient alors $b = a-1, c = b-2 = a-3, d = c-3 = a-6$.
   Les isomurs de latence 0 et de période 1 sont donc de la forme $(a, a1, a-3, a-6)$ où $6 < a \leqslant 10$.
   Ce qui donne les quatre murs : $\boxed{(7,6,4,1), (8,7,5,2), (9,8,6,3), (10,9,5,4)}$.

5. Pour obtenir un isomur de période 2 il faut et suffit que a, b, c et d vérifient les conditions $a = c+3, b = d+5, c = a-3, d = b-5$ et $6 < a \leqslant 10$. On obtient alors $c = a-3$ et $d = b-5$ avec $6 < a \leqslant 10$ et $5 < b \leqslant 9$.
   Les isomurs de période 2 sont donc de la forme $(a, b, a3, b-5)$ avec $6 < a \leqslant 10$, $5 < b \leqslant 9$ et $b \neq a-1$ sinon on a un isomur de période 1.

   Algorithme

   ```
   Variablea a, b, c, d
   Pour a allant de 7 à 10
       Pour b allant de 6 à 9
           Si b ≠ a − 1 alors
               c = a − 3
               d = b − 5
               Ecrire −a, b, c, d)
           FinSi
       FinPour
   FinPour
   ```

   Les deux boucles « pour » imbriquées écriront au cours de leur exécution 16 isomurs moins les 4 isomurs de période 1 correspondant aux cas où $b = a-1$, soit 12 isomurs de période 2.

6. Pour obtenir un isomur de période 3 il faut et suffit que a, b, c et d vérifient les conditions $a = d+6, b = a-1, c = b-2, d = c-3$ avec $6 < a \leqslant 10, 5 < b \leqslant 9et4 < c \leqslant 8$.Or $d = a-6, c = d+3 = a-3, b = a-1$ donnerait les murs $(a, a-1, a-3, a-6)$ qui sont les isomurs de période 1 !
   donc il n'y a pas d'isomur de période 3.

7. En s'aidant dŠun arbre de choix ou d'un algorithme à quatre boucles « for » imbriquées, on voit qu'il y a 256 possibilités d'isomurs de longueur 4 dont 16 sont de période 1 ou 2, **il y a donc 240 isomurs de période 4**.

RETOUR AU SOMMAIRE

MAYOTTE

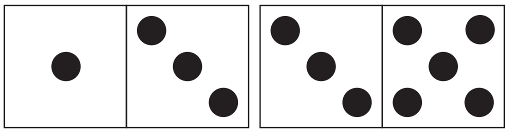
Premier exercice

Toutes séries

Les dominos

Énoncé

Le jeu de dominos est traditionnellement composé de pièces composée chacune de deux cases figurant de 0 à 6 points. La règle de ce jeu, bien connu dans l'océan Indien, impose de former une chaine de dominos en posant face-à-face des cases comportant le même nombre de points.

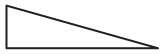


1. a) Combien le jeu comporte-t-il de pièces, sachant qu'il contient toutes les paires possibles de nombres entre 0 et 6 ?
   b) En imaginant un jeu de dominos particulier, constitué de toutes les paires possibles de nombres entre 0 et 12, combien y aurait-il de pièces ?
   c) Et pour des nombres de 0 à n ?
2. a) En attendant son petit frère pour jouer une partie, Ali s'amuse à enchaîner les dominos. Pensez-vous qu'il parviendra à disposer tous les dominos dans une seule grande chaîne ? Justifiez votre réponse.
   b) Ali se rend compte que son petit frère a dérobé tous les dominos comprenant un 6. Quelle est alors la plus longue chaîne qu'il puisse réaliser ? Justifiez votre réponse.
3. 3) Ali perd patience, et s'amuse à présent à placer les dominos debout, pour les faire basculer les uns après les autres d'une seule pichenette. Chaque domino est un pavé droit de 0,4 cm d'épaisseur, de 2 cm de large, et de 4 cm de hauteur. Pour que la cascade de dominos se déroule bien, chaque domino doit frapper le suivant au moins au quart de sa hauteur. Combien faudrait-il de dominos pour faire une cascade de 1 mètre de long ?

Éléments de solution

1. a) $1+2+3+4+5+6+7=28$ dominos
   b) $1+2+..+12+13=91$ dominos
   c) On peut considérer le jeu sans les « doubles », et le problème est équivalent. On peut représenter la situation à l'aide d'un graphe non orienté, ayant pour sommets les nombres de 0 à 6, une arête reliant deux sommets correspondant au domino comportant les deux chiffres en question. Un jeu de domino complet, sans les « doubles » correspond alors à un graphe complet.
2. a) graphe complet à 7 sommets, connexe, dont chaque sommet est de degré 6 : possibilité de cycle eulérien.
   Justification possible en exhibant un exemple, tel que :01 12 23 34 45 56 60 02 24 46 61 13 35 50 03 36 62 25 51 14 40 (et insertion des « doubles »).

b) graphe complet à 6 sommets, chaque sommet de degré 5 : impossibilité de chaine eulérienne.
Justification envisageable au niveau de la classe de Première : un numéro posé apparaît deux fois (dans un domino et celui qui est juxtaposé), sauf s'il est en bout de chaine. Seuls deux numéros peuvent donc apparaître en nombre impair. Dans ce jeu incomplet, les numéros de 0 à 5 apparaissent tous 5 fois (si on ne compte pas les doubles) : impossibilité.
Il est nécessaire d'enlever deux dominos de ce jeu incomplet (par exemple 0-1 et 2-3), pour avoir deux numéros seulement en nombre impair qui apparaitront alors aux extrémités (dans cet exemple 4- ? et ?-5). Il s'agit d'une chaine eulérienne formée dans un graphe dont tous les sommets sont de degré pair, sauf deux.

3. Les dominos doivent être espacés de $\sqrt{4^2 - 1^2} = \sqrt{15}$ cm. 

   En tenant compte de la l'épaisseur du domino, il faudra $E\left(\dfrac{100}{\sqrt{15}+0,4}\right) + 1$ dominos.
   On peut vérifier que 23 dominos ne suffisent pas, et que 24 suffisent.

RETOUR AU SOMMAIRE

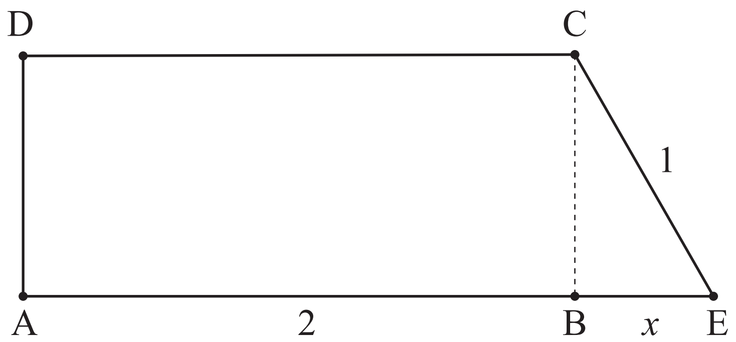
MONTPELLIER - MAROC

Premier exercice

Série S

Un trapèze

Énoncé



Sur la figure ci-dessus, ABCD est un rectangle et BEC est un triangle rectangle. On donne les longueurs $AB = 2$ et $CE = 1$ et on pose $BE = x$.

1. a) Exprimez l'aire $f(x)$ du trapèze en fonction de x.

   b) Tracez la courbe de f à l'aide de votre calculatrice. Donnez, à 10^{-1} près, la valeur du maximum M de f ainsi que l'abscisse x_M correspondante.

2. **Un algorithme.**
Dans le tableau ci-dessous qui décrit un algorithme, le symbole * représente la multiplication ; **racine** représente la racine carrée ; l'écriture $>=$ représente le symbole de l'inégalité $\geqslant$.

Variables	x, y, p sont des réels ; n est un entier.
Données	x prend la valeur 0, y prend la valeur 1, p prend la valeur 0,01. n prend la valeur 0.

Algorithme	Tant que (0,5*racine($(1-x^2)*(x+4)^2$) $>= y$) faire
	  y prend la valeur 0,5*racine($(1-x^2)*(x+4)^2$)
	  x prend la valeur $x+p$
	  n prend la valeur $n+1$
	fin Tant que

Sortie	Afficher x, y, n

   a) Montrez que l'algorithme se termine

   b) Donnez les valeurs affichées en sortie.

3. Quelques questions plus techniques.

   a) Vérifiez que la dérivée de la fonction g définie pour tout nombre réel x par $g(x) = (x+4)^2$ est $g'(x) = 2(x+4)$.

   b) Étudiez les variations de la fonction u définie pour tout nombre réel x par

$$u(x) = \left(1-x^2\right)(x+4)^2.$$

c) Soit v une fonction définie sur $[0\,;\,1]$ et positive ; soit w la fonction définie par $w(x) = \sqrt{v(x)}$. Expliquez la raison pour laquelle les variations de w sont les mêmes que celles de v.

d) En déduire le tableau de variation de f sur $[0\,;\,1]$.

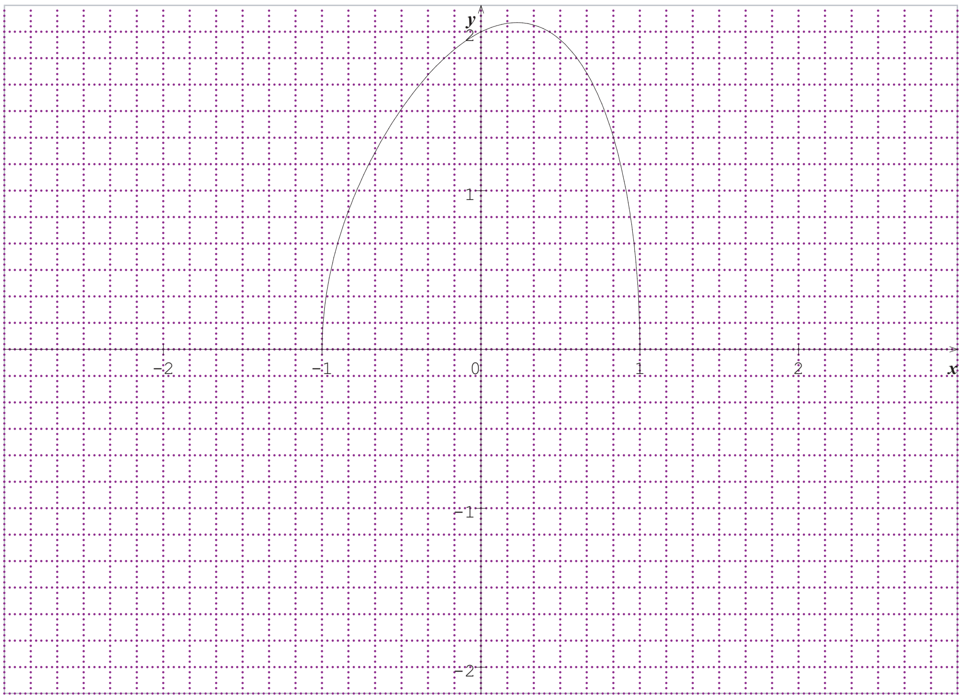
4. Expliquez le lien entre les questions 1, 2 et 3.

Éléments de solution

1. **Aire du trapèze et maximum par méthode graphique**

a) On a $BC^2 = 1 - x^2$ d'où $BC = \sqrt{1-x^2}$ et l'aire du trapèze est donnée par $f(x) = \frac{1}{2}(x + 4)\sqrt{1-x^2}$.

a) La représentation graphique est donnée par :



Le maximum est obtenu pour $x = 0,225$ et vaut 2,06 environ.

2. **Algorithme**

a) Au démarrage, on reconnaît f. Comme $y = -1$, le « tant que » s'initialise bien. Se termine-t-il ? A chaque itération, y vaut $f(x)$ et x augmente de $p = 0,01$ et ce tant que le nouvel y est supérieur à l'ancien, soit lorsque f est croissante : l'algorithme se termine lorsque le maximum est atteint.

b) Les valeurs affichées sont $x = 0,23$ et $y = 2.05830472963$ et $n = 23$.

3. **Quelques questions plus techniques**

a) Si $g(x) = (x+4)^2 = x^2 + 8x + 16$ alors $g' = 2x + 8 = 2(x+4)$.

b) On étudie les variations de la fonction u yelle que $u(x) = \left(1-x^2\right)(x+4)^2$
On a $u'(x) = -2x(x+4)^2 + \left(1-x^2\right)2(x+4) = 2(x+4)\left[-x(x+4) + \left(1-x^2\right)\right]$
D'où $u'(x) = 2(x+4)(-2x^2 - 4x + 1)$.

La dérivée s'annule pour $x_1 = \dfrac{4+2\sqrt{6}}{-4} = -1$ et pour $x_2 = \dfrac{4-2\sqrt{6}}{-4} \approx 0,225$. Le signe de u' est simple à étudier.

c) Variations liées.
La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est croissante sur $[0; +\infty]$ donc
$a \leqslant b \Rightarrow v(a) \leqslant v(b) \Rightarrow \sqrt{v(a)} \leqslant \sqrt{v(b)}$ puisque $v(a)$ et $v(b)$ sont positifs ;

d) Variations de f : simple

4. Lien entre les questions : toujours un maximum selon trois méthodes graphique, algorithmique et analytique.

RETOUR AU SOMMAIRE

MONTPELLIER - MAROC

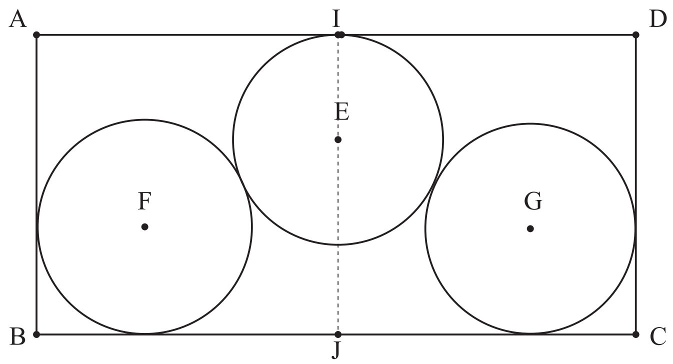
Deuxième exercice

Série S

Trois cercles

Énoncé

Le rectangle ABCD a pour longueur 4 cm et pour largeur 2 cm. I et J sont les milieux de [AD] et [BC]. Dans ce rectangle sont inscrits trois cercles de même rayon R, tangents entre eux et tangents aux côtés du rectangle. Calculez la valeur de R en cm.



Éléments de solution

On choisit le repère de sorte que B en soit l'origine, l'axe des x soit BC, l'axe des y soit BA en respectant les unités données.
On a alors B (0, 0), J (2, 0), C (4, 0), D (4,2), A(0, 2), I (2, 2).
De plus, si on pose F(R, R) alors E$(2, 2-R)$ et G$(4-R, R)$.
Une condition nécessaire et suffisante pour que les trois cercles soient tangents deux à deux est que : $FE = 2R$ soit que $FE^2 = 4R^2$. On aboutit à l'équation :

$$(2-R)^2 + (2-2R)^2 = 4R^2.$$

$$\text{Soit : } R^2 - 12R + 8 = 0$$

On a $\Delta = 112$ d'où deux solutions : $R_1 = \dfrac{12-\sqrt{112}}{2} \approx 0,708$ et $R_2 = \dfrac{12+\sqrt{112}}{2} = 11,29 > 2$ qui ne convient donc pas.
Le rayon du cercle mesure environ 0,708.

RETOUR AU SOMMAIRE

MONTPELLIER - MAROC

Troisième exercice

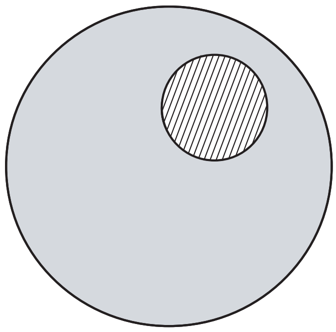
Séries autres que S

Le gâteau troué

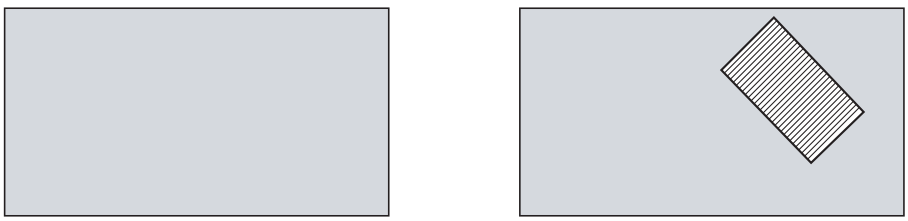
Énoncé

On justifiera clairement les solutions trouvées...

1. Trois personnes veulent se partager un gâteau en forme de disque. La première personne se taille une part circulaire comme elle l'entend et laisse un trou (zone hachurée) comme indiqué sur le dessin.
   Les deux personnes restantes veulent se partager ce qui reste du gâteau en deux parties égales. Comment réaliser cette construction avec une règle et un couteau (qui sert de crayon) ?



2. On reprend la même question avec un gâteau rectangulaire comme à gauche du dessin ci-dessous. La première personne se taille une part rectangulaire comme elle l'entend et laisse un trou (zone hachurée) comme indiqué à droite du dessin. Les deux personnes restantes veulent se partager ce qui reste du gâteau en deux parties égales. Comment réaliser cette construction avec une règle et un couteau (qui sert de crayon) ?

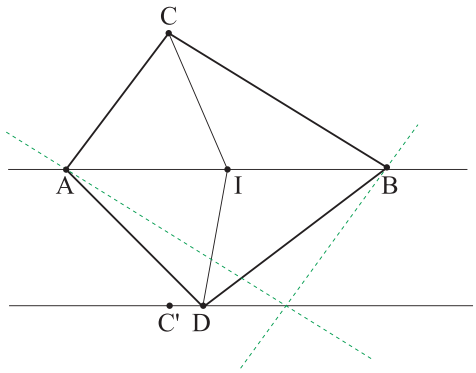


3. Généralisation : pour quel type de quadrilatères la solution de la seconde question se généralise-t-elle immédiatement ?
4. Mon pâtissier m'a vendu un gâteau qui a la forme d'un quadrilatère sans axe de symétrie, et qui n'est pas un trapèze.
   a) Nous sommes quatre à le manger et il m'a dit que je pouvais facilement le découper en quatre parts triangulaires de même aire. Saurez-vous dessiner un tel gâteau ?
   b) Même question en demandant que les parts soient vraiment des triangles superposables.

Éléments de solution

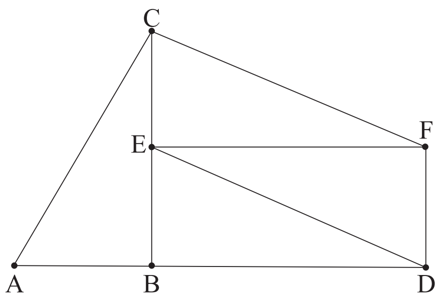
1. On construit le centre du grand cercle, celui du petit cercle, on trace la droite passant par ces deux points. On montre que l'on répond à la question en utilisant la symétrie par rapport à cette droite.

   Errata : L'énoncé sous entendait construction à la règle... Elle est malheureusement impossible comme le démontra David Hilbert. Un copier coller et un manque de réflexion tous deux malencontreux nous ont fait faire cette erreur.
2. On fait de même qu'à la question précédente. L'important est de démontrer que toute droite passant par le centre d'un rectangle partage ce rectangle en deux parties de même aire.
3. Cette solution fonctionne pour les parallélogrammes.
4. a) L'exhibition d'un tel quadrilatère suffira.

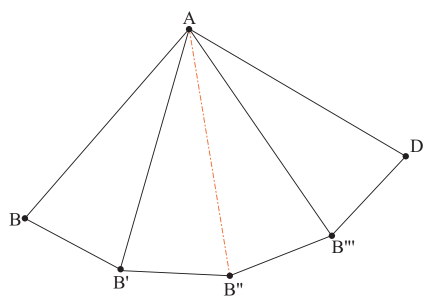


On choisit deux points A et B, on construit I le milieu de [AB] et un point C qui n'est pas sur (AB). Les triangles ACI et CIB ont donc la même aire. On construit C' le symétrique de C par rapport à la droite (AB) et la parallèle (d) à (AB) passant par C' ; on a alors d(C', (AB)) = d(C,(AB)) et donc pour tout point M de (d) l'égalité des aires des triangles AMB et ACB. On choisit un point D sur (d) de sorte que (DB) ne soit pas parallèle à (AC), que (DA) ne soit pas parallèle à (BC) et que D ne soit pas le projeté de I sur (d). Cette dernière condition assure que le quadrilatère ACBD n'est pas symétrique par rapport à (CD). On vérifie que les aires des quatre triangles ACI, CIB, BID et DIC sont égales (même base et même hauteur).

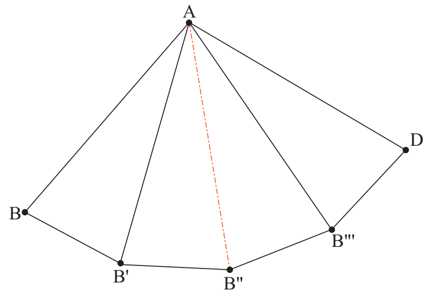
b) Avec des triangles superposables, l'exhibition d'une solution suffira également. Ci-dessous, les triangles sont rectangles et ont pour côtés a pour AB et $2a$ pour BC.



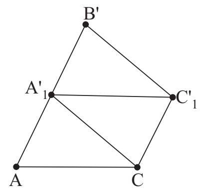
Pourquoi avoir mis dans l'énoncé pas d'axe de symétrie : pour éviter la solution que nous pensions évidente suivante :



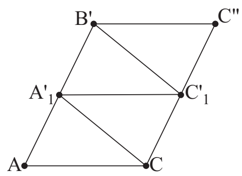
Raisonnement possible : à partir de trois triangles superposables on a la figure suivante :



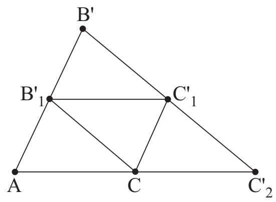
Raisonnement possible : à partir de trois triangles superposables on a la figure suivante :



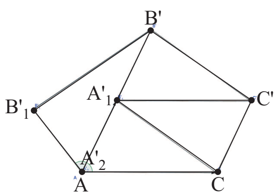
On a alors deux possibilités pour poser le quatrième
Soit



Qui donne un parallélogramme donc un trapèze donc faux
Soit



Qui donne un triangle donc faux !
On cherche alors une configuration du type suivant qui permette d'avoir un quadrilatère.



RETOUR AU SOMMAIRE

MONTPELLIER - MAROC

Quatrième exercice

Séries autres que S

Embouteillages

Énoncé

Les embouteillages sur une route sont en général dus à des différences de vitesse entre les véhicules et au nombre de véhicules circulant.
On se place sur une route avec une seule file de véhicules qui se suivent. Les vitesses sont exprimées en kilomètres par heure (km.h^{-1}) ou en mètres par seconde (m.s^{-1}), les distances en kilomètres (km) ou en mètres (m) suivant les cas.

1. **Distance d'arrêt.**
Lorsqu'un véhicule freine sur route sèche, il lui faut une certaine distance pour s'arrêter. Cette distance d'arrêt, exprimée en m, est proportionnelle au carré de sa vitesse v, exprimée en m.s^{-1}, c'est-à-dire que : $d_A = C \times v^2$ où C désigne un nombre réel.
   a) Compléter le tableau suivant :

v en km/h	v en m/s	d_A (en m)	d_A/v^2
50	13,9	12,1	0,0627
90		39,1	
100		48,3	
130		81	
150		108,4	
170		139,9	

(*Source : Gendarmerie Nationale*)

   b) Donner une valeur moyenne de C à 10^{-2} près.

2. **Distance de réaction**
Un conducteur ne réagit en général pas tout de suite à l'allumage des feux « STOP » du conducteur qui le précède : le temps de réaction noté T dépend de l'âge du conducteur, mais on considère qu'une durée moyenne d'une seconde est raisonnable.
Justifiez que la distance parcourue, exprimée en m, pendant cette seconde est :

$$d_R = v \text{ si } v\text{est exprimée en m.s}^{-1}$$

$$d_R = \frac{10v}{36} \approx 0,277v \text{ si } v \text{ est exprimée en km.h}^{-1}.$$

3. **Les véhicules**
On considère que, sur la route, il y a 80 % de véhicules légers d'une longueur moyenne de 4,50 m et 20 % de camions d'une longueur moyenne de 12 m.
Quelle est la longueur moyenne L d'un véhicule ?

4. **Le débit routier**
Quand on fait couler de l'eau d'un robinet, le débit D du robinet est la quantité de liquide écoulée par unité de temps ; le débit est donc lié à la vitesse d'écoulement.
On désire exprimer le débit routier en tenant compte des éléments précédents ; pour cela, on suppose

que les véhicules circulant sur la route forment un train continu roulant à la vitesse v, exprimée en m.s-1 et que les conducteurs respectent exactement les distances d'arrêt et de réaction avec le véhicule précédent.
On veut exprimer le débit routier en nombre de véhicules par heure.

a) Montrer que, si la vitesse est exprimée en m.s-1, le débit est donné par la formule

$$D(v) = \frac{3600v}{0,06v^2 + v + 6}$$

b) Étudier les variations de D en fonction de v.

c) Montrer qu'il existe une vitesse $v_{\max}$ pour laquelle le débit est maximum ; préciser ce débit maximum.
On donnera les résultats en m.s-1 puis en km.h-1 pour la vitesse et en véhicules par heure pour le débit.

5. **Sur autoroute**
Vous souhaitez réguler le trafic sur l'A6 entre Valence et Montélimar dans la vallée du Rhône un jour de départ en vacances. Vous savez que le débit maximal de cette portion d'autoroute à trois voies est de 3900 véhicules par heure.
Quelle vitesse conseillée allez-vous afficher sur les panneaux d'information à destination des conducteurs ?

Éléments de solution

1. **Distance d'arrêt**

a) Le tableau complété :

v en km/h	v en m/s	d_A (en m)	d_A/v^2
50	13,9	12,1	0,0627
90	24,93	39,1	0,0629
100	27,7	48,3	0,0629
130	36,01	81	0,0625
150	41,55	108,4	0,0628
170	47,09	139,9	0,0631

Les valeurs de la dernière colonne sont ici arrondies à 10^{-4}.

b) Valeur moyenne de C : 0,0628 soit à 10^{-2} près 0,06.

2. **Distance de réaction**
Si v est exprimée en m.s-1, en une seconde le conducteur a parcouru une distance de v m.
Si v est exprimée en km.h-1, en une heure, soit 3600 secondes, il parcourt v km, soit $1000v$ m.
En une seconde, il aura donc parcouru $\frac{1000v}{3600} = \frac{10v}{36} \approx 0,277v$ m.

3. **Les véhicules**
La longueur moyenne d'un véhicule est : $0,8 \times 4,5 + 0,2 \times 12 = 6$ m.

4. **Débit routier**

a) On montre la formule $D(v) = \dfrac{3600v}{0,06v^2 + v + 6}$ en expliquant que le débit, exprimé en nombre de véhicules par seconde, est lié à la vitesse et la distance (totale, somme de celle du véhicule, de la distance d'arrêt et de la distance de réaction) : $D \times d = v$. Comme ce qui nous intéresse est un nombre de véhicules par heure, on multiplie par 3600.

b) On a

$$D'(v) = \frac{3600\left(0,06v^2 + v + 6\right) - 3600v(0,12v + 1)}{\left(0,06v^2 + v + 6\right)^2} = \frac{21600 - 216v^2}{\left(0,06v^2 + v + 6\right)^2}.$$

Soit $D(v) = \dfrac{216\left(100 - v^2\right)}{\left(0,06v^2 + v + 6\right)^2}$.

Le tableau de variations de D est

v	0		10		$+\infty$
sgn $D'(v)$		+	0	-	
$D(v)$		$\nearrow$	1636,6	$\searrow$	

c) Il existe une vitesse $v_{\max}$ pour laquelle le débit est maximum ; cette vitesse est 10 m.s^{-1}, soit 36 km.h^{-1}, et le débit est alors de 1636 véhicules par heure.

5. **Sur l 'autoroute**
Le débit maximal de cette portion d'autoroute à trois voies est de 3900 véhicules par heure, donc sur une voie de 1300 véhicules par heure. On résout l'équation : $D(v) = 1300$.
Soit $3600v = 78v^2 + 1300v + 7800$ c'est-à-dire $78v^2 - 2300v + 7800 = 0$.
Dont les solutions sont : 25,577 et 3,910 exprimées en m.s^{-1} ce qui correspond à 92,077 et 14,072 en km.h^{-1}. On peut donc conseiller une vitesse de 90 km.h^{-1}.

RETOUR AU SOMMAIRE

NANCY-METZ

Premier exercice

Toutes séries

Le magicien gagnera très probablement

Énoncé

Un magicien propose à un spectateur de jouer une partie de cartes.
La règle du jeu est simple : On utilise un jeu dont la moitié des cartes sont rouges et l'autre moitié des cartes sont noires. Le spectateur choisit une combinaison de couleurs qu'il est possible de faire avec trois cartes différentes ; par exemple, la combinaison rouge-noir-rouge. Le magicien choisit à son tour une combinaison, par exemple rouge-rouge-noir.
Le jeu est mélangé par le spectateur, le magicien coupe le jeu et le donne au spectateur faces vers le bas. Le spectateur retourne successivement les cartes sur la table. Dès qu'apparaît une suite de trois cartes correspondant à la combinaison choisie par l'un des deux joueurs, celui-ci gagne la partie.
Par exemple :
Le spectateur choisit la combinaison rouge-noir-rouge et le magicien choisit la combinaison rouge-rouge-noir.
Le spectateur retourne les cartes successivement : rouge, noir, noir, rouge, rouge, noir.
C'est donc le magicien qui remporte la partie.
Le truc du magicien :
Il laisse son adversaire choisir le premier.
Le choix du magicien est alors le suivant : la première carte de la combinaison du magicien est de la couleur opposée à celle de la deuxième carte de la combinaison du spectateur. Les deux cartes suivantes de la combinaison du magicien sont de la même couleur que les deux premières cartes de son adversaire.
Reprenons l'exemple précédent.
Le spectateur a choisi la combinaison : rouge-noir-rouge. La première carte de la combinaison du magicien doit être de la couleur opposée à celle de la deuxième de son adversaire : celle-ci étant noire, celle du magicien sera rouge. Puis les deux cartes suivantes doivent être de la même couleur que la première et la deuxième du spectateur, donc les deux cartes suivantes sont rouge et noire. Finalement la combinaison du magicien est : rouge-rouge-noir.

Nous allons démontrer dans quelques cas particuliers que la probabilité de sortie de la combinaison choisie par le magicien est plus grande que la probabilité de sortie de celle du spectateur.
On considèrera que le nombre de cartes est suffisamment important pour que la probabilité de tirer une carte d'une couleur donnée (noire ou rouge) soit égale à $\frac{1}{2}$ quel que soit le rang du tirage.

1. **Premier cas** : Le spectateur choisit la combinaison : rouge-rouge-rouge, le magicien choisit donc : noir-rouge-rouge.
   (a) Vérifier que lors du tirage des trois premières cartes, le spectateur a la même probabilité de gagner que le magicien.
   (b) Montrer que dans ce cas particulier de la combinaison rouge, rouge, rouge, le spectateur ne peut gagner que lors du tirage des 3 premières cartes.
   (c) Calculer à présent la probabilité de chacun de gagner au cours du tirage des 4 premières cartes.
2. **Deuxième cas** : Le spectateur choisit la combinaison : rouge-noir-rouge, le magicien choisit donc : rouge-rouge-noir.

(a) Calculer les probabilités respectives de gagner du magicien et du spectateur en se limitant à une séquence d'au plus 4 cartes.
Quelle est la probabilité qu'aucun des deux protagonistes ne gagne ?

(b) Proposer un algorithme simulant le jeu et indiquant le vainqueur (ou match nul si aucun des deux ne gagne) en se limitant à 5 cartes au maximum.

(c) Indiquer quelles lignes ajouter à l'algorithme précédent pour avoir la possibilité de simuler n tirages de 5 cartes, et d'indiquer le nombre de victoires de chacun des joueurs au cours des n tirages.

(d) On a fait tourner quatre fois un tel algorithme avec $n = 40\,000$. On a obtenu les résultats suivants :

Simulation numéro	1	2	3	4
nombre de victoires du magicien	13 708	13 638	13 880	13 563
nombre de victoires du spectateur	8 805	8 960	8 720	8 741

Estimer les probabilités de gain du magicien et du spectateur.

(e) Lors du tirage des cinq premières cartes, calculer les probabilités respectives de gagner du magicien et du spectateur.

Remarque (à ne pas prendre en compte pour résoudre l'exercice)

Cet exercice présente une version simplifiée du jeu. Dans la version complète, le magicien et le joueur continuent à tirer les cartes jusqu'à épuisement du paquet en comptant les suites gagnantes pour chacun d'eux. Celui qui a remporté le plus de suites gagne la partie.

Éléments de solution

1. a)

Carte 1	Carte 2	Carte 3	Vainqueur
R	R	R	Spectateur
R	R	N	
R	N	R	
R	N	N	
N	R	R	Magicien
N	R	N	
N	N	R	
N	N	N	

Le magicien et le spectateur ont chacun une probabilité de $1/8$ de gagner

b) S'il n'y a pas eu trois rouges lors des trois premiers tirages, c'est qu'il y a eu au moins une noire. Dès lors, le spectateur ne peut plus gagner puisque la séquence noire, rouge, rouge fait gagner le magicien.

c)

Carte 1	Carte 2	Carte 3	Carte 4	Vainqueur
R	R	R	R	Spectateur
R	R	N	R	
R	N	R	R	Magicien
R	N	N	R	
N	R	R	R	Magicien
N	R	N	R	
N	N	R	R	Magicien
N	N	N	R	

Carte 1	Carte 2	Carte 3	Carte 4	Vainqueur
R	R	R	N	Spectateur
R	R	N	N	
R	N	R	N	
R	N	N	N	
N	R	R	N	Magicien
N	R	N	N	
N	N	R	N	
N	N	N	N	

$P(S) = \dfrac{2}{16 = \dfrac{1}{8}}$ $\qquad P(M) = \dfrac{4}{16} = \dfrac{1}{4}$

2. a)

Carte 1	Carte 2	Carte 3	Carte 4	Vainqueur
R	R	R	R	
R	R	N	R	Magicien
R	N	R	R	Spectateur
R	N	N	R	
N	R	R	R	
N	R	N	R	Spectateur
N	N	R	R	
N	N	N	R	

Carte 1	Carte 2	Carte 3	Carte 4	Vainqueur
R	R	R	N	Magicien
R	R	N	N	Magicien
R	N	R	N	Spectateur
R	N	N	N	
N	R	R	N	Magicien
N	R	N	N	
N	N	R	N	
N	N	N	N	

$p(S) = \dfrac{3}{16} \qquad P(M) = \dfrac{4}{16} = \dfrac{1}{4}$

La probabilité qu'aucun des deux n'ait fait de pli est donc de $\dfrac{9}{16}$.

b) variables : p, U, V, W, i, F (U, V, W représente la série de trois cartes venant d'être tirée, (F=1 signifie que le jeu est fini, c=1 signifie qu'un des deux joueurs a gagné)
algorithme :
affecter à p un nombre aléatoire entre 0 et 1 (p prend la valeur aléa())
Si p<0,5 alors U prend la valeur 0 (R)
    sinon U prend la valeur 1 (N)

affecter à p un nombre aléatoire entre 0 et 1 (p prend la valeur aléa())
Si p<0,5 alors V prend la valeur 0 (R)
    sinon V prend la valeur 1 (N)

affecter à p un nombre aléatoire entre 0 et 1 (p prend la valeur aléa())
Si p<0,5 alors W prend la valeur 0 (R)
    sinon W prend la valeur 1 (N)

i prend la valeur 3
F prend la valeur 0
Tant que F $\neq$ 1
Si U=0 alors
    Si V= 0 alors
        Si W=1 alors
        F prend la valeur 1
        c prend la valeur 1
        afficher : "le magicien a gagné"

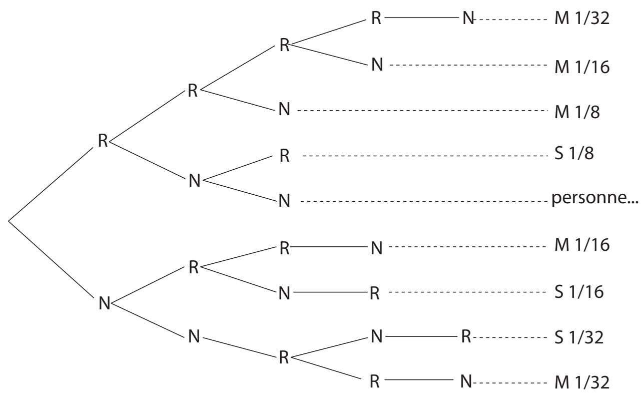
Sinon Si W=0 alors
F prend la valeur 1
c prend la valeur 1
afficher "le spectateur a gagné"
U prend la valeur V
V prend la valeur W
affecter à p un nombre aléatoire entre 0 et 1 (p prend la valeur aléa())
Si p<0,5 alors W prend la valeur 0 (R)
sinon W prend la valeur 1 (N)
i prend la valeur i+1
Si i=6
F prend la valeur 1
Fin tant que
Si c $\neq$ 1
afficher "il y a match nul"

c) Variablesà ajouter : G (compte le nombre de victoires du magicien)
A (compte le nombre de victoires du spectateur)
n (compte le nombre de parties)

Algo :
Lire n
G prend la valeur 0
A prend la valeur 0
Pour k allant de 1 à n
algorithme de la question précédente en ajoutant :
dans le cas où le magicien gagne : G prend la valeur G+1
dans le cas où le spectateur gagne : A prend la valeur A+1
Fin tant que
Fin pour
Afficher : "j'ai gagné dans"
Afficher : G
Afficher : "parties sur "
Afficher n

d) On peut estimer la probabilité de gagner du magicien à : 0,342 (obtenu en faisant la moyenne de la fréquence de victoires sur les 160000 parties)
De même la probabilité de gagner du spectateur peut être estimée à : 0,220

e)



$$P(S) = \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} = \frac{7}{32} = 0,21875 \text{ soit } 21{,}9\%$$

$$P(m) = \frac{1}{8} + \frac{2}{16} + \frac{3}{32} = \frac{11}{32} \text{ soit } 34{,}4\%.$$

Ces résultats théoriques corroborent les résultats obtenus avec la simulation de 40 000 parties.

RETOUR AU SOMMAIRE

NANCY-METZ

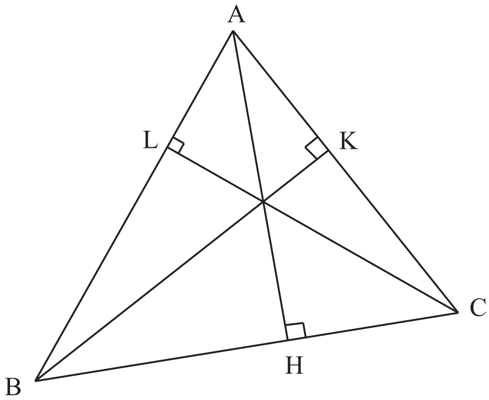
Deuxième exercice

Toutes séries

Triangles entiers à hauteurs entières

Énoncé

Définition :
On appelle **triangle entier à hauteurs entières** tout triangle dont les longueurs des côtés $a = BC, b = AC$ et $c = AB$ sont des nombres entiers naturels et dont les longueurs des hauteurs ($h_1 = AH, h_2 = BK$ et $h_3 = CL$) sont des nombres entiers.



On rappelle que :

- un triangle est rectangle si et seulement si le carré de la longueur du plus grand côté est la somme des carrés des deux autres côtés (relation de Pythagore)
- L'aire d'un triangle est la moitié du produit de la longueur d'un des côtés par la longueur de la hauteur issue du sommet opposé à ce côté.

1. Démontrer les égalités : $a \times h_1 = b \times h_2 = c \times h_3$.
2. **Triangle rectangle**
   On considère un triangle ABC pour lequel on a les longueurs $a = 4k, b = 5k$ et $c = 3k$ où k est un nombre entier naturel non nul.
   a) Montrer que ABC est un triangle rectangle.
   b) Donner une condition nécessaire et suffisante sur k pour que les longueurs des hauteurs du triangle ABC soient des nombres entiers naturels.
3. **Triangles non rectangles**
   On considère un triangle ABC pour lequel les longueurs $a = 13k, b = 15k$ et $c = 14k$ où k est un nombre entier naturel non nul.
   a) Montrer que ABC n'est pas un triangle rectangle.
   b) Montrer que h_3 est un nombre entier naturel.
   c) Donner une condition nécessaire et suffisante sur k pour que les longueurs des autres hauteurs du triangle ABC soient des nombres entiers naturels.
4. **Triangle équilatéral**
   Montrer qu'il n'existe pas de triangle équilatéral entier à hauteurs entières.

Éléments de solution

1. Utilisation de la formule calculant l'aire du triangle suivant les trois choix possibles du couple (base, hauteur)
2. **Triangle rectangle**
   a) Réciproque du théorème de Pythagore : le triangle est rectangle en B.
   b) AB, AC, BC sont des entiers, de plus $h_1 = AB$ et $h_3 = BC$ sont des entiers.
   Il faut et il suffit donc que h_2 soit un entier. D'après la question 1, $b \times h_2 = a \times h_1$ donc $5k \times h_2 = 3k \times 4k$. D'où $h_2 = \dfrac{12k}{5}$.
   Il faut et il suffit donc que k soit un multiple de 5.
3. **Triangle non rectangle**
   a) Contraposée du théorème de Pythagore
   b) On applique le théorème de Pythagore dans les deux triangles ALC et BLC, on en déduit les relations :
   $CL^2 + BL^2 = 169k^2$ et $AL^2 + CL^2 = 225k^2$, d'où, par différence :
   $(AL - BL)(AL + BL) = 56k^2$ or $AL + BL = AB = 14k$ donc $AL - BL = 4k$
   On en déduit que $BL = 5k$. Donc $CL^2 = 169k^2 - 25k^2 = 144k^2$.
   Donc $CL = 12k$ et CL est entier.
   c) On a donc, avec les relations de la question 1 :
   $h_1 \times 13k = 14k \times 12k$ d'où $h_1 = \dfrac{168k}{13}$
   et
   $h_2 \times 15k = 12k \times 14k$ d'où $h_2 = \dfrac{42k}{5}$.
   Les trois hauteurs sont entières si et seulement si k est un multiple de 13 et de 5, donc de 65.
4. **Triangle équilatéral**
   Les trois hauteurs sont dans un rapport irrationnel avec la longueur des côtés. Les nombres a et h_1 ne peuvent donc pas être simultanément entiers.

RETOUR AU SOMMAIRE

NANTES-AEFE Afrique

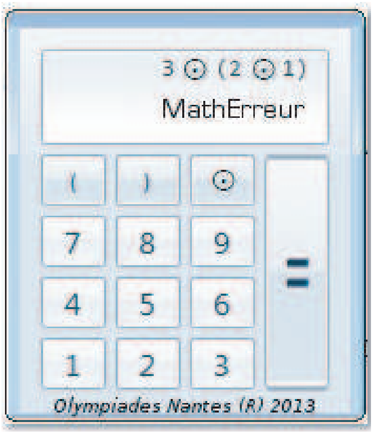
Premier exercice

Série S

Une calculatrice spéciale

Énoncé

Une calculatrice un peu spéciale ne comporte que 13 touches :
- les 9 chiffres de 1 à 9 ;
- les deux parenthèses (et) ;
- une touche $=$;
- une touche opératoire $\odot$ qui vérifie pour tous nombres a et b : $a \odot b = 2 - \dfrac{a}{b}$.



Exemple : en tapant $2 \odot 4$, la calculatrice affiche $\dfrac{3}{2}$ car $2 \odot 4 = 2 - \dfrac{2}{4} = \dfrac{3}{2}$.

1. Calculer les nombres suivants :

$$a \odot a, \qquad a \odot 1, \qquad 1 \odot a, \qquad 2 \odot 1, \qquad 2 \odot (3 \odot 3).$$

2. La séquence $3 \odot (2 \odot 1)$ donne « MathErreur ». Pourquoi ?
   Peut-on retrouver le même problème sans utiliser le 1 ? Si oui, donner un exemple.
3. Dans cette question, a, b et c représentent des chiffres de 1 à 9 du clavier de cette calculatrice. Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse et justifier.
   a) l existe a et b distincts tels que $a \odot b = b \odot a$.
   b) Pour tous a, b et c, on a : $(a \odot b) \odot c = a \odot (b \odot c)$.
4. On tape la séquence $a \odot b$ en prenant au hasard deux chiffres de la calculatrice.
   a) Déterminer la valeur minimale de $a \odot b$, puis donner la probabilité d'obtenir cette valeur.
   b) Reprendre la question 4.a) pour la valeur maximale.
   c) Quelle est la probabilité que l'on obtienne le résultat $\dfrac{5}{3}$?
5. On tape la séquence $(a \odot b) \odot c$ en prenant au hasard trois chiffres de la calculatrice.
   a) Déterminer la valeur minimale de $(a \odot b) \odot c$, puis donner la probabilité d'obtenir cette valeur.
   b) Reprendre la question 5.a) pour la valeur maximale.
   c) Quelle est la probabilité que l'on obtienne le résultat 2 ?

Éléments de solution

1. $a \odot a = 2 - \dfrac{a}{a} = 2 - 1 = 1.$

   $a \odot 1 = 2 - \dfrac{a}{1} = 2 - a.$

   $1 \odot a = 2 - \dfrac{1}{a}.$

   $2 \odot 1 = 2 - \dfrac{2}{1} = 0.$

   $2 \odot (3 \odot 3) = 2 \odot 1 = 0.$

2. La séquence $3 \odot (2 \odot 1)$ donne « MathErreur » car, $2 \odot 1 = 2 - \dfrac{2}{0} = 0$, et on ne peut pas diviser par 0.
   Par exemple : $3 \odot (4 \odot 2)$ et de façon générale : $a \odot (2b \odot b)$ donne « MathErreur ».

3. a) $a \odot b = b \odot a$ lorsque $2 - \dfrac{a}{b} = 2 - \dfrac{b}{a}$.

   $\dfrac{a}{b} = \dfrac{b}{a}$ si et seulement si $a^2 = b^2$.
   Comme a et b sont positifs, $a = b$.
   La proposition est fausse.

   b) $2 \odot (3 \odot 3) = 0$ et $(2 \odot 3) \odot 3 = \left(2 - \dfrac{2}{3}\right) \odot 3 = \dfrac{4}{3} \odot 3 = 2 - \dfrac{\frac{4}{3}}{3} = 2 - \dfrac{4}{9} = \dfrac{14}{9}$.

   La proposition est fausse.

4. a et b sont deux chiffres de 1 à 9
   a) La valeur minimale de $a \odot b$ est atteinte quand $\dfrac{a}{b}$ est maximale, d'où, $a = 9$ et $b = 1$;

   $a \odot b = 2 - \dfrac{9}{1} = -7.$

   $P(a \odot b)_{\text{minimale}} = \dfrac{1}{81}$. Un seul couple (a, b) favorable pour 9×9 couples possibles.

   b) La valeur maximale de $a \odot b$ est atteinte quand $\dfrac{a}{b}$ est minimale, d'où, $a = 1$ et $b = 9$;

   $a \odot b = 2 - \dfrac{1}{9} = \dfrac{17}{9}.$

   $P(a \odot b)_{\text{ maximale}} = \dfrac{1}{81}$. Un seul couple (a, b) favorable pour 9×9 couples possibles.

   c) La calculatrice affiche $\dfrac{5}{3}$ si et seulement si $2 - \dfrac{a}{b} = \dfrac{5}{3}$ si et seulement si $\dfrac{a}{b} = 2 - \dfrac{5}{3} = \dfrac{1}{3}$.
   Les couples favorables $(1\,;\,3)$; $(2\,;\,6)$ et $(3\,;\,9)$.
   $P\left(a \odot b = \dfrac{5}{3}\right) = \dfrac{3}{81} = \dfrac{1}{27}$.

5. a, b, c sont trois chiffres de 1 à 9.
   a) $(a \odot b) \odot c$ est minimal lorsque $a \odot b$ est maximal (voir 4.b)) et c minimal.
   On a donc : $a \odot b = \dfrac{17}{9}$et $c = 1$.

   La valeur minimale est : $2 - \dfrac{17}{9} = \dfrac{1}{9}$.

   D'après 4.b), $a = 1, b = 9$, d'où, un seul triplet favorable $(1\,;\,9\,;\,1)$ $P((a \odot b) \odot c\text{minimale}) = \dfrac{1}{9^3} = \dfrac{1}{729}$.

   b) $(a \odot b) \odot c$ est maximal lorsque $(a \odot b)$ est minimal (voir 4.a)) et c minimal (puisque $a \odot b$ est négatif).

On a donc : $a \odot b = -7$ et $c = 1$.

La valeur maximale est : $2 - \dfrac{-7}{1} = 9$.

D'après 4.a), $a = 9, b = 1$, d'où, un seul triplet favorable $(9\,;\,1\,;\,1)$.

$P((a \odot b) \odot c \text{ maximale}) = \dfrac{1}{729}$.

c) On pose $a \odot b = A$.

la calculatrice affiche 2 si et seulement si $2 - \dfrac{A}{c} = 2$ si et seulement si $\dfrac{A}{c} = 0$.

Quel que soit c, $A = 0$ si et seulement si $2 - \dfrac{a}{b} = 0$, soit : $a = 2b$.

Les couples favorables pour $A = 0$: $(2\,;\,1)\,;\,(4\,;\,2)$, $(6\,;\,3)$, $(8\,;\,4)$.
Comme c peut prendre les 9 valeurs de 1 à 9, on a : 36 triplets favorables.

$P((a \odot b) \odot c = 2) = \dfrac{36}{729} = \dfrac{4}{81}$.

RETOUR AU SOMMAIRE

NANTES-AEFE Afrique

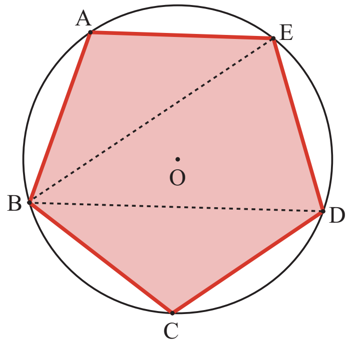
Deuxième exercice

Série S

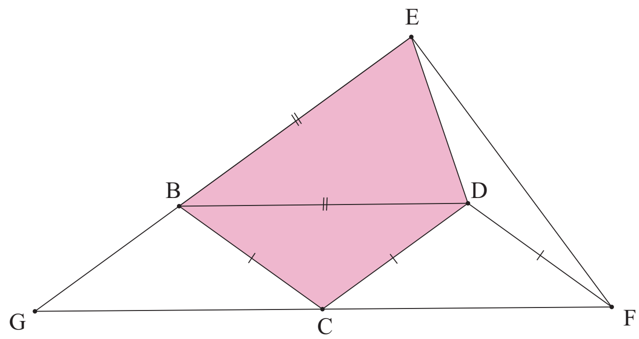
Pentagone, trapèze et triangle

Énoncé

1. ABCDE est un pentagone régulier de centre O.
   Déterminer les mesures en degrés des angles des triangles BCD et BDE.



2. Sur la figure codée ci-dessous, BCDE est le quadrilatère de la figure précédente. On ajoute les points F et G tels que GBC , BCD et CDF sont des triangles isocèles de mêmes dimensions avec un angle de mesure 108°.
   BDE est un triangle isocèle en B.
   Les points G, B et E sont alignés.

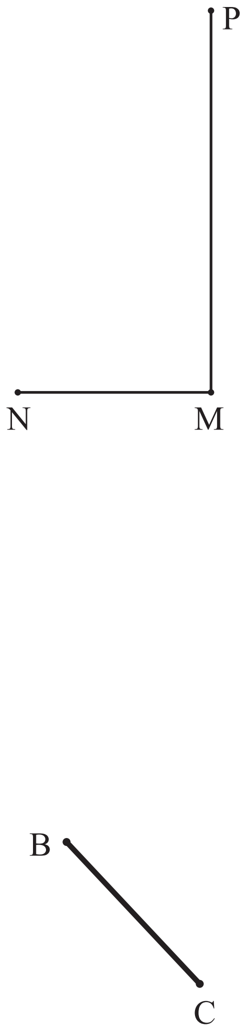


   a) Montrer que les points G, C et F sont alignés.
   b) Montrer que (CD) coupe [EF] en son milieu.
   c) Montrer que le triangle GEF est rectangle en E.
   d) On pose $GB = 1$ et $GC = \varphi$. Montrer que $\varphi^2 = \varphi + 1$, puis que $\varphi^3 = 2\varphi + 1$.
   e) Déterminer la valeur exacte de φ.

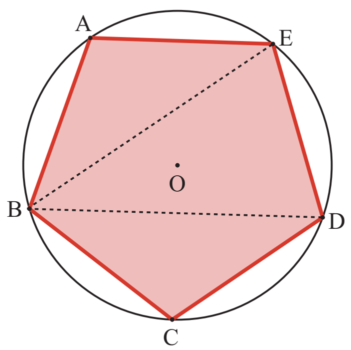
3. Sur la figure en annexe, on donne un segment [MN] de longueur 1 et un segment [MP] de longueur 2 perpendiculaire à [MN].
   En utilisant uniquement une règle non graduée et un compas construire un segment de longueur φ.
4. En utilisant les longueurs 1 et φ, construire sur l'annexe un pentagone régulier dont un des côtés est [BC] en expliquant la construction.

Annexe

On a $MN = BC = 1$



Éléments de solution



1. Soit O le centre du pentagone.

   L'angle au centre $\widehat{\text{COB}} = \dfrac{360}{5} = 72^o$.

   $(\widehat{\text{AOB}} = \widehat{\text{BOC}} = \widehat{\text{COD}} = \widehat{\text{DOE}} = \widehat{\text{EOA}})$.
   Comme le triangle COB est isocèle en O,

   $\widehat{\text{BCO}} = \dfrac{180-72}{2} = 54^o$, et $\widehat{\text{BCD}} = 2\widehat{\text{BCO}} = 180^o$.

   Les angles du pentagone valent 108^o,

   $\widehat{\text{CBD}} = \widehat{\text{CDB}} = \dfrac{180-108}{2} = 36^o$.

   De même, $\widehat{\text{ABE}} = 36^o$, d'où $\widehat{\text{EBD}} = 108^o - 2 \times 16^o = 36^o$.

   (Ou bien : l'angle inscrit $\widehat{\text{EBD}} = \dfrac{1}{2}\widehat{\text{EOD}} = 36^o$).

   $\widehat{\text{BED}} = \widehat{\text{BDE}} = 108 - 36 = 72^o$.

2. a) $\widehat{\mathrm{GCB}} = \widehat{\mathrm{DCF}} = \dfrac{180 - 108}{2} = 36^{\mathrm{o}}$.

   $\widehat{\mathrm{GCF}} = 2 \times 36 + 108 + 180^{\mathrm{o}}$, les points G, C, F sont donc alignés.

   b) G, C, F sont alignés et $GC = CF$, d'où C est le milieu de [AF].

   $\widehat{\mathrm{BCD}} = \widehat{\mathrm{GBC}} = 108^{\mathrm{o}}$, les angles alternes-internes sont égaux, d'où, (GE) et (CD) sont parallèles.
   Dans le triangle GEF la droite (CD) passant par le milieu C de [GF] est parallèle à (GE) coupe [EF] en son milieu.

   c) D'après la question 1., on sait que : $\widehat{\mathrm{DBE}} = 36^{\mathrm{o}}$ et $\widehat{\mathrm{BDE}} = 72^{\mathrm{o}}$.

   $\widehat{\mathrm{CDE}} = 36 + 72 = 108 = \widehat{\mathrm{CDF}}$.
   (CD) est donc la bissectrice de $\widehat{\mathrm{EDF}}$.
   Comme (CD) est bissectrice et médiane issues de D dans le triangle DEF, DEF est isocèle de sommet D.
   (CD) est donc aussi la hauteur relative à [EF], d'où : (CD) $\perp$ (EF).
   (GE) parallèle à (CD) d'où, (GE) $\perp$ (EF).
   GEF rectangle en E.

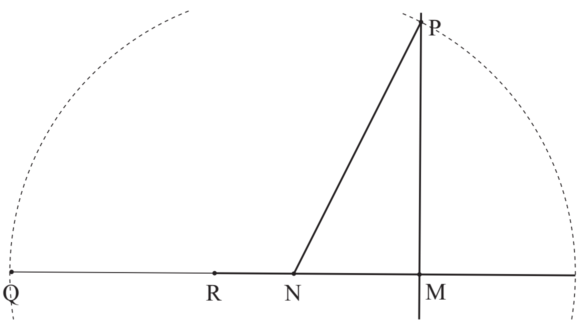
   d) $\cos \widehat{\mathrm{EGF}} = \dfrac{\varphi + 1}{2\varphi}$ dans le triangle GEF, et $\cos \widehat{\mathrm{EGF}} = \dfrac{\varphi}{2}$ dans le demi-triangle GBC, d'où $\dfrac{\varphi + 1}{2\varphi} = \dfrac{\varphi}{2}$ soit : $\varphi^2 = \varphi + 1$.
   En multipliant chaque membre de l'égalité par φ : $\varphi^3 = \varphi^2 + \varphi = \varphi + 1 + \varphi = 2\varphi + 1$.

   e) φ est une solution de l'équation $x^2 = x + 1$.

   Soit $x^2 - x - 1 = 0$.
   $\Delta = 5$ et les solutions sont : $\dfrac{1 - \sqrt{5}}{2}$ et $\dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$.
   Comme $\varphi > 0, \varphi = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

3. **Construction du nombre $\sqrt{5}$**
   On construit le triangle MNP rectangle en M avec $MN = 1$ et $MP = 2.NP = \sqrt{5}$.

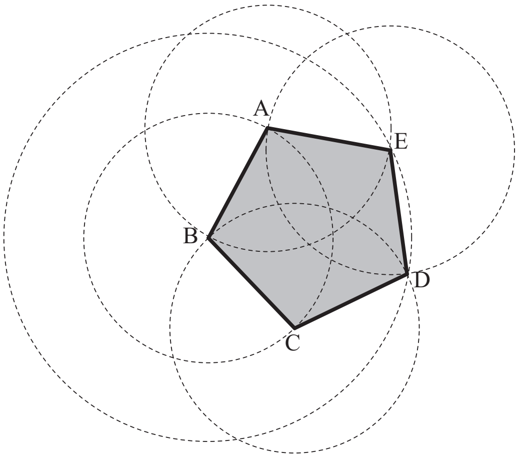
   Construction du nombre φ
   Le cercle de centre N et de rayon $NP = \sqrt{5}$ coupe (MN) en Q tel que $MQ = 1 + \sqrt{5}$.
   Soit R le milieu de [MQ], $MR = RQ = \varphi$.



4. **Construction du pentagone ABCDE**
   On construit le triangle BCD isocèle en C avec $BC = CD = 1$ et $BD = \varphi$ en construisant le cercle c_1 de centre C passant par B et le cercle c_2 de centre B de rayon $MR = \varphi$.
   D est un des points d'intersection de ces deux cercles.

   On construit le triangle BDE isocèle en B avec $BD = BE = \varphi$ et $DE = 1$ en construisant le cercle c_3 de centre D de rayon 1.
   E est un des points d'intersection de c_2 et c_3.

A est à l'intersection des cercles de centre B et de centre E, et de rayon 1.



RETOUR AU SOMMAIRE

NANTES-AEFE Afrique

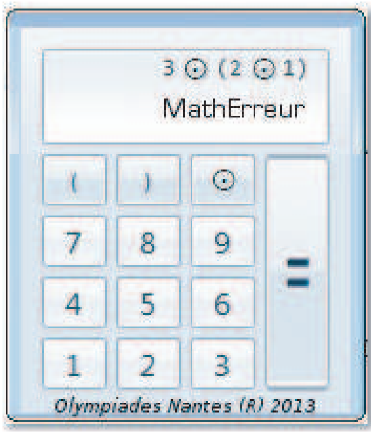
Troisième exercice

Séries autres que S

La calculatrice revisitée

Énoncé

ne calculatrice un peu spéciale ne comporte que 13 touches :
- les 9 chiffres de 1 à 9 ;
- les deux parenthèses (et) ;
- une touche $=$;
- une touche opératoire $\odot$ qui vérifie pour tous nombres a et b : $a \odot b = 2 - \dfrac{a}{b}$.



Exemple : En tapant $2 \odot 4$, la calculatrice affiche $\dfrac{3}{2}$ car $2 \odot 4 = 2 - \dfrac{2}{4} = \dfrac{3}{2}$.

1. a) Calculer les nombres suivants :

$$2 \odot 1, \qquad 2 \odot (3 \odot 3) \qquad 5 \odot 5.$$

   b) La séquence $3 \odot (2 \odot 1)$ donne « MathErreur ». Pourquoi ?
   Peut-on retrouver le même problème sans utiliser le 1 ? Si oui, donner un exemple.

   c) Calculer les nombres suivants :

$$a \odot a, \qquad a \odot 1, \qquad 1 \odot a, .$$

2. Dans cette question, a, b et c représentent des chiffres de 1 à 9 du clavier de cette calculatrice. Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse et justifier.

   a) Il existe a et b distincts tels que $a \odot b = b \odot a$.

   b) Pour tous a, b et c, on a : $(a \odot b) \odot c = a \odot (b \odot c)$.

3. On tape la séquence $a \odot b$ en prenant au hasard deux chiffres de la calculatrice.

   a) Déterminer la valeur minimale de $a \odot b$, puis donner la probabilité d'obtenir cette valeur.

   b) Quelle est la probabilité que l'on obtienne le résultat $\dfrac{5}{3}$?

4. Calculer $(a \odot 1) \odot 1$ et $(a \odot 2) \odot 1$.

   Trouver alors une séquence opératoire qui permette d'obtenir $\dfrac{a}{b}$.

Éléments de solution

1. a) $2 \odot 1 = 2 - \dfrac{2}{1} = 0$

   $2 \odot (3 \odot 3) = 3 \odot 1 = 0.$

   $5 \odot 5 = 2 - \dfrac{5}{5} = 1.$

   b) La séquence $3 \odot (2 \odot 1)$ donne « Matherreur » car $2 \odot 1 = 2 - \dfrac{2}{1} = 0$ et on ne peut pas diviser par 0.
   Par exemple $3 \odot (4 \odot 2)$ et de façon plus gégérale $a \odot (2b \odot b)$ donne « Matherreur ».

2. a) $a \odot b = b \odot a$ lorsque $2 - \dfrac{a}{b} = 2 - \dfrac{b}{a}$.

   $\dfrac{a}{b} = \dfrac{b}{a}$ si et seulement si $a^2 = b^2$.
   Comme a et b sont positifs, $a = b$.
   La proposition est fausse.

   b) $2 \odot (3 \odot 3) = 0$ et $(2 \odot 3) \odot 3 = \left(2 - \dfrac{2}{3}\right) \odot 3 = \dfrac{4}{3} \odot 3 = 2 - \dfrac{\frac{4}{3}}{3} = 2 - \dfrac{4}{9} = \dfrac{14}{9}$.
   La proposition est fausse.

3. a et b sont deux chiffres de 1 à 9

   a) La valeur minimale de $a \odot b$ est atteinte quend $\dfrac{a}{b}$ est maximale, d'où $a = 9$ et $b = 1$; $a \odot b = 2 - \dfrac{9}{1} = -7$.
   $P(a \odot b \text{ minimale}) = \dfrac{1}{81}$. Un seul couple (a, b) favorable pour $9 \times 9)$ couples possibles.

   b) La calculatrice affiche $\dfrac{5}{3}$ si et seulement si $2 - \dfrac{a}{b} = \dfrac{5}{3}$ ei et seulement si $\dfrac{a}{b} = 2 - \dfrac{5}{3} = \dfrac{1}{3}$.
   Les couples favorables $(1\,;3)$, $(2\,;6)$, et $(3\,;9)$.
   $P\left(a \odot b = \dfrac{5}{3}\right) = \dfrac{3}{81} = \dfrac{1}{27}$

4. $a \odot 1 = 2 - \dfrac{a}{1} = 2 - a$

   $(a \odot 1) \odot 1 = 2 - \dfrac{2-a}{1} = a$

   $a \odot 2 = 2 - \dfrac{a}{2}$.

   $(a \odot 2) \odot 1 = 2 - \dfrac{2 - \frac{a}{2}}{1} = \dfrac{a}{2}$.

   $(a \odot b) \odot 1 = \left(2 - \dfrac{a}{b}\right) \odot 1 = 2 - \left(2 - \dfrac{a}{b}\right) = \dfrac{a}{b}$.

RETOUR AU SOMMAIRE

NANTES-AEFE Afrique

Quatrième exercice

Séries autres que S

Parcours d'un dé

Énoncé

Position du dé :
On dispose d'un dé cubique (voir figure 1 ci-dessous) et d'une feuille quadrillée dont les carreaux sont de la même taille que les faces du dé. On place le dé sur un des carrés du quadrillage et on note le numéro de la face contre la feuille dans ce carré.

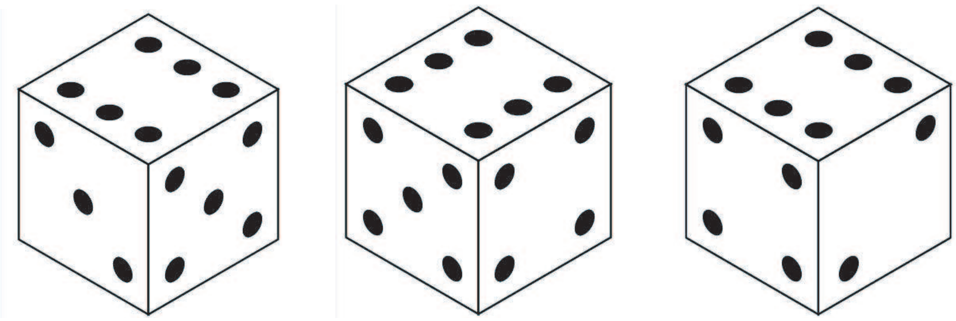


Figure 1

Une étape consiste à faire basculer le dé autour de l'une des arêtes de sa base. On note alors sur le quadrillage le numéro de la face contre la feuille.

Un parcours est une succession d'étapes, et on calcule la somme S de tous les nombres notés sur la feuille.

Exemple d'un parcours en ligne droite.

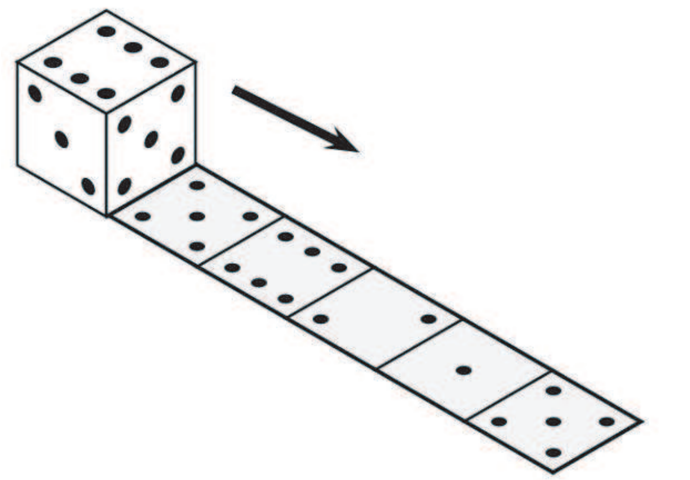


Figure 2

Le dé est sur la face « 1 » en position initiale. La figure 2 est un exemple de parcours du dé en ligne droite après 5 étapes. Ainsi, la somme S des nombres notés sur la feuille est $1+5+6+2+1+5=20$.

1. **Parcours en spirale** :

   Au départ, on place le dé face « 1 » contre la feuille, puis on le bascule vers la droite. Ensuite on fait basculer le dé selon la figure 3 en parcourant une spirale autour du carré initial. Le numéro obtenu après la première étape est 2.

   Compléter la suite en donnant la liste des nombres notés au bout des dix premières étapes et calculer leur somme S.

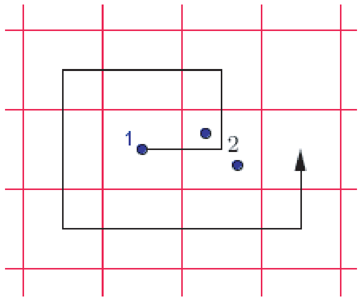


Figure 3

2. **Parcours en carré** :

   On place le dé dans la case A1 du quadrillage, face « 1 » contre la feuille, et le dé parcourt les cases du carré comme indiqué sur la figure 4. Il y a donc 4 numéros possibles en B1 à la première étape.

   a) On effectue ce parcours une fois. Quels sont les nombres écrits dans les cases E1, E5, A5 ?

   b) On a effectué ce parcours un certain nombre de fois et on a obtenu la somme 2013.
   Sur quelle case s'est-on arrêté et quel est le numéro inscrit en B1 lors du premier passage ?

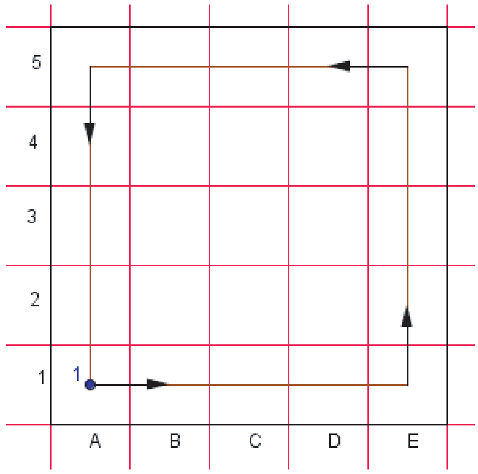


Figure 4

3. **Parcours libre** :

   On place le dé face « 1 » contre la feuille. A chaque étape, on ne peut revenir sur la case précédente. À partir de la deuxième étape, il y a donc 3 possibilités.

   a) On peut obtenir 6 de 3 façons différentes car $6=1+2+3=1+3+2=1+5$. De combien de façons peut-on obtenir 8 ?

   b) Quelle est la plus petite somme que l'on puisse obtenir avec un parcours qui revient au point de départ ?

   c) Au bout de 2013 étapes, quelle est la plus petite valeur possible de S ?
   On précisera le numéro inscrit dans la case finale.

4. **Longueur de trajectoires** :

   Dans cette question, le dé est un cube d'arête 1 cm.

   a) À chaque étape, le centre du dé décrit, dans l'espace, une trajectoire en arc de cercle. Déterminer la longueur de cette trajectoire.

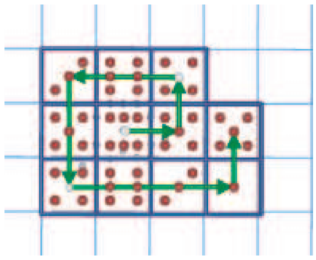
   b) Déterminer la distance totale parcourue par le centre du dé à la question 3.c.

   c) Déterminer la longueur de la trajectoire parcourue par le centre de la face « 1 » dans la question 3.c.

Éléments de solution

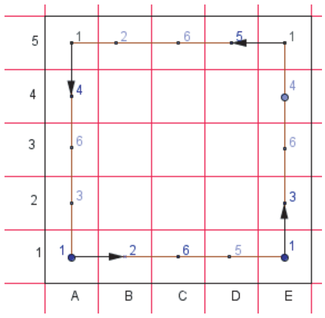
1. **Parcours en spirale :**

   La figure (parcours vu de dessus) fait apparaître la face visible du dé à chaque étape.



Les nombres notés sur la feuille sont les compléments à 7 respectifs des nombres affichés par le dé. Au bout des dix premières étapes, il y a 11 nombres notés et $S = 1+2+3+1+4+2+3+1+4+6+2 = 29$.

2. **Parcours en carré** :
   Exemple :



   a) Il y a quatre parcours possibles, mais dans chacune des cases E1, E5, A5 figure toujours le même nombre 1 (de même les cases A3, C1, C5 et E3 contiennent toujours un 6).

   b) Lors d'un tour, on obtient 4 fois la somme 14. Le tour complet correspond à un total de 56. Comme $2013 = 56 \times 35 + 53$, on a effectué 35 tours et le 36ᵉ tour doit amener la somme égale à 53.
   La seule possibilité d'avoir $56 - 3$ est de s'arrêter sur le 6 en A3 pour avoir 3 en A2, on a donc comme dernière série : 1 ; 4 ; 6. Pour cela, il faut débuter le parcours par : 1 ; 2 ; 6 (voir figure ci-dessus).
   En B1, on a : 2 et on s'arrête en A3.

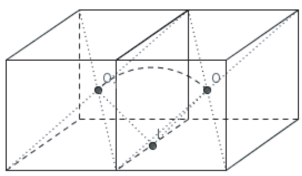
3. **Parcours libre :**

   a) On peut obtenir 8 de 2 façons : $8 = 1 + 2 + 4 + 1 = 1 + 4 + 2 + 1$.

   b) La plus petite somme est : $S = 1 + 2 + 3 + 1 + 2 = 9$ avec retour au départ.

   c)) Pour S_{min} on répète la séquence $1 + 2 + 3$ (ou $1 + 3 + 2$) 671 fois et on termine par 1. Toutes les trois étapes, on revient sur « 1 ». Comme $2013 = 3 \times 671$, le numéro inscrit dans la dernière case est 1.

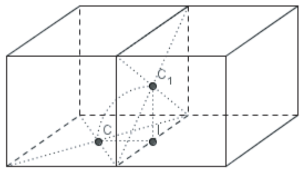
4. **Distance parcourue :**



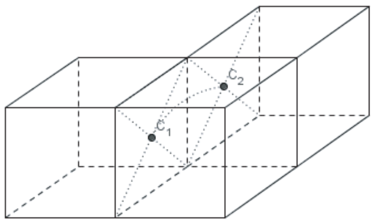
   a) Sur cette figure, IO est la moitié de la diagonale d'un carré de côté 1, soit : $IO = \dfrac{1}{2}\sqrt{2}$ cm. Le centre du cube parcourt donc un quart de cercle dont le rayon est la distance de ce point à une arête, soit une longueur de $\dfrac{\pi}{2} \times \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{\pi\sqrt{2}}{4}$ cm.

   b) À chaque étape le centre du cube parcourt la distance précédente, d'où un total de $\dfrac{2013\pi\sqrt{2}}{4}$.

c) À chaque étape le centre de la face parcourt un quart de cercle dont le rayon diffère selon la rotation :



- si le dé subit une rotation autour d'une des arêtes de la face " 1 " de centre C.
  Le rayon est : $\dfrac{1}{2}$ pour l'étape 1-2 ou 2-1 ou 1-3 ou 3-1.
- Si le dé subit une rotation autour d'une des arêtes ayant un seul sommet de la face « 1 » :



Le rayon est $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ pour l'étape 2-3 ou 3-2.

Donc, pour $S_{\min}$ la longueur est $671 \times \dfrac{\pi}{2} \times \left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ soit $\dfrac{671\pi}{4}\left(2+\sqrt{2}\right)$ cm.

RETOUR AU SOMMAIRE

NICE

Premier exercice

Série S

Les lampadaires

Énoncé

Le plan d'un lotissement de maisons est donné sous la forme d'un quadrillage composé de cinq lignes et cinq colonnes numérotées de 1 à 5. Les maisons de ce lotissement sont représentées par des carrés grisés.

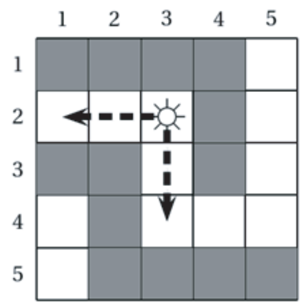


Figure 1

On souhaite éclairer l'ensemble du lotissement à l'aide de lampadaires.
Un lampadaire éclaire toute la ligne et toute la colonne à partir de la case sur laquelle il est positionné (tant que la lumière qu'il émet ne rencontre pas de maison ou la frontière du lotissement).
Par exemple, sur la figure 1, un lampadaire positionné en (2 ; 3) (2^{e} ligne et 3^{e} colonne) éclairera les cases (2 ; 1), (2 ; 2), (2 ; 3), (3 ; 3) et (4 ; 3).

1. Combien de lampadaires faut-il placer **au minimum** pour éclairer l'ensemble du lotissement de la figure 1 ? À quelles positions les placer ?
2. Si le lotissement ne contient aucune maison, combien de lampadaires faut-il placer **au minimum** pour l'éclairer entièrement ? À quelles positions les placer ?
3. Dessiner le plan d'un lotissement pour lequel il faut placer sept lampadaires au minimum pour l'éclairer entièrement.
4. Combien de lampadaires faut-il utiliser au minimum pour éclairer l'ensemble des lotissements suivants ?

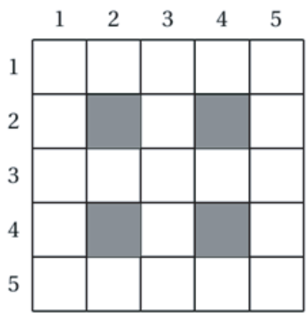


Figure 2

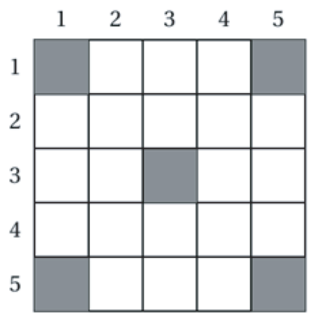


Figure 3

5. On code un lotissement à l'aide d'un tableau T$[i, j]$ où i (resp. j) désigne le numéro de la ligne (resp. colonne) avec $1 \leqslant i \leqslant 5$ et $1 \leqslant j \leqslant$. On convient que :
   - T$[i, j]$ vaut 0 si la case $(i; j)$ n'est pas éclairée ;
   - T$[i, j]$ vaut 1 si la case $(i; j)$ est éclairée ;
   - T$[i, j]$ vaut 2 si la case $(i; j)$ contient une maison.

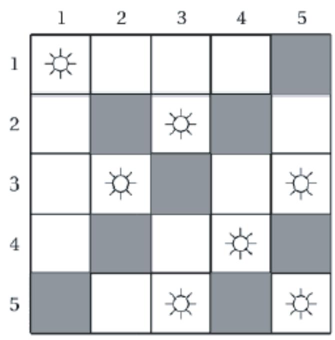
   On suppose un lotissement entièrement codé par un tableau T.
   Écrire un algorithme qui affiche si oui ou non le lotissement est entièrement éclairé.
6. a) Dessiner le plan du lotissement associé à un tableau T obtenu à l'aide de l'algorithme ci-dessous :

```
Variables :       i, j et s sont des entiers naturels
                  T est un tableau
Initialisation : Affecter à s la valeur 1.
Traitement :      Pour i variant de 1 à 5
                       Pour j variant de 1 à 5
                            Si (2*i-j)==s alors
                                 Affecter à T[i,j] la valeur 2
                                 s prend la valeur s+1
                            Sinon affecter à T[i,j] la valeur 0
```

   b) Combien de lampadaires faut-il placer au minimum pour éclairer entièrement ce lotissement ?

Éléments de solution

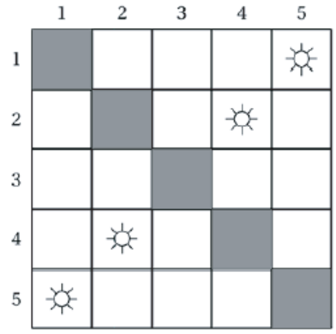
1. Il suffit de placer trois lampadaires pour éclairer l'ensemble du labyrinthe ;
   On peut les placer par exemple (4, 1), (2, 3) et (4, 5).
2. Il suffit de placer cinq lampadaires, par exemple sur toute la première ligne.
3. Un exemple possible :



4. Figure 2 : trois lampadaires suffisent : en (1, 1), (3, 3) et (5, 5).
   Figure 3 : Quatre lampadaires suffisent : en (1, 2), (4, 1), (5, 4) et (2, 5).
5. Algorithme possible :

```
Variables :       i, j et k sont des entiers naturels
                  L est une liste
Initialisation : Affecter à k la valeur 0.
Traitement :      Pour i allant de 1 à 5
                       Pour j allant de 1 à 5
                            Si L(i, j) ==0 alors
                                 Affecter à k la valeur 1
                  Si k==0 alors
                       Afficher « Le labyrinthe est entièrement éclairé »
                  Sinon
                       Afficher « Le labyrinthe n'est pas entièrement éclairé »
```

6. a) L'algorithme génère le plan suivant :



b) Quatre lampadaires suffisent.

RETOUR AU SOMMAIRE

NICE

Deuxième exercice

Série S

Les triangles olympiques

Énoncé

On considère un triangle T dont les côtés mesurent a, b et c.
Un tel triangle T est dit « olympique » lorsque :
- a, b et c sont des entiers naturels ;
- $1 < a \leqslant b \leqslant c$;
- est un triangle rectangle ;
- $a^2 = b + c$.

1. Donner un exemple de triangle olympique. On précisera les mesures des trois côtés.
2. a) En utilisant le théorème de Pythagore, montrer que b et c sont des entiers consécutifs, c'est-à-dire que $c = b + 1$.
   b) En déduire une expression simple de b en fonction de a.
   c) Le nombre entier a peut-il être un nombre pair ?
   d) Un triangle olympique peut-il être isocèle ?
   e) Existe-t-il un triangle olympique T pour tout nombre entier a impair supérieur à 2 ?
3. Dans toute la suite, on suppose que a est un nombre impair.
   a) Calculer, en fonction de a, l'aire a d'un triangle olympique.
   b) Combien y a-t-il de valeurs de a pour lesquelles l'aire a est inférieure ou égale à 2013 ?
4. On tire trois fois de suite avec remise un jeton d'une urne qui en contient cent numérotés de 1 à 100.
   Calculer la probabilité que les numéros des trois jetons définissent (dans l'ordre de tirage) un triangle olympique de côtés de mesure a, b et c.

Éléments de solution

1. Le triangle 3 - 4 - 5 convient.
2. a) $c^2 = a^2 + b^2 \iff c^2 = b + c + b^2 \iff c^2 - c - \left(b^2 + b\right) = 0$.
   Cette équation du second degré en la variable c admet deux racines : $-b$ et $b + 1$.
   $c = -b$ étant impossible, on déduit $c = b + 1$ donc b et c sont consécutifs.
   b) $a^2 = b + c = 2b + 1 \iff 2b = a^2 - 1$.
   De même, $a^2 = b + c = 2c - 1 \iff 2c = a^2 + 1$.
   c) Supposons a pair, alors $a^2 - 1$ impair, contradiction avec $2b = a^2 + 1$.
   d) $a = b$ amène une contradiction immédiate.
   e) Si $a = 2p + 1$ avec p entier naturel non nul, alors $2b = 4p^2 + 4p$ donc $b = 2p^2 + 2p$ et $2c = 4p^2 + 4p + 2$ donc $c = 2p^2 + 2p + 1$ et T existe.
3. a) On a $\mathcal{A} = \dfrac{a \times b}{2} = \dfrac{a\left(a^2 - 1\right)}{4}$ car($2b = a^2 - 1$ (question 2.b)).

b) On cherche à résoudre l'inéquation $a\left(a^2-1\right) \leqslant 8052$; La calculatrice fournit $a \leqslant 20$. Le nombre a étant impair supérieur ou égal à 3, il y a neuf solutions.

4. On note A : « Les trois jetons définissent un triangle olympique de côtés de mesure a, b et c. Il y a 100^3 cas possibles. Il y a six cas favorables à la réalisation de l'événement A. En effet, a est un nombre impair et comme $2c = a^2 + 1 \leqslant 200$. On déduit $a \leqslant 14$.
   Ainsi $a \in \{3; 5; 7; 9; 11; 13\}$ et donc $P(A) = \dfrac{6}{100^3}$.

RETOUR AU SOMMAIRE

NICE

Troisième exercice

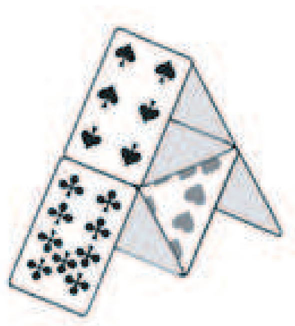
Séries autres que S

Le château de cartes

Énoncé

Savez-vous faire un château de cartes ?
Pour arriver à un étage, c'est tout simple

Pour deux étages, ce n'est pas très compliqué non plus :



1. a) Combien de cartes sont nécessaires pour construire trois étages ?
   b) Justifier qu'il faut utiliser exactement 26 cartes pour construire quatre étages.
2. On donne le tableau suivant :

Nombre d'étages	1	2	3	4	5
Nombre de cartes utilisées	2	7		26	40

   Pour tout entier n plus grand que 1, on note $C(n)$ le nombre de cartes utilisées pour construire un château à n étage(s).
   Déterminer les nombres a et b en admettant que pour tout entier n supérieur ou égal à 1 on a $C(n) = an^2 + bn$.
3. À quoi peut bien servir l'algorithme ci-dessous dans le cadre de cet exercice ?

Variables :	n et c sont des entiers naturels
Traitement :	Demander à l'utilisateur la valeur de n.
	Affecter à c la valeur $0,5 \times n \times (3 \times n + 1)$
Sortie :	Afficher c

4. a) Écrire un algorithme qui calcule et affiche la taille du plus grand château que l'on peut fabriquer si l'on dispose de 500 cartes.
   b) Retrouver, à l'aide d'un calcul, le résultat affiché par l'algorithme.

Éléments de solution

1. a) Il faut $\underbrace{7}_{\text{deux étages}} + \underbrace{2}_{\text{haut étage inférieur}} + \underbrace{6}_{\text{nouvel étage}} = 15$ cartes pour faire trois étages.
   b) Pour quatre étages, il faut $\underbrace{15}_{\text{trois étages}} + \underbrace{3}_{\text{haut étage inférieur}} + \underbrace{8}_{\text{nouvel étage}} = 26$ cartes
2. $C(1) = a + b = 2$ et $C(2) = 4a + 2b = 7$

   On résout le système associé qui donne : $a = \dfrac{3}{2}$ et $b = \dfrac{1}{2}$.
3. Cet algorithme demande à l'utilisateur une valeur de l'entier n puis retourne l'image de cet entier par la fonction C.
4. a) Exemple d'algorithme :

Variables :	n est un entier naturel
Initialisation :	Affecter à n la valeur 1.
Traitement :	Tant que $0,5 \times n \times (3 \times n + 1) \leqslant 500$
	n prend la valeur $n + 1$
	n prend la valeur $n - 1$
	Afficher n.

   Remarque : l'algorithme affiche 18.

   b) On résout l'inéquation $1,5n^2 + 0,5n - 500 \leqslant 0$.
   $\Delta = 3000,25$ donc $n' = -18,42$ et $n" = 18,1$. On retrouve ainsi le nombre de cartes permettant de construire le plus grand château (18).

RETOUR AU SOMMAIRE

NICE

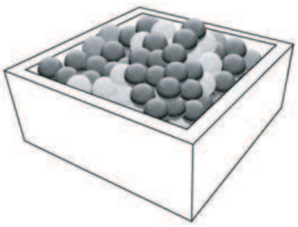
Quatrième exercice

Séries autres que S

Les sacs de billes

Énoncé

Une boîte contient des billes de trois couleurs différentes : rouge, bleu et jaune.



Chaque bille a une valeur et une masse différentes selon sa couleur. On donne :

Couleur	**Rouge**	**Bleu**	**Jaune**
Masse (en gr)	10	20	40
Valeur (en €)	1	3	5

1. Dans cette question uniquement, la boîte contient sept billes rouges, quatre billes bleues et aucune jaune. Le sac de Mehdi ne peut transporter que 90 g de billes. On note x (resp. y) le nombre de billes rouges (resp. bleues) qu'il peut prendre.
   Le tableau ci-dessous a été réalisé avec un tableur :

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1		0	1	2	3	4	5	6	7
2	0	0	1	2	3	4	5	6	7
3	1	3	4	5	6	7	8	9	10
4	2	6	7	8	9	10	11		
5	3	9	10	11	12				
6	4	12	13						

   Les entiers de 0 à 7 ont été saisis sur la plage B1 :I1.
   Les entiers de 0 à 4 ont été saisis sur la plage A2 :A6.
   La cellule B2 contient la formule :

   =SI(B$1+2*$A2<=9 ;B$1+3*$A2 ;"")

   Cette cellule a été copiée puis collée sur l'ensemble du tableau (plage B2 :I6).

   a) Justifier que $x + 2y \leqslant 9$. Que représente $x + 3y$?

   b) À l'aide du tableau, trouver le nombre de billes rouges et bleues qu'il doit prendre pour que la valeur totale des billes soit la plus grande possible.

2. Dans cette question uniquement la boîte contient cinq billes rouges, trois bleues et deux jaunes
   a) Le sac d'Alexandre ne peut contenir que 50 g de billes.
   Combien de billes de chaque couleur doit-il prendre pour que la valeur totale des billes soit la plus grande possible ? Préciser cette valeur.
   b) Le sac de Béa ne peut contenir que 70 g de billes.
   Combien de billes de chaque couleur doit-elle prendre pour que la valeur totale des billes soit la plus grande possible ? Préciser cette valeur.
   c) Le sac de Clarisse ne peut contenir que 80 g de billes.
   Combien de billes de chaque couleur doit-elle prendre pour que la valeur totale des billes soit la plus grande possible ? Préciser cette valeur.
3. Dans cette question uniquement, la boîte contient six billes rouges, quatre bleues et trois jaunes.
   Écrire un algorithme qui demande à l'utilisateur de saisir la masse exacte de billes qu'il souhaite prendre et qui affiche si cela est possible ou pas.

Éléments de solution

1. a) La contrainte sur la masse de bille s'écrit : $10x + 20y \leqslant 90$ soit $x + 2y \leqslant 9$.
   $x + 3y$ représente la valeur totale du nombre de billes prises.
   b) Il s'agit de rendre $x + 3y$ le plus grand possible. Le tableau donne $x = 1$ et $y = 47$.
2. Dans cette question, tout se fait par essais successifs.
   a) 1 rouge, 2 bleues et 0 jaune pour une valeur de 7€.
   b) 1 rouge, 3 bleues et 0 jaune pour une valeur de 10€
   c) 0 rouge, 3 bleues et 1 jaune pour une valeur de 14€.
3. Un algorithme possible :

```
Variables :       r, b, j, m et p sont des entiers naturels.
Initialisation :  Affecter à p la valeur 0.
Traitement :      Lire la valeur de m.
                  Pour r variant de 0 à 6
                     | Pour b variant de 0 à 4
                     |    | Pour j variant de 0 à 3
                     |    |    | Si (10r + 20b + 40j == m) alors
                     |    |    | Affecter à p la valeur 1
                  Si p == 0 alors
                     | "Afficher il est impossible de prendre la masse demandée"
                  Sinon
                     | "Afficher il est possible de prendre la masse demandée"
```

RETOUR AU SOMMAIRE

ORLÉANS - TOURS

Premier exercice

Toutes séries

Fourmidables

Énoncé

A partir d'un cône de génératrice [AS] (figure 1), on fabrique un tronc de cône en coupant celui-ci par un plan parallèle à la base en un point quelconque C, distinct de A et de S, de la génératrice [SA].

On donne $OA = 1$.

Deux fourmis « F1 » et « F2 » partent du point A.
La fourmi « F1 » parcourt le cercle de base et revient en A. La fourmi « F2 » parcourt d'abord le segment [AC], puis le cercle supérieur du tronc et revient en A en suivant le segment [CA].

L'objectif du problème est de comparer les distances parcourues par les deux fourmis, selon les valeurs des longueurs AS et AC.

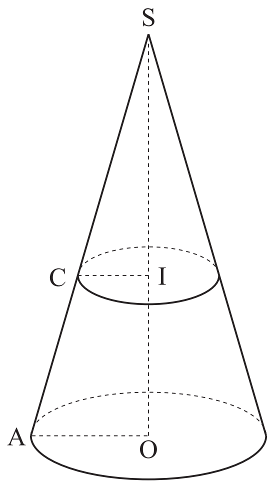
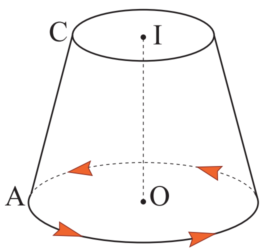
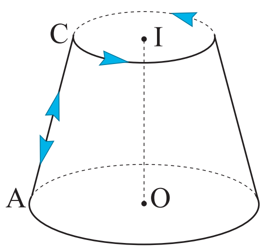


Figure 1



Trajet de F1



Trajet de F2

Partie A : Études d'exemples

1. Dans cette question, on suppose $AC = 1$.
   a) On suppose de plus $AS = 3$. Démontrer que, parmi les deux fourmis, c'est la fourmi « F1 » qui parcourt la plus grande distance.
   b) Dans cette question, on a $AC = 1$ et cette fois $AS = 4$. Laquelle des deux fourmis parcourt la plus grande distance ?
2. Dans cette question, la longueur AC est quelconque et on suppose $AS = 3$.
   a) Exprimer la distance parcourue par la fourmi « F2 » en fonction de la longueur AC.
   b) Démontrer que, quelle que soit la longueur AC, la fourmi « F1 » parcourt la plus grande distance.

Partie B : Étude du cas général

Dans cette partie, les longueurs AC et AS sont quelconques

1. Exprimer la distance parcourue par la fourmi « F2 » en fonction des longueurs AC et SA.
2. Les deux fourmis peuvent-elles parcourir la même distance ? Si oui, dans quel(s) cas ?
3. Comparer les distances parcourues par les deux fourmis, selon les valeurs des longueurs AS et AC.

Éléments de solution

Partie A : Étude d'exemples

1. $AC = 1$.
   a) $AC = 1$ et $AS = 3$. F1 parcourt une distance de 2π et, d'après le théorème de Thalès, $CI = \frac{2}{3}$ donc F2 parcourt $1 + 1 + 2 \times \frac{2}{3}\pi = \frac{6+4\pi}{3} \leqslant 2\pi$ donc F1 parcourt la plus grande distance.
   b) $AC = 1$ et $AS = 4$. F1 parcourt toujours une distance de 2π et, d'après le théorème de Thalès, $CI = \frac{3}{4}$ donc F2 parcourt $1 + 1 + 2 \times \frac{3}{4}\pi > 2\pi$ donc, cette fois-ci, F2 parcourt la plus grande distance.
2. AC est quelconque et $AS = 3$.
   a) D'après le théorème de Thalès, on obtient $CI = \frac{3 - AC}{3} = 1 - \frac{AC}{3}$.
   F2 parcourt donc une distance égale à :
   $$AC + AC + 2\pi CI = 2AC + 2\pi\left(1 - \frac{AC}{3}\right) = 2\pi + AC\left(2 - \frac{2\pi}{3}\right) = 2\pi + AC\frac{6-2\pi}{3}.$$
   b) F1 parcourt toujours 2π et F2 parcourt la distance $2\pi + \frac{AC(6-2\pi)}{3}$.
   Or $6 - 2\pi < 0$ donc $2\pi + AC\frac{6-2\pi}{3} < 2\pi$. Donc dans le cas où $AS = 3$, F1 parcourt toujours la plus grande distance, quelle que soit la valeur de AC.

Partie B : Étude du cas général

1. D'après le théorème de Thalès $CI = \frac{SC}{AS} = \frac{AS - AC}{AS} = 1 - \frac{AC}{AS}$. F2 parcourt la distance $2AC + 2\pi CI = 2AC + 2\pi\left(1 - \frac{AC}{AS}\right) = 2\pi + AC\left(2 - \frac{2\pi}{AS}\right)$ c'est-à-dire :
   $$2\pi + \frac{2AC}{AS}(AS - \pi).$$
2. F1 parcourt la distance 2π . D'après les calculs du 1. , les deux distances sont égales si et seulement si $AS = \pi$, et ce quelle que soit la valeur de AC.
3. Pour comparer les distances parcourues par F1 et F2 il suffit d'étudier le signe de $\frac{2AC}{AS}(AS - \pi)$. Il suffit donc de comparer AS et π.
   - Si $AS < \pi$ alors, quelle que soit la valeur de AC, c'est F1 qui parcourt la plus grande distance.
   - Si $AS > \pi$ alors quelle que soit la valeur de AC, c'est F2 qui parcourt la plus grande distance.
   - Si $AS = \pi$ alors, quelle que soit la valeur de AC, Les deux fourmis parcourent la même distance.

RETOUR AU SOMMAIRE

ORLÉANS - TOURS

Deuxième exercice

Toutes séries

Tourner en... carrés

Énoncé

Partie A Quelques calculs... remarquables

1. a) Vérifier les égalités suivantes :

$$\left(1^2+3^2\right)\left(4^2+5^2\right)=(1\times 4+3\times 5)^2+(1\times 5-3\times 4)^2=(1\times 4-3\times 5)^2+(1\times 5+3\times 4)^2$$

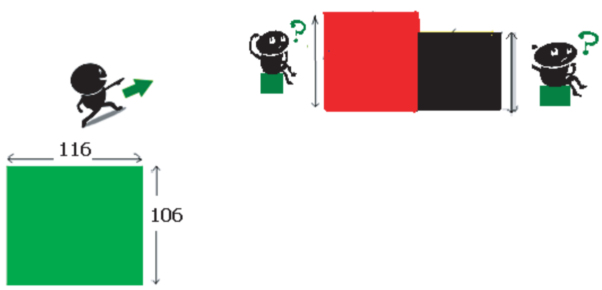
   b) Vérifier que le produit $\left(7^2+5^2\right)\left(10^2+13^2\right)$ est égal à chacune deux sommes suivantes : 135^2+41^2 et 5^2+141^2.
   Justifier le choix des nombres 135 et 41 ; 5 et 141 qui interviennent dans ces sommes.

2. Dans cette question, a, b, c et d sont des entiers naturels non nuls.
   a) Démontrer que, quelles que soient les valeurs de ces entiers, le produit $P=\left(a^2+b^2\right)\left(c^2+d^2\right)$ peut s'écrire sous la forme d'une somme de deux carrés de deux nombres entiers naturels.
   b) On suppose que a est différent de b et c différent de d. Peut-on écrire P de deux manières différentes sous la forme d'une somme de deux carrés de deux nombres entiers naturels ? Justifier votre réponse.

Les parties B et C peuvent être traitées de manière indépendante

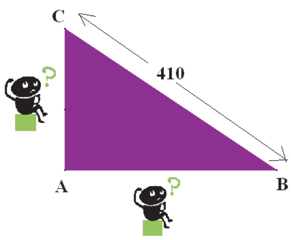
Partie B - Une application : un rectangle contre deux carrés

Peut-on échanger de manière équitable un terrain rectangulaire de dimensions 116 mètres et 106 mètres contre deux terrains carrés dont les mesures, en mètres, des côtés seraient des nombres entiers. (La somme des aires des deux carrés doit donc être égale à l'aire du rectangle).
Justifier soigneusement votre réponse.
Pourriez-vous donner plusieurs solutions au problème posé ?



Partie C - Une autre application : un triplé de carrés

1. Existe-t-il un triangle ABC rectangle en A tel que l'hypoténuse BC mesure 410 cm, les mesures, en cm, des côtés AB et AC étant des nombres entiers.
   On pourra utiliser la question 1.a) de la partie A
2. En utilisant le tableur de votre calculatrice ou en la programmant donner le maximum de solutions au problème posé.



Éléments de solution

Partie A

1. a) $\left(1^2+3^2\right)\left(4^2+5^2\right)=10\times 41=410$
et $(1\times 4+3\times 5)^2+(1\times 5-3\times 4)^2=19^2+(-7)^2=19^2+7^2=410$.
et $(1\times 4-3\times 5)^2+(1\times 5)^2+(1\times 5+3\times 4)^2=(-11)^2+17^2=11^2+17^2=410$.
Donc vérification faite.

   b) $\left(7^2+5^2\right)\left(10^2+13^2\right)=74\times 269=19906=135^2+41^2$ et, par analogie avec la question 1.a), $135=7\times 10+5\times 13; 41=7\times 13-5\times 10; 5=7\times 10-5\times 13$ et $141=7\times 13+5\times 10$.

   c) $\left(11^2+27^2\right)\left(35^2+18^2\right)=1316650$
$(11\times 35+27\times 18)^2+(11\times 18-27\times 35)^2=871^2+(-747)^2=871^2+747^2=1316650$.
$(11\times 35-27\times 18)^2+(11\times 18+27\times 35)^2=(-101)^2+1143^2=101^2+1143^2=1316650$.

2. a) On conjecture la formule

$$\left(a^2+b^2\right)\left(c^2+d^2\right)=(ac+bd)^2+(ad-bc)^2=(ac-bd)^2+(ad+bc)^2$$

   que l'on vérifie en développant chaque membre. On a donc au moins une décomposition.

   b) On suppose que a est différent de b et que c est différent de d.
Si les décompositions obtenues au 2. a) sont identiques, alors nécessairement :

$$\begin{cases} ac+bd=\pm(ac-bd) \\ ad-bc=\pm(ad+bc) \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} ac+bd=\pm(ad+bc) \\ ad-bc=\pm(ac-bd) \end{cases}$$

   - si $ac+bd=ac-bd$ alors $bd=0$ ou $d=0$, ce qui est contraire à l'hypothèse.
   - si $ac+bd=-(ac-bd)$ alors $ac=0$ ou $c=0$, ce qui est contraire à l'hypothèse.
   - si $ac+bd=ad+bc$ alors $(a-b)(c-d)=0$ donc $a=b$ ou $c=d$, ce qui est contraire à l'hypothèse.
   - si $ac+bd=-(ac+bc)$ alors $(a+b)(c+d)=0$, ce qui est impossible car a, b, c et d sont des entiers naturels strictement positifs.

   Les deux décompositions obtenues au 2.a) sont donc distinctes.

Partie B

Il suffit de remarquer que $116=100+16=10^2+4^2$ et que $106=9^2+5^2$. On obtient donc

$$\begin{aligned} 116\times 106 &= \left(10^2+4^2\right)\left(9^2+5^2\right) \\ &= (10\times 9+4\times 5)^2+(10\times 5-4\times 9)^2=110^2+14^2 \\ &= (10\times 9-4\times 5)^2+(10\times 5+4\times 9)^2=116\times 106 \\ &= 86^2+70^2=14^2+110^2 \end{aligned}$$

On peut donc échanger le terrain rectangulaire contre deux terrains carrés dont les dimensions des côtés seraient 86 m et 70 m ou bien 14 m et 110 m.

Partie C

1. D'après la question 1.a), $410=19^2+7^2=11^2+17^2$
donc $410^2=410\times 410=\left(19^2+7^2\right)\left(11^2+17^2\right)=(19\times 11+7\times 17)^2+(19\times 17-7\times 11)^2=328^2+246^2$
ou $410^2=(19\times 11-7\times 17)^2+(19\times 17+7\times 11)^2=90^2+400^2$.

   Le triangle ABC ayant comme mesure des côtés 328 ; 246 ; 410 vérifie donc la réciproque de Pythagore et le triangle ABC sera rectangle.
De même le triangle ABC qui aurait comme mesure des côtés 90 ; 400 et 410 serait un triangle rectangle.

2. Voir l'algorithme page suivante

```
VARIABLES
  a EST_DU_TYPE NOMBRE
  b EST_DU_TYPE NOMBRE
  X EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  LIRE X
  POUR a ALLANT_DE 1 A floor(X)
    DEBUT_POUR
    b PREND_LA_VALEUR sqrt(pow(X,2)-pow(a,2))
    SI (b==floor(b)) ALORS
      DEBUT_SI
      AFFICHER "("
      AFFICHER a
      AFFICHER " ; "
      AFFICHER b
      AFFICHER " )"
      FIN_SI
    FIN_POUR
FIN_ALGORITHME
```

3. En prenant X=410, on obtient ;

RÉSULTAT :

```
***Algorithme lancé***
(90 ; 400 )
(168 ; 374 )
(246 ; 328 )
(266 ; 312 )
(312 ; 266 )
(328 ; 246 )
(374 ; 168 )
(400 ; 90 )
```

RETOUR AU SOMMAIRE

PARIS

Premier exercice

Toutes séries

Dés tétraédriques

Énoncé

Un dé tétraédrique, quand il est posé, laisse voir trois de ses quatre faces numérotées de 1 à 4. C'est la face cachée qui donne la « valeur » du dé après un lancer.
Est-il possible d'avoir deux dés tétraédriques pour lesquels les probabilités d'obtenir chacune des sommes possibles des valeurs des deux dés soient égales ? On envisagera tous les cas :

1. les deux dés sont bien équilibrés ;
2. les deux dés sont pipés de la même manière ;
3. les deux dés sont pipés de deux manières différentes.

On notera p_i la probabilité que la valeur du premier dé soit le nombre i et q_i la probabilité que la valeur du deuxième dé soit le nombre i.

Éléments de solution

Raisonnons dans chaque cas par l'absurde

1. On a $\dfrac{1}{4} = p_1 = q_1 = \cdots = p_4 = q_4$ et $\dfrac{1}{7} = p_1 \times q_1$, ce qui donne le résultat erroné suivant : $\dfrac{1}{7} = \left(\dfrac{1}{4}\right)^2$.
2. $p_1 = q_1, p_2 = q_2, p_3 = q_3, p_4 = q_4$ et
$$\begin{aligned}\frac{1}{7} &= p_1^2 = \cdots = p_1q_4 + p_2q_3 + p_3q_2 + p_4q_1 \\ &= \cdots = p_4^2\end{aligned}$$
D'où $p_1 = p_4$ et $p_1^2 \geqslant 2p_1^2$ ce qui est impossible car p_1 n'est pas nul.
3. On a
$$\begin{aligned}\frac{1}{7} &= p_1q_1 = \cdots = p_1q_4 + p_2q_3 + p_3q_2 + p_4q_1 \\ &= \cdots = p_4q_4\end{aligned}$$
D'où
$$p_1 = \frac{1}{7q_1} \text{ et } p_4 = \frac{1}{7q_4}$$
ce qui donne
$$\frac{1}{7} = \frac{1}{7q_1}q_4 + p_2q_3 + p_3q_2 + \frac{1}{7q_4}q_1 \geqslant \frac{1}{7}\left(\frac{q_4}{q_1} + \frac{q_1}{q_4}\right)$$
Il est ensuite simple d'établir que $x + \dfrac{1}{x} \geqslant 2$ pour $x > 0$ et donc que $\dfrac{1}{7} \geqslant \dfrac{2}{7}$, ce qui est erroné.
On peut remarquer que le troisième cas contient les deux autres.
La réponse à la question posée est donc **non** dans chacun des cas.

RETOUR AU SOMMAIRE

PARIS

Deuxième exercice

Toutes séries

Algorithme de Prabekhar

Énoncé

.On considère l'algorithme suivant

Variables : n, r, q, d, p des entiers naturels
Début
  Lire n
  $d \leftarrow n$
  $p \leftarrow 0$
  Tant que $d \neq 0$ **faire**
    $r \leftarrow$ reste de la division euclidienne de d par 10
    $q \leftarrow$ quotient de la division euclidienne de d par 10
    $d \leftarrow q$
    $p \leftarrow p + r^2$
  Fin Tq
  Afficher p
Fin

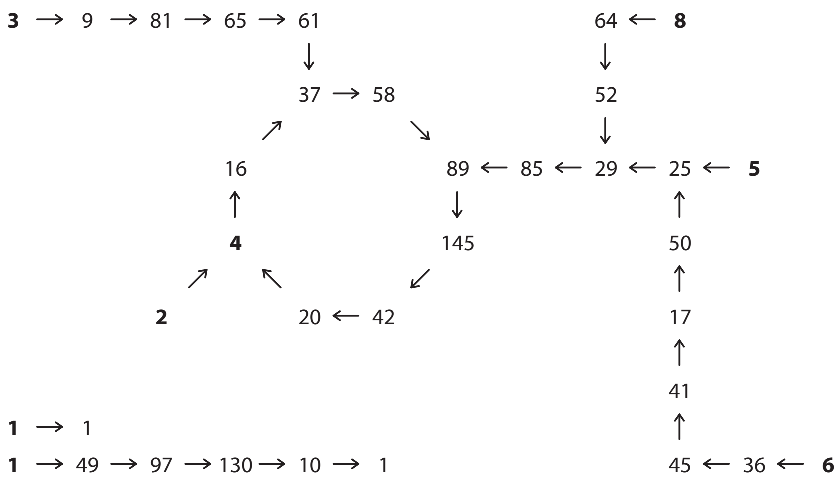
Si p est le résultat de l'algorithme appliqué à n, on notera $n \rightarrow p$.
On dira que p est l'image de n ou que n est un antécédent de p.

Partie A - Description de l'algorithme

1. a) Vérifier que $157 \rightarrow 75$, puis que $75 \rightarrow 74$, puis que $74 \rightarrow 65$.
   La suite $157 \rightarrow 75 \rightarrow 74 \rightarrow 65 \ldots$ sera appelé la trajectoire du nombre 157.
   b) Déterminer l'image de 12 345.
   c) Décrire simplement par une phrase ce que fait cet algorithme.
2. a) Montrer que tout entier naturel non nul p possède une infinité d'antécédents.
   b) Montrer que 157 ne peut avoir d'antécédent de trois chiffres.
   Trouver un nombre d'au maximum quatre chiffres qui soit un antécédent de 157.
3. soits s un entier naturel donné.
   a) Représenter graphiquement les points de coordonnées entières, positives et de somme s.
   b) Trouver le(s) nombre(s) de deux chiffres dont la somme des chiffres est s et ayant une image minimum.

Partie B - Trajectoire des nombres à deux chiffres

On a représenté les trajectoires des nombres de 1 à 9



On remarque que les trajectoires des nombres à un chiffre aboutissent au « puits » 1 ou dans le « cycle » $C = \{4, 16, 37, 58, 89, 145, 42, 20\}$.
Montrer que la trajectoire d'un nombre compris entre 1 et 100 échoue dans le puits 1 ou le cycle C.
On pourra utiliser le tableau suivant, à compléter, dans lequel est indiqué où échoue la trajectoire d'un nombre à deux chiffres (en colonne le chiffre des unités, en ligne le chiffre des dizaines).

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	$\times$	1	C	C	C	C	C	1	C	
1	1	C	C	1	C	C	C	C	C	
2	C	C	C	1	C	C	C	C	1	
3	C	1	1	C	C	C	C	C	C	
4	C	C	C	C	1	C	C	C	C	
5	C	C	C	C	C	C	C	C	C	
6	C	C	C	C	C	C	C	C	1	
7	1	C	C	C	C	C	C	C	C	
8	C	C	1	C	C	C	1	C	C	
9										

Partie C - Trajectoires des nombres à n chiffres

Soit n un entier strictement positif, on note P_n la propriété : « la trajectoire de tout nombre à n chiffres échoue soit dans le puits 1 soit dans le cycle $C = \{4, 16, 37, 58, 89, 145, 42, 20\}$ ». On a vu que P_1 et P_2 sont vraies.

1. **1. Nombres à trois chiffres**
   a) Soit N un nombre à trois chiffres. Montrer que son image est majorée par 243.
   Montrer que l'image de l'image de N est majorée par 163.
   b) (b) Démontrer que P_3 est vraie.
2. **Les nombres à 2013 chiffres**
   Que pensez-vous de P_{2013} ?

Éléments de solution

Partie A - Description de l'algorithme

1. a) $157 \to 1^2 + 5^2 + 7^2 = 75 \to 7^2 + 5^2 = 74 \to 7^2 + 4^2 = 65$
   b) Image de 12 354, pas à pas

	q	r	d	p
Initialisation			12345	0
Étape 1	12345	5	1234	5^2
Étape 2	123	4	123	5^2+4^2
Étape 3	12	3	12	$5^2+4^2+3^2$
Étape 4	1	2	1	$5^2+4^2+3^2+2^2$
Étape 5	0	1	0	$5^2+4^2+3^2+2^2+1^2$

donc $12345 \to 55$.

c) On associe à tout entier strictement positif, la somme des carrés de ses chiffres.

2. a) p a au moins $n = \underbrace{1\cdots 1}_{n \text{ fois "1"}}$ pour antécédent, mais aussi les $n - 10^k$ avec $k \in \mathbb{N}$

b) Supposons que $n = \overline{abc}^{10} \to 157$ alors $a^2 + b^2 + c^2 = 157$, on peut supposer que $a \geqslant b \geqslant c$. Remarquons que $n > 777 (3 \times 49 = 147)$. En regardant le chiffre des unités

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Chiffre des unités de i^2	1	4	9	6	5	6	9	4	1

Pour avoir 7, les décompositions sont
$5 + 1 + 1$ on peut avoir aussi $951 \to 107, 995 \to 187$
$6 + 5 + 5$ Aucun nombre possible.
$9 + 4 + 4$ on peut avoir $887 \to 177, 883 \to 137, 872 \to 117, 832 \to 77$
$9 + 9 + 9$ on peut avoir $777 \to 147$

c) $157 = 81 + 36 + 36 + 4$ donc $9662 \to 157$.

d) Les entiers $n = \overline{ab}^{10}$ convenant sont représentés dans le plan par les points N de coordonnées positives entières (a, b) appartenant à la droite d'équation $x + y = s$ et tels que ON soit minimale.

si s est pair alors $a = b = \dfrac{s}{2}$

si s impair, alors $(a; b) = \left(\dfrac{s}{2} + 1; \dfrac{s}{2}\right)$ ou $(a; b) = \left(\dfrac{s}{2}; \dfrac{s}{2} + 1\right)$.

Partie B - Trajectoire des nombres inférieurs ou égaux à 100

1. Le tableau suivant détermine où échoue la trajectoire du nombre à deux chiffres (en colonne le chiffre des unités , en ligne le chiffre des dizaines :

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	$\times$	1	C	C	C	C	C	1	C	C
1	1	C	C	1	C	C	C	C	C	1
2	C	C	C	1	C	C	C	C	1	C
3	C	1	1	C	C	C	C	C	C	C
4	C	C	C	C	1	C	C	C	C	1
5	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C
6	C	C	C	C	C	C	C	C	1	C
7	1	C	C	C	C	C	C	C	C	1
8	C	C	1	C	C	C	1	C	C	C
9	C	1	C	C	1	C	C	1	C	C

2. $\dfrac{20}{200}$.

Partie C - Trajectoire des nombres à n chiffres

1. **Nombre de 3 chiffres**

a) L'image de N est majorée par l'image de 999 qui est 243.
L'image de l'image de N est majorée par l'image de 199 qui est 163.

b) Soit $N_1 \to N_2 \to N_3$. On a vu que $N_3 \leqslant 163$.
Si N_3 a deux chiffres, comme $159 \to 106 \to 37\dots$ et $158 \to 80\dots$ et $149 \to 98\dots$ et que P_2 est vraie alors pour N_1, P_3 est vraie.

2. L'image N_1 d'un nombre à 2013 chiffres est inférieure à $2013 \times 81 = 163053$ (nombre à 6 chiffres). L'image N_2 de N_1 est inférieure ou égale à $6 \times 81 = 486$ qui est un nombre à trois chiffres qui échouera dans le puits ou dans le cycle. Pour $N = 2013$ la propriété est vraie.

RETOUR AU SOMMAIRE

POITIERS

Premier exercice

Toutes séries

Les triplets pythagoriciens

Énoncé

Un disciple de Pythagore, déjà bien vieux, rencontra Alice, une jeune fille et lui expliqua :

- *Un triplet pythagoricien est un triplet d'entiers naturels non nuls* (x, y, z) *vérifiant la relation de Pythagore* $x^2 + y^2 = z^2$
- *Celle-ci lui répondit : comme* $(3, 4, 5)$.
- *Bien entendu, mais peux-tu en donner d'autres ?*
- *Oui, mais tout triplet est formé de trois entiers distincts, dont le plus grand est* z, *et* $(3, 4, 5)$ *est le seul où les trois entiers sont consécutifs.*

Partie A :

Donner un exemple de triplet pythagoricien différent de $(3, 4, 5)$, et justifier les affirmations d'Alice.

Le dialogue reprit. Alice demanda si on pouvait avoir y *et* z *consécutifs.*
Pas de souci, lui répondit le vieil homme, dans ce cas x *est impair supérieur ou égal à* 3, *et il y a une solution pour chaque entier impair* x *supérieur ou égal à* 3.

Partie B :

Justifier les affirmations du vieil homme, et donner la liste de tous les triplets pythagoriciens (x, y, z) avec $z = y + 1 < 100$.

Très bien dit Alice, mais peut-on avoir x *et* y *consécutifs ?*
Je crois me souvenir, dit le vieux sage, que c'est le cas des longueurs des côtés d'un triangle inscrit dans un demi- cercle de rayon 14,5. Mais je ne me souviens pas s'il y en a d'autres...

Partie C :

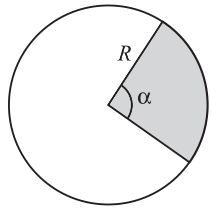
1. Trouver le triplet pythagoricien correspondant.
2. Proposer un algorithme, en langage naturel ou symbolique, permettant de trouver tous les triplets Pythagoriciens $(x, x + 1, z)$ avec $z < 500$.
3. Utiliser cet algorithme, pour trouver un tel triplet, différent de ceux déjà évoqués.

J'ai un jour enterré, dit le vieillard, dans un endroit pris au hasard dans mon royaume, un grimoire où figurait l'étude de ces triplets. Hélas, je ne sais plus où il est, et mon royaume qui était en forme de demi-disque de diamètre 97 stades, a depuis été partagé en trois domaines. Je ne possède plus qu'un triangle de côtés 65, 72 et 97 stades inclus dans ce demi-disque.

Partie D :

1. Faire une figure (échelle 1 stade = 2 mm) et justifier que le triangle est inclus dans le demi-disque.
2. Déterminer la probabilité que le livre soit enterré à l'intérieur du triangle.
3. Déterminer les probabilités respectives que le livre soit enterré dans chacun des deux autres domaines.

Rappel : Dans la figure ci-contre, si le rayon du disque est R, et si l'angle du secteur angulaire grisé mesure α en degrés, alors l'aire de la portion de disque grisée vaut $\dfrac{\pi R^2 \alpha}{360}$.



Éléments de solution

Partie A

- (6, 8,10) ou (5,12,13) par exemple.
- Soit (x, y, z) un triplet pythagoricien : $x^2 + y^2 = z^2$; x est un entier naturel non nul, par conséquent $x^2 > 0$, et on en déduit $z^2 > y^2$, puis que $z > y$; on prouve, de même, que $z > x$.
- Soit (x, y, z) un triplet pythagoricien. On vient de justifier que $z > x$ et que $z > y$: on en déduit que $z \neq y$ et que $z \neq x$; supposons que $x = y$, alors $\dfrac{z^2}{x^2} = 2 \Leftrightarrow \dfrac{z}{x} = \sqrt{2}$, $z \in \mathtt{N}*$ et $x \in \mathtt{N}*$.Ceci est absurde car $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel ; supposons que $x = y = z$, ce qui équivaut à $x^2 = 0$. Ce qui est impossible car x est un entier naturel non nul.
- Soit $(y - 1, y, y + 1)$ un triplet pythagoricien constitué de trois entiers naturels consécutifs, avec $y > 1$: $(y - 1)^2 + y^2 = (y + 1)^2$et $y > 1$. L'unique solution de cette équation est $y = 4$; on en déduit l'unique triplet pythagoricien constitué de trois entiers consécutifs : $(3, 4, 5)$.

Partie B

- Soit $(x, y, y+1)$ un triplet pythagoricien pour lequel y et z sont consécutifs : $x^2 + y^2 = (y+1)^2$, $x \in \mathtt{N}*$ et $y \in \mathtt{N}*$; On obtient $x^2 = 2y + 1$, $x \in \mathtt{N}*$ et $y \in \mathtt{N}*$; si x est un entier pair alors x^2 est également un entier pair.
  Or $x^2 = 2y + 1$, Par conséquent x est nécessairement impair, x^2 est également impair, et on pose $x = 2n + 1$ avec n entier naturel.
- L'équation devient $4n^2 + 4n = 2y$ avec y entier naturel non nul, n entier naturel ; C'est-à-dire $y = 2n^2 + 2n$ avec y entier naturel non nul et n entier naturel. D'où n entier naturel non nul et x supérieur ou égal à 3.
  Pour chaque entier impair x, supérieur ou égal à 3, il existe un triplet pythagoricien (x, y, z) avec y et z consécutifs : $(2n + 1, 2n + 2n, 2n + 2n + 1)$ et n entier naturel non nul.
- On obtient pour : $n = 1(3, 4, 5); n = 2(5, 12, 13); n = 3(7, 24, 25); n = 4(9, 40, 41); n = 5(11, 60, 61)$; $n = 6(13, 84, 85)$

Partie C

Soit $(x, x+1, z)$, avec x entier naturel non nul, un triplet pythagoricien tel que x et y sont consécutifs. Alors $x^2 + (x + 1)^2 = z^2$, c'est-à-dire $2x^2 + 2x + 1 = z^2$

1. Soit (x, y, z) un triplet d'entiers naturels non nuls tel que $z^2 = x^2 + y^2$. (une unité de longueur étant choisie), Il existe un triangle (ABC) rectangle en B et dont les côtés ont pour mesures respectives x, y et $z = AC$. Tout triangle rectangle en B est inscrit dans un demi-cercle de diamètre [AC]. Vérifions qu'il existe bien un triplet pythagoricien de la forme $(x, x + 1, z)$ avec $z = AC = 2 \times 14,5 = 29$.

x entier naturel non nul doit être solution de l'équation $x^2 + (x+1)^2 = 29^2$. On obtient $x = 20$; et le triplet pythagoricien $(20, 21, 29)$.

2. Il y a de multiples possibilités, utilisant ou pas des listes, des fonctions. Un algorithme possible, très élémentaire, utilisant le logiciel algobox :
   Un triplet pythagoricien de la forme $(x, x+1, z)$ doit vérifier l'égalité $2x^2 + 2x + 1 = z^2$;
   C'est-à-dire $z = \sqrt{2x^2 + 2x + 1}$ et z entier naturel non nul.

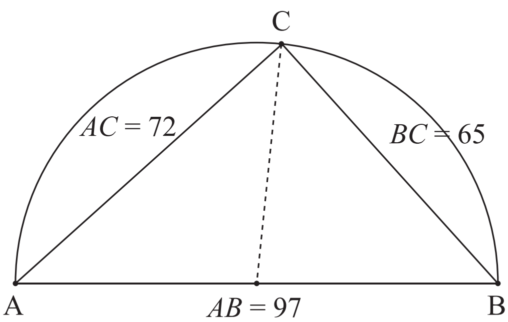
```
DECLARATION DES VARIABLES :
x EST_DU_TYPE_NOMBRE
y EST_DU_TYPE_NOMBRE
z EST_DU_TYPE_NOMBRE

DEBUT_ALGORITHME
x PREND_LA_VALEUR 1
TANT_QUE (sqrt (2*x*x+2*x+1) <(500) )FAIRE
DEBUT_TANT_QUE
Si FLOOR (sqrt (2*x*x+2*x+1) ==sqrt (2*x*x+2*x+1)) ALORS
DEBUT_SI
AFFICHER x
y PREND_LA_VALEUR x+1
AFFICHER y
z PREND_LA_VALEUR sqrt (2*x*x+2*x+1)
AFFICHER z
PAUSE
FIN_SI
x PREND_LA_VALEUR x+1
FIN_TANT_QUE
FIN_ALGORITHME
```

3. En utilisant cet algorithme et le langage de programmation propre à sa calculatrice, on obtient comme unique possibilité : (119,120,169)

Partie D

(65, 72,97) est un triplet pythagoricien car $97^2 = 65^2 + 72^2$. L'unité de longueur choisie est le stade .toutes les aires sont exprimées en unités d'aire.
1 stade=2 mm ; sur la figure demandée aux candidats les longueurs des côtés sont respectivement 19,4 cm ; 13 cm ; 14,2 cm. Pour la lisibilité de la correction, on a gardé sur le schéma ci-dessous les longueurs du triangle exprimées en stades.

1.



Le triangle ACB est rectangle en C car le triplet (65, 72,97) est pythagoricien : $97^2 = 72^2 + 65^2$.
Il est inscrit dans le demi-cercle de diamètre [AB].
Le milieu I de [AB] est le centre du cercle circonscrit au triangle ACB. Notons $R = \dfrac{AB}{2} = 48,5cm$.

2. L'aire du demi-disque est $a_1 = \dfrac{\pi \times R^2}{2}$; l'aire du triangle ACB est $a_2 = \dfrac{AC \times BC}{2} = 2340$; l'énoncé indique qu'il y a **équiprobabilité** du domaine où est enterré le grimoire.

La probabilité que celui-ci soit enterré à l'intérieur du triangle est $p_1 = \dfrac{a_2}{a_1}$ une valeur approchée de p_1 est 0,633.

3. Appelons : a_3 l'aire du domaine délimité par le segment [BC] et l'arc de cercle d'extrémités B et C ; a_4 l'aire du triangle CIB, et a_5 l'aire de la portion de disque associée au secteur angulaire $\widehat{\text{CIB}}$. Remarquons que $a_3 = a_5 - a_4$.
   - (CI) est la médiane issue de C du triangle ACB. Par conséquent les triangles CIB et AIC ont la même aire.
     On en déduit que $a_4 = \dfrac{a_2}{2} = 1170$.
   - Notons α la mesure en degrés de l'angle géométrique CIB ; $a_5 = \dfrac{\pi \alpha R^2}{360}$
   - Notons β la mesure en degrés de l'angle géométrique $\widehat{\text{CBA}}$:
     Le triangle BIC est isocèle en I. On en déduit que $\alpha = 180 - 2\beta$.
     $\cos(\widehat{\text{CBA}} = \dfrac{BC}{BA}\dfrac{65}{97}$
     On déduit de cette égalité une valeur approchée en degrés de β.
     $a_5 = \dfrac{\pi(180 - 2\beta)R^2}{360}$; $a_3 = a_5 - a_4 = \dfrac{\pi(180 - 2\beta)R^2}{360} - 1170$.
   - La probabilité que le grimoire soit enterré dans le domaine délimité par le segment [BC] et l'arc de cercle d'extrémités B et C est $p_2 = \dfrac{a_3}{a_1} = \dfrac{\dfrac{\pi(180 - 2\beta)R^2}{360} - 1170}{\dfrac{\pi R^2}{2}}$; une valeur approchée de p_2 est 0,151.
   - La probabilité que le grimoire soit enterré dans le troisième domaine est $p_3 = 1 - p_1 - p_2$.
     Une valeur approchée de p_3 est 0,216.

RETOUR AU SOMMAIRE

POITIERS

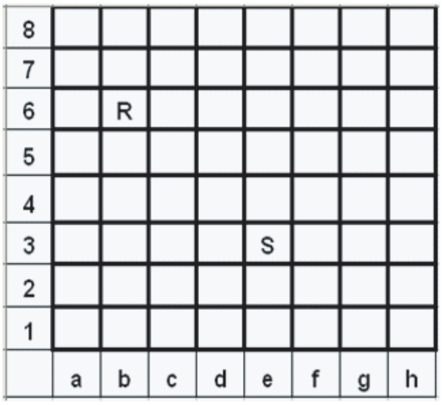
Deuxième exercice

Série S

Sur un échiquier

Énoncé

On travaille sur un échiquier de huit cases sur huit dans lequel chaque case est repérée par un couple formé d'une lettre minuscule et d'un nombre.



Ainsi la case nommée R est la case (b ;6).
Un déplacement est une succession de deux coups, un horizontal et l'autre vertical (en commençant par l'un ou l'autre et l'un ou l'autre pouvant être nul).
On appelle « distance » entre deux cases la longueur d'un déplacement qui mène de l'une à l'autre. Par exemple la « distance » entre les cases R et S est $3+3=6$, la distance entre la case R et la case repérée (g ;6) est 5.

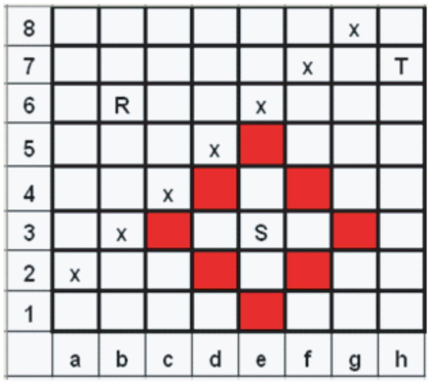
1. Placer la case T (h ;7) et préciser sa distance aux cases R et S.
2. Précisez l'ensemble des cases dont la « distance »à la case S est égale à 2.
3. On appelle médiatrice des cases R et S l'ensemble des cases équidistantes de R et S.
   a) Quelle est la médiatrice de R et S ?
   b) Quelle est la médiatrice de U(b ;3) et V(d ;4) ? Pourquoi ?
4. On dit que trois cases vérifient la relation de Pythagore si elles sont deux à deux distinctes et si le carré de la « distance » entre deux de ces cases, est égale à la somme des carrés des « distances » de ces cases à la troisième.
   a) Donner un (ou plusieurs) exemples triplets de cases vérifiant la relation de Pythagore.
   On veut montrer que la relation de Pythagore n'est jamais vérifiée pour trois cases dont les centres forment un triangle rectangle
   b) Le justifier lorsque deux de ces cases sont sur une même ligne horizontale ou verticale.
   c) Écrire (en langue naturelle ou dans un langage de son choix) un algorithme qui permette de le vérifier dans tous les cas.
5. On choisit deux cases au hasard et de façon indépendante dans l'échiquier.

a) Déterminer la probabilité d'avoir deux fois la même case.

b) Quelle est la probabilité d'avoir un point à « distance »2 du point R et l'autre à « distance »2 du point S.

6. On choisit à nouveau deux cases au hasard, mais avec la condition que la première soit au bord de l'échiquier (c'est à dire colonnes a, h et/ou lignes 1, 8).
Quelle est la probabilité d'avoir deux cases à la distance 2 l'une de l'autre.

Éléments de solution



1. d (R, T) = 7 et d (S, T) = 7
2. Les cases sont : (c ;3), (d ;2), (e ;1), (f ;2), (g ;3), (f ;4), (e ;5) et (d ;4).
Elles sont colorées sur la figure ci-jointe.
3. a) Les cases qui appartiennent à la médiatrice de R et S sont marquées d'une croix sur la figure.
Il s'agit des cases :
(g ;8) à la distance 7 de R et S,
(a,2) et (f ;7) à la distance 5 de R et S,
(b ;3), (c ;4), (d ;5) et (e ;6) à la distance 3 de R et S.

b) Associons à chaque case une couleur (Noir ou Blanc) disposées comme sur un damier.
On peut remarquer que la distance entre deux cases de même couleur est un entier pair, alors que celle entre deux cases de couleurs distinctes est un entier impair.
Si une case X est à égale distance de deux cases Y et Z, alors si cette distance commune est paire, les trois cases sont de même couleur, et sinon, Y et Z sont de couleur contraire à celle de X.
Dans les deux cas, Y et Z sont de même couleur.
Or les deux cases données ne sont pas de même couleur, il n'existe donc aucune case qui soit à égale distance d'elles deux.

4. a) Un exemple de trois cases pour lesquelles la distance utilisée ci-dessus vérifie la formule de Pythagore est : R (b ;6), W (d ;7) et X (c ;3)

b) Si trois cases forment un triangle rectangle au sens traditionnel du terme, on a, en raison de la définition de cette distance : $AC^2 = (AB + BC)^2$ et pas $AC^2 = AB^2 + BC^2$.

c) On peut prendre des coordonnées centrées en l'un des points (qui peut être l'angle droit) et travailler sur les coordonnées (x, x') et (y, y') des deux autres points.
Poser t=0

```
pour x de -7 à 7,
pour x' de -7 à 7,
pour y de -7 à 7
pour y' de -7 à 7
si (xx'+yy'=0) et ((abs(x-x')+abs(y-y'))š=(abs(x)+abs(x'))š+(abs(y)+abs(y'))š )
alors si Not ( ((x=0)et(y=0)) ou ((x'=0)et(y'=0)) ou ((x=x')et(y=y')) ) faire t=t+1
next y',
next y,
next x',
next x
Si t=0 écrire "le problème n'a pas de solution" else écrire "le problème a " t "solutions"
```

5. a) $p_1 = \dfrac{1}{8^2} = \dfrac{1}{64}$

b) $p_2 = \dfrac{7}{8^2} \times \dfrac{8}{8^2} + \dfrac{8}{8^2} \times \dfrac{7}{8^2} = \dfrac{7}{256} \approx 0.0237.$

6. $p_3 = \dfrac{4}{8^2} \times \dfrac{3}{8^2} + \dfrac{8}{8^2} \times \dfrac{4}{8^2} + \dfrac{16}{8^2} \times \dfrac{5}{8^2} = \dfrac{17}{512} \approx 0,0332$

RETOUR AU SOMMAIRE

POITIERS

Troisième exercice

Séries autres que S

Le casse-tête électronique

Énoncé

Dans un magasin vendant des jeux de réflexion, des casse-tête et des puzzles je suis tombé sur une calculette toute simple mais un peu étrange. Elle ne présentait qu'une seule touche d'opération, marquée de l'énigmatique symbole Δ. Toutes les autres touches m'étaient familières.

Au dos du produit on pouvait lire :

> **Casse-tête numéro 1**. Il s'agit pour vous de trouver un moyen d'additionner et de soustraire deux nombres non nuls à l'aide de la seule touche d'opération disponible : Δ.
> Mais bien sûr, avant cela, il vous faudra deviner la loi de fonctionnement de cette touche.
> Bon courage !

Intrigué, j'ai acheté la calculette et, rentré chez moi, j'ai effectué les quelques essais ci-dessous :
$0\Delta 1 =$ ERROR (c'est à dire un message « *d'ERREUR* »).
$1\Delta 0 =$ ERROR (c'est à dire un message « *d'ERREUR* »)).
$1\Delta 1 = 0$
$1\Delta - 1 = 2$
$1\Delta 2 = 0.5$
$2\Delta 1 = -0.5$
$1\Delta 0.5 = -1$
$0.5\Delta 1 = 1$

Si a, b et x désignent des nombres non nuls :

1. Comment est calculé le résultat de $a\Delta b$?
2. On note $\mathrm{T}_1(x) = x + 1$ et $\mathrm{T}_{-1}(x) = x - 1$. Vérifier qu'en général, on a :
   $\mathrm{T}_1(x) = [(1\Delta x)\Delta 1]\Delta(-0,5)$
   $\mathrm{T}_{-1}(x) = (1\Delta[x\Delta(-1)])\Delta 0,5$.

3. En déduire une façon d'obtenir presque toujours (à quelques exceptions près) l'inverse d'un nombre réel non nul x, noté $\mathrm{Inv}(x) = 1/x$ à partir de $\mathrm{T}_1(x)$ ou de $\mathrm{T}_{-1}(x)$.
4. Finalement, à quelques exceptions près, comment calculer $S(a,b) = a + b$ et $D(a,b) = ab$?
5. Quels sont les cas particuliers, lors des calculs de $a+b$ et de $a-b$ par les procédures précédentes, où la calculette renvoie un message « D'ERREUR »alors que ni a ni b ne sont nuls ? Comment traiter ces cas ?

Au dos du produit, on pouvait lire aussi :

Casse-tête numéro 2.
Il s'agit pour vous maintenant de trouver un moyen de multiplier et de diviser deux nombres non nuls à l'aide de la seule touche d'opération disponible : Δ.

6. *Aux exceptions près*, comment calculer le produit de deux nombres réel a et b, noté $P(a,b) = a \times b$, et le quotient de deux nombres réels a et b, noté $Q(a,b) = a \div b$?

Éléments de solution

1. Pour a et b non nuls $a\Delta b = 1/a - 1/b$.
2. Vérification immédiate. A noter que T_1 n'est pas définie en 0 et en 1 et que T_{-1} n'est pas définie en 0 et en -1.
3. On obtient $\mathrm{Inv}(x)$ par $[1\Delta \mathrm{T}_1(x)]\Delta 1$ ou par $1\Delta[\mathrm{T}_{-1}(x)\Delta(-1)]$. A noter que dans les deux cas Inv n'est pas définie en 0, 1 et -1.
4. D'où le moyen d'obtenir en général $S(a,b) = a + b$ en effectuant $\mathrm{Inv}(a)\Delta\mathrm{Inv}(-b)$ et $D(a,b) = a - b$ en effectuant $\mathrm{Inv}(a)\Delta\mathrm{Inv}(b)$.
5. Quant aux cas particuliers, en continuant à supposer bien sûr que ni a ni b ne sont nuls, mais cela n'est pas bien gênant, ils sont traités dans le tableau ci-dessous.
   Pour $S(a,b)$:

b / a	-1	1	Différent de 1 et -1
-1	$(-1)\Delta 1$	$\mathrm{T}_{-1}(1)$	$\mathrm{T}_{-1}(a)$
1	$\mathrm{T}_1(-1)$	$1\Delta(-1)$	$\mathrm{T}_1(a)$
Différent de 1 et -1	$\mathrm{T}_{-1}(b)$	$\mathrm{T}_1(b)$	Procédé général

   Pour $D(a,b)$

b / a	-1	1	Différent de 1 et -1
-1	$\mathrm{T}_1(-1)$	$1\Delta(-1)$	$\mathrm{T}_1(a)$
1	$(-1)\Delta 1$	$\mathrm{T}_{-1}(1)$	$\mathrm{T}_{-1}(a)$
Différent de 1 et -1	$\mathrm{T}_{-1}(-b)$	$\mathrm{T}_1(-b)$	Procédé général

6. On note $\mathrm{C}(x) = x^2$. On obtient $\mathrm{C}(x)$ par $[x\Delta\mathrm{T}_1(x)]\Delta[\mathrm{Inv}(x)]$. On note $\mathrm{M}(x) = x/2$. On obtient $\mathrm{M}(x)$ par $\mathrm{Inv}[x\Delta(-x)]$. On utilise alors l'identité $a \times b = [(a+b)^2 - (a^2+b^2)]/2$ et on obtient P $(a,b) = a \times b$ par $\mathrm{M}[\mathrm{D}(\mathrm{C}[\mathrm{S}(a,b)], \mathrm{S}[\mathrm{C}(a), \mathrm{C}(b)]\ )]$. D'où le calcul $\mathrm{Q}(a,b) = a \div b = \mathrm{P}[a, \mathrm{Inv}(b)]$

RETOUR AU SOMMAIRE

POLYNÉSIE

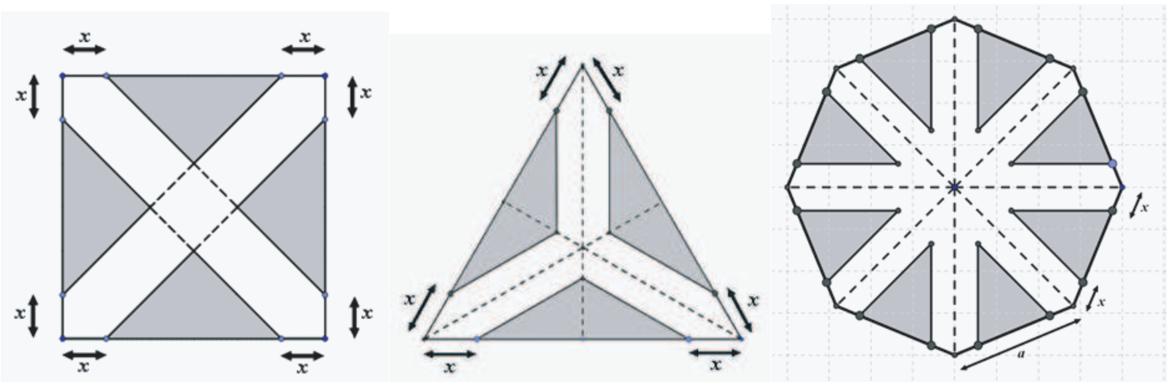
Premier exercice

Toutes séries

Jeux de fléchettes

Énoncé

On a fabriqué des cibles, l'une est carrée de côté a, dans laquelle on a tracé une croix comme indiqué sur le dessin, l'autre est formée d'un triangle équilatéral de côté a avec une croix comme indiqué sur le second dessin. La dernière cible est constituée d'un polygone régulier à n côtés de côté a dans lequel on a formé « l'étoile » comme indiqué sur le schéma (ici cas où $n = 8$).
On lance une fléchette. Le but de l'exercice est de déterminer dans chaque cas la probabilité d'atteindre la croix (partie blanche) si on a atteint la cible et enfin de comparer ces probabilités.
On rappelle que la probabilité p pour que la fléchette atteigne la zone blanche est $p = \dfrac{\text{Aire de la partie blanche}}{\text{Aire de la cible}}$.



Première cible (carrée)

1. On suppose ici que $a = 4$ et $x = 2$. Calculer la probabilité p pour que la fléchette atteigne la croix (partie blanche)
2. On se trouve ici, dans le cas général, exprimer en fonction de a et de x , la probabilité p d'atteindre la zone blanche de la cible carrée.

Deuxième cible (triangle équilatéral)

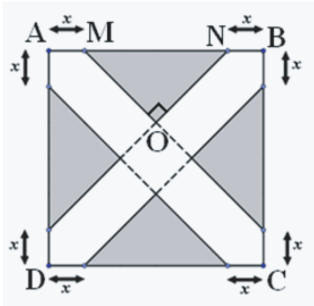
1. On se trouve ici, dans le cas général, exprimer en fonction de a et de x , la probabilité p' d'atteindre la zone blanche de la cible triangulaire.
2. Comparer les probabilités p et p'.

Cas général (polygones réguliers)

1. Exprimer en fonction de a et de x , la probabilité p" d'atteindre la zone blanche de la cible polygonale. Conclure.
2. On suppose ici que $a = 10$, déterminer la longueur x pour laquelle la probabilité d'atteindre la zone blanche dans une cible est égale à $\dfrac{1}{2}$.

Éléments de solution

Première cible

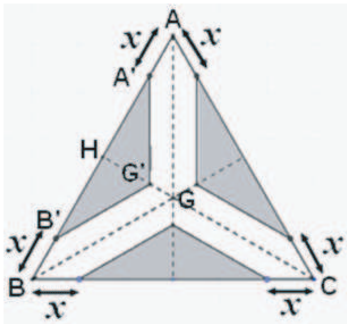


1. La zone grise n'existe pas $MN = 0$ (voir figure)
   La zone blanche correspond au carré ABCD. La probabilité cherchée est alors de 1. (on est sûr d'atteindre la zone blanche si on atteint la cible.
   Remarque : dans cet exercice il faut que $x \leqslant a/2$
2. La zone grise est formée de 4 triangles rectangles isocèles tous identiques à MON. Ils forment un carré de côté MN.
   L'aire grise $\mathcal{A}$ est donc égale à MN^2. On a donc $\mathcal{A} = (a-2x)^2$.

   La probabilité p cherchée est donc $p = 1 - \dfrac{\text{Aire grise}}{\text{Aire du carré ABCD}}$

   Soit $p = 1 - \dfrac{(a-2x)^2}{a^2} = 1 - \left(\dfrac{a-2x}{a}\right)^2$

Deuxième cible



1. $CH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ donc l'aire de ABC est $\dfrac{\dfrac{a\sqrt{3}}{2} \times a}{2} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

   Donc l'aire de GAB est égale à 1/3 de celle de ABC, soit $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{12}$.

   Le triangle G'A'B' est une réduction de GAB de rapport $k = \dfrac{A'B'}{AB} = \dfrac{a-2x}{a}$.

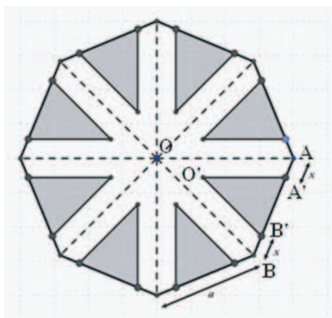
   L'aire de G'A'B' $= k^2 \times aire(GAB) = \left(\dfrac{a-2x}{a}\right)^2 \times \dfrac{a^2\sqrt{3}}{12}$.

   L'aire grise $\mathcal{A}$ est égale à 3 fois celle de G'A'B' d'où $\mathcal{A} = \left(\dfrac{a-2x}{a}\right)^2 \times \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

   La probabilité p' cherchée est donc $p' = \dfrac{\text{Aire grise}}{\text{Aire du triangle ABC}}$.

   Soit $p' = 1 - \dfrac{\left(\dfrac{a-2x}{a}\right)^2 \times \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}}{\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}} = 1 - \left(\dfrac{a-2x}{a}\right)^2$.
2. On a $p' = p$.

Troisième cible



1. Le triangle O'A'B' est une réduction du triangle OAB de rapport
   $k = \dfrac{A'B'}{AB} = \dfrac{a-2x}{a}$.
   L'aire de O'A'B'$= k^2\times$ aire(OAB)
   $n\times$ l' aire de O'A'B' $= n \times k^2 \times$l'aire de OAB.
   L'aire grise $\mathcal{A}$ est égale à n fois celle de O'A'B'
   et l'aire du polygone est égale à n fois celle de OAB, on a donc l'aire grise $\mathcal{A}$ est égale à $k^2\times$ l'aire du polygone.

La probabilité p" cherchée est donc $p" = 1 - \dfrac{\text{Aire grise}}{\text{Aire du polygone}}$

Or $\dfrac{\text{Aire grise}}{\text{Aire du polygone}} = k^2 = \left(\dfrac{a-2x}{a}\right)^2$

$p" = 1 - \left(\dfrac{a-2x}{a}\right)^2$.

2 On a $p" = \dfrac{1}{2}$. D'où $\left(\dfrac{a-2x}{a}\right)^2 = \left(\dfrac{10-2x}{10}\right)^2 = \dfrac{1}{2}$, soit $\dfrac{10-2x}{10} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, soit $20 - 4x = 10\sqrt{2}$ et $x = \dfrac{20-10\sqrt{2}}{4} \leqslant 5$ $(a/2 = 5)$.

RETOUR AU SOMMAIRE

POLYNÉSIE

Deuxième exercice

Toutes séries

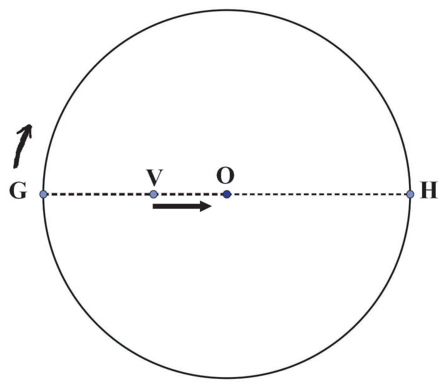
Gendarme et Voleur autour d'un bassin

Énoncé

Un gendarme **G** poursuit un voleur **V**. Sur terre et sur l'eau le voleur est plus rapide que le gendarme. Le voleur est contraint de traverser un bassin circulaire rempli d'eau et de rayon R. Mais la vitesse sur terre en ligne droite du gendarme est quatre fois supérieure à celle du voleur dans l'eau.
Le gendarme décide donc de ne pas pénétrer dans le bassin, de tourner autour de celui-ci et d'attraper le voleur dès qu'il sort du bassin. Lorsque le gendarme arrive au bord du bassin, le voleur se trouve entre le point G et O le centre du bassin.
Le but de cet exercice est de trouver une stratégie permettant au voleur d'échapper au gendarme.

Première stratégie : On se pose la question de savoir si le voleur peut échapper au gendarme en joignant le bord opposé en ligne droite.

1. Expliquer pourquoi le gendarme ne va commencer à tourner que lorsque le voleur atteindra O
2. Le voleur veut ensuite sortir en H. Est-ce une bonne stratégie pour échapper au gendarme ?



Seconde stratégie :

A. Calculs de vitesses angulaires
Le voleur tourne autour du cercle de centre O et de rayon r (r<R). Le gendarme tourne également dans le même sens, évidemment

1. *Cas particulier :* On suppose ici que la vitesse du voleur est de $v = 2$ m/s et $R = 10$ m.
   a) Quelle est la vitesse angulaire en degré par seconde du gendarme ?
   b) Si $r = 5$ m, calculer la vitesse angulaire en degré par seconde du voleur ?
   c) Quel est celui qui tourne le plus vite ?
2. *Cas général*
   a) Exprimer en fonction de R, la vitesse en degré par seconde du gendarme ?
   b) Exprimer en fonction de r, la vitesse en degré par seconde du voleur ?

c) Prouver que si le voleur tourne en suivant un cercle de centre O et de rayon inférieur strictement à $R/4$, il tourne autour de O plus vite que le gendarme

B. Recherche d'une stratégie permettant au voleur d'échanger au gendarme

1. Expliquer pourquoi le voleur peut se placer n'importe où dans un disque de centre O et de rayon inférieur ou égal à $6R/25$ et cela quelle que soit la position du gendarme.
2. En déduire une stratégie permettant au voleur d'échapper au gendarme.

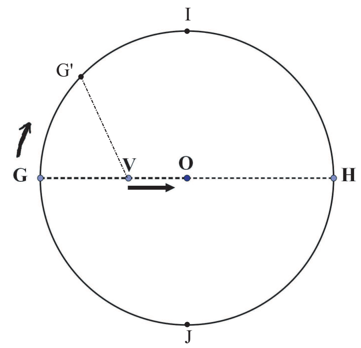
Éléments de solution

Première stratégie

1. Soit G' un point du demi–cercle IGJ.

   On a $G'V^2 - GV^2 = \left(\overrightarrow{G'O} + \overrightarrow{OV}\right)^2 - \left(\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OV}\right)^2 = 2\overrightarrow{GO'}.\overrightarrow{OV} - 2\overrightarrow{GO}.\overrightarrow{OV}$
   $= 2\overrightarrow{G'O}.\overrightarrow{OV} > 0.$

   On a donc $G'V > GV$ tant que **V** n'a pas atteint O et **G** s'éloignerait de **V** s'il continuait à tourner.



2. Pour aller de O à H à la vitesse v, le voleur met un temps $\dfrac{R}{v}$ tandis que pour parcourir un demi–cercle de rayon R à la vitesse g, le gendarme met un temps $\dfrac{R}{g}$

   Mais, par hypothèse, $g = 4v$ et $\dfrac{\pi R}{g} - \dfrac{\pi R}{4v} < \dfrac{R}{v}$.
   Le gendarme arrive donc en H avant le voleur.

Seconde stratégie

A - Calcul de vitesse angulaire

1. a) Le gendarme tourne de 180° quand il a parcouru πR mètres dons dans un temps $\dfrac{\pi R}{g}$ secondes, donc avec une vitesse angulaire $180\dfrac{g}{\pi R} = \dfrac{18g}{\pi}$ degrés par seconde.

   b) De même, la vitesse angulaire du voleur est $\dfrac{180}{\pi}.\dfrac{v}{r} = \dfrac{36}{\pi}\, v$ degrés par seconde.

   c) Comme $g = 4v$, la vitesse angulaire du gendarme est deux fois supérieure à celle du voleur.

2. a) $\dfrac{180\ g}{\pi R}$

   b) $\dfrac{180v}{\pi R}$

   c) Si $r < \dfrac{R}{4}$ et $g = 4v$, on a $\dfrac{g}{R} < \dfrac{v}{r}$.
   Le voleur tourne autour de O plus vite que le gendarme.

B. Recherche d'une stratégie permettant au voleur d'échapper au gendarme

1. Si le voleur est à une distance d de O, il se déplace dans la direction de O si $d > \dfrac{GR}{25}$ et dans la direction opposée si $d < \dfrac{GR}{23}$, jusqu'à atteindre le cercle de centre O et de rayon $\dfrac{GR}{25}$. Il tourne alors sur ce cercle jusqu'à être diamétralement opposé à G, ce qui lui est loisible car sa vitesse angulaire est supérieure à celle de **G**.
   Pour atteindre le bord du bassin, il lui reste à parcourir un segment de droite de longueur $R\left(1 - \dfrac{6}{25}\right) = \dfrac{19R}{25}$, ce qui, à la vitesse v lui demande un temps de $\dfrac{19R}{25v}$ secondes.
   Tandis que le gendarme doit parcourir un demi–cercle de longueur πR, ce qui, à la vitesse g, lui demande $\dfrac{\pi R}{g} = \dfrac{\pi R}{4v}$.
   Or $\dfrac{\pi}{4} > 0,785 > 0,76 = \dfrac{19}{25}$.
   Cette stratégie permet au voleur d'échapper au gendarme.

RETOUR AU SOMMAIRE

REIMS

Premier exercice

Toutes séries

Les nombres fâchés

Énoncé

> ***Rappel :*** *On dit que deux entiers naturels non nuls a et b sont premiers entre eux si leur seul diviseur commun est 1.*
>
> *Par exemple : 4 et 7 sont premiers entre eux mais 6 et 10 ne sont pas premiers entre eux, en effet 2 est un diviseur commun à 6 et 10.*

Soient a et b deux nombres entiers naturels non nuls.
On dit que a et b sont « *fâchés* » lorsque a, b et $a + b + 1$ sont deux à deux premiers entre eux.

1. Donner un exemple de deux nombres « *fâchés* ».
2. Démontrer que a et b doivent-être impairs pour qu'ils puissent être « *fâchés* ».
3. Démontrer que 1 est « *fâché* »avec n'importe quel nombre entier impair.
4. Posons $a = 15$
   a) Soit b un nombre entier impair premier avec a.
   Montrer que a et b sont « *fâchés* » si et seulement si, a et $b + 1$ sont premiers entre eux.
   b) Proposer un algorithme, à appliquer sur le tableau ci-dessous, pour déterminer tous les nombres « *fâchés* » avec 15 compris entre 1 et 100.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

   c) Appliquer cet algorithme au tableau ci-dessus et déterminer ainsi tous les nombres « *fâchés* » avec 15 et compris entre 1 et 100.

Éléments de solution

1. Par exemple $a = 1$ et $b = 3$.
2. • a et b ne peuvent évidemment pas être pairs tous les deux.

- Si l'un des deux nombres est pair.
  Par exemple a pair et donc b impair alors $a+b+1$ est pair ce qui implique que a et $a+b+1$ ne sont pas premiers entre eux et donc a et b ne sont pas « *fâchés* ».

Conclusion : a et b doivent-être impairs pour qu'ils puissent être fâchés.

3. Soit b un nombre impair.
   1, b et 1, $1+b+1$ sont évidements premiers entres eux.
   Reste b et $b+2$:
   Supposons qu'ils ne soient pas premiers entre eux alors il existe un diviseur commun d à b et à $b+2$.
   Donc $d \neq 1$ divise $b+2-b=2$ d'où $d=2$.
   On en déduit que b est divisible par 2, ce qui est en contradiction avec b impair.
   Conclusion : b et $b+2$ sont premiers entre eux.
   D'où 1 et b sont « *fâchés* ».

4. a) **Implication** : Démontrons la contraposée

   Si a et $b+1$ ne sont pas premiers entre eux, il existe un diviseur commun $d \neq 1$ de a et de $b+1$ alors d divise $a+b+1$ $d \neq 1$ divise a et $a+b+1$ donc a et b ne sont pas « *fâchés* ».

   Réciproque : a et $b+1$ sont premiers entre eux

   - a et b sont premiers entre eux (énoncé)
   - a et $b+1$ sont premiers entre eux donc a et $a+b+1$ sont premiers entres eux. (car si $d \neq 1$ divise a et $a+b+1$ alors d divise $a+b+1-a=b+1$)
   - Il reste à démontrer que b et $a+b+1$ sont premiers entres eux.
     Raisonnement par l'absurde :
     Si $d \neq 1$ divise b et $a+b+1$ alors d divise $a+b+1-b=a+1=16$.
     On en déduit que d est pair et donc que b est pair ce qui en contradiction avec b impair.

   Conclusion : a et b sont « *fâchés* ».

   b) Barrer tous les nombres pairs.
   Barrer tous les multiples de 3.
   Barrer tous les multiples de 5.
   Barrer tous les nombres juste avant les multiples de 3.
   Barrer tous les nombres juste avant les multiples de 5.

   c)

$\boxed{01}$	~~02~~	~~03~~	~~04~~	~~05~~	~~06~~	$\boxed{07}$	~~08~~	~~09~~	~~10~~
~~11~~	~~12~~	$\boxed{13}$	~~14~~	~~15~~	~~16~~	~~17~~	~~18~~	~~19~~	~~20~~
~~21~~	~~22~~	~~23~~	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	~~29~~	~~30~~
$\boxed{31}$	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	$\boxed{37}$	~~38~~	~~39~~	~~40~~
~~41~~	~~42~~	$\boxed{43}$	~~44~~	~~45~~	~~46~~	~~47~~	~~48~~	~~49~~	~~50~~
~~51~~	~~52~~	~~53~~	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	~~59~~	~~60~~
$\boxed{61}$	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	$\boxed{67}$	~~68~~	~~69~~	~~70~~
~~71~~	~~72~~	$\boxed{73}$	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	~~79~~	~~80~~
~~81~~	~~82~~	~~83~~	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	~~89~~	~~90~~
$\boxed{91}$	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	$\boxed{97}$	~~98~~	~~99~~	~~100~~

RETOUR AU SOMMAIRE

REIMS

Deuxième exercice

Série S

Algorithme

Énoncé

On considère l'algorithme suivant :
Calcul de la valeur Y de la fonction f en X :

```
1 DANS Y
POUR k allant de 1 à 3
     Y * (X-k) dans Y
FIN du POUR
Affiche Y
```

1. Faire un tableau de signe de la fonction f sur $]-\infty;+\infty[$.
   On modifie maintenant la ligne 2 en remplaçant « `POUR k allant de 1 à 3` » par « `POUR k allant de 1 à 100` ».
2. Faire un tableau de signe de la nouvelle fonction f sur $]-\infty;+\infty[$.

Dans la suite de l'exercice, N est un entier naturel non nul.

On modifie de nouveau l'algorithme pour obtenir :

```
Demander à l'utilisateur la valeur de N
1 DANS Y
POUR k allant de 1 à N
     Y * (X-k) dans Y
FIN du POUR
Affiche Y
```

3. Établir, en fonction de la valeur de N, un tableau de signe de cette autre fonction f sur $]-\infty;+\infty[$.

Soit le nouvel algorithme :
Calcul de la valeur Y de la fonction g en X :

```
Demander à l'utilisateur la valeur de N
1 DANS Y
POUR k allant de -N à N
     Y * (X-k) dans Y
FIN du POUR
Affiche Y
```

4. Modifier l'algorithme pour calculer $g(x)$ avec une seule boucle allant de 1 à N.
5. Exprimer $g(x)$ en fonction $f(x)$ et de $f(-x)$.

Note : $(-1)^n$ est égal à 1 lorsque n est pair et est égal à (-1) lorsque n est impair.

Éléments de solution

1. La fonction définie ainsi a pour formule $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$: son tableau de signe est donc :

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

2. On trouve $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)\dots(x-100)$ et donc

x	$-\infty$		1		2		$\dots$		99		100		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$		$+$	$\cdots$	$+$		$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$	$\cdots$	$+$		$+$		$+$	
$\cdots$													
$x-99$		$-$		$-$		$-$	$\cdots$	$-$	0	$+$		$+$	
$x-100$		$-$		$-$		$-$	$\cdots$	$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$-$	0	$+$	

Car dans la première colonne nous avons 100 signes moins, soit un nombre pair, dans la suivante 99 signes moins, soit un nombre impair et enfin un seul signe moins dans l'avant dernière et aucun dans la dernière.

3. On trouve de même $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)\cdots(x-N)$ et donc

x	$-\infty$		1		2		$\cdots$		$N-1$		N		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$		$+$	$\cdots$	$+$		$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$	$\cdots$	$+$		$+$		$+$	
$\cdots$							$\cdots$						
$x-99$		$-$		$-$		$-$	$\cdots$	$+$		$+$			
$x-100$		$-$		$-$		$-$	$\cdots$	$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$-$	0	$+$	

Car dans la première colonne nous avons N signes moins, soit un nombre pair, dans la suivante $N-1$ signes moins, soit un nombre impair et enfin un seul signe moins dans l'avant–dernière et aucun dans la dernière.

On trouve de la même façon dans le cas où N est impair :

x	$-\infty$		1		2		3		$\cdots$		N		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	$\cdots$	$\cdots$	0	$+$	

4. Deux possibilités

```
Demande N
1 DANS Y
POUR k allant de 1 à N
     Y * (X-k)*(-X-k) dans Y ou
FIN du POUR
Y*(-1)^ N*X DANS Y Affiche Y
```

```
Demande N
1 DANS Y
POUR k allant de 1 à N
     Y * (X-k)*(-X-k) dans Y ou
FIN du POUR
Y*X DANS Y Affiche Y
```

5. On en déduit : $g(x) = f(x).(-1)^n.f(-x).x$

RETOUR AU SOMMAIRE

REIMS

Troisième exercice

Séries autres que S

Quadrilatères

Énoncé

On note F la famille des quadrilatères non croisés ABCD vérifiant simultanément les deux conditions :
$AB = BC = 3$ cm
$CD = DA = 5$ cm

1. Construire deux quadrilatères non superposables de la famille F en laissant les traits de construction apparents.
2. Calculer les aires des deux quadrilatères que vous venez de construire. On pourra mesurer sur le dessin les longueurs utiles au calcul de l'aire.
3. Déterminer parmi tous les quadrilatères de la famille F celui qui a la plus grande aire. Justifier votre résultat.

Éléments de solution

1. Le quadrilatère ABCD possède un axe de symétrie : la droite (BD).
2. L'aire du quadrilatère ABCD est donc égale à deux fois l'aire du triangle ABD.
Dans le triangle ABD, AB et AD sont fixes, l'aire est donc maximale lorsque les droites (AB) et (AD) sont orthogonales. Dans ces conditions, l'aire du triangle ABD est égale à 7,5 cm^2.
3. Le quadrilatère de la famille F ayant la plus grande aire est donc tel que les angles de sommets A et C sont droits et son aire vaut 15 cmš.

RETOUR AU SOMMAIRE

RENNES

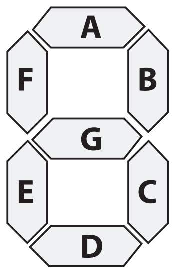
Premier exercice

Toutes séries

L'afficheur

Énoncé

Les afficheurs 7 segments sont un **type d'afficheur** très présent sur les **calculatrices** et **montres** à affichage numérique : les **caractères** (des **chiffres**, bien que quelques **lettres** soient parfois également utilisées) s'écrivent en allumant ou en éteignant des segments qui sont au nombre de sept. Par exemple, quand les 7 segments sont allumés, on obtient le chiffre 8 ; pour afficher le 4, quatre segments sont allumés B, C, F et G, les autres sont éteints.



1. Compléter le tableau suivant par des 0 et des 1 : 0 signifiant le segment est éteint et 1 signifiant le segment est allumé.

Chiffre	Segment A	Segment B	Segment C	Segment D	Segment E	Segment F	Segment G
0							
1							
2							
3							
4	0	1	1	0	0	1	1
5							
6							
7							
8	1	1	1	1	1	1	1
9							

2. a) Quand on écrit tous ces dix chiffres, quel est le segment le plus souvent allumé ?
   b) Pour chacun des chiffres de 0 à 9, donner le nombre total des segments allumés.
   c) Lequel de ces deux nombres nécessite le plus de segments allumés : 8744 ou 2379 ?
3. Parmi les nombres de deux chiffres de 00 à 99, quel est celui qui possède le moins de segments allumés ? et celui qui en possède le plus ?
4. Donner la liste **par ordre croissant** des 20 nombres de deux chiffres compris entre 00 et 99 qui possèdent 11 segments allumés.

5. Parmi tous les nombres de trois chiffres de 000 à 999, donner la liste **par ordre croissant** de tous les nombres ayant 9 segments allumés.

6.

Un réveil, comme celui ci–dessus, indique les heures (de 00 à 23) les minutes (de 00 à 59) et les secondes (de 00 à 59). Il est minuit, le réveil affiche donc 00 : 00 00.
Au bout de combien de temps en heures, minutes et secondes ce réveil aura–t–il pour la première fois 30 segments allumés ?

7.

Un calendrier, comme celui ci–dessus, indique le jour (un nombre de 01 à 31) et le mois (un nombre de 1 à 12). Une date est donc un nombre à quatre chiffres ; par exemple le 5 novembre est noté 05 :11 et sur la photo ci–dessus, la date est le 12 août. Nous sommes en 2013 qui n'est pas une année bissextile (28 jours en février).

a) Quelle est la date historique correspondant à la date ayant le moins de segments allumés ? Quelle est la date ayant le plus de segments allumés ?

b) Quelles sont les 34 dates ayant 22 segments allumés ?

Sources :
d'après http ://fr.wikipedia.org/wiki/ a fficheur_7_segments ;
image réveil : http ://www.canford.fr/Products/20774/58-781_WHARTON-490A02RS-HORLOGE-affichage-20mm-rouge-montage-sur-surface
image calendrier : http ://www.amazon.fr/gp/product/images/B001LNNICC/ ref=dp_image_text_z_0 ?ie=UTF8&n=13910681&s=home-theater

Éléments de solution

1.

Chiffre	Segment A	Segment B	Segment C	Segment D	Segment E	Segment F	Segment G
0	1	1	1	1	1	1	0
1	0	1	1	0	0	0	0
2	1	1	0	1	1	0	1
3	1	1	1	1	0	0	1
4	0	1	1	0	0	1	1
5	1	0	1	1	0	1	1
6	1	0	1	1	1	1	1
7	1	1	1	0	0	0	0
8	1	1	1	1	1	1	1
9	1	1	1	1	0	1	1

2. a) Le segments le plus souvent utilisé est le C.
   Le moins souvent allumé est le E.

   b)

Chiffres	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Nombre de segments allumés	6	2	5	5	4	5	6	3	7	6

   c) C'est le nombre 2379 car 8744 nécessite 18 segments allumés et 2379 nécessite 19 segments allumés.

3. Parmi tous les nombres de deux chiffres de 00 à 99, celui qui possède le moins de segments allumés est le 11 et celui qui en possède le plus est le 88.

4. Pour obtenir 11 segments allumés avec deux chiffres, on a soit $(7+4)$ segments allumés soit $(6+5)$.
   Avec 7 et 4 segments allumés les nombres sont 48 et 84.
   Avec 6 et 5 segments allumés, on a les chiffres :
   0 et 2 ou 0 et 3 ou 0 et 5 ou 6 et 2 ou 6 et 3 ou 6 et 5 ou 9 et 2 ou 9 et 3 ou 9 et 5. On obtient donc dans l'ordre croissant les 20 nombres suivants :
   02, 03, 05, 20, 26, 29, 30, 36, 39, 48, 50, 56, 59, 62, 63, 65, 84, 92, 93 et 95.

5. Pour obtenir 9 segments allumés avec trois chiffres, on a soit $(5+2+2)$ segments allumés soit $(4+3+2)$ segments allumés soit $(3+3+3)$ segments allumés.
   Avec 5, 2 et 2 segments allumés, on a les chiffres :
   2, 1 et 1 ou 3, 1 et 1 ou 5, 1 et 1.
   Avec 4, 3 et 2 segments allumés, on a :
   1, 4 et 7.
   Avec 3, 3 et 3 segments allumés on a le nombre 777.
   On obtient donc dans l'ordre croissant les 16 nombres suivants :
   112, 113, 115, 121, 131, 151, 147, 174, 211, 311, 417, 471, 511, 714, 741 et 777.

6. Il est minuit, le réveil affiche 00 00 00, il y a donc 36 segments allumés. Avec les cinq premiers zéros il a déjà 30 segments allumés. L'avant dernier chiffre ne peut donc pas être zéro.
   On essaye avec un 1 comme avant dernier chiffre ; il a donc, sans compter le dernier chiffre, 26 segments allumés. Il faut donc si possible que le dernier chiffre ait 4 segments allumés ; c'est le cas avec le 4.
   Au bout de 0 heure, 0 minute et 14 secondes ce réveil aura pour la première fois 30 segments allumés.

7. a) La date ayant le moins de segments allumés est le 1111 c'est–à–dire le 11 novembre. Et celle ayant le plus de segments allumés est le 0808 c'est–à–dire le 8 août.

   b) On remplit mois par mois le tableau de la page suivante :

Mois	Numéro du mois	Nombre de segments allumés	Nombre de segments restants	Couples de segments	Numéro des jours
Janvier	01	8	14	7 et 7	impossible
Février	02	11	11	7, 4 ; 6, 5	02, 03, 05, 20, 26
Mars	02	11	11	idem	02, 03, 05, 20, 26, 29, 30
Avril	04	10	12	7, 5 ; 6, 6	26
Mai	05	11	11	7, 4 ; 6, 5	02, 03, 05, 20, 26, 26, 30
Juin	06	12	10	5,5 ; 6,4 ; 7, 3	04, 22, 23, 25
Juillet	07	9	13	7, 6	08
Août	08	13	9	7, 2 ; 6, 3 ; 5, 4	07, 18, 24
Septembre	09	12	10	5,5 ; 6, 4 ; 7, 3	04, 22, 23, 25
Octobre	10	8	14	7, 7	Impossible
Novembre	1	4	18	Impossible	Impossible
Décembre	12	7	15	Impossible	Impossible

On obtient 34 dates ayant 22 segments allumés.
En février : 0202, 0302, 0502, 2002 et 2602.
En mars : 0203, 0303, 0503, 2003, 2603, 2903 et 3003.
En avril : 0604, 0904 et 2804.
En mai : 0205, 0305, 0505, 2005, 2605, 2905 et 3005.
En juin : 0406, 2206, 2306 et 2506.
En juillet : 0807.
En août : 0708, 1808 et 2408.
En septembre : 0409, 2209, 2309 et 2509.

RETOUR AU SOMMAIRE

RENNES

Deuxième exercice

Séries S et STI

Le théorème de Pythagore revisité

Énoncé

Damien affirme, tout fier de montrer son savoir :

« ***Dans un triangle rectangle, le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des longueurs des deux autres côtés !*** »

Mathilde lui répond : « Tu es sûr ? ». « Certain ! » rétorque Damien.
Mathilde réfléchit et dit : « Tu t'es trompé ! J'ai trouvé un triangle rectangle qui ne vérifie pas ta propriété. »

1. Trouver un triangle auquel Mathilde aurait pu penser.

   Décontenancé un instant, Damien essaie de se rattraper en disant : « Ah, mais je n'ai pas dit tous les triangles rectangles, mais il y en a qui ont cette propriété ! ».
   Il réfléchit très fort et dit : « Tiens, regarde ce triangle là ! »

2. Trouver un triangle auquel Damien aurait pu penser.

   Mathilde, moyennement convaincue de la bonne foi de Damien, le relance en disant : « Mais ça ne fait qu'un seul triangle, et tu as dis qu'il y en avait plusieurs ! »
   Nous allons essayer d'aider Damien, en cherchant des triangles rectangles vérifiant la propriété qu'il a énoncée.

3. En appelant x et y chacune des longueurs des deux côtés de l'angle droit d'un tel triangle, montrer qu'elles sont liées par la relation
$$x^2 + y^2 = x + y \qquad (1)$$

4. Réfléchissons aux couples de nombres strictement positifs qui vérifient cette relation.
   a) Montrer que les deux nombres x et y ne peuvent pas être tous les deux strictement supérieurs à 1.
   b) Montrer qu'aucun de ces deux nombres ne peut être strictement supérieur à 2.
   c) Montrer que si l'un des nombres est strictement inférieur à 1, alors l'autre est strictement supérieur à 1.
   d) Vérifier que le couple $\left(\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}; \dfrac{1}{2}\right)$ vérifie la relation (1). Que peut-on en déduire comme réponse à la recherche de Damien ?

5. Cherchons l'ensemble des couples de nombres $(x; y)$ qui vérifient la relation (1).
   a) Montrer que cette relation est équivalente à $\left(x + \dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{2}$.
   b) Dans le plan muni d'un repère orthonormal, on considère le point I de coordonnées $\left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{2}\right)$.
   Déduire de la question précédente, l'ensemble des points dont les coordonnées $(x; y)$ vérifient la relation (1).

6. Que peut répondre Damien à Mathilde, de la façon la plus précise possible, pour essayer de sauver la face ?

Éléments de solution

1. Mathilde aurait pu penser à un triangle de dimensions $AB = 3, AC = 4$ et $BC = 5$.
   On a $3^2 + 4^2 = 5^2$ et $3 + 4 \neq 5^2$. Damien aurait pu penser à un triangle de dimensions $AB = 1, AC = 1$ et $BC = \sqrt{2}$.
   On a $1^2 + 1^2 = (\sqrt{2})^2$ et $1 + 1 = \sqrt{2}$.
2. Si z est la longueur de l'hypoténuse comme $z^2 = x^2 + y^2$ et $z^2 = x + y$, on a $x^2 + y^2 = x + y$.
3. a) Si $x < 1$, on a $x^2 < x$ et si $y > 1$, on a $y^2 > y$ donc si $x > 1$ et $y > 1$, on a $x^2 + y^2 > x + y$.
   b) Si $x > 2$ on a $x^2 > 2x$ d'où $x^2 - x > x > 2$ et comme $y - y^2 = x^2 - x$, on a $y - y^2 > 2$, ce qui donne $y^2 - y + 2 < 0$ ce qui est impossible ($\Delta = -8$ et $a = 1$)
   On fait la même chose si $y > 2$.
   On peut aussi utiliser les variations de $x \mapsto x^2 - x$
   N.B. on peut mettre des inégalités larges.
   c) Si $x1$ on a $x^2 < x$ puisque $x > 0$ d'où $x^2 - x < 0$.
   On en déduit, puisque $y - y^2 = x^2 - x$ que $y - y^2 < 0$, ce qui prouve que $y < 1$.
   d) $\left(\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{2+2\sqrt{2}+1}{4} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{2\sqrt{2}+4}{4} = \dfrac{\sqrt{2}+1}{2} + \dfrac{1}{2}.$
4. a) $\left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x^2 - x + \dfrac{1}{4} + y^2 - y + \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x^2 - x + y^2 - y = 0.$
   b) Si M$(x; y)$: $x^2 - x + y^2 - y = 0 \Leftrightarrow IM^2 = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow IM = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
   L'ensemble cherché est l'arc de cercle de centre I et de rayon $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ situé dans le plan $x > 0$ et $y > 0$.
5. Il peut lui répondre qu'il y en a quand même une infinité.

RETOUR AU SOMMAIRE

RENNES

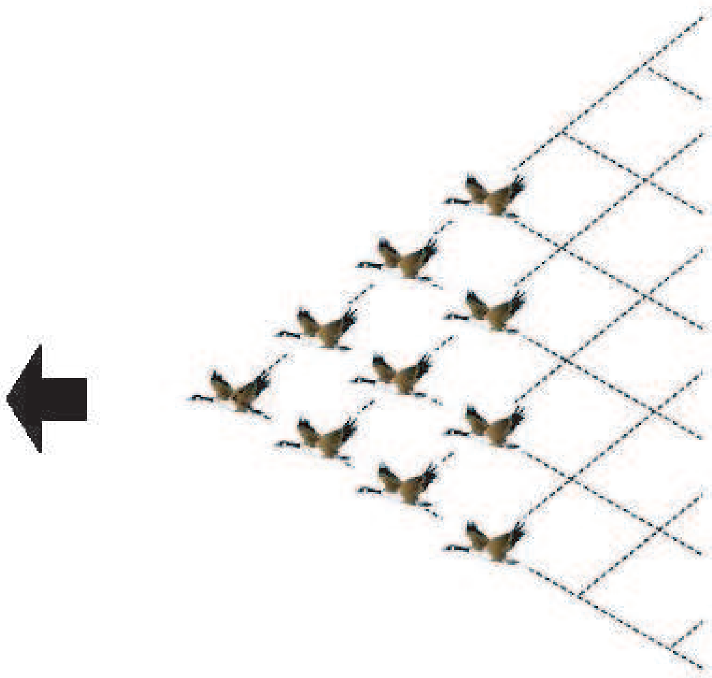
Troisième exercice

Séries autres que S et STI

Les oies sauvages

Énoncé

Un groupe de 200 oies sauvages se sont rassemblées pour leur migration annuelle, un certain nombre d'entre elles se sont regroupées pour voler en formant un triangle équilatéral comme ci-dessous.



Un bruit soudain retentit et 7 oies affolées quittent le groupe en prenant une autre direction. Toutes les autres oies du groupe, après un court moment d'hésitation, se reforment en deux nouveaux triangles équilatéraux et reprennent leur vol.

1. Pouvait-il y avoir 28 oies dans le vol triangulaire initial ?
2. Donner toutes les configurations possibles du vol triangulaire initial ?

Source : d'après « Rallye Mathématique du Centre ».

Éléments de solution

Le nombre d'oies d'un vol triangulaire peut être :

$1+2=3$
$1+2+3=6$
$1+2+3+4=10$
$1+2+3+4+5=15$
$1+2+3+4+5+6=21$
$1+2+3+4+5+6+7=28$
$1+2+3+4+5+6+7+8=36$
$1+2+3+4+5+6+7+8+9=45$
$1+2+3+4+5+6+7+8+9+10=55$
$1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11=66$
$1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+12=78$
$1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+12+13=91$
$1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+12+13+14=105$
$1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+12+13+14+15=120$
$1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+12+13+14+15+16=136$
$1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+12+13+14+15+16+17=153$
$1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+12+13+14+15+16+17+18=171$
$1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+12+13+14+15+16+17+18+19=190$

Ce sont des nombres triangulaires (les STMG n'ont pas la formule : $1+2+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$).
Il s'agit de voir si, en soustrayant 7 à un tel nombre triangulaire, le nombre obtenu est somme de deux nombres triangulaires, on trouve :

1. $28-7=21-6=15$ donc 28 convient bien.
2. Les autres sont :

   $45 : 45-7=38=10+28$
   $55 : 55-7=48=3+45$
   $91 : 91-7=84=6+78$
   $153 : 153-7=146=55+91-10=136$
   $71 : 171-7=164=28+136$
   $190 : 190-7=183=78+105$

   On procède comme dans l'exemple ci-dessous pour 66 : $66-7=59$

   $59-3=56$
   $59-6=53$
   $59-10=49$
   $59-15=44$
   $59-21=38$
   $59-28=31$

   Aucun de ces nombres n'est triangulaire : 66 ne convient donc pas.
   Inutile d'aller plus loin : si 59 était somme de deux nombres triangulaires avec l'un d'entre eux supérieur ou égal à 36, l'autre serait inférieur ou égal à 23 et on l'aurait déjà trouvé.

RETOUR AU SOMMAIRE

RÉUNION - MAYOTTE

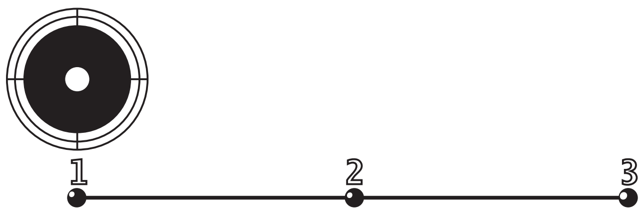
Premier exercice Réunion et Deuxième exercice Mayotte

Série S et STI

Marche aléatoire

Énoncé

Partie A - Marche aléatoire sur un segment



Dans un jeu vidéo, une cible se déplace sur un segment de la manière suivante :
Elle part de la position 1 puis change de position toutes les secondes en suivant les règles ci-dessous :

- Des positions 1 et 3, elle se déplace à la position 2 ;
- De la position 2, elle se déplace soit à la position 1 soit à la position 3, avec des probabilités identiques.

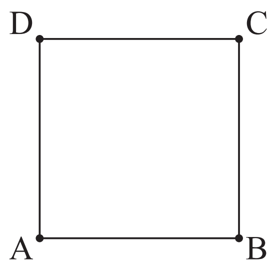
1. Quelle est la probabilité que la cible soit à la position 1, trente secondes plus tard.
2. Soit n un entier naturel impair.
   a) Déterminer la probabilité que la cible soit en position 1 au bout de n secondes.
   b) Déterminer la probabilité que la cible soit en position 2 au bout de n secondes.
3. Soit n un entier naturel non nul et pair.
   a) Déterminer la probabilité que la cible soit en position 1 au bout de n secondes.
   b) Déterminer la probabilité que la cible soit en position 2 au bout de n secondes
4. Compléter les deux algorithmes « à trous » ci–dessous de manière à ce que chacun d'entre eux permette de simuler la position de la cible au bout de n secondes.

   La fonction « Entalea(0 ;1) » permet l'affichage, de manière aléatoire mais équiprobable, de l'entier 0 ou de l'entier 1.

```
Algorithme n°1
Variables : n entier
Début
Entrer (n) ;
        Si n est impair
                Alors Afficher (« ____________________ ») ;
        FinSi ;
        Si n est pair
                Alors Si Entalea(0 ;1) = 0
                                Alors Afficher (« ____________________ ») ;
                                Sinon Afficher (« ____________________ ») ;
                FinSi ;
        FinSi ;
Fin
```

```
Algorithme n°2
Variables : n, C, i entiers
Début
        Entrer(n) ;
        C← 1 ;
        Pour i = . . . . à n Faire
                Si ____________________
                        Alors C← 2 ;
                                Sinon Si Entalea(0 ;1) = 0
                                        Alors C←1 ;
                                        Sinon C ← . . . ;
                FinSi ;
        FinPour ;
        Afficher (« la cible est en position »,C) ;
Fin
```

Partie B - Marche aléatoire sur un carré

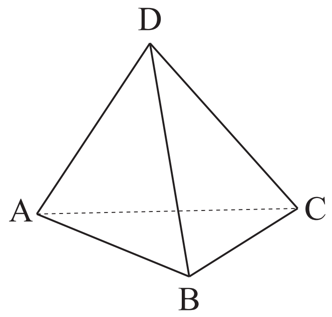


Cette fois-ci, la cible se déplace sur un carré.
Elle part du sommet A, et met une seconde pour parcourir un côté. Arrivée à un sommet, elle choisit au hasard l'un ou l'autre des deux côtés issus de ce sommet pour poursuivre sa marche.

1. Soit n un entier naturel non nul. Déterminer les positions possibles de la cible au bout de n secondes suivant la parité de n.

2. Déterminer la probabilité de l'événement « La cible est en C au bout de 4 secondess ».

Partie C - marche aléatoire sur un tétraèdre



Maintenant, la cible se déplace sur les sommets d'un tétraèdre. Toutes les secondes, on déplace la cible d'un sommet à un autre, en choisissant au hasard parmi les trois sommets possibles.
On suppose qu'au départ, la cible est en A.
Déterminer la probabilité pour que la cible revienne en A en 5 secondes.

Éléments de solution

Partie A - Sur un segment

1. **La probabilité que la cible soit en 1, 30 secondes plus tard est** $\frac{1}{2}$.
   En effet, au bout de 1, 3, 5,... 29 secondes, la cible se trouve obligatoirement en position 2. A partir de là, elle a ensuite une chance sur 2 d'être en position 1 ou 3.
2. Soit n non nul et impair :
   a) Au bout d'un nombre impair de secondes, la cible est obligatoirement en position 2 donc **la probabilité que la cible soit en position 1 au bout de** n **secondes (**n **impair) est alors 0.**
   b) **Et donc, la probabilité que la cible soit en position 2 au bout de** n **secondes (**n **impair) est 1**.
3. Soit n non nul et pair.
   a) Au bout d'un nombre impair de secondes, la cible est obligatoirement en position 2. Donc au bout de $n-1$ secondes, la cible est obligatoirement en position 2 et a donc ensuite une chance sur 2 de passer en position 1. Donc **la probabilité que la cible soit en position 1 au bout de n secondes (**n **pair) est** $\frac{1}{2}$.
   b) **Et la probabilité que la cible soit en position 2 au bout de** n **secondes (n pair) est 0**.
4. Pour l'algorithme n°1 on utilise les résultats des questions 2 et 3 et pour l'algorithme n°2, on simule pas à pas les n étapes en utilisant les règles de déplacement.

Algorithme n°1
Variables : n entier
Début
Entrer (n) ;
    Si n est impair
        Alors Afficher (« **la cible est en position 2** ») ;
    FinSi ;
    Si n est pair
        Alors Si Entalea(0 ;1) = 0
            Alors Afficher (« **la cible est en position 1** ») ;
            Sinon Afficher (« **la cible est en position 3** ») ;
        FinSi ;
    FinSi ;
Fin

Algorithme n°2
Variables : n, C, i entiers
Début
    Entrer(n) ;
    C← 1 ;
    Pour i = **1**. à n Faire
        Si **C = 1 ou C = 3**
            Alors C← 2 ;
                Sinon Si Entalea(0 ;1) = 0
                    Alors C←1 ;
                    Sinon C ← **3** ;
        FinSi ;
    FinPour ;
    Afficher (« la cible est en position »,C) ;
Fin

Partie B - Sur un carré

1. Si n pair, la cible peut être en C ou en A. Si n impair, la cible peut être en B ou en D.
2. Au bout de 4 secondes (pair), la cible est en C avec une probabilité de $\frac{1}{2}$.

Partie C - Sur un tétraèdre

De chaque sommet du tétraèdre, on peut atteindre à chaque fois 3 positions différentes. Si le départ est fixé en A, il y a alors $3^5 = 243$ trajets possibles qui durent 5 secondes.
Par ailleurs, pour être en A au bout de 5 secondes, il faut et il suffit d'être en B, C ou D au bout de 4 secondes puis d'aller en A.

On recense les trajets passant par B au bout de 1 seconde et arrivant en B, C ou D au bout de 4 secondes :

ABABC	ABCAB	ABDAB
ABCAC	ABABD	ABDAC
ABCAD	ABACB	ABDAD
ABCBC	ABACD	ABDBC
ABCBD	ABADB	ABDBD
ABCDB	ABADC	ABDBD
	ABCDC	ABDCD

Il y en a 20.
Il y a donc 3×20 trajets aboutissant en B, C ou D au bout de 4 secondes et donc 60 trajets arrivant en A au bout de 5 secondes.
La probabilité d'aboutir en A au bout de 5 secondes est donc $\frac{60}{243} = \frac{20}{81}$.

RETOUR AU SOMMAIRE

RÉUNION

Deuxième exercice

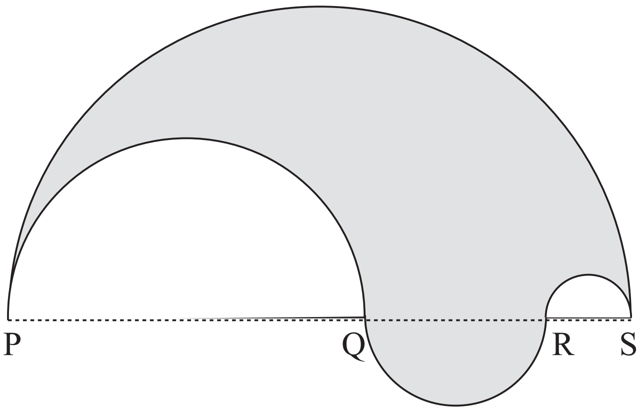
Série S et STI

Demi–cercles

Énoncé

La figure ci-dessous est construite avec quatre demi–cercles, admettant des tangentes communes en P, en Q, en R et en S.

1. **Problème de longueur**
   a) On suppose que $PR = 12$ et $QS = 6$.
   Comparer la longueur du demi-cercle de diamètre PS et celle de la courbe PQRS.
   b) Cette propriété reste-t-elle vraie quelque soient les longueurs PR et QS ?



2. **Problème d'aire**
   a) On suppose que $PR = 12$ et $QS = 6$.
   Calculer l'aire comprise entre les deux courbes (partie grisée).
   b) On suppose maintenant que les points Q et S sont fixes et que P et R sont tels que R est sur le segment [QS] et PR est le double de QS.
   Montrer que l'aire comprise entre les deux courbes est indépendante de la position du point R sur le segment [QS].

Éléments de solution

1. **Problème de longueur** :
   a) Soit ℓ_1 la longueur du demi–cercle de diamètre PS. $\ell_1 = \dfrac{\pi}{2} \times PS$.

   Soit ℓ_2 la longueur de la courbe $PQRS$:

$$\ell_2 = \frac{\pi}{2} \times PQ + \frac{\pi}{2} \times QR + \frac{\pi}{2} \times RS = \frac{\pi}{2} \times (PQ + QR + RS) = \frac{\pi}{2} \times PS.$$

   Conclusion : $\ell_1 = \ell_2$.

b) La démonstration précédente est valable quelles que soient les valeurs de PR et QS, du moment que P, Q, R et S sont alignés dans cet ordre.

2. **Problème d'aire :**

a) Soit A l'aire cherchée.

$$A = \frac{\pi}{2}\times\left(\frac{PS}{2}\right)^2-\frac{\pi}{2}\times\left(\frac{PQ}{2}\right)^2+\frac{\pi}{2}\times\left(\frac{QR}{2}\right)^2-\frac{\pi}{2}\times\left(\frac{RS}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{8}\left(PS^2-PQ^2+QR^2-RS^2\right).$$

Or $PS = PR + RS = 12 + RS$ et $PQ = PR - QR = 12 - QR$.
On obtient donc :
A= $\frac{\pi}{8}\left((12+RS)^2-(12-QR)^2+QR^2-RS^2\right)$
$= \frac{\pi}{8}(144+24RS+RS^2-144+24QR-QR^2+QR2-RS^2)$
$= \frac{\pi}{8}\times 24(RS+QR) = \frac{\pi}{8}\times 24QS = \frac{\pi}{8}\times 24\times 6 = 18\pi.$

b) On a toujours : $A = \frac{\pi}{8}\left(PS^2-PQ^2+QR^2-RS^2\right)$
On a maintenant : $PS = PR + RS = 2QS + RS, PQ + PR - QR = 2QS - QR$
On obtient donc :
A= $\frac{\pi}{8}\left((2QS+RS)^2-(2QS-QR)^2+QR^2-RS^2\right)$
$= \left(4QS^2+4QS\times RS+RS^2-4QS^2+4QS\times QR-QR^2+QR^2-RS^2\right)$
$= \frac{\pi}{8}(4QS\times RS+4QS\times QR) = \frac{\pi}{8}\times 4QS(RS+QR)$

Donc : $A = \frac{\pi}{2}\times QS^2$: ce résultat est indépendant de la position du point R sur le segment [QS].

RETOUR AU SOMMAIRE

RÉUNION

Troisième exercice

Séries autres que S

Sorties randonnées

Énoncé

Onze randonneurs (Alexandre, Bérénice,..., Knud) décident d'organiser des sorties par groupe de cinq personnes exactement, de manière que, à la fin de la saison, chacun ait marché deux fois exactement avec chacune des dix autres personnes.

1. À combien de sorties participe un randonneur ?
2. Combien de sorties seront organisées lors de la saison ?
3. Trois mêmes randonneurs pourront-ils participer à deux sorties ensemble ?
4. Indiquer une organisation pour les sorties de la saison.

Éléments de solution

1. Un randonneur doit marcher 2 fois avec ses 10 compagnons. Au cours de ses sorties, il aura donc 20 accompagnateurs. Sachant qu'il marche avec 4 personnes par sortie, il devra donc participer à 5 sorties.
2. Chacun des 11 randonneurs effectue 5 sorties. Or, chaque sortie est composée de 5 randonneurs donc le nombre de sorties sera de $\dfrac{5 \times 11}{5} = 11$.
3. Supposons que 3 randonneurs R_1 , R_2 , R_3 se soient trouvés ensemble dans 2 sorties. Il reste donc 9 sorties et chacun doit encore participer à 3 sorties, mais ils ne peuvent plus se retrouver ensemble. Ils participeront donc chacun à 3 sorties différentes parmi les 9 restantes. Choisissons un 4$^{\text{ème}}$ randonneur R_4 ayant participé à une sortie où participaient R_1, R_2, R_3. Il lui reste donc 4 sorties à effectuer. Le randonneur R_4 ne peut pas participer à la deuxième sortie effectuée parR_1, R_2, R_3 car il lui resterait alors trois sorties parmi les 9 restantes, mais quelles que soient celles qu'il choisit, il se retrouvera une troisième fois avec R_1, R_2 ou R_3.
   Mais s'il ne participe pas à la deuxième sortie effectuée par R_1, R_2, R_3, il doit effectuer 4 sorties parmi les 9 restantes. Quoi qu'il arrive, il devra donc participer à deux sorties où participe un même randonneur R_1, R_2 ou R_3 . Cela signifie qu'il se retrouvera au moins 3 fois avec ce même randonneur, ce qui est contraire au règlement.
   Trois mêmes randonneurs ne peuvent donc pas participer à plusieurs sorties ensemble.
4. Voici un exemple d'organisation de la saison, dans lequel chaque sortie est représentée par les initiales des 5 randonneurs : ABCDE, ABFGH, ACFIJ, ADGIK, AEHJK, BCHIK, BDFJK, BEGIJ, CGDHJ, CGEFK, DEIHF.

RETOUR AU SOMMAIRE

RÉUNION et MAYOTTE

Quatrième exercice (Réunion), Troisième exercice (Mayotte)

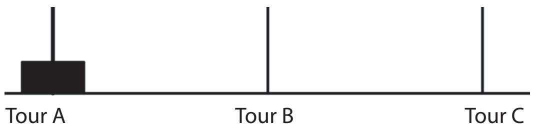
Séries autres que S

Tours de Hanoï

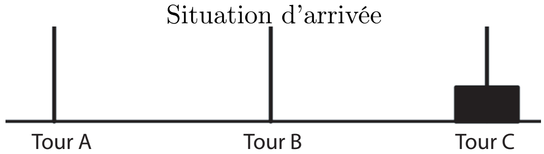
Énoncé

Règle du jeu :
Ce jeu est composé de 3 tours A, B et C et d'anneaux tous de taille différente enfilés sur ces tours.
Ces anneaux doivent obligatoirement être posés les uns sur les autres par taille décroissante.
Au départ, tous les anneaux sont enfilés sur la tour A, par taille décroissante. Le jeu consiste à déplacer tous les anneaux placés sur la tour A vers la tour C par exemple, en un minimum de déplacements.
On ne déplace qu'un anneau à la fois et on ne peut placer un anneau que sur un plus grand que lui ou sur une tour vide.
Exemples :
Avec 1 anneau :

Situation de départ

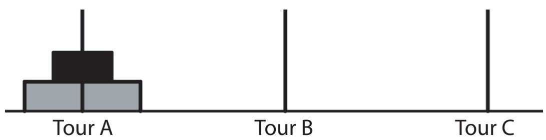


Situation d'arrivée

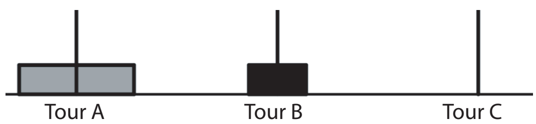


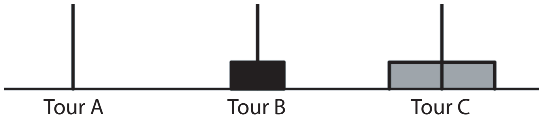
Le problème se résout alors en un coup (au minimum).
Avec deux anneaux

Situation de départ

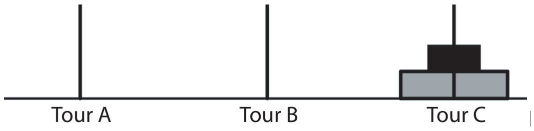


Étapes





Situation d'arrivée



Le problème se résout alors en 3 coups (au minimum).

1. Donner le nombre de coups minimum nécessaires pour déplacer un empilement de 3 anneaux de la tour A vers la tour C, en représentant toutes les étapes intermédiaires.
2. Montrer que 15 coups suffisent pour déplacer un empilement de 4 anneaux de la tour A vers la tour C.
3. Alexandre affirme qu'il arrive en 31 coups à déplacer 5 anneaux de la tour A vers la tour C. A-t-il raison ?
4. Quel est le nombre maximum d'anneaux que l'on peut déplacer en moins de 2013 coups ?
5. Alexandre affirme qu'il arrive à déplacer 30 anneaux en 1 073 741 824 coups. Est-ce possible ?

Éléments de solution

L'exercice s'appuie sur la remarque suivante qui doit faire son chemin dans la tête du candidat au fur et à mesure des questions :
Si on sait déplacer n anneaux d'une tour vers une autre, alors pour déplacer n+1 anneaux de A vers C, il suffit de :

- Déplacer les n anneaux les plus petits de A vers B (ceci est possible car sur la tour A reste le plus grand anneau et que tous les autres anneaux étant plus petits que cet anneau, on peut « négliger » le grand anneau et donc se retrouver dans la situation avec seulement n anneaux)
- Déplacer l'anneau le plus grand de A vers C
- Déplacer les n anneaux qui sont sur la tour B vers la tour C (toujours possible car on est dans une situation similaire à la première étape)

Par ailleurs, si on scinde $n + 1$ en $p + q$ (avec $p \neq 1$ et $q \neq 1$, on pourra dans un premier temps déplacer sans problème les p anneaux les plus petits de A vers B, mais on sera incapable de déplacer les q autres anneaux les plus grands de A vers C car la tour B ne pourra pas être utilisée : aucun des q anneaux ne pourra être placé sur la tour B, pour des considérations de grandeur d'anneau.
Le nombre minimum de coups s'obtient donc avec la démarche énoncée auparavant.

1. Comme pour déplacer 2 anneaux de A vers C, il fallait au minimum 3 coups, alors pour déplacer 3 anneaux de A vers C, on pourra le faire en $3 + 1 + 3 = 7$ coups (mais ici, on attend, une réponse basée sur des manipulations).
2. De même, comme on sait déplacer 3 anneaux de A vers C en 7 coups, alors pour déplacer 4 anneaux de A vers C, on peut le faire en $7 + 1 + 7 = 15$ coups.
3. Et, pour déplacer 5 anneaux, on peut le faire en $15 + 1 + 15 = 31$ coups.
4.

Nombre d'anneaux	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Nombre de coups minimum	1	3	7	4	15	31	63	127	255	511	1023

Remarque : Le $n^{\text{ème}}$ terme de la seconde ligne est égal à $2^{n-1} - 1$.
Au maximum, on peut donc avoir une tour de 10 anneaux.

5. Le nombre minimum de coups pour déplacer 30 anneaux est nécessairement impair (de proche en proche) ; par ailleurs chaque coup supplémentaire inutile devra être compensé par un coup contraire, ce qui rajoute systématiquement un nombre pair de coups. Donc au total, on ne peut réussir à déplacer 30 anneaux que par un nombre pair de coups. Alexandre a donc tort.

RETOUR AU SOMMAIRE

ROUEN - AFRIQUE OCCIDENTALE

Premier exercice

Toutes séries

Les osselets

Énoncé

Le jeu des osselets remonte à l'Antiquité grecque et se pratique à l'aide de plusieurs osselets, à l'origine des petits os (astragales) des pattes avant du mouton ou de la chèvre.
Un osselet présente quatre faces d'un aspect différent :
- des deux plus larges faces, l'une est convexe (bombée), l'autre concave (creuse).
- des deux plus étroites, l'une est plate, l'autre sinueuse.

Suivant le rapport des auteurs de l'Antiquité, à chacune de ces faces était associée une valeur numérique : la face plate correspondait à la valeur 1, la face concave à la valeur 3, la face convexe à la valeur 4 et la face sinueuse à la valeur 6.

1. Notons p_1, p_3, p_4 et p_6 les probabilités d'obtenir respectivement les valeurs 1, 3, 4 et 6 lorsqu'on lance un osselet. Des expériences statistiques ont permis d'établir que $p_1 = p_3, p_4 = p_6$ et $p_1 = 4p_4$.
Calculer les probabilités élémentaires associées aux quatre faces.
2. En Grèce, quatre osselets étaient utilisés pour jouer. Les jeunes joueurs romains les lançaient simultanément et tentaient de réaliser des combinaisons de coups, repérées par des noms (Aphrodite, Midas, Chevelure de Bérénice, Stésichore, etc.)
Le plus mauvais coup, appelé « le coup du chien », consistait à obtenir quatre faces numérotées 1 et le plus heureux coup avait pour nom le « coup de Vénus » : il correspondait au cas où l'on obtient le 1, le 3, le 4 et le 6.
   a) Vérifier que, si l'on lance simultanément quatre osselets, il y a 35 combinaisons de coups possibles.
   b) Quelle est la probabilité d'obtenir le ń coup du chien ż ?
   c) Quelle est la probabilité d'obtenir le coup constitué de trois 1 et d'un 3 ?
   d) Le coup de Stésichore est un coup dont la somme des valeurs des faces est 8.
   Quelle est la probabilité d'obtenir ce coup en jetant simultanément les quatre osselets ?

Éléments de solution

1. **Étude d'un osselet**
$p_1 + p_3 + p_4 + p_6 = 1$ puis $4p_4 + 4p_4 + p_4 + p_4 = 1$
Donc $p_4 = p_6 = \dfrac{1}{10}$ et $p_1 = p_3 = \dfrac{4}{10}$.
2. **Lancer de quatre osselets**
   a) Liste de ces combinaisons : 1111, 1113, 1114, 1116, 1133, 1134, 1136, 1144, 1146, 1166, 1333, 1334, 1336, 1344, 1346, 1366, 1444, 1446, 1466, 1666, 3333, 3334, 3336, 3344, 3346, 3366, 3444, 3446, 3466, 3666, 4444, 4446, 4466, 4666, 6666
   b) Le coup du chien s'obtient grâce au tirage 1111. Sa probabilité est donc :
   $(p_1)^4 = \dfrac{4^4}{10^4} = \dfrac{16}{625} = 0,0256.$

c) Il y a 4 possibilités : 1113, 1131, 1311 et 3111.
Donc la probabilité d'obtenir le coup constitué de trois 1 et d'un 3 vaut :
$4 \times (p_1)^3 \times p_3 = 4 \times \dfrac{4^4}{10^4} = \dfrac{64}{625} = 0,1024.$

d) On a $8 = 1 + 1 + 3 + 3$.
Il y a 6 façons (équiprobables) de le réaliser : 1133, 1313, 1331, 3113, 3131, 3311. La probabilité du coup de Stésichore est donc : $6 \times \dfrac{4^4}{10^4} = \dfrac{96}{625} = 0,1536.$

RETOUR AU SOMMAIRE

ROUEN - AFRIQUE OCCIDENTALE

Deuxième exercice

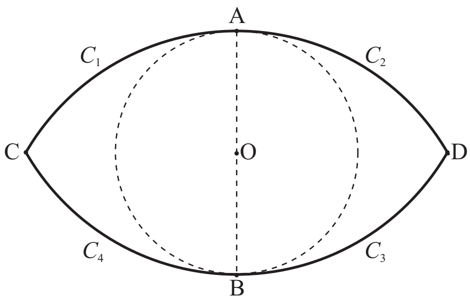
Séries S et STI2D

Lancer de fléchettes et triangle rectangle

Énoncé

On considère la cible particulière suivante :
La hauteur [AB] de la cible mesure 2a.
C_1 et C_2 forment un arc de cercle de centre B et de rayon $2a$.
C_3 et C_4 forment un arc de cercle de centre A et de rayon $2a$.
La cible est constituée de deux zones :

- Une zone circulaire centrale représentée par un disque de centre O et de rayon a, rapportant 5 points.
- La zone restante, rapportant 10 points.



Un joueur lance au hasard une fléchette sur cette cible. On suppose qu'elle atteint la cible et on note F le point d'impact de la fléchette.

Problème : On cherche à déterminer la probabilité p que le triangle ABF ainsi formé soit acutangle. (*On appelle triangle acutangle un triangle dont tous les angles sont aigus*).

Partie A :

1. Expliquer le lien entre le problème et la présence de la zone à 5 points.
2. Exprimer la probabilité q que le triangle ABF ne soit pas acutangle sous forme d'un rapport d'aires.
3. En déduire p. Cette probabilité dépend-elle de a ?

Partie B :

On choisit désormais $a = 1$ et on se place dans un repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$ tel que $\vec{v} = \overrightarrow{OA}$. On note $(x; y)$ les coordonnées du point F dans ce repère

1. Justifier que $-\sqrt{3} \leqslant x \leqslant \sqrt{3}$ et $-1 \leqslant y \leqslant 1$.
2. Démontrer que F appartient à la cible si et seulement si : $x^2 + (y+1)^2 \leqslant 4$ et $x^2 + (y-1)^2 \leqslant 4$.
3. On considère l'algorithme suivant :

```
Choisir n
CompteurA ← 0
CompteurB ← 0
    Pour i allant de 1 à n
    x ← réel aléatoire compris entre −√3 et √3
    y← réel aléatoire compris entre −1 et 1
        Si (x² + (y + 1)² ⩽ 4) et (x² + (y − 1)² ⩽ 4) alors
            CompteurA ← CompteurA+1
            Si . . . . . . . . . . . . , alors
            CompteurB ← CompteurB + 1
            FinSi
        FinSi
    FinPour
f ←. . . . . . . . . . . .
Afficher f
```

Compléter les pointillés ci-dessus de telle sorte que l'algorithme puisse être utilisé afin d'obtenir une estimation de la probabilité p.

Éléments de solution

Partie A

1. Le disque de centre O et de rayon a correspond à l'ensemble des points F pour lesquels le triangle ABF n'est pas acutangle.
2. q = Aire (disque)/Aire (cible).
3. Aire (cible) = 2 × Aire (portion_ADB), c'est-à-dire : 2× (2 × aire (arc_de_disque_ABD) − aire (triangle_ABD)).

   Aire (cible) $= 2a^2\left(\dfrac{4\pi}{3} - \sqrt{3}\right)$

   Donc $q = \dfrac{\pi a^2}{2a^2\left(\dfrac{4\pi}{3} - \sqrt{3}\right)}$, puis $p = 1 - q$, soit environ 0,36.

Partie B :

1. $\sqrt{3}$ est la demi-longueur de la cible.
2. C appartient à la cible si et seulement si : $AF \leqslant 2a$ et $BF \leqslant 2a$,
   Autrement dit : $x^2 + (y+1)^2 \leqslant 4$ et $x^2 + (y-1)2 \leqslant 4$.
3. Par exemple :

```
Choisir n
CompteurA ← 0
CompteurB ← 0
    Pour i allant de 1 à n
    x ← réel aléatoire compris entre −√3 et √3
    y ← réel aléatoire compris entre −1 et 1
        Si (x² + (y + 1)² ⩽ 4) et (x² + (y − 1)² ⩽ 4) alors
            CompteurA ← CompteurA+1
            Si [x² + y² > 1] , alors
            CompteurB ← CompteurB + 1
            FinSi
        FinSi
    FinPour
f ← compteurB/compteurA
Afficher f
```

CompteurA compte le nombre de points dans la cible.
CompteurB compte le nombre de points dans la zone où le triangle ABF est acutangle.
L'algorithme affiche alors une estimation de p. RETOUR AU SOMMAIRE

ROUEN - AFRIQUE OCCIDENTALE

Troisième exercice

Séries autres que S

Algorithme glouton

Énoncé

Dans une majorité de pays, on utilise des pièces de 1 unité, 2, 5, 10, 20, 50, 100 unités, etc. Certains pays comme les États-Unis ont mis en circulation des pièces de 25 unités. Des pièces de 3 roubles, 3 kopecks (russes) et 3 banis (roumains) ont aussi existé.
En fonction des pièces disponibles, un système monétaire est plus ou moins efficace. Un jeu de pièce sera dit efficace si, en moyenne, le nombre de pièces pour rendre la monnaie est petit.
On représentera le jeu de pièces d'une région par une liste (**en centimes**) : pour l'Europe, la liste des pièces est [200, 100, 50, 20, 10, 5, 2, 1].
On note $Eff(x)$ le nombre minimum de pièces nécessaires pour obtenir x centimes avec les pièces dont on dispose.

1. Déterminer $Eff(47)$ et $Eff(39)$.
2. On considère l'algorithme suivant

```
Saisir P
Affecter à C la valeur 0
    Pour k allant de 1 à 8
        Tant que P − liste(k) ⩾ 0
        Affecter à P la valeur P − liste(k)
        Affecter à C la valeur C + 1
        FinTantque
    FinPour Afficher C
```

   On suppose que la liste [200, 100, 50, 20, 10, 5, 2, 1] a été préalablement enregistrée.
   L'instruction « liste (k) » renvoie alors le k-ième élément de la liste contenant les valeurs des pièces.
   Par exemple : liste(3) = 50, liste(8) = 1.

   a) Qu'affiche cet algorithme si on prend $P = 98$?
   b) Interpréter ce résultat.

3. Afin d'évaluer l'efficacité d'un jeu de pièces dans une région, on définit l'efficacité moyenne $Eff_{moy}(X)$ comme le nombre moyen de pièces qu'il faut pour composer les sommes de 0 unité, 1 unité, ... jusqu'à $X - 1$ unités.

$$Eff_{moy}(X) = \frac{Eff(0) + Eff(1) + \cdots + Eff(X-1)}{X}$$

   a) Pour le système européen on prendra $X = 500$, car cette somme et celles supérieures peuvent être payées avec le plus petit billet, celui de 5 euros. Proposer une modification de l'algorithme précédent qui permettrait de déterminer le nombre moyen de pièces nécessaires pour rendre la monnaie en Europe.
   b) Pour les États-Unis, la liste des pièces disponibles est [100, 25, 10, 5, 1] et le plus petit billet est celui de 1$.
   En supposant que l'on ait maintenant enregistré la liste des pièces américaines, que suffit-il de modifier dans l'algorithme de la question précédente pour déterminer le nombre moyen de pièces pour rendre la monnaie aux États-Unis ?

Remarque : En programmant ces algorithmes, on obtient que le nombre moyen de pièces est de 4,6 en Europe contre 4,7 aux États-Unis.

Éléments de solution

1. *Eff* (47) = 4 et *Eff* (39) = 5.
2. a) Si on prend $P = 98$, l'algorithme affiche 6.
   b) L'algorithme calcule *Eff* (P), où P est la somme à décomposer. Il faut donc au minimum 6 pièces parmi celles dont on dispose pour obtenir 98 centimes.
3. a) Pour le système européen (par exemple) :

```
Affecter à C la valeur 0
Pour P allant de 0 à 499
        Pour k allant de 1 à 8
                Tant que P − liste(k) ⩾ 0
                Affecter à P la valeur P − liste(k)
                Affecter à C la valeur C + 1
                FinTantque
        FinPour
FinPour Affecter à C la valeur C/500 Afficher C
```

   b) Pour le système américain :

```
Affecter à C la valeur 0
Pour P allant de 0 à 99
        Pour k allant de 1 à 5
                Tant que P − liste(k) ⩾ 0
                Affecter à P la valeur P − liste(k)
                Affecter à C la valeur C + 1
                FinTantque
        FinPour
FinPour
Affecter à C la valeur C/100
Afficher C
```

RETOUR AU SOMMAIRE

STRASBOURG

Premier exercice

Série S

Hélène et Helene

Énoncé

1. 1. Hélène a écrit chaque lettre de son prénom sur un petit carton.
   Elle mélange les six cartons et forme au hasard un mot de six lettres.
   a) Quelle est la probabilité d'obtenir son prénom correctement orthographié ? (on tient compte des accents)
   b) Quelle est la probabilité d'obtenir un mot se terminant par NE ?
   c) Quelle est la probabilité d'obtenir un mot commençant par une consonne ?
2. Hélène réécrit les lettres de son prénom sur six cartons mais sans accents.
   Elle mélange les six cartons et forme au hasard un mot de six lettres.
   Quelle est la probabilité d'obtenir son prénom correctement orthographié ?

Éléments de solution

1. a) Le mot Hélène comporte six lettres distinctes. Une seule permutation de ces six lettres sur un total de 720 est correcte. La probabilité cherchée est donc $\dfrac{1}{720}$.
   b) Si le mot se termine par « NE » ; il commence par une seule des $4! = 24$ permutations des quatre lettres H, É, L, È.
   La probabilité cherchée est donc $\dfrac{24}{720} = \dfrac{1}{30}$.
   c) Il y a trois consonnes H, L et N donc trois possibilités pour la première lettre. Les cinq lettres restantes peuvent être permutées de $5! = 120$ façons.
   La probabilité est donc $\dfrac{3 \times 120}{720} = \dfrac{1}{2}$.
   On peut aussi raisonner uniquement sur la première lettre qui est une consonne avec la probabilité $\dfrac{1}{2}$.
2. En toute rigueur, si les lettres ne sont pas accentuées, il y a une probabilité nulle d'obtenir le prénom correctement orthographié. Si on cherche la probabilité d'obtenir le prénom correctement orthographié aux accents près, les lettres H, L et N doivent occuper les positions 1, 3 et 5 et il reste 6 possibilités pour la position des trois cartons portant la lettre E.
   La probabilité cherchée est donc : $\dfrac{6}{720} = \dfrac{1}{120}$.

RETOUR AU SOMMAIRE

STRASBOURG

Deuxième exercice

Série S

Produit plus un

Énoncé

$1 \times 2 \times 3 \times 4 + 1 = 15$
$2 \times 3 \times 4 \times 5 + 1 = 121.$
$3 \times 4 \times 5 \times 6 + 1 = 361.$

1. Écrire les deux lignes suivantes.
2. Par ce procédé, peut-on obtenir 2013 ?
3. Qu'obtient-on sur la dixième ligne ?
4. Obtient-on toujours un nombre impair ?
5. Obtient-on toujours le carré d'un entier ?
6. Peut-on obtenir 2013^2 ? Sinon quelle est la valeur la plus proche de 2013^2 que l'on puisse obtenir ?

Éléments de solution

1. $4 \times 5 \times 6 \times 77 + 1 = 841$
   $5 \times 6 \times 7 \times 8 + 1 = 1681.$
2. La suite obtenue est strictement croissante et saute de 1681 à $6 \times 7 \times 8 \times 9 + 1 = 3\,025$ sans prendre la valeur 2 013.
3. $10 \times 11 \times 12 \times 13 + 1 = 17\,161.$
4. Le produit de quatre entiers consécutifs est divisible par 8.
   Si on lui ajoute 1, on obtient un nombre impair.
5. On a
   $$\begin{aligned} n(n+1)(n+2)(n+3)+1 &= n^4+6n^3+11n^2+6n+1 \\ &= \left(n^2+3n+1\right)^2. \end{aligned}$$
6. La suite $n \to n^2 + 3n + 1$ est strictement croissante.
   $n^2 + 3n + 1$ est égal
   $$\begin{aligned} \text{pour } n = 43 \text{ à } 43^2 + 3 \times 43 + 1 &= 1\,978 \\ \text{et pour } n = 44 \text{ à } 44^2 + 3 \times 44 + 1 &= 2\,068. \end{aligned}$$
   On ne peut donc pas obtenir $n = 2013^2$.
   La valeur la plus proche est $1\,978^2$.

RETOUR AU SOMMAIRE

STRASBOURG

Troisième exercice

Séries autres que S

Marie

Énoncé

Marie a écrit chaque lettre de son prénom sur un petit carton. Elle mélange les cinq cartons et forme au hasard un mot de cinq lettres.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir son prénom correctement orthographié ?
2. Quelle est la probabilité d'obtenir un mot commençant par M et se terminant par E ?
3. Quelle est la probabilité d'obtenir un mot commençant par deux consonnes ?

Éléments de solution

1. Les cinq lettres du prénom étant distinctes, une seule permutation des cinq cartons convient pour $5! = 120$.

   La probabilité cherchée est donc : $\dfrac{1}{120}$.
2. Il y a une seule façons de placer M en tête et E en queue. Il reste alors $3! = 6$ permutations possibles des lettres A, R et I.

   La probabilité cherchée est donc $\dfrac{6}{120} = \dfrac{1}{20}$.
3. Il n'y a que deux consonnes, M et R, dans le mot MARIE. Le mot peut donc commencer soit par MR, soit par RM.
   Il reste alors à placer les voyelles A, I et E, ce qui peut se faire de $3! = 6$ façons possibles.
   On a donc 12 configurations possibles et la probabilité cherchée est $\dfrac{12}{120} = \dfrac{1}{10}$.

RETOUR AU SOMMAIRE

STRASBOURG

Quatrième exercice

Séries autres que S

Le baril

Énoncé

Le baril de pétrole coûtait 100 \$ le 1er janvier 2000. Le 1er janvier 2010, il avait augmenté de 60%. Une seconde augmentation a ensuite amené son prix le 1er janvier 2013 au double de son prix initial.
Quel est le taux de cette seconde augmentation ?

Éléments de solution

Le 1er janvier 2010, le baril coûte $100\left(1+\dfrac{60}{100}\right) = 160$ \$

Le 1er ja,vier 2013, il coûte $2 \times 100 = 200$ \$.

De 2010 à 2013, il a donc augmenté de $\dfrac{200-160}{160} = \dfrac{40}{160} = \dfrac{25}{100}$., soit de 25%.

RETOUR AU SOMMAIRE

TOULOUSE - AEFE Ibérique

Premier exercice

Série S

Vous avez la monnaie, s'il vous plait ?

Énoncé

J'ai dans ma poche un certain nombre de pièces de 1, 2, 5 et 10 centimes. Il se peut je n'aie aucune pièce pour certaines de ces valeurs. Je fais alors la constatation (C) suivante :
(C) : avec ce que j'ai en poche je peux faire l'appoint de n'importe quelle somme de 1 à 99 centimes mais pas de 1 €.

Partie A : combien ai-je en poche ?

Le but de cette partie est de déterminer toutes les valeurs possibles de la somme totale que j'ai en poche.

1. Donner un exemple simple de somme que je peux avoir en poche.
2. La constatation (C) implique que je peux sortir de ma poche et poser sur la table 99 centimes.
   a) Peut-il me rester une pièce de un centime dans la poche ?
   b) Peut-il me rester une pièce de deux centimes dans la poche ?
   c) Peut-il me rester une pièce de cinq centimes dans la poche ?
3. Quelles sont toutes les valeurs possibles de la somme totale que j'ai en poche ?

Partie B : qu'ai-je en poche ?

Le but de cette partie est de déterminer tous les jeux de pièces que je peux avoir en poche, c'est–à–dire tous les quadruplets $(a; b; c; d)$ d'entiers naturels tels que a pièces de 10 centimes, b pièces de 5 centimes, c pièces de 2 centimes et d pièces de 1 centime dans ma poche provoquent la constatation (C).

1. Montrer que si j'ai 99 centimes dans ma poche (toujours en pièces de 1, 2, 5 et 10 centimes...) dont au moins une pièce de 1 centime, alors je peux faire l'appoint de toutes les sommes de 1 à 99 centimes.
2. On peut prouver et on admet ici qu'il y a 2090 quadruplets $(a; b; c; d)$ d'entiers naturels tels que $10a + 5b + 2c + d = 99$ et 55 triplets $(a; b; c)$ d'entiers naturels tels que $10a + 5b + 2c = 99$.
   Quel est le nombre de jeux de pièces que je peux avoir en poche ?

Éléments de solution

Partie A

1. 99 centimes en pièces de 1 centime réalisent la constatation (C).
2. a) S'il reste une pièce de 1 centime en poche, avec les 99 sur la table, l'appoint de 1 € est possible ; contradiction.
   b) De même, s'il reste une pièce de deux centimes, pouvant faire l'appoint de 1 centime, une pièce de 1 centime est dans la somme sur la table (elle n'est pas en poche) ; donc l'appoint de 1 € est encore possible ; contradiction.

c) Pouvant faire l'appoint de quatre centimes, s'il reste cinq centimes et qu'il n'y a pas de pièce de deux centimes en poche, l'appoint de 1 € est possible ; contradiction.
Il en sera de même pour la valeur 10 centimes.
Il y a exactement 99 centimes en poche au départ.

Partie B

1. Avec 99 centimes en poche dont une pièce de un centime, l'appoint de 1 et de 99 centimes est acquis. Par suite celui de 98.
   Ceci implique que j'ai des pièces de un ou deux centimes parmi les 98, l'appoint de 97, 96, 95 est possible ainsi que celui de 2, 3, 4 centimes ... De proche en proche...

   Ou bien...
   Soit s la somme pour laquelle je peux faire l'appoint de 1 à s et pas de $s+1$.
   Alors, j'ai la somme s en poche sans plus, comme au A).
   Or c'est 99 qui sont en poche : $s = 99$.
2. 2090 quadruplets tels que (1) $10a + 5b + 2c + d = 99$ et 55 triplets tels que (2) $10a + 5b + 2c = 99$.
   A chaque composition $(a; b; c; d)$ du porte monnaie de 99 centimes en pièces respectivement de 10, 5, 2 et 1 centimes correspond une solution de l'équation $10a + 5b + 2c + d = 99$ et réciproquement.
   D'après 1), on est sûr que d n'est pas nul. Le nombre de jeux est le nombre de solutions de l'équation (1) avec d non nul.
   Le nombre de solutions de l'équation (1) avec $d = 0$ est celui de (2) soit 55.
   Il y a donc $2090 - 55$ jeux de pièces pouvant composer ce porte monnaie.

N.B. : l'équation (1) pour $d = 1$ n'a pas de solution (une étude arithmétique le montre) ; on retrouve ce qui a été justifié à B-1).

Complément de l'initiateur de l'exercice : Le nombre de quadruplets entiers tels que $10a+5b+2c+d = 99$ est bien connu pour être le coefficient de x^{99} dans le développement en série entière de

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^5)(1-x^{10})}, \text{ soit 2090 (loué soit Maple !)}$$

De même le coefficient de x^{99} dans le développement en série entière de

$$\frac{1}{(1-x^2)(1-x^5)(1-x^{10})}$$

est 55 et le nombre de triplets entiers solutions de $10a + 5b + 2c = 99$.
A voir la réponse de Maple, on pourrait conjecturer que le nombre de façons de payer n centimes en pièces de 2, 5 et 10 centimes est toujours triangulaire... Ce qui est laissé à prouver ou réfuter ...

RETOUR AU SOMMAIRE

TOULOUSE - AEFE Ibérique

Deuxième exercice

Série S

Réseau HAN hémisphérique

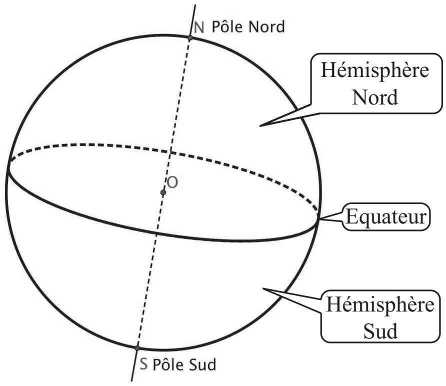
Énoncé

La recherche informatique révolutionne le système WI–FI en 2050. Malgré des distances très importantes entre les ordinateurs, les chercheurs en informatique réussissent à connecter sans fils les ordinateurs de n personnes (où n est un entier avec $n \geqslant 2$). Ils nomment HAN (*Hemispheric Area Network*) ce procédé de connexion.

Partie A – Le réseau HAN hémisphérique Nord.

A l'aide d'un émetteur très puissant situé au pôle Nord, ce réseau permet de relier les ordinateurs de n personnes si ces n personnes se trouvent sur l'hémisphère Nord (équateur inclus).

1. Justifier que si on choisit au hasard trois points de la Terre, la probabilité que trois personnes situées en ces points puissent se connecter est $\dfrac{1}{8}$.
2. On choisit au hasard n points de la Terre, n étant un entier naturel supérieur ou égal à 3. Quelle est la probabilité que n personnes situées en ces points puissent se connecter via le réseau HAN hémisphérique Nord ?



Partie B – Le réseau hémisphérique mobile

Au bout de plusieurs années de recherche, les scientifiques améliorent ce réseau. Maintenant il permet de relier sans fils les ordinateurs de n personnes (où n est un entier avec $n \geqslant 2$) s'il existe un point P sur la Terre pour lequel ces n personnes sont situées sur l'hémisphère de pôle P, noté H_P.

Le cercle, délimitant l'hémisphère H_P, est appelé « grand cercle » associé à P. Il est considéré comme inclus dans l'hémisphère.

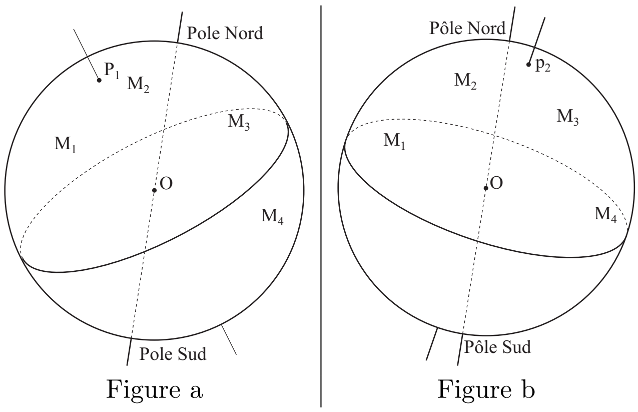


Figure a Figure b

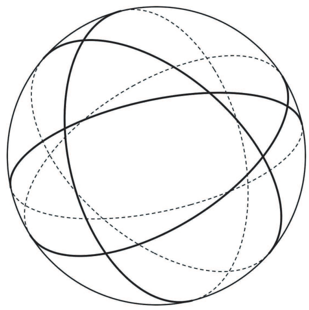
Sur la figure a ci-dessus trois personnes situées aux points M_1, M_2, M_3 peuvent se connecter en réseau HAN hémisphérique mobile car on a pu trouver un pôle P_1 tel que les trois points soient situés sur l'hémisphère H_{P_1}.
La personne située au point M_1 n'est pas dans l'hémisphère H_{P_1} ; les quatre personnes ne peuvent donc pas communiquer entre elles en utilisant le réseau de pôle P_1.
Cependant, si on peut trouver un pôle P_2 (voir figure b) tel que les points M_1, M_2, M_3, M_4 soient situés dans l'hémisphère H_{P_2} , quatre personnes se trouvant en ces points peuvent communiquer à travers le réseau de pôle P_2.

1. Démontrer que deux personnes situées en nŠ'importe quels points de la Terre peuvent toujours se connecter en utilisant le réseau HAN hémisphérique mobile.
2. En est-il de même pour trois personnes situées en n'importe quels points de la Terre ?
3. On considère quatre personnes : Paul situé au pôle Nord, Sarah située au pôle Sud, Eulalie située sur l'équateur et David, situé également sur l'équateur, diamétralement opposé à Eulalie.
   Ces quatre personnes peuvent-elles se connecter en utilisant le réseau HAN hémisphérique mobile ?

Partie C – Étude probabiliste

La suite de l'exercice consiste à déterminer la probabilité que quatre personnes situées en des points choisis aléatoirement sur la Terre puissent se connecter en utilisant le réseau HAN hémisphérique mobile.

On considère quatre points M_1, M_2, M_3 et M_4 choisis aléatoirement sur la Terre.
On note H_{M_1} , H_{M_2}, H_{M_3}, H_{M_4} les hémisphères de pôles M_1, M_2, M_3, M_4.
On suppose que les grands cercles associés aux pôles M_1, M_2, M_3, M_4 sont deux à deux sécants. On exclut tout autre type d'intersection de ces quatre cercles, on admet qu'il s'agit de situations ne changeant pas le calcul de probabilité. Ces grands cercles découpent la surface de la Terre en diverses « régions ».



1. On choisit au hasard une des ń régions ż ainsi définies. Quelle est la probabilité qu'elle soit entièrement située dans l'intersection des quatre hémisphères H_{M_1} , H_{M_2}, H_{M_3}, H_{M_4} ?
2. L'algorithme ci-contre permet de dénombrer le nombre de régions obtenues.
   a) A l'aide de cet algorithme, déterminer le nombre de régions.
   b) Expliquer pourquoi l'algorithme précédent dénombre effectivement le nombre de régions.

Variable : **NbRegion**
Initialisation :
On affecte 2 à **NbRegion**
Traitement :
Pour k allant de 1 à 3
On affecte **NbRegion** $+2k$ à **NbRegion**
Fin

3. a) Soit K un point quelconque de la Terre et H_K l'hémisphère associé.
   Démontrer que si le point M_1 appartient à l'hémisphère H_K alors le point K appartient à l'hémisphère H_{M_1}.
   b) Démontrer que s'il existe un pôle P tel que les quatre points M_1, M_2, M_3, M_4 appartiennent à l'hémisphère H_P alors l'intersection des hémisphères H_{M_1} , H_{M_2}, H_{M_3}, H_{M_4} est non vide.
   c) Réciproquement, démontrer que si l'intersection des hémisphères H_{M_1} , H_{M_2}, H_{M_3}, H_{M_4} est non vide alors il existe un pôle P tel que les quatre points M_1, M_2, M_3, M_4 appartiennent à H_P.
4. Déterminer la probabilité que quatre personnes situées en des points de la Terre choisis au hasard puissent se connecter en réseau HAN hémisphérique mobile.

Éléments de solution

Partie A

1. On considère que pour une personne, il y a équiprobabilité à être située dans l'hémisphère Nord ou dans l'hémisphère Sud.
   Cela étant une représentation par arbre permet de conclure pour trois personnes : probabilité que les trois soient dans l'hémisphère Nord $\frac{1}{8}$.
2. Semblablement pour n personnes : $\frac{1}{2^n}$.

Partie B

1. Il existe au moins un plan passant par le centre et contenant les deux positions ; ce plan détermine sur la sphère deux hémisphères sur lesquels les deux personnes sont situées.
2. Étant données les deux premières positions et les hémisphères qu'elles déterminent selon 1), la troisième position est dans l'un ou l'autre. Les trois personnes sont situées sans un même hémisphère.
3. Les positions de Paul, Sarah et Eulalie déterminent un plan passant par le centre de la sphère ; il contient la position de David. Les quatre personnes sont dans un même hémisphère (l'un ou l'autre de ceux déterminés sur la sphère par le plan considéré).

Partie C

1. On considère que la région considérée, il y a équiprobabilité à être contenue dans l'hémisphère $\mathrm{H}_{\mathrm{M}_1}$ ou dans l'hémisphère opposé.
   Cela étant une représentation par arbre permet de conclure pour quatre hémisphères : probabilité que la région soit dans l'intersection des quatre hémisphères $\mathrm{H}_{\mathrm{M}_1}$, $\mathrm{H}_{\mathrm{M}_2}$, $\mathrm{H}_{\mathrm{M}_3}$, $\mathrm{H}_{\mathrm{M}_4}$: $\frac{1}{16}$.
2. a) L'algorithme étant développé : NbRegion $= 2$; $k = 1$ induit NbRegion $= 4$; $k = 2$ induit NbRegion $= 8$; $k = 3$ induit NbRegion $= 14$.
   Selon l'algorithme le nombre de régions est 14.
   b) Étant donné un certain nombre k d'hémisphères (selon les conditions imposées au préambule), le nombre de régions déterminées est NbRegion.
   Étant données les conditions imposées au préambule, un hémisphère supplémentaire est bordé par un grand cercle qui rencontre chacun des autres grand cercles en $2k$ points tous distincts des points d'intersection des autres grands cercles ; pris par deux successifs sur le grand cercle, ces points déterminent des arcs découpant k régions en deux. Ainsi le nombre de régions est NbRegion $+2k$.
3. a) M_1 appartient à H_K signifie K $\mathrm{M}_1 \leqslant R\sqrt{2}$ (R étant le rayon de la sphère), ce qui traduit également K appartient à $\mathrm{H}_{\mathrm{M}_1}$.

   N.B. : M_1 appartient à H_K signifie angle $\widehat{\mathrm{M}_1\mathrm{OK}} \leqslant 90^\mathrm{o}$ (O étant le centre de la sphère), ce qui traduit également K appartient à $\mathrm{H}_{\mathrm{M}_1}$.
   b) Lorsque les points M_1, M_2, M_3, M_4 appartiennent à H_P, d'après C-3 a) le point P appartient à chacun des hémisphères $\mathrm{H}_{\mathrm{M}_1}$, $\mathrm{H}_{\mathrm{M}_2}$, $\mathrm{H}_{\mathrm{M}_3}$, $\mathrm{H}_{\mathrm{M}_4}$.
   c) Lorsque l'intersection des hémisphères $\mathrm{H}_{\mathrm{M}_1}$, $\mathrm{H}_{\mathrm{M}_2}$, $\mathrm{H}_{\mathrm{M}_3}$ est non vide, il existe un point P appartenant à chacun d'eux.
   D'après C-3) a), les quatre points M_1, M_2, M_3, M_4 appartiennent à H_P.
4. La probabilité cherchée est celle que lŠune des régions déterminées par quatre grands cercles (selon les conditions imposées au préambule) soit contenue dans les quatre hémisphères $\mathrm{H}_{\mathrm{M}_1}$, $\mathrm{H}_{\mathrm{M}_2}$, $\mathrm{H}_{\mathrm{M}_3}$, $\mathrm{H}_{\mathrm{M}_4}$.
   De par la détermination des régions, si une région est contenue dans les quatre hémisphères $\mathrm{H}_{\mathrm{M}_1}$, $\mathrm{H}_{\mathrm{M}_2}$, $\mathrm{H}_{\mathrm{M}_3}$, $\mathrm{H}_{\mathrm{M}_4}$ elle est la seule.
   La probabilité que l'une des régions déterminées par quatre grands cercles (selon les conditions imposées au préambule) soit contenue dans les quatre hémisphères $\mathrm{H}_{\mathrm{M}_1}$, $\mathrm{H}_{\mathrm{M}_2}$, $\mathrm{H}_{\mathrm{M}_3}$, $\mathrm{H}_{\mathrm{M}_4}$ vaut $14 \times \frac{1}{16}$.
   Elle n'est pas égale à 1. RETOUR AU SOMMAIRE

TOULOUSE - AEFE Ibérique

Troisième exercice

Séries autres que S

Les bonbons à l'anis

Énoncé

N.B. : *Les trois questions sont indépendantes et peuvent être traitées dans n'importe quel ordre.*

Olympe adore les bonbons, et surtout ceux qui ont le goût d'anis. Pour son anniversaire, Martin veut lui en acheter un sac, mais il ne trouve qu'un mélange de bonbons à l'anis et de bonbons au citron. Il a alors l'idée de lui préparer des jeux. Votre mission va être d'aider Olympe.

1. Premier jeu : les trois boîtes

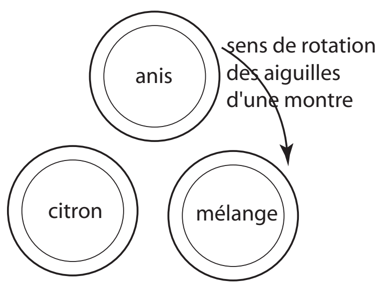
Martin dit à Olympe : « Regarde les trois boîtes que tu as devant toi. J'en ai rempli une avec des bonbons à l'anis, une autre avec des bonbons au citron et la troisième avec un mélange des deux. Elles portent les étiquettes ń« anis », « citron » et « mélange » mais aucune des boîtes n'a l'étiquette qui lui correspond. »
Et Martin de poursuivre : « Je t'affirme que tu peux retrouver l'exact contenu de chaque boîte en ne goûtant qu'un seul bonbon en tout. ż »
Martin a-t-il raison ? Justifier.

2. Deuxième jeu : « pour être sûre »

Martin : « Olympe, je t'ai acheté un sac de bonbons de deux parfums différents : citron et anis. En prenant au hasard des bonbons dans le sac, si tu veux être sûre d'en avoir au moins un de chaque parfum, il faut que tu en prennes au moins 27. Si tu veux être sûre d'en avoir au moins deux à l'anis, il faut que tu en prennes au moins 26. Combien y a-t-il de bonbons dans le sac ? »Que répond Olympe ? Expliquer.

3. Troisième jeu : « les bonbons tournent »

Avant de manger ses bonbons, Olympe dispose trois assiettes en rond, comme sur la figure ci-contre. Elle met quatre bonbons à l'anis enrobés d'un papier vert dans l'assiette marquée « anis », quatre bonbons au citron enrobés d'un papier jaune dans l'assiette marquée « citron »et deux bonbons de chacun des parfums dans l'assiette marquée « mélange ».
Elle propose alors le défi suivant à Martin :
« Tu vas prendre un bonbon dans l'assiette de ton choix. S'il est à l'anis, tu le mets dans l'assiette suivante en tournant dans le sens de rotation des aiguilles d'une montre ; s'il est au citron, tu le mets dans l'assiette suivante en tournant en sens inverse des aiguilles d'une montre.



Puis tu choisis un bonbon dans l'assiette dans laquelle tu viens de mettre le bonbon précédent et tu recommences.
Comment faire pour parvenir à ce qu'il y ait deux bonbons à l'anis et deux bonbons au citron dans chaque assiette en effectuant le moins de manipulations possible ? »

Éléments de solution

1. Premier jeu : les trois boîtes

- étiquette « anis » : peut être « mélange » ou « citron »
- étiquette « citron » : peut être « mélange » ou « anis »
- étiquette « mélange » : peut être « anis » ou « citron ».

Un bonbon est extrait de la troisième, il donne donc la nature de son contenu.
On sait quelle des deux précédentes a pour contenu le mélange ; puis il ne reste qu'une possibilité de contenu pour la troisième.

2. Deuxième jeu : « pour être sûre »

27 sont nécessaires pour avoir à coup sûr deux parfums ; c'est dire que l'un des parfums compte 26 bonbons et que c'est le plus nombreux.
26 sont nécessaires pour avoir à coup sûr deux bonbons à l'anis ; c'est dire qu'il y a 24 bonbons à l'anis.
Il y a 50 bonbons dans le sac.

3. Troisième jeu : « les bonbons tournent »

Les trois assiettes et leur contenu nombre de bonbons anis : a / nombre de bonbons citron : c . . .

A (anis)	M (mélange)	C (citron)
4/0	2/2	0/4

Le sens horaire est de gauche vers la droite
Ĕ On tire deux a de (A)

2/0	4/2	0/4

On tire On tire deux a de (M)

2/0	2/2	2/4

On tire deux c de (C)

2/0	2/4	2/2

On tire deux c de (M)

2/2	2/2	2/2

On a déplacé huit bonbons. Pourquoi est-ce le plus économique ?
Deux a doivent migrer de (A) vers (C), nécessairement en passant par (M) [sens horaire], il faut donc quatre tels déplacements. . .
Et de même pour les c.

RETOUR AU SOMMAIRE

TOULOUSE - AEFE Ibérique

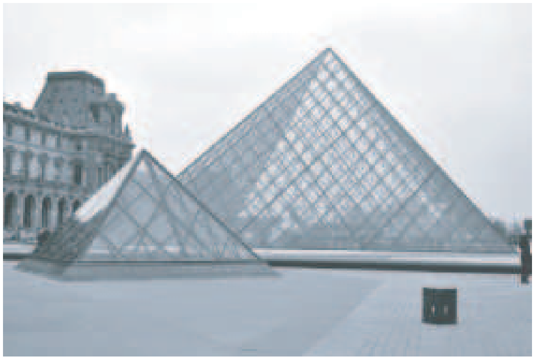
Quatrième exercice

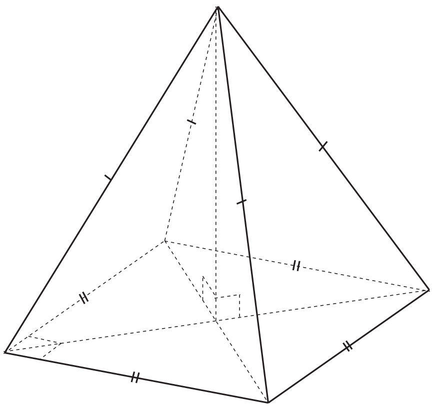
Séries autres que S

La pyramide

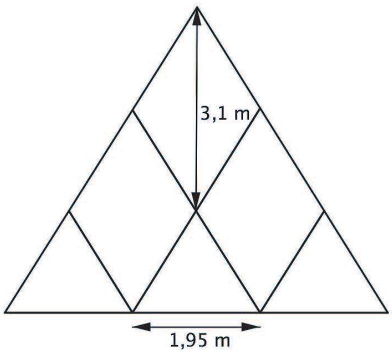
Énoncé

Dans la cour du Louvre, on peut admirer la grande pyramide entourée de trois pyramidions identiques. Ces constructions sont des pyramides régulières à base carrée ; les faces latérales sont identiques (voir figure de droite).





Chaque face latérale est un triangle isocèle formé d'un assemblage de plaques élémentaires en verre. Ces plaques ont toutes la forme d'un losange dont les diagonales ont pour longueurs 3,1 m et 1,95 m ou, pour celles de la rangée du bas, d'un demi-losange.
La figure ci-contre montre un extrait du plan de leur disposition.



A - Un pyramidion

1. Un visiteur compte le nombre de plaques entières, éventuellement coupées en deux, nécessaires à la construction de la totalité d'un pyramidion ; il en dénombre 32.
   a) Représenter l'assemblage de plaques et de demi-plaques constituant une face latérale du pyramidion.
   b) Calculer les dimensions d'un pyramidion : longueur d'un côté du carré de base et hauteur du pyramidion
2. A supposer qu'on ajoute une demi plaque sur la rangée du bas de chaque face du pyramidion, quel serait l'effet sur la hauteur du pyramidion ?

B) La grande pyramide du Louvre

Pour simplifier ici, on ne tient pas compte de la porte existante sur l'une des faces de la grande pyramide. Ainsi fermée, la grande pyramide nécessite 648 plaques en forme de losange.

1. Quelle est la longueur d'un côté du carré de base de la grande pyramide ?
2. Calculer de la façon la plus simple possible la hauteur de la grande pyramide.

Éléments de solution

A - Un pyramidion

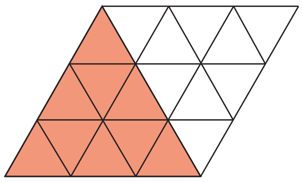
1. a) Chaque triangle isocèle constituant une face nécessite huit losanges. La base doit être composée de quatre demi–losanges ; on fait la représentation... Ou bien, on représente le losange du haut et on complète jusqu'à en avoir 32...

   b) Un triangle rectangle est formé par le centre du carré de base, le sommet de la pyramide et le milieu d'un côté. Hypoténuse et côté de ce triangle (demi–côté du carré) sont de longueur connue respectivement 2 fois 3,1 m et 2 fois 1,95 m ; la hauteur H vaut $\sqrt{(6,2)^2-(3,9)^2}$, soit 4,82 m.

2. L'ajout d'une demi–plaque sur chaque côté augmente l'hypoténuse de $\dfrac{3,1}{2}$ et le demi–côté de $\dfrac{1,95}{2}$... on peut refaire le calcul...
   Ou bien : cet ajout consiste à augmenter de la hauteur d'une pyramide dont la base est un carré de côté 1,95 m et les faces des demi-plaques...
   L'ajout d'une demi–plaque produit une augmentation de hauteur de $\sqrt{(1,55)^2-(0,975)^2}$; soit 1,20 m.

B - La grande pyramide du Louvre

1. Si on a n demi–plaques à la base en prenant deux faces adjacentes, on obtient un parallélogramme.
   Il y a n étages de demi–losanges, et chaque étage compte $(2n)$ demi–losanges.
   Donc cela donne $2n^2$ demi–losanges donc n^2 losanges pour deux faces. Soit $\dfrac{n^2}{2}$ losanges par face.



Avec 648 plaques en tout, chaque face en comporte 162 ; ce qui implique 18 demi–plaques par côté.
D'où la longueur du côté du carré de base : $18 \times 1,95$ soit 35,1 m.
N.B. : la détermination du nombre de plaques par faces peut relever d'une méthode inductive...

2. La hauteur est proportionnelle au nombre de demi–plaques sur chaque côté de la base.

   La hauteur pour n demi-plaques est $n\sqrt{(1,55)^2-(0,975)^2}$.

   La hauteur de la pyramide vaut $18\sqrt{(1,55)^2-(0,975)^2}$; soit 21,69 m.

   L'académie propose de compléter le sujet par trois questions sur la constructibilité de trois pyramides dont les bases ont respectivement 3, k, 1296 côtés

C-

1. Si la base est un triangle équilatéral, chacune des trois faces doit comporter 216 plaques ; or ce nombre ne peut pas être la moitié du carré d'un nombre entier. La base ne peut pas être un triangle équilatéral.

2. a) Si la base est un polygone régulier ayant k côtés ...

   Soit k le nombre de côtés de ce polygone régulier, on doit avoir $\dfrac{n^2}{2} = \dfrac{648}{k}$, soit $n^2k - 1296 = 4^4 3^4$.

   Les diviseurs carrés d'entiers de 1296 sont au nombre de neuf : $2^2, 2^2 3^2, 2^2 3^4, 2^4, 2^4 3^2, 2^4 3^4, 3^2, 3^4, 1$.

Puisqu'il s'agit de polygones ($k \geqslant 3$), on peut donc avoir huit possibilités pour le couple $(k;n)$: $(2^2 3^4;2), (2^2 3^2;2\times 3); (2^2;2\times 3^2), (3^4;2^2), (3^2;2^2 3), (2^4 3^2;3), (2^4;3^2), (2^4 3^4;1)$.
C'est–à–dire : (324 ; 2), (36 ; 6), (4 ; 18), (81 ; 4), (9 ; 12), (144 ; 3), (16 ; 9), (1296 ; 1).

b) Le caractère constructible de la pyramide est attaché au fait que la hauteur d'une face latérale ait une longueur supérieure à la distance du centre du polygone régulier à ses côtés (son apothème).

- Il est peu vraisemblable que la pyramide dont le polygone de base a 1296 côtés comportant une seule plaque soit constructible : le périmètre de ce polygone est tellement grand... de l'ordre de 2500 m.
- On retrouve la pyramide à base carrée.
- Pour le polygone régulier de base a k côtés de longueur $\frac{1}{2}n\ell$,
  l'apothème vaut : $\dfrac{nl}{2\tan\frac{\pi}{k}}$. La hauteur d'une face vaut : $\frac{1}{2}nL$.
  La pyramide est constructible à la condition que : $\frac{1}{2}nL > \dfrac{n\ell}{2\tan\frac{\pi}{k}}$.
  C'est–à–dire : $\dfrac{\ell}{L} < \tan\dfrac{\pi}{k}$.

Selon le nombre k de côtés, la tangente est de l'ordre de :

k	tangente
4	1
9	0,363970234
16	0,198912367
36	0,087488664
81	0,038804554
324	0,009696578
1296	0,002424073

Pour le choix fait sur ℓ et L : $\dfrac{\ell}{L}$ est de l'ordre de 0,629.

Avec le choix fait pour ℓ et L la seule pyramide constructible est celle dont la base est carrée.

RETOUR AU SOMMAIRE

VERSAILLES

Premier exercice

Série S

La devinette de Clara

Énoncé

Clara a pensé à quatre nombres.
Elle calcule les six sommes de ces nombres pris deux à deux.
Elle écrit au tableau cinq de ces six sommes : $-2, 1, 2, 3, 6$.
Quels sont les quatre nombres auxquels Clara pensait ?

Éléments de solution

Considérons les nombres inconnus rangés dans l'ordre décroissant : $a \geqslant b \geqslant c \geqslant d$. Ces inégalités en entraînent d'autres : $a+b \geqslant a+c \geqslant a+d, b+c \geqslant b+d$, etc.
On peut écrire les deux chaînes d'inégalités :
$\left\{\begin{array}{l} a+b \geqslant a+c \geqslant a+d \geqslant b+d \geqslant c+d \\ a+b \geqslant a+c \geqslant b+c \geqslant b+d \geqslant c+d \end{array}\right.$ Dans lesquelles on voit l'importance de l'ordre relatif de $b+c$ et $a+d$.

1. **Supposons que $b+c$ et $a+d$ font partie des données**
   Dans l'ordre décroissant des sommes données, ces deux sommes occupent alors les deuxième et troisième rangs ou les troisième et quatrième. La somme $a+b+c+d$ est, dans le premier cas, égale à 5 et dans le second égale à 3. La somme de deux autres des nombres donnés doit elle aussi représenter $a+b+c+d$, mais on constate, dans chaque cas, qu'aucune des sommes deux à deux des nombres restants de la liste n'est égale à 5 (respectivement à 3).
2. **Supposons que $b+c$ et $a+d$ ne font pas tous les deux partie des données**
   La somme $a+b+c+d$ s'écrit $(a+b)+(c+d)$ et aussi $(a+c)+(b+d)$.
   Elle est égale à 4. Comme $a+d$ (ou $b+c$) est égal à 2, on en déduit que la somme manquante est aussi 2.
   Finalement, $a=\dfrac{7}{2}, b=\dfrac{5}{2}, c=-\dfrac{1}{2}, d=-\dfrac{3}{2}$.

RETOUR AU SOMMAIRE

VERSAILLES

Deuxième exercice

Série S

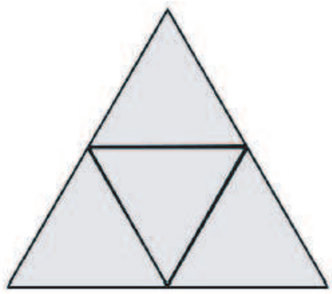
Sommes de sommets

Énoncé

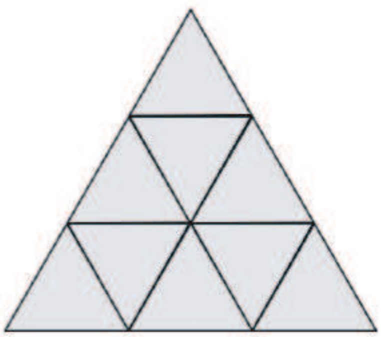
Première partie

Un triangle équilatéral de côté de longueur 2 est partagé en quatre triangles équilatéraux comme le montre la figure. À chaque sommet de ces 4 triangles est écrit un des nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6, utilisé chacun une seule fois. À l'intérieur de chacun des quatre triangles, on inscrit la somme des nombres écrits à ses sommets.

1. Est-il possible que les nombres inscrits dans les triangles soient tous égaux ?
2. Est-il possible que la différence entre le plus grand de ces nombres et le plus petit soit égale à 1 ? Si oui, donner un exemple de répartition convenable



Deuxième partie

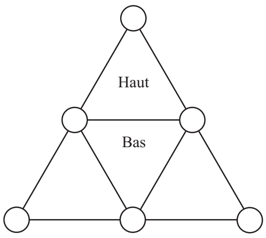


Dans cette partie, on utilise un triangle équilatéral de côté 3 partagé en neuf triangles aux sommets desquels on écrit les nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 et 10, utilisés chacun une seule fois, et on affiche les sommes obtenues pour chacun des neuf triangles.

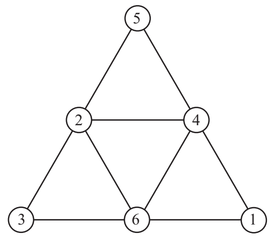
1. Prouver que, quelle que soit la répartition des nombres sur les 10 sommets, trois au moins des nombres inscrits dans les triangles sont supérieurs ou égaux à 12.
2. Prouver que, quelle que soit la répartition des nombres sur les 10 sommets, trois des nombres inscrits dans les triangles ont une somme supérieure ou égale à 48.
3. Est-il possible que les nombres inscrits dans les triangles soient tous de même parité ?
4. Est-il possible que la différence entre le plus grand et le plus petit des nombres inscrits dans les triangles soit égale à 1 ?
5. Prouver, en donnant un exemple de distribution correspondant, qu'il est possible que la différence entre le plus grand et le plus petit de ces nombres soit égale à 2.

Éléments de solution

Première partie

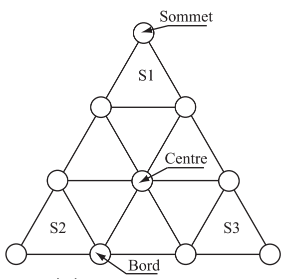


1. Les triangles marqués Haut et Bas de la figure ci-contre ont deux sommets en commun. Les sommes à y inscrire diffèrent de la différence des nombres placés en leurs sommets non communs. Ceux-ci sont distincts. La réponse est donc négative.



2. Une condition nécessaire est que les nombres inscrits aux sommets non communs des trois paires de triangles adjacents diffèrent au maximum de 1. La figure de droite fournit un exemple.

Deuxième partie



1. Si le nombre 10 occupe la position marquée « centre », il participe à six sommes, toutes supérieures à 12. S'il occupe une des six positions « bord », il participe à trois sommes supérieures à 12. Il participe à une seule somme s'il occupe une des trois positions « sommet ». Le même raisonnement vaut pour le nombre 9 (en remplaçant supérieures par supérieures ou égales). Ce raisonnement n'est pas concluant pour le nombre 8, car la somme $8+1+2$ est inférieure à 12.

Mais en position « centre » ou « bord », 8 apporte encore au moins une somme supérieure ou égale à 12. Si on place 8 dans la dernière position « sommet » disponible, avec 1 et 2 comme compléments, la somme des nombres inscrits dans les six triangles ayant un sommet en position « centre » est au moins égale à $6\times 3+2\times(1+2+4+5+6+7)$, c'est-à-dire 68. La moyenne des six sommes est supérieure à 11, donc l'une des six est supérieure ou égale à 12.

2. Si le nombre 10 occupe la position « centre », la somme des nombres inscrits dans les six triangles marqués 10 à leur sommet commun est au minimum $6\times 10+2\times(1+2+3+4+5+6)$, c'est-à-dire 102. Trois des nombres inscrits dans les triangles concernés ont alors une somme supérieure à 51. De même, si le nombre 9 occupe la position « centre », la somme des nombres inscrits dans les six triangles marqués 9 à leur sommet commun est au minimum $6\times 9+2\times(1+2+3+4+5+6)$, c'est-à-dire 96, et trois des nombres inscrits dans ces six triangles ont une somme supérieure ou égale à 48.
   Si le nombre n occupe la position marquée « centre », les autres nombres apparaissent chacun une fois dans la somme S1 + S2 + S3, qui est égale à $\sum_{k=1}^{k=10} k-n$, c'est-à-dire $55-n$. Pour n inférieur ou égal à 7, la somme S1+S2 +S3 est donc supérieure à 48.

   Reste à examiner le cas où 8 est au « centre ». Si 10 occupe une position « bord », deux triangles ont des sommets communs marqués 8 et 10. La somme des nombres inscrits sur les deux est supérieure ou égale à 39. Comme le nombre inscrit sur au moins un autre triangle est supérieur à 9, trois des triangles montrent des sommes dont la somme est supérieure ou égale à 48. Reste à examiner le cas où le nombre 10 occupe un sommet. Si le nombre 9 occupe une position « bord », la somme des nombres inscrits sur trois triangles, les deux qui ont 8 et 9 occupant leurs sommets communs et un dont un sommet est marqué 10, est supérieure ou égale à $2\times(8+9)+10+1+2+3$, c'est-à-dire 50. Le nombre 9 occupe donc un sommet… mais alors, trois triangles portent à leurs sommets les nombres 10, 9, 8 et six nombres distincts parmi 1, 2, 3, 4, 5, 6 et 7. La somme des nombres inscrits sur ces trois triangles est supérieure à $10+9+8+6+5+4+3+2+1$, c'est-à-dire 48.

3. a) 1. Si on souhaite obtenir des sommes toutes paires et que le nombre placé au centre est pair,

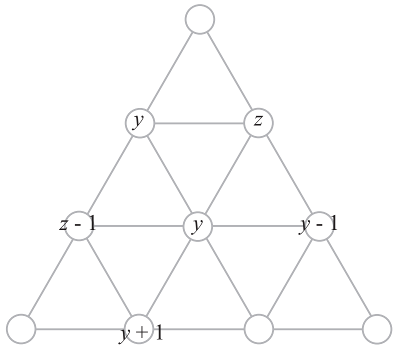
ses voisins doivent être tous de même parité. Cela fait six nombres de même parité parmi 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 et 10. Impossible.

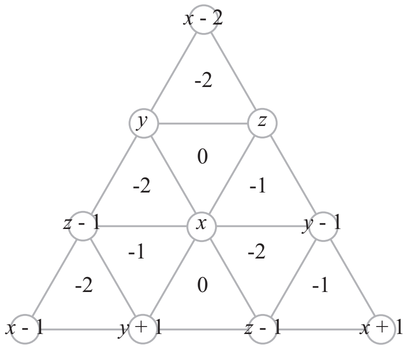
2. Si le nombre placé au centre est impair, ses voisins doivent être de parité alternée (un pair, un impair par triangle), mais alors les trois sommets sont occupés par des nombres impairs, cela fait sept nombres impairs parmi 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 et 10. Impossible.

b) 1. 1. Si on souhaite obtenir des sommes toutes impaires et que le nombre placé au centre est impair, c'est la situation du a. 1.

2. Si le nombre placé au centre est pair, c'est la situation du a. 2.

4. Partant du triangle dont les sommets sont marqués x, y, et z, on marque les sommets des triangles ayant avec lui un côté commun. Si $x + y + z$ est la plus forte somme, les sommes voisines sont $x + y + z - 1$, et chaque fois deux des trois termes sont connus. La figure ci-contre montre qu'alors les trois positions « sommet » sont occupées par le même $x - 1$. Impossible. Échanger -1 et $+1$ fournit le même résultat si on suppose que la somme $x + y + z$ est la plus petite.





5. On a utilisé dans la figure ci-contre quatre nombres consécutifs, $x-2, x-1, x, x+1$, trois nombres consécutifs $y-1, y, y+1$ et trois autres nombres consécutifs $z - 2, z - 1, z$ (cette répartition est due au choix de départ). On peut donc éviter les chevauchements.

N.B. Les 0, -1 et -2 figurent les différences par rapport à la somme $x + y + z$.

RETOUR AU SOMMAIRE

VERSAILLES

Troisième exercice

Séries ES, L, STAG, ST2A

Quand les carrés sont partis

Énoncé

On écrit à la suite les entiers naturels qui ne sont pas des carrés parfaits : 2, 3, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13, etc.
Quel est le 2 013$^{\text{ème}}$ nombre écrit ?

Éléments de solution

Si on écrit la suite des entiers non nuls jusqu'au carré de 46, on obtient : 1, 2, 3, ..., 2 113, 2 114, 2 115, 2 116. Cette suite comporte 2 116 termes, dont 46 sont des carrés. Quand on prélève ces carrés, il reste 2 116 − 46, c'est-à-dire 2 070 nombres. Pour aller jusqu'au 2 013$^{\text{ème}}$, il faut enlever les 2 070 − 2013 derniers.
Les nombres à ôter sont les 56 prédécesseurs de 2 115 et 2 115 lui-même. Le dernier nombre écrit est donc 2 058.
On peut observer que 2 058 = 2 013 + 45. On aurait aussi pu trouver 2 058 en ajoutant à 2 013 les 45 carrés « partis ».

RETOUR AU SOMMAIRE

VERSAILLES

Quatrième exercice

Séries ES, L, STAG, ST2A

Les petits papiers

Énoncé

On dispose de 5 morceaux de papier.
On choisit un ou plusieurs de ces papiers, et on découpe chacun d'eux en 5 nouveaux morceaux. On obtient ainsi un nouvel ensemble de morceaux de papier (ceux qui n'ont été découpés et ceux produits par la découpe).
On recommence l'opération (choix d'au moins un papier, découpe en 5 des papiers choisis, rassemblement) autant de fois qu'on veut.

1. Peut-on obtenir 17 morceaux de papier ?
2. Peut-on obtenir 33 morceaux de papier ?
3. Peut-on obtenir 2 013 morceaux de papier ?

Éléments de solution

1. Pour obtenir 17 papiers, il suffit de découper en 5 trois de ces papiers.
2. Pour obtenir 33 papiers, il faudrait en avoir eu 29 et en avoir découpé un, ou 25 et découpé deux, ou 21 et découpé trois, ou 17 et découpé quatre, ou 13 et découpé cinq, ou 9 et découpé 6. On peut se ramener à 9, car 29 est accessible à partir de 25 ou 21 ou 17 ou 13 ou 9, etc.
   Pour obtenir 9 papiers à partir de 5, il suffit d'en découper un. Donc obtenir 33 est possible.
   Chaque opération de découpage produit 4 papiers de plus, qu'elle soit ou non concomitante à une autre. On n'est limité que par le nombre de papiers qu'on possède au moment de ces opérations.
3. $2\ 013 = 4 \times 502 + 5$. À partir de 5 papiers, on peut en obtenir 2 013 après 502 opérations de découpage (qui, nécessairement, ne sont pas simultanées).

RETOUR AU SOMMAIRE

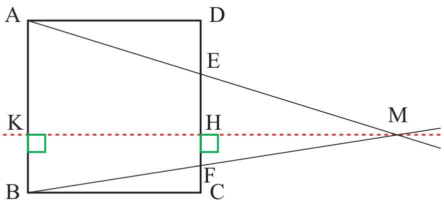
VERSAILLES

Cinquième exercice

Autres séries

Un triangle qui prend l'aire

Énoncé



Une unité de longueur est donnée dans le plan. On considère un carré ABCD de côté 1. Deux points E et F appartenant au côté [CD] sont tels que les demi-droites [AE) et [BF) sont sécantes en un point M situé dans le demi-plan de frontière (CD) qui ne contient pas A. L'aire du triangle EFM est $\dfrac{2}{3}$.

Quelle est la longueur du segment [EF] ?

Éléments de solution

Appelons H le pied de la perpendiculaire abaissée de M sur (EF) et K le point d'intersection de cette perpendiculaire avec (AB).

L'aire du triangle MEF est $\dfrac{2}{3}$: $\dfrac{1}{2} \times MH \times EF = \dfrac{2}{3}$.

D'autre part, le triangle MAB est un agrandissement du triangle MEF (si on préfère, on utilise les triangles MEF et MAB, en situation de Thalès et les triangles MEH et MAK, en situation de Thalès).

D'où l'égalité des rapports : $\dfrac{EF}{AB} = \dfrac{MH}{MK}$, qui peut encore être écrite $EF = \dfrac{MH}{MH+1}$.

En remplaçant MH par $\dfrac{4}{3EF}$, on obtient : $EF \times (4 + 3EF) = 4$.

Cette équation s'écrit : $\left(EF + \dfrac{2}{3}\right)^2 - \dfrac{16}{9} = 0$. Sa solution positive est $\dfrac{2}{3}$.

RETOUR AU SOMMAIRE

VERSAILLES

Sixième exercice

Autres séries

17 et 23 en leitmotiv

Énoncé

On écrit à la suite 2 013 chiffres non nuls de telle sorte que, chaque fois qu'on considère deux termes consécutifs, le nombre de deux chiffres qu'ils forment est un multiple de 17 ou un multiple de 23.

Un début possible serait par exemple : 3 4 6 8 . . . , car 34 est un multiple de 17, 46 un multiple de 23 et 68 un multiple de 17.

Quels peuvent être les cinq derniers chiffres de la suite ?

Éléments de solution

Les multiples de 17 non nuls et inférieurs à 99 sont : 17, 34, 51, 68, 85.
Les multiples de 23 non nuls et inférieurs à 99 sont : 23, 46, 69, 92.
La suite ne peut commencer par 1, car aucun des nombres ci-dessus ne commence par 7.
La suite ne peut commencer par 5, car après 51 vient 17. . .
La suite ne peut commencer par 7.
La suite ne peut commencer par 8, car après 85 viennent 51 et 17.
Si la suite commence par 6, elle ne peut se poursuivre par 8, compte tenu de ce qui précède.
La suite commençant par 6 et qui ne s'arrête pas est périodique : 6, 9, 2, 3, 4, 6, etc.
Il en est de même de la suite commençant par 2 : 2, 3, 4, 6, 9, 2, etc.
Il en est de même de la suite commençant par 3 : 3, 4, 6, 9, 2, 3, etc.
Et de celle commençant pat 4 : 4, 6, 9, 2, 3, 4, etc.
Et de celle commençant par 9 : 9, 2, 3, 4, 6, 9, etc.
Chacune des suites possibles a une période de 5 termes. Le 2 011$^{\text{ème}}$ terme est donc égal au premier, et on pourrait associer les 2 012$^{\text{ème}}$ et 2 013$^{\text{ème}}$ aux deuxième et troisième, le quatrième étant le 2 009$^{\text{ème}}$ et le cinquième le 2 010$^{\text{ème}}$.
Mais comme il y a cinq suites possibles, toute permutation circulaire de 6, 9, 2, 3, 4 est possible.

RETOUR AU SOMMAIRE