Association des Professeurs
de Mathématiques de
l'Enseignement Public

LES OLYMPIADES DE MATHEMATIQUES 2016

TOME 2
solutions

Coordination : Paul-Louis HENNEQUIN
Mise en forme : Jean BARBIER

N° APMEP : 1013

N° ISBN : 978-2-912846-89-1

Introduction

Avec ce tome 2, l'APMEP met à votre disposition les annales corrigées des Olympiades de mathématiques 2016. Cette brochure, téléchargeable gratuitement, contient, grâce à l'implication et à la diligence des cellules académiques, les 98 exercices proposés aux élèves de première des différentes séries.

Ces exercices qui font appel, non seulement à des connaissances mathématiques, mais aussi à des capacités de recherche, d'initiative et de persévérance sont destinés à des élèves de première, mais quelques adaptations vous permettront de les utiliser dans d'autres classes. N'hésitez pas à télécharger cette mine qui permettra à vos élèves (et à vous-mêmes) d'explorer des domaines mathématiques nombreux et variés.

Un tableau synthétique placé au début du tome 1 vous permettra d'y choisir un exercice et dans le tome 2 de trouver des éléments de sa solution en fonction de six critères : Géographie, Thème, Type, Volume, Adaptation, Histoire. La dernière ligne vous permettra d'estimer la place accordée à chaque thème et de la comparer à celle des années précédentes.

On constate par exemple dans cette cuvée le grand nombre de sujets sur des jeux (de hasard ou de stratégie) des pavages, des graphes, et des outils de géométrie originaux dans deux académies avec des approches différentes; taxi-distance (Grenoble 1 et Nice 1) et droites tropicales (Orléans 3 et Paris 1). Vous pourrez accéder aux articles en cliquant sur le la case de la première colonne qui lui correspond. A la fin de chaque exercice, un « retour au sommaire » vous permet de revenir au tableau.

Les modalités d'organisation de la session 2016 ont été publiées au B. O. du 5/11/15 et figurent dans les annales 2015. La présente comportait cinq innovations;

- une épreuve en deux temps, équitablement répartie entre une partie « nationale » et une partie « académique » ; cette modalité a été adoptée dans toutes les académies;
- la possibilité donnée aux académies qui le souhaitaient de faire composer les candidats en équipes sur la partie académique; cette modalité a été expérimentée dans les académies de Mayotte, Nantes, Pacifique, Paris.et surtout Versailles où un concours par équipes est proposé depuis trois ans à des triplettes d'élèves de troisième ou seconde. Plus de 1600 triplettes y ont composé cette année sur des sujets conçus pour ce mode de travail;
- l'enrichissement de la brochure par des contributions de collègues et d'élèves.

La publication des annales en deux tomes, ; le premier qui contient les sujets est paru courant mai pour permettre aux collègues de rédiger leurs propositions de compléments et aux élèves souhaitant participer à des stages ou à des compétitions durant l'été de s'entrainer. Le second paraît courant octobre et contient, outre les solutions proposées par les cellules académiques, quelques propositions de variantes, sources ou compléments mathématiques ou historiques.
Celles-ci sont dues à Max Hochart, responsable de la rubrique des problèmes de l'APMEP; On les trouvera dans les lignes : National Europe 1, National Europe 2, National Amérique 1, National Amérique 2, National Asie Pacifique 2, Besançon 2, Créteil 1, Nantes. Elles vont d'une simple remarque à la résolution d'un problème plus général que celui de l'exercice, en passant par des questions introductives à la théorie analytique des nombres ou des perspectives historiques sur des objets classiques tels le nombre d'or.

? Nous souhaitons que de nombreux collègues utilisent cette brochure et noue fassent connaître les idées et compléments aussi minimes soient-ils que leur utilisation leur suggère. Il serait bon aussi que quelques candidats n'hésitent pas à communiquer leurs idées ou solutions originales. Bonne lecture à tous !

Jean Barbier,Paul–Louis Hennequin et Max Hochart

2016	Algorithmique	Arithmétique	Numération	Dénombrement	Logique	Inégalités	Suites	Equat.-Fonctions	Géométrie plane	Géométrie espace	Probablités	Statistique pourcentages	Nombre de questions	Longueur solution	Sections	Titre
National Europe 1		X				X		X		X			13	2	Toutes	Echanges thermiques
National Europe 2	X	X				X							12	2	S	Liber abaci
National Europe 3	X						X						9	2	Autres	Demi-tour
National Amérique 1		X											10	2	Toutes	Tout passe, tout s'efface
National Amérique 2	X	X					X						11	2	S	Sommes ou puissances entières d'entiers
National Amérique 3				X			X						5	1	Autres	Dés collés
National Asie Pacifique 1	X	X											8	1	Toutes	Accès réservé
National Asie Pacifique 2	X	X											10	1	S	Nombres à moyenne harmonique entière
National Asie Pacifique 3	X								X				8	2	Autres	Coloriages
Aix-Marseille 1		X						X					7	1	Toutes	La magl box
Aix-Marseille 2									X	X			11	4	S	Curieuses traversées
Aix-Marseille 3		X						X					4	2	Autres	Histoires de prix
Amiens 1			X										1	4	S	Graphe et chiffres
Amiens 2				X					X				2	1	Autres	Carrés dans un rectangle
Amiens 3											X		1	1	Autres	La mourre
Amiens 4								X		X			2	1	S	Diagonales
Asie Nouvelle Calédonie Pacifique 1									X		X		11	4	Toutes	Paradoxe de Bertrand
Asie Nouvelle calédonie Pacifique 2				X					X				10	5	Toutes	Une histoire de pavage
Besançon 1	X							X			X		9	2	Toutes	Au feu rouge
Besançon 2		X				X		X	X	X			16	5	Toutes	Le nombre d'or
Bordeaux 1				X					X				7	2	Toutes	Coloriage
Bordeaux 2	X	X		X		X							10	2	S	La tombola
Bordeaux 3			X	X									12	2	Autres	Grande famille
Caen 1				X			X		X				7	2	Toutes	Les mots
Caen 2							X		X				6	2	S	Le lièvre infatigable
Caen 3								X					5	2	Autres	Une histoire de Moyenne
Clermont 1	X			X			X				X		10	4	Toutes	Si tous les jumeaux du monde voulaiernt se donner la main
Clermont 2	X						X		X		X		8	2	S	Chemins aléatoires paraboliques
Clermont 3								X	X				5	1	Autres	Fête foraine

Corse 1	X								X				5	1	Toutes	Cavalier seul
Corse 2		X						X	X				24	2	Toutes	Changeons les règles
Créteil 1				X				X	X	X			6	2	Toutes	Cousu de fils d'or
Créteil 2				X					X				9	2	Toutes	Les élastiques
Dijon 1		X						X					4	2	Toutes	Années de naissance
Dijon 2									X		X		6	2	S	Jeu de Palet
Dijon 3				X		X							8	2	Autres	Coccinelles
Grenoble 1		X							X				10	4	Toutes	Taxis à Mathville
Grenoble 2	X					X	X						8	2	S	Accepter les différences
Grenoble 3		X	X										13	4	Autres	Nombres prisonniers
Guadeloupe et Martinique 1											X		7	6	Toutes	Black dices : le black jack aux dés
Guadeloupe et Martinique 2		X	X				X						7	2	S	Simplifications scandaleuses
Guadeloupe et Martinique 3				X									3	1	Autres	Les boîtes
Lille 1				X					X				16		Toutes	Les dominos
Lille 2	X		X				X						14	6	S	Coffre-fort lourd
Lille 3	X		X				X						9	4	Autres	Coffre-fort plume
Limoges 1						X		X	X				9	2	Toutes	Quatre moyennes
Limoges 2										X			14	3	Toutes	Voyage à la surface de la Terre
Lyon 1							X		X				6	8	Toutes	Plier une feuille de papier
Lyon 2			X	X							X		9	10	Toutes	Nombres tri-tri
Mayotte1		X					X						7	1	Toutes	Triplets pythagoriciens
Mayotte 2										X			4	2	S	Deux iles voisines
Mayotte 3				X									5	2	Autres	Poignées de main
Montpellier 1									X				4	4	Toutes	Triangles frères
Montpellier 2			X	X									5	3	S	Nombres magiques
Montpellier 3						X	X						3	1	Autres	Jeu de jetons
Nancy-Metz 1								X	X				10	3	Toutes	Sauvetage en montagne
Nancy-Metz 2			X										7	4	Toutes	Somme et produit
Nantes 1	X					X					X		13	2	Toutes	Le jeu de court-circuit
Nantes 2											X		1	1	S	Un jeu équitable
Nantes 3				X					X				8	2	Autres	Le nombre de Green
Nice 1													8	4	Toutes	A travers les rues
Nice 2		X											9	3	Toutes	Nombres "riches"
Orléans-Tours 1				X			X						13	2	Toutes	Des nombres en forme
Orléans-Tours 2										X			9	3	S	Tas de sable, des tas de situations
Orléans-Tours 3				X			X		X				9	2	Auitres	Gauche, droite !
Paris 1									X				8	8	Toutes	Droites tropicales
Paris 2				X			X						7	2	S	Intercaler la somme
Paris 3							X						5	2	S par équipes	Le solitaire bulgare

Paris 4										X			9	6	S par équipes	Une fourmillante planête
Paris 5	X	X											8	2	Autres (individuel)	La couleur des nombres
Paris 6									X		X		8	11	Autres (équipes)	L'anniversaire d'Anna
Paris 7				X									10	2	Autres (équipes)	Un classement
Poitiers 1		X	X	X									8	3	Toutes	Numération des plaques
Poitiers 2				X				X			X		9	1	S	Tirage à lafête foraine
Poitiers 3	X			X									8	1	L,ES,STMG	Les réseaux sociaux
Poitiers 4	X	X		X									11	2	ST2D,STL,STD2A	Des grilles magiques
Reims 1									X				5	2	Toutes	Arbèlos (sur les traces d'Archimède)
Reims 2							X		X				11	31	S	Le flocon de von Koch
Reims 3							X						9	2	Autres	Bactéries
Rennes 1	X	X				X							14	4	Toutes	Le Tripl'One
Rennes 2		X					X	X					16	2	S ,STI2D, STL	A la dérive
Rennes 3		X					X	X					11	2	L ES,ST2S STMG,STHR	Ca balance !
Réunion 1		X					X		X				8+6	4	Toutes	Pavages en L
Réunion 2	X										X		12	5	S	L'algorithme réducteur
Réunion 3	X			X		X					X		11	2	Autres	Stratégie de jeu
Rouen 1						X		X					8	3	Toutes	Retouche d'images
Rouen 2								X	X				9	3	S	A la recherche du triangle d'or
Rouen 3								X					5	2	Autres	Un aller-retour harmonique
Strasbourg 1									X				8	5	Toutes	Triangle équilatère
Strasbourg 2									X				4	3	S	Les cercles tangents
Strasbourg 3									X		X		10	1	Autres	Déplacement d'une coccinelle
Toulouse 1				X					X				7	3	Toutes	Autour du jeu de Sim
Toulouse 2		X									X		4	2	S	Vous avez dit 1/2 ?
Toulouse 3				X									6	5	Autres	Bracelets
Versailles 1				X									3	1	S	Tant qu'il y aura des sommes
Versailles 2				X			X						7	2	S	La sécuriité dans le désordre
Versailles 3				X			X						7	3	Autres	Table tournante
Versailles 4								X					2	1	Autres	Eloge de la régularité
TOTAL	21	25	10	31	0	12	25	19	34	8	16					

Métropole-Europe-Afrique-Orient-Inde

Premier exercice national

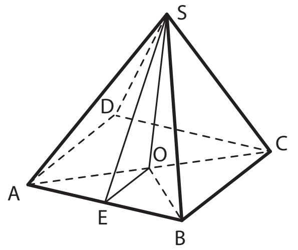
Toutes séries

Échanges thermiques

Éléments de solution

1. a) ,b), c) Calculs de compacité

	Cube de côté a	Demi-sphère de rayon r	Pyramide à base carrée de côté a, de hauteur a
Surface extérieure	$6a^2$	$3\pi r^2$	$a^2(\sqrt{5}+1)$
Volume	a^3	$\frac{3}{2}\pi r^3$	$\frac{1}{3}a^3$
Facteur de compacité	$\frac{6}{a}$	$\frac{9}{2r}$	$\frac{3(\sqrt{5}+1)}{a}$



Le calcul de la surface extérieure demande celui de la hauteur *SE* qui est l'hypoténuse de SOE, rectangle en O

d) Les échanges thermiques avec l'extérieur sont d'autant plus grands que le facteur de compacité est élevé.
Note : Le facteur de compacité est également pris en compte pour analyser les coûts de packaging, de stockage ou de transport d'une marchandise.

2. a) On développe le second membre...
   b) Le second membre est un nombre positif, donc le premier aussi.
   c) L'inégalité précédente, valable pour tout triplet (a,b,c), s'applique à tout triplet de produit 1, et aux racines cubiques...
   d),e) Le volume d'un tel pavé est xyz et sa surface extérieure $2(xy+yz+zx)$, d'où le résultat.
   Comme $xyz = 1$, l'inégalité précédente s'applique au triplet $(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z})$ dont le produit vaut aussi 1, d'où il résulte que $c \geqslant 6$. Et comme ce minorant est atteint en $(1, 1, 1)$, c'est un minimum. Le cube de côté 1 réalise le minimum du facteur de compacité des pavés de volume 1. Aucun autre pavé droit de volume 1 de le réalise : l'inégalité 2. b. serait stricte.
3. a) Faire $c = 1$ pour obtenir l'équation proposée.
   b) Comme $p \leqslant q \leqslant r$, la somme $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}$ est majorée par $\frac{3}{p}$, qui est donc supérieur à $\frac{1}{2}$. Par ailleurs, si $p \leqslant 2$, la somme des trois fractions unitaires est supérieure strictement à $\frac{1}{2}$.
   c) et d) Comme précédemment, si $\frac{1}{q}+\frac{1}{r} = \frac{1}{6}$, $\frac{2}{q} \geqslant \frac{1}{6}$. D'autres majorations s'imposent dans les cas qui suivent.
   Tableau final. On lit les triplets solutions en colonne.

p	3	3	3	3	3	3	4	4	4	4	5	6
$\frac{1}{q}+\frac{1}{r}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{3}$
q	7	8	9	10	11	12	5	6	7	8	6	6
r	42	24	18	15		12	20	12		8		6

Compléments et commentaires de Max Hochart [1]

0.1 Sur la question 2a)

Les remarques a) et b) ci-dessous sont directement exploitables en classe de terminale, la c) est passablement hors programme, mais la remarque d) peut faire l'objet d'un développement historiquement important : la résolution des équations de degré 3.

a) La question 2a de ce sujet demande d'établir la relation suivante :

$$a^3+b^3+c^3-3abc=\frac{1}{2}(a+b+c)[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2], \tag{1}$$

valable (selon l'énoncé) « pour tous nombres a,b,c ». On peut choisir a,b,c complexes. En notant

$$\sigma_1=a+b+c,$$

$$\sigma_2=ab+ac+bc$$

et

$$\sigma_3=abc,$$

les trois complexes a,b,c sont les racines du polynôme

$$(X-a)(X-b)(X-c).$$

En développant, ce polynôme vaut

$$X^3-\sigma_1X^2+\sigma_2X-\sigma_3.$$

Autrement dit, en notant z_1,z_2,z_3 au lieu de a,b,c, on a les relations

$$z_i^3=\sigma_1z_i^2-\sigma_2z_i+\sigma_3$$

pour $i\in\{1,2,3\}$. En sommant ces trois relations, on obtient

$$a^3+b^3+c^3=\sigma_1(a^2+b^2+c^2)-\sigma_2(a+b+c)+3\sigma_3,$$

soit encore

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc), \tag{2}$$

ce qui donne la relation voulue puisque

$$a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc=\frac{1}{2}[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2].$$

b) La relation (1) est un cas particulier des identités de Newton. Pour $n\in\mathbb{N}^*$ et $z_1,\dots,z_n\in\mathbb{C}$, on considère les polynômes symétriques élémentaires

$$\sigma_k=\sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n} z_{i_1}\cdots z_{i_k}.$$

On introduit également les sommes des puissances des z_i : pour $p\in$
mathbbN,

$$S_p=\sum_{k=1}^{n} z_k^p.$$

1. Responsable de la rubrique des problèmes de l'APMEP

En convenant que $\sigma_0 = 1$, on a alors pour tout $k \in [\![1,n]\!]$,

$$k\sigma_k = \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i-1} \, \sigma_{k-i} \, S_i.$$

En prenant $n = k = 3$, on a donc

$$3\sigma_3 = \sigma_2 \, S_1 - \sigma_1 \, S_2 + S_3.$$

Ceci redonne

$$S_3 - 3\sigma_3 = \sigma_1 (S_2 - \sigma_2),$$

qui est la relation (2).

c) Une autre approche possible est de passer par les complexes. En notant j le nombre complexe

$$j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \exp\left(\frac{2i\pi}{3}\right),$$

on a clairement $j + j^2 = -1$ et il s'agit de montrer que

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a+jb+j^2c)(a+j^2b+jc), \tag{3}$$

ce qui peut se faire en développant.

Mais la formule (3) est relativement naturelle : elle provient du calcul du déterminant de la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$. L'expression $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ s'obtient en développant le déterminant par la règle de Sarrus, tandis que l'expression $(a+b+c)(a+jb+j^2c)(a+j^2b+jc)$ s'obtient en diagonalisant la matrice. En effet, en notant $V_1 = (1,1,1)$, $V_2 = (1, j, j^2)$ et $V_3 = (1, j^2, j)$, on a $AV_1 = (a+b+c)V_1$, $AV_2 = (a+jb+j^2c)V_2$ et $AV_3 = (a+j^2b+jc)V_3$. Le déterminant de A est donc le produit des valeurs propres, à savoir $(a+b+c)(a+jb+j^2c)(a+j^2b+jc)$.

d) Fait remarquable, la relation (3) permet de résoudre les équations de degré 3, en dissimulant l'aspect technique de la méthode de Cardan. Une équation de degré 3 peut toujours s'écrire sous la forme

$$X^3 + pX + q = 0.$$

On sait alors résoudre dans $\mathbb{C}$ le système

$$b^3 + c^3 = q, \quad bc = -\frac{p}{3}.$$

En effet, $B = b^3$ et $C = c^3$ vérifient

$$B + C = q, \quad BC = -\frac{p^3}{27},$$

donc B et C sont les racines de l'équation

$$X^2 - qX - \frac{p^3}{27} = 0.$$

On en déduit B et C puis b et c. La relation (3) donne alors

$$X^3 + pX + q = X^3 - 3bcX + b^3 + c^3 = (X+b+c)(X+jb+j^2c)(X+j^2b+c).$$

Le polynôme de degré 3 est maintenant factorisé et l'on peut trouver ses racines facilement.

0.2 Sur la question 2b)

Il s'agit de démontrer que, pour $A, B, C > 0$, si $ABC = 1$ alors $A + B + C \geqslant 3$. Ceci est un cas particulier de l'inégalité arithmético-géométrique : pour $x_1, \cdots, x_n > 0$,

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k \geqslant \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} x_k}.$$

En prenant $n = 3$, $x_1 = A, x_2 = B, x_3 = C$, on a la solution à l'exercice :

$$\frac{1}{3}(A+B+C) \geqslant ABC = 1.$$

L'inégalité arithmético-géométrique se prouve généralement par la concavité de la fonction logarithme, argument hors programme avant le baccalauréat.

Cependant, deux approches sont possibles en classe de Terminale. La première est une démonstration par récurrence, assez subtile : on commence par le cas où n est une puissance de 2, puis une petite astuce permet de conclure. Cette preuve historique est due à Cauchy. Très jolie, cette preuve n'en demeure pas moins mystérieuse et peu formatrice pour les élèves. La voici, selon les termes de Cauchy (extraits des Oeuvres complètes de Cauchy, publiées en 1897 chez Gauthier-Villars) :

La moyenne géométrique entre plusieurs nombres $A, B, C, D, \ldots$ est toujours inférieure Ĺ leur moyenne arithmétique.

Démonstration - Soit n le nombre des lettres $A, B, C, \ldots$ Il suffira de prouver, qu'on a généralement

$$\sqrt[n]{ABCD\ldots} \leq \frac{A+B+C+D+\ldots}{n}, \tag{4}$$

ou, ce qui revient au mŘme,

$$ABCD\ldots \leq \left(\frac{A+B+C+D+\ldots}{n}\right)^n. \tag{5}$$

Or en premier lieu, on aura évidemment, pour $n = 2$,

$$AB = \left(\frac{A+B}{2}\right)^2 - \left(\frac{A-B}{2}\right)^2 \leq \left(\frac{A+B}{2}\right)^2,$$

et l'on conclura, en prenant successivement $n = 4, n = 8, \ldots$, enfin $n = 2^m$

$$\begin{aligned} ABCD &\leq \left(\frac{A+B}{2}\right)^2 \left(\frac{C+D}{2}\right)^2 \\ &\leq \left(\frac{A+B+C+D}{4}\right)^4, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ABCDEFGH &\leq \left(\frac{A+B+C+D}{4}\right)^4 \left(\frac{E+F+G+G}{4}\right)^4 \\ &\leq \left(\frac{A+B+C+D+E+F+G+H}{8}\right)^8, \end{aligned}$$

$$\vdots$$

$$ABCD\ldots. \leq \left(\frac{A+B+C+D+\ldots.}{2^m}\right)^{2^m} \tag{6}$$

En second lieu, si n n'est pas un terme de la progression géométrique $2, 4, 8, 16, \ldots.$, on désignera par 2^m un terme de cette progression supérieur Ĺ n, et l'on fera

$$K = \frac{A+B+C+D+\ldots}{n},$$

puis, revenant Ĺ la formule (6), et en supposant dans le premier membre de cette formule les $2^m - n$ derniers facteurs égaux Ĺ K, on trouvera

$$ABCD\ldots K^{2^m-n} \leq \left[\frac{A+B+C+D+\ldots+(2^m-n)K}{2^m}\right]^{2^m},$$

ou, en d'autres termes,

$$ABCD\ldots K^{2^m-n} \leq K^{2^m}.$$

On aura donc par suite

$$ABCD... \leq K^n = \left(\frac{A+B+C+D+...}{n}\right)^n,$$

ce qu'il fallait démontrer.

La démonstration ci-dessous a un grand mérite : elle est susceptible d'être proposée en classe de Terminale. Un tableau de variation donne l'inégalité

$$\ln(x) \leqslant x-1 \qquad (x>1).$$

On choisit alors $x_1, \cdots, x_n > 0$, on pose

$$S = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k.$$

L'inégalité précédente donne

$$\ln\left(\frac{x_k}{S}\right) \leqslant \frac{x_k}{S} - 1 \qquad (1 \leqslant k \leqslant n).$$

En sommant, on a donc

$$\ln\left(\frac{\prod_{k=1}^{n} x_k}{S^n}\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{x_k}{S} - 1\right).$$

La somme de droite vaut 0. En prenant l'exponentielle,

$$\prod_{k=1}^{n} x_k \leqslant S^n,$$

ce qui est l'inégalité voulue.

RETOUR AU SOMMAIRE

Métropole-Europe-Afrique-Orient-Inde

Deuxième exercice national

Série S

Liber abaci

Éléments de solution

1. La première décomposition proposée comporte des dénominateurs identiques, la seconde n'est pas une somme d'inverses d'entiers. On peut écrire $\frac{2}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}$ ou $\frac{2}{3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{12}$.

2. a)

k	p	q	n	$pn-q$	qn
1	4	17	5	3	85
2	3	85	29	2	2 465
3	2	2 465	1233	1	3 039 345
4	1	3 039 345	3 039 345	0	

b) À l'issue du $N^{\text{ième}}$ tour de boucle, le quotient $\frac{p_N}{q_N}$, qui est nul, apparaît comme la différence entre $\frac{p_1}{q_1}$ et une somme de fractions unitaires. Donc $\frac{p}{q}$ est bien somme de fractions unitaires. Par ailleurs

$$\frac{p_{k+1}}{q_{k+1}} = \frac{p_k}{q_k} - \frac{1}{n_k} < \frac{1}{n_k - 1} - \frac{1}{n_k} = \frac{1}{(n_k-1)n_k} \leqslant \frac{1}{n_k}$$

prouve que la suite (n_k) est strictement décroissante.

c) On a $p_k n_k - q_k = p_{k+1}$ et $\frac{1}{n_k} \leqslant \frac{p_k}{q_k} < \frac{1}{n_k - 1}$, et donc $p_{k+1} - p_k = p_k(n_k - 1) - q_k$. Le membre de droite est strictement négatif, donc la suite des p_k est strictement décroissante. Il s'ensuit qu'il existe un certain N pour lequel $p_N = 0$. L'algorithme s'arrête.

3. a) Le plus petit entier n tel que $\frac{1}{n} \leqslant \frac{p}{q}$ est 1. On pourrait accepter 1 comme « fraction unitaire », mais dès que $\frac{p}{q} \geqslant 2$, 1 sera répété, ce qui est dans tous les cas interdit.

b) Le premier membre de la première inégalité à montrer comporte a termes tous supérieurs ou égaux à $\frac{1}{2a}$, dont au moins un est strictement supérieur à $\frac{1}{2a}$, car $a+1 < 2a$ dès que $a > 1$. Le premier membre de la seconde inégalité comporte $3a$ termes, les a premiers sont les mêmes que ceux de la sommes précédente. Pour les autres, on reconnaît : $\frac{1}{2a+1} + \frac{1}{2a+}\big) + \frac{1}{2a+3} + \cdots + \frac{1}{2a+2a}$ que l'on minore en faisant jouer à $2a$ le rôle antérieur de a.

c) $\frac{1}{a+1} < \frac{1}{4}$. En ajoutant à ce premier terme, inférieur à 1, les fractions unitaires « consécutives », on finit par dépasser 1, question précédente (inégalité de droite).
Notons b le dernier entier supérieur à a pour lequel la somme est encore inférieure à 1. Bien sûr $b > 2a$, question précédente (inégalité de gauche).

d) Considérons un rationnel $\frac{p}{q}$ supérieur à 1 et écrivons $\frac{p}{q} = n + \frac{p'}{q'}$, expression dans laquelle n est la partie entière de $\frac{p}{q}$. Une écriture égyptienne de $\frac{p'}{q'}$ demande des fractions unitaires de dénominateurs inférieurs strictement à un certain N_0. Si on écrit $n = 1+1+1+\cdots+1$, on va décomposer chacun des 1 en somme de fractions unitaires (en prenant garde que les dénominateurs soient tous différents).
Pour le premier 1, Utiliser le résultat de la question c. en prenant pour premier dénominateur $a+1$ un nombre supérieur à N_0. On peut approcher 1 à moins de $\frac{1}{b+1}$. Le rationnel restant est inférieur à $\frac{1}{b+1}$ et admet une écriture égyptienne dont tous les dénominateurs sont supérieurs à $b+1$.
Pour l'éventuel second 1, on recommence, en prenant pour premier dénominateur un entier supérieur à tous ceux utilisés jusque-là.

Ainsi de suite.

Pour varier à l'infini les décompositions, on peut par exemple augmenter de 1 le premier dénominateur intervenant dans la décomposition du premier 1...

Compléments et commentaires de Max Hochart

Comme le précise la première question, une décomposition d'un rationnel en fraction égyptienne n'est pas unique. Par exemple,

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}.$$

On peut imposer une décomposition unique en ajoutant une condition : tout rationnel $\frac{a}{b} \in]0,1]$ peut s'écrire de manière unique

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_1 p_2} + \cdots + \frac{1}{p_1 p_2 \cdots p_k},$$

les p_i étant des entiers tels que

$$2 \leqslant p_1 \leqslant p_2 \leqslant \cdots \leqslant p_k.$$

On peut programmer un algorithme permettant de calculer les p_i, à partir de a et b. Les seules notions utiles sont celles de division euclidienne et partie entière.

Un prolongement possible est fourni par les fractions de Engel[1] : tout réel $x \in]0,1]$ s'écrit de manière unique

$$x = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{p_1 p_2 \ldots p_k},$$

avec

$$2 \leqslant p_1 \leqslant p_2 \leqslant p_3 \leqslant p_4 \cdots.$$

On montre alors que x est rationnel si et seulement si la suite $(p_k)_{k\geqslant 1}$ est stationnaire. Un sens est assez facile : si la suite est stationnaire, la limite des sommes partielles est rationnelle, c'est une belle utilisation du calcul des sommes géométriques.

Ceci fournit une preuve surprenante de l'irrationnalité du nombre e puisque

$$e - 2 = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k!}.$$

RETOUR AU SOMMAIRE

0. Friedrich Engel (1861-1941) est un mathématicien allemand.

Métropole-Europe-Afrique-Orient-Inde

Troisième exercice national

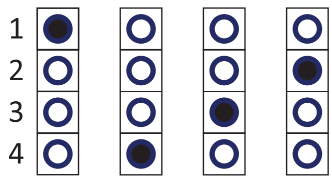
Séries autres que S

Demi-tour !

Éléments de solution

1. Supposons qu'une des deux opérations concerne le pion M et l'autre le pion N.
   Supposons $N < M$. On commence par retourner le pion M. Tous les pions de numéro inférieur ou égal à M changent de couleur. On retourne le pion N et tous les pions de numéro inférieur ou égal à N changent de couleur. Résultat : seuls les pions de numéros compris entre $N+1$ et M ont changé de couleur. Si on pratique ces opérations dans l'ordre inverse, les mêmes pions sont retournés une fois, les mêmes deux fois. L'ordre des opérations n'intervient donc pas.
2. Deux opérations identiques s'annihilent.
3. A : 1, B : 4 puis 3 puis 2 puis 1, C : 3 puis 2, D : 4 puis 3 puis 2.
4. a) et b) Comme on parcourt la colonne de n à 1, tous les jetons noirs rencontrés sont blanchi. Un jeton noir à partir duquel on réalise une opération n'est plus concerné par les suivantes, donc reste blanc. On réalise au maximum n opérations (cas d'une alternance de jetons noirs et blancs, le jeton n étant noir).
   Soit maintenant une méthode de blanchiment. L'ordre des opérations ne compte pas : on peut donc partir du dernier jeton, remonter jusqu'au premier, et neutraliser les doublons. Cela coïncide avec la méthode proposée, qui est minimale.
5. a) On utilise le mode opératoire précédent : chaque jeton noir rencontré, en partant du jeton n, est blanchi ou laissé blanc s'il l'était déjà, en laissant intacts ceux du dessous : c'est bien cela l'important. Cette méthode blanchit tout.

   b) Dans le plateau ci-dessous, le pion noir circule au fur et à mesure des opérations et rejoint sa place initiale. Le tableau de 4 cases ne peut pas être blanchi.



6. **Jeu à deux dimensions**
   On peut appliquer la méthode de la question 4. colonne par colonne, en commençant par la colonne n. Cela garantit le blanchiment de la colonne n. On passe ensuite au dernier jeton de la colonne $n-1$ et on remonte la colonne, etc. On passe ainsi par toutes les cases, qui peuvent donc être toutes blanchies.
7. **Trois dimensions**
   Le jeu a la forme d'un cube. Les pions sont numérotés par des triplets (i, j, k) où i est le numéro de la couche, j le numéro de la tranche (compté de gauche à droite), k le numéro du rang (compté de l'arrière vers l'avant). En changeant de couleur le pion (i, j, k), on change la couleur de tous les pions dont la couche, la tranche et le rang ont des numéros inférieurs ou égaux respectivement à i,j,k.

RETOUR AU SOMMAIRE

AMÉRIQUE - ANTILLES - GUYANE

Premier exercice national

Toutes séries

Tout passe, tout s'efface

Éléments de solution

1. a) et b)

Distance	1	2	3	4	5	
(2, 3, 4)	3–2	2	3	4		Non opérationnelle
(1, 4)	1	6–4	4–1	4	6–1	Opérationnelle

2. Le triplet (1, 4, 7) est opérationnel pour une règle de 9 cm

Distance	1	2	3	4	5	6	7	8
	1	9–7	7–4	4	9–4	7–1	7	9–1

3. a) et b)
Considérons une règle sur laquelle sont marquées p graduations. Il y a $p+1$ distances réalisables entre le bord gauche et une des graduations ou le bord droit, p distances réalisables entre la première graduation marquée à gauche et les autres ou le bord droit, etc.
Le nombre total de distances réalisables est donc au maximum $(p+1)+p+\cdots+3+2+1$. Cette somme vaut $\dfrac{(p+1)(p+2)}{2}$. Dans le cas où $p=3$, elle vaut 10 (on n'a pas besoin de la formule…) et donc 3 graduations est un effectif insuffisant pour une suite opérationnelle.

4. a) Pour réaliser la distance 9, il est nécessaire d'utiliser un des bords de la règle, le gauche ($b=9$) ou le droit ($a=1$).

   b) Si la liste contient 1 et 9, avec 8 on ne réalise que 1, 2, 7, 8 et 9, avec 7 on ne mesure que 1, 2, 3, 6, 8 et 9, avec 6 on ne mesure que 1, 3, 4, 5, 6, 8 et 9, avec 5 on ne mesure que 1, 4, 8 et 9. Le raisonnement s'achève par symétrie (remplacer 5 par 4, 6 par 3, etc.). Donc le plus grand terme d'une liste de trois n'est pas 9.
   Si le plus grand terme n'est pas 8, alors la liste contient 2. Si elle contient 7, alors 4 n'est pas atteint. Si elle ne contient pas 7, alors elle contient 3, avec lequel on ne réalise que 1, 2, 3, 7, 8 et 9.
   Donc le plus grand terme de la liste est 8.

   c) Avec 1 et 8, on mesure 1, 7, 8 et 9. Si on ajoute 3, on ne peut pas mesurer 4. Si on ajoute 4, on ne peut pas mesurer 3. Si on ajoute 5, on ne peut pas mesurer 7, si on ajoute 7, on ne peut pas mesurer 5. Enfin, si on ajoute 6, on ne peut pas mesurer 3. Il n'existe pas de liste opérationnelle à trois termes.

   d) La liste (1, 4, 6, 8) est opérationnelle pour une règle de 10 cm :

Distance	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	1	10-8	4-1	4	6-1	6	8-1	8	10-1

5. Liste opérationnelle pour une règle de 23 cm.
La question 3. a) nous apprend que p graduations seront en effectif insuffisant si $\dfrac{(p+1)(p+2)}{2} < 23$. Donc

le nombre de graduations à marquer est supérieur ou égal à 6. Voici une réalisation avec 6 graduations marquées :

Distance	1	**2**	3	4	**5**	6	**7**	8	9	10	11
	23-22	**2**	22-19	23-19	**5**	19-13	**7**	13-5	22-13	23-13	13-2
Distance	12	**13**	14	15	16	17	18	**19**	20	21	**22**
	19-7	**13**	19-5	22-7	23-	22-5	23-5	**19**	22-2	23-2	**22**

Compléments et commentaires de Max Hochart

Le cas d'une règle de longueur 6 est particulièrement intéressant : le couple (1, 4) est opérationnel. On peut donc effacer les marques en 2, 3 et 5. Autrement dit, en gardant les marques en 0, 1, 4 et 6, on arrive à mesurer toutes les distances entières entre 0 et 6. Cette situation est idéale puisque, avec juste 4 traits, on réalise le maximum possible de distances : $\binom{4}{2} = 6$ distances possibles. Se pose alors la question suivante : pour $n \in \mathbb{N}$ fixé, $n \geqslant 2$, peut-on trouver n entiers $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ tels que les distances $a_j - a_i$ pour $j > i$ prennent toutes les valeurs $1, 2, \cdots, \dbinom{n}{2} = \dfrac{n(n-1)}{2}$? Le cas d'une règle de longueur 6 correspond à la configuration $n = 4$. On a alors le très joli résultat suivant : pour $n \geqslant 5$, il est impossible de trouver de tels entiers $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$. La preuve est abordable en terminale. On trouvera les détails dans le très joli livre de Donald J. Newman : « Analytic Number Theory », édité chez Springer.

ù $\boxed{\text{RETOUR AU SOMMAIRE}}$

AMÉRIQUE - ANTILLES - GUYANE

Deuxième exercice national

Série S

Sommes de puissances entières d'entiers

Éléments de solution

Partie 1 : sommes, sommes de carrés, sommes de cubes

1. Cas $E = \{0, 1, 2, 3\}$. On prendra $A = \{0, 3\}$ et $B = \{1, 2\}$, car $1 + 2 = 0 + 3$.
2. Cas $E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. La somme des éléments de E étant impaire, on ne peut trouver deux parties de même somme la constituant.
3. a) La somme des éléments des deux parties de même effectif est 14.

   b) La somme des carrés des éléments de E est $\dfrac{7 \times 8 \times 15}{6} = 140$. La somme des carrés des éléments de A est donc 70.

   c) $A = \{0, 3, 5, 6\}$ et $B = \{1, 2, 4, 7\}$.
4. a) Compléter les deux tableaux :

$n = 3$	0	1	2	3
	1	0	0	1

$n = 7$	0	1	2	3	4	5	6	7
	1	0	0	1	0	1	1	0

   b) Faisons ce qu'on nous demande

$n = 15$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
	1	0	0	1	0	1	1	0	0	1	1	0	1	0	0	1

   Calculons :

$0+3+5+6+9+10+12+15 = 60$	$1+2+4+7+8+11+13+14 = 60$
$0^2+3^2+5^2+6^2+9^2+10^2+12^2+15^2 = 620$	$1^2+2^2+4^2+7^2+8^2+11^2+13^2+14^2 = 620$
$0^3+3^3+5^3+6^3+9^3+10^3+12^3+15^3 = 7\,200$	$1^3+2^3+4^3+7^3+8^3+11^3+13^3+14^3 = 7\,200$

Partie 2 : naissance d'une suite

Inspirés par les questions précédentes, on étudie la suite définie par $t_0 = 1$ et la relation de récurrence : pour tout entier n, $t_{2n} = t_n$ et $t_{2n+1} = 1 - t_n$ (suite de Prouhet-Thue-Morse).

5. $2\,016 = 2^5 \times 63$. Donc $t_{2\,016} = t_{63}$.
   $63 = 2 \times 31 + 1$. Donc $t_{2016} = 1 - t_{31} = 1 - (1 - t_{15}) = t_{15} = 1 - t_7 = t_3 = t_0 = 1$ (Pardon pour la suite d'égalités).
6. Le mode d'emploi est dans la définition : si n est multiple de 2, remplacer n par sa moitié, si n est congru à 1 modulo 4, remplacer n par la moitié de $n - 1$, si n est congru à 3 modulo 4, remplacer n par le quart de $n - 3$ (on peut se contenter de l'alternative pair/impair). Cette descente conduit à t_1 ou t_0.

7. S'il existe un n tel que $t_{2n} = t_{2n+1}$, on a $t_n = 1 - t_n$, ce qui n'est pas possible pour une suite qui ne prend que les valeurs 0 et 1. S'il existe un n tel que $t_{2n-1}) = t_{2n}$, on a $1 - t_{n-1} = t_n$, mais alors $t_{2n+1} = 1 - t_n$, terme différent du précédent. Les seules répétitions concernent deux termes consécutifs le premier impair le suivant pair.
8. Supposons que la suite ait pour période T. Le croquis ci-après fait apparaître une contradiction :

Compléments et commentaires de Max Hochart

a) Dans cet exercice, il est utile de savoir que

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \tag{7}$$

Cette relation est généralement établie par récurrence dans tout livre de terminale. Une interprétation en combinatoire peut fournir une preuve directe : imaginons une équipe sportive contenant $n+1$ joueurs. Au foot, pour lequel $n = 10$, lorsque les joueurs entrent dans le stade, le premier se positionne sur une ligne, le second lui tape dans la main et se positionne sur cette ligne, à côté du premier, tandis que le troisième tape dans la main des deux premiers puis se positionne sur la ligne à côté du second, et ainsi de suite.

À la fin, une fois positionné, le premier joueur aura donc tapé dans la main de 0 joueurs. Une fois positionné, le second joueur aura tapé dans la main de 1 joueurs, etc, jusqu'au dernier jouer qui, une fois installé, aura tapé dans la main de n joueurs. Au total, le nombre de signes amicaux ainsi échangés est égal à

$$1 + 2 + \cdots + n.$$

Or, il y a $\binom{n+1}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$ paires possibles de deux joueurs parmi $n+1$, d'où la relation

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

b) Contrairement à l'énoncé proposé, la suite de Thue Morse est généralement définie par $t_0 = 0$ et par les relations $t_{2n} = t_n$ et $t_{2n+1} = 1 - t_n$. La suite des commentaires utilise la convention $t_0 = 0$.

c) Dans la suite de Thue Morse, le terme t_n est égal à la somme, modulo 2, des chiffres dans le développement binaire de n. Par exemple, $11 = 8 + 2 + 1$ s'écrit 1011 en base 2 donc $t_{11} = 1$. Il y a tout un tas de développements possibles sur la suite de Thue Morse en informatique ou en théorie des nombres.

d) Par exemple, on peut montrer, pour $|x| < 1$, que

$$\prod_{k=0}^{+\infty} (1 - x^{2^k}) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{t_n} x^n.$$

En notant $\theta(x)$ cette expression, on a $\theta(x) = (1 - x)\theta(x^2)$. La fonction θ est la fonction de Thue Morse.

Cette relation, peu exploitable au lycée, peut cependant donner naissances à quelques exercices : étudier la famille de polynômes définie par la relation $P_0 = 1$ et pour $n \in \mathbb{N}$, $P_{n+1}(X) = (1 - X)P_n(X^2)$. On peut constater que les coefficients des polynômes P_n permettent de calculer les entiers t_n.

Autre exemple, si deux fonctions $f, g :]-1, 1[\to \mathbb{R}$ sont continues et vérifient l'équation fonctionnelle

$$(1 - x)f(x) = f(x^2)$$

(idem pour g), alors f et g sont proportionnelles.

RETOUR AU SOMMAIRE

AMÉRIQUE - ANTILLES - GUYANE

Troisième exercice national

Séries autres que S

Dés collés

Éléments de solution

1. a) Le total des points marqués sur les faces d'un dé est 21. Pour deux dés, cela fait 42, mais on ne voit pas 2, 4, 6, 8, 10 ou 12. Le total des points visibles est donc 40, 38, 36, 34, 32 ou 30.

   b) On colle deux faces portant le même nombre N pour les dés 1 et 2. Dans ce cas, la face à coller, sur le dé 2, porte le nombre $7-N$. Du total 3×21, on doit donc déduire $2N+2(7-N)$, c'est-à-dire 14. Le total des points marqués visibles est donc 49.

2. a) Si le nombre de dés est impair, $k = 2p+1$, il y a $2p$ collages, qui dissimulent $14p$ points. La somme S_k est indépendante de n et vaut $S_k = 21k - 7(k-1)$ ou encore $S_k = 14k+7$
   Si le nombre de dés est pair, $k = 2p$, il y a $2p-1$ collages, le premier coûte $2n$, les autres $14(p-1)$. On a alors : $S_k = 21k - 7(k-2) - 2n$, ou encore $S_k = 14k + 14 - 2n$.

   b) Lorsque le nombre de dés est impair, la somme visible est impaire. 2 016 étant multiple de 14, il faudrait que $2n$ le soit aussi pour que la somme visible soit 2 016 avec un nombre de dés pair. Mais $2n$ prend les valeurs 2, 4, 6, 8, 10 et 12. La réponse est donc non.

   c) Le plus petit entier supérieur à 2 016 dont le reste dans la division par 14 est 7 est 2 023. Le multiple de 14 qui suit 2 016 est 2 030, qui correspond à $k = 145$. Le plus grand « $2n$ » qu'on puisse lui ôter est 12. On trouve le millésime 2 018, inférieur à 2 023. C'est la réponse.

RETOUR AU SOMMAIRE

ASIE - PACIFIQUE
NOUVELLE CALÉDONIE
POLYNÉSIE FRANÇAISE

Premier exercice national

Toutes séries

Accès réservé

Éléments de solution

1. Pour essayer 10^3 combinaisons, il faut 5 000 secondes, donc plus d ?une heure.
2. a) La droite passant par les deux points donnés a pour équation $\dfrac{y-137521}{151876-137521}=\dfrac{x-105}{540-105}$.

   Elle rencontre l'axe des ordonnées au point d'ordonnée $=137521+\dfrac{-105\times 14355}{435}$,
   c'est-à-dire 134 056.

   b) La connaissance d'un point permet toujours de tracer les 10^6 droites. Il n'y a donc aucun moyen de réduire la recherche. Il faut tester 10^6 combinaisons et il faudra plus d'une heure.
3. a) et b) Il suffit d'enregistrer les codes c au fur et à mesure qu'on les trouve.
   On trouve la seule solution 284 531.

   c) La modification porte sur le compteur qu'on fait aller de 0 à 99, $y_2 = 234566$ et comme à la question précédente sur l'enregistrement des codes solutions. On retrouve la seule solution 284 531.
4. On cherche une fonction polynôme du second degré dont le terme constant soit 190 680.
   Par exemple, la fonction qui à x associe$x^2-x+190680$ donne du réel 50 l'image 193 130, du réel 700 l'image 679 980 et du réel 10 l'image 190 770.
5. On résout $\begin{cases} 100a+10b+c &= 365464\\ 400a+20b+c &= 350314\\ 900a+30b+c &= 325164\end{cases}$
   qui a pour solution le triplet $(-50,-15,370614)$.
   Le code est donc 370 614.

Variables

$x_1, x_2, y_1, y_2, i, n, d, c$

Initialisation
$x_1 =$ **42**
$x_2 =$ **684**
$y_1 =$ **295 199**
Pour i allant de 0 à 9

$y_2 = 458260 + i$
$n = y_1x_2 - y_2x_1$
$d = x_2 - x_1$

Si le reste de la division euclidienne de n par d est nul
$c = \mathbf{n/d}$
Afficher c
Fin Si
Fin Pour

RETOUR AU SOMMAIRE

ASIE - PACIFIQUE - NOUVELLE CALÉDONIE POLYNÉSIE FRANÇAISE

Deuxième exercice national

Série S

Nombres à moyenne harmonique entière

Éléments de solution

1. a) $p \neq 1$ donc le nombre premier p ne peut pas être parfait. La moyenne harmonique de la suite des diviseurs de p s'écrit :$h = \dfrac{2}{1/1+1/p}$, ou encore $h = \dfrac{2p}{p+1}$. Ce nombre n'est pas un entier (ou bien $p = 2$ et $h = \dfrac{4}{3}$, ou bien p est impair, 2 divise +1 , et le quotient de $p+1$ par 2, inférieur à p et distinct de 1, ne divise pas p).

   b) Les diviseurs de 28 sont : 1, 2, 4, 7, 14 et 28. La somme des parties aliquotes (diviseurs du nombre distincts du nombre lui-même) est 28. 28 est un nombre parfait.

   La moyenne harmonique de ses diviseurs est $h_{28} = \dfrac{6}{2} = 3$. Le nombre 28 est à moyenne harmonique entière.

   c) Les diviseurs de 140 sont 1, 2, 4, 5, 7, 10, 14, 20, 28, 35, 70, 140. La somme de ses parties aliquotes est 196. Ce n'est donc pas un nombre parfait. Par ailleurs, $h_{140} = \dfrac{12}{336/140} = 5$. 140 est un nombre à moyenne harmonique entière.

2. a) Si on multiplie la somme par le nombre de départ, on trouve la somme S de ses diviseurs (tous, du plus grand au plus petit). Il suit : $\Sigma = \dfrac{S}{N}$.

   b) Si N est un nombre parfait, $S = 2N$ et donc $\Sigma = 2$.

   c) Comme $h_N = \dfrac{n}{2}$, une condition nécessaire pour qu'un nombre parfait soit à moyenne harmonique entière est qu'il possède un nombre pair de diviseurs.

3. Il faut introduire une variable S qui totalise les diviseurs trouvés et une variable n qui les compte. On peut ensuite effectuer les calculs de $S - a$ (à comparer à a) et $h = \dfrac{an}{S}$.

4. a) Les diviseurs de $2^{n-1}P$ sont les puissances de 2 (de 1 à 2^{n-1}) et leurs produits par P. Il y en a donc $2n$.

   b) La somme des parties aliquotes de N est $(1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}+(1+2+2^2+\cdots+2^{n-2}P$, c'est-à-dire $(2^n-1)+(2^{n-1}-1)(2^n?1) = 2^{n-1}P = N$, en remplaçant P par 2^n-1. D'où le résultat : N est un nombre parfait.

   c) La moyenne harmonique de la suite des diviseurs de N est : $h_N = \dfrac{2n}{2} = n$ Donc N est un nombre à moyenne harmonique entière (la condition nécessaire envisagée plus haut est aussi suffisante, le dernier calcul n'est pas indispensable…)

   d) $496 = 2^4 + (2^5-1)$ et $2^5 - 1 = 31$ est premier, $8\,128 = 2^6(2^7-1)$ et $2^7 - 1 = 127$ et premier, donc ces nombres sont à la fois parfaits et à moyenne harmonique entière.

Compléments et commentaires de Max Hochart

a) Il peut être intéressant de faire remarquer aux élèves le point suivant : si un entier N a pour liste de diviseurs rangés par ordre croissant $(1 = p_1, p_2, \cdots, p_k = N)$, la liste des diviseurs rangés par ordre décroissant est obtenue en appliquant $x \mapsto \frac{N}{x}$ à la liste précédente : $(p_k = N, p_{k-1} = \frac{N}{p_2}, \ldots, p_1 = \frac{N}{N})$. C'est très clair sur un exemple. Ainsi, pour les diviseurs de 28 :

$$(1,2,4,7,14,28) \mapsto (28,14,7,4,2,1).$$

Cette remarque est très utile pour les questions 2a, b et c : pour un entier N, sa moyenne harmonique est

$$h = \frac{N}{\displaystyle\sum_{d|N} \frac{1}{d}},$$

la notation $a|b$ signifiant que l'entier a divise b. Avec la remarque précédente,

$$h = \frac{N^2}{\displaystyle\sum_{d|N} \frac{N}{d}} = \frac{N^2}{\displaystyle\sum_{d|N} d}.$$

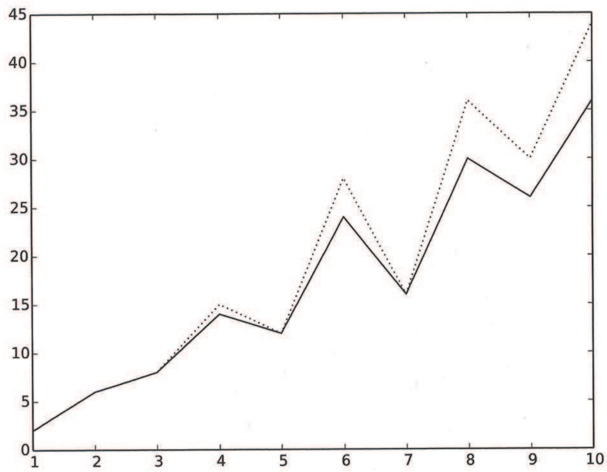
Ainsi, un entier N est à moyenne harmonique entière si et seulement si la somme de ces diviseurs (N compris) divise N^2. Pour un entier parfait, la somme des diviseurs vaut $2N$. Donc un entier parfait est à moyenne harmonique entière si et seulement si $2N$ divise N^2 donc si et seulement si 2 divise N.

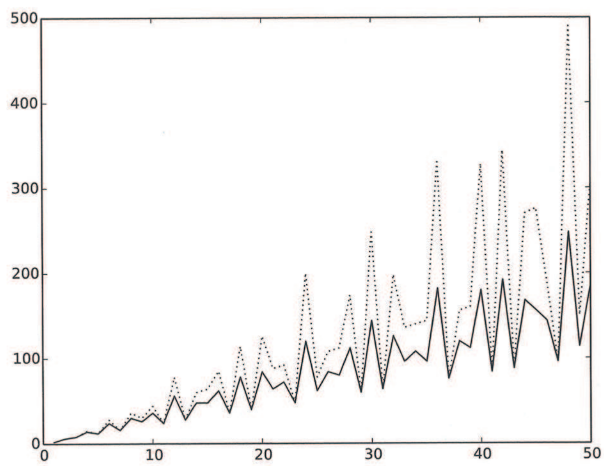
b) Rappelons qu'à ce jour aucun nombre parfait impair n'est connu et que l'on sait décrire tous les nombres parfaits pairs (résultat dû à Euler). Ces nombres parfaits sont tous de la forme $2^{p-1} \times (2^p - 1)$ où $2^p - 1$ doit être un nombre premier, ce qui suppose déjà que p l'est. La dernière question apporte une partie de cet aspect. L'intégralité de ce résultat peut s'établir en première.

c) Un prolongement possible est l'inégalité suivante : en posant $\tau_0(n)$ le nombre de diviseurs de l'entier n et $\tau_1(n)$ la somme de ses diviseurs (n compris), montrer que

$$\tau_1(n) \leqslant \frac{n+1}{2} \tau_0(n),$$

avec égalité si et seulement si $n = 1$ ou n est premier. Informatiquement, on peut programmer ces deux fonctions, et observer graphiquement cette inégalité. Voici ci-dessous les graphes des fonctions $n \mapsto 2\tau_1(n)$ (trait plein) et $n \mapsto (n+1)\tau_0(n)$ (en pointillés).





Ces courbes ne se croisent que pour des abscisses premières (ou en 1).

Pour démontrer cela, une idée est par exemple d'écrire

$$\tau_1(n) = \sum_{d|n} d = \sum_{d|n} \frac{n}{d}.$$

Ainsi,

$$2\tau_1(n) = \sum_{d|n} \left(d + \frac{n}{d}\right).$$

Or pour $x \in [1, d]$,

$$x + \frac{n}{x} \leqslant n + 1,$$

avec égalité si et seulement si $x = 1$ ou $x = n$. Donc

$$2\tau_1(n) \leqslant \sum_{d|n}(n+1) = (n+1)\tau_0(n).$$

De plus, il y a égalité si pour tout diviseur d de n, on a $d + \frac{n}{d} = n + 1$, ce qui n'a lieu que si tout diviseur de d vaut 1 ou n, ce qui correspond au cas $n = 1$ ou n premier.

RETOUR AU SOMMAIRE

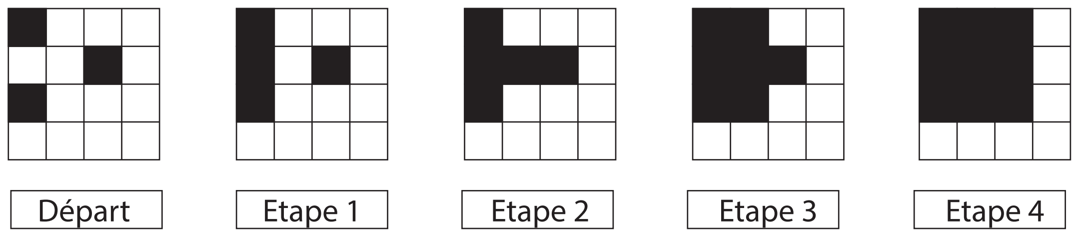
ASIE - PACIFIQUE
NOUVELLE CALÉDONIE
POLYNÉSIE FRANÇAISE

Troisième exercice national

Séries autres que S

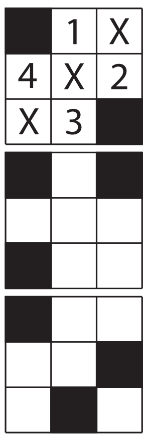
Coloriages

Éléments de solution

1. 

2. D'abord, le damier est fini, ensuite, le nombre de cases noircies croît au sens large à chaque étape (il n'y a pas de retour en arrière). Une suite d'entiers croissante majorée est constante à partir d'un certain rang.

3. a) Si un des bords d'un damier 3×3 ne contient que des cases blanches, ces cases restent blanches lors du processus.
   En effet, pour qu'une case blanche d'un bord ait deux voisines noires, il est nécessaire qu'une de ces deux soit sur le même bord. Pour éviter qu'un des bords reste blanc, il faut placer les deux cases noires dans deux coins opposés, mais alors elles restent orphelines. La remarque qui débute ce paragraphe s'étend aux damiers $n \times n$.



   b) Compte tenu de ce qui précède, aucun des bords ne doit rester blanc. Il y aura donc une case noire dans un coin.
   Deux autres bords doivent recevoir une case noire.
   - Ou bien l'une des deux occupe le coin opposé, la troisième case noire initiale occupant soit la dernière case libre de la diagonale, soit un des deux coins restant. Les positions 1, 2, 3 et 4 sont sans postérité.
   - Ou bien aucune des deux n'occupe le coin opposé.
     - Si l'une occupe un autre coin, les deux coins sont alors obligatoires. Mais alors deux extrémités d'une diagonale sont noircies et on est ramené au cas précédent.
     - Si aucun autre coin n'est occupé, il faut nécessairement placer les cases noires sur chacun des côtés restants.

Dans la première façon de procéder, il y a deux choix possibles pour la diagonale, puis trois pour la troisième case. Au total, 6 façons de disposer les trois cases noires initiales.
Dans la seconde façon de procéder, il y a quatre choix possibles pour le coin noirci. Au total, 4 façons de disposer les trois cases initiales.
Finalement, il y a 10 façons de placer les trois cases initiales.

4. En noircissant les n cases d'une diagonale, on noircit à l'étape 1 la sur–diagonale et la sous–diagonale, etc. Donc, tout le damier.
5. a) D'après ce qui précède, n est possible, donc le minimum est inférieur à n.
   b) Toute case à noircir a 4 côtés, dont au moins 2 appartiennent à des cases déjà noircies. Tout noircissement ajoute donc au plus deux côtés au périmètre de la zone noircie, auquel il ôte au moins deux côtés. Le périmètre de la zone noircie ne peut donc que rester invariant ou diminuer au cours du processus.
   c) La zone noircie au départ a donc pour périmètre au moins $4n$. Aucun ensemble de moins de n cases n'a un tel périmètre (deux cases noires voisines font un rectangle de périmètre 6). D ?où la conclusion.

RETOUR AU SOMMAIRE

AIX-MARSEILLE

Premier exercice

Toutes séries

La magibox

Éléments de solution

1. Un procédé permettant d'obtenir ces résultats est : *multiplier n par* $p-1$.
2. a) On a : $3a+5b=81 \Leftrightarrow 5b=81-3a$. D'une part : $5b \leqslant 81 \Leftrightarrow b \leqslant 16{,}2$, d'autre part $5b=3(27-a)$ donc b est multiple de 3. On en déduit $b \in \{0,3,6,9,12,15\}$. Or $3a+5b=81 \Leftrightarrow a=\dfrac{81-5b}{3}$.
   Les seules solutions possibles sont :

a	27	22	17	12	7	2
b	0	3	6	9	12	15

   b) On sait, de plus, que $52a+35b=784$. On teste les valeurs précédentes. Il vient : $a=7$ et $b=12$.
3. a) $\sqrt{7^2+24^2}=25$. Le couple (7 ; 24) est acceptable.
   b) $\sqrt{8^2+6^2}=10$. Le couple (8 ; 6) est acceptable. $\sqrt{8^2+15^2}=17$. Le couple (8 ; 15) est acceptable.
   c) Supposons qu'il existe deux entiers naturels a et b tels que $n=a^2-b^2$ et $p=2ab$.

$$\sqrt{n^2+p^2}=\sqrt{\left(a^2-b^2\right)^2+(2ab)^2}=\sqrt{a^4-2a^2b^2+b^4+4a^2b^2}=\sqrt{a^4+2a^2b^2+b^4}=\sqrt{\left(a^2+b^2\right)^2}.$$

   Finalement, $n^2+p^2=a^2+b^2$ qui est entier. Le couple $(n;p)$ est acceptable.

   d) **(Série S seulement)**
   $n\times p=\left(a^2+b^2\right)\times 2ab=2ab(a-b)(a+b)$.
   b est pair, donc il existe un entier k tel que $b=2k$. Par suite $n\times p$ est divisible par 4.
   D'autre part :
   - Si a ou b est multiple de 3, $n\times p$ est de façon évidente aussi multiple de 3, donc de 12.
   - Dans le cas contraire, il existe un entier k tel que $a=3k+1$ ou $a=3k+2$ et il existe un entier ℓ tel que $b=3\ell+1$ ou $b=3\ell+2$. On a alors les cas suivants :

	$a=3k+1$	$a=3k+2$
$b=3\ell+1$	$a-b$ multiple de 3	$a+b$ multiple de 3
$b=3\ell+2$	$a+b$ multiple de 3	$a-b$ multiple de 3

   $n\times p$ est donc bien multiple de 12.

RETOUR AU SOMMAIRE

AIX-MARSEILLE

Deuxième exercice

Série S

Curieuses traversées

Éléments de solution

Partie A : Traversées dans le plan

1. a) D'après le théorème de Pythagore, le diamètre d d'un carré de côté 1 unité vérifie la relation $d^2 = 1^2 + 1^2$ et donc $d = \sqrt{2}$.

   b) En procédant comme sur la figure de l'énoncé, il est possible de faire traverser un carré de côté 1,4 unité dans un carré de côté 1 unité car $1{,}4 < \sqrt{2}$.

2. a) Le diamètre de T_1 est 1. D'après le théorème de Pythagore, la hauteur h de T_1 vérifie la relation $h^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1^2$ et donc $h = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

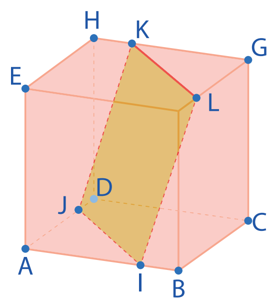
   b) Pour qu'il soit possible de faire traverser T_2 dans T_1, il faut que la hauteur de T_2 soit strictement inférieure au diamètre de T_1.

   c) D'après le théorème de Pythagore, la hauteur h d'un triangle équilatéral T_2 de côté a vérifie la relation $a^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$ et donc $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.
   D'après les deux questions précédentes, pour qu'il soit possible de faire traverser T_2 dans T_1, on doit avoir $\frac{a\sqrt{3}}{2} < 1$ c'est-à-dire $a < \frac{2}{\sqrt{3}}$. Le côté du plus petit triangle équilatéral qu'il n'est pas possible de faire traverser dans T_1 est donc $\frac{2}{\sqrt{3}}$.

3. a) Un hexagone régulier de côté 1 unité est constitué de six triangles équilatéraux de côté 1 unité donc le diamètre de H_1 est 2 et la hauteur de H_1 est le double de la hauteur d'un triangle équilatéral de côté 1 unité. La hauteur de H_1 est donc $\sqrt{3}$.

   b) La hauteur d'un hexagone régulier de côté a est le double de la hauteur d'un triangle équilatéral de côté a. La hauteur d'un hexagone régulier de côté a est donc $a\sqrt{3}$. Pour qu'un hexagone régulier H_2 de côté a puisse traverser H_1, il faut que sa hauteur $a\sqrt{3}$ soit strictement inférieure au diamètre 2 de H_1. Cela est possible si $a < \frac{2}{\sqrt{3}}$. Le côté du plus petit hexagone régulier qu'il n'est pas possible de faire traverser H_1 est donc $\frac{2}{\sqrt{3}}$.

Partie B : Traversée du cube



1. a) Le triangle AIJ est rectangle en A donc d'après le théorème de Pythagore, on a :

$$IJ^2 = IA^2 + AJ^2 = \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16} \text{ et on a donc } IJ = \frac{3\sqrt{2}}{4}.$$

b) Le triangle IFB est rectangle en B donc d'après le théorème de Pythagore, on a :

$$IF^2 = IB^2 + BF^2 = \left(\frac{1}{4}\right)^2 + 1 = \frac{17}{16}.$$

Le triangle IFL étant rectangle en F on a de même : $IL^2 = IF^2 + FL^2 = \frac{17}{16} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{18}{16}$.

On a donc $IL = \frac{3\sqrt{2}}{4}$.

c) Pour démontrer que IJKL est un carré, commençons par montrer que les points I, J, K et L sont coplanaires. Dans le repère orthonormé $\left(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$, on a I$\left(\frac{3}{4},0,0\right)$ et J$\left(0,\frac{3}{4},0\right)$, K$\left(\frac{1}{4},1,1\right)$ et L$\left(1,\frac{1}{4},1\right)$. On a donc $\overrightarrow{IJ}\left(-\frac{3}{4},\frac{3}{4},0\right)$ et $LK\left(-\frac{3}{4},\frac{3}{4},0\right)$ d'où $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{LK}$, ce qui prouve que IJKL est un parallélogramme et donc que les points I, J, K et L sont coplanaires.
Les calculs de KJ et KL, en utilisant le théorème de Pythagore ou le repère précédant donnent $KJ = KL = \frac{3\sqrt{2}}{4}$.
Les quatre côtés du parallélogramme IJKL sont donc égaux ce qui montre que IJKL est un losange.
Enfin, on démontre que $JK = IL = \frac{3}{2}$
IJKL est un losange dont les diagonales ont même longueur. C'est un carré.

2. Si on évide le cube ABCDEFGH en creusant à l'intérieur un « tunnel » s'appuyant sur le carré IJKL et à la perpendiculaire de ce carré, la partie du cube ABCDEFGH restante ne tiendra pas en un seul morceau.
Pour éviter cela, on peut remplacer le carré IJKL par un carré I'J'K'L' de même centre O légèrement plus petit c'est-à-dire par exemple ayant un côté $0,99 \times \frac{3\sqrt{2}}{4} = 1,05005$ à 0,00001 près.
En évidant le cube ABCDEFGH en creusant à l'intérieur un « tunnel » s'appuyant sur le carré I'J'K'L' et à la perpendiculaire de ce carré, la partie du cube ABCDEFGH restante est un solide par lequel on peut faire traverser un cube de côté 1,05 unité donc légèrement plus grand que le cube ABCDEFGH de côté 1 unité.

Remarque : Ce n'était pas demandé, mais on peut démontrer que le côté du plus petit cube qu'il n ?est pas possible de faire traverser un cube de côté 1 unité est $\frac{3\sqrt{2}}{4}$.

Le Prince Rupert du Rhin (1619 – 1682) posa dans les années 1600 le problème : « *Quel est le plus grand cube qui puisse passer au travers d'un cube donné, de côté une unité ?* » Plus précisément, quelle est la taille du côté du plus grand tunnel de section carrée qu'il est possible d'obtenir dans un cube, sans rompre ce cube ? La solution de ce problème, $\frac{3\sqrt{2}}{4}$, fut réellement connue plus d'un siècle plus tard grâce au mathématicien hollandais Pieter Nieuwland (1764 – 1794).

RETOUR AU SOMMAIRE

AIX-MARSEILLE

Troisième exercice

Séries autres que S

Histoires de prix

Éléments de solution

1. a) Dans le magasin n° 5, Manon a dépensé 10 € de plus que la moitié de la somme qu'elle avait en y entrant. Comme il ne lui reste plus rien, les 10 € représentent la moitié de la somme et elle disposait donc de 20 € en entrant dans le magasin n° 5.

   b) Dans chaque magasin, la somme qui lui reste, augmentée de 10 €, représente la moitié de ce qu'elle avait en y entrant. Ainsi :
   avant d'entrer dans le magasin n° 4, elle avait : $2(20+10) = 60$ € ;
   avant d'entrer dans le magasin n° 3, elle avait : $2(60+10) = 140$ € ;
   avant d'entrer dans le magasin n° 2, elle avait : $2(140+10) = 300$ € ;
   avant d'entrer dans le magasin n° 1, elle avait : $2(300+10) = 620$ €.
   Sa mère lui avait donc donné 620 €.

2. Notons x et y le prix des deux articles.
   D'après l'énoncé, le couple $(x;y)$ doit être solution du système S : $\left\{\begin{array}{rcl} xy & = & 4,9 \\ x+y & = & 4,9 \end{array}\right.$
   On peut résoudre ce système par substitution :
   $$(S) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x(4,9-x) = 4,9 \\ y = 4,9-x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -x^2+4,9x-4,9 = 0 \\ y = 4,9-x \end{array}\right.$$
   On résout la première équation qui est du second degré :
   $\Delta = 4,9^2 - 4\times 4,9 = 4,41 = 2,21^2 > 0$.
   Cette équation admet donc deux solutions : $x_1 = 3,5$ et $x_2 = 1,4$.
   Avec $x = 3,5$ on obtient $y = 1,4$ avec la seconde équation.
   Avec $x = 1,4$ on obtient $y = 3,5$ avec la seconde équation.
   Ainsi, l'un des articles vaut 1,40 €. et l'autre vaut 3,50 €.

3. Notons c le prix d'un CDSuper et d le prix d'un DVDExtra.
   Il y a 1 € d'écart entre le prix de 5 CDSuper et celui de 3 DVDExtra, on peut donc écrire :
   $5c-3d = 1$ ou $5c-3d = -1$ (car on ne sait pas ce qui coûte le plus cher).
   Il y a 1 € d'écart entre le prix de 18 CDSuper et celui de 11 DVDExtra, on peut donc écrire : $18c-11d = 1$ ou $18c-11d = -1$.
   Ainsi, le couple (c,d) doit être solution de l'un des 4 systèmes suivants :
   $$S_1 : \left\{\begin{array}{l} 5c-3d = 1 \\ 18c-11d = 1 \end{array}\right. ; S_2 : \left\{\begin{array}{l} 5c-3d = 1 \\ 18c-11d = -1 \end{array}\right. ; S_3 : \left\{\begin{array}{l} 5c-3d = -1 \\ 18c-11d = 1 \end{array}\right. ; S_4 : \left\{\begin{array}{l} 5c-3d = -1 \\ 18c-11d = -1 \end{array}\right. .$$
   La résolution de ces systèmes donne : $S_1 : \left\{\begin{array}{l} c = 8 \\ d = 13 \end{array}\right. ; S_2 : \left\{\begin{array}{l} c = 14 \\ d = 23 \end{array}\right. ; S_3 : \left\{\begin{array}{l} c = -14 \\ d = -23 \end{array}\right. ; S_4 : \left\{\begin{array}{l} c = -8 \\ d = -13 \end{array}\right. .$
   Seuls les systèmes S_1 et S_2 donnent des solutions acceptables, car les prix doivent être positifs. Calculons dans chaque cas le prix de 21 CDSupers et celui de 13 DVDExtras :
   Avec S_1 : $21c = 21\times 8 = 168$ et $13d = 13\times 13 = 169$.
   Avec S_2 : $21c = 21\times 14 = 294$ et $13d = 13\times 23 = 299$.
   Dans tous les cas, il est intéressant financièrement d'échanger 21 CDSupers contre 13 DVDExtras.

RETOUR AU SOMMAIRE

AMIENS

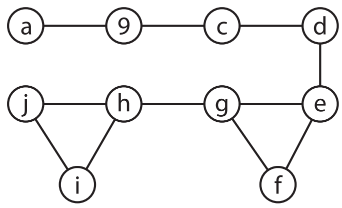
Premier exercice

Série S

Graphe et chiffres

Éléments de solution

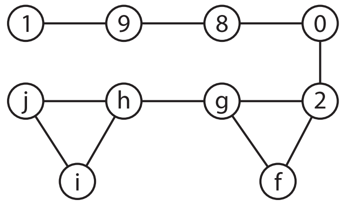
On introduit des noms pour les nœuds des graphes, que nous allons au fur et à mesure remplacer par les chiffres de 0 à 8.



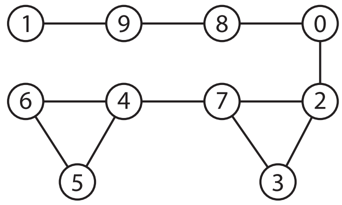
On a

a → 9	d → c + e	h → g + i + j
9 → a + c	e → d + f + g	i → h + j
c → 9 + d	f → e + g	j → h + i
	g → e + f + h	

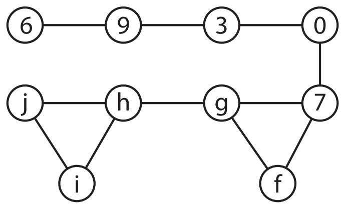
Or 9 → 9 et 9 → a + c donc a + c = 9 et alors **c = 9 - a**
De plus, c → 9 + d avec $0 \leqslant d \leqslant 8$; donc c → 9 ou 10 car on ne peut pas atteindre les 18 ! Alors **d = 0 ou 1**.
Si **d = 1** , c → 10 donc c = 0,2 ou 5 et d = 1 → 9 = c + e. d'où c = 9 - e = 9 - a donc a = e. IMPOSSIBLE.
Donc **d = 0**.
Alors c → 9 donc **c = 1, 3, 6, 7 ou 8.**
Comme d = 0 et 0 → 10, **c + e = 10** et **c + a = 9** donc e - a = 1 et **e = a + 1**.
Alors pour le triplet (a, c, e) on a comme possibilités :
(1, 8, 2)
(2, 7, 3) **Impossible** car 2 → 10 et a → 9 donc a $\neq$ 2.
(3, 6, 4
) (4, 5, 5) **Impossible** car c = e
(5, 4, 6) **Impossible** car a → 9 et 5 → 10 donc a $\neq$ 5
(6, 3, 7)
Et (7, 2, 8) **Impossible** car c → 9 et 2 → 10 donc c $\neq$ 2.
Il ne reste que 3 possibilités.
Testons le triplet (1,8,2) :



C'est h qui a le plus de voisins, c'est donc lui le seul susceptible d'être associé à 18, donc **h = 4**.
Alors g $\rightarrow$ 2 + 4 + f = 6 + f et cette somme vaut 9 ou 10. Pour faire 10 il manque 4 qui est déjà utilisé donc **f = 3**.
Alors g $\rightarrow$ 9 et il ne reste que **g = 6 ou 7**.
Si g = 6, alors h = 4 $\rightarrow$ g + i + j = 6 + i + j = 18 donc i + j = 12 donc j = 12 - i et alors i = 5 et j = 7 , ou i = 7 et j = 5 ou i = 6 et j = 6. Or i $\neq$ j.
Si i = 5 et j = 7, i = 5 $\rightarrow$ h + j = 4 + 7 = 11 impossible. Si i=7 et j=5, i=7 $\rightarrow$ h+j=4+5=9 et j=5 $\rightarrow$ i+h=7+4=11 impossible.
On obtient donc **g = 7**.
Alors h = 4 $\rightarrow$ i + j + g = 7 + i + j = 18 donc i + j = 11 et alors **i = 5** et **j = 6** ou l'inverse. Les deux conviennent.
On a finalement :



Testons le triplet (3, 6, 4) : 4 n'a que deux voisins dans ce cas, et il est impossible de faire 18 avec 1, 2, 5, 7 et 8.
Testons le triplet (6, 3, 7) :
On a 7 $\rightarrow$ g+f=9 donc (f,g)=(1,8) ou (4,5).
Si f = 1, 1 $\rightarrow$ 9 et f = 1 $\rightarrow$ g + 7 = 8 + 7 = 15 impossible
Si f = 8, 8 $\rightarrow$ 9 et f = 8 $\rightarrow$ g + 7 = 1 + 7 = 8 impossible
Si f = 5, 5 $\rightarrow$ 10 et f = 5 $\rightarrow$ g + 7 = 4 + 7 = 11 impossible
Si f = 4, 4 $\rightarrow$ 18 et f = 4 $\rightarrow$ g + 7 = 5 + 7 = 12 impossible
Donc le triplet (6, 3, 7) est impossible.



RETOUR AU SOMMAIRE

AMIENS

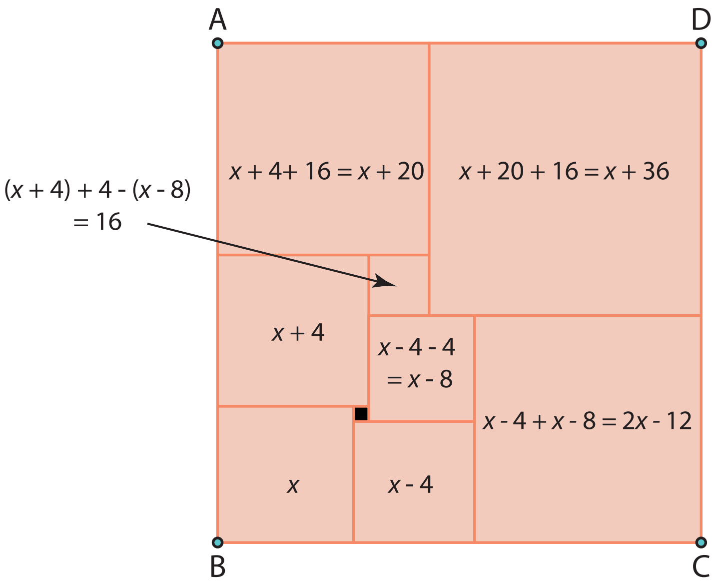
Deuxième exercice

Séries STI2D/STL/STD2A

Carrés dans un rectangle

Éléments de solution

Soit x le côté (en cm) du carré situé en bas à gauche du rectangle.
On écrit dans chaque carré la longueur de son côté en fonction de x.



$x+20+x+36=x+x-4+2x-12$
$2x+56=4x-16$
$2x=72$
$x=36$

Ainsi $AB=x+x+4+x+20=132$ cm et $AD=x+20+x+36=128$ cm

RETOUR AU SOMMAIRE

AMIENS

Troisième exercice

Séries ES/L/STMG/ST2S

La mourre

Éléments de solution

Exemple de représentation attendue des issues possibles.

Nbre de doigts présentée	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
0	0	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5	6
2	2	3	4	5	6	7
3	3	4	5	6	7	8
4	4	5	6	7	8	9
5	5	6	7	8	9	10

RETOUR AU SOMMAIRE

AMIENS

Quatrième exercice

Série S

Diagonales

Éléments de solution

1. On développe $(x+y+z)(x+y+z)$.
2. 2) Soit x, y, z les longueurs des arêtes du parallélépipède rectangle.
   On a $2(xy+xz+yz) = 22$ et $4(x+y+z) = 24$.
   La longueur d'une de ses diagonales est $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$,
   soit $\sqrt{(x+y+z)^2 - 2(xy+xz+yz)} = \sqrt{6^2-22} = \sqrt{14}$ cm d'après l'égalité du 1).

RETOUR AU SOMMAIRE

ASIE - PACIFIQUE
NOUVELLE CALÉDONIE
POLYNÉSIE FRANÇAISE

Premier exercice académique

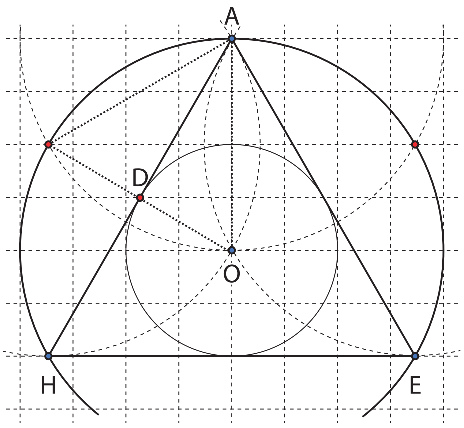
Toutes séries

Paradoxe de Bertrand

Éléments de solution

Partie 1 : un peu de géométrie

1. et 2. Construction



3. Pour calculer AH, on peut placer D le milieu de [AH], (OD) est la médiatrice de [AH], donc ADO est rectangle en D
   On peut justifier que $\widehat{AOD} = 60^{\text{o}}$, puis $AD = AO \times \sin(60^o) = 2\sqrt{3}$ et enfin $AH = 2AD = 4\sqrt{3}$.

   Il est important de valoriser toute tentative de preuve invoquant les propriétés du triangle équilatéral et mettant en œuvre le théorème de Pythagore dans un triangle bien choisi.

4. L'angle $\widehat{AOD}$ mesure 60^{o} donc $OD = \dfrac{1}{2}OA$.
   OD est le rayon du cercle $\mathscr{C}_2$ qui mesure donc 2 cm.

5. Si I est un point à l'intérieur du cercle $\mathscr{C}_1$, toute droite passant par I coupe ce cercle en deux points M et N. On veut que I soit le milieu de [MN] donc $IM = IN$. Par ailleurs, M et N appartenant au cercle, on a $OM = ON$.
   Si I est distinct de O, alors la droite (IO) est la médiatrice de [MN]. La corde dont I est le milieu est obtenue en traçant la droite perpendiculaire à (IO) en I.
   Par symétrie d'axe (OI) de la figure, on vérifie que cette corde convient et ainsi, I, distinct de O **définit bien une unique corde dont il est le milieu**.
   Si I = O alors toute corde passant par O est un diamètre du cercle. **Il n'y a pas unicité**.

   Cette preuve est un point délicat. S'il apparait intuitivement qu'on obtient la corde choisie en traçant la *perpendiculaire au rayon passant par I, il importe de justifier que I est bien le milieu de cette corde par l'argument de la médiatrice.*

Partie 2 : le paradoxe de Bertrand

1. a) Le point A étant fixé sur le cercle, une corde [AB] est plus grande que [AH] si B appartient à l'arc EH. Cet arc s'étendant sur un tiers de la circonférence, il vient que la probabilité recherchée est $\frac{1}{3}$. [1]

   b) Le milieu de [AB] est à l'intérieur du cercle inscrit dans les mêmes conditions, donc la probabilité que le milieu de [AB] soit dans le cercle inscrit est $\frac{1}{3}$. [1]

2. a) Une corde est plus grande que [AH] si et seulement si le milieu de la corde est à l'intérieur du cercle inscrit. Le centre étant choisi par hasard dans le cercle $\mathscr{C}_1$, cette occurrence se produit en fonction des aires. L'aire du cercle inscrit dont le rayon mesure la moitié de celui de $\mathscr{C}_1$ a une aire égale au quart de celle de $\mathscr{C}_1$. Donc la probabilité que la corde soit plus longue que [AH] est égale à $\frac{1}{4}$. [1]

   b) La probabilité pour que le point I soit à l'intérieur du cercle inscrit est $\frac{1}{4}$. [2]

3. Ces résultats sont discordants, ce qui peut paraître paradoxal, mais il n'en est rien car une expérience aléatoire suppose que l'on fixe le protocole. « *Tirer une corde au hasard dans un cercle* » n'est pas une expérience aléatoire tant qu'on n'a pas précisé le protocole ou le modèle. Les deux modèles étant différents il n'y a donc pas de raison a priori de trouver les mêmes résultats.

   On attend ici que l'élève remarque la discordance des résultats et l'explique par la différence des modèles.

4. Une corde est plus longue que [AH] si elle coupe le cercle inscrit. Cette probabilité est plus élevée avec le modèle 1 qu'avec le modèle 2. Quand on tire un grand nombre de cordes (ici, 500 peut être considéré comme un grand nombre), la fréquence observée est proche des fréquences théoriques, c'est-à-dire des probabilités. Cette probabilité étant plus grande avec le modèle 1, il est plus raisonnable de penser que la figure B, avec davantege de corde dans le cercle inscrit $\mathscr{C}_2$ correspond au modèle 1.

RETOUR AU SOMMAIRE

1. On n'attend pas de justification plus détaillée mais toute tentative sera valorisée.
2. Résultat obtenu en faisant le rapport des aires des deux disques.

ASIE - PACIFIQUE
NOUVELLE CALÉDONIE
POLYNÉSIE FRANÇAISE

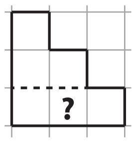
Deuxième exercice académique

Toutes séries

Une histoire de pavage

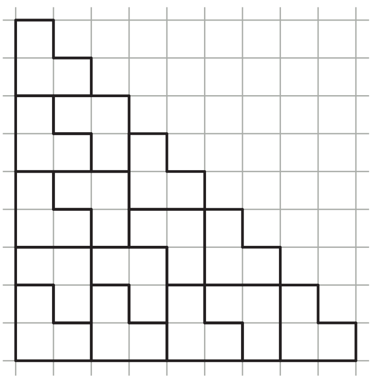
Éléments de solution

1. La surface T_2 est évidemment pavable puisqu'elle correspond à la pièce L.
   La surface T_3 n'est pas pavable. En effet, il faut nécessairement couvrir le carreau du haut par la pièce L, on fait alors apparaître une ligne de 3 carreaux non pavable.

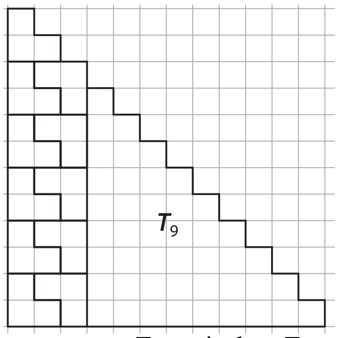


   La surface T_4 n'est pas non plus pavable. En effet, cette surface recouvre 10 carreau ; or les pièces ont une surface de 3 carreaux chacune et ne pourront couvrir que des surfaces dont le nombre de carreaux est un multiple de 3.

2. a) On montre que T_9 est pavable en donnant un exemple de pavage.

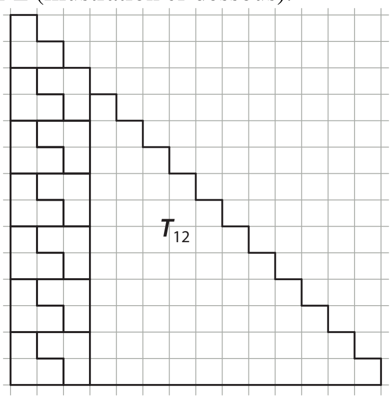


   b) T_9 étant pavable, on peut paver $T812$ en isolant T_9 pour le paver comme ci-dessus et en pavant à gauche une colonne à l'aide de blocs constitués d'un L et anti-L imbriqué, terminé par un L (illustration ci-dessous).



D'autres façons de compléter T_9 sont possibles (en complétant par le bas ou par la diagonale par exemple)

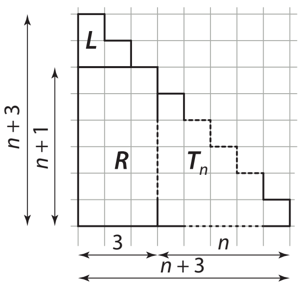
T_{12} étant pavable, on peut paver T_{14} en isolant T_{12} qui est elle-même pavable et en pavant la colonne en alternant L et anti-L (illustration ci-dessous).



D'autres façons de compléter T_{12} sont possibles (en complétant par le bas ou par la diagonale par exemple)

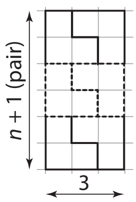
3. a) Comme les pièces L et anti-L recouvrent chacune 3 carreaux, il est nécessaire que l'aire de la surface T_n soit un multiple de 3 pour qu'elle puisse être pavable.
   Or $A_{T_n} = 1+2+\cdots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ (résultat que l'on peut retrouver géométriquement en remarquant que $2 \times A_{T_n} = n(n+1)$).
   b) Ce n'est pas une condition suffisante puisque T_3 n'est pas pavable alors que $3/(3\times 4)$!
   c) S'il existe une entier k tel que $n = 3k+1$,
   $$n(n+1) = (3k+1)(3k+2) = 9k^2+9k+2 = 3(3k^2+3k)+2$$
   3 ne divise donc pas $n(n+1)$. D'après la question 7.a), T_n n'est donc pas pavable.
   Pour tout entier naturel k, T_{3k+1} n'est pas pavable donc il y a une infinité de surfaces non pavables.
4. On peut reprendre ici la même idée que pour T_{12}.

   Soit n un nombre entier impair tel que T_n soit une surface pavable.
   On peut découper la surface T_{n+3} en trois parties : une pièce L, un rectangle R et la surface T_n étant pavables, il suffit de montrer que ce rectangle noté R, de base 3 et de hauteur $n+1$, est aussi pavable.



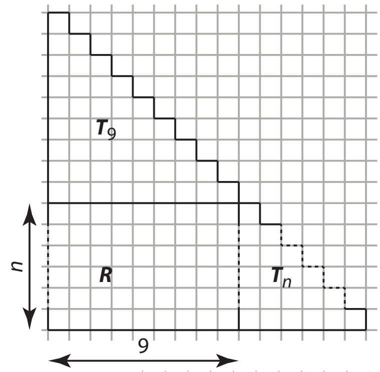
   D'autres façons de compléter T_n en T_{n+3} sont possibles.

   On rappelle alors qu'un L et un anti-L emboîté permettent de paver un rectangle de base 3 et de hauteur 2, que l'on appelle bloc (comme dans la question 2.b)).
   On note k l'entier naturel tel que $n = 2k+1$. En empilant $k+1$ blocs, on obtient donc le pavage d'un rectangle de base 3 et de hauteur $2(k+1)$, soit de hauteur $n+1$.
   On a ainsi pavé le rectangle R comme illustré ci-contre.
   La surface T_{n+3} est donc pavable.



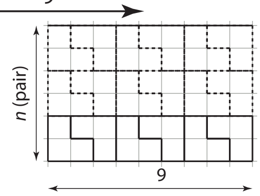
Une illustration seule est déjà un premier pas... Tout efforte de justification sera valorisé.

5. Soit n un entier pair tel que T_n soit une surface pavable.
   On considère la surface T_{n+9}.
   On peut la découper en trois parties : T_9, T_n et un rectangle noté R de base 9 et de hauteur n comme illustré ci-contre.

   D'autres façons de compléter T_n pour obtenir T_{n+9} sont possibles.
   Comme T_9 est pavable (question 2.a)) et T_n aussi par hypothèse, il suffit de montrer que R est pavable pour que t_{n+9} soit pavable.

   Or n est pair donc il existe un entier naturel k tel que $n = 2k$ et $9 = 3 \times 3$. On peut donc recouvrir le rectangle R à l'aide de $3 \times k$ blocs décrits à la question 2.b), comme illustré ci-contre.

Là encore, une illustration est déjà un premier pas. Tout effort de justification sera valorisé.

RETOUR AU SOMMAIRE

BESANÇON

Premier exercice

Toutes séries

Au feu rouge

Éléments de solution

1. a) Dans un laps de temps de 3 min et 30s, le feu tricolore aura fait un cycle complet : 1,5 minute au rouge et 2 minutes au vert.
   Le fonctionnement du tricolore est périodique de période 3,5 min donc l'arrivée d'une voiture à un instant t au feu peut être assimilé à un tirage d'un nombre réel aléatoire dans l'intervalle [0 ; 3,5].
   b) Sur un intervalle de temps [0; 3,5], il y a 1,5 minutes pour lesquelles le feu est au rouge donc $P = \frac{1,5}{3,5} = \frac{3}{7}$.
   c) Pour que la probabilité que le temps d'attente au feu soit nul, il faut que le feu soit au vert lorsque l'automobiliste arrive donc $P = \frac{2}{3,5} = \frac{4}{7}$ ou $P = 1 - \frac{3}{7}$.
   d) Pour que la probabilité que le temps d ?attente au feu soit supérieur à 1 minute, il faut que le feu soit au rouge depuis moins de 30 s lorsque l'automobiliste arrive, donc $P = \frac{0,5}{3,5} = \frac{1}{7}$.
   e) Pour que la probabilité que le temps d'attente au feu soit inférieur à x minutes, il faut qu'il reste au maximum x minutes de temps d'attente au rouge lorsque l'automobiliste arrive ou que le feu soit au vert, donc $P = \frac{x-2}{3,5}$.
   f) L'automobiliste attend moins d'une minute si le feu passe au vert dans les 10 secondes qui suivent parmi les 40 secondes où le feu va encore être au rouge donc $P = \frac{10}{40} = \frac{1}{4} = 0,25$.
2.

```
Variables :   t, S et a sont des nombres réels
Traitement :  S = 0
              Pour k variant de 1 à 1000
              t prend une valeur aléatoire entre 0 et 3,5
                 Si t ⩽ 2 alors
                    a prend la valeur 0
                 Sinon
                    a prend la valeur 3,5 − t
              S prend la valeur S + a
Sortie :      Afficher « Le temps d'attente est de »
              Afficher S/1000
              Afficher « minutes. »
```

3. a) Oui : FABCAEDCEFGD par exemple.
   b) 11 chemins différents :
   FGD FED FECD FEACD FEABCD FAED FAECD FACD FACED FABCD FABCED
   c) FACED : 10 minutes.

RETOUR AU SOMMAIRE

BESANÇON

Deuxième exercice

Toutes séries

Le nombre d'Or

Éléments de solution

Partie A : Généralités sur le nombre d'or

1. a) $\left(\frac{a}{b}\right)^2 - \frac{a}{b} - 1 = \frac{a^2}{b^2} - \frac{a+b}{b}$.
   Mais on sait que $\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$, ce qui équivaut à $a+b = \frac{a^2}{b}$.
   Donc $\frac{a^2}{b^2} - \frac{a+b}{b} = \frac{a^2}{b^2} - \frac{a^2}{b^2}$..
   Φ est bien solution de l'équation $x^2 - x - 1 = 0$.

   b) On résout l'équation $x^2 - x - 1 = 0$.
   $\Delta = (-1)^2 - 4 \times (-1) = 5$.
   L'équation a donc deux solutions distinctes :

   $$x_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

   $\Phi > 0$ donc $\Phi = x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}61803$.

2. a) $\Phi^2 - \Phi = 0 \Leftrightarrow \Phi^2 = \Phi + 1 \Leftrightarrow \Phi = 1 + \frac{1}{\Phi}$.

   b) $\Phi = 1 + \cfrac{1}{\Phi} = 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\Phi}} = 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\Phi}}}$ en remplaçant chaque fois Φ par $1 + \frac{1}{\Phi}$.

3. a) $F_4 = 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}}}} = \frac{8}{5}$ et $F_5 = 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}}}}} = 1 + \frac{1}{F_4} = 1 + \frac{5}{8} = \frac{13}{8}$.

b) Pour calculer F_n

Variables :
n entier naturel
k entier naturel
F nombre réel
Initialisation
Affecter à F la valeur 1
Traitement :
Lire n
Pour k allant de 1 à n
F prend la valeur $1+\dfrac{1}{F}$
Fin Pour
Sortie :
Afficher F

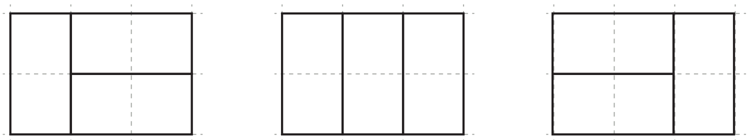
c) D'après la calculatrice, on a $F_{25} \approx 1,61803$.

d) On a également $F_{100} \approx 1,618$; $F_{500} \approx 1,618$ et $\Phi \approx 1,618$. Donc on peut conjecturer que les nombres F_n ont pour limite Φ.

Partie B - Nombre de pavages par des dominos et nombre d'or

1. a) $K(1) = 1$ car on a une seule façon de paver un quadrillage 1×2 mettre un domino verticalement.
   $K(2) = 2$ car on a deux façons de paver un quadrillage 2×2
   - soit on dispose deux dominos verticalement ;
   - soit on dispose deux dominos horizontalement.

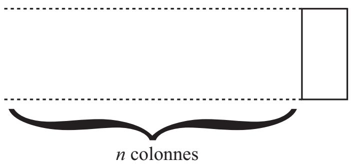
   b) Les seules façons de paver un quadrillage 3×2 sont :

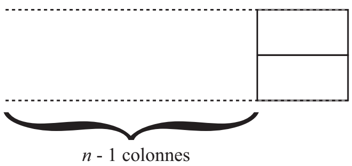
   Donc $K(3) = 3$.

   c) Pour paver un quadrillage $(n+1) \times 2$:

   - soit on finit par un domino vertical et dans ce cas, il reste un quadrillage $n \times 2$ à paver : on a donc $K(n)$ pavages de ce type

   - soit on finit par deux dominos horizontaux et dans ce cas, il reste un quadrillage $(n-1) \times 2$ à paver : on a donc $K(n-1)$ pavages de ce type

   On a donc $K(n+1) = K(n) + K(n-1)$.

2. a) Supposons que pour tout entier naturel n, $r^{n+1} = r^n + r^{n-1}$.
   Alors on a $r^2 = r+1$.
   Réciproquement, si $r^2 = r+1$, alors par multiplication, on obtienr, pour tout entier naturel n, $r^{n+1} = r^n + r^{n-1}$.
   Ainsi r^n vérifie la relation $r^{n+1} = r^n + r^{n-1}$ pour tout entier naturel n si et seulement si $r^2 = r+1$ et d'après la partie A, on obtient $r = \Phi$ ou $r = 1 - \Phi$.

   b) Soit $u_n = \alpha\Phi + \beta(1-\Phi)^n$.
   Alors pour tout entier naturel n,

$$\begin{aligned} u_n + u_{n-1} &= \alpha\Phi^n + \beta(1-\Phi)^n + \alpha\Phi^{n-1} + \beta(1-\Phi)^{n-1} \\ &= \alpha\left(\Phi^n + \Phi^{n-1}\right) + \beta\left((1-\Phi)^n + (1-\Phi)^n + (1-\Phi)^{n-1}\right) \\ &= \alpha\Phi^{n+1} + \beta(1-\Phi)^{n+1} \\ &= u_{n+1}. \end{aligned}$$

c) $u_n = \alpha\Phi^n + \beta(1-\Phi)^n$
$u_0 = \alpha+\beta$ et $u_1 = \alpha\Phi+\beta(1-\Phi)$.
Par résolution du système $\begin{cases} \alpha+\beta = 1 \\ \alpha\Phi+\beta(1-\Phi) \end{cases}$, on obtient $\alpha = \dfrac{\Phi}{2\Phi-1}$ et $\beta = \dfrac{\Phi-1}{2\Phi-1}$.

d) Pour tout entier naturel n, $K(n+1) = K(n)+K(n-1)$ et on a $K(0) = 1$ et $K(1) = 1$.
D'après ce qui précède, on a pour tout n,

$$K(n) = \frac{\Phi}{2\Phi-1}\Phi^n + \frac{\Phi-1}{2\Phi-1}(1-\Phi)^n = \frac{\Phi^{n+1}}{2\Phi-1} - \frac{(1-\Phi)^{n+1}}{2\Phi-1}.$$

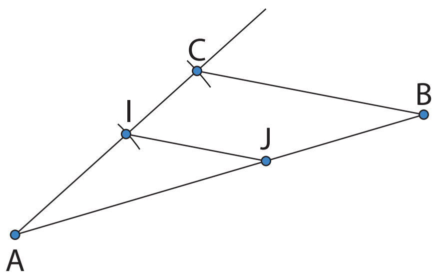
et on a donc $k(2016) = \dfrac{\Phi^{2017}}{2\Phi-1} - \dfrac{(1-\Phi)^{2017}}{2\Phi-1}$.

Partie C - Construction géométrique du nombre d'or

On trace une demi-droite d'origine A.
On place les points I et C sur cette demi-droite tels que $AI = 2$ et $AC = 1+\sqrt{5}$(notons que le segment [DR] de l'escargot de Pythagore a une longueur de$\sqrt{5}$).

Ensuite on trace [BC] puis la droite parallèle à [BC] passant par I : celle-ci coupe [AB] en J et d'après le théorème de Thalès, on a

$$\frac{AB}{AJ} = \frac{AC}{AI} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \Phi.$$



Compléments et commentaires de Max Hochart

a) La littérature sur la suite de Fibonacci est très riche. À la question 2b, on admet le résultat suivant : toute suite vérifiant la relation

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$$

est de la forme

$$n \mapsto \alpha\ \Phi^n + \beta\ (\Phi-1)^n.$$

Ce point n'est pas compliqué à démontrer : deux suites u et v vérifiant cette relation sont égales si et seulement si $u_0 = v_0$ et $u_1 = v_1$. Or, la suite $(v_n = \alpha\Phi^n + \beta(\Phi-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie cette relation et étant donnés u_0 et u_1, on peut toujours trouver α et β tels que $v_0 = u_0$ et $v_1 = u_1$.

b) Une autre illustration de la suite de Fibonacci est la suivante : lors d'une soirée, n personnes sont assises les uns à côté des autres, sur un banc. Il y a donc n places, que l'on peut numéroter de 1 à n. Les personnes se lèvent (pour aller danser) puis se rassoient, en s'asseyant à la même place occupée précédemment ou juste à côté. Il faut alors compter le nombre de configurations possibles.

En termes mathématiques, il s'agit de compter le nombre de bijections σ de $[\![1,n]\!]$ dans lui-même telles que

$$\max_{1\leqslant i\leqslant n} |\sigma(i)-i| \leqslant 1.$$

La réponse est K_n, avec les notations de l'énoncé.

RETOUR AU SOMMAIRE

BORDEAUX

Premier exercice

Toutes séries

Coloriages

Éléments de solution

1. a) En coloriant en vert les points correspondant à 1, 2, 4 et 8, toutes les distances sont différentes.

   b) $N = 12$ donc il ne peut y avoir que 6 distances possibles entre des points distincts : les entiers de 1 à 6. Lorsqu'on a 5 points, cela donne 10 paires possibles donc 10 distances. Nécessairement deux au moins d'entre elles sont égales. Il est donc impossible de colorier 5 points en vert de sorte que les distances entre chaque paire de points soient différentes.

2. Il est nécessaire que $N \geqslant 16$. Les distances entre les paires de points sont alors 1, 2, 4, 8, 3, 6, 12 si $N \geqslant 24$ ou $N - 12$ sinon, 7, 14 si $N \geqslant 28$ ou $N - 14$ sinon, 15 si $N \geqslant 30$ ou $N - 15$ sinon.

   Pour $N = 24$, toutes les distances sont différentes donc $N \leqslant 24$.

   Si $N < 24$, les distances sont 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, $N - 12$, $N - 14$ et $N - 15$. On doit donc avoir $N - 15 \geqslant 5$ donc $N \geqslant 20$.

   Pour $N = 20$, $N - 12 = 8$ et il y a donc deux distances égales à 8.

   Pour $N = 21$, $N - 14 = 7$ et il y a donc deux distances égales à 7.

   Pour $N = 22$, $N - 15 = 7$ et il y a donc deux distances égales à 7.

   Pour $N = 23$, $N - 15 = 8$ et il y a donc deux distances égales à 8.

   Finalement la plus petite valeur possible de N est donc 24.

3. a) 5 points donnent 10 paires de points. Pour que les 10 distances soient différentes, il est donc nécessaire que $N \geqslant 2 \times 10$ soit $N \geqslant 20$.

   b) La distance entre a et b est égale à $|a - b|$ ou $N - |a - b|$. Si N est pair, ces deux entiers ont la même parité que $a - b$.

      Avec 5 points coloriés, on a trois possibilités :

      1) Les 5 nombres ont la même parité. Les 10 distances sont alors paires.

      2) Parmi les 5 nombres, il y en a 4 d'une certaine parité et 1 de l'autre. Dans ce cas, parmi les 10 distances, 4 exactement sont impaires.

      3) Parmi les 5 nombres, il y en a 3 d'une certaine parité et 2 de l'autre. Dans ce cas, parmi les 10 distances, 6 exactement sont impaires.

      Pour $N = 20$, les 10 distances différentes ne pourraient être que 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 et il y aurait donc exactement 5 distances impaires. C'est donc en contradiction avec les résultats précédents. Ainsi $N \neq 20$.

   c) La valeur minimale de N est 21. En coloriant les points 1, 4, 5, 10 et 12, les distances sont 3, 1, 5, 2, 4, 6, 7, 9, 8 et 10. Elles sont toutes différentes.

4. Pour $N = 2016$, en coloriant les points correspondant aux puissances de 2 (1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024) on obtient 11 points ayant la propriété souhaitée.

RETOUR AU SOMMAIRE

BORDEAUX

Deuxième exercice

Série S

La tombola

Éléments de solution

1. 100 est **perdant** car il n'est pas divisible par 3 et n'a donc pas été effacé.
   300 est **gagnant** car il a été effacé puisque c'est le triple de 100 qui n'a pas été effacé.
   $2016 = 3 \times 672$ et $672 = 3 \times 224$. Comme 224 n'est pas un multiple de 3, il n'a pas été effacé, donc 672 a été effacé et 2016 n'a pas été effacé. **2016 est donc perdant**.
2. Si a est perdant, a n ?a pas été effacé donc $3a$ est effacé et $9a$ ne l'est pas donc $9a$ **est perdant**.
   $729 = 9 \times 81$ et $81 = 9 \times 9$. Comme 9 est perdant, 81 est perdant et 729 est **perdant**.
   Plus généralement, les puissances de 3 qui correspondent à des numéros perdants sont les puissances de 9, c'est-à-dire de la forme 3^a : avec a pair.
3. a) Pour $N = 100$, pas d'entrée dans la boucle et N n'est pas divisible par 3 donc l'algorithme affiche « Le numéro N est perdant ».
   Pour $N = 300$, pas d'entrée dans la boucle et N est divisible par 3 donc l'algorithme affiche « Le numéro N est gagnant ».
   Pour $N = 2016$, en sortie de boucle N est égal à 224 et N n'est pas divisible par 3 donc l'algorithme affiche « Le numéro N est perdant ».
   b) Si a est pair, en sortie de boucle N est égal à b qui n'est pas divisible par 3 donc l'algorithme affiche « Le numéro N est perdant ».
   Si a est impair, en sortie de boucle N est égal à $3b$ qui est divisible par 3 donc l'algorithme affiche « Le numéro N est gagnant ».
4. D'après 3, les numéros perdants sont les nombres de la forme $3b$ où a est un entier naturel pair et b un entier naturel non divisible par 3.
   Soient $3^a b$ et $3^{a'} b'$ deux numéros perdants c'est-à-dire tels que a et a' sont des entiers naturels pairs et b et b' sont des entiers naturels non divisibles par 3.
   Le produit $p = 3^a b \times 3^{a'} b'$ est égal à $3^A B$ avec $A = a + a'$ et $B = b + b'$.
   A est un entier naturel pair comme somme de deux entiers naturels pairs. B est un entier naturel qui n'est pas divisible par 3 puisque ni b ni n b' le sont. Ainsi p est un numéro perdant.
5. Il y a 25% de numéros gagnants.
   Une démarche possible : on dénombre les entiers de la forme $3^a b$ (où a est un entier naturel impair et b un entier naturel non divisible par 3) qui sont inférieurs ou égaux à 2016.
   Les valeurs possibles de a sont 1, 3, 5.
   Pour $a = 1$, on doit avoir $b \leqslant 672$ et b non divisible par 3. Comme il y a 224 multiples de 3 inférieurs ou égaux à 672, b peut prendre $672 - 224 = 448$ valeurs.
   Pour $a = 3$, on doit avoir $b \leqslant 74$ (car $\dfrac{2016}{27} \approx 74,7$) et b non divisible par 3. On en déduit que b peut prendre $74 - 24 = 50$ valeurs.
   Pour $a = 5$, on doit avoir $b \leqslant 8$ et b non divisible par 3. On en déduit que b peut prendre 6 valeurs.
6. La valeur minimale de 4 est 2689.
   Une démarche possible : compte tenu de la question 5, on peut penser qu'il y a environ 25% de gagnants donc les 2016 numéros perdants représentent environ les trois quarts des billets vendus. Ce qui donne environ 2688 billets vendus.
   Pour $n = 2688$, le même raisonnement qu'en 5 donne 673 gagnants donc 2015 perdants.
   Pour $n = 2689$, le numéro 2689 est perdant donc il y a 2016 perdants.

RETOUR AU SOMMAIRE

BORDEAUX

Troisième exercice

Séries autres que S

Grande famille

Éléments de solution

1. On a 9 possibilités pour chaque chiffre, ce qui donne $9 \times 9 \times 9 \times 9 = 6\,561$ nombres dans $\mathscr{E}$.
2. - 2537 a 23 cousins. Pour écrire un entier de la famille de 2 537, les quatre chiffres doivent être 2, 5, 3 et 7, il y a donc 4 possibilités pour le 1^er^, 3 pour le second, 2 pour le 3^e^ et 1 pour le 4^e^. Ce qui donne $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ membres de la famille de 2 537.
   - 2 532 a 11 cousins. Les 12 membres de la famille de 2532 sont 2235, 2253, 2325, 2352, 2523, 2532, 3225, 3252, 3522, 5223, 5232, 5322.
3. Il y a 9 éléments N de $\mathscr{E}$ tels que $Max(N) = Min(N)$. Ce sont ceux dont les quatre chiffres sont identiques : $1111, 2222, \ldots, 9999$.
4. $N_0 = 2\,789$.
5. $T(2449) = 19$ et $P(2449) = 288$.
   On peut prendre $N_1 = 2\,386$ ou l'un de ses cousins.
6. On peut prendre $N_2 = 2\,335$ ou l'un de ses cousins.
7. a) $Min(N) = \overline{abcd} = 1000a + 100b + 10c + d$
      et $Max(N) = \overline{dcba} = 1000d + 100c + 10b + a$
      donc $Min(N) + Max(N) = 1001a + 110b + 110 + 1001d$
      soit $Min(N) + Max(N) = 11\,(91(a+d) + 10(b+c))$.
   b) L'équation s'écrit $11\,(91(a+d) + 10(b+c)) = 11330$.
      Elle est équivalente à $91(a+d) + 10(b+c) = 1030$.
      On en déduit que $(a+d)$ est divisible par 10 donc égal à 10 (car $a + d \leqslant 18$).
   c) $a + d = 10$ donne $10(b+c) = 120$ soit $b + c = 12$ donc $T(N) = 22$.
   d) y a 148 solutions.
      $Min(N)$ est l'un des nombres suivants : 1399, 1489, 2488, 1579, 2578, 3577, 1669, 2668, 3667, 4666.
      Les solutions sont les éléments des familles de ces 10 nombres.
      Les familles de 1579, 1489 et 2578 ont chacune 24 éléments.
      Les familles de 1399, 2488, 3577, 1669, 2668 et 3667 ont chacune 12 éléments.
      La famille de 4666 a 4 éléments : 4666, 6466, 6646, 6664.
      Finalement, il y a $3 \times 24 + 6 \times 12 + 4 = 148$ solutions.

RETOUR AU SOMMAIRE

CAEN

Premier exercice

Toutes séries

Les mots

Éléments de solution

On peut se servir du tableau suivant :

x	1	A	G	M	S	Y
	-1	B	H	N	T	Z
	0,5	C	I	O	U	
y	1	D	J	P	V	
	-1	E	K	Q	W	
	0,5	F	L	R	X	

1. SELFIE on a $x=1+0.5=1.5$ et $y=-1+0.5+0.5-1=-1$ d'où le couple $(1.5,-1)$
   JOUEUR on a $x=0.5+0.5=1$ et $y=1-1+0.5=0.5$ d'où le couple $(1,0.5)$
2. Mots de 2 lettres conduisant à (1,1) : exemple AD ou DA : $5\times4+4\times5=40$ mots.
3. Mots de 3 lettres conduisant à (1,1) :
   Pour $x=1$ on a $x=1$ (seul) ou $x=0.5+0.5$ et de même pour y.
   Donc les seules possibilités sont de la forme AFF ou DCC : $(5\times4\times4+4\times4\times4)\times3=432$ mots.
4. On peut obtenir $(0,-0.5)$ avec un mot de 2 lettres : exemple EF.
   On ne peut pas obtenir $(0,-0.5)$ avec un mot de 3 lettres car il faut au minimum 2 lettres pour $y=-0.5$.
   On peut obtenir $(0,-0.5)$ avec un mot de 4 lettres .Il suffit d'ajouter AB au mot de 2 lettres : ABEF.
   On peut obtenir $(0,-0.5)$ avec un mot de 5 lettres : exemple CCBEF.
   Pour obtenir un mot de 6 lettres on ajoute AB à celui de 4 lettres.
   Pour obtenir un mot de 7 lettres on ajoute AB à celui de 5 lettres et ainsi de suite.
5. a) Pour un mot de 10 lettres, la plus grande valeur possible de $x+y$ est 10 (elle augmente au maximum de 1 à chaque étape) donc il est impossible d'arriver au point de coordonnées $(5,6)$ $(5+6=11)$.
   b) Pour $x=-3.5$,il faut utiliser au minimum 5 lettres (exemple :BBBBC) donc y varie entre -5 et 5.
   Les valeurs possible de y sont $-5,-3.5,-3,-2.5,-2,-1.5,-1,-0.5,0,0.5,1,1.5,2,2.5,3,3.5,4,4.5,5$.
   c) Il faut que $-10\leqslant x+y\leqslant 10$ et que $-10\leqslant x-y\leqslant 10$.
   Donc les points associés à un mot de 10 lettres doivent se trouver à l'intérieur du carré dont les sommets ont pour coordonnées $(10,0);(0,10);(-10,0)$ et $(0,-10)$.

RETOUR AU SOMMAIRE

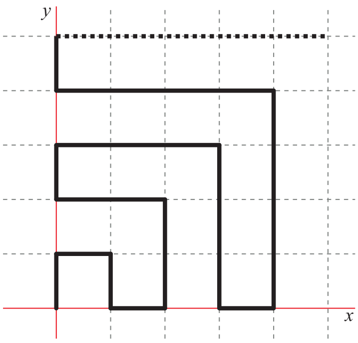
CAEN

Deuxième exercice

Série S

Le lièvre infatigable

Éléments de solution



1. a) – Le point de coordonnées (1 ; 2) est atteint en 7 secondes,
   – Le point de coordonnées (3 ; 3) est atteint en 12 secondes,
   – Le point de coordonnées (4 ; 2) est atteint en 18 secondes.

   b) Le point atteint en 1 minute, c'est-à-dire en 60 secondes a pour coordonnées (7 ; 3).

1. a) - Si n est impair le parcourt est composé de n segments « horizontaux » de longueur allant de 1 à n, $n-1$ segments verticaux de longueur allant de 1 à $n-1$, et n segments de longueur 1 « portés » par les deux axes. Soit une longueur totale de :

$$(1+2+\cdots+n)+(1+2+\cdots n-1)+1+1+\cdots 1 = 2\times(1+2+\cdots+n) = 2\times\frac{n(n+1)}{2} = n(n+1).$$

   - Si n est pair le parcourt est composé de $n-1$ segments « horizontaux » de longueur allant de 1 à n et n segments verticaux de longueur allant de 1 à $n-1$, et n segments de longueur 1 « portés » par les deux axes. Soit une longueur totale de :

$$(1+2+\cdots+n-1)+(1+2+\cdots n)+1+1+\cdots 1 = 2\times(1+2+\cdots+n) = 2\times\frac{n(n+1)}{2} = n(n+1).$$

   Dans les deux cas on obtient que le temps (qui correspond au nombre d'unités de longueur du déplacement) est égal à $n(n+1)$ secondes.

   b) Quel est le temps mis par le lièvre infatigable pour atteindre le point M de coordonnées $(n;p)$?
   - Si $n=p$, déjà fait
   - Si $n<p$:
     - si p est pair alors la distance parcourue est celle de 0 à $P(p;p)$ plus celle de P à M :

$$p(p+1)+(p-n) = p^2+2p-n.$$

     - si p est impair alors la distance parcourue est celle de 0 à $P(p;p)$ moins celle de M à P :

$$p(p+1)-(p-n) = p^2+n.$$

   - Si $n>p$:
     - si p est impair alors la distance parcourue est celle de 0 à $\mathrm{N}(n;n)$) plus celle de N à M :

$$n(n+1)+(n-p) = n^2+2n-p.$$

- si p est pair alors la distance parcourue est celle de 0 à N$(n;n)$ moins celle de M à N :

$$n(n+1)-(n-p)=n^2+p.$$

(a) On constate que $44\times 45<2016<45\times 46$. On note que $n=44$ est pair donc, le point recherché est situé sur l'un des deux segments « horizontaux » menant du point de coordonnées $(44;44)$ à celui de coordonnées $(45;45)$. On a notamment : $2016=44\times 45+36$. Le point recherché à pour coordonnées $(44-36;44)$ c'est-à-dire $(8;44)$.

RETOUR AU SOMMAIRE

CAEN

Troisième exercice

Séries autres que S

Une histoire de moyenne

Éléments de solution

1. $\dfrac{2\times 15+12\times 8+7\times 12}{2+12+7}=10$. Donc sa moyenne est 10.
2. Soit x le nombre de notes égales à 15
$$\frac{5\times 7+6\times 9+3\times 10+4\times 12+13+x\times 15}{5+6+3+4+1+x}=10$$
D'où $\dfrac{180+15x}{19+x}=10$ donc $180+15x=190+10x$ d'où $x=2$.
Il a eu deux notes égales à 15.
3. Soit x le nombre de devoirs dont la note est 15, y le nombre de devoirs dont la note est 8 et z le nombre de devoir dont la note est comprise entre 8 et 15.
Donc $\dfrac{15x+8y+12z}{x+y+z}=10$.
D'où $15x+8y+12z=10x+10y+10z$ donc $5x-2y+2z=0$.
Donc $5x=2(y-z)$.
x est donc un nombre pair or $x\neq 0$ donc $x\geqslant 2$.
D'où $5x\neq 10$ donc $y-z\geqslant 5$ et donc $y\geqslant z+5$. Or $z>1$ donc $y>6$.
4. Soit x le nombre de devoirs de Pierre dont la note est 15 ;
Sa moyenne est donc $\overline{x_1}=\dfrac{12x+72+15x}{3x+6}=\dfrac{27x+72}{3x+6}=\dfrac{9x+24}{x+2}$.
La moyenne de Sophie est $\overline{x_2}=\dfrac{6x+108+30x}{3x+9}=\dfrac{12x+36}{x+3}$.
Or $\overline{x_2}=\overline{x_1}+2$ donc $\dfrac{12x+36}{x+3}=\dfrac{9x+24}{x+2}+2=\dfrac{11x+28}{x+2}$.
D'où $x^2-x-12=0$
$\Delta=49$ donc 2 solutions $x_1=-3$ et $x_2=4$.
Le nombre de devoirs de Pierre dont la note est 15 est 4 sa moyenne est donc de 10 et celle de Sophie est de 12.

RETOUR AU SOMMAIRE

CLERMONT-FERRAND

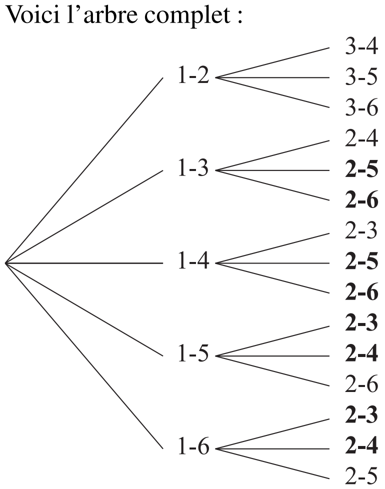
Premier exercice

Toutes séries

Si tous les jumeaux du monde voulaient se donner la main…

Éléments de solution

1. $n = 1$: il n'y a qu'une seule façon pour 2 jumeaux qui se donnent la main de fermer la ronde. Obtenir une ronde est un événement certain. Donc $p_1 = 1$.
2. $n = 2$: en nommant 1 et 2, les deux jumeaux de la première paire et 3 et 4 les deux jumeaux de la seconde, les trois issues équiprobables possibles peuvent être notées (1-2, 3-4), (1-3, 2-4) et (1-4, 2-3). Dans le premier cas on obtient 2 petites rondes, et dans les deux autres une grande ronde. La probabilité cherchée est donc $p_2 = \dfrac{2}{3}$.
3. $n = 3$
   a) L'issue ω n'est pas favorable à l'événement E_3 , car à la fin de l'épreuve on obtient deux rondes : une « petite 5-6 » et une « 1-2-3-4 » constituée avec deux paires de jumeaux.
   b) On peut se contenter de nommer ω par $e = (1-4, 2-3)$ car dès lors que les enfants 1 et 4, respectivement 2 et 3, se sont donné la main, il n'y a pas d'autre alternative pour les enfants 5 et 6 que de se donner leur seconde main libre entre eux.
   c) Voici l'arbre complet :



   Le nombre total d'issues est $5 \times 3 = 15$.

   d) Le nombre d'issues favorables à E_3 est $4 \times 2 = 8$: ces huit issues sont notées en caractères gras sur l'arbre. Nous sommes dans une situation d'équiprobabilité. Donc $p_3 = \dfrac{8}{15} \approx 0,53$.
   Il est **vrai** que $p_3 \geqslant 50\%$.
4. $n = 4$:
   La construction d'un arbre, analogue à celui fait à la question 3, conduit aux résultats suivants :
   Le nombre d'issues possibles est $7 \times 5 \times 3 = 105$; le nombre d'issues favorables à l'événement E_4 est $6 \times 4 \times 2 = 48$. Donc $p_4 = \dfrac{48}{105} = \dfrac{16}{35} \approx 0,46$. Il est **faux** que $p_4 \geqslant 50\%$.
5. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on admet que $p_{n+1} = \dfrac{2n}{2n+1} p_n$.

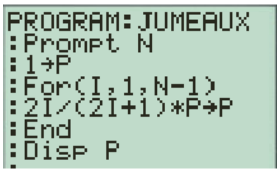
a) Pour $n=2$: $p_2 = \dfrac{2\times 1}{2\times 1+1}\times p_1 = \dfrac{2}{3}\times 1 = \dfrac{2}{3}$. Pour $n=3$: $p_3 = \dfrac{2\times 2}{2\times 2+1}\times p_2 = \dfrac{4}{5}\times\dfrac{2}{3} = \dfrac{8}{15}$.

b) Voici un algorithme possible, qui utilise la définition par récurrence de la suite (p_n) :

$$p_1 = 1 \text{ et } p_{n+1} = \frac{2n}{2n+1}p_n \text{ pour tout entier } n \geqslant 1.$$

Saisir un entier naturel $n \geqslant 2$.
Affecter à P la valeur 1.
Pour i de 1 à $n-1$
    Affecter à P la valeur $\dfrac{2i}{2i+1}\times P$.
FinPour
Afficher P.

c) Programme obtenu sur TI :



Pour $n = 2016$, on obtient (en 2 minutes environ...) $p_{2016} \approx 0,0197$.
Il est vrai que $p_{2016} \approx 2\%$ à 10^{-2} près.
Si 2016 paires de jumeaux, se tenant entre eux par la main, tentent au hasard de former une ronde, ils n'ont que 2% de chances environ d'y parvenir !

RETOUR AU SOMMAIRE

CLERMONT-FERRAND

Deuxième exercice

Série S

Chemins aléatoires paraboliques

Éléments de solution

Partie A

1. Pour $N = 1$, il n'existe pas de chemin parabolique. En effet, pour cette valeur de N, on arrive au point de coordonnées (1 ;0) ou à celui de coordonnées (0 ;1), donc sur un point qui n'est pas un des A_n.
2. Pour une valeur de N donnée, il existe au moins un chemin parabolique si et seulement si on peut arriver sur un des A_n. Or, pour arriver en A_n, il faut avoir effectué dans un ordre indifférent n pas vers la droite et n^2 vers le haut. Les valeurs de N pour lesquelles il existe au moins un chemin parabolique sont donc celles de la forme $n+n^2$. Les valeurs de N comprises entre 1 et 100 pour lesquelles il existe au moins un chemin parabolique sont : $1+1^2=2$; $2+2^2=6$; $3+3^2=1$; $4+4^2=20$; $5+5^2=30$; $6+6^2=42$; $7+7^2=56$; $8+8^2=72$; $9+9^2=90$, soit 2, 6, 12, 20, 30, 42, 56, 72 et 90.
3. Algorithme

```
Variables :  N,p (entiers)
Début
 | p prend la valeur 0
 | Saisir N
 | TantQue p + p² < N
 |  | p prend la valeur p + 1
 | FinTantQue
 | Si p + p² = N
 |  | Afficher « Il existe un chemin parabolique pour cette valeur de N »
 | Sinon
 |  | Afficher « Il n'existe pas de chemin parabolique pour cette valeur de N »
 | FinSi
Fin
```

Partie B

1. Pour $N = 20$, un chemin est constitué de n pas vers la droite (avec $0 \leqslant n \leqslant 20$) et de $20-n$ pas vers le haut. Les arrivées possibles sont donc les points de coordonnées (0 ;20), (1 ;19), (2 ;18), …, (20 ;0). **On a 21 arrivées possibles**.
2. On a deux possibilités pour le premier pas (**D** ou **H**). Pour chacun d'eux, on a encore 2 choix possibles pour le deuxième pas (**D** ou **H**), soit $2^2 = 4$ chemins possibles pour les 2 premiers pas, etc. (on peut imaginer un arbre). Pour $N = 20$, **on dénombre 220 chemins possibles**.
3. Pour $N = 20$, un chemin parabolique est du « type » $\mathrm{A}_0 \to \mathrm{A}_1 \to \mathrm{A}_2 \to \mathrm{A}_3 \to \mathrm{A}_4$.
   On compte
   - 2 chemins possibles pour aller de A_0 à A_1
   - 4 chemins possibles pour aller de A_1 à A_2
   - 6 chemins possibles pour aller de A_2 à A_3
   - et 8 chemins possibles pour aller de A_3 à A_4.

   Cela donne au total $2 \times 4 \times 6 \times 8 = 384$ chemins paraboliques possibles.

   Les chemins étant équiprobables, **la probabilité d'effectuer un chemin parabolique est** $\dfrac{384}{2^{20}} = \dfrac{3}{8192}$.

Partie C

1. Pour arriver en A_n, il faut faire n pas vers la droite et n^2 pas vers le haut. Il y a donc autant de chemins possibles pour arriver en A_n que de cocher n cases d'une grille à $n+n^2$ cases (les cases cochées correspondant aux n pas vers la droite parmi les $n+n^2$ pas).
   Si on se soucie de l'ordre dans lequel on coche, on dénombre $(n^2+1)(n^2+2)\dots(n^2+n)$ grilles possibles (n^2+n choix possibles pour la $1^{\text{ère}}$ case, n^2+n-1 pour la 2^{nde} case,..., $n^2+n-n+1$ pour la $n^{\text{ième}}$). Or cet ordre n'a pas d'importance, et on a $1\times2\times3\times\cdots\times n$ manières de ranger les n cases cochées. On en déduit que le nombre de façons de cocher les n cases, donc le nombre de chemins possibles pour arriver en A_n est : $\dfrac{(n^2+1)(n^2+2)+\cdots(n^2+n)}{1\times2\times3\times\cdots\times n}$.
   Un chemin parabolique est du « type » $A_0 \to A_1 \to A_2 \to A_3 \to A_4$. Pour aller de A_p à $Ap+1$, il faut faire 1 pas vers la droite et $(p+1)^2-p^2$ pas vers le haut, soit $(p+1)^2-p^2+1=p^2+2p+1-p^2+1=2(p+1)$ chemins possibles.
   On compte donc :
   - 2×1 chemins possibles pour aller de A_0 à A_1
   - 2×2 chemins possibles pour aller de A_1 à A_2
   - 2×3 chemins possibles pour aller de A_2 à A_3
   - ...
   - et $2n$ chemins possibles pour aller de A_{n-1} à A_n.

   d'où $(d\times1)\times(2\times2)\times(2\times3)\times\cdots(2n)=2^n\times(1\times2\times3\times\cdots n)$ **chemins paraboliques possibles**.
   Les chemins étant équiprobables, **la probabilité d'effectuer un chemin parabolique est :**

$$p_n = \frac{2^n(1\times2\times3\cdots\times n)}{\dfrac{(n^2+1)(n^2+2)\cdots(n^2+n)}{1\times2\times3\cdots\times n}} = \frac{2^n(1\times2\times3\cdots\times n)^2}{(n^2+1)(n^2+2)\cdots(n^2+n)}.$$

2. On peut remarquer que $p_n = \dfrac{2\times1^2}{n^2+1}\times\dfrac{2\times2^2}{n^2+2}\times\cdots\times\dfrac{2n^2}{n^2+n}$.
   En exécutant sur une calculatrice le programme ci-dessous, **on obtient que 93 est le plus petit entier naturel tel que** $p_n < 10^{-50}$.

CASIO

```
1 → N
1 → P
While P ≥ 10^-50
N+1 → N
1 → P
For 1 → K To N
P × 2 × K^2 /(N^2+K)→ P
Next
WhileEnd
n△
```

TI

```
1 → N
1 → P
While P ≥ 10^-50
N+1 → N
1 → P
For (K,1,N)
P × 2 × K^2 /(N^2+K)→ P
End
End
Disp N
```

RETOUR AU SOMMAIRE

CLERMONT-FERRAND

Troisième exercice

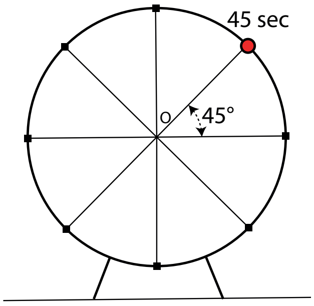
Séries autres que S

Fête foraine

Éléments de solution

1. La nacelle parcourt le périmètre d'un cercle de rayon 30 m soit : $2\pi \times 30 = 60\pi \approx 188,5$.
   Les adolescents vont donc parcourir 188,5 m en 1 tour arrondi au dm.

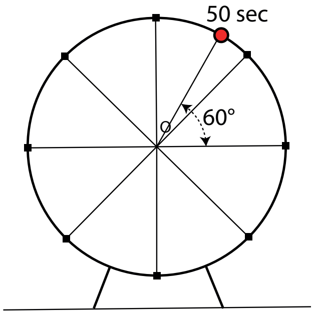
2. Ils parcourent $60 \times \pi$ m en 2 min ou en 120 s. La vitesse est donc : $v = \dfrac{60 \times \pi}{120} = \dfrac{\pi}{2} \approx 1,57$ m.s^{-1}



3. a) Au bout de 45 s, la nacelle aura parcouru les 3/4 d'un demi-tour et se trouvera au point marqué si la roue tourne dans le sens trigonométrique. Elle sera à l'altitude :

$$33 + 30 \times \sin(45) = 33 + 30 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 33 + 15\sqrt{2} \approx 54,21 \text{ m.}$$

soit **54 m** arrondie au mètre

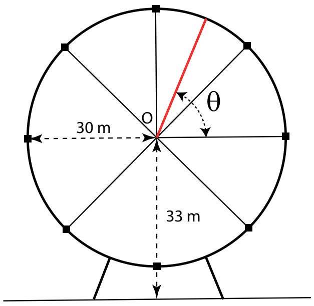


b) Après 1 min et 10 s, la nacelle sera à la même hauteur qu'après 50 s. Elle sera à l'altitude :

$$33 + 30 \times \sin(60) = 33 + 30 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 33 + 15\sqrt{3} \approx 58,98 \text{ m.}$$

Les adolescents seront à **59 m** du sol environ.

4. Cherchons la mesure θ en degrés appartenant à [0 ;90] des angles à partir de laquelle la roue dépasse les 60 mètres d'altitude :



$$33 + 30 \times \sin(\theta) \geqslant 60 \Leftrightarrow \sin(\theta) \geqslant \frac{27}{3} \Leftrightarrow \sin(\theta) \geqslant 0,9.$$

Soit $\sin^{-1}(0,9) \leqslant \theta \leqslant 90$.
Il sera sujet au vertige pendant le temps que met la roue à tourner de $2 \times (90 - \sin^{-1}(0,9)) \approx 51,68$ degrés.
Comme la vitesse est constante, il y a proportionnalité entre le mesure de l'angle au centre et le temps mis pour le parcourir.

Temps en sec.	120 s	$\dfrac{120 \times 51,68}{360} = \dfrac{51,68}{3} \approx 17,23$
Angles en deg	360	51,68

Cet adolescent sera sujet au vertige pendant 17 s environ.

RETOUR AU SOMMAIRE

CORSE

Premier exercice

Toutes séries

Cavalier seul

Éléments de solution

1. Déplacement du cavalier pour occuper toutes les cases :

1	4	7	10
8	11	2	5
3	6	9	12

2. Lorsqu'un cavalier se déplace il change obligatoirement de couleur de case à chaque coup. Sur un damier 3×5 il lui faut faire 15 coups pour réaliser un cycle. Or après le quinzième coup il se trouvera sur une case de couleur différente, qui ne peut donc pas être la case de départ.

3. a) Seule la case 5 est inaccessible, elle a 1/9 chance de sortir. Si on note An : « la partie a été interrompue avant le $(n+1)$-ième tirage » on a $P(An) = 1-(8/9)n$, et $P(An) > 0,9$ pour $n > 19$.

   b) α- On entre 8 : $|u_8 - u_1| = |8-1| = 7; x = \min(7; 8-7) = 1$ et $c = 1$
   On entre 7 : $|u_7 - u_8| = |3-8| = 5; x = \min(5; 8-5) = 3$ et $c = 4$
   On entre 3 : $|u_3 - u_7| = |7-3| = 4; x = \min(4; 8-4) = 4$ et $c = 8$
   On entre 5 : $|u_5 - u_3| = |0-7| = 7; x = min(7; 8-7) = 1$ et $c = 9$
   Sortie $9-1 = 8$

   β- Algorithme

```
Variables :        p,n,x,c : nombres entiers
                   u : liste de nombres entiers
Initialisation :   Affecter à p la valeur 1
                   Affecter à c la valeur 0
                   Affecter à u la liste {1 ;4 ;7 ;6 ;0 ;2 ;3 ;8 ;5}
Traitement :       Tant que p ≠ 5 Faire
                   Début TantQue
                       Demander un nombre entier de 1 à 9, l'affecter à n
                       Affecter à x la valeur absolue de (u[n] − u[p])
                       Affecter à x la valeur minimum entre x et (8 − x)
                       Affecter à c la valeur de c + x
                       Affecter à p la valeur de n
                   Fin TantQue
Sortie :           Afficher c − x
```

   Cet algorithme indique le nombre de déplacements que doit effectuer le cavalier pour suivre le parcourt imposé en un minimum de coups.

RETOUR AU SOMMAIRE

CORSE

Deuxième exercice

Toutes séries

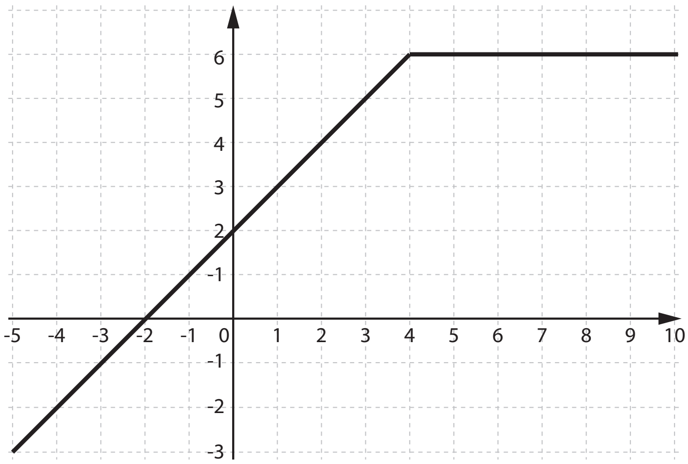
Changeons les règles !

Éléments de solution

1. a) -5
   b) 7
   c) 1
   d) $\frac{1}{2}$
   e) 0
   f) 6
   g) 11
   h) 8
2. $\min(a^2+1;2a) = 2a$ car $(a-1)^2 = a^2-2a+1 \geqslant 0$.
3. On doit calculer $\min\left(\frac{a}{b}\,;\,\frac{a+1}{b+1}\right)$.
   Or, $\frac{a}{b} - \frac{a+1}{b+1} = \frac{a-b}{b(b+1)}$.
   Comme $b(b+1) > 0$, le résultat est :
   $\frac{a+1}{b+1}$ si $a \geqslant b$
   $\frac{a}{b}$ si $a \leqslant b$.
4. a) $2x = 9$ d'où $x = 4,5$.
   b) $2x = -1$ d'où $x = -0,5$.
   c) $\min(2;x) = 0$ d'où $x = 0$.
   d) $\min(2,x) = 5$. Impossible.
   e) $\min(2,x) = 2$. $S =]-\infty;2]$.
5. a) - d'une part : $\min(a;b) + min(a;b) = 2a$ si $a \leqslant b$ et $2b$ sinon,
      - d'autre part : $\min(2a;2b) = 2a$ si $aa \leqslant b$ et $2b$ sinon.
   b) Le double produit dans l'identité remarquable s'écrit ici $2+a+b$. Or,
      - si $a \leqslant b$, $2a \leqslant 2+a+b$;
      - si $a \geqslant b$, $2b \leqslant 2+a+b$.
      Donc, $2+a+b$ n'est jamais la plus petite des trois quantités $2a$, $2+a+b$ et $2b$.
      La réponse précédente permet de conclure.
6. a) • $\min(2+3;6) = 5$. Or $y(A) = 12$ donc A n'appartient pas à la droite.
      • $\min(2+5;6) = 6$. Comme $y(B) = 6$, B appartient à la droite.
      • $\min(2+6;6) = 6$. Comme $y(C) = 6$, C appartient à la droite.

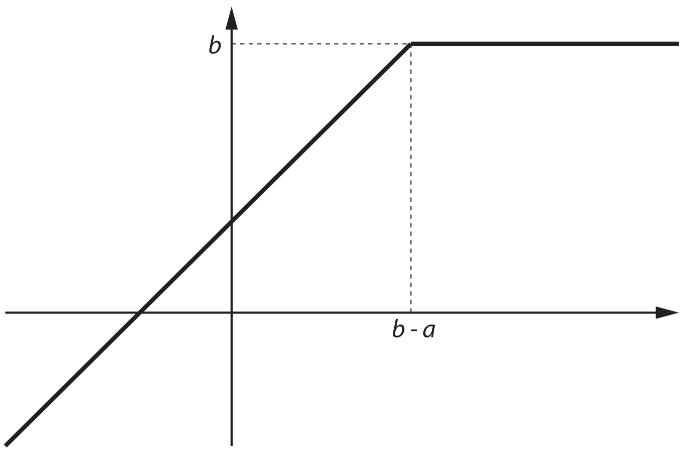
- $\min(2+1;3) = 3$. Comme $y(D) = 3$, D appartient à la droite.

b) La droite a pour équation $y = \min(x+2;6)$, c'est-à-dire : $x+2$ si $x \leqslant 4$, 6 sinon. (Voir représentation graphique ci-dessous.)



c) La droite d a pour équation $y = x$ tandis que la droite Δ a pour équation $y = \min(x,0)$, c'est-à-dire : x si $x < 0$, 0 sinon.
Donc d et Δ ne sont pas confondues.

d) L'équation de la droite est $y = \min(x+a;b)$, c'est-à-dire : $x+a$ si $x \leqslant b-a$, b sinon (Voir représentation graphique ci-dessous.)



7. a) Déterminer l'intersection des droites d_1 et d_2 revient à résoudre l'équation $x = x+1$.
Cette équation ne possède aucune solution réelle donc l'intersection des droites d_1 et d_2 est vide.

b) Déterminer l'intersection des droites d_3 et d_4 revient à résoudre l'équation $\min(x+2;6) = \min(x+4;4)$.
Cette équation possède une unique solution réelle : $x = 2$. L'intersection des droites d_3 et d_4 est donc composée d'un point : le point de coordonnées (2 ; 4).

c) Déterminer l'intersection des droites d_5 et d_6 revient à résoudre l'équation $\min(x;b) = \min(x;b')$.
Cette équation est vérifiée :

- pour tout réel $x \leqslant b$ si $b < b'$;
- pour tout réel $x \leqslant b'$ si $b > b'$.

L'intersection des droites d_5 et d_6 est donc l'intervalle $]-\infty;\min(b;b')]$.

RETOUR AU SOMMAIRE

CRÉTEIL

Premier exercice

Toutes séries

Cousu de fils d'or

Éléments de solution

I] Aire d'un pentagone régulier :

1. Dans la configuration de Thalès formée des triangles FBC et FAD, on a :

$$\frac{d}{d+c}=\frac{c}{d} \text{ ou encore } \frac{d+c}{d}=\frac{d}{c} \text{ ce qui donne bien } \frac{d}{c}=1+\frac{c}{d}.$$

2. On pose $\Phi=\dfrac{d}{c}$.

   a) D'après la question 1., $\Phi=1+\dfrac{1}{\Phi}$, ce qui donne $\Phi^2=\Phi+1$ et ainsi $\Phi^2-\Phi-1=0$.

   b) L'équation du second degré $x^2-x-1=0$ admet deux solutions de signes contraires. Φ étant positif, la seule solution possible est $\Phi=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

3. Aire(ABCDE) = 2 $\times$ aire(BCD) + aire(ABD).
   Aire(BCD)= $\dfrac{1}{2}d\sqrt{c^2-\dfrac{d^2}{4}}$ et aire(ABD) = $\dfrac{1}{2}c\sqrt{d^2-\dfrac{c^2}{4}}$.

   $$\begin{aligned}\text{Donc aire(ABCDE)}= & d\sqrt{c^2-\frac{d^2}{4}}+\frac{1}{2}c\sqrt{d^2-\frac{c^2}{4}}\\ &=\frac{1}{2}c\Phi\sqrt{4c^2-c^2\Phi^2}-\frac{1}{4}c\sqrt{4c^2\Phi^2-c^2}\\ &=\frac{c^2}{4}\left(2\Phi\sqrt{4-\Phi^2}+\sqrt{4\Phi^2-1}\right)\\ &=\frac{c^2}{4}\left(2\Phi\sqrt{4-(\Phi+1)}+\sqrt{4(\Phi+1)-1}\right)\\ &=\frac{c^2}{4}\left(2\Phi\sqrt{3-\Phi}+\sqrt{4\Phi+3}\right).\end{aligned}$$

II] Aire d'un hexagone :

Le triangle OAB est équilatéral.

$$\text{aire(ABCDEF)}=6\times\ \text{aire(OAB)}=6\times\frac{1}{2}c\sqrt{c^2-\frac{c^2}{4}}=\frac{3c^2\sqrt{3}}{2}.$$

III] Le ballon de foot :

Calculons un encadrement de c sachant que la circonférence du ballon doit mesurer entre 68 cm et 70 cm. On a donc $68\leqslant 2\pi r\leqslant 70$ où r est le rayon du ballon.

On a : surface(Ballon) $=4\pi r^2=\dfrac{(2\pi)^2}{\pi}$,

$$\begin{aligned}\text{et surface(Ballon)} &\approx 12\times\frac{c^2}{4}\left(2\Phi\sqrt{3-\Phi}+\sqrt{4\Phi+3}\right)+20\times\frac{3c^2\sqrt{3}}{2}\\ &= c^2\left(6\Phi\sqrt{3-\Phi}+3\sqrt{4\Phi+3}+30\times\sqrt{3}\right).\end{aligned}$$

Sachant que $\dfrac{68^2}{\pi} \leqslant$ surface(Ballon) $\leqslant \dfrac{70^2}{\pi}$, on en déduit que $4,5 \leqslant \pi \leqslant 4,7$.
La couture du ballon nécessite de coudre une longueur totale égale à $90c$, ce qui correspond bien à une longueur supérieure à 4 mètres.

Compléments et commentaires de Max Hochart

Dans ce sujet, le nombre d'or apparaît géométriquement comme le rapport des mesures d'une diagonale et d'un côté dans un pentagone régulier.

On peut alors montrer que ce nombre est irrationnel. Ce nombre Φ vérifiant $\Phi^2 = \Phi + 1$, s'il s'écrivait $\Phi = \frac{a}{b}$, avec a et b premiers entre eux, on aurait $a^2 = ab + b^2$, comme dans l'énoncé. Ceci montre que a et b ont un diviseur premier commun, d'où la contradiction.

RETOUR AU SOMMAIRE

CRÉTEIL

Deuxième exercice

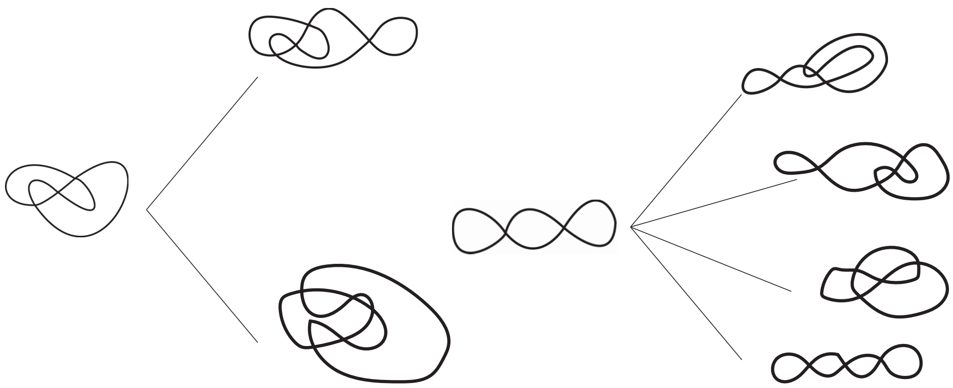
Toutes séries

Les élastiques

Éléments de solution

Partie A

1. La figure c) est composée de 4 nœuds, une boucle, 7 arcs et 5 régions.
2. Arbres



3. a) Tableau

Nbre de rabattements R	Nbre de torsions T	c	r	a
1	0	3	4	6
0	1	2	3	4
2	3	8	9	16
p	q	$1+2p+q$	$2+2p+q$	$2+4p+2q$

b) D'une étape n à l'étape $n+1$, l'action de R donne $\left\{\begin{array}{lcl} c_{n+1} & = & c_n+2 \\ r_{n+1} & = & r_n+2 \\ a_{n+1} & = & a_n+4 \end{array}\right.$

et l'action T donne $\left\{\begin{array}{lcl} c_{n+1} & = & c_n+1 \\ r_{n+1} & = & r_n+1 \\ a_{n+1} & = & a_n+2 \end{array}\right.$ avec $c_0=1$, $r_0=2$ et $a_0=2$.

4. D'après la dernière ligne du tableau du 3.a), pour tout $X \in \mathscr{C}$ on a : $c+r-a=1$.

Partie B

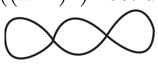
1. $\left\{\begin{array}{lcl} c" & = & c+c' \\ r" & = & r+r'-1 \\ a" & = & a+a' \end{array}\right.$

2. On note $(c_p\,;\,r_p\,;\,a_p)$ le triplet associé à X^p avec $c_1 = c, r_1 = r$ et $a_1 = a$.

   D'après la question précédente, on a : $\begin{cases} c_p &= c + c_{p-1} \\ r_p &= r + r_{p-1} - 1 \\ a_p &= a + a_{p-1} \end{cases}$

   On en déduit que $\begin{cases} c_p &= c + (p-1)c = pc \\ r_p &= r + (p-1)(r-1) = p(r-1)+1 \\ a_p &= a + (p-1)a = pa \end{cases}$

3. Le nombre de nœuds de $((X^{16})^9)^7$ est donné par $16 \times 9 \times 7c = 2016$, donc $c = 2$.

   Un représentant de X est 

4. On suppose qu'il existe $X \in \mathscr{C}$ tel que le nombre de nœuds de X^p soit 2017 avec $2 \leqslant p \leqslant 2016$.
   D'après la question B.2. on a $pc = 2017$. Or 2017 est un nombre premier, un tel nombre p ne peut exister.

5. Soit $X \in \mathscr{C}$ composé de n nœuds. D'après la question A. 3.a) le nombre de régions est donné par $r = n+1$.
   Puisqu'il y a plus de régions que de nœuds, il existe au moins deux régions qui contiennent le même nombre de nœuds à leurs périphéries. (Par l'absurde)

RETOUR AU SOMMAIRE

DIJON

Premier exercice

Toutes séries

Années de naissance

Éléments de solution

En appelant A_n l'année de naissance et n l'âge, A_n étant carrable, on a alors la relation : $n^2 = A_n + n$ soit $A_n = n^2 - n = n(n-1)$.

1. $41^2 = 1681$; $42^2 = 1764$; $43^2 = 1849$.
   42 est le seul entier dont le carré est compris entre 1700 et 1800 ; à l'aide de la définition, Marie-Antoinette est née en 1722 $(1764-42)$.
2. 2) En affichant la table de valeur de , on obtient :
   - Le siècle le plus récent ayant deux années carrables est le 19ème (1806 et 1892).
   - Le premier siècle n'en contenant aucune sera le 33ème siècle (aucune carrable entre 3192 et 3306).
3. Si A_n et A_{n+1} sont deux années carrables consécutives, on a $A_n = n^2 - n$ et $A_{n+1} = (n+1)^2 - (n+1)$.
   Ainsi : $A_{n+1} = n^2 - n + 2n = A_n + 2n$.
   On constate donc un écart de $2n$ entre les deux années de naissance carrables A_n et $A_(n+1)$. Comme Charles et Louis ont 60 ans d'écart, $n = 30$ et on obtient $A_{30} = 30^-30 = 870$ et $A_{31} = 31^2 - 31 = 930$.

   On recommence avec A_n et A_{n+2}. L'écart est de $4n+2$. L'équation $4n+2 = 60$ ne donne pas une solution entière donc il n'y a pas de solution avec deux années carrables ayant 60 ans d'écart.

   On continue avec A_n et A_{n+3}. L'écart est de $6n+6$. L'équation $6n+6 = 60$ donne $n = 9$ et on obtient $A_9 = 9 \times 8 = 72$ et $A_{12} = 12 \times 11 = 132$.

   On continue avec A_n et A_{n+4}. L'écart est de $8n+12$. L'équation $8n+12 = 60$ donne $n = 6$ et on obtient $A_6 = 6^2 - 6 = 30$ et $A_{10} = 90$.

   On continue avec A_n et A_{n+5}. L'écart est de $10n+20$. L'équation $10n+20 = 60$ donne $n = 4$ et on obtient $A_4 = 12$ et $A_9 = 72$.
   Les autres cas ne donnent plus de solutions entières, ce sont les 4 solutions demandées.

   Il faut décomposer 30 en somme d'entiers consécutifs :
   - $30 = 30$ et on obtient $A_{30} = 870 = 30^2 - 30$ et $A_{31} = 31^2 - 31 = 930$.
   - $30 = 9 + 10 + 11$ et on obtient $A_9 = 72$.
   - $30 = 6 + 7 + 8 + 9$ et on obtient $A_6 = 30$.
   - $30 = 4 + 5 + 6 + 7 + 8$ et on obtient $A_4 = 12$.

RETOUR AU SOMMAIRE

DIJON

Deuxième exercice

Série S

Jeu de Palet

Éléments de solution

1. a) La figure 1 illustre le raisonnement à suivre. Pour gagner le centre du cercle doit être à l'extérieur de la bordure du carré, bordure de 2 cm de large. Le carré en pointillé a donc pour côté 12 cm.

   b) La probabilité est égale au quotient des aires de deux carrés : $\dfrac{12^2}{16^2} = \dfrac{9}{16}$

   c) On note x le côté du carré. x est solution de l'équation : $\dfrac{(x-4)^2}{x^2} = 0,01$ qui, puisque x est positif, se simplifie en $\dfrac{x-4}{x} = 0,1$. On en tire $\dfrac{40}{9}$.

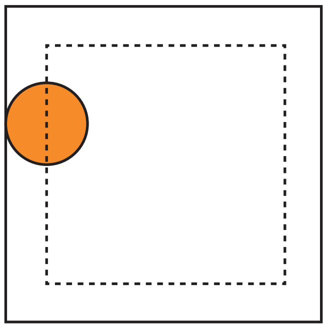


figure 1

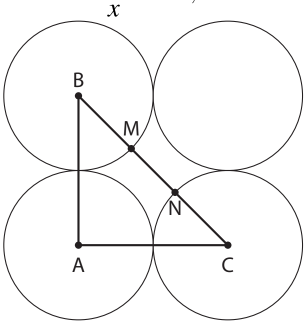


figure 2

2. a) La diagonale du carré est égale à $6\sqrt{2}$ cm or la distance $MN = 6\sqrt{2} - 6$ cm (figure 2). Cette distance est donc inférieure au diamètre du palet.

   b) La partie est gagnée uniquement si le centre du palet est à l'intérieur du disque de rayon 1 cm concentrique avec le disque du pavage.

   La probabilité de gagner est donc égale à : $\dfrac{\pi \times 1^2}{6^2} = \dfrac{\pi}{36}$, puisque l'aire du carré dessiné dans l'énoncé est égale à 36.

3. On s'inspire de la méthode de la question 2.

   - On montre qu'on ne peut pas gagner la partie si le centre du palet est situé à l'extérieur d'un des disques du pavage.
   - On constate alors que le motif du pavage peut être inscrit dans un hexagone régulier dans lequel un des cercles du pavage est inscrit (figure 3).
   - On calcule l'aire de l'hexagone en question en le décomposant en 6 triangles équilatéraux de hauteur $CH = 3$ cm, donc de côté$CA = CB = 2\sqrt{3}$ cm.

     L'aire de l'hexagone est donc égale à $\dfrac{1}{2} \times 2\sqrt{3} \times 3 \times 6$, soit $18\sqrt{3}$ cm².

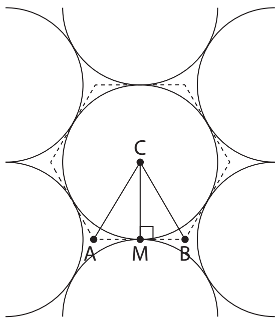


figure 3

   - La probabilité cherchée est égale au quotient entre l'aire du disque de rayon 1 et l'aire de l'hexagone, soit $\dfrac{\pi}{18\sqrt{3}}$ (environ 0,1).

4.

- Le motif de base est constitué pour les trois quarts de triangles et pour un quart du carré.
- La probabilité de gagner lorsque le centre du palet est à l'intérieur du carré a été calculée à la question 1.
- Il ne reste donc plus qu'à calculer la probabilité de gagner lorsque le centre du palet est à l'intérieur d'un triangle ABC isocèle et rectangle en A (figure 4).
  On a : $EI = AC - CM - KI - ED$.
  Or, on a : $CM = ED = 2$ et $KI = 2\sqrt{2}$ (hypoténuse d'un triangle IKL rectangle et isocèle en L).
  Il en résulte que $EI = EJ = 4 - 2\sqrt{2}$ cm.
  On en déduit que l'aire du triangle EIJ est égale à $12 - 8\sqrt{2}$ cm^2 ;

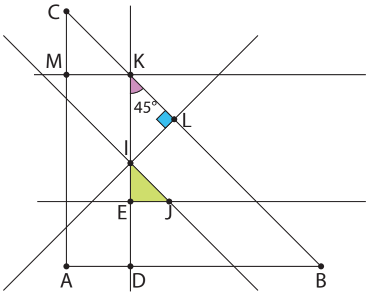


figure 4

- La probabilité de gagner lorsque le centre du palet est à l'intérieur du triangle est donc égale à $\dfrac{12-8\sqrt{2}}{32}$, soit encore $\dfrac{3-2\sqrt{2}}{8}$.
- La probabilité recherchée est donc égale à : $\dfrac{1}{4} \times \dfrac{9}{16} + \dfrac{3}{4} \times \dfrac{3-2\sqrt{2}}{8}$, soit encore $\dfrac{27-12\sqrt{2}}{64}$ (environ 0,157).

RETOUR AU SOMMAIRE

DIJON

Troisième exercice

Séries autres que S

Coccinelles

Éléments de solution

1. Pour $n = 3$, la somme est égale à 30
2. Pour $n = 6$:
   a) A l'aide du formulaire $1+2+3+4+5+6+7 = \dfrac{7times8}{2} = 28$. Le jeu contient 28 magnets.
   b) A l'aide d'un schéma, par calcul direct, la somme est égale à 168.
3. A l'aide du schéma de l'énoncé, si on effectue la somme en colonne des points de chaque coccinelle on obtient : 12 ; 9 ; 6 ; 3 correspondant (en lisant de droite à gauche) à une suite arithmétique de raison 3 et de premier terme 3.

   Si on réalise le même schéma pour $n = 4$ et que l ?on effectue la somme, toujours en colonne, on obtient : 20 ; 16 ; 12 ; 8 ; 4 correspondant à une suite arithmétique de raison 4 et de premier terme 4.

   On peut ensuite conjecturer que la suite correspondant à la somme des points de chaque colonne est une suite arithmétique de premier terme n et de raison n.

   Ainsi la somme des points de toutes les coccinelles vérifie : $S = (n+1)\dfrac{n(n+2)}{2}$.

   Comme l'association a réalisé une recette de 12 500 euros, ils ont donc vendu des magnets pour un total de 125 000 points. Grâce à la formule ci-dessus, on obtient $n(n+1)(n+2) = 250\,000$.

   $$n+2n+\cdots+(n+1)n \approx 125\,000.$$

   On en tire : $n(n+1)(n+2) \approx 250\,000$.

   L'examen d'un tableau de valeurs donne pour $n = 62$, une somme de 249 984 points. Le jeu est alors constitué de 2016 magnets.
4. L'entier n est quelconque.
   a) Le jeu est constitué de $\dfrac{1}{2}(n+1)(n+2)$ magnets. Attention à bien compter le magnet composé des deux coccinelles avec un 0, ce qui donne $(n+1)$ termes.
   b) La somme des points vaut $\dfrac{1}{2}n(n+1)(n+2)$.
   c) Le nombre moyen de points par magnet est égal à n. Il suffit d'effectuer le quotient entre la somme totale des points par le nombre de magnets

RETOUR AU SOMMAIRE

GRENOBLE

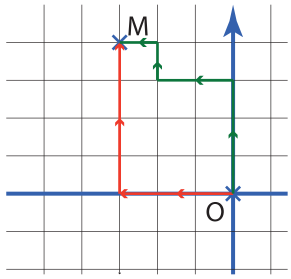
Premier exercice

Toutes séries

Taxis à Mathville

Éléments de solution

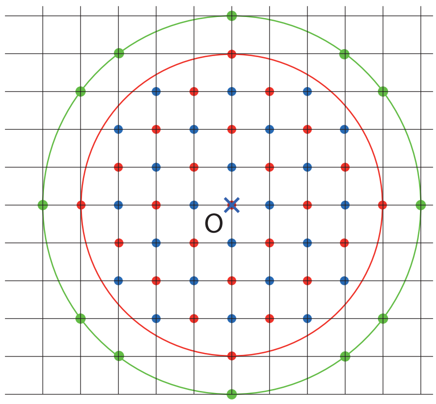
1. a) *Le musée des mathématiques se situe au point* M(-3 ; 4). *Vérifier que la taxi-distance de ce point au point O est égale à 7.*
   Il existe plusieurs chemins qui réalisent la plus courte taxi-distance : pour chacun d'entre-eux, il y a au total 3 déplacements horizontaux et 4 déplacements verticaux, on a alors $t(O;M) = 3+4 = 7$



   b) *Plus généralement, quelle est la taxi-distance entre deux points* $A(x_A;y_A)$ *et* $B(x_B;y_B)$?
   Si on note x le plus grand (resp x' le plus petit) des deux nombres x_A et x_B, les plus courts chemins du point A au point B sont ceux qui comportent $x-x'$ déplacements horizontaux et $y-y'$ déplacements verticaux, la taxi-distance est alors $(x-x')+(y-y')$, ce qui peut s'écrire : $t(A;B) = |x_B - x_A| + |y_B - y_A|$.

2. *Un taxi-cercle.*
   On appelle taxi-cercle de centre O et de rayon R (R nombre entier positif) l'ensemble des points du quadrillage situés à une taxi-distance égale à R du point O, et taxi-disque l'ensemble des points du quadrillage situés à une taxi-distance inférieure ou égale à R du point O

   a) *Reproduire la figure ci-jointe et représenter*
   - en vert le taxi-cercle de centre O et de rayon 6.
   - en rouge les points du taxi-disque centre 0 de rayon 5 situés à une distance paire du point O.
   - en bleu les points du taxi-disque centre 0 de rayon 5 situés à une distance impaire du point O.

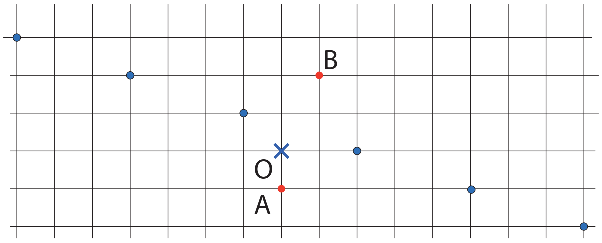


   b) *Quel est le nombre de points d'un taxi-cercle de rayon R ?*
   Un taxi-cercle de rayon R est l'ensemble des points à coordonnées entières d'un carré de centre O. Il y a sur chacun des côtés $R+1$ points, soit au total $4(R+1)-4 = 4R$ points.

   c) *Quel est le nombre de points d'un taxi-disque de rayon R ?*
   En observant la figure précédente, on constate qu'il y a dans ce taxi-disque $(R+1)^2$ points bleu et R^2 points rouges, soit au total $2R^2+2R+1$ points.
   On peut aussi ajouter le nombres de points des différents taxi-cercles inclus dans le taxi-disque, ce qui fait $N = 4R+4(R-1)+\cdots+4+1$, Il reste alors à calculer la somme de termes d'une suite arithmétique.

3. *Taxi-médiatrices.*
   On appelle taxi-médiatrice d'un couple de points (A ; B) l'ensemble des points du quadrillage situés à égale taxi-distance des points A et B.

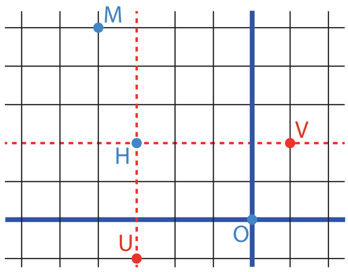
a) *Placer au moins 5 points de la taxi-médiatrice de (A ; B) lorsque* A(0 ;-1) et B(1 ;2).



En bleu sur la figure ci-dessus les points du quadrillage qui font partie de la taxi-médiatrice.

b) *) Évariste habite un point du quadrillage situé à égale taxi-distance de deux points U et V. Pourquoi peut-on alors affirmer que la taxi-distance de U à V est paire ?*

Si les points U et V sont confondus alors la taxi-distance de U à V est nulle, elle est donc paire.
Soit M$(x;y)$ le lieu de résidence d'Evariste : $t(U;M)=t(V;M)$.



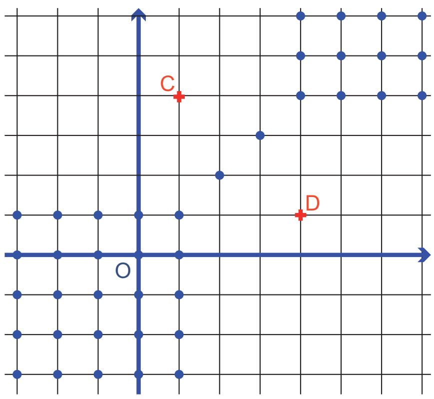
Supposons dans un premier temps que $x_U \leqslant x_V$ et $y_U \leqslant y_V$.
Soit H le point de coordonnées $(x_U;y_V)$, le chemin UH–HV est l'un des chemins les plus courts de U à V, on a alors $t(U;V)=t(U;H)+t(H;V)$
Pour la même raison si M (point de la zone 1 du quadrillage, $t(U;M)=t(U;H)+t(H;M)$ et $t(V;M)=t(V;H)+t(H;M)$ on en déduit que $t(U;M)=t(V;M)$ équivaut à $t(U;H)=t(V;H)$ il en résulte que $t(U;V)=2t(U;H)$qui est donc un entier pair.

Les autres cas de figure se traiteraient de façon analogue, pour aboutir dans chaque cas à la parité de la la taxi-distance de U à V .
Conséquence : La taxi-médiatrice d'un couple de points à taxi-distance impaire l'un de l'autre est vide !

c) *Des points C et D sont tels que $x_C = y_D$ et $x_D = y_C$. Déterminer la taxi-médiatrice de (C ; D).*
Remarquons que $t(C;D)=|x_D-x_C|+|y_D-y_C|=|x_D-y_D|+|y_D-x_D|=2|x_D-y_D|$ cette distance est paire, il se peut donc que la taxi-médiatrice ne soit pas vide.
Un point M$(x;y)$ un point du quadrillage.
M est sur la taxi-médiatrice de (C ; D) si et seulement si $|x-x_C|+|y-y_C|=|x-x_D|+|y-y_D|$ ce qui équivaut à $|x-x_C|+|y-y_C|=|x-y_C|+|y-x_C|(1)$ - si $x \geqslant \max(x_C;y_C)$ et $y \geqslant \max(x_C;y_C)$ alors (1) équivaut à $x-x_C+y-y_C=x-y_C+y-x_C$ ce qui est toujours vrai ainsi, tout point de ce quart de plan est un point de la taxi-médiatrice.

- Il en est de même pour le quart de plan défini par : $x \leqslant \max(x_C;y_C)$ et $y \leqslant \max(x_C;y_C)$
- les autres points de la taxi-médiatrice sont les points tels que $\max(x_C;y_C) \leqslant x = y\max(x_C;y_C)$

On peut alors représenter la taxi-médiatrice de (U ;V) :



RETOUR AU SOMMAIRE

GRENOBLE

Deuxième exercice

Série S

Accepter les différences !

Éléments de solution

1. 50 – 30 – 20 – 10 – 10 – 0 et 50 – 31 – 19 – 12 – 7 – 5 – 2 – 2 – 0.
2. On peut considérer 20 – 13 – 7 – 6 – 1 – 1 – 0 ou 8 – 5 – 3 – 2 – 1 – 1 – 0.
3. Pour $x_1 > 1$, on pose $x_2 = x_1 + 1$, la séquence x_1 – $(x_1 + 1)$ – 1 – 1 – 0 est de longueur 5.
   Sinon la séquence 1 – 3 – 2 – 1 – 0 convient.
4. On peut remarquer que pour tout k entier naturel supérieur ou égal à 3 :
   $x_{k+1} = \min(|x_j - x_i| ; 0 < i < j < k+1) = \min(x_k ; \min(|x_k - x_i| ; 0 < i < k)) \leqslant x_k$. La suite (x_k) est à termes positifs et ne prend que des valeurs entières : elle ne peut donc être strictement décroissante. Il existe donc $k \in \mathbb{N}$ tel que $x_{k+1} = x_k$, mais alors $x_{k+2} = 0$.

RETOUR AU SOMMAIRE

GRENOBLE

Troisième exercice

Séries autres que S

Nombres prisonniers

Éléments de solution

Dans tout cet exercice, les nombres considérés sont des nombres entiers positifs non nuls. De plus, lorsque l'on considère un nombre à plusieurs chiffres, le chiffre de gauche n'est jamais nul.

On dira qu'un nombre A est ***prisonnier*** du nombre B si on peut obtenir le nombre A en éliminant éventuellement certains chiffres de B.

> Ainsi, 13 est prisonnier de 153 (en rayant le chiffre 5),
> 105 est prisonnier de 31056 (en rayant les chiffres 3 et 6),
> 15 est prisonnier de 15 (sans rayer de chiffre)
> 23 a trois prisonniers : 2 ; 3 et 23.
> 22 a deux prisonniers : 2 et 22.
> alors que 11 n'est pas prisonnier de 15 et que 13 n'est pas prisonnier de 351.

1. Nombre de prisonniers d'un entier.
   a) Quels sont tous les nombres à deux chiffres qui ont exactement deux prisonniers ?
   b) Quels sont tous les nombres à deux chiffres qui ont exactement trois prisonniers ?
   c) Quels sont tous les prisonniers de 203 ?
   d) Existe-t-il des nombres à trois chiffres qui ont huit prisonniers distincts ?
   e) Parmi les nombres à cinq chiffres non nuls, quels sont ceux qui ont le moins de prisonniers ? Combien ont-ils de prisonniers ?
   f) Parmi les nombres à cinq chiffres non nuls, quels sont ceux qui ont le plus de prisonniers ? Combien ont-ils de prisonniers ?
2. Relations entre prisonniers.
   a) Démontrer que si A est prisonnier de B alors A est inférieur ou égal à B.
   b) Démontrer alors que si A est prisonnier de B et B prisonnier de A alors ces nombres sont égaux.
   c) Si A est prisonnier de B et B prisonnier de C, que peut-on en déduire concernant A et C ?
   d) Existe-t-il au moins un nombre non nul A tel que A soit prisonnier de $(3A)$?
   e) Existe-t-il au moins un nombre non nul A tel que A soit prisonnier de $(2A)$?
3. Gardien d'un ensemble de nombres.
   On appelle gardien d'un ensemble E de nombres un nombre G tel que tout nombre de l'ensemble E est prisonnier de G.
   a) Construire un gardien de l'ensemble $\{21 ; 26 ; 201 ; 206\}$.
      Ce gardien est-il unique ?
   b) Montrer que tout ensemble fini de nombres a un gardien qui est plus petit que les autres.

RETOUR AU SOMMAIRE

GUADELOUPE – MARTINIQUE

Premier exercice

Toutes séries

Black dices : le black jack aux dés

Éléments de solution

Préliminaires

1. Les diverses sommes sont obtenues à partir des 36 configurations possibles du résultat affiché par chacun des dés ; elles sont visualisées dans le tableau ci-contre :

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

On obtient donc le tableau de probabilités suivant :

S	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$p(S)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Partie 1 : Stratégie pour Alice

2. Bob joue son deuxième tour, et obtient un total de 12.
   a) Puisqu'Alice a obtenu 8 au premier tour, il faut qu'elle obtienne au moins 8 au second tour en lançant deux dés pour dépasser 15, donc 8, 9, 10, 11 ou 12.
   En utilisant les résultats de la question 1., la probabilité qu'Alice dépasse 15 avec la stratégie 2 est :
   $$p = \frac{5}{36} + \frac{4}{36} + \frac{3}{36} + \frac{2}{36} + \frac{1}{36} = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}.$$
   b) Pour battre Bob qui a obtenu 12, Alice doit obtenir sur les deux tours 13, 14 ou 15, soit 5, 6 ou 7 au second tour. Elle doit donc lancer un ou deux dés.
   - Avec un seul dé (stratégie 1) : elle doit obtenir 5 ou 6 (impossible d'obtenir 7 avec un seul dé !), et la probabilité pour que cela se produise est : $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$.
   - Avec deux dés (stratégie 2) : elle devra obtenir 5, 6 ou 7 pour gagner, avec une probabilité de : : $\frac{4}{36} + \frac{5}{36} + \frac{6}{36} = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$.

   Puisque $\frac{1}{3} = \frac{4}{12} < \frac{5}{12}$, **la stratégie 2 est plus avantageuse.**
3. En raisonnant de la même façon que dans 2.b), si Bob obtient un total de 11 après son deuxième tour, Alice devra obtenir un total compris entre 12 et 15 pour le battre. Il lui faut donc un score compris entre 4 et 7 à son deuxième tour.
   - Avec un seul dé (stratégie 1) : elle doit obtenir 4, 5 ou 6 pour gagner, et la probabilité pour que cela se produise est : $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$.

- Avec deux dés (stratégie 2) : elle devra obtenir 4, 5, 6 ou 7 pour gagner, avec une probabilité de : $\dfrac{3}{36}+\dfrac{4}{36}+\dfrac{5}{36}+\dfrac{6}{36}=\dfrac{18}{36}=\dfrac{1}{2}$.

On constate que les deux stratégies donnent la même probabilité de gagner, soit $\dfrac{1}{2}$, **les stratégies 1 et 2 sont aussi avantageuses l'une que l'autre**.

Remarque : on peut suggérer tout de même ici à Alice de choisir la stratégie 1, qui d'une part lui évite la défaite par dépassement de 15, et d'autre part maximise la probabilité de faire un score égal à celui de Bob ($\frac{1}{6}$ contre $\frac{1}{18}$).

Partie 2 : Stratégie pour Bob

On suppose que Bob et Alice ont tous les deux obtenus 8 au premier tour. Bob doit jouer son deuxième tour, et on suppose qu'Alice jouera ensuite en tenant compte du résultat de Bob et en choisissant la stratégie qui optimise ses chances de victoires.

4. A la question 2.b), on a vu que si Bob a obtenu un total de 12, Alice, qui cherche à optimiser ses chances de victoire, doit choisir la stratégie 2. Cette stratégie la fait gagner avec une probabilité de $\dfrac{5}{12}$, et donc perdre avec une probabilité de $1-\dfrac{5}{12}=\dfrac{7}{12}$.

   Ainsi, la probabilité de victoire de Bob s'il obtient 4 au second tour est $\dfrac{7}{12}$.

5. A la question 3., on a vu que si Bob obtient un total de 11, Alice peut choisir indifféremment la stratégie 1 ou 2. Dans les deux cas, elle gagne avec une probabilité de $\dfrac{1}{2}$ et donc perd avec une probabilité de $\dfrac{1}{2}$. **Bob a donc une probabilité de victoire de $\dfrac{1}{2}$ s'il obtient 3 au second tour**.

   Remarque : Dans cette question, on demandait d'expliquer le choix d'Alice. La question est déroutante puisque les stratégies 1 et 2 donnent la même probabilité de victoire.

6. Suivant qu'il choisisse la stratégie 0, 1 ou 2, Bob est en mesure d'obtenir un score allant de 0 à 12 au second tour, soit un total de 8 à 20 sur les deux tours. S'il obtient un score supérieur à 7 au second tour, il dépassera 15 et perdra.

Score de Bob au 2nd tour	0	1	2	3	4	5	6	7	entre 8 et 12
Probabilité de victoire	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{25}{36}$	$\frac{5}{6}$	1	0

Quelques justifications :

- Si Bob fait 0 (stratégie 0), Alice est sûre de gagner en jouant un seul dé, donc la probabilité de victoire est nulle.
- Si Bob fait 1, Alice gagnera en faisant un score de 2 à 7, ce qui est réalisé avec une probabilité de $\dfrac{5}{6}$ avec la stratégie 1 (score de 2 à 6), et une probabilité de $\dfrac{1+2+3+4+5+6}{36}=\dfrac{7}{112}$(avec la stratégie 2. Alice suivra donc la stratégie 1 (pour optimiser ses chances de victoire), ce qui donne à Bob une probabilité de victoire de $1-\dfrac{5}{6}=\dfrac{1}{6}$.
- Si Bob fait 2, on calcule de même que la stratégie 1 est la meilleur pour Alice ; elle gagne alors avec une probabilité de $\dfrac{2}{3}$ (contre $\dfrac{5}{9}$ avec la stratégie 2), d'où la probabilité de $\dfrac{1}{3}$ de victoire de Bob.
- Les probabilités pour un score de 3 ou 4 ont déjà été calculées dans les questions 3. et 4.
- Pour un score de 5 ou 6 au second tour pour Bob, on calcule que la stratégie 2 est la meilleure pour Alice, avec des probabilités de victoire valant respectivement $\dfrac{5+6}{36}=\dfrac{11}{36}$ (Alice doit faire 6 ou 7), et $\dfrac{6}{36}=\dfrac{1}{6}$ (Alice doit faire 7), d'où les probabilités de victoire de $\dfrac{25}{36}$ et $\dfrac{5}{6}$ de Bob.
- Enfin, si Bob obtient 7 au second tour, son score total est 15 : ce n'est pas la peine qu'Alice joue son deuxième tour, Bob a déjà gagné !

7. Il est clair que la stratégie 0 est à rejeter, car Bob est alors certain de perdre. Pour déterminer si Bob doit lancer un ou deux dés, il faut calculer la probabilité de victoire dans chacun des deux cas.
S'il choisit la stratégie 1, on obtient le tableau suivant, en imaginant un arbre de choix :

Score obtenu par Bob par la stratégie 1	1	2	3	4	5	6
Probabilité du score	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
Probabilité que Bob gagne (Alice optimise son jeu)	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{21}{36}$	$\frac{25}{36}$	$\frac{30}{36}$
Probabilité que Bob gagne en faisant ce score avec la stratégie 1	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{21}{216}$	$\frac{25}{216}$	$\frac{5}{36}$

En faisant la somme de la dernière ligne, on obtient la probabilité que Bob gagne avec la stratégie 1, soit : $\frac{14}{27} \approx 0,518$.
S'il choisit la stratégie 2, on obtient le tableau suivant :

Score obtenu par Bob par la stratégie 2	2	3	4	5	6	7	entre 8 et 12
Probabilité de ce score	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{15}{36}$
Probabilité que Bob gagne (Alice optimise son jeu)	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{21}{36}$	$\frac{25}{36}$	$\frac{30}{36}$	1	0
Probabilité que Bob gagne en faisant ce score avec la stratégie 2	$\frac{1}{108}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{7}{144}$	$\frac{25}{324}$	$\frac{25}{216}$	$\frac{6}{36}$	0

En faisant la somme de la dernière ligne, on obtient la probabilité que Bob gagne avec la stratégie 2, soit : $\frac{577}{1296} \approx 0,445$

On a $\frac{14}{27} > \frac{577}{1296}$, donc Bob doit choisir la stratégie 1, s'il veut optimiser ses chances de victoire.

RETOUR AU SOMMAIRE

GUADELOUPE - MARTINIQUE

Deuxième exercice

Série S

Simplifications scandaleuses

Éléments de solution

1. $\dfrac{199}{995}$ est simplifiable de manière scandaleuse, en effet : $\dfrac{199}{995} = \dfrac{199}{199\times 5} = \dfrac{1}{5}$.
   En revanche, $\dfrac{2777}{7773}$ n'est pas simplifiable de manière scandaleuse $\dfrac{2777}{7773} \neq \dfrac{2}{3}$, en effet $7773 = 3\times 2591$, mais 32777 n'est pas divisible par 2 ou encore $2\times 2591 \neq 2777$
2. $\overline{bb\ldots bbc} = b\times 10^n + b\times 10^{n-1} + b\times 10^{n-2} + \cdots + b\times 10^1 + c$
3. On utilise la formule rappelée.
4. De même : $b\times 10\times\left(10^{n-1} + 10^{n-2} + \cdots + 10?^1 + 1\right) + c = b\times 10\times \dfrac{10^{n-1}}{9} + c$.
5. Si $\dfrac{\overline{abb\ldots bb}}{\overline{bb\ldots bbc}} = \dfrac{a}{c}$, alors d ?après la question précédente : $\dfrac{a\times 10^n + b\times\dfrac{10^n-1}{9}}{b\times 10\times\dfrac{10^n-1}{9}+c} = \dfrac{a}{c}$.
   d ?où : $(a\times 10^n + b\times \dfrac{10^n-1}{9}\times c = \left(b\times 10\times\dfrac{10^n-1}{9}+c\right)\times a$, donc en développant :
   $ac\times 10^n - ac = ab\times 10\times\dfrac{10^n-1}{9} - bc\times 10\times \dfrac{10^n-1}{9}$ d'où $ac\times(10^n-1) = \dfrac{10^n-1}{9}\times b\times(10a-c)$.
   Comme $n>0$, $10^n - 1 \neq 0$, on peut simplifier et on obtient : $b(10a-c) = 9ac$. a et c sont des chiffres, donc $10a - c \neq 0$ d'où : $b = \dfrac{9ac}{10a-c}$.
6. $\dfrac{a}{c} = \dfrac{1}{2}$ donc $c = 2a$, d'après la question précédente, on a nécessairement $b = \dfrac{9ac}{10a-c} = \dfrac{18a^2}{8a} = \dfrac{9a}{4}$.
   Pour $a = 4$, $b = 9$ et $c = 8$, on vérifie que $\dfrac{499}{998} = \dfrac{4}{8} = \dfrac{1}{2}$.
   La fraction $\dfrac{499}{998}$ est une fraction égale à $\dfrac{1}{2}$ et simplifiable de manière scandaleuse.
7. $\dfrac{a}{c} = \dfrac{2}{3}$ donc $c = \dfrac{3}{2}a$, on a nécessairement $b = \dfrac{9ac}{10a-c} = \dfrac{27a^2}{17a} = \dfrac{27a}{17}$.
   Pour toute valeur du chiffre a, entier entre 1 et 9, $\dfrac{27a}{17}$ n'est pas un chiffre.
   Il n'existe pas de fraction simplifiable de manière scandaleuse égale à $\dfrac{2}{3}$.

RETOUR AU SOMMAIRE

MARTINIQUE

Troisième exercice

Séries autres que S

Les boîtes

Éléments de solution

1. On peut les trier en 3 manœuvres :
 1ère manœuvre avec les deux premières, on obtient : a c d b ;
 2ème manœuvre avec les deux dernières, on obtient : a c b d ;
 3ème manœuvre avec celles des rangs 2 et 3, on obtient l'ordre demandé : a b c d.
 Il y a d'autres possibilités, par exemple : les deux premières, puis les trois dernières et enfin les deux dernières.
2. a) Il y a 6 ordres possibles pour les 3 boites : a b c ; a c b ; b a c ; b c a ; c a b, c b a.
 On obtient l'ordre « a b c », en une manœuvre des 3 boites avec l'ordre « c b a », en une manœuvre des deux premières avec l'ordre « b a c », en une manœuvre des deux dernières avec l'ordre « a c b ». Seuls trois ordres peuvent donner en seule manœuvre l'ordre « a b c ».
 Deux ordres ne peuvent permettre d'obtenir « a b c » en une manœuvre : « b c a » et « c a b ».
 Il n'est pas toujours possible de trier les 3 boites pour obtenir l'ordre « a b c ».

 b) D'après la question précédente, les deux ordres « b c a » et « c a b » qui ne permettent pas d'obtenir « a b c »en une manœuvre le permettent en deux manœuvres.
 Avec « b c a », par une première manœuvre sur les 3 boites, on obtient « a c b », puis sur les deux dernières, on obtient l'ordre voulue.
 On opère de même avec « c a b », première manœuvre sur les 3 boites : « b a c » puis deuxième manœuvre sur les deux premières pour obtenir l'ordre voulue.
 Il est donc possible de trier les 3 boites en au plus 2 manœuvres.
3. Si la dernière boite de l'ordre voulue est déjà bien placée en dernière position, d'après la question précédente, on peut trier les trois premières en au plus deux manœuvres pour obtenir l'ordre voulue.
 Si la dernière boite est placée à un autre rang, en inversant les boites à partir de ce rang, on fait une première manœuvre qui ramène cette boite au dernier rang et on opère comme précédemment.
 On peut donc toujours trier 4 boites en au plus 3 manœuvres.

RETOUR AU SOMMAIRE

LILLE

Premier exercice

Toutes séries

Les dominos

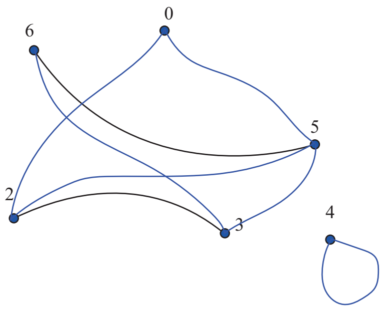
Éléments de solution

Partie 1

1. **Etude de la collection de pièces de Léon**

   a) De nombreuses possibilités ***qui utilisent toutes 7 pièces en excluant le « double-4 »*** que l'on ne peut connecter avec aucune autre. Exemple : (2–5 ; 5–0 ; 0–2 ; 2–3 ; 3–6 ; 6–5 ; 5–3)

   b) graphe ci-contre.
   On remarque à cette occasion que chaque ligne tracée représente une pièce déterminée et que les extrémités des lignes représentent les faces de la pièce de domino . . . la modélisation est faite . . .



   c) Un alignement de pièces correspondra donc à un parcours des lignes qui impose à chaque nouvelle ligne de partir du point où l'on vient d'arriver. On peut dire que la contiguïté de faces identiques garantit la continuité des lignes tracées. . . Et le fait que toutes les pièces soient employées une seule fois garantit que le graphe complet sera parcouru sans passer deux fois sur une même ligne. . .

2. **Étude générale d'un graphe**

   a) Un « point-étape », à chacune de ses occurrences, nécessite deux nouvelles arêtes : une pour y accéder, et une autre pour en partir. . . Le point-étape interviendra donc en tout un nombre pair de fois en tant qu'extrémité de ligne puisque notre itinéraire les emprunte toutes. Son degré sera donc pair.

   b) (S uniquement)
   Imaginons que l'on passe en revue toutes les lignes du graphe en attribuant à chaque extrémité de la ligne une valeur de « un point ». Lorsque nous aurons fini le « dépouillement », chaque point du graphe aura un « total de points » correspondant à son degré. . . Et nous aurons distribué en tout **le double** de points qu'il y a de lignes dans le graphe.
   La somme des degrés de tous les point du graphe est donc un nombre pair.
   En décomposant cette somme, on peut la considérer comme l'addition de la somme des degrés des points de degré pair, et de la somme des degrés des points de degré impair.
   L'ensemble des points de degré pair fournira fatalement une somme des degrés qui sera paire (car « **pair multiplié par pair donne pair** »). . . Il faut donc que la somme obtenue avec l'ensemble des points de degré impair fournisse également une somme des degrés qui soit un nombre pair.
   Or, un nombre impair de points de degré impair fournirait une somme de ces degrés qui serait un nombre impair (car « **impair multiplié par impair donne impair** »).
   Donc il est impossible, quel que soit le graphe, que les points de degré impair soient en nombre impair.

c) On sait déjà que, tant qu'on ne considère que les points-étapes dans un graphe permettant un chemin complet, tous les degrés sont pairs. Il n'y a donc plus qu'à envisager les point de départ et d'arrivée. Il n'y a besoin que d'une ligne pour sortir du point de départ et d'une ligne pour parvenir au point d'arrivée. Donc de deux choses l'une :

- **Soit ces deux points extrêmes ne coïncident pas**, auquel cas chacun d'eux aura un degré impair correspondant à son degré pair en tant que point-étape incrémenté de 1 pour la « sortie du point de départ », ou pour l'entrée au point d'arrivée. Il y aura donc dans ce cas deux points de degré impair.
- **Soit ils coïncident**, c'est-à-dire que le chemin se termine au même point dont il était parti, et le degré de ce point là se retrouve donc incrémenté de 2 points par rapport à ce qu'il avait déjà en tant que point-étape. Il n'y aura plus un seul point de degré impair. On peut dire alors que « le graphe boucle », et dans ce cas tout point peut être choisi comme point de départ (et d'arrivée. . .)

Au bilan, pour qu'un chemin complet soit envisageable, il faut que le nombre de points de degré impair soit 0 ou 2.

d) En revanche, si cette condition est nécessaire, elle n'est pas suffisante car dans le graphe initial de Léon, chaque point admet bien un degré pair sauf le 2 et le 3. On respecte bien la condition « 0 ou 2 points de degré impair » (en l'occurrence 2 points de degré impair), pourtant nous avons constaté que le « double-4 » ne pouvait se connecter à aucune autre pièce et qu'un chemin complet était dès lors impossible

3. **Retour à la collection de Léon**

Léon décide de retirer le « double-4 » de sa collection, afin de parvenir à créer des chemins complets sur le graphe.

a) Les points de départ et d'arrivée du chemin complet doivent être les points de degré impair, il faudra donc commencer par le 2 ou par le 3 si on veut aligner les 7 pièces restantes (en retirant le « double-4 ».

b) Décompte :
Principe : on peut calculer tous les itinéraires partant de 2 pour finir en 3, et on n'aura plus qu'à multiplier par deux (pour les « trajets retours ». . .), mais comment être sûr de ne pas en oublier ? Il apparaît intéressant de s'intéresser au nombre d'arêtes à parcourir avant de repasser en 2 (qui ne peut être qu'une fois point-étape), ce « cycle » peut être de 3 lignes (minimum) à 6 lignes (maximum).

- **Pour 3 lignes**, 2 - ? - ? - 2 - ? - ? - ? - 3
  1ère option :
  démarrage : 2-5-0-2. . . On remarque qu'on peut aussi faire cette boucle dans l'autre sens, et qu'on est obligé ensuite de finir par une autre boucle (3-5-6-3)dont le sens est encore indifférent, soit 4 itinéraires différents.
  2ème option :
  démarrage : 2-3-5-2. . . là encore, on a deux sens de parcours, mais la suite est complètement déterminée car on doit finir par 6-3, soit deux itinéraires.
  Bilan : 6 chemins complets démarrant de 2.
- **Pour 4 lignes**, encore deux options :
  2-5-6-3-2 (dans un sens ou dans l'autre, et fin de parcours déterminée),
  ou 2-0-5-3-2 (dans un sens ou dans l'autre, fin de parcours déterminée).
  Bilan : 2 + 2 = 4 chemins complets démarrant de 2
- **Pour 5 lignes**,
  2-0-5-6-3-2. . . (dans un sens ou dans l'autre, et fin de parcours déterminée).
  Bilan : 2 chemins complets démarrant de 2.
- **Pour 6 lignes**,
  2-5-6-3-5-0-2 (dans un sens ou dans l'autre, fin de parcours déterminée),
  ou le 2-5-3-6-5-0-2 (dans un sens ou dans l'autre, fin de parcours déterminée).
  Bilan : encore 4 chemins complets démarrant de 2.

BILAN FINAL : $(6+4+2+4)\times 2 = 32$ chemins complets distincts répertoriés.

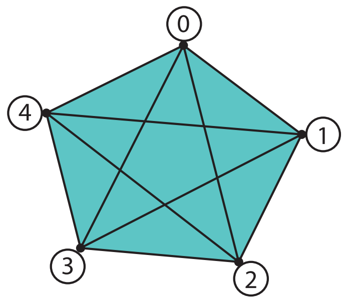
Partie 2

1. Voici des graphes illustrant que l'absence d'intersection est possible pour $N = 3$, mais impossible pour $N = 4$.
   Le graphe pour $N = 3$ est constructible en évitant les lignes sécantes (...comme il n'y a que deux « diagonales », il suffit d'en dessiner une à l'intérieur du quadrilatère et l'autre à l'extérieur).
   En revanche, pour $N = 4$, il y a 5 « diagonales » à tracer...on peut en placer deux non sécantes à l'intérieur et deux non sécantes à l'extérieur, mais la dernière, entre A et B, quel que soit le choix (intérieur ou extérieur) devra couper une autre « diagonale ».
2. a) Pour $N = 4$ on peut considérer qu'il y a 5 valeurs de face (0,1,2,3,4), le tableau qui associerait tous les couples formés par deux valeurs prises dans cet ensemble aurait donc 25 cases dont 5 correspondraient aux « doubles » mais attention ! Le couple (2,4) et le couple (4,2) constituent la même pièce de domino ! Donc, il faudrait considérer tous les doubles, et y ajouter seulement la moitié des autres couples :
   $5 + \frac{20}{2} = 15.$
   Remarque : on peut faire de plusieurs autres façons...

   b) *S uniquement*
   Plutôt que de généraliser la méthode précédente, considérons que l'on dispose toutes les pièces du jeu de manière triangulaire, en ajoutant une nouvelle valeur de face à chaque ligne :

   0-0
   0-1 1-1
   2-0 2-1 2-2
   3-0 3-1 3-2 3-3
   etc.

   On remarque que le nombre de pièces du jeu complet sera forcément un nombre « triangulaire » ! (cf le commentaire historique)
   $1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$
   (on vérifie que cela « marche » avec $n = 5$,
   on trouve $1+2+3+4+5 = 5 \times \frac{6}{2} = 15$)
3. a) Voici le graphe correspondant



   b) Recensons les degrés du graphe correspondant (haut de page)

Face	0	1	2	3	4
Degré	6	6	6	6	6

   c) Tous les degrés sont pairs. Et tout point est connectable à n'importe quelle autre par une ligne, donc le graphe respecte bien les conditions pour permettre un chemin complet.

   d) Il faut en outre que le point de départ et le point d'arrivée soient confondus pour n'avoir aucun point de degré impair. On termine donc le chemin complet sur son point de départ. (le graphe « boucle »)

RETOUR AU SOMMAIRE

LILLE

Deuxième exercice

Série S

Coffre-fort lourd

Éléments de solution

Partie 1

1. *A un instant donné, le code d'ouverture est,* $528G$ *quel sera le nouveau code d'ouverture si Monsieur Gauss fait la demande d'un changement de code ? Justifier la réponse.* Si le code est $528G$, alors $x' = -5+2-16 = -19 \equiv 1 \mod 10$ (-19 devient $-19+10+10 = 1$), $y' = -7+10 = 3$, $z' = 11-10 = 1$
   G est décalé de $5+2+8 = 15$, donc devient V.
   Le nouveau code est $131V$

2. a) *Existe-t-il des codes se terminant par la lettre P qui se transforment en le code* $461E$ *? Justifier la réponse.* Soit un code se terminant par la lettre P, alors il est de la forme $xyzP$. Il se transforme en le code $461E$ alors le décalage entre la lettre E et P donne $x+y+z = 15$.
   Donc x ; y et z sont solutions du système $\left\{\begin{array}{rcll} -x+y-2z &=& 4 & (1)\\ -z+1 &=& 6 & (2)\\ x-y+z &=& 1 & (3)\\ x+y+z &=& 15 & (4)\end{array}\right.$
   (2) donne $z = -5$ qui devient $z = -5+10 = 5$, on trouve alors x et y en résolvant
   $\left\{\begin{array}{rcll} -x+y-10 &=& 4 & (1)\\ x-y &=& 6 & (2)\\ x+y &=& 10 & (3)\end{array}\right.$
   d'où les deux systèmes à résoudre :
   $\left\{\begin{array}{rcll} x-y &=& 6 & (1)\\ x+y &=& 10 & (2)\end{array}\right.$ ou $\left\{\begin{array}{rcll} x-y &=& -4 & (1)\\ x+y &=& 10 & (2)\end{array}\right.$
   Ce qui donne $x = 3$ et $y = 7$, ou bien $x = 8$ et $y = 2$.
   Les codes $\boxed{375P}$ et $\boxed{825P}$ se transforment en le code $\boxed{461E}$.

   b) *Même question pour des codes se terminant par la lettre* Q .
   Q se transforme en E, donc $x+y+z = 14$. On reprend le même système $\left\{\begin{array}{rcll} -x+y-2z &=& 4 & (1)\\ -z+1 &=& 6 & (2)\\ x-y+z &=& 1 & (3)\\ x+y+z &=& 14 & (4)\end{array}\right.$
   d'où $z = 5$ et $\left\{\begin{array}{rcll} x-y &=& -4 & (1)\\ x+y &=& 9 & (2)\end{array}\right.$ ou $\left\{\begin{array}{rcll} x-y &=& 6 & (1)\\ x+y &=& 9 & (2)\end{array}\right.$
   mais alors le premier système donne $2x = 5$ et le deuxième $2x = 15$, ce qui est impossible, donc il n'y a pas de code tel que Q se transforme en E.

3. *Existe-t-il des codes dont la lettre reste invariante après un changement de code ? Justifier la réponse.*
   Soit le code $xyzLETTRE$, $LETTRE$ appartenant à l'ensemble des 26 lettres de l'alphabet. La lettre reste invariante après un changement si $x+y+z = 26$ ou 0. Le deuxième cas donne les codes $000LETTRE$.
   Dans le deuxième cas, sachant que x, y et z sont compris entre 0 et 9, seule la somme $26 = 9+9+8$ convient.

Les codes solutions, autres que $000LETTRE$, sont $899LETTRE$, $989LETTRE$ ou $998LETTRE$. Donc $4 \times 26 = 104$ codes.

4. *Existe-t-il des codes dont la partie chiffrée est invariante après un changement de code ? Justifier la réponse.*

   Un code dont la partie chiffrée xyz reste invariante vérifie le système : $\left\{\begin{array}{rcll} -x+y-2z & = & x & (1) \\ -z+1 & = & y & (2) \\ x-y+z & = & z & (3) \end{array}\right.$

   ((3) donne $x=y$, y et z solutions de : $\left\{\begin{array}{rcll} y+2z & = & 0 & (1) \\ y+z & = & 1 & (2) \end{array}\right.$
   d'où $z=-1$ qui devient $z=9$, et alors $y=2$, d'où $x=2$.
   La partie chiffrée invariante est donc 229

5. *Existe-t-il des codes globalement invariants ? Justifier la réponse.*
   Un code $xyzLETTRE$ est invariant si et seulement si $xyz = 229$ et $x+y+z = 26$ ou 0. Ce qui est impossible.
   Il n'existe donc aucun code invariant ou de période 1.

6. a) *Monsieur Gauss a choisi le code* $123A$ *et après trois demandes successives de changement de code, a reçu par SMS le code* $229W$. *Choisir un code au hasard autre que le code* $123A$, *puis déterminer quel sera le code que Monsieur Gauss recevra par SMS après trois demandes successives de changement de code.*
   Quel que soit le code $xyzLETTRE$ choisi, après trois changements successifs, il devient $229LETTRE0$, et, de fait, la partie chiffrée devient invariante ensuite.

   b) *Que peut-on conjecturer ?*

   c) *Justifier la validité de cette conjecture.*
   Vérifier qu'après trois changements successifs, xyz est invariant.

7. *En utilisant les résultats des questions précédentes, justifier qu'il existe 26 codes d'ouverture de période 2.*
   Un code $xyzLETTRE$ sera invariant après deux changements successifs, ssi $xyz = 229$, et $2+2+9 = 13$, donc la lettre $LETTRE$ restera invariante aussi.
   Il y a donc autant de codes $229LETTRE$ invariants après deux changements que de lettres de l'alphabet, donc 26.

Partie 2

Soucieux de sécuriser le coffre-fort, Monsieur Gauss demande à l'entreprise qui commercialise le cadenas électronique, un code à six chiffres de la forme $xyztuv$, avec changement de code dans les mêmes conditions, à savoir par le biais d'une demande par téléphone.
L'algorithme qui transforme le code initial $xyztuv$ en le code $x'y'z't'u'v'$ est décrit ci-dessous :

x	y	z	t	u	v
$x' = x+z$	$y' = y-u$	$z' = v-u-1$	$t' = z-1$	$u' = t-y+1$	$v' = v-x+1$

On applique pour chaque valeur calculée à la deuxième ligne, la même règle de correction (décalage éventuel de 10, en plus ou en moins, et autant de fois que nécessaire, pour obtenir un chiffre entre 0 et 9 inclus).

Un code sera dit de « période N » s'il est globalement invariant après N changements de code exactement, autrement dit, si le code $xyztuv$, par exemple, après N changements successifs, se transforme en lui-même.

1. *Monsieur Gauss a demandé un changement de code, il reçoit par SMS le code suivant* 100901.
   Quel était le code initial avant sa demande ? Conclure.

   Il suffit de résoudre le système : $\left\{\begin{array}{rcl} x+z & = & 1 \\ y-u & = & 0 \\ v-u-1 & = & 0 \\ z-1 & = & 9 \\ t-y+1 & = & 0 \\ v-x+1 & = & 1 \end{array}\right.$ On trouve $xyztuv = 100901$. Le seul code invariant ou de période 1 est 100901.

2. Monsieur Gauss, ayant des aptitudes mathématiques, exige un algorithme évitant la possibilité qu'un code soit invariant ou de période 2.
   Le bureau d'étude de l'entreprise, qui commercialise les cadenas électroniques, propose alors de ne modifier

que le calcul de z', en remplaçant la formule actuelle par $z' = k \times v - u - 1$, dans laquelle k est un entier naturel.

a) *Expliquer pourquoi, s'il n'y a plus de code de période 2, alors il est impossible qu'il y ait un code de période 1 .*
Par contraposée : s'il existe un code de période 1, alors ce code sera de période 2.

b) *Vérifier que si k est nul, alors il n'y a plus de code de période 2.*
La condition $k =$ donne : $\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & x+z \\ y' & = & y-u \\ z' & = & -u-1 \\ t' & = & z-1 \\ u' & = & t-y+1 \\ v' & = & v-x+1 \end{array}\right.$
En composant deux fois de suite, on obtient, si $xyztuv$ est le code initial, le même code après deux changements successifs, d'où : $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & x+z-u-1 \\ y & = & 2y-t-u-1 \\ z & = & y-t-2 \\ t & = & -u-2 \\ u & = & -y+z+u \\ v & = & -2x-z+v+2 \end{array}\right.$
d'où $\left\{\begin{array}{lcll} z & = & u+1 & (1) \\ y & = & u+t+1 & (2) \\ y & = & z+t+2 & (3) \\ t & = & -u-2 & (4) \\ y & = & z & (5) \\ z & = & 2-2x & (6) \end{array}\right.$
on obtient alors, par exemple : $\left\{\begin{array}{lcl} y & = & z+1 \\ y & = & z \end{array}\right.$
ce qui est impossible. Donc il n'existe pas de code de période 2 si $k = 0$.

c) La condition $k = 0$ ne satisfait pas Monsieur Gauss, qui trouve que la formule $z' = -u - 1$ serait trop simple.
En étudiant la parité des chiffres du code initial, justifier que si k est un entier pair, alors il n'y aura forcément aucun code de période 2.

RETOUR AU SOMMAIRE

LILLE

Troisième exercice

Séries autres que S

Coffre-fort plume

Éléments de solution

Partie 1

1. *A un instant donné, le code d'ouverture est, 528G quel sera le nouveau code d'ouverture si Monsieur Gauss fait la demande d'un changement de code ? Justifier la réponse.* Si le code est $528G$, alors $x' = -5+2-16 = -19 \equiv 1 \mod 10$ (-19 devient $-19+10+10 = 1$), $y' = -7+10 = 3$, $z' = 11-10 = 1$
   G est décalé de $5+2+8 = 15$, donc devient V.
   Le nouveau code est $131V$
2. a) *Existe-t-il des codes se terminant par la lettre P qui se transforment en le code 461E ? Justifier la réponse.* Soit un code se terminant par la lettre P, alors il est de la forme $xyzP$. Il se transforme en le code $461E$ alors le décalage entre la lettre E et P donne $x+y+z = 15$.
   Donc x ; y et z sont solutions du système $\left\{\begin{array}{rcll} -x+y-2z & = & 4 & (1)\\ -z+1 & = & 6 & (2)\\ x-y+z & = & 1 & (3)\\ x+y+z & = & 15 & (4)\end{array}\right.$
   (2) donne $z = -5$ qui devient $z = -5+10 = 5$, on trouve alors x et y en résolvant
   $\left\{\begin{array}{rcll} -x+y-10 & = & 4 & (1)\\ x-y & = & 6 & (2)\\ x+y & = & 10 & (3)\end{array}\right.$
   d'où les deux systèmes à résoudre :
   $\left\{\begin{array}{rcll} x-y & = & 6 & (1)\\ x+y & = & 10 & (2)\end{array}\right.$ ou $\left\{\begin{array}{rcll} x-y & = & -4 & (1)\\ x+y & = & 10 & (2)\end{array}\right.$
   Ce qui donne $x = 3$ et $y = 7$, ou bien $x = 8$ et $y = 2$.
   Les codes $\boxed{375P}$ et $\boxed{825P}$ se transforment en le code $\boxed{461E}$.

   b) *Même question pour des codes se terminant par la lettre Q .*
   Q se transforme en E, donc $x+y+z = 14$. On reprend le même système $\left\{\begin{array}{rcll} -x+y-2z & = & 4 & (1)\\ -z+1 & = & 6 & (2)\\ x-y+z & = & 1 & (3)\\ x+y+z & = & 14 & (4)\end{array}\right.$
   d'où $z = 5$ et $\left\{\begin{array}{rcll} x-y & = & -4 & (1)\\ x+y & = & 9 & (2)\end{array}\right.$ ou $\left\{\begin{array}{rcll} x-y & = & 6 & (1)\\ x+y & = & 9 & (2)\end{array}\right.$
   mais alors le premier système donne $2x = 5$ et le deuxième $2x = 15$, ce qui est impossible, donc il n'y a pas de code tel que Q se transforme en E.
3. *Existe-t-il des codes dont la lettre reste invariante après un changement de code ? Justifier la réponse.*
   Soit le code $xyzLETTRE$, $LETTRE$ appartenant à l'ensemble des 26 lettres de l'alphabet. La lettre reste invariante après un changement si $x+y+z = 26$ ou 0. Le deuxième cas donne les codes $000LETTRE$.
   Dans le deuxième cas, sachant que x, y et z sont compris entre 0 et 9, seule la somme $26 = 9+9+8$ convient.

Les codes solutions, autres que $000LETTRE$, sont $899LETTRE$, $989LETTRE$ ou $998LETTRE$. Donc $4 \times 26 = 104$ codes.

4. *Existe-t-il des codes dont la partie chiffrée est invariante après un changement de code ? Justifier la réponse.*
   Un code dont la partie chiffrée xyz reste invariante vérifie le système : $\left\{\begin{array}{rcll} -x+y-2z & = & x & (1) \\ -z+1 & = & y & (2) \\ x-y+z & = & z & (3) \end{array}\right.$
   ((3) donne $x = y$, y et z solutions de : $\left\{\begin{array}{rcll} y+2z & = & 0 & (1) \\ y+z & = & 1 & (2) \end{array}\right.$
   d'où $z = -1$ qui devient $z = 9$, et alors $y = 2$, d'où $x = 2$.
   La partie chiffrée invariante est donc 229

5. *Existe-t-il des codes globalement invariants ? Justifier la réponse.*
   Un code $xyzLETTRE$ est invariant si et seulement si $xyz = 229$ et $x+y+z = 26$ ou 0. Ce qui est impossible.
   Il n'existe donc aucun code invariant ou de période 1.

6. a) *Monsieur Gauss a choisi le code* $123A$ *et après trois demandes successives de changement de code, a reçu par SMS le code* $229W$. *Choisir un code au hasard autre que le code* $123A$, *puis déterminer quel sera le code que Monsieur Gauss recevra par SMS après trois demandes successives de changement de code.*
   Quel que soit le code $xyzLETTRE$ choisi, après trois changements successifs, il devient $229LETTRE0$, et, de fait, la partie chiffrée devient invariante ensuite.

   b) *Que peut-on conjecturer ?*

   c) *Justifier la validité de cette conjecture.*
   Vérifier qu'après trois changements successifs, xyz est invariant.

7. *En utilisant les résultats des questions précédentes, justifier qu'il existe 26 codes d'ouverture de période 2.*
   Un code $xyzLETTRE$ sera invariant après deux changements successifs, ssi $xyz = 229$, et $2+2+9 = 13$, donc la lettre $LETTRE$ restera invariante aussi.
   Il y a donc autant de codes $229LETTRE$ invariants après deux changements que de lettres de l'alphabet, donc 26.

RETOUR AU SOMMAIRE

LIMOGES

Premier exercice

Toutes séries

Quatre moyennes

Éléments de solution

1. **Calculs de moyenne.**

   a) Le total est 40 champignons. Pour obtenir ce total, chacun devrait trouver 20 champignons. Il s'agit de la moyenne arithmétique : $\dfrac{10+30}{2}$.

   b) Le nombre de vue a été multiplié par 10, puis par 30, donc par 300. Si on note x le nombre par lequel on doit multiplier le nombre de vue chaque mois, on a $x^2 = 300$ donc $x = \sqrt{300}$.
   Il s'agit de la moyenne géométrique : $\sqrt{10 \times 30}$.

   c) Le temps mis pour parcourir 1 km à 10 km/h est $\dfrac{1}{10}$ h.
   Le temps mis pour parcourir 1 km à 30 km/h est $\dfrac{1}{30}$ h. Le temps total est $\dfrac{1}{10} + \dfrac{1}{30} = \dfrac{2}{15}$ h.
   Les 2 km ont été parcourus en $\dfrac{2}{15}h$, ce qui correspond à une vitesse moyenne de $\dfrac{2}{2/15} = 15$ km/h.
   Il s'agit de la moyenne harmonique : $\dfrac{1}{\dfrac{\frac{1}{10}+\frac{1}{30}}{2}} = \dfrac{2 \times 10 \times 30}{10+30} = 15$.

   d) L'aire totale des panneaux solaires est $\pi \times 10^2 + \pi \times 30^2 = 1000\pi$.
   Si on note r le rayon de deux panneaux solaires identiques ayant la même surface totale : $2 \times \pi r^2 = 1000\pi$ et donc $r = \sqrt{\dfrac{1000}{2}} = \sqrt{500}$. Il s'agit de la moyenne géométrique : $\sqrt{\dfrac{10^2+30^2}{2}}$.

2. **Partie géométrique**.

   a) $PQ = PM - QM = a - b$ donc $OP = \dfrac{PQ}{2} = \dfrac{a-b}{2} = \dfrac{30-10}{2} = 10$.
   On en déduit $OM = PM - OP = a - \dfrac{a-b}{2} = \dfrac{a+b}{2} = \dfrac{30+10}{2} = 20$.
   Il s'agit de la moyenne arithmétique.

   b) Dans le triangle ORM rectangle en O, $RM^2 = OR^2 + OM^2 = \left(\dfrac{a-b}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{a+b}{2}\right) = \dfrac{a^2+b^2}{2}$ après simplification.
   On a donc $RM = \sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}} = \sqrt{500}$.
   Il s'agit de la moyenne quadratique.

   c) Dans le triangle OGM rectangle en G, $GM^2 = OM^2 - OG^2 = \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{a-b}{2}\right) = ab$ après simplification. On a donc $GM = \sqrt{ab} = \sqrt{300}$.
   Il s'agit de la moyenne géométrique.

d) L'aire du triangle OGM est égale à $\dfrac{OM \times GH}{2}$ (avec la base [OM]), et aussi à $\dfrac{OG \times GM}{2}$ (avec la base [OG] ou [GM]).

On en déduit $\dfrac{OM \times GH}{2} = \dfrac{OG \times GM}{2}$ et donc $GH = \dfrac{OG \times GM}{OM} = \dfrac{\frac{a-b}{2} \times \sqrt{ab}}{\frac{a+b}{2}} = \dfrac{(a-b)\sqrt{ab}}{a+b} = \dfrac{20 \times \sqrt{300}}{40} = \dfrac{\sqrt{300}}{2}$ Dans le triangle HGM rectangle en H,$HM^2 = GM^2 - GH^2 = \left(\sqrt{ab}\right)^2 - \left(\dfrac{(a-b)\sqrt{ab}}{a+b}\right)^2 = ab - \dfrac{(a-b)^2 ab}{(a+b)^2}$.

En réduisant au même dénominateur et en développant le numérateur, on obtient : $HM^2 = \dfrac{4a^2b^2}{(a+b)^2}$ et finalement : $HM = \sqrt{\dfrac{4a^2b^2}{(a+b)^2}} = \dfrac{2ab}{a+b} = 15$.

Il s'agit de la moyenne harmonique.

e) Dans le triangle HGM rectangle en H, le côté [HM] est plus petit que l'hypoténuse [GM] : $HM \leqslant GM$.
Dans le triangle OGM rectangle en G : $GM \leqslant OM$.
Dans le triangle ORM rectangle en O : $OM \leqslant RM$.
On a donc $HM \leqslant GM \leqslant OM \leqslant RM$, et on en déduit les inégalités demandées :

$$H(a;b) \leqslant G(a;b) \leqslant A(a;b) \leqslant Q(a;b).$$

RETOUR AU SOMMAIRE

LIMOGES

Deuxième exercice

Toutes séries

Voyage à la surface de la Terre

Éléments de solution

1. La distance entre l'équateur et le pôle Nord est un quart de la longueur de l ?équateur : 10000 km.
2. Le seul point de départ possible dans l'hémisphère Nord est le pôle Nord.
3. *Remarque préliminaire* : les points A et D sont sur un même parallèle, étant situés tous les deux à 2000 km au nord de l'équateur.
   La distance entre B et C est 2000 km, c'est-à-dire un vingtième de la longueur de l'équateur.
   La distance entre D et A le long du parallèle est donc un vingtième de la longueur de ce parallèle, mais cette longueur est plus courte que celle de l'équateur. La distance entre D et A est donc inférieure à 2000 km.
   Le voyageur repasse donc par le point A, mais son point d'arrivée est plus loin à l'ouest.
4. Le point de départ peut se situer à 1000 km au Nord de l'équateur, car le parallèle situé à 1000 km au Nord de l'équateur et celui situé à 1000 km au sud de l'équateur ont la même longueur.
5. Dans cette question, on souhaite préciser la réponse à la question 3.

   a) La distance (sur Terre) entre le point E et le point N est 10000 km. La distance entre E et M est donc un cinquième de la distance entre E et N, et l'angle $\widehat{EOM}$) mesure un cinquième de l'angle $\widehat{EON}$, c'est-à-dire 18º.
   La distance EO est le rayon d'un cercle de périmètre 40000 km (l'équateur).
   On a donc $EO = \dfrac{40\,000}{2\pi} \approx 6366$ km.
   Dans le triangle rectangle MHO, on a $\dfrac{MH}{MO} = \cos(\widehat{HMO})$.
   Or $MO = EO$ et $\widehat{HMO} = \widehat{EON}$ donc $MH = EO \times \cos(18^{\circ}) = \dfrac{40\,000}{2\pi} \times \cos(18^{\circ}) \approx 6054$ km.
   Le parallèle situé à 2000 km au Nord de l'équateur est un cercle de rayon MH.
   Sa longueur est donc $2\pi \times MH = 40000 \times cos(18^{\circ}) \approx 38042$ km.

   b) Le voyageur parcourt un vingtième de l'équateur lorsqu'il va de B vers C.

   c) Pour rejoindre le point A en partant du point D, le voyageur doit donc parcourir un vingtième du parallèle, c'est-à-dire $\dfrac{1}{20} \times 40\,000 \times \cos(18^{\circ}) \approx 1902$ km.
6. Si on reprend les mêmes notations mais avec M situé à x km au Nord de l'équateur, on trouve que la mesure de l'angle $\widehat{EOM}$ est $\dfrac{x}{10\,000}$ fois la mesure de l'angle $\widehat{EON}$, c'est-à-dire $\dfrac{90 \times x}{10\,000}$ (en degré).
   Le même raisonnement que dans la question 5.a. permet de trouver : $L(x) = 40\,000 \times \cos\left(\dfrac{90 \times x}{10\,000}\right)$.
   Pour un parallèle situé à x km au Sud de l'équateur, c'est le même résultat.
7. On souhaite reprendre la question 2, mais en partant d'un point de l'hémisphère Sud.

a) Il faut résoudre $L(x) = 2000$: $40000 \times \cos\left(\dfrac{90 \times x}{10000}\right) = 2000 \Leftrightarrow \cos\left(\dfrac{90 \times x}{10000}\right) = \dfrac{1}{20}$.
On a donc $\dfrac{90x}{10000} = a\cos\left(\dfrac{1}{20}\right) \approx 87,134^{\circ}$ et $x = \dfrac{10000}{90} \times a\cos\left(\dfrac{1}{20}\right) \approx 9682$ km.
Il existe bien un parallèle de longueur 2000 km, situé à 9682 km au sud de l'équateur.

b) En utilisant la question précédente : le point de départ peut être situé à 7682 km au sud de l'équateur. En parcourant 2000 km vers le Sud, le voyageur se retrouve sur un parallèle de longueur 2000 km. Les 2000 km vers l'Est lui font faire un tour complet.

c) En effectuant 2000 km vers l'Est, le voyageur peut faire plusieurs tours. Il peut donc partir
- d'un point situé à 2000 km au Nord d'un parallèle de longueur 1000 km,
- d'un point situé à 2000 km au Nord d'un parallèle de longueur $\dfrac{2000}{3}$ km,
- etc.

8. Une solution possible :
- Le voyageur part d'un point situé à x km au Nord de l'équateur (x supérieur à 2000).
- Il parcourt 2000 km vers le Sud, et se retrouve à $x - 2000$ km de l'équateur, sur un parallèle de longueur $L(x - 2000)$.
- Il parcourt 2000 km vers l'Est, ce qui représente une certaine proportion p de la longueur $L(x - 2000)$.
- Il parcourt 2000 km vers le Nord et se retrouve de nouveau à x km de l'équateur, sur un parallèle de longueur $L(x)$.
- Il parcourt 2000 km vers l'Ouest, ce qui représente une certaine proportion p' de la longueur $L(x)$.
- Il se retrouve à son point de départ si $p' = p + 1$, c'est-à-dire si en allant vers l'Ouest, il effectue un tour complet plus la proportion p de la longueur $L(x)$.

La proportion p vaut $p = \dfrac{2000}{L(x - 2000)}$. La proportion p' vaut $p' = \dfrac{2000}{L(x)}$.
Il faut donc résoudre $\dfrac{2000}{L(x)} = \dfrac{2000}{L(x - 2000)} + 1$, c'est-à-dire $\dfrac{2000}{L(x)} - \dfrac{2000}{L(x - 2000)} = 1$.
On ne peut par résoudre cette équation de manière exacte, mais la calculatrice permet de trouver une solution approchée en programmant la fonction $x \mapsto \dfrac{2000}{L(x)} - \dfrac{2000}{L(x - 2000)}$. On trouve $x \approx 9721,357$ km.

Autres solutions :
- Le voyageur peut effectuer plusieurs tours complets en allant vers l'Ouest.
- Symétriquement, les mêmes types de parcours sont possibles dans l'hémisphère Sud, par exemple en partant d'un point situé à 7721,357 km au Sud de l'équateur.

RETOUR AU SOMMAIRE

LYON

Premier exercice

Toutes séries

Plier une feuille de papier

Éléments de solution

1. $\dfrac{L_1}{\ell_1} = \dfrac{L_0}{\ell_0}$, ce qui d'après l'énoncé s'écrit $\dfrac{2\ell_0}{L_0} = \dfrac{L_0}{\ell_0}$, ce qui est équivalent à $\dfrac{L_0^2}{\ell_0^2} = 2$,
   soit, puisque $L_0 > 0$ et $\ell_0 > 0$, $\dfrac{L_0}{\ell_0} = \sqrt{2}$.

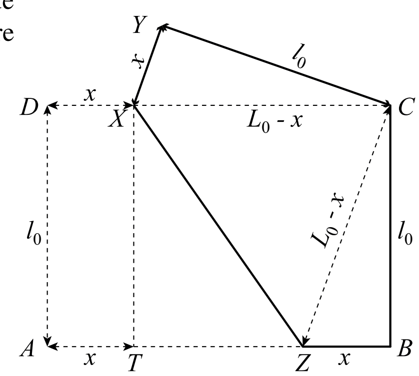
2. Comme $L_0 \times \ell_0 = 1$ on en déduit que $L_0 = 2^{\frac{1}{4}}$ et $\ell_0 = \dfrac{1}{2^{\frac{1}{4}}}$.

3. A chaque étape l'aire est divisée par 2. L'aire d'une feuille A4 est donc de $\dfrac{1}{16} = 0{,}0625$ m² c'est-à-dire de 625 cm².

4. On a encore la relation $\dfrac{L_4}{\ell_4} = \sqrt{2}$ et donc $L_4 = \dfrac{\sqrt[4]{2}}{4} \approx 0{,}297\,301\,779$ m $\approx 29{,}7$ cm.
   $\ell_4 = \dfrac{1}{4\sqrt[4]{2}} \approx 0{,}210224104$ m ≈ 21 cm.

5. $\boxed{\text{SOLUTION 1}}$

   En posant $XY = ZB = x$ et $ZC = XC = y$ et en remarquant que $YC = CB = \ell_0$ d'une part et que $x + y = L_0$ et $TZ = L_0 - 2x$ d'autre part, il vient $\left\{\begin{array}{rcl} y^2 & = & x^2 + \ell_0^2 \\ y + x & = & L_0 \end{array}\right.$

   Soit : $y = \dfrac{3\sqrt[4]{2}}{4}$; $x = \dfrac{\sqrt[4]{2}}{4}$

   Et $XZ^2 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{4} = \dfrac{3\sqrt{2}}{4}$.

   La hauteur du triangle XCZ vaut alors : $h = \sqrt{\dfrac{3\sqrt{2}}{4}}$

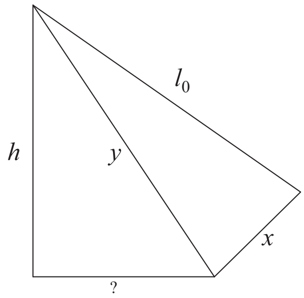
   Finalement : A(CXZ) = $\dfrac{3}{8}$.

   Et l'aire des deux triangles rectangles XYC et CZB vaut $x\ell_0 = \dfrac{\sqrt[4]{2}}{4} \times \dfrac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt{2}} = \dfrac{1}{4}$.

   L'aire du pentagone vaut donc : $\dfrac{3}{8} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{5}{8}$ m² c'est-à-dire 6250 m².

   $\boxed{\text{SOLUTION 2}}$

   En remarquant que la hauteur issue de C du triangle isocèle CXZ est l'axe de symétrie du pentagone, on peut replier le pentagone autour de son axe de symétrie pour obtenir le quadrilatère de la figure suivante :



x et y ont déjà été calculés. h est la longueur de la demie diagonale du rectangle de format A0 et vaut donc :

$$h = \frac{\sqrt{L_0^2 + \ell_0^2}}{2} = \sqrt{\frac{3\sqrt{2}}{8}}.$$

La mesure manquante que l'on nommera z vaut donc :

$$z = \sqrt{y^2 - h^2} = \sqrt{\frac{3\sqrt{2}}{16}}.$$

L'aire du quadrilatère est donc la somme des aires des deux triangles rectangles, et l'aire du pentagone, le double, soit :

$$\mathscr{A} = z \times h + x \times \ell_0 = \frac{\sqrt{3}\sqrt[4]{2}}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\sqrt[4]{2} + \frac{\sqrt[4]{2}}{4} \times \frac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt{2}} = \frac{5}{8} \text{ m}^2\text{, c'est-à-dire 6250 m}^2.$$

SOLUTION 3

L'aire du pentagone est la moitié de l'aire du pentagone, soit $\frac{1}{2}$ m^2, à laquelle il faut rajouter l'aire du triangle CXY qui est aussi celle du triangle CZB. L'aire de ce triangle est égale à $\frac{x \times \ell_0}{2}$. Or on peut appliquer le théorème de Pythagore dans le triangle CZB rectangle en C :

$$ZB^2 + CB^2 = CZ^2 \Leftrightarrow x^2 + \ell_0^2 = (L_0 - x)^2,$$

$$ZB^2 + CB^2 = CZ^2 \Leftrightarrow 2 \times x \times L_0 = L_0^2 - \ell_0^2.$$

Or $L_o^2 = \sqrt{2}$ et $\ell_0^2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$ZB^2 + CB^2 = CZ^2 \Leftrightarrow 2 \times x \times L_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Or $L_o = \sqrt{2} \times \ell_0$.

$$ZB^2 + CB^2 = CZ^2 \Leftrightarrow 2\sqrt{2} \times x \times \ell_0 = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$ZB^2 + CB^2 = CZ^2 \Leftrightarrow \frac{x \times \ell_0}{2} = \frac{1}{8}.$$

On en déduit que l'aire du triangle CZB est $\frac{1}{8}$ et que l'aire du pentagone est égale à $\frac{1}{2} + \frac{1}{8} = \frac{5}{8}$ m^2 c'est-à-dire 6250 cm^2.

SOLUTION 4

L'aire du pentagone est la moitié de l'aire du pentagone, soit $\frac{1}{2}$ m^2, à laquelle il faut rajouter l'aire du triangle CXY, celle-ci par symétrie du pentagone étant égale à l'aire du triangle ZBC.

D'après le pliage, (XZ) est la médiatrice de la diagonale [AC] donc (XZ) est perpendiculaire à [AC] en son milieu O.

On munit le plan de la figure d'un repère orthonormal $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$ d'origine O tel que $\overrightarrow{AD} = \ell_0 \vec{j}$ et $\overrightarrow{AB} = L_0 \vec{i}$.

La droite (XZ) a pour vecteur normal $\overrightarrow{AC}$ de coordonnées $(L_0;\ell_0)$ et elle passe par l'origine O du repère donc elle a pour équation $L_0x+\ell_0y=0$.
Le point Z a pour ordonnée $-\dfrac{\ell_0}{2}$ et appartient à (XZ) donc son abscisse x_Z vérifie

$$L_0x_Z+\ell_0y_Z=0 \Leftrightarrow L_0x_Z-\frac{\ell_o^2}{2}=0,$$

$$L_0x_Z+\ell_0y_Z=0 \Leftrightarrow x_Z=\frac{\ell_o^2}{2L_0}.$$

Or $\dfrac{L_0}{\ell_0}=\sqrt{2}$ donc $\ell_0^2=\dfrac{L_0^2}{2}$

$$L_0x_Z+\ell_0y_Z=0 \Leftrightarrow x_Z=\frac{L_0}{4}.$$

On en déduit que $ZB=\sqrt{(x_B-x_Z)^2}=|x_B-x_Z|=x_B-x_Z=\dfrac{L_0}{2}-\dfrac{L_0}{4}=\dfrac{L_0}{4}$.

L'aire du triangle rectangle ZBC est donc égale à $\dfrac{ZB\times BC}{2}=\dfrac{\frac{L_0}{4}\times\ell_0}{2}=\dfrac{L_0\times\ell_0}{8}=\dfrac{1}{8}$. C'est aussi l'aire du triangle CXY et l'aire du pentagone est donc égale à $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{8}=\dfrac{5}{8}$ m² c'est-à-dire 6250 cm².

SOLUTION 5 Une dernière solution qui nécessite moins de calculs.
L'aire du pentagone est la moitié de l'aire du pentagone, soit $\dfrac{1}{2}$ m², à laquelle il faut rajouter l'aire du triangle CXY .
On a (XZ) perpendiculaire à (AC) (voir solution précédente), (XT) perpendiculaire à (AB) et (TZ) perpendiculaire à (BC).
On en déduit que le triangle ABC est un agrandissement du triangle XTZ (car tous leurs côtés sont perpendiculaires), et le facteur d'agrandissement vaut :

$$\frac{BC}{TZ}=\frac{AB}{XT}=\frac{L_0}{\ell_0}=\sqrt{2}.$$

Un calcul de pente donne le même résultat.
En multipliant $\dfrac{BC}{TZ}$ par $\sqrt{2}$, on obtient $\dfrac{BC\sqrt{2}}{TZ}=2$, et comme $BC\sqrt{2}=AB$ on a $\dfrac{AB}{TZ}=2$.
De plus, d'après le pliage, on a $AT=DX=XY=ZB$ et $YC=BC$ donc l'aire du triangle rectangle CXY est égale à l'aire du triangle rectangle AXT.
Comme $AB=AT+TZ+ZB=2AT+\dfrac{AB}{2}$ on a $AT=\dfrac{AB}{4}$ et l'aire de AXT est égale à $\dfrac{AT\times XT}{2}=\dfrac{AB\times BC}{8}=\dfrac{1}{8}$.
Finalement, l'aire de CXY est égale à $\dfrac{1}{8}$ et l'aire du pentagone est égale à $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{8}=\dfrac{5}{8}$ m² c'est-à-dire 6250 cm².

RETOUR AU SOMMAIRE

LYON

Deuxième exercice

Toutes séries

Nombres tri-tri

Éléments de solution

1. Pour écrire un nombre tri-tri on a
   - 3 choix possibles pour le chiffre des centaines ;
   - 3 choix possibles pour le chiffre des dizaines ;
   - 3 choix possibles pour le chiffre des unités ;

   Soit un total de $3 \times 3 \times 3 = 3^3 = 27$ nombres tri-tri distincts.
2. a) On considère les nombres *tri-tri* 122 et 323.
   - $\boxed{\text{Analyse}}$ un nombre *tri-tri* qui forme un trident avec 122 et 323 doit vérifier les contraintes suivantes :
     - les chiffres des centaines de 122 et 323 sont distincts (1 et 3) donc son chiffre des centaines doit être 2 ;
     - les chiffres des dizaines de 122 et 323 sont égaux à 2 donc son chiffre des dizaines doit être 2 également ;
     - les chiffres des unités de 122 et 323 sont sont distincts (2 et 3) donc son chiffre des unités doit être 1 ;

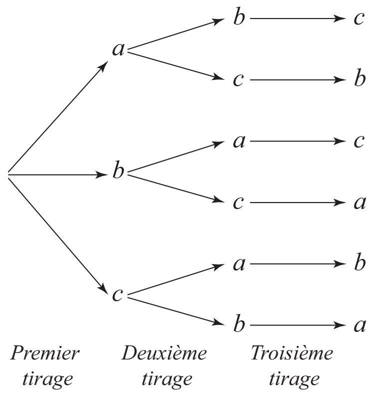
     Le nombre tri-tri formant un trident avec 122 et 323 doit donc être 221.
   - $\boxed{\text{Synthèse}}$ On vérifie que 122, 323 et 221 forment un trident.
     On conclut qu'il existe un unique nombre *tri-tri* formant un trident avec 122 et 323, c'est 221.

   b) Considérons deux nombres *tri-tri* a et b. On démontre comme précédemment qu'il existe un unique nombre *tri-tri* formant un trident avec eux.
   - $\boxed{\text{Analyse}}$ Soit un nombre *tri-tri* qui forme un trident avec a et b.
     Pour chacun de ses chiffres on raisonne par disjonction des cas :
     - soit les chiffres de même position dans les écritures décimales de a et b sont égaux et le chiffre du nombre cherché doit être égal à cette valeur ;
     - soit les chiffres de même position dans les écritures décimales de a et b sont différents et le chiffre du nombre cherché doit être différent des deux autres et ne peut prendre que le chiffre restant parmi 1, 2 ou 3 ;

     Ainsi pour chaque chiffre du nombre cherché, il existe une unique valeur possible.
   - $\boxed{\text{Synthèse}}$ On vérifie immédiatement que le nombre construit dans l'analyse, forme un *trident* avec a et b.
     On conclut que pour deux nombres *tri-tri* il existe un unique nombre tri-tri formant un *trident* avec eux.

On suppose qu'on choisit au hasard, successivement et sans remise, trois nombres distincts dans l'ensemble des nombres tri-tri.

3. a) Si on tient compte de l ?ordre des tirages, on obtient six triages possibles constitués de trois nombres *tri-tri* distincts a, b et c :
$(a;b;c)$ $(a;c;b)$ $(b;a;c)$ $(b;c;a)$ $(c;a;b)$ $(c;b;a)$



Si on utilise un arbre de dénombrement, puisque le tirage est sans remise, on observe qu'on a 3 choix pour le nombre obtenu au premier tirage, puis 2 choix pour le nombre obtenu au second tirage et enfin 1 choix pour le nombre obtenu au troisième tirage. Le nombre de tridents constitués des nombres a, b et c est donc $3 \times 2 \times 1 = 6$.

b) En tenant compte de l'ordre des tirages et en raisonnant comme précédemment, il existe 27 choix pour le premier nombre tiré et 26 choix pour le second ce qui donne $27 \times 26 = 702$ couples de nombres *tri-tri*.
Or, d'après la propriété démontrée à la question 2 . (b), tout couple de nombres *tri-tri* permet de définir un unique trident.
On en déduit qu'on peut tirer $27 \times 26 = 702$ tridents en tenant compte de l'ordre des tirages.
Or, d'après le résultat de la question 3. (a), chaque trident composé des mêmes nombres est représenté 6 fois dans cet ensemble.
Il existe donc $\dfrac{27 \times 26}{6} = 9 \times 13 = 117$ tridents distincts.

4. On suppose qu'on choisit au hasard un *trident* parmi l'ensemble des tridents.

a) Les tridents du type *trident2* sont constitués de nombres *tri-tri* ayant deux chiffres sur trois en commun, les autres chiffres étant tous distincts.
ű Si on ne tient pas compte de l'ordre dans lequel on examine les nombres composant un *trident2*, un *trident2* est caractérisé par les valeurs des deux chiffres égaux et par leur position dans l'écriture décimale de chaque nombre.
Notons *commun1* le chiffre associé à la plus grande puissance de dix (ou le plus à gauche dans l'écriture décimale) et *commun2* l'autre chiffre commun aux trois nombres du *trident2*.
3 valeurs de *commun1* peuvent être associées à 3 valeurs de *commun2*.
Pour chacun des $3 \times 3 = 9$ couples de chiffres ainsi constitués, il existe 3 configurations possibles, selon la position du chiffre non commun.

centaines	**dizaines**	**unités**
commun1	*commun2*	
commun1		*commun2*
	commun1	*commun2*

Au total, on a donc $3 \times 3 \times 3 = 27$ *trident2* distincts.

b) Si on réalise un tirage d'un *trident* parmi les 117 *tridents*, on peut considérer que l'univers de cette expérience aléatoire est constitué de 117 issues équiprobables. L'événement « Tirer un *trident2* » est réalisé par 27 issues. Sa probabilité est donc égale à $\dfrac{27}{117} = \dfrac{3}{13}$.

c) Les tridents du type *trident1* sont constitués de trois nombres *tri-tri* ayant un chiffre sur trois en commun, les deux autres chiffres étant tous distincts.

Si on considère un *trident1*, il existe 3 valeurs possibles pour le chiffre commun et 3 positions pour chacune d'entre elles dans l'écriture décimale des nombres. Ensuite, il reste à choisir les deux chiffres non communs.
Pour chacune de ces $3 \times 3 = 9$ possibilités, on peut ranger les nombres du *trident1* dans l'ordre croissant de la valeur du chiffre non commun le plus à gauche dans l'écriture décimale. Il reste une liste de trois valeurs distincts pour le second chiffre non commun à choisir parmi 1, 2 ou 3, ce qui donne trois possibilités pour la première valeur de la liste, puis deux possibilités pour la seconde et une possibilité pour la dernière, c'est-à-dire un total de $3 \times 2 \times 1 = 6$ listes possibles.
On donne ci-dessous les 6 possibilités lorsque le chiffre commun est celui des centaines.

centaines	**dizaines**	**unités**
commun	(1 ; 2 ; 3)	(1 ; 2 ; 3)
commun	(1 ; 2 ; 3)	(1 ; 3 ; 2)
commun	(1 ; 2 ; 3)	(2 ; 1 ; 3)
commun	(1 ; 2 ; 3)	(2 ; 3 ; 1)
commun	(1 ; 2 ; 3)	(3 ; 1 ; 2)
commun	(1 ; 2 ; 3)	(3 ; 2 ; 1)

Au total on a donc $3 \times 3 \times 6 = 54$ *trident1*.
En raisonnant comme en 4. (b) on trouve que la probabilité d'avoir un *trident1* en tirant au hasard un *trident* dans l'ensemble de tous les *tridents* est de $\dfrac{54}{117} = \dfrac{6}{13}$.

d) Il n'existe que trois sortes de *tridents*. On a dénombré 27 *trident2* et 54 *trident1* parmi les 117 tridents. Il y a donc $117 - 27 - 54 = 36$ *trident0*.
En raisonnant comme en 4. (b) on trouve que la probabilité d'avoir un *trident2* en tirant au hasard un *trident* dans l'ensemble de tous les tridents est de $\dfrac{36}{117} = \dfrac{4}{13}$.
On aurait pu faire directement un calcul de probabilités.
Sachant que les événements « Tirer un trident2 » de probabilité $\dfrac{3}{13}$, « Tirer un *trident1* » de probabilité $\dfrac{6}{13}$ et « Tirer un *trident0* » forment une partition de l'univers de cette expérience aléatoire, la probabilité d'avoir un *trident0*, est égale à $1 - \dfrac{3}{13} - \dfrac{6}{13} = \dfrac{4}{13}$.

5. On trouve facilement un ensemble de 8 nombres *tri-tri* sans *trident* :

$$111; 112; 121; 122; 211; 212; 221; 222$$

mais on trouve même un ensemble de 9 nombres *tri-tri* sans *trident* :

$$111; 113; 131; 133; 222; 312; 321; 323; 332:$$

Démontrons qu'un tel ensemble de 10 nombres *tri-tri* n'existe pas, en faisant appel à la géométrie.

- On peut étudier la géométrie en trois dimensions non seulement avec des nombres réels, mais aussi avec des entiers modulo 3, c'est-à-dire des entiers soumis à la règle de calcul $-3 = 0 = 3 = 6, -2 = 1 = 4 = 7, -1 = 2 = 5 = 8, \ldots$
Cet espace contient seulement 27 points qu'on peut représenter avec nos nombres *tri-tri* de coordonnées (centaine, dizaine, unité) dans un repère de cet espace.
Trois points A ;B ;C sont alignés si et seulement si $B - A = m(C - A)$ (opérations sur les coordonnées), où $m = 2 = -1$, car $m = 0$ donne $A = B$ et $m = 1$ donne $B = C$.
Trois points A ;B ;C sont donc alignés si et seulement si $B - A = A - C$, $B + C - 2A = 0, B + A + C = 0$

puisque $-2 = 1$ modulo 3.
Autrement dit, A ;B ;C sont alignés si et seulement si les nombres *tri-tri* forment un *trident*.
Chaque droite de notre espace contient donc exactement trois points, et chaque plan contient exactement 9 points de coordonnées dans un repère de ce plan :

$$(0;0);(0;1);(0;2);(1;0);(1;1);(1;2);(2;0);(2;1);(2;2)$$

Dans un plan (de 9 points) on peut trouver 4 points, dont 3 ne sont jamais alignés, par exemple 111, 113, 131, 133, mais on ne peut pas y trouver 5 points sans alignement c'est-à-dire sans trident. En effet, regardons notre plan comme union de trois droites parallèles $a;b;c$; et supposons que c contienne seulement un de nos 5 points, appelé P (si a ; b ou c contient 0 points, alors une autre de ces droites contient 3 points qui sont donc alignés, et si $a;b;c$ en contiennent au moins 2, il y a au moins 6 et non 5 points).
Trois droites de notre plan différentes de c passent par P, et chacune coupe a et b en deux points différents. Une de ces trois droites contient donc deux de nos 5 points considérés autres que P (puisque ces trois droites contiennent les 4 points et que $\frac{4}{3} > 1$), donnant avec P l'alignement cherché.

- De même, dans l'espace (de 27 points) on peut trouver 9 points, dont 3 ne sont jamais alignés, voir l'exemple plus haut, mais on ne peut pas y trouver 10 points sans alignement c'est-à-dire sans trident.
  En effet, regardons notre espace comme union de trois plans parallèles $a;b;c$; et supposons que c contient exactement 2 ou 3 de nos 10 points considérés (si a ; b ou c contient 0 ou 1 point, alors un autre de ces plans en contient au moins 5 et c'est fini, voir plus haut, et si a ; b ; c en contiennent au moins 4, il y a au moins 12 points et non 10). Appelons P et Q deux de nos points du plan c considérés.
  Trois plans de notre espace différents de c passent par P et Q, et chacun coupe a et b en six points différents (puisque l'intersection de deux plans est une droite c'est-à-dire trois points).
  Un de ces trois plans contient donc au moins trois de nos 10 points considérés en dehors du plan c (car il y a au moins $10-3=7$ points considérés en dehors de c, répartis entre trois plans contenant P et Q et que $\frac{7}{3} > 2$).
  Avec P et Q, cela donne au moins 5 points considérés dans un plan et donc l'alignement cherché d'après ce qu'on a démontré précédemment.

RETOUR AU SOMMAIRE

MAYOTTE

Premier exercice

Toutes séries

Triplets pythagoriciens

Éléments de solution

L'exercice a pour objectif de mettre en évidence des méthodes pour trouver des exemples de triplets pythagoriciens.

1. **Une solution moderne**
   a)) Il suffit de développer les deux membres et trouver le même résultat.
   b) $a = 1$ $b = 2$: $(1^2 - 2^2)^2 + (2 \times 1 \times 2)^2 = (1^2 + 2^2)^2$ soit $3^2 + 4^2 = 5^2$.
   $a = 2$ $b = 3$: $(1^2 - 3^2)^2 + (2 \times 2 \times 3)^2 = (1^2 + 3^2)^2$ soit $5^2 + 12^2 = 13^2$.
   Deux triplets Pythagoricien : (3, 4, 5) et (5, 12, 13).
2. **La solution de Fibonacci.**
   A) a) $1764 = B - A$.
   b) La somme des termes d'une suite arithmétique est donnée par

   $$\text{nombre de terme} \times \text{la moyenne des termes}$$

   d'où D'où : $A = 440^2$ et $B = 442^2$.
   Donc $1764 = 442^2 - 440^2$ soit $42^2 = 442^2 - 440^2$
   D'où le triplet Pythagoricien (42, 440, 442).)

   B) Considérons le nombre carré 225. Il est divisible par 3. On peut l'écrire $\mathbf{225 = 73 + 75 + 77}$.
   a) On pose $A = 1 + 3 + \cdots + 71$
   $B = 1 + 3 + \cdots + 75 + 77$
   $225 = B - A$.
   b) $A = 36^2$ et $B = 39^2$ d'où $225 = 39^2 - 36^2$ soit $15^2 = 39^2 - 36^2$
   Donc (15, 36, 39) est un triplet Pythagoricien.

RETOUR AU SOMMAIRE

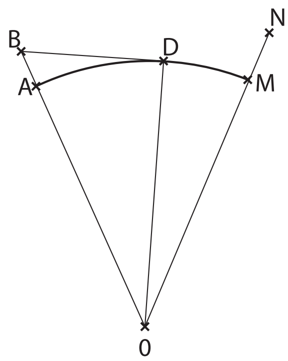
MAYOTTE

Deuxième exercice

Série S

Deux îles voisines

Éléments de solution



1. a) Dans le triangle BOD rectangle en D, d'après le théorème de Pythagore :
   $OB^2 = OD^2 + BD^2$
   d'où
   $d = \sqrt{6370,66^2 - 6370^2}$ d'où $d \approx 91,7$ km

   b) $\text{mes}((\widehat{AOD}) = \cos^{-1}\left(\dfrac{OD}{OB}\right)$
   $\text{mes}(\widehat{AOD}) approx 0,0144$ rad
   $\text{mes}(\widehat{AOD}) \approx 1,65^o$

   c) $\text{arc}(AD) = \cos^{-1}\left(\dfrac{OD}{OB}\right) \times 6370$
   $\text{arc}(AD) \approx 91,6934$ km
   D'où $d - \text{arc}(AD) \approx 6,33$ m

2. $\text{mes}(\widehat{DOM}) = \text{mes}(\widehat{AOM}) - \text{mers}(\widehat{AOD}) = \dfrac{AM}{6370} - \cos^{-1}\left(\dfrac{OD}{OB}\right)$

   $\text{mes}\widehat{DOM} \approx 0,055 \text{ rad} \approx 0,64.$
   Si on appelle H le point d'intersection des droites (BD) et (ON), alors on a :
   $OH = \dfrac{OD}{\cos\widehat{DOM}}$
   $OH \approx 6370,0978$ km

   On en déduit que l'altitude des points situé sur les parois du Mont Ntringui visibles depuis le sommet B sera comprise entre 98 m et 1595 m.

RETOUR AU SOMMAIRE

MAYOTTE

Troisième exercice

Séries autres que S

Poignées de main

Éléments de solution

1. Une personne donnée ne serre pas la main à son conjoint, ni à elle même. Il y a 10 personnes en tout, chaque personne a serré au plus 8 poignées de mains.

   Et au minimum, une personne (très impolie ou très sauvage...) a pu ne serrer aucune poignée de main.

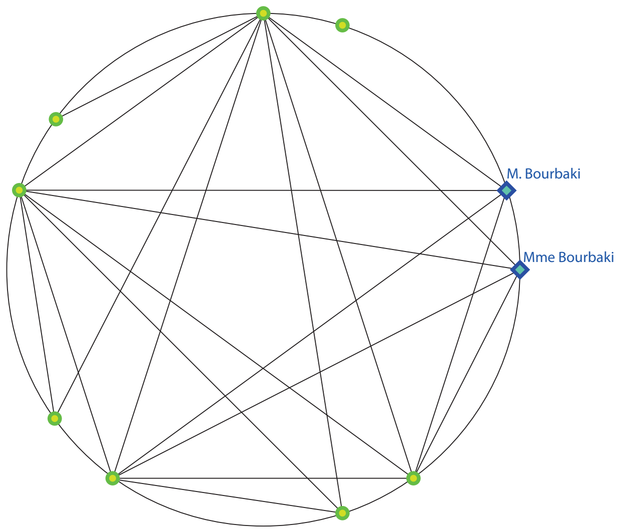
   Les nombres de poignées de mains sont donc les éléments de l'ensemble 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8. Cet ensemble comporte 9 éléments, pour 10 personnes. Donc au moins deux personnes ont serré le même nombre de poignées de mains.

   Comme toutes les personnes autres que Mme Bourbaki ont serré un nombre différents de poignées de mains, c'est Mme Bourbaki qui a serré le même nombre de poignées de mains qu'une autre personne.

2. Une personne a serré 8 poignées de mains. La seule personne qui n'a pas été saluée est donc son conjoint, et toutes les autres personnes ont donc serré au moins une poignée de mains. Le conjoint de la personne qui a serré 8 poignées de mains a serré zéro poignée de mains.

   Si deux personnes avaient serré 8 poignées de mains, personne n'aurait pu en serrer zéro. Et si deux personnes avaient serré zéro poignée de mains, personne n'aurait pu en serrer 8. Donc ce n'est pas Mme Bourbaki ou M. Bourbaki qui ont serré zéro et huit poignées de mains.

3. Un raisonnement équivalent montre qu'une personne a serré 7 poignées de mains, que son conjoint n'en a serré qu'une, et qu'aucune de ces deux personnes n'est Mme ou M. Bourbaki. La personne qui a serré 6 poignées de mains a pour conjoint la personne qui en a serré 2, et la personne qui en a serré 5 a pour conjoint la personne qui en a serré 3. On peut alors compéter le graphe suivant, en représentant les poignées de mains par des segments. On montre alors que Mme Bourbaki, comme M. Bourbaki, ont serré chacun 4 poignées de mains.



RETOUR AU SOMMAIRE

MONTPELLIER

Premier exercice

Toutes séries

Triangles frères

Éléments de solution

1. **Cas des triangles équilatéraux**

   Il est facile de montrer que si le périmètre d'un triangle équilatéral est fixé, le côté est fixé. Il n'y a donc qu'un seul triangle équilatéral possible pour un périmètre donné. Pas de frère pour un équilatéral, sauf lui-même et ses jumeaux si on considère le triangle comme un ensemble de points d'emplacements déterminés dans le plan et non pas comme une forme.

2. **Cas des triangles rectangles**

   Appelons TRI un triangle rectangle de côté de longueurs 3, 4, 5. Son périmètre vaut 12, son aire vaut 6.

   a) Soit ABC un triangle rectangle dont un des côtés mesure 3.
   Supposons que $a = 3$ (avec les notations de l'énoncé)
   Trois cas sont possibles :

   - c est l'hypoténuse ;
     alors on doit avoir les relations :
     $3+b+c=12$
     $3b=12$
     $9+b^2=c^2$
     Il est immédiat que $b=4$ et donc que $c=5$.
     Le triangle ABC est un jumeau de TRI.
   - b est l'hypoténuse ;
     alors on doit avoir les relations :
     $3+b+c=12$
     $3c=12$
     $9+c^2=b^2$
     Ce qui revient au cas précédent en remplaçant c par b.
   - a est l'hypoténuse ;
     alors on doit avoir les relations :
     $3+b+c=12$
     $bc=12$
     $b^2+c^2=9$
     donc $(b+c)^2=b^2+c^2+2bc=9+24=33$
     or $(b+c)^2=9^2=81$, ce qui amène une contradiction, ce cas est impossible.

     La contradiction peut aussi provenir du fait que l'hypoténuse d'un triangle rectangle est le diamètre du cercle circonscrit et qu'une corde est inférieure au diamètre, donc le périmètre doit être inférieur à $3\times 3=9$.
     Conclusion : **ABC est un frère jumeau de TRI**.

   b) Soit ABC un triangle rectangle dont un des côtés mesure 5.
   Supposons que $a=5$ (avec les notations de l'énoncé)
   Les trois mêmes cas sont possibles :

- c est l'hypoténuse ;
  alors on doit avoir les relations :
  $5+b+c=12$
  $5b=12$
  $25+b^2=c^2$
  Il est immédiat que $b=2,4$ et donc que $c=4,6$. Ce qui est contradictoire avec le fait que c soit l'hypoténuse.
- b est l'hypoténuse.
  Même cas que le cas précédent en remplaçant c par b.
- a est l'hypoténuse ;
  alors on doit avoir les relations :
  $5+b+c=12$
  $bc=12$
  $b^2+c^2=25$
  La résolution du système formé par les deux premières équations aboutit à une équation du second degré dont les solutions sont 3 et 4.
  Le triangle **ABC est donc un jumeau de TRI**.

Autre manière de le montrer : tracer le cercle de diamètre $BC=5$, construire le triangle TRI tel que [TR] = [BC], $TI=3$ et $RI=5$, et considérer que ABC et TRI doivent avoir même hauteur. Les deux triangles seront donc symétriques par rapport à (BC) ou au diamètre perpendiculaire à (BC), ou encore au milieu de [BC]. TRI et ABC sont donc isométriques.
Conclusion : **ABC est un frère jumeau de TRI**.

3. **Cas des triangles isocèles**

Soit le triangle TRI de côtés 5, 5 et 6. Sa hauteur mesure $h=\sqrt{25-9}=4$.
Alors $p=16$ et $A=12$.
Soit ABC un triangle isocèle de côtés a, b, b et de sommet principal C.
Sa hauteur mesure $h=\sqrt{b^2-\dfrac{a^2}{4}}$.
On a donc :
$2b+a=16$
$a\sqrt{b^2-\dfrac{a^2}{4}}=24$.
Ces égalités amènent à une équation du troisième degré : $a^3-8a^2+72=0$.
Nous connaissons déjà une solution du problème, qui est $a=6$.
Le polynôme est donc factorisable par $a-6$:

$$(a-6)(a^2-2a-12)=a^3-8a^2+72.$$

Il reste à résoudre : $a^2-2a-12=0$.
Les solutions sont : $1+\sqrt{13}$ et $1-\sqrt{13}$.
La première solution est acceptable. Le triangle ABC dont les mesures sont $1+\sqrt{13}$, $\dfrac{15-\sqrt{13}}{2}$, $\dfrac{15-\sqrt{13}}{2}$ est **un frère isocèle non jumeau de TRI**.

Remarque : d'autres méthodes sont envisageables, montrant l'existence du frère sans calculer précisément la longueur des côtés. Par exemple l'étude à la calculatrice de la fonction f définie par $f(x)=x^3-8x^2+72$ peut montrer qu'elle possède trois racines, dont deux sont positives.

RETOUR AU SOMMAIRE

MONTPELLIER

Deuxième exercice

Série S

Nombres magiques

Éléments de solution

Remarque : Les chiffres d'un nombre magique sont toujours non nuls.

1. *Trouver tous les nombres magiques à 2 chiffres.*
   Soit a et b les deux chiffres (non nuls) d'un nombre magique à 2 chiffres.
   $ab = a+b$ équivaut à $(a-1)(b-1) = 1$. On en déduit que $a = b = 2$.
   On vérifie alors de suite que 22 est bien un nombre magique $(2+2 = 2\times 2)$.
   Le seul nombre magique à 2 chiffres est 22.
2. *Trouver tous les nombres magiques à 3 chiffres.*
   Soit a, b et c les trois chiffres (non nuls) d'un nombre magique à 3 chiffres.
   On peut supposer que $a \leqslant b \leqslant c$.
   - Si $a \geqslant 3$, alors $abc \geqslant 27$ et $a+b+c \leqslant 27$. De plus, si $abc = 27$, alors $a+b+c = 9$.

     Nécessairement, $a = 1$ ou $a = 2$.
   - Si $a = 2$, avec $2 \leqslant b \leqslant c$:
     $2bc = 2+b+c$ implique $(2b-1)(2c-1) = 5$ puis $b = 1$ et $c = 3$, ce qui n'est pas admissible vu que $2 \leqslant b \leqslant c$.
   - Si $a = 1$, avec $1 \leqslant b \leqslant c$:
     $bc = 1+b+c$ implique $(b-1)(c-1) = 2$ puis $b = 2$ et $c = 3$.

   On vérifie : $1+2+3 = 1\times 2\times 3$.
   Les nombres magiques à 3 chiffres sont les six nombres écrits avec les trois chiffres 1, 2 et 3 : 123, 132, 213, 231, 312 et 321.
3. *On s'intéresse désormais à certains nombres magiques qui s'écrivent avec 4 chiffres ou plus. Existe-t-il un nombre magique à 10 chiffres ? Si oui, en donner un exemple.*

   Si N est un nombre magique à 10 chiffres, on nomme S (resp. P) la somme (resp. le produit) de ses chiffres.
   Les deux inégalités $S \leqslant 90$ et $2^7 > 90$ impliquent que l'écriture de N comporte au moins 4 chiffres 1.
   Alors $S \leqslant 6\times 9+4$ et $2^6 > 58$ impliquent que l'écriture comporte au moins 5 chiffres 1.

   On peut donc penser écrire un nombre N à dix chiffres avec un maximum de chiffres 1.
   Avec 10 chiffres 1, le produit est de 1 et la somme de 10. Pas de solution.
   Avec 9 chiffres 1 et un chiffre différent a, le produit est de a et la somme de $a+9$. Pas de solution.
   Avec 8 chiffres 1 et 2 chiffres a et b, le produit est de ab et la somme de $a+b+8$.
   L'égalité $a+b+8 = ab$ implique $(a-1)(b-1) = 9$ puis $a = 4$ et $b = 4$.
   On vérifie immédiatement que 4411111111 est bien un nombre magique.
   Par recherche exhaustive des cas où avec un traitement algorithmique, on peut démontrer que tout nombre magique à 10 chiffres s'écrit avec 2 chiffres 4 et 8 chiffres 1.
4. *Les symboles α et β sont des chiffres qui représentent des nombres strictement supérieurs à 1.*
   Quel est le plus grand nombre magique qui s'écrit sous la forme : $\alpha\beta 1\ldots$(que des 1)$\ldots 1$?

   Si $N = \alpha\beta 1\ldots$que des $1\ldots 1$ est un nombre magique, on considère que $\alpha \neq \beta$ et on note p le nombre de 1.
   $\alpha+\beta+p = \alpha\times\beta$ équivaut à $(\alpha-1)(\beta-1) = p+1$.

N comporte alors nécessairement $(\alpha-1)(\beta-1)+1$ chiffres dans son écriture.
Le produit maximal $(\alpha-1)(\beta-1)$ est 56 (i.e. 8×7), ce qui correspond à $p=55$.
Tout autre produit donnera un nombre magique plus petit puisqu'écrit avec moins de chiffres. Le plus grand nombre magique qui s'écrit sous la forme $\alpha\beta 1\ldots$que des $1\ldots 1$ est : 9 8 1...(que des 1) ... 1 , qui finit par 55 chiffres 1.

5. *Existe-t-il une infinité de nombres magiques ?*
Il existe bien une infinité de nombres magiques.
Pour le prouver, on peut par exemple construire une suite de nombres magiques. On pose $U_2=22$, $U_3=22211$, $U_4=222211111111$ et pour tout entier $n\geqslant 2$, $U_n=2\ldots$que des $2\ldots 21\ldots$que des $1\ldots 1$ écrit avec n chiffres 2 suivis de 2^n-2n chiffres 1.
On vérifie que pour tout entier $n\geqslant 2$, Un est un nombre magique :
   - le nombre de chiffres 1 est bien défini puisque pour tout entier $n\geqslant 2$, $2^n\geqslant 2n$.
   - la somme des chiffres de U_n est $2\times n+1\times(2^n-2n)$ soit 2^n
   - le produit des chiffres de U_n est aussi 2^n.

   Il suffit enfin de s'assurer que tous les termes Un sont différents.
C'est simplement le cas car (U_n) est une suite strictement croissante.
Pour tout entier $n\geqslant 2$, Un s'écrit avec 2^n-n chiffres et U_{n+1} avec $2^n+1-(n+1)$ chiffres.
De plus, pour tout entier $n\geqslant 2$, $2^{n+1}-(n+1)-2^n+n=2^n-1$ et $2^n>1$.
Donc pour tout entier $n\geqslant 2$ U_n s'écrit avec strictement moins de chiffres que U_{n+1}, ce qui implique que $U_{n+1}>U_n$.

RETOUR AU SOMMAIRE

MONTPELLIER

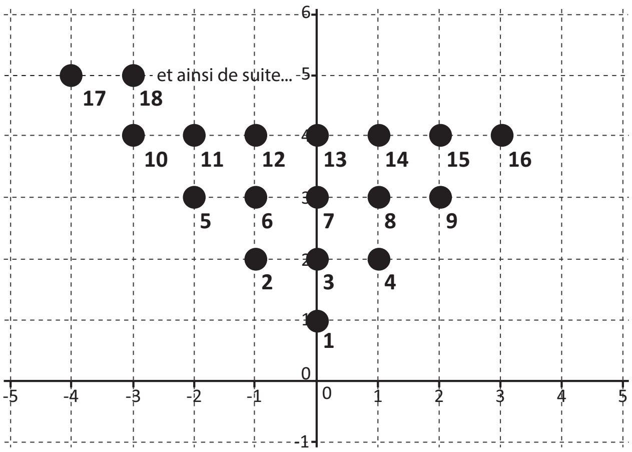
Troisième exercice

Séries autres que S

Jeu de jetons

Éléments de solution

La suite de nombres formée par les numéros des pions de l'extrémité droite de chacune des lignes, correspond à la suite de terme général n^2 pour $n \geqslant 1$, ce qui revient à remarquer que le pion situé à l'extrémité droite de la ligne de pions portée par la droite d'équation $y = n$ avec $n \geqslant 1$ porte le numéro n^2 et sont situés sur la droite d'équation $y = x + 1$.



1. Quelles sont les coordonnées du jeton numéro 2016 ?

   Puisque $44^2 = 1936$ et $45^2 = 2025$, le pion numéroté 2016 se situe sur la même ligne que le pion numéroté 2025.
   Le pion numéroté 2025 a pour coordonnées (44,45), donc l'ordonnée du pion numéroté 2016 sera 45 et son abscisse sera ainsi de 35.
   Ainsi, le pion numéroté 2016 sera au point de coordonnées (35,45).

2. Quel est le numéro porté par le jeton positionné au point de coordonnées (1998, 2016) ?

   Le pion situé en (1998,2016) est situé sur la ligne se terminant par $2016^2 = 4\,064\,256$ puisque appartenant à la droite d'équation $y = 2016$.
   L'abscisse du pion numéroté 2016^2 est donc 2015. Le numéro du pion situé en (1998, 2016) s'obtient à partir du calcul $2016^2 - (2015 - 1998)$.
   Le pion situé en (1998, 2016) est donc le pion numéroté 4 064 239

RETOUR AU SOMMAIRE

NANCY-METZ

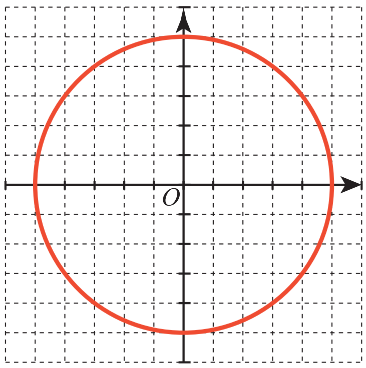
Premier exercice

Toutes séries

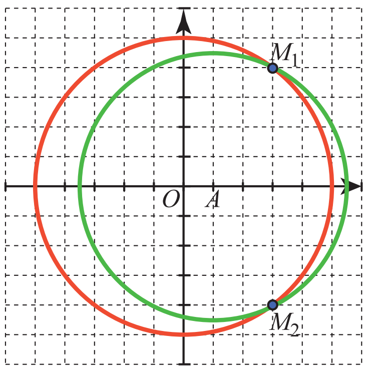
Sauvetage en montagne

Éléments de solution

1. L'ensemble des positions possibles de la balise est l'ensemble des points dont la distance à O est 5m, soit le cercle de centre O et de rayon 5.



2. La balise se trouve aussi sur le cercle de centre A et de rayon 4,5 m. Elle se trouve donc en l'un des deux points d'intersection de ces deux cercles.



3. La distance de M à O est $\sqrt{x^2+y^2}$.

4. La distance de M à A est $\sqrt{(x-1)^2+y^2}$.

5. On doit donc résoudre le système : $\left\{\begin{array}{rcl} x^2+y^2 & = & a^2 \\ (x-1)^2-y^2 & = & b^2 \end{array}\right.$

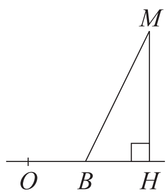
   En retranchant les deux équations, on fait disparaître y, et l'on obtient :

$$x^2-(x-1)^2 = a^2-b^2 \Leftrightarrow 2x-1 = a^2-b^2 \Leftrightarrow x = \frac{a^2-b^2+1}{2}.$$

5. Après ses deux mesures, Sophie est capable de déterminer l'abscisse de la position de la balise, à l'aide de la formule ci-dessus.
   Elle peut aussi déterminer son ordonnée, au signe près $y = \pm\sqrt{a^2 - x^2}$.
   Elle n ?a alors plus qu'à explorer les deux positions possible pour retrouver la balise.

   Remarque :
   $a^2 - x^2$ doit être positif, ce qui correspond au fait que les deux cercles se rencontrent. Un petit calcul montre que :
   $$a^2 - x^2 = \frac{((a-b)^2 - 1)((a+b^2) - 1)}{4}$$

6. Si B est un point quelconque de l'axe des abscisses, on voit sur la figure ci-dessous que la distance BM est supérieure ou égale à la distance BH (H étant le projeté orthogonal de M sur l'axe des abscisses), et que cette distance est minimale lorsque B est en H.



   En effet, d'après le théorème de Pythagore : $MB^2 = MH^2 + HB^2 > MH^2$, avec égalité si et seulement si $HB = 0$.

7. Une méthode pour trouver la balise consiste donc à parcourir l'axe des abscisses jusqu'à obtenir une distance minimale sur le récepteur. On connaît alors l'abscisse de la position de la balise.
   On se déplace alors dans la direction perpendiculaire, de la distance indiquée par le récepteur, dans le sens qui réduit cette distance.

RETOUR AU SOMMAIRE

NANCY-METZ

Deuxième exercice

Toutes séries

Somme et Produit

Éléments de solution

Nous sommes deux nombres de 2 chiffres.
Notons pour commencer que $10 \leqslant N_1 \leqslant 99$ et $10 \leqslant N_1 \leqslant 99$, donc $20 \leqslant N_1 + N_2 \leqslant 198$. Ainsi le chiffre des centaines de $N_1 + N_2$ ne peut être qu'un 1, et $100 \leqslant N_1 + N_2 \leqslant 109$.
En intercalant un 0, on peut obtenir un nombre entre 1000 et 1009, donc le produit N_1N_2 doit être un nombre pair entre 2000 et 2018.
Remarquons aussi que

$$N_1 + N_2 = 10(a+c) + b + d \text{ et } N_1N_2 = 100ac + 10(ad+cb) + bc.$$

La parité de N_1N_2 est celle de bc, donc ce produit bc est pair, et donc b et c ne doivent pas être tous deux impairs.

1. Si $b = 3$ et $d = 6$ (ou le contraire), alors $N_1 + N_2 = 109$, et N_1N_2 doit être égal à 2018. Malheureusement, $2018 = 2 \times 1009$, et 1009 est un nombre premier, ce qui ne permet pas d'écrire 2018 comme produit de deux nombres de deux chiffres.
   Un autre argument, plus dans l'esprit du programme, consiste à dire qu'on doit avoir $a + c = 10$, et étudier les cas possibles :

a	1	2	3	4	5	6	7	8	9
c	9	8	7	6	5	4	3	2	1
N_1	13	23	33	43	53	63	73	83	93
N_2	96	86	76	66	56	46	36	26	16
N_1N_2	1248	1978	2508	2838	2968	2898	2628	2158	1488

   On constate qu'on n'obtient jamais le 2018 attendu.

2. Si $a = 4$ et $c = 6$ (ou le contraire), le produit N_1N_2 est égal à

$$AB = (40+b)(60+d) = 2400 + 20(2b+3d) + bd \geqslant 2400.$$

   Il est donc beaucoup trop grand pour convenir au problème.

3. Supposons que $b + d \leqslant 9$.
   a) Comme $0 \leqslant b + c \leqslant 9$, $N_1 + N_2 \leqslant 10(a+c) + 9$. Pour que ce nombre comporte trois chiffres, il faut donc $a + c > 10$, et pour que le chiffre des centaines soit un zéro, il faut $a + c \leqslant 10$.
   b) On a donc : $N_1 + N_2 = 100 + b + d$. Comme dans la question 2), pour que le nombre N_1N_2 ne soit pas trop grand, il faut $ac \leqslant 20$, ce qui ne laisse que deux possibilités : $a = 1$, $c = 9$, ou $a = 2$, $c = 8$ (ou le contraire).
   - Le premier cas ($\{a,c\} = \{1,9\}$) donne :

$$N_1N_2 = 900 + 10(d+9b) + bd \text{ ou } 900 + 10(9d+b) + bd.$$

Mais de $b+d \leqslant 9$, on tire facilement que $d+9b \leqslant 81$ (la valeur maximale est atteinte pour $b=9$ et $d=0$, et le raisonnement est le même pour $9d+b$), et $bd \leqslant 20$ (la valeur maximale est atteinte pour $b=4$, $d=5$).
Ainsi, $N_1N_2 \leqslant 900+810+20=1730$, et N_1N_2 ne peut être supérieur à 2000.

- Le second cas ($\{a,c\}=\{2,8\}$) donne :

$$N_1N_2 = 1600+10(2d+8b)+bd \text{ ou } 1600+10(8d+2b)+bd.$$

On peut se contenter d'étudier le premier cas. On a, en envisageant les valeurs extrêmes de d :

$$1600+80b \leqslant N_1N_2 \leqslant 1780+89b.$$

Pour qu'une valeur de d puisse convenir, il faut donc

$$2000 \leqslant 1780+89b \Leftrightarrow b \geqslant 3 \text{ et } 1600+80b \leqslant 2018 \Leftrightarrow b \leqslant 5.$$

  - Pour $b=4$, on obtient : $N_1N_2 = 1920+24d$, et la seule valeur de d permettant de « tomber » entre 2000 et 2018 est $d=4$.
    On a alors : $24+84=108$, et $24\times 84=2016$. **On a trouvé une solution ! ! !**
  - Pour $b=5$, on obtient : $N_1N_2 = 2000+25d$, et la seule valeur de d pouvant convenir est $d=0$.
    Mais $25+80=105$, alors que $25\times 80=2000$, ce n'est donc pas une solution.

4. Supposons que $b+d \geqslant 10$.
   a) On a vu qu'il fallait alors $a+c=9$, de manière à ce que la retenue de $b+c$ donne une somme comprise entre 100 et 109.
   b) Les plus grandes valeurs possibles de b et d sont 9 et 9 (et même ce cas est normalement exclus), donc

$$N_1N_2 = 100ac+10(ad+cb)+bc \leqslant 100ac+90(a+c)+81 = 100ac+891.$$

   Il faut donc $100ac \geqslant 2000-891$, soit $ac \geqslant 12$. Il y a donc trois cas à étudier : $a=2$ et $c=7$, $a=3$ et $c=6$ ou $a=4$ et $c=5$.

   - Si $a=2$ et $c=7$, alors $N_1N_2 = 1400+10(2d+7b)+bd$. Donc, en constatant que $1 \leqslant d \leqslant 9$:

$$1420+72b \leqslant N_1N_2 \leqslant 1580+79b.$$

   Il faut donc :

$$1420+72b \leqslant 2018 \Leftrightarrow b \leqslant 8 \text{ et } 1580+79b > 2000()b \geqslant 6.$$

     - Si $b=6$, $N_1N_2 = 1820+26d$, la seule valeur possible de d est $d=7$.
       Mais $26+77=103$, alors que $26\times 77=2002$, ce n'est donc pas une solution.
     - Si $b=7$, $N_1N_2 = 1890+27d$, mais aucune valeur de d ne permet d'obtenir un produit entre 2000 et 2018.
     - Si $b=8$, alors $N_1N_2 = 1960+28d$, la seule valeur possible de d est $d=2$.
       Mais $28+72=100$, alors que $28\times 72=2016$, on n'a pas non plus de solution.
   - Si $a=3$ et $c=6$, $N_1N_2 = 1800+10(3d+6b)+bd$. Comme $d>1$, $N_1N_2 > 1830+61b$, donc pour que ceci soit inférieur à 2018, il est nécessaire que $b \leqslant 3$.
     Mais alors d doit être supérieur à 7, ce qui entraîne $N_1N_2 \geqslant 2010+67b \geqslant 2077$ puisque b ne peut être égal à 0. On ne trouve donc pas de solution.
   - Si $a=4$, $c=5$, $N_1N_2 = 2000+10(4d+5b)+bd$, et on voit encore plus facilement que comme b et d doivent être non nuls, $N_1N_2 \geqslant 2091$. Donc ce nouveau pas de solution.
     Ceci termine l'étude du cas $b+d \geqslant 10$, qui ne donne pas de solution.
5. On n'a donc trouvé qu'un seul couple solution : $N_1=24, N_2=84$.

RETOUR AU SOMMAIRE

NANTES

Premier exercice

Toutes séries

Le jeu du court-circuit

Éléments de solution

Partie A : les trois premières parties

1. Au premier tour, Aïssa marque 6 points, au second tour zéro pour tout le monde, au troisième tour, Paul court-circuite Aïssa et marque 9 points, ensuite Aïssa marque successivement 5, 6 et enfin 9 neuf points, pour un total de 26 points.
2. a) a) Aïssa gagne en un coup si elle court-circuite Paul avec un 4 (contre 5) ou un 5 (contre 6).

   b) b) Il est impossible de marquer 8 points en un coup.
3. Alice doit éviter le 6 qui laisse la possibilité à Paul de jouer 5, marquer 11 points et remporter la partie. On peut conseiller de jouer 4, anticipant sur un éventuel 5, seul moyen pour Paul de gagner en un coup.
4. Décrire la partie la plus courte possible à ce jeu.
   Deux courts-circuits successifs à 11 points

Partie B : Comment gagner ?

Voici un tableau indiquant le nombre de points gagnés à chaque coup par Aïssa :
En ligne : le choix de Paul, en colonne : le choix d ?Alice.

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**moyenne**
1	0	3	-3	-4	-5	-6	$-2,50$
2	-3	0	5	-4	-5	-6	$-2,17$
3	3	-5	0	7	-5	-6	$-1,00$
4	4	4	-7	0	9	-6	0,67
5	5	5	5	-9	0	11	2,83
6	6	6	6	6	-11	0	2,17

Si Aïssa joue systématiquement 5 , elle marque en moyenne 2.83 points et il s'agit clairement de la meilleure stratégie.

Partie C : Paul s'améliore

	4	**5**	**6**	**moyenne**
1	-4	-5	-6	$-5,00$
2	-4	-5	-6	$-5,00$
3	7	-5	-6	$-1,33$
4	0	9	-6	1,00
5	-9	0	11	0,67
6	6	-11	0	$-1,67$

La meilleure stratégie consiste à jouer systématiquement 4.

Partie D : Paul resserre

Le gain d'Aïssa est maintenant paramétré :

	5	**6**	**moyenne**
4	$9p$	$-6(1-p)$	$15p-6$
5	0	$11(1-p)$	$11-11p$
6	$-11p$	0	$-11p$

Si elle joue 4, 5, 6 avec les probabilités indiquées, son gain moyen devient :

$$\text{Gain } = x(15p-6)+y(11-11p)+(1-x-y)(-11p) = (26p-6)x+11y-11p.$$

Il est positif si, et seulement si :

$$y \geqslant \frac{6-2p}{11}x+p.$$

Il est facile de constater qu'Aïssa ne doit jamais jouer 6 ce qui revient à la condition $x+y=1$ et à l'inéquation :

$$1-x \geqslant \frac{6-26p}{11}x+p$$

Qui conduit à : $(17-26p)x \leqslant 1-p$.

On voit que la valeur $p = \dfrac{17}{26}$ est critique pour la partie.

RETOUR AU SOMMAIRE

NANTES

Deuxième exercice

Série S

Un jeu équitable

Éléments de solution

Après construction d'un arbre, on obtient que la probabilité de tirer une blanche suivie d'une noire vaut :

$$\frac{a}{n} \times \frac{n-a}{n-1}$$

Tandis que tirer une noire suivie d'une blanche vaut :

$$\frac{n-a}{n} \times \frac{a}{n-1}$$

Par somme, la probabilité de tirer deux boules de couleurs différentes est

$$\frac{2a(n-a)}{n(n-1)}$$

• Le jeu est équiprobable si, et seulement si :

$$\frac{2a(n-a)}{n(n-1)} = \frac{1}{2}$$

Qui équivaut à : $n = (2a-n)^2$. Ainsi n est un carré parfait : il existe un entier k tel que $n = k^2$.

$$k^2 = (2a-k^2)^2 \Leftrightarrow 2a = k^2 + k \text{ ou } 2a = k^2 - k$$

Les possibilités pour a sont donc :

$$a = \frac{k(k+1)}{2} \text{ ou } a = \frac{k(k-1)}{2}$$

(la somme vaut k^2, c'est-à-dire n)

$2 \leqslant n \leqslant 50$ entraîne $1 \leqslant k \leqslant 7$. On obtient les couples (a, n) :
(1,4),(3,4),(3,9),(6,9),(6,16),(10,16),(10,25),(15,25),(15,36),(21,36),(21,49),(28,49).

RETOUR AU SOMMAIRE

NANTES

Troisième exercice

Séries autres que S

Le nombre de Green

Éléments de solution

1. On commence par placer les coefficients sur la figure.
   a) On choisit un point « à gauche en haut », appelé A ; le calcul se présente ainsi :

   $$N = (-3)\times 1+1\times 3+1\times 2+(-2)\times 7+3\times 9+1\times 5+(-1)\times 2 = 18.$$

   b) Le nombre de Green est une somme de la forme $N = c_1y_1+\cdots+c_ny_n$ où $c_1 = 1$et y_i est le $i^{\text{ième}}$ déplacement « vertical ». Choisissons un autre point du contour, disons B. A un déplacement horizontal près, on peut supposer que le point B est sur un côté vertical du contour. Ce dernier correspond à un déplacement y_k de la liste ci-dessus.

   1er point de vue. **L'élève garde les coefficients originaux** (1 pour la colonne de A etc.) tout en calculant à partir de B. Il constate qu'en parcourant le contour, il reconstitue terme à terme la somme N calculée ci-dessus. D'où l'égalité.

   2nd point de vue. **L'élève « décale » les coefficients pour démarrer avec le coefficient multiplicatif 1**). Ce déplacement induit un décalage dans la valeur des coefficients, celui de y_k valant désormais 1. Ce décalage est égal à la différence des abscisses de A et B. Notons-le r.

   Lors du calcul du nombre de Green, tous les déplacements verticaux y_i seront parcourus exactement une fois. On les retrouve dans la somme, seuls leurs coefficients respectifs changent. On a : $N' = c'_1y_1+\cdots+c'_ny_n = (c_1-r)y_1+\cdots+(c_n-r)y_n$. On développe et on arrange :

   $$N = c_1y_1+\cdots+c_ny_n - r(y_1+\cdots+y_n)$$

   La première somme est le nombre de Green N calculé à partir de A. La somme entre parenthèses est la somme algébrique de tous les déplacements verticaux effectués ; puisqu'on revient au point de départ, elle est nulle.

   c) c. Une figure d'aire 7 convient. L'élève doit justifier cette valeur pour sa figure.

2. a) Le domaine de gauche a un nombre de Green $N_1 = -3+3+2+8-2 = 8$.Celui de droite a un nombre de Green $N_2 = -8-14+27+5 = 10$. On voit que $N_1+N_2 = 18 = N$ obtenu en question 1.a

   Le résultat ne dépend pas de la droite verticale choisie. Soit $N = c_1y_1+\cdots+c_ny_n$ le nombre de Green de la figure avant scission, et N_1 et ? après. Après la scission, on doit tenir compte du coté vertical apparu. Celui-ci intervient dans le calcul du nombre de Green de chacun des deux domaines obtenus, avec un coefficient identique mais un signe opposé. On écrit :
   Avant scission : $N = c_1y_1+\cdots+c_ky_k+c_{k+1}y_{k+1}+\cdots+c_ny_n$
   Après scission : $N = c_1y_1+\cdots+c_ky_k+cy-cy+c_{k+1}y_{k+1}+\cdots+c_ny_n = N_1+N_2$.

   b) Quand on coupe par une droite horizontale, certains cotés verticaux du domaine initial sont coupés en deux, d'autres non. Pour les premiers, le déplacement vertical se sépare en $y_k = y'_k + y"_{k+1}$(les deux nouveaux coefficients ont le même signe). Dans le calcul du nombre de Green, les termes concernés se séparent en $c_ky_k = c_ky'_k + c_ky"_{k+1}$. Chacun des termes obtenus intervient dans le calcul du nombre de Green du domaine inférieur ou du domaine supérieur. On voit que l'on tient compte ainsi une et une seule fois de chaque coté vertical des deux domaines. Quant aux cotés du domaine initial qui ne sont pas coupés, ils interviennent ou bien dans le calcul du domaine inférieur, ou bien dans celui du domaine supérieur. On retrouve donc la formule $N = N_1 + N_2$. La propriété est conservée.

c) Pour un domaine comportant un trou, on calcule le nombre de Green du domaine global (sans tenir compte du trou) et on soustrait celui du domaine définissant le trou.

3. a) Le nombre de Green d'un carré de coté 1 vaut 1. On suppose que le coefficient du coté gauche est ? . Les coefficients correspondant aux cotés verticaux sont c_k et $c_k + 1$. Il vient $N = (-1) \times c_k + 1 \times (c_k + 1) = -c_k + c_k + 1 = 1$.

   b) Un domaine étant donné, on le coupe en deux par des droites horizontales et verticales du quadrillage, jusqu'à séparer ce domaine en carrés élémentaires de cotés 1. Ce qui précède montre que le nombre de Green de départ est égal à la somme des nombres de Green de tous les carrés.
   Si le domaine contient n carrés, alors son nombre de Green vaut n.
   On voit que le nombre de Green **mesure l'aire du domaine initial**, comptée en unité d'aire (un carré de coté 1).

Compléments et commentaires de Max Hochart

Cet exercice est une approche discrète de la formule de Green-Riemann permettant de calculer l'aire délimitée par une courbe paramètrée. Dans le cas d'une courbe

$$t \in [0,1] \mapsto (x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2$$

continue et $\mathscr{C}^1$ par morceaux, simple (sans point double sur $]0,1[$) et fermée (telle que $x(0) = x(1)$ et $y(0) = y(1)$), l'aire délimitée par la courbe est

$$\mathscr{A} = \int_0^1 x(t) y'(t) \mathrm{d}t.$$

Dans le cas des domaines étudiés dans le sujet, le déplacement sur la frontière est soit horizontal (y est constante), soit vertical ($x = cte$). On obtient donc

$$\mathscr{A} = \sum_{i=1}^{n} x_i (y_{i+1} - y_i),$$

où les couples (x_i, y_i) sont les coordonnées des sommets du domaine étudié. Ceci explique la nullité des déplacements horizontaux et le choix fait pour le signe des déplacements verticaux.

Cet exercice pourra motiver cette formule : en faisant une approximation par des petits carrés de la surface délimitée par une courbe, la version discrète rend compréhensible la version continue bien difficile à expliquer.

RETOUR AU SOMMAIRE

NICE

Premier exercice

Toutes séries

A travers les rues

Éléments de solution

1. **Comparaison de la distance euclidienne et de la distance du Taxi**

   a) On considère dans un repère orthonormé les points $A(3;2)$ et $B(-3;4)$.
   alors $d(A,B) = \sqrt{(-3-3)^2+(4-2)^2} = \sqrt{36+4} = \sqrt{40}$ et $d_t(A,B) = |-3-3|+|4-2| = 6+2 = 8$.
   Ainsi $d(A,B) < d_t(A,B)$.

   b) $A(5;2)$ et $B(5;4)$ alos $d(A,B) = \sqrt{(5-5)^2+(4-2)}^{=}\sqrt{0+4} = 2$ et $d_t(A,B) = |5-5|+|4-2| = 0+2 = 2$.
   Ainsi $d(A,B) = d_t(A,B)$.

   c) En construisant un triangle ABC rectangle en C dont les côtés sont parallèles aux axes du repère, on remarque que $d(A,B)$ représente l'hypoténuse AB et $d_t(A,B)$ représente la somme des côtés $AC+BC$; il s'agit donc de comparer l'hypoténuse et la somme des cotés dans un triangle rectangle. On peut aussi revenir aux formules : $d(A,B) = d_t(A,B)$ lorsque $x_A = x_B$ ou $y_A = y_B$.
   En effet, $d(A,B) = d_t(A,B) \Leftrightarrow \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2} = |x_B-x_A|+|y_B-y_A|$.
   Alors $\left(\sqrt{x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)}\right)^2 = (|x_B-x_A|+|y_B-y_A|)^2$, ce qui entraîne

   $$(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2 = (x_B-x_A)^2+2\times|x_B-x_A|\times|y_B-y_A|+(y_B-y_A)^2$$

   en développant, et donc $|x_B-x_A|\times|y_B-y_A| = 0$. Autrement dit, on obtient une équation produit nul qui nous permet de conclure que si $d(A,B) = d_t(A,B)$, alors $x_A = x_B$ ou $y_A = y_B$. Inversement, si $x_A = x_B$ ou $y_A = y_B$ alors $d(A,B) = d_t(A,B)$.

   On ne peut pas avoir $d(A,B) > d_t(A,B)$ puisque, de la même manière que précédemment, cela entraînerait $|x_B-x_A|\times|y_B-y_A|$, ce qui est impossible par définition des valeurs absolues.

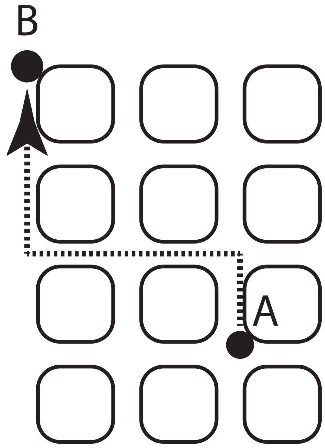
   d) On peut observer que dans un carré de côté 1, la diagonale mesure $\sqrt{2}$. Il suffit donc de prendre A(1 ;0) et B(0 ;1), on a alors $d(A,B) = \sqrt{2}$ et $d_t(A,B) = 2$; comme $\sqrt{2}\times\sqrt{2} = 2$, on en déduit que $d_t(A,B) = \sqrt{2}\times d(A,B)$.

   e) Peut-on trouver des points A et B distincts tels que $d_t(A,B) = 2\times d(A,B)$?

2. **Plans en damier**

   a) $d(A,B) = \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2} = \sqrt{x_{\overrightarrow{AB}^2}+y_{\overrightarrow{AB}}} = \sqrt{(-2)^2+3^2} = \sqrt{13}$.

b) Un itinéraire sans détour entre A et B nécessite **exactement 5 déplacements** : 2 horizontalement vers la gauche et 3 verticalement vers le haut, dans un ordre indifférent. Le tracé proposé, par exemple, correspond au déplacement $HGGHH$ (H pour un déplacement vertical d'une unité vers le haut et G pour un déplacement horizontal d'une unité vers la gauche). Ainsi, on recherche le nombre total de tels trajets, ce qui revient à se demander combien de manières il y a de placer deux G parmi 5 emplacements (les trois H venant automatiquement remplir les trois emplacements restants) : 5 possibilités pour le premier G, 4 pour le second, puis on divise par deux , car l'ordre des G ne compte pas : $\dfrac{5\times 4}{2}=10$ itinéraires possibles entre A et B. On pouvait aussi utiliser une combinaison : $\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}=10$



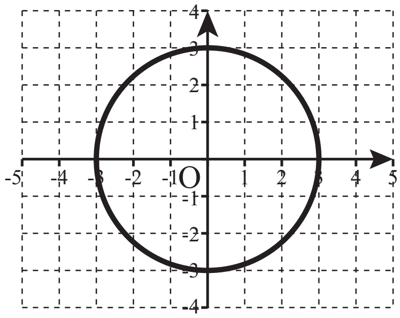
La distance « taxi » est alors de 5 unités dans tous les cas.

3. **Des cercles avec des angles…**

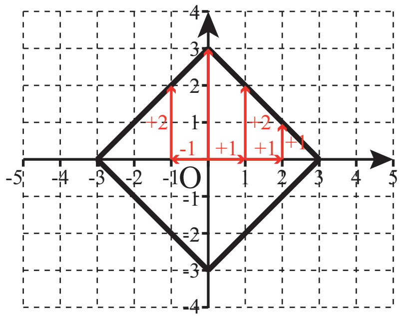
On considère dans cette partie le point O d'origine d'un repère orthonormé du plan.

a) $d(O,M)=\sqrt{(X_M-x_O)^2+(y_M-y_O)^2}=\sqrt{x_M^2+y_M^2}$.

Alors $d(O,M)=3 \Leftrightarrow \sqrt{x_M^2+y_M^2}=3$, soit $x_M^2+y_o^2=9$. On reconnait une équation du cercle de centre O et de rayon 3, ou bien on constate que cela entraîne que $y_M=\sqrt{9-x_M^2}$ ou $y_M=-\sqrt{9-x_M^2}$ pour $x_M\in[-3;3]$ et en traçant les deux courbes correspondantes, on obtient bien le cercle de centre O et de rayon 3.



b) $d_t(O,M)=|x_M-x_O|+|y_M-y_O|=|x_M|+|y_M|$. Alors $d_t(O,M)=3\Leftrightarrow |x_M|+|y_M|=3$. Pour trouver un point M, on part de O et on se déplace de 3 unités, mais en combinant seulement des déplacements horizontaux ou verticaux. On obtient donc le carré de centre O dont les diagonales mesurent 6 unités et sont dirigées selon les axes.



RETOUR AU SOMMAIRE

NICE

Deuxième exercice

Toutes séries

Nombres « riches »

Éléments de solution

Partie A

1. $30 = 2 \times 3 \times 5$ et $60 = 2^2 \times 3 \times 5$.
2. Diviseurs positifs de 30 : 1 ; 2 ; 3 ; 5 ; 6 ; 10 ; 15 ; 30
   Diviseurs positifs de 60 : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 10 ; 12 ; 15 ; 20 ; 30 ; 60.
3. Soit $n = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \cdots p_k^{\alpha_k}$ et d un diviseur de n.
   Alors $n = p_1^{\beta_1} \times p_2^{\beta_2} \times \cdots p_k^{\beta_k}$ avec $0 \leqslant \beta_i \leqslant \alpha_i$ pour tout $i \leqslant i \leqslant k$.
   On dénombre toutes les façons possibles de former la décomposition de ce diviseur : On a $(\alpha_1 + 1)$ choix pour l'exposant de p_1 dans la décomposition de d (en notant qu'attribuer l'exposant 0 revient à ne pas faire figurer p_1 dans la décomposition car $p_1^0 = 1$) . Puis on a $(\alpha_2 + 1)$ choix pour l'exposant de p_2 etc. jusqu'à $(\alpha_k + 1)$ choix pour p_k.
   Le nombre de diviseurs de n est donc bien $d(n) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)\ldots(\alpha_k + 1)$.
4. $10 = 2 \times 5 = (1+1) \times (4+1)$ donc par exemple $n = 5^4 \times 2^1 = 1250$ ou $n = 3^4 \times 2^1 = 162$ conviennent (possèdent exactement 10 diviseurs positifs).

Partie B

1. Par exemple : $10^2 - 1^2 = 99$; $8^2 - 5^2 = 39$ ou $11^2 - 10^2 = 21$ sont des nombres riches.
2. a) $76 = 2^2 \times 19$.

   b) $d(76) = (2+1) \times (1+1) = 3 \times 2 = 6$. Il y a donc 6 diviseurs positifs pour 76.

   c) On a : $76 = a^2 - b^2 = (a-b) \times (a+b)$.
   Or
   1- Les entiers $(a-b)$ et $(a+b)$ sont donc des diviseurs de 76, nombre pair.
   2- $(a-b)$ et $(a+bb)$ ont même parité.
   En effet : $a + b = (a-b) + 2b$ donc
   Si $a - b$ est pair alors $a - b = 2k$ avec k entier, soit $a + b = 2k + 2b = 2(k+b) = 2k'$ avec k' entier donc $a + b$ est pair.
   Si $a - b$ est impair, alors $a - b = 2k + 1$ avec k entier, soit $a + b = 2k + 1 + 2b = 2(k+b) + 1 = 2k' + 1$ avec k' entier donc $a + b$ est impair.

   Conclusion : $(a+b)$ et $(a-b)$ ont même parité et leur produit est pair ; ils sont donc pairs. On en déduit que ces deux entiers **sont des diviseurs pairs de 76**.

   d) On a démontré que $76 = (a-b)(a+b)$ alors $(a+b)$ et $(a-b)$ sont des diviseurs pairs de 76. Ceci limite les possibilités à : $\left\{\begin{array}{lcl} a-b & = & 2 \\ a+b & = & 38 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} a & = & 20 \\ b & = & 18 \end{array}\right.$.
   Ainsi $76 = 20^2 - 18r$ donc 76 **est un nombre riche**.
3. Soit $n = 2k + 1$ (avec k entier) un entier impair alors $n = (k+1)^2 - k^2$ ou $k + 1$ et k sont bien des entiers naturels. Donc n est riche et on conclut que **tout nombre impair est riche**.

4. Si n est un entier pair riche (il y en a au moins un : 76 !), alors on a vu que $n = (a+b)(a-b)$ avec $a+b$ et $a-b$ pairs. Ainsi $a+b$ et $a-b$ ont chacun au moins un facteur 2 dans leur décomposition en facteurs premiers et donc n **comprend au moins deux facteurs 2 dans sa décomposition.**
   Réciproquement, si n est un entier comportant au moins deux facteurs 2, alors $n = 2^2 \times m$; il est nécessairement pair et le système $\left\{\begin{array}{rcl} a-b & = & 2 \\ a+b & = & 2m \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} a & = & m+1 \\ b & = & m-1 \end{array}\right.$ permet d'écrire $n(m+1)^2-(m-1)^2$ et de conclure que n **est pair riche**.
5. On a vu que tous les impairs sont riches ; d'autre part, on a vu que les pairs riches sont exactement ceux qui ont deux facteurs 2 dans leur décomposition en facteurs premiers, autrement dit les multiples de 4. Autrement dit, il reste : 0 ; 2 ; 6 ; 10 ; 14 ; 18 ; 22 ; 26 ; 30 ; 34 ; 38 ; 42 ; 46 ; 50 entre 0 et 50 **qui ne sont pas riches.**

RETOUR AU SOMMAIRE

ORLÉANS - TOURS

Premier exercice

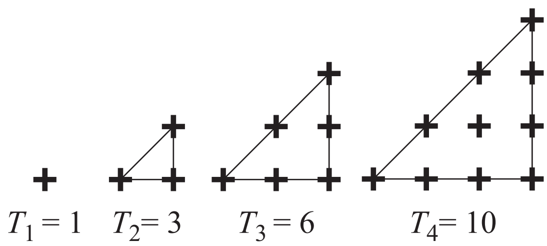
Toutes séries

Des nombres en forme

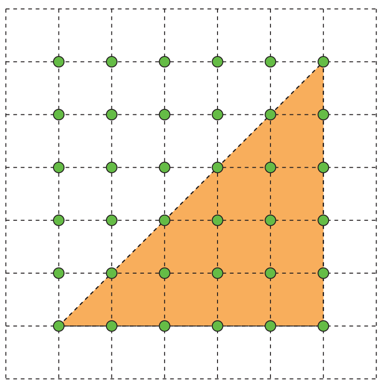
Éléments de solution

Première partie : Des nombres en triangle

Les figures ci-dessous décrivent la construction des premiers « nombres triangulaires ».



1. $T_5 = T_4 + 5 = 15$ et $T_6 = T_5 + 6 = 21$.
2. a) Figure de l'étape n° 5



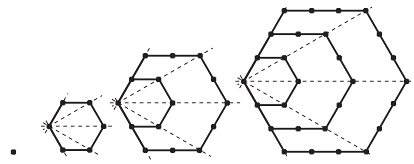
On remarque que le carré de coté 6 est obtenu en regroupant le triangle inférieur et le triangle supérieur qui contient autant de points que le triangle inférieur, moins ceux de la diagonale donc $6^2 = T_6 + T_6 - 6$.

b) On remarque de même que le carré de coté 20 est obtenu en regroupant le triangle inférieur et le triangle supérieur qui contient autant de points que le triangle inférieur, moins ceux de la diagonale donc $20^2 = 2 \times T_{20} - 20$.

c)) on a donc $n^2 = T_n + T_n - n$ donc $T_n = \dfrac{n^2 + n}{2}$.

3. On doit résoudre $2016 = \dfrac{n^2 + n}{2}$ soit $n^2 + n - 4032 = 0$ on a $\Delta = 16129 = 127^2$ donc $n = \dfrac{-1 + 127}{2} = 63$.

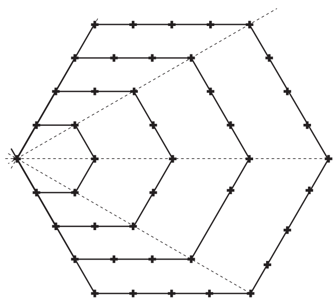
Deuxième partie : : Des nombres en hexagone



$H_1 = 1$ $H_2 = 6$ $H_3 = 15$ $H_4 = 28$

Ainsi H_4 est le quatrième nombre hexagonal et vaut 28. Pour tout entier naturel n non nul, on note H_n le nombre de points de la figure obtenus à la $n^{\text{ième}}$ étape. Les nombres H_n sont appelés des nombres hexagonaux.

1. Figure obtenue à l'étape n° 5

   $H_5 = 45$.
2. On a bien $T_4 = 10$.
3. On obtient H_n en réunissant 4 triangles T_n mais on a alors compté le point O 4 fois au lieu d'une et les points des trois diagonales (sauf O) ont étés comptés 2 fois au lieu d'une donc $H_n = 4T_n - 3 - 3 \times (n-1) = 4T_n - 3 \times n$.
4. On en déduit que $H_n = 4 \times \left(\dfrac{n^2+n}{2}\right) - 3 \times n = 2n^2 - n$.
5. On résout $2n^2 - n - 2016 = 0$
   32 est une solution entière positive donc 2016 est un nombre hexagonal.
6. a) On cherche à résoudre l'équation $2n^2 - n = \dfrac{p^2+p}{2}$ avec n et p entiers naturels non nuls soit $4n^2 - 2n = p^2 + p$ donc $(2n-p)(2n+p) = 2n+p$ donc $2n - p = 1$. On a donc $p = 2n - 1$.
   On en déduit que $H_n = T_{2n-1}$.
   On vérifie par exemple que $H_3 = T_5$

   b) Tout nombre triangulaire n'est pas hexagonal puisque par exemple $H_2 = 6 < T_4 = 10 < H_3 = 15$, donc il n'existe aucun entier n tel que $T_4 = H_n$.

RETOUR AU SOMMAIRE

ORLÉANS - TOURS

Deuxième exercice

Série S

Tas de sable, des tas de situations

Éléments de solution

1. **Cas où la plaque est un rectangle.**

   a) Dans le triangle OIS rectangle en O, $\tan\widehat{SIO} = \dfrac{SO}{OI}$ d'où $OI = \dfrac{\tan\widehat{SIO}}{OS}$.

   De même $OH = \dfrac{\tan\widehat{SHO}}{OS}$ et $OJ = \dfrac{\tan\widehat{SJO}}{OS}$.

   Par la propriété de l'angle de talus, comme $\widehat{SHO} = \widehat{SIO}? = \widehat{SJO}$? alors $OJ = OH = OI$.

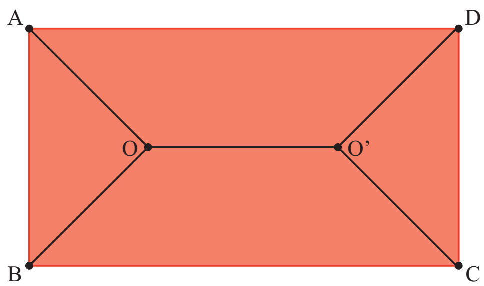
   Le point O est donc équidistant de (BC) et (AB), donc il appartient à la bissectrice de $\widehat{B}$. De même O est donc équidistant de (AB) et (AD), donc il appartient à la bissectrice de $\widehat{A}$.

   Le point O est l ?intersection des bissectrices des angles $\widehat{A}$ et $\widehat{B}$

   b) De même le point O' est l'intersection des bissectrices des angles $\widehat{C}$ et $\widehat{D}$

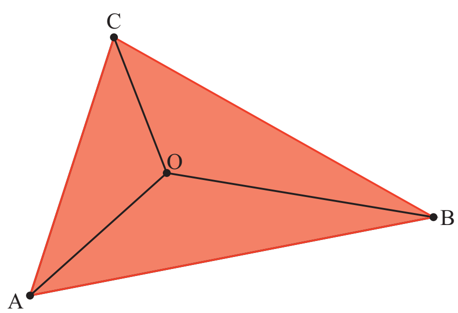
   c) O et O' sont équidistants de (BC) et (AB). Comme de plus (BC) et (AB) sont parallèles car ABCD est un rectangle alors (OO') est parallèle à (BC) et (AB).

   d) Construction.



   e) Lorsque la plaque est un carré, les bissectrices des angles $\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}, \widehat{D}$ sont concourantes en O (c'est-à-dire que les points O et O' sont confondus).

2. **Cas où la plaque est un triangle.**



On note I, J et K les projetés orthogonaux de O respectivement sur [AB],[BC] et [AC]. Comme les triangles SOI, SOJ et SOK sont rectangles en O, comme précédemment même $OJ = \dfrac{\tan\widehat{SJO}}{OS}$, même $OI = \dfrac{\tan\widehat{SIO}}{OS}$ et même $OK = \dfrac{\tan\widehat{SKO}}{OS}$.
D'après la propriété de l'angle de talus, on a donc $OJ = OK = OI$.
Le point O est donc équidistant des cotés [AB],[BC] et [AC] c'est-à-dire que le point O est l'intersection des bissectrices des angles $\widehat{A}, \widehat{B}$ et $\widehat{C}$.

3. **Cas où la plaque est en « L ».**

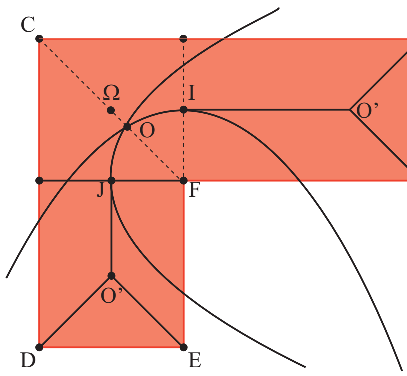
- Comme précédemment par la propriété de l'angle de talus, O' (resp. O") est le point d'intersection des bissectrices $\widehat{D}$ et $\widehat{E}$? (resp. $\widehat{A}$ et $\widehat{B}$).
- i. Le point M appartient à l'arc IO si et seulement si $MF = MK$.
  Dans le repère $(\Omega; I, J)$: F(1,1) et K(x ,-1).
  $MF = \sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}$ et $MK = \sqrt{(x-x)^2+(y-(-1))^2} = \sqrt{(y+1)^2}$.
  $MF = MK \Leftrightarrow MF^2 = MK^2 \Leftrightarrow (x-1)^2+(y-1)^2 = (y+1)$.

  ii. M appartient à l'arc IO si et seulement si $(x-1)^2+(y-1)^2 = (y+1)^2$. Or :

$$(x-1)^2+(y-1)^2 = (y+1)^2 \Leftrightarrow x^2-2x+1+y^2-2y+1 = y^2+2y+1 \Leftrightarrow y = \frac{1}{4}(x^2-2x+1).$$

  $y = \dfrac{1}{4}(x^2-2x+1)$ est l'équation d'une parabole ce qui prouve que l'arc IO est un arc de parabole !

c) On dispose de la plaque « en L » fournie en annexe 2 à rendre avec la copie.
Tracer avec précision la vue de dessus du tas de sable obtenu avec une telle plaque.



RETOUR AU SOMMAIRE

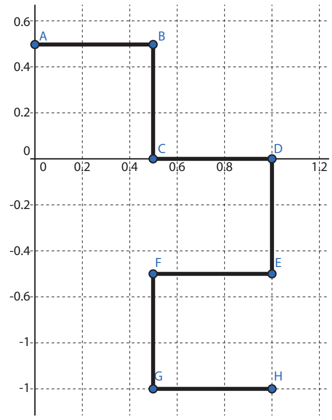
ORLÉANS - TOURS

Troisième exercice

Séries autres que S

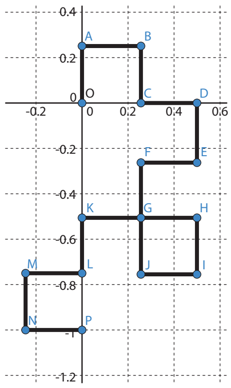
Gauche, droite !

Éléments de solution



1. a) $Pliage_3$ = (d,d,g,d,d,g,g).

   b) H a pour coordonnées $(1;-1)$.

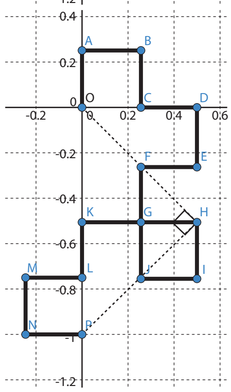


2. a) $Pliage_4$ = (d,d,g,d,d,g,g,d,d,d,g,g,d,g,g).

   b) P a pour coordonnées $(0;-1)$.

   c) Le codage $Pliage_4$ débute comme le codage $Pliage_3$: d,d,g,d,d,g,g on parvient ainsi au point H. En ce point on tourne à droite pour entamer la deuxième partie du pliage. Cette deuxième partie est obtenue par « inversion » du codage $Pliage_3$: $\boxed{\text{d,d,g}}$, $\boxed{\text{d,d}}$, $\boxed{\text{g,g}}$ devient $\boxed{\text{d,d}}$, $\boxed{\text{g,g}}$, $\boxed{\text{d,g,g}}$. On obtient ainsi :

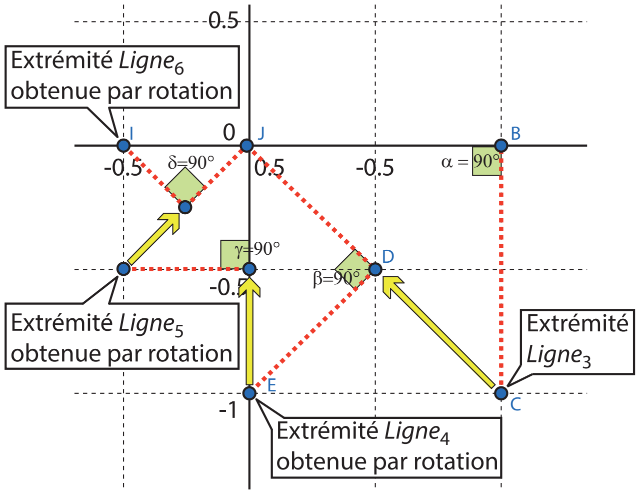
      $Pliage_4$ = ($\boxed{\text{d,d,g,d,d,g,g}}$,d,$\boxed{\text{d,d,g,g,d,g,g}}$)



   d) Dans un premier temps on remarque que le point H de $Ligne_4$ a pour coordonnées $(0,5;-0,5)$ qui sont obtenues par division par 2 des coordonnées de l'extrémité de $Ligne_3$. On effectue une rotation de centre H et d'angle droit dans le sens inverse des aiguilles d'une montre pour obtenir le point P. La deuxième partie de la ligne brisée est obtenue à partir de la première partie issue de $Ligne_3$ par cette rotation. Par des considérations géométriques (triangle OHP rectangle et isocèle en H) on obtient les coordonnées du point P.

3. Pour trouver l'extrémité de $Ligne_5$ on utilise la même méthode en déterminant l'image du point O par la rotation de centre P de coordonnées $(0;-0,5)$ et d'angle droit dans le sens inverse des aiguilles d'une

montre. On obtient le point de coordonnées $(-0,5;-0,5)$. On répète l'opération pour obtenir l'extrémité de *Ligne*$_6$. On obtient le point de coordonnées $(-0,5;0)$.



RETOUR AU SOMMAIRE

PARIS

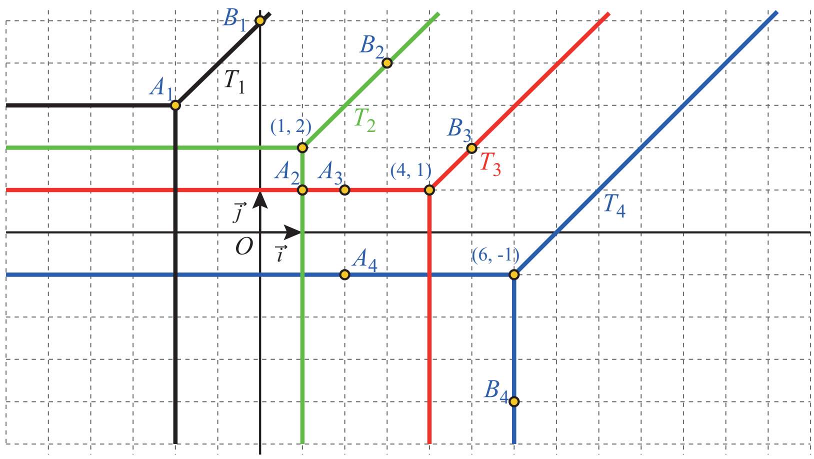
Premier exercice

Toutes séries

Droites tropicales

Éléments de solution

1. a) Tracer dans un même repère les droites tropicales suivantes et en préciser le point central.
   - droite tropicale T_1 passant par les points A_1 (-2 ;3) et B_1 (0 ; 5) ;
   - droite tropicale T_2 passant par les points A_2 (1 ; 1) et B_2 (3 ; 4) ;
   - droite tropicale T_3 passant par les points A_3 (2 ; 1) et B_3 (5 ; 2) ;
   - droite tropicale T_4 passant par les points A_4 (2 ; -1) et B_4 (6 ; -4).



   b) Soient deux points A et B quelconques du plan. On se place dans le repère orthonormé direct d'origine A. On discute alors selon les coordonnées de $B = (x;y)$ dans ce repère. Quitte à permuter les points A et B, on peut supposer que $x \geqslant 0$. On a alors selon les cas :
   - si $y \geqslant 0, y \geqslant x$, la droite tropicale de centre $(0; y-x)$ convient,
   - si $y \geqslant 0; x \geqslant y$, la droite tropicale de centre $(x-y; 0)$ convient,
   - si $y \leqslant 0$, la droite tropicale de centre $(x;0)$ convient.

   c) La propriété n'est pas vraie lorsque les points ne sont pas indépendants. Par exemples pour $A = (0;0)$ et $B = (1;0)$, la droite tropicale de point central B passe bien par A et B, mais ce n'est pas la seule : c'est également le cas pour toutes les droites tropicales de point central $(x;0)$ avec x un réel supérieur à 1.

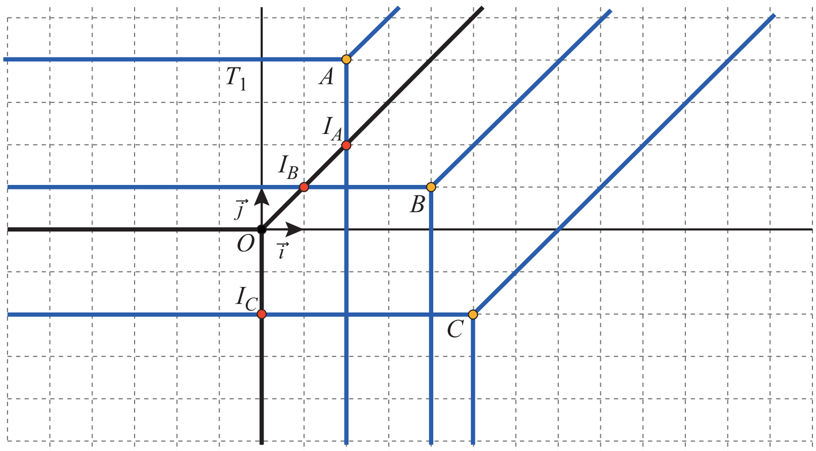
   d) Soient deux points A et B indépendants du plan. On se place dans le repère orthonormé direct d'origine A. Soit $(x;y)$ les coordonnées de B dans ce repère. Quitte à permuter les points A et B, on peut supposer que $x \geqslant 0$. Puisque A et B sont indépendants, l'abscisse de B ne peut être nulle, son ordonnée non plus et l'abscisse de B ne peut être égale à son ordonnée. Il n'y a donc que trois cas possibles :

$$(i) y > 0, y > x, \qquad (ii) y > 0, x > y, \qquad (iii) y < 0.$$

   Considérons une droite tropicale passant par A et B. On discute du cas $y > 0; y > x$ (les autres cas se traitent de la même manière) : A ne peut être sur les demi-droites de directions $\vec{i} + \vec{j}$ et $-\vec{i}$. De même B ne peut être sur les demies droites de directions $-\overrightarrow{i}$ et $-\overrightarrow{j}$. Le centre de la droite tropicale est alors uniquement déterminée par l'intersection de la droite verticale passant par A et de la droite oblique (de pente 45 degrés) passant par B : c'est la droite tropicale de centre $(0; y-x)$.

2. a) Étudier l'intersection de deux droites tropicales dont les points centraux sont dépendants.
Montrons que l'intersection de deux droites tropicales dans les points centraux sont dépendants est une demi-droite d'origine l'un des centres de ces droites et dirigé par $\overrightarrow{i}, -\overrightarrow{j}$ ou $\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}$.
Considérons deux droites tropicales T_1 et T_2 dont les points centraux $C_1=(x_1;y_1)$ et $C_2=(x_2;y_2)$ sont dépendants. Supposons par exemple que $x_1=x_2$, et quitte à changer les notations que $y_1 \leqslant y_2$. Alors l'intersection des deux droites tropicales T_1 et T_2 est la demi droite d'origine C_1 et dirigée par $-\overrightarrow{j}$. Les autres situations se traitent de la même façon.

b) Les points d'intersection de la droite tropicale de point central $O(0;0)$ avec les droites tropicales de points centraux $A(2;4)$, $B(4;1)$ et $C(5;-2)$.

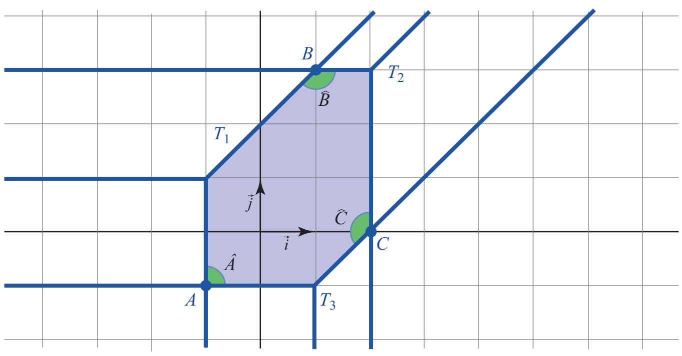


Les points d'intersection sont respectivement les points $I_A=(2;2)$, $I_B=(1;1)$ et $I_C=(-2;0)$.

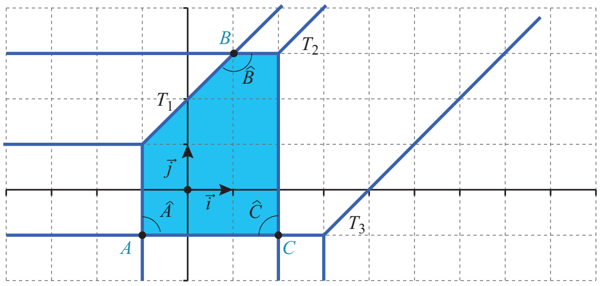
c) « Deux droites tropicales dont les points centraux sont indépendants se coupent toujours en un unique point ».
Notons A et B les points centraux des deux droites tropicales. On se place dans le repère orthonormé direct d'origine A. On discute alors selon les coordonnées de $B=(x;y)$ dans ce repère. Quitte à permuter les points A et B, on peut supposer que $x>0$. On a alors selon les cas :

- si $y>0; y>x$: les deux droites tropicales s'intersectent en un unique point $(x;x)$, intersection de la demi-droite de direction $-\overrightarrow{j}$ partant de B et de la demi-droite de direction $\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}$ partant de A.
- si $y>0; x>y$: les deux droites tropicales s'intersectent en un unique point $(y;y)$, intersection de la demi-droite de direction $-\overrightarrow{i}$ partant de B et de la demi-droite de direction $\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}$ partant de A.
- si $y<0$: les deux droites tropicales s'intersectent en un unique point $(0;y)$, intersection de la demi-droite de direction $-\overrightarrow{i}$ partant de B et de la demi-droite de direction $-\overrightarrow{j}$ partant de A.

3. On a représenté ci-dessous le triangle tropical de sommets A, B, C et de côtés T_1, T_2 et T_3 :



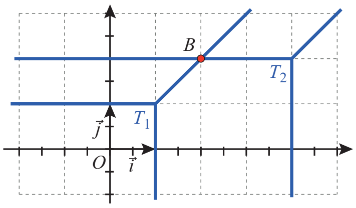
a) On constate l'égalité d'angles : $\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}=360^\circ$.
Cette égalité est-elle vraie pour tous les triangles tropicaux ?
Ce n'est pas vrai pour tous les triangles tropicaux. Par exemple dans le cas suivant, on a $\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}=315^{\circ}$.



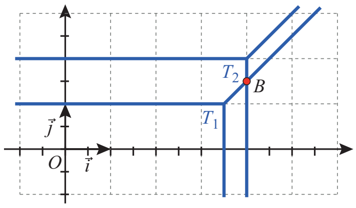
b) On va montrer qu'un triangle tropical dont les sommets A, B et C sont deux à deux indépendants est forcément de même « forme » que le triangle tropical de l'exemple, c'est à dire que les angles en ses sommets sont toujours les mêmes.
Considérons donc un triangle tropical de côtés T_1, T_2 et T_3 et de points centraux $C_1=(x_1;y_1)$, $C_2=(x_2;y_2)$ et $C_3=(x_3;y_3)$ respectivement. On note de même que sur l'exemple A le sommet associé aux côtés T_1 et T_3, B le sommet associé aux côtés T_1 et T_2 et C le sommet associé aux côtés T_2 et T_3.
Puisque les points C_1, C_2 et C_3 sont deux à deux indépendants, on peut supposer (quitte à changer la numérotation des côtés) que

$$y_3<y_1<y_2.$$

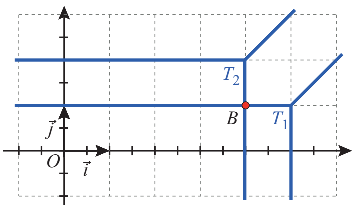
Étudions les configurations possibles pour les droites tropicales T_1 et T_2. Il en existe trois qui sont :



Configuration 1

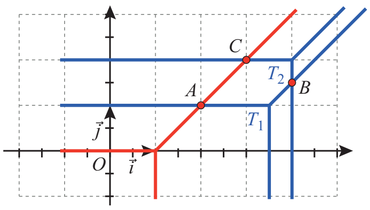


Configuration 2

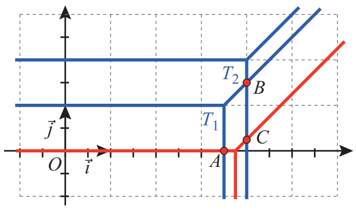


Configuration 3

Montrons que la configuration 2 est impossible : en effet en discutant de tous les cas possibles pour la position de la droite tropicale T_3, on observe sur les schémas suivants que les sommets obtenus ne sont pas deux à deux indépendants.

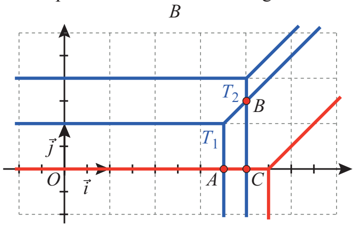


Configuration 2.a. : A et B sont dépendants



Configuration 2.b. : A et B sont dépendants

B



Configuration 2.c. : A et B sont dépendants

On montre de même que la configuration 3 est impossible si on suppose les sommets deux à deux indépendants.
Reste donc la configuration 1. On discute alors de la position de la droite T_3. On vérifie qu'un seul cas de figure permet d'obtenir des sommets deux à deux indépendants, celui donné en exemple.
On a donc montré que, pour que les sommets d'un triangle tropical soient deux à deux indépendants, on est nécessairement dans la configuration proposée dans l'énoncé. Et dans ce cas l'égalité d'angles est clairement vérifiée.

RETOUR AU SOMMAIRE

PARIS

Deuxième exercice

Série S (individuel)

Intercaler la somme

Éléments de solution

1. $E_4 = (1,4,3,5,2,5,3,4,1)$
   $E_5 = (1,5,4,7,3,8,5,7,2,7,5,8,3,7,4,5,1)$..
2. **A la onzième étape**

   a) On note N_{10} le nombre d'éléments de la liste E_{10}.
   Il y a autant de ★ que de ♦ (il y en a $N_{10} - 1$).
   À l'étape 11, il y a donc $N_{11} = 2(N_{10} - 1) + 1$ éléments, soit $N_{11} - 1 = 2(N_{10} - 1)$.
   Par itération $N_{11} - 1 = 2^{10}(N_1 - 1)$.
   On a donc $N_{11} = 2^{10} + 1 = 1025$ éléments.

Etape 10	1		★		★	…	★		★
Intercalés		♦		♦		…		♦	
Etape 11	1	♦	★	♦	★	…	★	♦	★

   b) On note S_{10} le nombre d'éléments de la liste à l'étape 10.
   Chaque ♦ est la somme de deux nombres consécutifs de la liste précédente. Dans la somme des ♦ il y a deux fois la somme des ★ plus 2 ou encore $2S_{10} - 2$.
   Donc
   $S_{11} = 2S_{10} - 2 + S_{10} = 3S_{10} - 2 = 3(S_{10} - 1) + 1$, soit $S_{11} - 1 = 3(S_{10} - 1)$.
   Par itération, $S_{11} - 1 = 3^{10}(S_1 - 1)$.
   On a donc $S11 = 3^{10} + 1 = 59\,050$.

Etape 10	1		★		★	…	★		1
Intercalés		♦		♦		…		♦	
Etape 11	1	♦	★	♦	★	…	★	♦	1

   c) $\boldsymbol{E_1}$=(**1**, **1**).
   $\boldsymbol{E_2}$=(1, **2**, 1).
   $\boldsymbol{E_3}$=($\underline{1}$, **3**, $\underline{2}$, 3, 1).
   $\boldsymbol{E_4}$=(1, 4, $\underline{3}$, **5**, $\underline{2}$, 5, 3, 4, 1).
   $\boldsymbol{E_5}$=(1, 5, 4, 7, $\underline{3}$, **8**, $\underline{5}$, 7, 2, 7, 5, 8, 3, 7, 4, 5, 1).
   $\boldsymbol{E_6}$=(1, 6, 5, 9, 4, 11, 7, 10, 3, 11, $\underline{8}$, **13**, $\underline{5}$, 12, 7, 9, 2,...)
   On remarque que le maximum M_{n+1} de la liste à l'étape $n+1$ est entre le maximum M_n de la liste à l'étape n et le maximum M_{n-1} de la liste à l'étape $n-1$.
   On a la relation $M_{n+1} = M_n + M_{n-1}$ avec $M_1 = 1$ et $M_2 = 2$.
   Donc $M_3 = 3$, $M_4 = 5$, $M_5 = 8$, $M_6 = 13$, $M_7 = 21$, $M_8 = 34$, $M_9 = 55$, $M_{10} = 89$ et $M_{11} = 144$.
3. **A la $n^{\text{ème}}$ étape**
   On note N_n le nombre d'éléments de la liste E_n.
   On pose $v_n = N_{n-1}$.

   a) On note N_n le nombre d'éléments à l'étape n.
   Il y a autant de ★ que de ♦ (il y en a $v_n = N_n - 1$).
   À l'étape $n+1$, il y a donc $N_{n+1} = 2(N_n - 1) + 1$ éléments, soit $v_{n+1} = 2v_n$.

Etape n	1		★		★	…	★		★
Intercalés		♦		♦		…		♦	
Etape $n+1$	1	♦	★	♦	★	…	★	♦	★

   La suite (v_n) est géométrique de raison 2 et de premier terme $v_1 = 1$ donc $v_n = 2^{n-1}$.

b) On note S_n le nombre d'éléments de la liste à l'étape n.

Chaque ⧫ est la somme de deux nombres consécutifs de la liste précédente. Dans la somme des ⧫ il y a deux fois la somme des ★ plus 2 ou encore $2S_n - 2$. Donc
$S_{n+1} = 2S_n - 2 + S_n = 3S_n - 2 = 3(S_n - 1) + 1$, soit
$S_{n+1} - 1 = 3(S_n - 1)$.

Etape n	1		★		★	...	★		1
Intercalés		⧫		⧫		...		⧫	
Etape $n+1$	1	⧫	★	⧫	★	...	★	⧫	1

La suite $(S_n - 1)$ est géométrique de raison 3 et de premier terme $S_1 - 1 = 1$ donc $S_n = 3^{n-1} + 1$.

RETOUR AU SOMMAIRE

PARIS

Troisième exercice

Série S (par équipes)

Le solitaire bulgare

Éléments de solution

1. État initial (on note ici uniquement les tailles des piles) : (1 ; 2 ; 2 ; 4) $\to$ (1 ; 1 ; 3 ; 4) $\to$ (2 ; 3 ; 4) $\to$ (1 ; 2 ; 3 ; 3) $\to$ (1 ; 2 ; 2 ; 4) $\to$ (1 ; 1 ; 3 ; 4).
   État initial : (3 ; 3 ; 3) $\to$ (2 ; 2 ; 2 ; 3) $\to$ (1 ; 1 ; 1 ; 2 ; 4) $\to$ (1 ; 3 ; 5) $\to$ (2 ; 3 ; 4) $\to$ (1 ; 2 ; 3 ; 3) $\to$ (1 ; 2 ; 2 ; 4).
2. Pour obtenir N piles d'une carte après un mouvement, il est nécessaire qu'il n'y ait qu'une seule pile à l'étape précédente (sinon la pile créée après ce mouvement aurait plus d'une carte). Or, s'il n'y avait qu'une seule pile avant le mouvement (celle-ci contient ainsi les N cartes) et après le mouvement, on obtient deux piles : une pile de $N-1$ cartes et une pile d'une carte. Puisque $N \geqslant 3$, il est donc impossible d'obtenir N piles d'une carte après un mouvement
3. Observons que la configuration d'une seule pile de N cartes peut être la configuration initiale. De plus, on peut obtenir la configuration d'une seule pile de N cartes après un mouvement (si la configuration initiale est de N piles d'une carte). Or, pour obtenir une seule pile de N cartes après un mouvement, il est nécessaire qu'à l'étape précédente la configuration soit constituée de N piles d'une carte. En effet, si une pile contient plus de 2 cartes avant un mouvement, alors après ce mouvement, il y a au moins deux piles (la nouvelle pile et la pile qui contenait plus de 2 cartes avant ce mouvement). En utilisant la question précédente, il n'est possible de voir la configuration à une pile de N cartes qu'au début du jeu ou après un seul mouvement.
4. Il n'y a qu'un nombre fini de configurations puisque le nombre de cartes est fini. Par conséquent, le mathématicien s'arrête de jouer.
5. Il suffit de prendre des entiers N de la forme $\dfrac{n(n+1)}{2}$ et comme état initial la configuration à n piles où la première pile contient 1 carte, la seconde $2,\ldots$,la n-ième contient n cartes (qui est une configuration olympique).
6. Puisque $2016 = \dfrac{63 \times 64}{2}$, il suffit de choisir la configuration initiale à 63 piles où la première pile contient 1 carte, la seconde $2,\ldots$, la 63-ième contient 63 cartes.

RETOUR AU SOMMAIRE

PARIS

Quatrième exercice

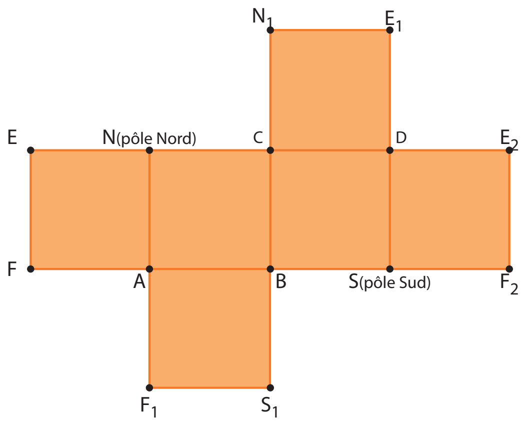
Série S (par équipes)

Une fourmillante planète

Éléments de solution

Préliminaire : a désignant la longueur d'un côté du cube, la superficie totale du cube est $6a^2$. Or on indique que sa valeur est 600 m^2, donc $a^2 = 100$. Les côtés du cube mesurent donc 10 m. **Partie A**

Four a établi sa maison au pôle Nord (N) et Mi au pôle Sud (S), et, pour faciliter leurs échanges, elles souhaitent construire une route reliant leurs demeures respectives.
Elles cherchent à construire la route la plus courte possible, en se limitant à des routes composées de segments de droites, reliant différents points à la surface de leur planète. Afin de faciliter leur réflexion, Four et Mi ont réalisé un patron de leur planète, donné ci-dessous.



Sur ce patron, les points désignés par une même lettre, avec ou sans indice, représentent un même sommet du cube.

1. **Examen de quelques possibilités**

   a) La route NAFS correspond sur le patron à la ligne brisée NAF$_1$S$_1$, la longueur des côtés étant de 10 m, sa longueur est égale à $3 \times 10 = 30$ m.
   La route NAS correspond sur le patron aux lignes brisée NAS ou NAC$_1$, où [AS] est la diagonale d'un carré de côté 10, donc (par application du théorème de Pythagore) $AS = \sqrt{10^2+10^2} = 10\sqrt{2}$ m.
   Le calcul de la longueur de la route NAS=$_1$ donne bien sûr le même résultat.

   b) La route NA'S correspond sur le patron à la ligne brisée NA'S$_1$, où A' est le milieu de l'arête [AB], mais aussi, sur le patron, le milieu de la diagonale [NS=$_1$] du rectangle NCF$_1$S$_1$.
   Par application du théorème de Pythagore dans le triangle NF$_1$S$_1$, la longueur de la route Na'S est

$$NS_1 = \sqrt{10^2+20^2} = \sqrt{500} = 10\sqrt{5} \text{ m.}$$

2. **Recherche d'un minimum**

   a) En comparant les carrés, 900 ; 200 ; 100, la route la plus courte est la route NA'S.

b) Sur un patron du cube, les points représentants les pôles Nord et Sud ne peuvent se situer sur un même carré, et pas plus près que sur deux carrés contigus. Donc les représentants des pôles Nord et Sud ne peuvent pas être plus près que les sommets d'un rectangle correspondant à la juxtaposition de deux faces du cube, éloignés de $10\sqrt{5}$ m (diagonales du rectangle) ou de 20 m (grand côté du rectangle). Comme il n'est pas possible de rejoindre les pôles Nord et Sud en suivant deux arêtes, la distance minimale est bien $10\sqrt{5}$ m.

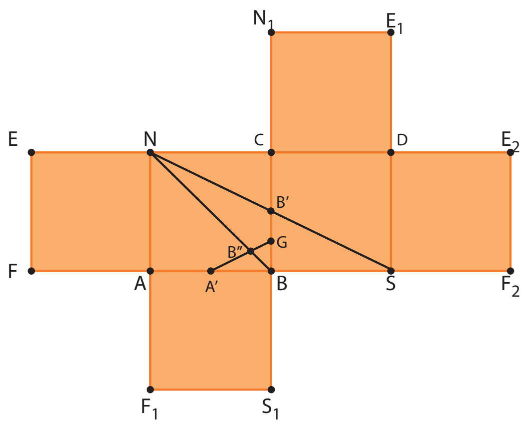
c) En examinant sur des patrons toutes les juxtapositions de deux faces où on trouve un représentant du pôle Nord et un représentant du pôle Sud, on obtient six routes les plus courtes, NA'S, NB'S, NC'S, ND'S, NE'S et NF'S où A', B', C', D' et F' sont les milieux respectifs des arêtes [AB], [BC], [CD], [DE], [EF] et [FA].

Partie B

Four et Mi se lancent dans l'agriculture. Elles souhaitent se partager équitablement la terre, chacune ayant en charge la culture d'un domaine qui s'étendra d'un pôle à ce qu'elles ont appelé l' « équateur ». Cet « équateur » est l'ensemble des points équidistants des deux pôles.

1. **Recherche de points équidistants des pôles**

   Sur le patron ci-dessous, les points A' et B' sont respectivement les milieux des arêtes [AB] et [BC].
   Le point G est le milieu du segment [BB'].
   Le point B" est le point d'intersection des segments [A'G] et [NB].



a) Les points A' et B' sont équidistants des deux pôles, car ce sont sur le patron les milieux de routes rectilignes joignant des représentants des deux pôles.

Pour les questions suivantes, il est sous-entendu que la distance d ?un point aux deux pôles est la distance la plus courte sur un patron quelconque entre ce point et chacun des deux pôles. On choisit donc à chaque fois le plus petit segment joignant sur un patron le point considéré et un représentant du pôle considéré.

b) A l'aide du patron fourni, la distance du pôle G au pôle Nord est la distance GS, correspondant à l'hypoténuse du triangle NGC rectangle en C, et égale à

$$\sqrt{NC^2+CG^2} = \sqrt{NC^2+\left(\frac{3}{4}CB\right)^2} = 10\sqrt{1+\frac{9}{4}} = 5\sqrt{13}.$$

A l'aide du patron fourni, la distance du pôle G au pôle Sud est la distance GS (plus courte que GS_1), correspondant à l'hypoténuse du triangle GBS rectangle en B, et égale à

$$\sqrt{GB^2+BS^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{4}CB\right)^2+BS^2} = 10\sqrt{\frac{1}{4}+1} = 5\sqrt{5}.$$

Il apparaît que point G n'est pas équidistant des deux pôles.

c) ***Solution analytique* :**
En utilisant sur le patron fourni le repère orthonormé (A ; B ; N), les coordonnées des points A' et G sont

respectivement $\left(\frac{1}{2};\,0\right)$ et $\left(1;\,\frac{1}{4}\right)$, et les équations des droites $(A'G)$ et (NB) sont respectivement :

$$(A'G) : y = \frac{y_G - y_{A'}}{x_G - x_{A'}}(x - x_{A'}) + y_{A'} \text{ et } (NB) : y = \frac{y_N - y_B}{x_N - x_B}(x - x_N) + y_N.$$

Après substitution :

$$(A'G) : y = \frac{\frac{1}{4} - 0}{1 - \frac{1}{2}}\left(x - \frac{1}{2}\right) + 0 \text{ soit } y = \frac{1}{4} \times 2\left(x - \frac{1}{2}\right), \text{ et enfin } y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}.$$

$$(NB) : y = \frac{1}{0-1}(x - 0) + 1 \text{ soit } y = -x + 1.$$

On obtient les coordonnées du point B" en résolvant le système :

$$\left\{\begin{array}{lcl} y & = & \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \\ y & = & -x+1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} 2y & = & x - \frac{1}{2} \\ y & = & -x+1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{array}{c} L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \\ L_2 \end{array} \left\{\begin{array}{lcl} 3y & = & \frac{1}{2} \\ y & = & -x+1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} y & = & \frac{1}{6} \\ x & = & -y+1 \end{array}\right.$$

Les coordonnées de B" sont donc $\left(\frac{5}{6};\frac{1}{6}\right)$.

On en déduit les longueurs NB” et B”S :

$$NB” = \sqrt{\left(\frac{5}{6} - 0\right)^2 + \left(\frac{1}{6} - 1\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{5}{6}\right)^2 + \left(-\frac{5}{6}\right)^2} = \sqrt{\frac{25}{36} + \frac{25}{36}} = \frac{\sqrt{50}}{6} = \frac{5}{6}\sqrt{2},$$

$$B”S = \sqrt{\left(2 - \frac{5}{6}\right)^2 + \left(0 - \frac{1}{6}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{7}{6}\right)^2 + \left(\frac{1}{6}\right)^2} = \sqrt{\frac{49}{36} + \frac{1}{36}} = \frac{\sqrt{50}}{6} = \frac{5}{6}\sqrt{2}.$$

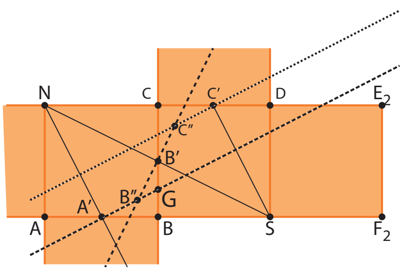
Les valeurs sont les mêmes si l'on considère la distance $B”S_1$ au lieu de la distance $B”S$.
Le point B" est donc équidistant des deux pôles.

Solution géométrique :

Les triangles NA'A et A'GB sont homothétiques dans le rapport $\frac{1}{2}$, donc les angles $\widehat{AA'N}$ et $\widehat{BA'G}$ sont complémentaires, et par suite l'angle $(GA'N)$ mesure 90º.
On en déduit que la droite $(A'G)$ est la médiatrice du segment [NS_1], et par conséquent le point B", situé sur $(A'G)$ est équidistant des points N et S_1.
Les points A' et B' étant symétriques par rapport à la droite (NB), de même pour les points S et $S_1$1, et le point B" étant sur la droite (NB), la droite $(B'B”)$ est la médiatrice du segment [NS], et on en déduit que le point B" est aussi équidistant des points N et S.
Le point B" est donc équidistant des deux pôles, que l ?on considère le représentant S ou le représentant $S_1$1 du pôle Sud.

2. **Tracé de l'équateur**

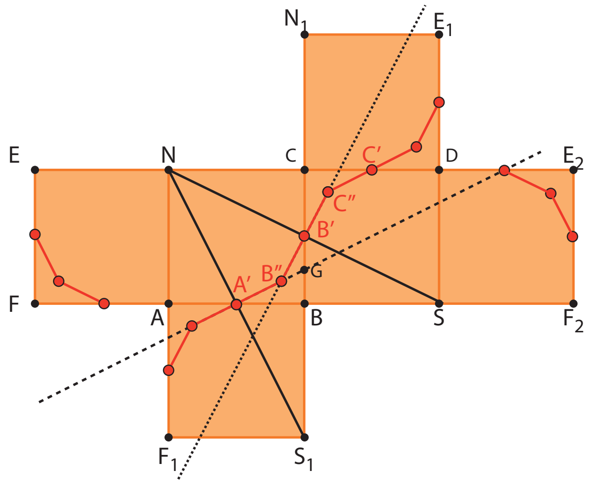
   a) Déterminer l'ensemble des points équidistants des deux pôles de la planète.
   Sur le patron proposé, pour la face NABC, les points équidistants des deux pôles sont les points situés sur la médiatrice $(A'B”)$ du segment [NS] ou sur la médiatrice du segment [NS_1], et parmi cet ensemble de points, équidistants de N et de S ou équidistants de N et de S_1, il faut choisir ceux qui sont les plus proches du pôle Nord, c'est-à-dire les points des segments [A'B"] et [B"B'].



Pour les autres faces, il en est de même, comme figuré ci-dessus pour la face SDCB.

b) Reproduire le patron proposé ci-dessus et construire l'équateur, frontière entre les domaines de Four et Mi.

Le tracé complet de l'équateur s'obtient en plaçant sur le patron les milieux de représentants des arêtes [AB], [BC], [CD], [DE], [EF] et [FA], les diagonales des faces et les points analogues du point G situés à la distance un quart des sommets, permettant de construire les points d'intersection des médiatrices.



RETOUR AU SOMMAIRE

PARIS

Cinquième exercice

Séries autres que S (individuel)

La couleur des nombres

Éléments de solution

1. Quelle est la couleur de 2016 ?
   1 est rouge, 2 est bleu, 3 est rouge, 4 est bleu,...
   Si n est pair alors n est bleu, sinon n est rouge. Donc 2 016 est bleu.
2. Que peut-on dire de la couleur de $x+n$ où n est un entier naturel ?
   Soit x un nombre rationnel positif.
   Si n est pair, on change de couleur un nombre pair de fois donc $x+n$ et x sont de la même couleur.
   Si n est impair, on change de couleur un nombre impair de fois donc $x+n$ et x sont de couleurs différentes.
3. Quelle est la couleur de $\dfrac{2016}{2015}$? Quelle est la couleur de $\dfrac{4}{13}$?
   $\dfrac{2016}{2015}=1+\dfrac{1}{2015}$. Or, 2015 est rouge donc $\dfrac{1}{2015}$ est aussi rouge et $1+\dfrac{1}{2015}$ est bleu.
   $\dfrac{4}{13}$ a la même couleur que $\dfrac{13}{4}=3+\dfrac{1}{4}$. Or $\dfrac{1}{4}$ est bleu donc $3+\dfrac{1}{4}$ est rouge donc $\dfrac{4}{13}$ est rouge.
4. a) « La somme de deux nombres rouges est un nombre bleu » ? **Non**. On a bien $1+1=2$ (rouge+rouge=bleu) mais on a aussi $\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{3}$ (rouge + rouge) et $\dfrac{3}{2}=1+\dfrac{1}{2}$ qui est rouge.

   b) « La somme de deux nombres bleus est un nombre rouge » ? **Non**. On a bien $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}=1$ (bleu + bleu = rouge), mais on a aussi $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{3}{4}$ (bleu + bleu) qui a la même couleur que $\dfrac{4}{3}=1+\dfrac{1}{3}$ (bleu).
5. A l'aide de l'égalité (admise) $\dfrac{235}{68}=3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{6}}}$), déterminer rapidement la couleur de $\dfrac{235}{68}$.

   $\dfrac{1}{6}$ est bleu, $5+\dfrac{1}{6}$ est rouge, $2+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{6}}$ est rouge, $3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{6}}}$ est bleu. Donc $\dfrac{235}{68}$ est bleu.
6. On applique l'algorithme avec $a=235$ et $b=68$ (c'est en fait **l'algorithme d'Euclide**) :

a	b	quotient	reste	égalité	c
235	68	3	31	$235=3\times 68+31$	3
68	31	2	6	$68=2\times 31+6$	5
31	6	5	1	$31=5\times 6+1$	10
6	1	6	0	$6=6\times 1$	16

$c=16$ est pair, l'algorithme donne bien la couleur de $\dfrac{235}{68}$.

En fait, il procède à la décomposition en fraction continue de la fraction $\dfrac{235}{68} = \mathbf{3} + \dfrac{1}{\mathbf{2} + \dfrac{1}{\mathbf{5} + \dfrac{1}{\mathbf{6}}}}$)

7. Quelle est la couleur de $\dfrac{1515}{1789}$? On va utiliser l'algorithme précédent :

a	b	quotient	reste
1789	1515	1	274
1515	274	5	145
274	145	1	129
145	129	1	16
129	16	8	1
16	1	16	0

Donc $c = 1+5+1+1+8+16 = 32$ donc $\dfrac{1515}{1789}$ est bleu.

RETOUR AU SOMMAIRE

PARIS

Sixième exercice

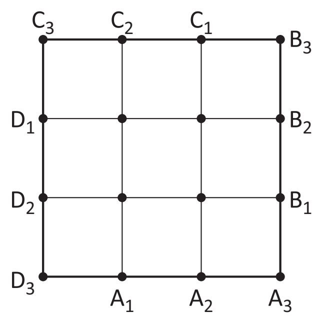
Séries autres que S (par équipes)

L'anniversaire d'Annia

Éléments de solution

Partie A

1. On suppose que $m = 3$. On nomme les points comme sur la figure ci-contre.



   a) Bien sûr, on obtient un partage équitable si on choisit un couple de points correspondant à une diagonale du carré.

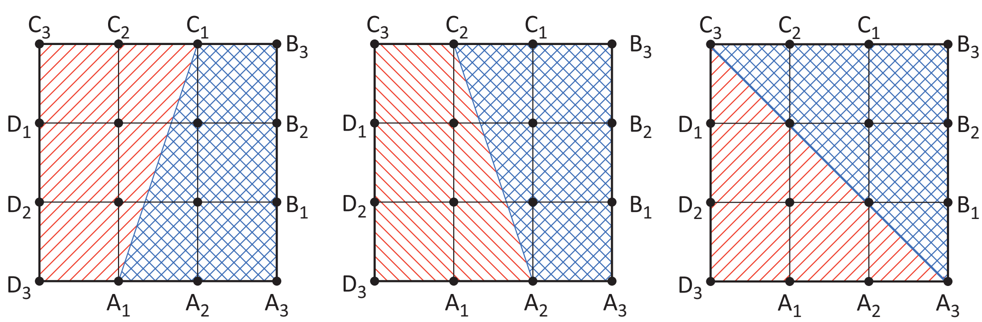
   b) Les points A et B doivent être distincts et sur des côtés différents.
   Il y a deux cas de figure à distinguer :
      1) A et B sont sur des côtés consécutifs
      2) A et B sont sur des côtés opposés et aucun n'est un sommet du carré.

Pour fixer les choses, on se limite aux cas où le point A est confondu avec A_1, A_2 ou A_3.

Cas n°1 : A et B définissent deux parts dont l'une est triangulaire. Si [AB] est une diagonale du carré, le partage est équitable, sinon l'aire de la part triangulaire est strictement inférieure à la moitié de l'aire du rectangle, et donc le partage n'est pas équitable.
Cas n°2 : il n'y a que deux cas-type à envisager :

- par exemple $A = A_1$ et $B = C_2$: on a un partage en $\frac{1}{3}; \frac{2}{3}$, non équitable ou
- par exemple $A = A_1$ et $B = C_1$: le partage est équitable.

En conclusion : il n'y a que deux dispositions où le partage est équitable.
Si A est confondu avec A_1, A_2 ou A_3 ces deux dispositions correspondent aux trois cas suivants :



On a encore trois telles configurations si $A \in B_1$; B_2 ; B_3, si $A \in C_1$; C_2 ; C_3, si $A \in D_1$; D_2 ; D_3, soit au total : **12 couples définissant un partage équitable.**

   c) Annia choisit au hasard le couple de points (A ; B), on est donc dans un cas d'application de la formule des probabilités uniformes.

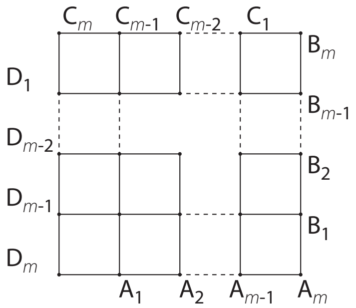
- **le nombre de choix favorables** à un partage équitable est de **12** (cf. question précédente).
  Quant au nombre de choix possibles pour le couple (A ; B), sachant que A et B sont distincts et sur des côtés différents :
  - Si A = A_1, il y a 8 choix possibles pour B, à savoir B_1 ; B_2 ; B_3 ; C_1 ; C_2 ; C_3 ; D_1 ; D_2,
  - Si A = A_2, il y a 8 choix possibles pour B, les mêmes que si A = A_1,
  - Si A = A_3, il y a 5 choix possibles pour B, à savoir C_1 ; C_2 ; C_3 ; D_1 ; D_2.

  On a donc $8+8+5=21$ choix possibles pour B si $A \in \{A_1 ; A_2 ; A_3\}$.
  Il en est de même si $A \in \{B_1 ; B_2 ; B_3\}$, si $A \in \{C_1 ; C_2 ; C_3\}$ ou si $A \in \{D_1 ; D_2 ; D_3\}$.
  En conclusion :
- **le nombre de choix possibles** pour le couple (A ; B) est de $4 \times 21 = 84$.

La probabilité d'obtenir un partage équitable est donc égale à $\dfrac{12}{84} = \dfrac{3}{21} = \dfrac{1}{7}$.

2. On suppose maintenant que m est un entier quelconque, supérieur ou égal à 3.

a) On reprend le même raisonnement, en nommant les points comme sur la figure ci-après



- Nombre de choix possibles pour le couple (A ; B) :
  - Si A est l'un des $m-1$ points A_1 ; A_2 ; $\ldots A_{m-1}$:
    Le point B peut être choisi parmi les points B_1 ; B_2 ; $\ldots B_m$ (m choix possibles) ou parmi les points C_1 ; C_2 ; $\ldots C_m$ (m choix possibles) ou parmi les points D_1 ; D_2 ; $\ldots D_{m-1}$ ($m-1$ choix possibles).
    Ce qui fait au total $2m+(m-1)=3m-1$ choix possibles.
    Il en est de même si A est l'un des $m-1$ points B_1 ; B_2 ; $\ldots B_{m-1}$, l'un des $m-1$ points C_1 ; C_2 ; $\ldots C_{m-1}$, ou l'un des $m-1$ points D_1 ; D_2 ; $\ldots D_{m-1}$.
    Ce qui fait un total de $4(m-1)\times(3m-1)$ **choix possibles**.
  - Si A est le poiont A_m :
    Le point B peut être choisi parmi les points c_1 ; C_2 ; ... ; C_m (m choix possibles) ou parmi les points D_1 ; D_2 ; ... ; D_{m-1} ($m-1$ choix possibles).
    Ce qui fait au total $m+(m-1)=2m-1$ choix possibles.
    Il en est de même si A est le point B_m ou C_m ou D_m.
    Ce qui fait un total de $4(2m-1)$ **choix possibles**.
    Au final, on a
    $$4(m-1)\times(3m-1)+4(2m-1)=4(3m^2-4m+1)+4(2m-1)=4(3m^2-2m),$$
    c'est-à- dire $4m(3m-2)$ **choix possibles pour le couple (A ; B)**.
- Nombre de choix du couple (A ; B) donnant un partage équitable :
  - *Si A et B sont sur des côtés consécutifs :* comme au 1., A et B définissent deux parts dont l'une est triangulaire. Si [AB] est une diagonale du carré, le partage est équitable, sinon l'aire de la part triangulaire est strictement inférieure à la moitié de l'aire du rectangle, et donc le partage n'est pas équitable.
    Au total on a **quatre tels cas**, pour
    (A ; B)$\in \{(A_m ; C_m) ; (B_m ; D_m) ; (C_m ; A_m) ; (D_m ; B_m)\}$

- *Si A et B sont sur des côtés opposés et ni A ni B ne sont des sommets du carré* :
Si A = A_i $(1 \leqslant i \leqslant m-1)$, et B = C_j $(1 \leqslant j \leqslant m-1)$, les parts forment deux trapèzes dont les aires sont $\dfrac{m(i+(m-j))}{2}$ et $\dfrac{m(m-i)+i}{2}$ (en prenant comme unité de longueur la distance A_1A_2).
L'égalité de ces deux aires équivaut à

$$(i+(m-j)=(m-i)+j) \Leftrightarrow (m+i-j=m-i+j) \Leftrightarrow (2i=2j) \Leftrightarrow (i=j).$$

Donc si A=A_i, avec $1 \leqslant i \leqslant m-1$, il existe un et un seul point B tel que le segment [AB] définisse un partage équitable.
Il en est de même si A est l'un des $4(m-1)$ points situés sur les côtés du carré différents des sommets du carré.
Au total on a donc **4(*m* - 1) tels cas**.

En conclusion : on a $4+4(m-1)=4(1+m-1)=4m$, c'est-à-dire **4*m* choix possibles du couple (A ; B) définissant un partage équitable.**
La probabilité d'obtenir un partage équitable est donc égale à $p_m = \dfrac{4m}{4m(3m-2)} = \dfrac{1}{3m-2}$

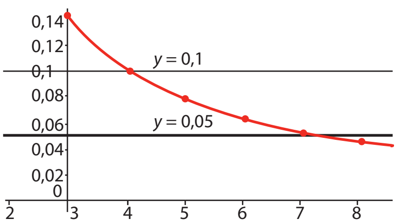
b) Pour tout $m \geqslant 3$, on a les équivalences suivantes :

$$(p_m \geqslant p) \Leftrightarrow \left(\frac{1}{3m-2} \geqslant p\right) \Leftrightarrow \left(3m-2 \leqslant \frac{1}{p}\right) \Leftrightarrow \left(3m \leqslant \frac{1}{p}+2\right) \Leftrightarrow \left(m \leqslant \frac{1}{p}\left(\frac{1}{p}+2\right)\right).$$

On pose $m_p = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{p}+2\right)$,

- $m_{0,1} = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{0,1}+2\right) = \dfrac{1}{3}(10+2) = 4$ on a donc $p_m \geqslant 0,1$, pour $3 \leqslant m \leqslant 4$.
- $m_{0,05} = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{0,05}+2\right) = \dfrac{1}{3}(20+2) = \dfrac{22}{3} \approx 7,3$ pour $3leqsm \leqslant 7$.

Note : on pourra noter que $p_m = f(p)$ où $f(x) = \dfrac{1}{3x-2}$ et utiliser la décroissance de f sur [3 ; +∞[.

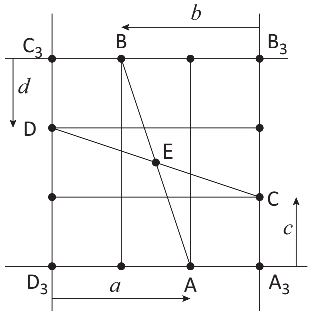


Partie B

On suppose que $m=3$. L ?unité de longueur est D_3A_1.

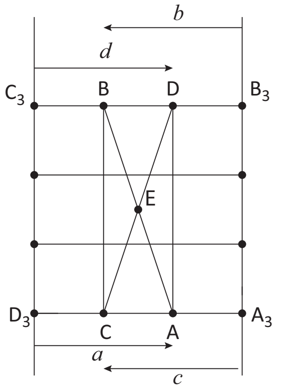
1. Les deux traits de couteau doivent se croiser pour former quatre parts. Chacun des deux traits de couteau partage le carré en deux régions contenant deux parts et qui doivent donc une aire égale à la moitié de l'aire totale (réunion de deux parts égales à ij du carré).
Les segments [AB] et [CD] doivent chacun définir un partage ayant l'une des allures suivantes décrites au **A.1.b.**, ce qui impose que les segments [AB] et [CD] se coupent en le milieu E du carré.
On a alors deux types de configurations à examiner, selon que les quatre points A, B, C et D occupent les quatre côtés du carré ou seulement deux côtés opposés.

- Configuration n° 1
  Avec les notations de la figure ci-contre, les contraintes citées ci-avant imposent que $a = b$ et $c = d$. Par ailleurs l'aire de la part D_3AED, somme des aires des triangles D_3AE et D_3ED, de hauteur $\frac{3}{2}$ (distance de E aux côtés du carré) doit être égale à $\frac{9}{4}$ (quart de l'aire du carré), ce qui s'écrit : $\text{Aire}(D_3AE) + \text{Aire}(D_3ED) = \frac{9}{4}$ soit $\frac{1}{2}\left(a \times \frac{3}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} \times (3-d)\right) = \frac{9}{4}$.



  Or
  $$\left(\frac{1}{2}\left(a \times \frac{3}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} \times (3-d)\right) = \frac{9}{4}\right) \Leftrightarrow \left(\frac{3}{4}a + \frac{9}{4} - \frac{3}{2}d = \frac{9}{4}\right) \Leftrightarrow \left(\frac{3}{4}a = \frac{3}{4}d\right) \Leftrightarrow (a = d),$$
  Ce qui impose finalement que $a = b = c = d$.

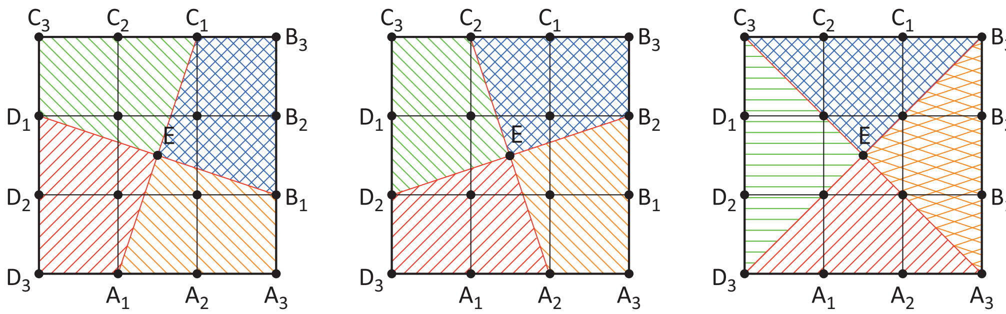
- Configuration n° 2 :
  Avec les notations de la figure ci-contre, où l'on suppose que A est à droite de C, c'est-à-dire que $D_3C \leqslant D_3A$ *i.e.* $3 - c \leqslant a$, les contrainte citées ci-avant imposent que $a = b$ et $c = d$. Par ailleurs l'aire de la part triangulaire AEC, de hauteur $\frac{3}{2}$ (distance de E aux côtés du carré), doit être égale à $\frac{9}{4}$ (quart de l'aire du carré), ce qui s'écrit :



  $\text{Aire}(AEC) = \frac{1}{2}\left((D_3A - D_3C) \times \frac{3}{2}\right) = \frac{9}{4}$ soit $\frac{3}{4}(a - (3-c)) = \frac{9}{4}$.

  Or $\left(\frac{3}{4}(a-(3-c)) = \frac{9}{4}\right) \Leftrightarrow (a + c - 3 = 3) \Leftrightarrow (a + c = 6)$, et comme $0 \leqslant a \leqslant 3$ et $0 \leqslant c \leqslant 3$, ceci impose $a = c = 3$ et finalement $a = b = c = d = 3$, *i.e.* que les points A, B, C et D soient les sommets du carré.

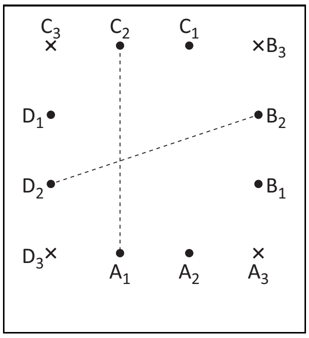
En conclusion, les seules configurations correspondant à un partage en quatre parrts égales sont les suivantes :



Pour chaque configuration, on a deux façons de choisir les traits de couteaux correspondants aux segments [AB] ou [CD], puis pour chacun deux façons de choisir quelle extrémité correspond à A ou B ou à C ou D. Les trois configurations ci-dessus correspondent donc à $3 \times 2 \times 2 \times 2 = 3 \times 8 = 24$ choix possibles du quadruplet A ; B ; C ; D).
Note : ou encore, on a 12 choix possibles pour le point A, puis, le point A étant choisi, deux façons de choisir le point C, et donc au total 24 choix possibles du quadruplet (A ; B ; C ; D)..

2. Il reste à déterminer le nombre de choix possibles du quadruplet (A ; B ; C ; D) correspondant à un partage en quatre parts.
   On opère une disjonction de cas, par exemple la suivante.

[1] Configurations laissant **4 sommets libres** et avec **un point par côté**



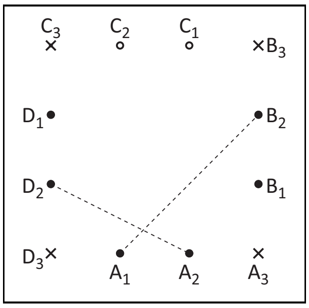
On a sur chaque côté deux choix pour le point occupé, ce qui définit

$$2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16 \text{ configurations.}$$

Il reste alors à choisir parmi les deux segments lequel est le segment [AB] puis quel est le point A et quel est le point C, ce qui fait 8 choix possibles (cf. **B.1.**).
Au total :

$$8 \times 16 = 128 \text{ choix possibles du quadruplet } (A ; B ; C ; D).$$

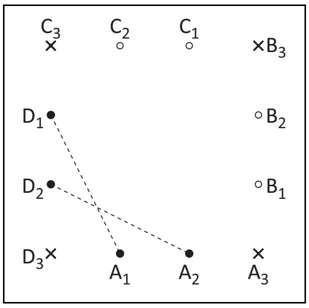
[2] Configurations laissant **4 sommets libres** et **deux points sur un côté** et **un côté libre**



Il y a 4 choix possibles du côté où sont deux points, puis 3 choix pour le côté restant libre. Reste alors 2 choix possibles sur chacun des deux derniers segments pour le point occupé. On n'a alors plus le choix pour relier ces points de façon que les segments se croisent, ce qui fait $4 \times 3 \times 2 \times 2 = 48$ configurations.
En choisissant ensuite le segment [AB], puis les points A et C, il y a au total :

$$8 \times 96 = 384 \text{ choix possibles du quadruplet } (A ; B ; C ; D).$$

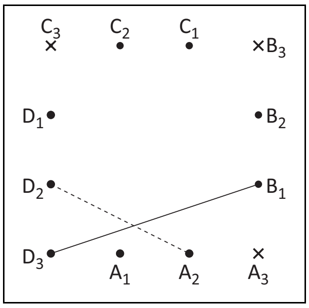
[3] Configurations laissant **4 sommets libres** et **deux côtés libres**



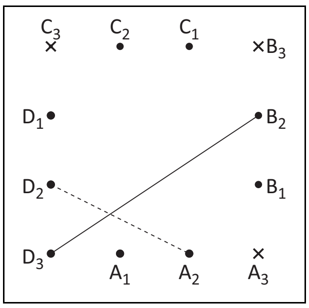
On choisit les deux côtés occupés. S'ils sont consécutifs, il y a 4 choix possibles, s'il sont opposés, il y a 2 choix possibles. Les deux côtés occupés étant choisis, il n'y alors plus qu'une façon de tracer deux segments qui se croisent.
On obtient là $4 + 2 = 6$ configurations.
En choisissant ensuite le segment [AB], puis les points A et C, il y a au total :

$$8 \times 6 = 48 \text{ choix possibles du quadruplet } (A ; B ; C ; D).$$

[**4**] Configurations laissant **3 sommets libres** exactement



• Si le sommet occupé est D_3 et que le point rejoint est B_1, alors on choisit un troisième point (A_1 ou A_2) puis un quatrième point parmi B_2 ; C_1 ; C_2 ; D_1 ; D_2, ce qui donne $2 \times 5 = 10$ choix possibles.
Il en est de même si le sommet D_3 rejoint le point C_2, par symétrie.



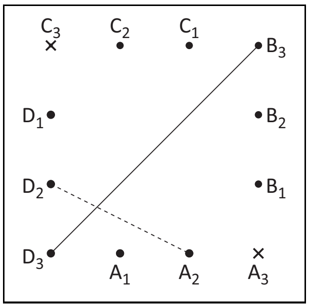
• Si le sommet occupé est D_3 et que le point rejoint est B_2, alors on choisit un troisième point parmi $\{A_1 ; A_2 ; B_1\}$ puis un quatrième point parmi $\{C_1 ; C_2 ; D_1 ; D_2\}$, ce qui donne $3 \times 4 = 12$ choix possibles.
Il en est de même si le sommet d_3 rejoint le point C_1 par symétrie.
Comme il y a 4 choix possibles du seul sommet occupé, on obtient là

$$4 \times (10 \times 2 + 12 \times 2) = 4 \times 44 = 176 \text{ configurations.}$$

En choisissant ensuite le segment [AB], puis les points A et C, il y a au total :

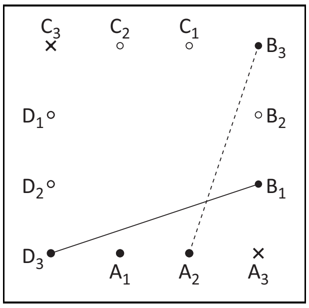
$$8 \times 176 = 1408 \text{ choix possibles du quadruplet } (A ; B ; C ; D).$$

[**5**] Configurations laissant **2 sommets libres** et **2 sommets opposés occupés et reliés**



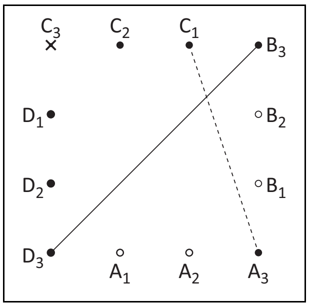
• Si les sommets occupés sont D_3 et B_3, on doit choisir un point parmi quatre de chaque côté du segment $[D_3B_3]$ ce qui donne $4 \times 4 = 16$ choix possibles.
Comme il y a 2 choix possibles de la paire de sommets occupés, on obtient là $2 \times 16 = 32$ configurations.
En choisissant ensuite le segment [AB], puis les points A et C, il y a au total : $8 \times 32 = 256$ choix possibles du quadruplet (A ; B ; C ; D).

[**6**] Configurations laissant **2 sommets libres** et **2 sommets opposés occupés et NON reliés**



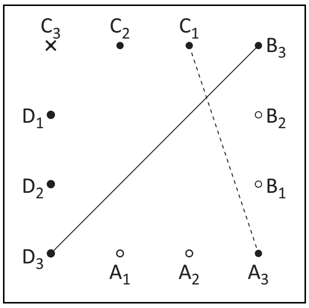
• Si les sommets occupés sont D_3 et B_3, et que D_3 est relié à B_1, alors on choisit un troisième point parmi $\{A_1 ; A_2\}$ que l'on relie à B_3, ce qui donne 2 choix possibles. On a les deux mêmes choix si le point D_3 est relié à B_2.
Il en est de même, par symétrie, si le sommet D_3 rejoint le point C_1 ou le point C_2, ce qui fait un total de $2+2+2+2 = 8$ configurations.
Comme il y a 2 choix possibles de la paire de sommets occupés, on obtient là $2 \times (2+2+2+2) = 2 \times 8 = 16$ configurations.
En choisissant ensuite le segment [AB], puis les points A et C, il y a au total : $8 \times 16 = 128$ choix possibles du quadruplet (A ; B ; C ; D).

[**7**] Configurations laissant **2 sommets libres** et **2 sommets consécutifs occupés**



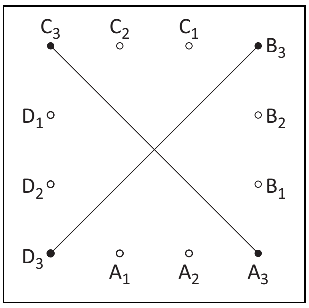
On suppose dans un premier temps que les sommets occupés sont D_3 et A_3
• Si D_3 est relié à B_1, alors on choisit un troisième point parmi $\{C_1 ; C_2 ; D_1 ; D_2\}$ que l'on relie à A_3, ce qui donne 4 choix possibles.
• On a les 4 mêmes choix si le point D_3 est relié à B_2.
• Si D_3 est relié à C_1, alors on choisit un troisième point parmi $\{C_2 ; D_1 ; D_2\}$ que l'on relie à A_3, ce qui donne 3 choix possibles.
• Si D_3 est relié à C_2, alors on choisit un troisième point parmi $\{D_1 ; D_2\}$ que l'on relie à A_3, ce qui donne 2 choix possibles.
On obtient ainsi un total de $4+4+3+2 = 13$ configurations.
Comme il y a 4 choix possibles des deux sommets consécutifs occupés, on obtient là $4 \times (4+4+3+2) = 4 \times 13 = 52$ configurations.
En choisissant ensuite le segment [AB], puis les points A et C, il y a au total : $8 \times 52 = 416$ choix possibles du quadruplet (A ; B ; C ; D).

[**8**]Configurations laissant **1 sommet libre exactement**



• Si les sommets occupés sont D_3, B_3 et A_3, on doit choisir un quatrième point parmi $\{C_1 ; C_2 ; D_1 ; D_2\}$, ce qui donne 4 choix possibles.
Comme il y a 4 choix possibles du sommet laissé libre, on obtient là $4 \times 4 = 16$ configurations.
En choisissant ensuite le segment [AB], puis les points A et C, il y a au total : $8 \times 16 = 128$ choix possibles du quadruplet (A ; B ; C ; D).

[**9**] Configurations ne laissant **aucun sommet libre**



Il n'y a qu'une telle configuration, où l'on coupe le gâteau suivant les diagonales.

En choisissant ensuite le segment [AB], puis les points A et C, il y a au total :

$$8 \times 1 = 8 \text{ choix possibles du quadruplet } (A\,;B\,;C\,;D).$$

En conclusion, on a trouvé $16+48+6+176+32+16+52+16+1 = 363$ façons d'occuper 4 points parmi les 12 points du pourtour de sorte à définir un partage en quatre parts, qui correspond à $128+384+48+1408+256+128+416+128+8 = 2904$ choix possibles du quadruplet (A ; B ; C ; D).

La probabilité d'obtenir un partage équitable est ainsi égale à $\dfrac{24}{2904} = \dfrac{3}{363} = \dfrac{1}{121} \approx 0{,}0083$, soit **0,83%**.

RETOUR AU SOMMAIRE

PARIS

Septième exercice

Séries autres que S (par équipes)

Un classement

Éléments de solution

Dans la suite, on utilise l'initiale d'un prénom pour désigner un étudiant. Il y a dix cas possibles :

1. Les candidats correctement classés par Y sont D et A. Ce cas est impossible car le troisième ne peut être C (sinon X aurait un étudiant bien classé), ni E (sinon Y aurait trois étudiants bien classés), ni B (sinon X aurait trouvé une paire consécutive).
2. Les candidats correctement classés par Y sont D et E. Dans ce cas, le deuxième est forcément C car ce ne peut être A (sinon Y aurait trois étudiants bien classés), ni B (sinon X aurait un étudiant bien classé). Mais dans ce cas, Y ne peut avoir trouvé de paire consécutive. Ce cas est impossible.
3. Les candidats correctement classés par Y sont D et C. Dans ce cas, le deuxième est forcément E car ce ne peut être A (sinon Y aurait trois étudiants bien classés), ni B (sinon X aurait un étudiant bien classé). Mais dans ce cas, X a trouvé une paire consécutive. Ce cas est impossible.
4. Les candidats correctement classés par Y sont D et B. Dans ce cas, le troisième est forcément A car ce ne peut être E (sinon Y aurait trois étudiants bien classés), ni C (sinon X aurait un étudiant bien classé). Mais alors, le deuxième est C car ce ne peut être E (sinon X aurait trouvé une paire consécutive). Ce cas est impossible car Y ne peut avoir trouvé de paire consécutive.
5. Les candidats correctement classés par Y sont A et E. Dans ce cas, le quatrième est forcément B car ce ne peut être C (sinon Y aurait trois étudiants bien classés), ni D (sinon X aurait un étudiant bien classé). Mais alors, le cinquième est D car D ne peut être le premier (sinon Y aurait trois étudiants bien classés). Ce cas est impossible car Y n'a alors trouvé qu'une paire consécutive.
6. Les candidats correctement classés par Y sont A et C. Ce cas est impossible car le cinquième ne peut être E (sinon X aurait un étudiant bien classé), ni B (sinon Y aurait trois étudiants bien classés), ni D (sinon X aurait trouvé une paire consécutive).
7. Les candidats correctement classés par Y sont A et B. Dans ce cas, le troisième est forcément D car ce ne peut être E (sinon Y aurait trois étudiants bien classés), ni C (sinon X aurait un étudiant bien classé). Mais alors, le quatrième est E car ce ne peut être C (sinon Y aurait trois étudiants bien classés). Mais dans ce cas, X a trouvé une paire consécutive. Ce cas est impossible.
8. Les candidats correctement classés par Y sont E et C. Ce cas est impossible car le deuxième ne peut être B (sinon X aurait un étudiant bien classé), ni A (sinon Y aurait trois étudiants bien classés), ni D (sinon X aurait trouvé une paire consécutive).
9. Les candidats correctement classés par Y sont E et B. Ce cas est impossible car le quatrième ne peut être D (sinon X aurait un étudiant bien classé), ni C (sinon Y aurait trois étudiants bien classés), ni A (sinon X aurait trouvé une paire consécutive).
10. Les candidats correctement classés par Y sont C et B. Dans ce cas, le premier est forcément E car ce ne peut être D (sinon Y aurait trois étudiants bien classés), ni A (sinon X aurait un étudiant bien classé). Mais alors, le deuxième est D car ce ne peut être A (sinon Y aurait trois étudiants bien classés). On vérifie que ce cas convient.

Le classement final est ainsi : Ehlias premier, Dounia deuxième, Alexia troisième, Clément quatrième et Boris cinquième.

RETOUR AU SOMMAIRE

POITIERS

Premier exercice

Toutes séries

Numération des plaques

Éléments de solution

Partie A :

Cas particulier :

1. Pour écrire les 99 numéros, il faut écrire d'abord les 9 chiffres de 1 à 9 puis écrire les 90 nombres à deux chiffres de 10 à 99 . Il nous faut alors $189 = 2 \times 10^2 - 11$.
2. Pour écrire les 999 numéros, il faut écrire les 99 chiffres de 1 à 99, puis écrire les 900 nombres à trois chiffres de 100 à 999 . Il nous faut alors $189 + 2700 = 3 \times 10^3 - 111$.
3. L'écriture des 708 numéros : il faut écrire d'abord les 99 nombres de 1 à 99 puis écrire les 609 nombres à trois chiffres de 100 à 708 . Il nous faut alors $189 + 609 \times 3 = 2016$ chiffres.

Généralisation :

1. M est un entier naturel de n chiffres, il existe alors $a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_1, a_0$ $(n-1)$ entiers tels que
$$M = a_{n-1}10_{n-1} + \cdots + 10a_1 + a_0 \text{ avec } a_{n-1} \neq 0.$$
Comme $a_{n-1} > 0$ et tous les nombres a_i $(0 \leqslant i \leqslant n-2)$ sont positifs ou nuls, alors $10^{n-1} \leqslant a_{n-1}10^{n-1} \leqslant M$.
2. Entre 10^{k-1} et $(10^k - 1)$, il y a $(10^k - 10^{k-1})$ nombres et chacun est constitué de k chiffres, pour $(0 \leqslant k \leqslant n-1)$. Pour écrire alors tout les nombres de 1 à 10^{n-1}, il nous faut N_{n-1} chiffres avec :
$$N_{n-1} = \left(10^{n-1} - 10^{n-2}\right)(n-1) + \left(10^{n-2} - 10^{n-3}\right)(n-2) + \cdots + 2\left(10^2 - 10\right) + (10-1).$$
En développant cette expression et avec une télescopie on a :
$$N_{n-1} = 10^{n-1}(n-1) - 10^{n-2} - 10^{n-3} - \cdots - 10^2 - 10 - 1$$
$$\Leftrightarrow N_{n-1} = 10^{n-1}(n-1) - [10^{n-2} + 10^{n-3} + \cdots + 10^2 + 10 + 1].$$
Le nombre $[10^{n-2} + 10^{n-3} + \cdots + 10^2 + 10 + 1] = 111\dots111$ est constitué de $(n-1)$ fois le chiffre 1 donc
$$N_{n-1} = 10^{n-1}(n-1) - 111\dots1111.$$
3. Entre 10^{n-1} et M il y a $M - 10^{n-1} + 1$ nombres constitués de n chiffres, le nombre de chiffres nécessaire à l'écriture de 10^{n-1} à M est $\left(M - 10^{n-1} + 1\right)n$
4. D'après les deux dernières questions, pour écrire les nombres de 1 à M, il faut écrire les M_n chiffres avec
$$M_n = (M - 10^{n-1} + 1)n + N_{n-1}$$
$$\Leftrightarrow M_n = (M+1)n?n10^{n-1} + 10^{n-1}(n-1) - 111\dots1111$$
$$\Leftrightarrow M_n = (M+1)n - (10^{n-1} + 111\dots111).$$
Le nombre $111\dots111$ comporte $(n-1)$fois le chiffre 1 et le nombre 10^{n-1} est constitué de n chiffres dont le premier est 1 et les autres 0, le nombre $(10^{n-1} + 111\dots111)$ est donc formé de n fois le chiffre 1 donc :
$$M_n = (M+1)n - 1111\dots111.$$
Le dernier terme est formé de n fois le chiffre 1.

Partie B :

On note P le nombre de plaques peintes par chacun des peintres, on dispose alors de $2P$ plaques dans la rue.
On note n le nombre de chiffres de P, on distingue alors deux cas : P a le même nombre de chiffres que $2P$ ou le contraire, et dans ces deux cas le nombre de chiffres peint par l'ouvrier le moins rapide est $\frac{4}{9}$ du nombre total de chiffres peint par les deux peintres.

On suppose que P a le même nombre de chiffres que $2P$:

- Si $n = 1$ alors $P = \frac{4}{9} \times 2P = \frac{8}{9}P \Rightarrow P = 0$ ce qui est impossible ;
- si $n = 2$ alors $2(P+1) - 11 = \frac{4}{9} \times 2((2P+1) - 11) = \frac{16}{9}P - 4 \Rightarrow P = \frac{45}{2}$ ce qui est impossible ;
- si $n = 3$ alors $3(P+1) - 111 = \frac{4}{9} \times 3((2P+1) - 11) = \frac{8}{3}P - 48 \Longrightarrow P = 180$.

Dans le cas où P et $2P$ ont un nombre de chiffres différent :

- Si $n = 1$ alors $P = \frac{4}{9} \times 2((2P+1) - 11) = \frac{16}{9}P - 4 \Rightarrow P = \frac{36}{7}$ ce qui est impossible car P est entier.
- Si $n = 2$ alors $2(P+1) - 11 = \frac{4}{9} \times 3((2P+1) - 11) = \frac{8}{3}P - 48 \Rightarrow P = \frac{117}{2}$ ce qui est impossible.

On déduit alors que la seule valeur possible est $P = 180$, la rue compte 360 maisons.

RETOUR AU SOMMAIRE

POITIERS

Deuxième exercice

Série S

Tirage à la fête foraine

Éléments de solution

1. Seule la répartition 3 boules blanches / 1 boule noire convient (par description complète des tirages).
2. Ce sont des questions classiques de dénombrement
   a) On tire deux boules successivement et sans remise dans un sac contenant n boules. Donner le nombre de tirages distincts possibles en fonction de n.
   n boules au premier tirage ; $n-1$ au tirage suivant, donc $n??(n-1)$ tirages.
   b) Un sac contient n boules dont a blanches, le reste étant des noires. On extrait successivement et sans remise deux boules de ce sac. Combien y a-t-il de tirages avec deux boules de couleurs différentes en fonction de n et a ?
   En raisonnant par couleur, il y a $2a(n-a)$ tirages bicolores.
3. Un passant arrive sur un stand où il y a un sac avec 10 boules, mais il ne connait pas la répartition entre boules rouges et boules noires. En étudiant toutes les répartitions possibles, est-il possible que ce passant ait une probabilité de gagner égale à $\frac{1}{2}$? Et si le sac contenait seulement 9 boules.
   En dénombrant les tirages à l'aide des formules précédentes, on remarque qu'aucune répartition ne fonctionne pour 10 boules, mais que c'est possible avec la répartition 6 noires/ 3 blanches (ou le contraire) dans une urne à 9 boules.
4. Étude du cas général. Le sac contient n boules, dont a noires.
   a) Déterminer, en fonction de n et a, la probabilité $p(a;n)$ que le passant gagne.
   En utilisant les résultats de la question 3, $p(a;n) = \dfrac{2a(n-a)}{n(n-1)}$.
   b) Montrer que l'équation $p(a;n) = \dfrac{1}{2}$ est équivalente à $4a^2 - 4na + n(n-1) = 0$.
   Simple calcul
   c) En considérant que l'inconnue est a, résoudre cette équation.
   L'étude du polynôme du second degré donne $a = \dfrac{n \pm \sqrt{n}}{2}$
   d) Quelle caractéristique doit avoir le nombre n pour que l'équation $p(a;n) = \dfrac{1}{2}$ admette des solutions ?
   Comment peut alors être composée l'urne pour répondre au problème posé ?
   n doit être un carré $n = q^2$. L'urne doit alors être composée de $a = \dfrac{q(q\pm 1)}{2}$ boules blanches et $n-a = \dfrac{q(q\mp a)}{2}$. Il y a, par symétrie, deux urnes possibles.

RETOUR AU SOMMAIRE

POITIERS

Troisiième exercice

Séries L, ES, STMG

Les réseaux sociaux

Éléments de solution

1. a) *Justifier que le 2 janvier, le cercle de Marc compte 6 amis.*
   Le 2 janvier, le cercle de Marc compte ses deux « anciens » amis du 1er janvier ainsi que 2×2 nouveaux amis, soit un total de 6.

   b) *Combien d'amis compte le cercle de Marc le 3 janvier ? le 4 janvier ? le 5 janvier ?*
   Le 3 janvier, 6 anciens + 2 × 4 nouveaux, soit 14 amis.
   Le 4 janvier, 14 anciens + 2 × 8 nouveaux, soit 30 amis.
   Le 5 janvier, 30 anciens + 2 × 16 nouveaux, soit 62 amis.

2. *On utilise un tableur pour remplir le tableau suivant. Quelle formule doit-on rentrer dans la cellule D2 pour, ensuite, la recopier vers la droite ?*

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Numéro du jour de l'année	1	2	3	4	5	6	7
2	Nombre d'amis dans le cercle de Marc	2	6					

$D2 = C2 + 2 * (C2 - B2)$

3. *Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on note $A(n)$ le nombre d'amis que compte le cercle de Marc au jour n de l'année. A l'aide de la question 2, expliquer la relation suivante : $A(n+2) = 3A(n+1) - 2A(n)$.*

$$A(n+2) = \underbrace{A(n+1)}_{\text{anciens}} + \underbrace{2 \times A(n+1) - A(n))}_{\text{nouveaux}} = 3A(n+1) - 2A(n)$$

4. a) *A l'aide des questions précédentes, compléter l'instruction manquante dans l'algorithme ci-dessous qui permet d'afficher le nombre d'amis que compte le cercle de Marc pour un jour n donné par l'utilisateur.*

```
Variables :   n est un entier supérieur ou égal à 3
              i;u;v et a sont des entiers
Traitement :  Demander à l'utilisateur la valeur de n.
              u prend la valeur 2
              v prend la valeur 6
              Pour i allant de 3 à n
                 a prend la valeur [3*v-2*u].
                 u prend la valeur v
                 v prend la valeur a
              FinPour
Sortie :      Afficher a
```

   b) *Écrire un algorithme qui permet d'afficher à partir de quel jour, le cercle de Marc aura dépassé un nombre N d'amis donné à saisir par l'utilisateur.*

```
Variables :    i,u,v,n,N et a sont des entiers
Traitement :   Demander à l'utilisateur la valeur de N.
               u prend la valeur 2
               v prend la valeur 6
               n prend la valeur 1
               TantQue u ⩽ N
                  a prend la valeur 3*v-2*u.
                  u prend la valeur v
                  v prend la valeur a
                  n prend la valeur n+1
               FinTantQue
Sortie :       Afficher n
```

5. *On admet que pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on a :* $A(n) = a \times 2^n + b$.
   Déterminer les valeurs des réels a et b.
   Pour $n = 1$, $A(n) = a \times 2^1 + b = 2$.
   Pour $n = 2$, $A(n) = a \times 2^2 + b = 6$.
   D'où le système $\left\{ \begin{array}{l} 2a+b=2 \\ 4a+b=6 \end{array} \right.$ dont les solutions sont $a = 2$ et $b = -2$.
   Ainsi, pour tout $n \geqslant 1$, $A(n) = 2 \times 2^n - 2 = 2^{n+1} - 2$.
6. *Théoriquement, sachant que la France dénombrait 66,3 millions d'habitants au 1er janvier 2015, à partir de quel jour Marc pourrait-il prétendre avoir pour amis l'équivalent au moins de toute la population française ?*
   On cherche n tel que $A(n) \geqslant 66,3 \times 10^6$, soit $2^{n+1} - 2 \geqslant 66,3 \times 10^6$, ce qui revient à $2^{n+1} \geqslant 66\,300\,002$, soit $2^n \geqslant 33\,150\,001$.
   Or $2^{24} = 16\,777\,216$ et $2^{25} = 33\,554\,432$.
   Donc $A(n) \geqslant 66,3 \times 10^6$ à partir de $n = 25$.
   Ainsi, à partir du 25 janvier, Marc pourrait prétendre avoir pour amis l'équivalent au moins de toute la population française.

RETOUR AU SOMMAIRE

POITIERS

Quatrième exercice

Séries STI2D, STL, STD2A

des grilles magiques

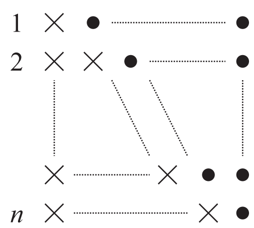
Éléments de solution

1. (a) On peut placer le premier jeton où l'on souhaite sur la première ligne : n possibilités.
   Pour placer le second jeton, on a une possibilité de moins car il ne faut pas le placer sur la même colonne que le premier jeton : $n-1$ possibilités.

   (b) En poursuivant le raisonnement précédent jusqu'à la dernière ligne, on obtient :

   $$n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 2 \times 1 \text{ possibilités.}$$

2. *Une question intermédiaire.*



   Le schéma comporte n lignes et $n+1$ colonnes. Donc $n(n+1)$ symboles au total.

   De plus, il y a autant de croix que de ronds dans ce schéma, donc le nombre de croix est $\dfrac{n(n+1)}{2}$.

   Conclusion : $1+2+\cdots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

3. Dans cette question, on numérote les cases de la grille de 1 à n^2. Avec $n=3$, la grille est donc :

1	2	3
4	5	6
7	8	9

   On place ensuite des jetons pour obtenir une grille valable et on note S la somme des nombres des cases occupées.

   a) *Conjecture*
   Peu importe la façon dont on place les jetons, la somme vaut 15.

   b) On appelle $N(i,j)$ le nombre figurant dans la case (i,j) de la grille numérotée.

   i) La première ligne contient les nombres $1, 2, \ldots, n$. On peut donc écrire $N(1,j) = j$.

   ii) Lorsqu'on passe d'une case à celle située juste en dessous, on ajoute n, donc :

$$\begin{cases} N(1,j) = j \\ N(2,j) = N(1,j) + n = n + j \\ N(3,j) = N(2,j) + n = 2n + j \end{cases}$$

iii) En répétant le raisonnement précédent :

$$\begin{cases} N(1,j) = j \\ N(2,j) = n+j \\ N(3,j) = 2n+j \\ \vdots \\ N(n,j) = (n-1)n+j \end{cases}$$

On peut alors écrire $N(i,j) = (i-1)n+j$.

c)

1	2	3◯
4◯	5	6
7	8◯	9

Calculer la somme $c(1)+c(2)+\cdots+c(n)$.
Puisque la grille est valable, chaque ligne et chaque colonne contient exactement un jeton. Donc les nombres $c(1), c(2), \ldots, c(n)$ forment une « permutation » des nombres $1, 2, \ldots, n$.
Par conséquent :

$$c(1)+c(2)+\cdots+c(n) = 1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

d) *Preuve de la conjecture*
La somme S est la somme des nombres apparaissant dans les cases occupées, donc :

$$S = N(1,c(1))+N(2,c(2))+\cdots+N(n,c(n)).$$

D'après les deux questions précédentes, on peut alors écrire :

$$\begin{aligned} S &= N(1,c(1))+N(2,c(2))+N(3,c(3))+\cdots+N(n,c(n)) \\ &= c(1)+(n+c(2))+(2n+c(3))+\cdots+((n-1)n+c(n)) \\ &= c(1)+c(2)+\cdots+c(n)+n(1+2+\cdots+(n-1) \\ &= \frac{n(n+1)}{2}+n\frac{(n-1)n)}{2} \\ &= \frac{n(n^2+1}{2} \end{aligned}$$

Cette somme dépend de n, mais pas de la façon dont on place les jetons.

RETOUR AU SOMMAIRE

REIMS

Premier exercice

Toutes séries

Arbelos (sur les traces d'Archimède)

Éléments de solution

1. a) $\mathrm{A}_{\text{Arbelos}} = \dfrac{\dfrac{\pi}{4}\left(AB^2 - AC^2 - CB^2\right)}{2} = \dfrac{\pi}{8}\left(\left(AC + CB\right)^2 - AC^2 - CB^2\right) = \dfrac{\pi}{4} AC \times CB.$

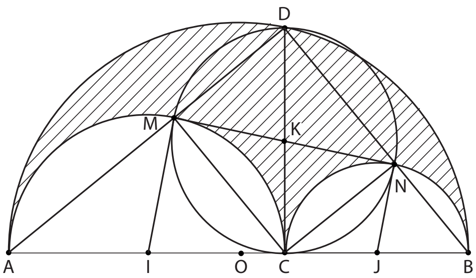
   b) En appliquant le théorème de Pythagore dans les triangles rectangles ADB, ACD et BCD, on obtient :

   $$AB^2 = AD^2 + BD^2 \qquad AD^2 = AC^2 + CD^2 \qquad BD^2 = CD^2 + BC^2.$$

   D'où
   $AB^2 = AD^2 + BD^2 = AC^2 + CD^2 + CD^2 + BC^2$
   $2CD^2 = AB^2 - AC^2 - BC^2$
   $2CD^2 = (AC + BC)^2 + AC^2 - BC^2$
   Soit $DC^2 = AC \times CB$.

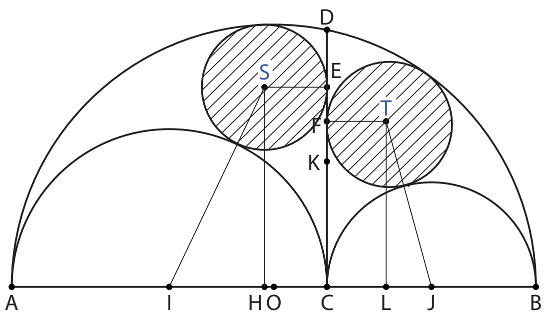
   c) $\mathrm{A}_{\text{Arbelos}} = \dfrac{\pi}{4} AC \times CB = \dfrac{\pi}{4} CD^2 = \mathrm{A}_{\text{disque de diamètre[BC]}}$

2. Il est évident que ADB, DMC et DNC sont rectangles, donc MDNC est un rectangle.
   D'où $EM = EC$.
   De plus $IM = IC$ donc (EI) est la médiatrice de [MC].
   On en déduit que IEC et IEM sont symétriques par rapport à (IE).
   Or une symétrie axiale conserve les angles donc IME est rectangle en M.



   On démontre de même que ENJ est rectangle en N.
   Donc (MN) passe par M et N et est orthogonale à un rayon de ces demi-cercles en ces points.
   On en déduit que (MN) est une tangente commune aux deux demi-cercles de diamètres [AC] et [CB].

3. On trace ensuite deux petits cercles tangents à [CD] et tangents au bord de l'arbelos comme ci-dessous.



On appelle S et T les centres des deux petits cercles et H, E, L et F les projetés orthogonaux de S et T sur (AB) et (CD).
Posons x le rayon du petit cercle de centre S, $r_1 = AI$, $r_2 = JB$ et $R = AO$.
En appliquant le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle IHS on obtient :
$IS^2 = IH^2 + SH^2$.
Soit $(r_1 + x)^2 = (r_1 - x)^2 + SH^2$.
D'où $SH^2 = 4r_1 \times x$.

En appliquant le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle OHS on obtient :
$OS^2 = OH^2 + SH^2$.
Soit $(r_1 + r_2 - x)^2 = (R - 2r_2 - x)^2 + SH^2$ ou encore $(r_1 + r_2 - x)^2 = (r_1 - r_2 - x)^2 + SH^2$.
D'où $SH^2 = (r_1 + r_2 - x)^2 - (r_1 - r_2 - x)^2 = ((r_1 + r_2 - x) - (r_1 - r_2 - x))((r_1 + r_2 - x) + (r_1 - r_2 - x))$
$SH^2 = 2r_2\,(2(r_1 - x)) = 4r_1r_2 - 4r_2x$.
On obtient $4r_1r_2 - 4r_2x = 4r_1 \times x$ soit $x = \dfrac{r_1r_2}{r_1 + r_2}$.

Posons y le rayon du petit cercle de centre T.
En appliquant le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle JLT on obtient :
$JT^2 = JL^2 + LT^2$.
Soit $(r_2 + y)^2 = (r_2 - y)^2 + LT^2$
D'où $LT^2 = 4r_2 \times y$.

En appliquant le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle OLT on obtient :
$OT^2 = OL^2 + LT^2$.
Soit $(r_1 + r_2 - y)^2 = (R - r_2 + y)^2 + LT^2$ ou encore $(r_1 + r_2 - y)^2 = (r_1 - r_2 + y)^2 + LT^2$.
D'où $LT^2 = (r_1 + r_2 - y)^2 - (r_1 - r_2 + y)^2 = ((r_1 + r_2 - y) - (r_1 - r_2 + y))((r_1 + r_2 - y) + (r_1 - r_2 + y))$
$LT^2 = 2(r_2 - y)(2r_1) = 4r_1r_2 - 4r_1y$.
On obtient $4r_1r_2 - 4r_1y = 4r_2 \times y$ soit $y = \dfrac{r_1r_2}{r_1 + r_2}$.

RETOUR AU SOMMAIRE

REIMS

Deuxième exercice

Série S

Le flocon de von Koch

Éléments de solution

I - Préliminaires

1. Dans le repère ; $\left(O\,;\,\overrightarrow{ON_1},\,\overrightarrow{OA}\right)$, M_1 a pour coordonnées (1 ; 1), M_2 a pour coordonnées $(1+q\,;\,q)$ et M_3 a pour coordonnées $\left(1+q+q^2\,;\,q^2\right)$.
On en déduit que le vecteur $\overrightarrow{M_1M_2}$ a pour coordonnées $(q\,;\,q-1)$ et que le vecteur $\overrightarrow{M_1M_3}$ a pour coordonnées $\left(q+q^2\,;\,q^2-1\right)$. Comme $\overrightarrow{M_1M_3}=(1+q)\overrightarrow{M_1M_2}$, les vecteurs $\overrightarrow{M_1M_2}$ et $\overrightarrow{M_1M_3}$ sont colinéaires et donc M_1, M_2 et M_3 appartiennent à la même droite Δ.
2. Dans le repère $\left(O\,;\,\overrightarrow{ON_1},\,\overrightarrow{OA}\right)$, M_4 a pour coordonnées $(1+q+q2+q3\,;;\,q3)$.
On en déduit que le vecteur $\overrightarrow{M_1M_4}$ a pour coordonnées $(1+q+q^2+q^3\,;\,q^3-1)$. Comme $\overrightarrow{M_1M_4}=(1+q+q^2)\overrightarrow{M_1M_2}$, les vecteurs $\overrightarrow{M_1M_2}$ et $\overrightarrow{M_1M_4}$ sont colinéaires donc M_4 appartient à Δ.
3. La droite Δ passe par le point M_1 de coordonnées (1 ; 1) et a pour vecteur directeur $\overrightarrow{M_1M_2}$. On en déduit que Δ a pour équation
$$y=\frac{q-1}{q}x+\frac{1}{q}.$$
4. En résolvant l'équation $0=\dfrac{q-1}{q}x+\dfrac{1}{q}$, on obtient $x=\dfrac{1}{1-q}$.
Donc I a pour coordonnées $\left(0\,;\,\dfrac{1}{1-q}\right)$.
5. Les points N_n semblent se rapprocher du point I.
Comme N_n a pour coordonnées $(0\,;\,1+q+q^2+\cdots+q^n)$, on en déduit que :
$$1+q+q^2+\cdots+q^n+q^{n+1}+\cdots=\frac{1}{1-q}.$$

II - Le flocon de von Koch

Aire du flocon

6. a) On considère le triangle équilatéral de côté 1. Son aire est $a_1=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ (en utilisant le théorème de Pythagore).
b) A l'étape 2, on a ajouté 3 triangles de dimension 3 fois plus petite et donc d'aire $3^2=9$ fois plus petite. On obtient :
$$a_2=a_1+3\times\frac{a_1}{9}=\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{3\sqrt{3}}{36}=\frac{12\sqrt{3}}{36}=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$
c) A l'étape 3, on a ajouté 12 triangles de dimension 9 fois plus petite et donc d'aire $9^2=81$ fois plus petite. On obtient :
$$a_3=a_2+12\times\frac{a_0}{81}=\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{12\sqrt{3}}{81\times4}=\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{\sqrt{3}}{27}=\frac{10\sqrt{3}}{27}.$$

7. Pour passer de l'étape n à l'étape $(n+1)$, on ajoute $3\times 4^{n-1}$ triangles d'aire $\dfrac{a_1}{9^n}$. On a donc :

$$a_{n+1} = a_n + 3\times 4^{n-1}\times\frac{a_1}{9^n} = a_n + \frac{3}{4}\times\left(\frac{4}{9}\right)^n\times\frac{\sqrt{3}}{4} = a_n + \left(\frac{4}{9}\right)^n\times\frac{3\sqrt{3}}{16}.$$

8. Pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$\begin{aligned}
a_n &= a_{n-1} + \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}\times\frac{3\sqrt{3}}{16} = a_{n-2} + \left(\frac{4}{9}\right)^{n-2}\times\frac{3\sqrt{3}}{16} + \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}\times\frac{3\sqrt{3}}{16}\\
&\vdots\\
&= a_1 + \left(\frac{4}{9}\right)^{1}\times\frac{3\sqrt{3}}{16} + \left(\frac{4}{9}\right)^{2}\times\frac{3\sqrt{3}}{16} + \cdots + \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}\times\frac{3\sqrt{3}}{16}\\
&= \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{3\sqrt{3}}{16} + \frac{3\sqrt{3}}{16}\times\left(1 + \left(\frac{4}{9}\right)^{1} + \left(\frac{4}{9}\right)^{2} + \cdots + \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}\right)\\
&= \frac{\sqrt{3}}{16} + \frac{3\sqrt{3}}{16}\times\left(1 + \left(\frac{4}{9}\right)^{1} + \left(\frac{4}{9}\right)^{2} + \cdots + \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}\right)
\end{aligned}$$

9. En faisant un nombre infini d'étapes, on obtient en utilisant la partie 1 (car $\dfrac{4}{9}\in]0;1[$) :

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} a_n &= \frac{\sqrt{3}}{16} + \frac{3\sqrt{3}}{16}\times\left(1 + \left(\frac{4}{9}\right)^{1} + \left(\frac{4}{9}\right)^{2} + \cdots + \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1} + \left(\frac{4}{9}\right)^{n} + \left(\frac{4}{9}\right)^{n+1} + \cdots\right)\\
&= \frac{\sqrt{3}}{16} + \frac{3\sqrt{3}}{16}\times\frac{1}{1-\frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{3}}{16} + \frac{3\sqrt{3}}{16}\times\frac{9}{5} = \frac{5\sqrt{3}+27\sqrt{3}}{16\times 5} = \frac{32\sqrt{3}}{16\times 5} = \frac{2\sqrt{3}}{5}.
\end{aligned}$$

RETOUR AU SOMMAIRE

REIMS

Troisième exercice

Séries autres que S

Bactéries

Éléments de solution

Partie A - Questions préliminaires :

1. « Pour tout entier naturel n, $F(F(n)) = 3n$ ». est une traduction de « S'il est utilisé deux fois de suite, il triple le nombre de bactéries initial ».
2. « Quand il est employé, le nombre de bactéries augmente ».

Partie B ? Propagation des premières bactéries :

1. On sait que, pour tout entier naturel n, $F(n) \geqslant n$. Avec, successivement, $n = F(0)$ puis $n = 0$, on a donc : $F(F(0)) \geqslant F(0) \geqslant 0$. Or $F(F(0)) = 3 \times 0 = 0$. Par suite, $\boxed{F(0) = 0}$.
   S'il n'y a pas de bactérie, le produit est inutile.
2. a) Par l'absurde,
   Si $F(n) = n$, alors $F(F(n)) = F(n)$ ce qui conduit à $3 \times n = n$ soit $3 = 1$, ce qui soulève une contradiction. Ainsi, $\boxed{F(n) \neq n}$.

   b) Par l'absurde,
   Si $F(1) = 3$, $F(F(1)) = F(3)$ ce qui conduit à $1 \times 3 = F(3)$ soit $F(3) = 3$. Ceci contredit la question précédente qui permet d'affirmer que $F(1) \neq 3$.

   c)) Avec le même raisonnement qu'en question B-1), $F(F(1)) \geqslant F(1) \geqslant 1$ soit $3 \geqslant F(1) \geqslant 1$.
   Or, $F(1) \neq .1$ (question B-2-a)) et $F(1) \neq 3$ (question B-2-b)), on a donc ($F(n)$ étant un entier) : $F(1) = 2$

   On sait maintenant que $F(1) = 2$, donc $F(F(1)) = F(2)$ soit $3 = F(2)$.
   De même, $F(3) = F(F(2))$, soit $\boxed{F(3) = 6}$
   De même, $F(6) = F(F(3))$, soit $\boxed{F(6) = 9}$.
3. Montrons pour commencer que : « pour m et n deux entiers naturels distincts, $F(n)? \neq F(m)$ ».
   Par l'absurde,
   Si$F(n) = F(m)$, alors $F(F(n)) = F(F(m))$, soit $3n = 3m$, ce qui aboutit à $m = n$ ce qui soulève une contradiction.

   $3 < 4 < 5 < 6$ donc, par croissance de la fonction F et avec le résultat précédent, on peut affirmer que : $F(3) < F(4) < F(5) < F(6)$. Avec la question précédente, on a donc : $6 < F(4) < F(5) < 9$.
   $F(4)$ et $F(5)$ étant des entiers, alors, nécessairement, $\boxed{F(4) = 7 \text{ et } F(5) = 8}$.

RETOUR AU SOMMAIRE

RENNES

Premier exercice

Toutes séries

Le Tripl'One

Éléments de solution

Partie I : Étude de quelques exemples

1. *Donner deux décompositions (c'est-à-dire deux suites d'opérations) permettant d'obtenir le nombre $N = 10$.*

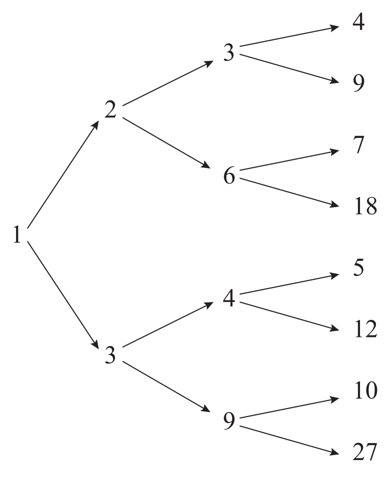
   par exemple $1 \to 3 \to 9 \to 10$ ou encore $1 \to 2 \to 3 \to 9 \to 10$

2. *Roméo a obtenu 31. Pourquoi peut-on affirmer que le nombre précédent était 30 ?*
   Qu'en serait-il si Roméo avait obtenu 63 ?

   on passe d'un nombre au précédent soit en divisant par 3, soit en enlevant 1.
   Or ici 31 n'est pas divisible par 3... C'est donc 31-1=30

3. *Roméo et Juliette cherchent à obtenir pour un nombre N donné, une décomposition donnant un nombre minimal d'étapes.*

   a) *Déterminer, éventuellement à l'aide d'un arbre, tous les nombres atteignables en 3 étapes.*



   b) *En quel nombre minimal d'étapes peut-on atteindre le nombre 90 ?*

   La réponse est 5, en effet : Une fois arrivé à la 3ème étape (obligatoire car 90 n'est pas obtenu avant), deux étapes supplémentaires suffisent car (10 x 3) x 3 = 90 On ne peut pas faire moins car une seule étape supplémentaire donne au maximum le nombre $27 \times 3 = 81$.

   c) *En déduire le nombre minimal d'étapes pour obtenir 91 et 92.*

   Pour 91, ce sera 6 étapes... les 5 qui mènent à 90 et celle du « $+1$ ». En effet, le nombre qui précède 91 est nécessairement 90 (car 91 n'est pas divisible par 3) or 90 est atteint en un minimum de 5 étapes. De même, le nombre qui précède 92 est forcément 91 et on trouve donc 7 étapes au minimum.

d) *Qu'en est-il pour 93 ? Pour 105 ? Pour 108 ?*
Montrer dans chaque cas les étapes minimales conduisant à chacun de ces nombres.

On cherche à repérer les nombres précédents possibles, sachant que pour aller « au plus vite », il faut diviser par 3 lorsque c'est possible... (on remonte ainsi la série des opérations).
$93 \leftarrow 31 \leftarrow 30 \leftarrow 10 \leftarrow 9 \leftarrow 3 \leftarrow 1$ (6 étapes)
$105 \leftarrow 35 \leftarrow 34 \leftarrow 33 \leftarrow 11 \leftarrow 10 \leftarrow 9 \leftarrow 3 \leftarrow 1$ (8 étapes)
$108 \leftarrow 36 \leftarrow 12 \leftarrow 4 \leftarrow 3 \leftarrow 1$ (5 étapes)

Partie II : Quelques types de nombres particuliers

On considère un nombre N atteint en un nombre minimal de **p étapes** *(où p est un entier).*

1. *Supposons tout d'abord que N soit une puissance de 3.*

   a) *Donner la valeur de p lorsque* $N = 3^8$.

   Nécessairement, $p = 8$ car $1 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$ donne 3^8.

   b) *Dans le cas général, déterminer en fonction de p, le nombre minimal d'étapes pour atteindre le nombre* $(N+1)$, *puis le nombre* $(N+3)$.

   Notons que $N = 3^p$ si bien que $N+1 = 3^p+1$. $N+1$ est atteint en $p+1$ étapes car N étant une puissance de 3, il est divisible par 3 et par conséquent, $N+1$ n'est pas divisible par 3. Le nombre qui précède $N+1$ est donc N et il faut donc 1 étape de plus que pour obtenir N.
   En revanche, $N+3$ est un multiple de 3. Et comme $N = 3^p$, alors $N+3 = 3^p+3 = 3(3^{p-1}+1)$ et donc le nombre précédent est $(3^{p-1}+1)$ si l'on veut un nombre minimal d'étapes. Ce nombre s'obtient en $(p-1)+1+1 = p+1$ étapes d'après ce qui a été vu juste auparavant.

2. *Supposons maintenant que N soit un multiple de 3.*
   Déterminer en fonction de p, le nombre minimal d'étapes pour atteindre le nombre $(N+1)$.

   Le raisonnement est le même que pour la précédente question : $N+1$ n'est pas divisible par 3 et donc le nombre qui le précède est N. Il faut donc $p+1$ étapes.

   Donner un nombre N, tel que le nombre $(N+3)$ *soit atteint en moins de p étapes.*

   On peut reprendre la question **3.d)** par exemple avec $N = 105$ $(p = 8)$ et $N+3 = 108$ $(p = 5)$.
   On peut aussi prendre $N = 24$ ou d'une manière plus générale, tout nombre N tel que $N+3$ soit une puissance de 3.

Partie III : Optimisons

1. *Élaborer un algorithme* ***en langage naturel*** *permettant d'obtenir le nombre minimal d'étapes pour un nombre N choisi.*

```
•   Donner la valeur du nombre N (N doit être un entier naturel non nul)
•   K prend la valeur 0 (il s'agit du compteur pour le nombre d'étapes)
•   Tant que N est différent de 1
    Si N est divisible par 3 alors N prend la valeur N/3
    Sinon, N prend la valeur N-1
    k prend la valeur k+1
    Fin du tant que
•   Afficher k
```

2. *Forts de cet algorithme, Roméo et Juliette énoncent les règles du jeu suivantes :*

   - *A chaque étape « +1 », le joueur perd 1 point.*
   - *A chaque étape « ×3 », le joueur gagne 3 points.*
   - *Celui qui atteint N gagne 10 points supplémentaires.*
   - *Chaque joueur triple le total de ses points si la partie se fait en le nombre minimal d'étapes donné par l'algorithme.*

   Le nombre N choisi est 2016.

   a) *Lors des premières étapes, Juliette et Roméo utilisent la multiplication par 3 tant qu'ils le peuvent, pour accumuler le plus vite possible des points. Juliette commence. Calculer les scores(positifs ou négatifs) de chacun à la fin de la partie, lorsque la cible est atteinte.*

   En partant de 1 et en multipliant par 3, on atteint au maximum le nombre $3^6 = 729$.

Juliette commence (elle atteint donc les puissances de 3 impaires à savoir 3^1 ; 3^3 et 3^5. Elle gagne alors 9 points.
Roméo quant à lui atteint 3^2 ; 3^4 et 3^6. Il gagne alors 9 points.
Après quoi il faut ajouter 1287 fois le nombre 1. et c'est Juliette qui entame la série d'additions... Elle a donc tous les nombres impairs d'addition de 1 à effectuer (la première, la troisième... et la 1287$^{\text{ème}}$ qui constitue la dernière).
Elle marque alors finalement au total : $9+(-1)\times 644+10=-625$ points.
Roméo lui aura un total de $9+(-1)\times 643=-634$ points.
Cette tactique ne conduit pas ici au minimum d'étapes... Ce minimum d'étapes est de 13.

b) *Ils refont une partie, mais cette fois-ci, ils font en sorte d'utiliser le minimum d'étapes. Montrer que dans ce cas, le joueur qui commence est aussi celui qui finit.*
Roméo étant très amoureux, il souhaite que Juliette gagne le plus de points possible. Doit-il la laisser commencer ?

Déterminons tout d'abord les étapes et calculons les gains.

A lire « en remontant »

N=	2016	Etapes
	672	1
	224	2
	223	3
	222	4
	74	5
	73	6
	72	7
	24	8
	8	9
	7	10
	6	11
	2	12
	1	13

13 étapes donc celui qui commence (étapes impaires) est celui qui finit !
Points accumulés par la personne qui commence :
$((-1)+(-1)+3+(-1)+3+(-1)+3+10)\times 3=45$ points
Points accumulés par l'autre joueur :
$(3+(-1)+3+(-1)+(-1)+3)\times 3=18$ points
Roméo doit donc laisser Juliette commencer afin de gagner... son cœur !

RETOUR AU SOMMAIRE

RENNES

Deuxième exercice

Séries S, STI2D et STL

À la dérive…

Éléments de solution

Partie A

Dans cette partie on ne s'intéresse qu'aux entiers naturels.

1. $f(13) = 1$ car 13 est un nombre premier.
   $f(6) = f(3 \times 2) = 3 \times f(2) + 2 \times f(3)$; or $f(2) = f(3) = 1$ donc $f(6) = 5$.
2. $f(0) = f(0 \times 0) = 2 \times 0 \times f(0)$ donc $f(0) = 0$.
   $f(1) = f(1 \times 1) = 2 \times f(1)$ donc $f(1) = 0$.
3. *Recopier puis compléter sans justification les tableaux suivants :*

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$f(n)$	0	0	1	1	**4**	1	5	1	**12**	**6**	**7**

n	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$f(n)$	**1**	**16**	1	**9**	**8**	**32**	1	**21**	**1**	**24**

4. a) Si p et q sont deux nombres premiers alors $f(p \times q) = p \times f(q) + q \times f(p)$; ainsi on a $f(p \times q) = p + q$.
   b) $f(209) = f(11 \times 19) = 30$ d'après la question précédente.
   c) $f(p \times q) = 30$; on étudie tous les cas :
   Si $p = 2$, q n'est pas premier ; de même pour $p = 3$ et $p = 5$.
   Si $p = 7$, $q = 23$ convient et $N = p \times q = 7 \times 23 = 161$.
   Si $p = 11$, $q = 19$ convient et $N = 209$.
   Si $p = 13$, $q = 17$ convient et $N = 221$ et il n'y a pas d'autre cas.
   Les nombres cherchés sont 161, 209 et 221.
5. On admet que si p est un nombre premier quelconque et n un naturel non nul alors $f(p^n) = np^{n-1}$.
   a) Pour $n = 1$, $f(p^1) = f(p = 1 = 1p^0$; la propriété est vraie.
   Pour $n = 2$, $f(p^2) = 2p \times f(p) = 2p = 2p^{2p-1}$; la propriété est vraie. Pour $n = 3$, $f(p^3) = p \times f(p^2) + p^2 \times f(p) = p \times 2p + p^2 = 3p^2$; la propriété est vraie.
   b) $f(49) = f(7^2) = 2 \times 7^{2-1} = 14$.
   $f(392) = f(49 \times 8) = 49f(8) + 8f(49) = 49 \times 12 + 8 \times 14 = 700$.
   $f(f(392)) = f(700) = f(7 \times 100) = 7 \times f(10 \times 10) + 100 \times f(7)$
   soit $f(f(392)) = 7 \times 2 \times 10f(10) + 100 = 7 \times 140 + 100$
   donc $f(f(392)) = 1080$.
6. Dès que n est un nombre premier d'après ce qui a été admis à la question 5, on a :
   $f(n^n) = nn^{n-1} = n^n$; il suffit donc de choisir quatre nombres de la forme n^n avec n premier : 2^2, 3^3, 5^5 et 7^7 par exemple.

Partie B

Dans cette partie on s'intéresse aux entiers relatifs.

1. $0 = f(1) = f(-1\times(-1)) = -1\times f(-1) - 1\times f(-1) = -2f(-1)$ donc $f(-1) = 0$.
2. Pour tout n entier naturel $f(-n) = -1f(n) + nf(-1)$ donc $f(-n) = -f(n)$.

Partie C

Dans cette partie on s'intéresse aux nombres rationnels.

1. $0 = f(1) = f\left(\frac{1}{2}\times 2\right) = \frac{1}{2}f(2) + 2f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + 2f\left(\frac{1}{2}\right)$; ainsi $f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}$.
2. On a $f(a) = f\left(\frac{a}{b}\times b\right) = \frac{a}{b}f(b) + bf\left(\frac{a}{b}\right)$ donc $bf\left(\frac{a}{b}\right) = f(a) - \frac{a}{b}f(b)$;
   ainsi $f\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{bf(a) - af(b)}{b^2}$ où a est un entier relatif et b un entier naturel non nul.
3. $f\left(\frac{17}{49}\right) = \frac{49f(17) - 17f(49)}{49^2} = \frac{49 - 17\times 14}{49^2}$; ainsi $f\left(\frac{17}{49}\right) = -\frac{189}{49^2} = -\frac{27}{343}$.

Partie D

Calculer $f(108) = f\left(6\sqrt{3}\times 6\sqrt{3}\right) = 2\times 6\sqrt{3}\times f\left(6\sqrt{3}\right)$.
On a $f(108) = f(12\times 9) = 12f(9) + 9f(12) = 12\times 6 + 9\times 16 = 216$.
Ainsi $f\left(6\sqrt{3}\right) = \frac{216}{12\sqrt{3}} = \frac{18}{\sqrt{3}} = \frac{18\sqrt{3}}{3}$.
$f\left(6\sqrt{3}\right) = 6\sqrt{3}$.

RETOUR AU SOMMAIRE

RENNES

Troisième exercice

Séries L, ES, ST2S, STMG, STHR

Ça balance !

Éléments de solution

Partie A

1. a) $1 = 1$; $2 = 2$; $3 = 1+2$; $4 = 2+2$; $5 = 5$; $6 = 1+5$; $7 = 2+5$;$8 = 1+2+5$; $9 = 2+2+5$; $10 = 1+2+2+5$.

   b) La masse 5 peut être obtenue avec le poids de 5 grammes ou en faisant $1+2+2$.

2. Si on ajoute un poids de 10 grammes on peut alors mesurer toutes les masses de 1 à 20 grammes.

3. Comme le 5 peut être obtenu de deux façons le poids de 5 grammes est « inutile » dans la boîte ; choisissons donc $a = 6$. On peut ainsi mesurer toutes les masses de 1 à 11 grammes. On doit donc avoir $b = 12$.
   Et : 13 = 12 +1 ; 14 = 12+2 ; 15 = 12+2+1 ; 16 = 12+2+2 ; 17 = 12+2+2+1 ; 18 = 12+6 ; 19 = 12+6+1 ; 20 = 12+6+2 ; 21 = 12+6+2+1 ; 22 = 12+6+2+2 et 23 = 12+6+2+2+1.
   On vérifie ainsi que la boîte de cinq poids notée (1, 2, 2, 6, 12) mesure toutes les masses de 1 à 23 grammes.

Partie B

1. La boîte notée $(1,2,2,5)$ n'est pas parfaite pour deux raisons : 2 est répété et la masse 5 peut être obtenue de deux façons différentes (vu à la première question).

2. La boîte notée $(p_1, p_2, \dots p_n)$ est parfaite donc toutes les masses comprises entre 1 et $p_1 + p_2 + \dots + p_n$ sont atteintes ; la masse 1 étant atteinte, le plus petit poids de la boîte doit être égal à 1, c'est p_1.
   Donc $p_1 = 1$.

3. a) La seule boîte parfaite de taille 3 est (1, 2).

   b) Pour les boîtes parfaites de taille 5, elles doivent contenir obligatoirement le 1 et le 2 puis un troisième poids strictement supérieur à 2 ; sa taille sera au minimum de 6 donc une boîte parfaite de taille 5 n'existe pas.
   Pour les boîtes parfaites de taille 7, elles doivent contenir obligatoirement le 1 et le 2 puis un troisième poids strictement supérieur à 2 ; ce troisième poids ne peut pas être un 3 sinon la masse 3 serait obtenue de deux façons ; ce troisième poids est donc 4 et sa taille est bien égale à 7. On vérifie : $3 = 1+2$; $5 = 1+4$; $6 = 2+4$ et $7 = 1+2+4$.
   La seule boîte parfaite de taille 7 est (1, 2, 4).
   Pour une boîte de taille $15 = 1+2+4+8$, on vérifie que tous les masses jusqu'à 8 sont atteinte et : $9 = 8+1$; $10 = 8+2$; $11 = 8+2+1$; $12 = 8+4$; $13 = 8+4+1$ et $14 = 8+4+2$.
   Une boîte parfaite de taille 15 est notée (1, 2, 4, 8). C'est la seule mais l'unicité n'est pas demandée.

   c) On voit apparaître une « règle » : les masses constituant une boîte parfaite sont des puissances de 2. Ainsi, on peut conjecture que la prochaine boîte parfaite est (1, 2, 4, 8, 16) ou (1, 2, 2^2, 2^3, 2^4).

4. On admet que les boîtes $(1, 2, 2^2, \dots, 2^n)$ sont parfaites.
   Une boîte $(1, 3, 3^2, \dots, 3^n)$ ne peut être parfaite pour de multiples raisons : on ne peut pas obtenir une masse de 2 ou même de 5, 6, 7 ou 8 pour celles de taille supérieure à 4.

5. On considère la boîte $(1,2,2^2,2^3,2^4,\dots)$.
   On remarque que $2^{10} < 2016 < 2^{11}$.
   La boîte étant parfaite, celle qui convient est notée $(1,2,2^2,2^3,2^4,\dots,2^{10})$.
   Pour obtenir 2016 on a $2^{10} = 1024$; il reste donc $2016-1024 = 992$.
   On utilise donc $2^9 = 512$; il reste $992-512 = 480$.
   On utilise donc $2^8 = 256$; il reste $480-256 = 224$.
   On utilise donc $2^7 = 128$; il reste $224-128 = 96$.
   On utilise donc $2^6 = 64$; il reste $96-64 = 32$.
   On utilise donc $2^5 = 32$; il reste $32-32 = 0$.
   On a utilisé les poids $2^5, 2^6, 2^7, 2^8, 2^9$ et 2^{10}. La taille minimale de cette boîte vaut $5 = 1+2+2^2+2^3+2^4+\dots+2^{10}$ soit 2047.

RETOUR AU SOMMAIRE

RÉUNION

Premier exercice

Toutes séries [1]

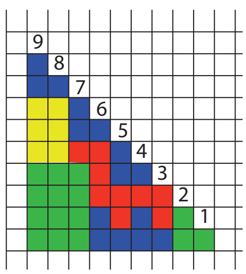
Pavages en L

Éléments de solution

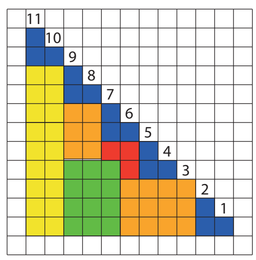
1. $\Delta(2)$ est pavable et $\Delta(3)$ est non pavable.
2. $\Delta(4)$ ne sera pas pavable car l'aire de $\Delta(4)$ n'est pas un multiple de 3.
3. L'aire totale du polygone $\Delta(n)$ doit être remplissable par des blocs « L » ou « anti–L » de trois cases ; l'aire totale de $\Delta(n)$ doit donc être divisible par 3.
4. L'aire du carré de côté n est n^2 . En le divisant par 2, on obtient une aire de $\dfrac{n^2}{2}$; il ne nous reste que des moitiés de n carreaux.

   Il y a n moitiés de carreaux, donc $\dfrac{n}{2}$ carreaux en plus ; l'aire totale est donc de $\dfrac{n^2+n}{2}$.
5. L'aire de $\Delta(13)$ est de $\dfrac{13^2+13}{2} = 91$ et $91 = 3\times 30+1$ donc l'aire de $\Delta(13)$ n'est pas divisible 3.
   Il ne peut donc pas être pavable.
6. a) $3(k+1)^2 = 3(3k^2+3k)+2$ donc $(3k+1)^2+3k+1$ n'est pas divisible par 3.

   b) $(3k+1)^2+3k+1$ n'est pas divisible par 3
   donc $(3k+1)^2+3k+1$ n'est pas divisible par 6.
   On en déduit l'aire de $\Delta(3k+1)$ n'est pas divisible par 3. Ainsi, tous les $\Delta(3k+1)$ avec $k\in\mathbb{N}$ ne sont pas pavables.
7. $\Delta(9)$ est pavable



8. On peut ajouter au $\Delta(9)$ une colonne de blocs « up » ou bien une colonne de blocs « down »créant ainsi $\Delta(11)$ et $\Delta(12)$ pavables.



9. En mettant le pavage de $\Delta(2)$ et $\Delta(12)$) sur un même dessin, on obtient un rectangle vide de hauteur 2 et de largeur 12 qu'il suffit de compléter avec 4 Blocs « down ».
10. Si n est divisible par 2 (respectivement par 3) et n' divisible par 3 (respectivement par 2) alors, en mettant $\Delta(n)$ et $\Delta(n')$ sur un même dessin, on obtient un rectangle vide que l'on pourra compléter avec des blocs « up » ou des blocs « down ». Ainsi, $\Delta(n+n?)$ sera pavable.

1. Les question 6, 10, 11 et 12 seront à traiter par les candidats de la série S uniquement

11. Le 12 étant multiple de 2 et de 3, tous ses multiples sont pavables en répétant la règle d'addition le nombre de fois souhaité. On obtient ainsi que les $\Delta(12k)$ sont pavables.

    En utilisant les résultats précédents ($\Delta(12+2)$, $\Delta(12+9)$ et $\Delta(14+9) = \Delta(12+11)$ pavables), on obtient que tous les $\Delta(12k+m)$ avec $k \in \mathbb{N}$ et $m \in \{0,2,9,11\}$ sont pavables.

12. $2016 = 168 \times 12$ donc d'après la question précédente, $\Delta(2016)$ est pavable.

RETOUR AU SOMMAIRE

RÉUNION

Deuxième exercice

Série S

L'algorithme réducteur

Éléments de solution

On considère l'algorithme suivant :

```
Variables :x;y;z;t
Début :
    • Affecter à x un entier aléatoire compris entre 0 et 999
    • Affecter à y le triple de x
    • Affecter à z la somme des chiffres de y
    • Affecter à t le tiers de z
    • Afficher t
Fin
```

1. *On se propose de tester l'algorithme sur quelques valeurs.*
   Compléter le tableau ci-dessous comme dans l'exemple donné dans la première colonne.

Si $x = 1$	816	10	333	670
alors l'algorithme affiche	6	**1**	**9**	**1**

2. $N = 1000a + 100b + 10c + d$.
   a) *Exprimer la somme S des chiffres de N en fonction de* a, b, c et d.
   $S = a + b + c + d$.
   b) Montrer que $N - S$ est divisible par 3.
   $N - S = 1000a + 100b + 10c + d - (a + b + c + d)$
   $N - S = 999a + 99b + 9c$
   $N - S = 3(333a + 33b + 3c)$
   c) Ainsi, si N est divisible par 3, c'est-à-dire s'écrit $3k$ avec k entier, alors $S = 3k - 3(333a + 33b + 3c) = 3[k - (333a + 33b + 3c)]$
   Donc S est aussi divisible par 3.

   Réciproquement, si S est divisible par 3, c'est-à-dire s'écrit $3k$ avec k entier, alors $N = 3(333a + 33b + 3c) + 3k = 3[333a + 33b + 3c + k]$.
   Donc N est aussi divisible par 3.
   d) De même, démontrer que si S est divisible par 3, alors N est divisible par 3.
3. *Démontrer que l'algorithme affiche toujours un entier, et que cet entier est toujours compris entre 0 et 9.* (*On rappelle que* $0 \leqslant x \leqslant 999$)

   - Puisque y est un multiple de 3, z aussi d'après la propriété démontrée à la question 2). Donc $t = \dfrac{z}{3}$ est un entier.

- Par ailleurs, puisque $0 \leqslant x \leqslant 999$ alors $0 \leqslant y \leqslant 2997$
  Le nombre y a donc au plus 2 milliers, 9 dizaines, 9 centaines, et 9 unités.
  Donc $z \leqslant 2+9+9+9 < 30$ donc $t = \dfrac{z}{3} < 10$

  Le nombre t est un entier strictement inférieur à 10, donc c'est un entier compris entre 0 et 9.

4. *Compléter les parties manquantes de l'algorithme , afin qu'il calcule la fréquence d'affichage d'un nombre souhaité sur 10 000 essais.*

```
Début :
  • Affecter à nombre_d'apparitions_de_n la valeur 0.
  • Afficher : « De quel nombre n voulez-vous calculer la fréquence
    d'apparition sur 10 000 essais ? »
  • Lire n.
  • Pour i allant de 1 à [10 000]
      • Affecter à x un entier aléatoire compris entre 0 et 999
      • Affecter à y le triple de x
      • Affecter à z la somme des chiffres de y
      • Affecter à t le tiers de z
      • Si [t = n] alors [affecter à nombre_de_n : nombre_de_n + 1]
        Fin Si
    Fin pour.
  • Affecter à f la valeur [nombre_de_n ÷10 000]
  • Afficher : « La fréquence d'affichage du nombre »
  • Afficher n
  • Afficher « par l'algorithme réducteur sur 10 000 essais est : »
  • Afficher f.
Fin
```

5. *Déterminer les probabilités des événements suivants et vérifier qu'on obtient une valeur proche de la ou des fréquences obtenue(s) à la question 4 :*

   a) A : « L'algorithme affiche le nombre 0 »
   $t = 0 \Rightarrow z = 3t = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow x = \dfrac{y}{3} = 0.$
   Donc l'algorithme affiche 0 uniquement lorsque le nombre choisi au départ est 0.
   Donc $p(A) = \dfrac{1}{1000} = 0.001$ qui est proche de la fréquence 0,0009 obtenue par l'algorithme.

   b) B : « L' algorithme affiche le nombre 1 »
   $t = 1 \Rightarrow z = 3t = 3.$
   Donc, puisque $0 \leqslant y \leqslant 2997$ et que la somme de ses chiffres doit faire 3 :

   - Soit le chiffre des milliers de y est 2, il reste alors à faire 1 avec le reste de ses chiffres, donc $0+0+1$, il y a donc **3 possibilités** :
     2001 ; 2010 ; 2100
   - Soit le chiffre des milliers de y est 1, il reste alors à faire 2 avec le reste de ses chiffres, donc $1+1+0$ ou $2+0+0$, il y a donc **6 possibilités** :
     1101 ; 1110 ; 1011 ; 1200 ; 1020 ; 1002.
   - Soit le chiffre des milliers de y est 0, il reste alors à faire 3 avec le reste de ses chiffres, donc $1+1+1$ ou $1+2+0$ ou $3+0+0$ il y a donc **10 possibilités** :
     0111 ; 0201 ; 0210 ; 0102 ; 0120 ; 0012 ; 0021 ; 0300 ; 0030 ; 0003.

   En divisant chacune de ces 19 valeurs par 3, on obtient un x qui convient et qui est unique.

   Donc $p(B) = \dfrac{19}{1000} = 0,019$ qui est proche des fréquences $0,0188$ et $0,0194$ obtenues par l'algorithme.

c) C : « L'algorithme affiche le nombre 9 ».
$t = 9 \Rightarrow z = 3t = 27$.
Donc, puisque $0 \leqslant y \leqslant 2997$ et que la somme de ses chiffres doit faire 27 :

- Soit le chiffre des milliers de y est 2, il reste alors à faire 25 avec le reste de ses chiffres, donc $9+9+7$, ou $9+8+8$ il y a donc **6 possibilités** :
  2997 ; 2979 ; 2799 ; 2988 ; 2898 ; 2889.
- Soit le chiffre des milliers de y est 1, il reste alors à faire 26 avec le reste de ses chiffres, donc $9+9+8$, il y a donc **3 possibilités** :
  1998 ; 1989 ; 1899
- Soit le chiffre des milliers de y est 0, il reste alors à faire 27 avec le reste de ses chiffres, donc $9+9+9$ il y a donc **1 possibilité** : 0999

En divisant chacune de ces 10 valeurs par 3, on obtient un x qui convient et qui est unique.

Donc $p(C) = \dfrac{10}{1000} = 0,01$ qui est proche de la fréquence 0,0102 obtenue par l'algorithme.

RETOUR AU SOMMAIRE

RÉUNION

Troisième exercice

Séries autres que S

Stratégie de jeu

Énoncé

On donne ci-dessous des exemple de situations de jeu, avec une somme de départ de 5 €.
P signifie que la partie est perdue ; G signifie que la partie est gagnée.
Dans le tableau suivant, la partie numéro 0 correspond à la situation au début du jeu.

Situation 2

Numéro de la partie	0	1	2	3	4
Résultat		P	P	G	G
Mise pour la partie suivante	1	2	3	2	1
Somme restante	5	4	5	5	7

Le jeu peut continuer

1. **Dans situation 2** :
   a) S'il gagne la cinquième partie, il aura $7+1=8$ €.
   b) S'il perd la cinquième partie, il aure $7-1=6$ €.
2. (avec un arbre par exemple)
   a) il aura un gain maximal en gagnant ses trois parties, où il aura misé à chaque fois 1€, donc il aura au maximum 9 €, avec une probabilité de $\frac{1}{8}$.
   b) Il perd 6 € s'il perd les trois parties, donc avec une probabilité de $\frac{1}{8}$.
3. L'algorithme

```
Variables : S,m,x,n,i

      Début
         Lire S
         Lire n
         Affecter à m la valeur [1].
         Affecter à i la valeur 0
         Tant que m ⩽ S et i < n faire
            Affecter la valeur ALEA.ENTRE.NOMBRE(0,1) à x
            Si x = 0 alors
               Affecter à S la valeur S − m
               Affecter à m la valeur m + 1
               Sinon
                  Affecter à S la valeur S + m
```

```
13              Si m ⩾ 2 alors
14                 Affecter à m la valeur m − 1
15                 Sinon
16                    Affecter à m la valeur 1
17                    Fin Sinon
18                 Fin Si
19              Fin Sinon
20           Fin Si
21        Affecter à i la valeur i + 1
22        Fin Tant que
23     Afficher S
24     Afficher i
24  Fin
```

a) Ligne 4 : m prend la valeur 1.

b) les conditions de la ligne 6.
Le jeu continue si la mise est inférieure à la somme dont dispose le joueur et si le nombre de parties jouées est inférieur au nombre de parties qu'il s'est fixées.

c) afficher i à la fin.

4. **Dans un deuxième temps, le joueur dispose de 100 € et s'arrête de jouer dès qu'il parvient à doubler sa fortune (c'est-à-dire lorsqu'il aura 200 € au total)**

a) Il gagne en un minimum de parties lorsqu'il les gagne toutes : donc 100 parties avec une mise de 1 €, probabilité de $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{100}$.

b) S'il perd toutes ses parties, ses pertes successives sont données par le tableau suivant : le numéro de la partie coïncide alors avec le montant de la mise pour cette partie.

Numéro de partie	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Total des pertes	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66	78	81	95	

A la 14$^{\text{ème}}$ partie, il aurait perdu 95 € et ne pourrait plus miser les 15 € suivants.

5. Le joueur a perdu ses premières parties, et ses pertes s'élèvent à 55 €.

a) Combien de parties a-t-il joué ?
D'après le tableau précédent il a perdu 10 parties.

b) Combien de parties au minimum doit-il gagner pour compenser ses pertes ?

Numéro de partie	11	12	13	14	15	16	17	18	
Mise	11	10	9	8	7	6	5	4	
Total des gains	11	21	30	38	45	51	54	58	

En 8 parties il compenserait ses pertes.

RETOUR AU SOMMAIRE

ROUEN

Premier exercice

Toutes séries

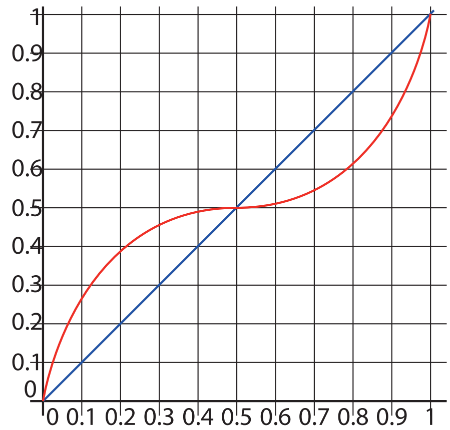
Retouche d'images

Éléments de solution

Partie A

1. On considère la fonction f_1 définie sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ par $f_1(x) = 4x^3 - 6x^2 + 3x$. Sa courbe représentative est donnée ci-contre.

   a) Démontrer que la fonction f_1 est une fonction de retouche.
   $f_1(0) = 0\,;\, f_1(1) = 1$.
   De plus f_1 est dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ et $f_1'(x) = 12x^2 - 12x + 3 = 3(2x-1)^2$.
   $f_1'(x) \geqslant 0$,pour tout x de l'intervalle $[0\,;\,1]$.
   f_1 est donc croissante sur l'intervalle $[0\,;\,1]$.
   La fonction f_1 est donc une fonction de retouche.



   b) À l'aide du graphique, les nuances codées x appartenant à l'intervalle $[0{,}5\,;\,1]$ seront assombries par la fonction f_1.

   c) Pour x appartenant à l'intervalle $[0\,;\,1]$, $f_1(x) \leqslant x$ équivaut à : $4x^3 - 6x^2 + 3x \leqslant x$
   $2x(2x^2 - 3x + 1) \leqslant 0$
   $2x(2x-1)(x-1) \leqslant 0$
   Or $x \in [0;1]$ donc $f_1(x) \leqslant x$ équivaut à : $2x - 1 \geqslant 0$, c'est–à–dire $x \in \left[\dfrac{1}{2}\,;\,1\right]$].
   Conclusion : $S = \left[\dfrac{1}{2}\,;\,1\right]$.

2. a) Exemple de fonction de retouche f_2 définie sur $[0\,;\,1]$ éclaircissant toute nuance x appartenant à l'intervalle $[0\,;\,1]$: $f_2(x) = \sqrt{x}$.

   b) Exemple de fonction de retouche f_3 définie sur $[0\,;\,1]$ assombrissant toute nuance x appartenant à l'intervalle $[0\,;\,1]$: $f_3(x) = x^2$.

Partie B

1. g_1 est une fonction polynôme du second degré donc $g_1(x) = ax^2 + bx + c$, avec x appartenant à l'intervalle $[0\,;\,1]$. g_1 est une fonction de retouche, donc $g_1(0) = 0$ et $g?_1(1) = 1$.
   Ceci se traduit par $c = 0$ et $a + b = 1$
   . Donc $g_1(x) = ax^2 + (1-a)x$.
   De plus $g_1\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{2}{3}$.
   Par conséquent $\dfrac{1}{4}a + \dfrac{1}{2}(1-a) = \dfrac{2}{3}$ c'est-à-dire $a = -\dfrac{2}{3}$.
   Donc g_1 est définie sur $[0\,;\,1]$ par : $g_1(x) = -\dfrac{2}{3}x^2 + \dfrac{5}{3}x$.

2. On cherche maintenant une fonction de retouche g_2 définie sur $[0\,;\,1]$ qui, après l'application de la fonction de retouche g_1, permettrait de revenir aux nuances initiales.

a) $g_2(0) = 0, g_2(1 = 1)$ et $g_2\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{2}$.

b) $g_2\left(\frac{1}{6}\right)$ équivaut à $-\frac{2}{3}x^2 + \frac{5}{3}x = \frac{1}{6}$
ou encore : $4x^2 - 10x + 1 = 0$. $\Delta = 84$.
Deux solutions : $\frac{5-\sqrt{21}}{4}$ et $\frac{5+\sqrt{21}}{4}$, mais seule la première appartient à l'intervalle [0 ; 1].
Par conséquent $g_2\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{5-\sqrt{21}}{4}$.

c) Pour $x \in [0;1]$ et $y \in [0;1]$:
$g_1(x) = y$ équivaut à $-\frac{2}{3}x^2 + \frac{5}{3}x = y$.
ou encore : $2x^2 - 5x + 3y = 0$. $\Delta = 25 - 24y$.
Comme $y \in [0;1]$, $\Delta > 0$.
Donc deux solutions : $\frac{5-\sqrt{25-4y}}{4}$)/4 et $\frac{5+\sqrt{25-4y}}{4}$, mais seule la première appartient à l'intervalle [0 ; 1].
On en déduit l'expression de la fonction de retouche g_2 qui, après l'application de la fonction de retouche g_1, permet de revenir aux nuances initiales :
$g_2(x) = \frac{5-\sqrt{25-4y}}{4}$ et on peut vérifier que c'est bien une fonction de retouche.

RETOUR AU SOMMAIRE

ROUEN

Deuxième exercice

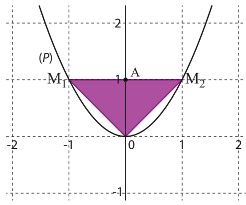
Série S

À la recherche du triangle d'or

Éléments de solution

Partie A - Quelques exemples

a) Voir ci-contre.



b) On vérifie que $\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \left(\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ pour justifier l'appartenance à (P).

Partie B - Avec un cercle

1. Soit $\mathrm{M}(x;y)$ un point quelconque du plan.
   M appartient au cercle $\mathscr{C}$ si et seulement si $AM^2 = r^2$. Autrement dit : M appartient au cercle $\mathscr{C}$ si et seulement si $x^2 + (y-1)^2 = r^2$
   M appartient au cercle $\mathscr{C}$ si et seulement si $x^2 + y^2 - 2y + 1 = r^2$.
2. $\mathrm{M}(x\,;y)$ appartient à la fois au cercle $\mathscr{C}$ et à la parabole (P) si et seulement si :

$$\left\{\begin{array}{rcl} y &=& x^2 \\ x^2+y^2-2y+1 &=& r^2) \end{array}\right.$$

   Autrement dit $\mathrm{M}(x\,;y)$ appartient à la fois au cercle $\mathscr{C}$ et à la parabole (P) si et seulement si

$$\left\{\begin{array}{rcl} y &=& x^2 \\ y^2-y+1-r^2 &=& 0) \end{array}\right.$$

   La résolution de ce système permet d'obtenir les coordonnées des points M et M' sur la parabole (P) tels que AMM' soit isocèle.
3. a) et b) On considère l'équation : $y^2 - y + 1 - r^2 = 0$; $\Delta = 4r^2 - 3$.
   Si $r < \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (figure 1), pas de solution.

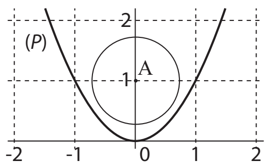


Figure 1

Si $r = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (figure 2), une unique solution : $y = \dfrac{1}{2}$.

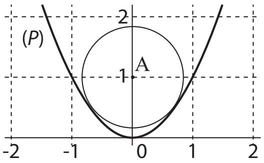


Figure 2

Si $r > \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (figures 3, 4, 5) deux solutions envisageables données par $y = \dfrac{1 \pm \sqrt{4r^2-3}}{2}$. L'étude du signe de ces solutions amènera à distinguer les cas $r \leqslant 1$ et $r > 1$.

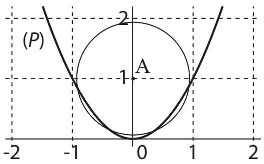


Figure 3

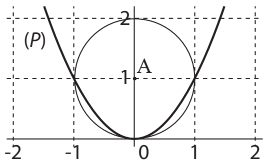


Figure 4

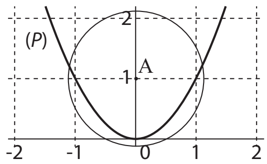


Figure 5

4. **Cas général : on suppose dans la suite que** : $r \geqslant \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

   a) M(x ;y), M'(x' ; y') appartiennent à la fois à $\mathscr{C}$ et (P) et sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées. On a donc les relations : $y = x^2$, $y' = x?^2$, $y = y'$ et $x = -x'$.
   Le théorème de Pythagore ou le produit scalaire permettent d'obtenir l'égalité souhaitée :$y^2 - 3y + 1 = 0$.

   b) Si $\boldsymbol{r} > \mathbf{1}$, alors l'équation $y^2 - y + 1 - r^2 = 0$ possède une unique solution positive : $y = \dfrac{1+\sqrt{4r^2-3}}{2}$.
   La résolution de l'équation $y = x^2$ donnera deux solutions opposées pour x, soient deux points M et M' qui vérifient les conditions de la question 5.a. et après résolution de l'équation du second degré $y^2 - 3y + 1 = 0$, on obtient $y = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ et donc $x = \pm\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.
   Réciproquement, on sait que cette solution convient d'après la Partie A. b.

   Si $\boldsymbol{r}$= 1, la résolution du système de la question 2 donne trois points solutions M_1(0 ;0), M_2(1 ;1) et M_3(-1 ;1) qui correspondent aux deux triangles de la partie A. a. (figure 4)

   Si $r \in \left]\dfrac{\sqrt{3}}{2} ; 1\right[$, alors $\Delta > 0$ et $\sqrt{4r^2-3} \leqslant 1$ donc l'équation $y^2 - y + 1 - r^2 = 0$ possède deux solutions y strictement positives donnant chacune deux valeurs opposées pour x.
   On vérifie (Pythagore, considérations géométriques,. . .) qu'aucun des quatre triangles ne convient.

   Enfin, si $\boldsymbol{r}$= $\dfrac{\boldsymbol{\sqrt{3}}}{\mathbf{2}}$, alors $y = \dfrac{1}{2}$ et $x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
   On vérifie que le triangle AMM' avec M $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} ; \dfrac{1}{2}\right)$ et M' $(-\dfrac{\sqrt{2}}{2} ; \dfrac{1}{2})$ convient (figure 2).

RETOUR AU SOMMAIRE

ROUEN

Troisième exercice

Séries autres que S

Un aller-retour harmonique

Énoncé

Nous nous intéressons à une compétition sportive où les participants doivent enchaîner deux disciplines : la course à pied et le vélo.
Le parcours consiste en un aller-retour entre deux villes, l'aller s'effectuant à pied, en courant et le retour à vélo.
Nous allons étudier plus particulièrement la course de deux participantes : Lou et Anna.

1. **Comparaisons**
   Lou couvre habituellement la distance aller à la vitesse moyenne de 15 km/h et le retour à la vitesse moyenne de 35 km/h.
   a) Calculer la durée totale du trajet aller-retour de Lou en fonction de la distance d qui sépare les deux villes.
   b) À l'entrainement, Anna effectue le trajet aller-retour à la vitesse moyenne de 20 km/h.
   Entre Lou et Anna, laquelle réalise la meilleure performance ?
2. **Performances**
   Afin de progresser, Anna veut augmenter sa vitesse moyenne sur l'aller-retour. Elle sait cependant qu'en course à pied, elle ne peut pas faire mieux que 15 km/h. Elle est donc consciente qu'il lui faut augmenter sa vitesse à vélo.
   Notons x sa vitesse moyenne sur le retour à vélo et $v(x)$ sa vitesse moyenne sur l'aller-retour (toutes deux exprimées en km/h).
   a) Démontrer que si Anna optimise sa course à pied $v(x) = \dfrac{30x}{15+x}$.
   b) À quelle vitesse Anna doit-elle rouler sur le retour pour que sa vitesse moyenne sur l'aller-retour soit de 22 km/h ?
   c) Démontrer que, quelle que soit la vitesse moyenne d'Anna sur le retour à vélo, sa vitesse moyenne sur l'aller-retour ne pourra jamais dépasser 30 km/h.

RETOUR AU SOMMAIRE

STRASBOURG

Premier exercice

Toutes séries

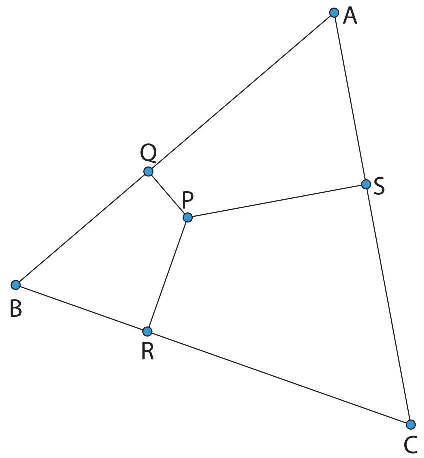
Triangle équilatéral

Éléments de solution

1. Le but de la question est de construire une figure exacte.

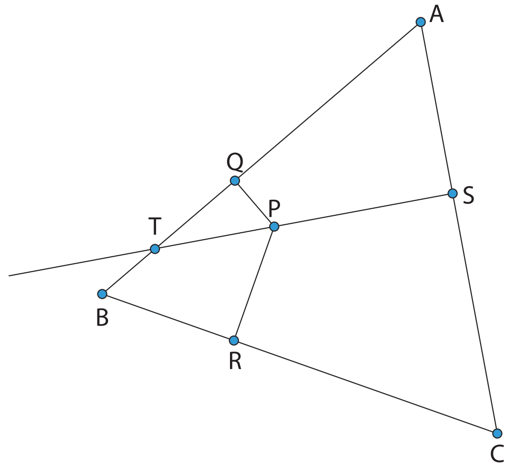
   a) Dans le quadrilatère BQPR la somme des angles vaut 360°, donc $\widehat{QPR} = 120°$.
   De la même façon, $\widehat{RPS} = 120°$.

   b) Cela permet de faire une figure exacte :



2. Le but de la question est de calculer la longueur du côté du triangle ABC.

   a)

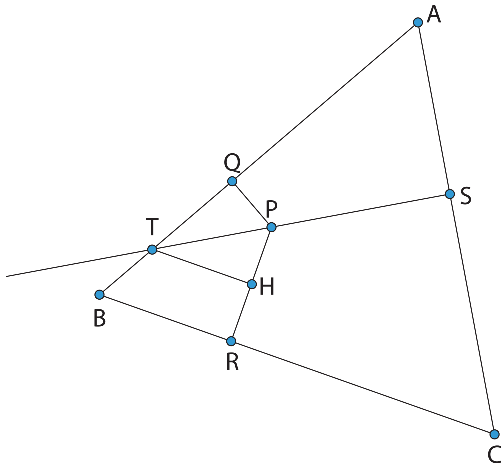


Dans le triangle STA, on trouve $\widehat{STA} = 30^o$

$\sin\ 30^o = \dfrac{PQ}{PT} \Leftrightarrow PT = \dfrac{PQ}{\sin\ 30^o} = 2$

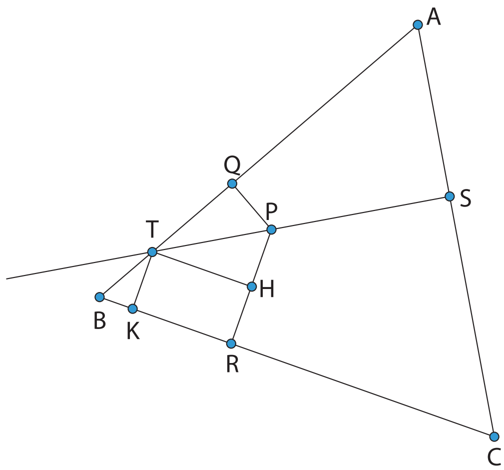
$\cos 30^o = \dfrac{TS}{TA} \Leftrightarrow TA = \dfrac{TS}{\cos 30^o} = \dfrac{10}{\sqrt{3}} = \dfrac{10}{3}\sqrt{3}.$

b) Soit H le projeté orthogonal de T sur [PR]. Montrer que H est le milieu de [PR].



Dans le triangle TPQ, on trouve $\widehat{TPQ} = 60^o$. D'où $\widehat{TPH} = 60^o$.
Les triangles PTQ et PTH sont donc isométriques, donc $PH = PQ = 1$ donc H est le milieu de [PR].

c) Soit K le projeté orthogonal de T sur [BC]. Calculer BT.



KTHR est un rectangle, donc $KT = RH = 1$.

$\sin 60^o = \dfrac{KT}{BT} \Leftrightarrow BT = \dfrac{KT}{\sin 60^o} = \dfrac{2}{\sqrt{3}} = \dfrac{2}{3}\sqrt{3}$

d) Longueur du côté du triangle ABC.

$AB = AT + TB = \dfrac{10}{3}\sqrt{3} + \dfrac{2}{3}\sqrt{3} = 4\sqrt{3}.$

3. On note R_C le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC et R_I le rayon du cercle inscrit dans le triangle ABC.
$R_C + R_I =$ hauteur du triangle équilatéral
hauteur du triangle équilatéral $= AB\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 6$
Or $PQ + PR + PS = 6$ Donc $PQ + PR + PS = R_C + R_I$

4. Retrouvons la réponse à la question 2 en utilisant un calcul d'aires.
Notons c la longueur du côté du triangle équilatéral.
On calcule l'aire du triangle équilatéral de deux façons :

$$\frac{1}{2}c \times c\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{c^2\sqrt{3}}{4},$$
$$\frac{1}{2}c \times 1 + \frac{1}{2}c \times 2 + \frac{1}{2}c \times 3 = 3c.$$
$$\frac{c^2\sqrt{3}}{4} = 3c \Rightarrow c = \frac{12}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3}.$$

RETOUR AU SOMMAIRE

STRASBOURG

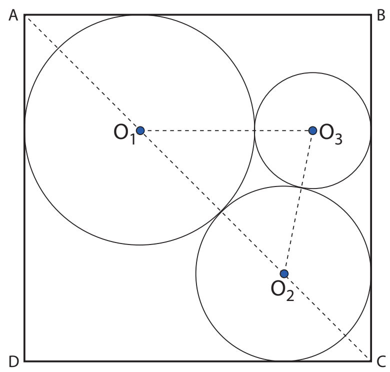
Deuxième exercice

Série S

Cercles tangents

Énoncé

On désigne par :
O_1 le centre du grand cercle,
O_2 celui du moyen,
O_3 celui du petit. R_1, R_2 et R_3 sont les rayons respectifs de ces cercles.
ABCD sont les sommets du carré.



1. Distance entre le centre du grand cercle et celui du petit cercle.
   O_1 et O_3 se trouvent sur une parallèle au côté du carré : on a ainsi : $2R_1 + 2R_3 = 1$;
   on en déduit la distance $\boxed{O_1O_3 = R_1 + R_3 = \dfrac{1}{2}}$.
2. Le grand cercle étant tangent aux côtés [AB] et [AD] du carré, O_1 est l'un des sommets du carré de côté R_1 (à gauche et en haut du grand carré) dont $[AO_1]$ est une diagonale.
   De même, le petit cercle est tangent aux côtés [BC] et [DC] du carré et O_2 est l'un des sommets du carré de côté R_2. (à droite et en bas du carré ABCD) dont $[O_2C]$ est une diagonale.
   On en déduit que O_1 et O_2 sont sur la diagonale du carré ABCD qui mesure $\sqrt{2}$.
   D'autre part, la longueur $AO_1 = \sqrt{2}R_1$ (diagonale du carré de côté R_1) ; la longueur $AO_2 = \sqrt{2}R_2$ (diagonale du carré de côté R_2).
   On obtient l'égalité suivante : $\sqrt{2}R_1 + O_1O_2 + \sqrt{2}R_2 = \sqrt{2}$
   $\Rightarrow \sqrt{2}(R_1 + R_2) + R_1 + R_2 = \sqrt{2} \Rightarrow (R_1 + R_2)(\sqrt{2} + 1) = \sqrt{2}$
   D'où la distance $\boxed{O_1O_2 = R_1 + R_2 = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1} = 2 - \sqrt{2}}$.
   Donc Pascale a raison.
3. Distance entre le centre du cercle moyen et celui du petit cercle.
   Dans le triangle $O_1O_2O_3$, l'angle $\widehat{O_1} = 45^\text{o}$, en utilisant la formule d'Al Kashi on obtient :

$$O_2O_3^2 = O_1O_2^2 + O_1O_3^2 - 2 \times O_1O_2 \times O_1O_3 \times \cos 45^o$$

d'où

$$(R2 + R3)^2 = (2 - \sqrt{2})^2 + \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2}(2 - \sqrt{2}) = 4 - 4\sqrt{2} + 2 + \frac{1}{4} - \sqrt{2} + 1$$

$$(R_2 + R_3)^2 = \frac{29}{4} - 5\sqrt{2}.$$

La distance $\boxed{O_2O_3 = R_2 + R_3 = \sqrt{\frac{29}{4} - 5\sqrt{2}}}$.

4. Le rayon des trois cercles ?

Pour trouver les rayons, on résout le système : $\begin{cases} R_1 + R_2 & = & 2 - \sqrt{2} \\ R_1 + R_3 & = & \frac{1}{2} \\ R_2 + R_3 & = & \sqrt{\frac{29}{4} - 5\sqrt{2}} \end{cases}$

$R_2 = 2 - \sqrt{2} - R_1$; $R_3 = \frac{1}{2} - R_1$.

En substituant dans la troisième équation, on obtient : $R_2 + R_3 = \frac{5}{2} - \sqrt{2} - 2R_1 = \sqrt{\frac{29}{4} - 5\sqrt{2}}$.

Ce qui nous permet d'obtenir $R_1 = \frac{5}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{29}{4} - 5\sqrt{2}}$ $\quad R_1 \approx 0,33$

$$R_2 = \frac{3}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{29}{4} - 5\sqrt{2}} \qquad R_2 \approx 0,25$$

$$R_3 = -\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{29}{4} - 5\sqrt{2}} \qquad R_3 \approx 0,17.$$

RETOUR AU SOMMAIRE

STRASBOURG

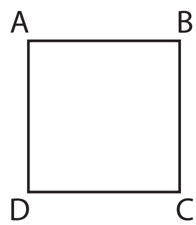
Troisième exercice

Séries autres que S

Déplacements d'une coccinelle

Éléments de solution

Dans cet exercice, une coccinelle se déplace sur les côtés d'un carré ABCD **en partant toujours du point A**. Elle peut rebrousser chemin si elle le souhaite.



Partie A

Dans cette partie, la coccinelle se déplace de manière aléatoire sur les côtés du carré ABCD en partant du point A et on considère que tous les déplacements élémentaires sont équiprobables.

1. Arrivées possibles.
   a) Avec un arbre, on constate que les arrivées possibles avec 3 déplacements sont B et D.
   b) Par généralisation de l'arbre, les arrivées possibles avec un nombre pair de déplacements sont donc A et C.
2. Toujours avec le même arbre, on trouve en appelant E cet événement $P(E) = 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.
3. On complète le tableau aisément.

.

Nombre de déplacement élémentaires	1	2	3	4	5
Probabilité d'arriver en A	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0

Partie B

Dans cette partie, la coccinelle se déplace de manière aléatoire sur les côtés du carré ABCD (toujours en partant du point A) et a cette fois deux fois plus de chances de se déplacer verticalement qu'horizontalement. En revanche, elle décide de s'arrêter dès qu'elle revient en A.

1. Dans cette question, la coccinelle effectue deux déplacements élémentaires.
   a) La probabilité est donc $\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{5}{9}$.
   b) Dans ce cas, on obtient $\frac{1}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{4}{9}$.

   Pour 2 déplacements, la probabilité de revenir au même sommet est donc de $\frac{5}{9}$ et elle est de $\frac{4}{9}$ d'arriver au sommet opposé.

2. Dans cette question, la coccinelle effectue davantage de déplacements élémentaires.
   a) On trouve donc, avec la remarque précédente, la probabilité $\frac{4}{9} \times \frac{4}{9} = \frac{16}{81}$.
   b) De même, on obtient $\frac{4}{9} \times \frac{4}{9} \times \frac{4}{9} = \frac{80}{729}$.

RETOUR AU SOMMAIRE

TOULOUSE

Premier exercice

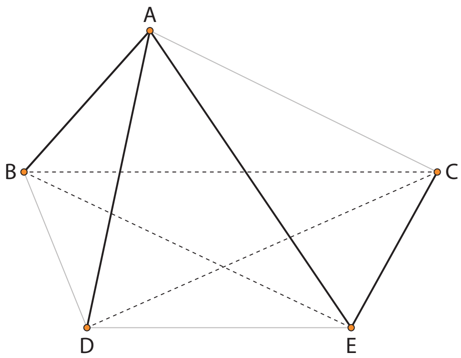
Toutes séries [1]

Autour du jeu de Sim

Énoncé

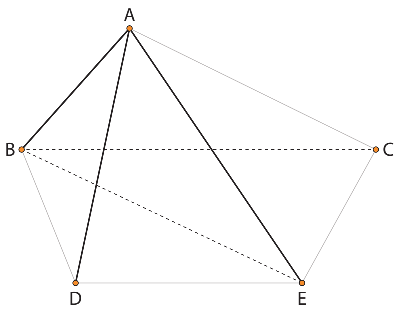
A - Un jeu simplifié à cinq points

1. Voici un nouveau début de partie.



Tiret ne peut jouer [BD], il perdrait ; s'il joue [AC] au huitième coup.
Plein ne peut jouer que [BD] ou [DE], dans chacun des cas il a perdu.
De même si Tiret joue [DE] au huitième coup.

2. Voici un nouveau début de partie.



Au sixième coup c'est à Tiret de jouer.
Il reste quatre segments possibles (d'emblée le cinquième est perdant).
Parmi les quatre autres [CD] s'avère gagnant.
En effet, si Tiret joue [CD], alors [BD] est perdant pour lui.
Il reste pour Plein : [AC] ou [CE] ; on examine chacun des choix.

Coup	[AC]	[BD]	[CD]	[CE]	[DE]
$6^{\text{ème}}$ T			X	T perdant	
$7^{\text{ème}}$ P	X	P perdant	-		P perdant
$8^{\text{ème}}$ T	-	T perdant	-	T perdant	X
$9^{\text{ème}}$ P	-	P perdant	-	P perdant	P perdant
$10^{\text{ème}}$ T	-	T perdant	-	T perdant	

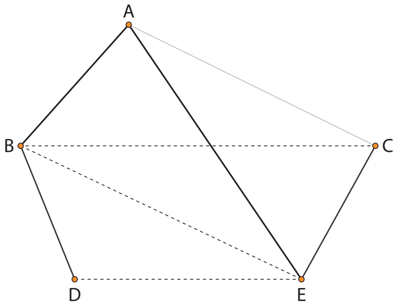
Si Plein joue [CE], alors [AC] devient perdant pour lui ; Tiret joue [DE] :

1. Parties A et B, par tous les candidats ; partie C uniquement par les candidats de la série S.

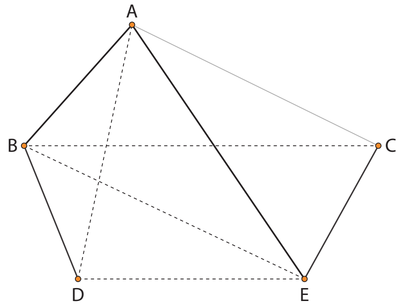
Coup	[AC]	[BD]	[CD]	[CE]	[DE]
6ème T			X	T perdant	
7ème P		P perdant	-	X	P perdant
8ème T	-	T perdant	-	T perdant	X
9ème P	P perdant	P perdant	-	-	P perdant
10ème T		T perdant	-	T perdant	

Au 9ème coup, Plein perd la partie.
Par conséquent Tiret est parvenu à jouer de manière à gagner quoi que fasse Plein.
N.B. : en outre [CD] en sixième coup pour Tiret est le seul coup lui assurant de gagner à coup sûr.

3. C'est à Plein de jouer le septième coup. Il joue [CE] :



Tiret joue [AD] en huitième coup :



Plein joue [CD], il reste [AC] pour Tiret. La partie et nulle.

4. Soit [AB], [AC] et [AD] les trois segments de même type (par exemple Plein). Pour la partie, pour les segments du triangle BCD :
   - ou bien l'un est Plein, alors Plein a perdu
   - ou bien tous trois sont Tiret, alors Tiret a perdu.

   La partie ne peut donc être nulle.

B

1. **Le jeu de Sim ordinaire**, jeu imaginé en 1969 par le mathématicien américain Gustavus James Simmons.
   Avec six points, il y a quinze segments à jouer.
   Par exemple, à partir de F, cinq segments sont à jouer ; et nécessairement au moins trois de même type ; qui sont issus du même point F.
   Dès lors, comme en 1.c etc. Avec six points, il n'y a jamais de partie nulle.
2. **Plus de points**
   Avec plus de six points, au nombre n, le raisonnement est semblable. D'un point partent $n-1$ segments ; nécessairement p de même type avec $p = n\frac{n}{2}$ si n est pair, $p = \frac{n+1}{2}$ si n est impair ; ici p est supérieur à 3 etc.

C (*candidats élèves en série scientifique seulement*

Un premier point de vue ;
Un nombre n en points et trois joueurs.
D'un point partent $n-1$ segments, de trois types possibles (disons Plein, Tiret, Ondulé) :

- si n est multiple de 3, $n = 3p$, au moins p segments sont d'un même type issus de chaque point
- sinon, $n = 3p+1$ ou $n = 3p+2$, au moins $p+1$ segments sont d'un même type issus de chaque point.

Soit m ce nombre de segments d'un même type, par exemple Ondulé, issus d'un point donné. Pour la partie, pour les autres extrémités, au nombre m, pour les segments déterminés par ces points :

- si un de ces segments est Ondulé, alors Ondulé a perdu,
- sinon, ces segments sont exclusivement de type Plein ou Trait.

Avec deux joueurs, on a vu que pour cinq points la nullité est possible, qu'elle ne l'est pas pour six points. Dès que $m \geqslant 6$, la partie nulle est impossible.

Selon les éventualités, ce minimum vaut 16, 17 ou 18.
Pour la valeur 16, ce n'est pas garanti ; cela l'est pour 17.

Autre point de vue, on reprend la démarche de 1c :
Lemme : si six traits du même type sont issus d'un même sommet A_0 alors on peut affirmer que la partie ne peut se conclure par un nul.

Preuve du lemme : pour simplifier supposons que les six traits appartiennent au joueur plein et appelons A_1 à A_6 les extrémités.
Alors si Plein relie un des points A_i avec un autre A_j, la partie est perdue. Si Plein ne joue aucun de ces points entre eux, seuls les deux autres joueurs jouent avec ces six points, et on est retombé sur le cas $n = 6$ avec deux joueurs : il y a forcément un perdant.

Utilisation du lemme : dès qu'il y a strictement plus de $3 \times 5 = 15$ traits issus d'un sommet, il y en a au moins 6 qui sont du même type.
Donc s'il y avait une partie nulle avec 17 points (ou plus), il y a au moins 16 traits issus de chaque sommet, donc au moins 6 d'un même type, et la partie a un perdant : absurde.

RETOUR AU SOMMAIRE

TOULOUSE

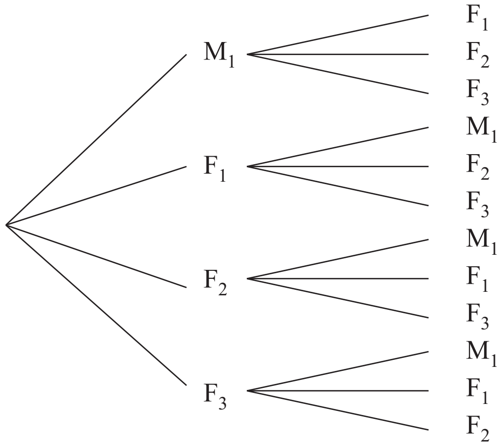
Deuxième exercice

Série S.

Vous avez dit 1/2 ?

Éléments de solution

1. On réalise un arbre représentant la situation, avec le mâle M_1, les femelles F_1, F_2, F_3.
   On munit l'univers de la loi d'équiprobabilité (tirage au hasard).
   Les issues favorables sont $\{(M_1, F_1)\ (M_1, F_2)\ (M_1, F_3)\ (F_1, M_1)\ (F_2, M_1)\ (F_3, M_1)\}$.
   Donc la probabilité cherchée est égale à $\dfrac{6}{12} = \dfrac{1}{2}$.



2. Avec neuf poissons, en commençant un arbre par essais (un mâle, deux mâles ...), on découvre une répartition possible : 3 mâles et 6 femelles. (Bien sûr 3 femelles et 6 mâles convient).
   L'univers est alors constitué de $9 \times 8 = 72$ issues et les issues favorables sont : $\{(M_1, F_1) \dots (M_1, F_6)\ (M_2, F_1) \dots (M_2, F_6)\ (M_3, F_1) \dots (M_3, F_6)\}$ et les couples symétriques soit 36 issues favorables.
   Ainsi la probabilité de l'événement « avoir deux poissons de sexe différent » est bien égale à $\dfrac{1}{2}$.
   Autrement : avec x mâles et y femelles on est conduit à $xy = 18$ et $x + y = 9$ etc.

3. a) En effet, pour que l'événement « obtenir deux poissons de sexe différent » ait une probabilité égale à $\dfrac{1}{2}$, il faut que le nombre total de paires de poissons distinctes soit le double du nombre de paires distinctes de sexe différent. Ainsi ce nombre est multiple de 2, donc il est pair.

   b)) Dans le cas de 70 poissons, nous avons 70×69 issues possibles (en tenant compte de l'ordre), soit $\dfrac{70 \times 69}{2} = 2415$ paires distinctes de poissons. (En effet une paire distincte donne deux 2 couples distincts).
   2415 n'est pas pair. Donc la probabilité d'avoir deux poissons de sexe différent ne peut pas être égale à $\dfrac{1}{2}$.

4. a) A la vue des exemples précédents, on peut conjecturer que si la propriété (H) est vérifiée alors n est un carré parfait.

b) Soit n le nombre de poissons. On a donc $n(n-1)$ issues possibles. Soit a le nombre de mâles et b le nombre de femelles, on a $a+b=n$.
De plus pour un mâle donné, on a donc b choix femelles. Ainsi puisqu'on tient compte de l'ordre, on a donc $2ab$ couples avec deux poissons de sexe différent.
$p=\frac{1}{2}$ équivaut à $\frac{2ab}{n(n-1)}=\frac{1}{2}$, c'est-à-dire à $4ab=n(n-1)$.
Donc si (H) est vérifiée, on a donc $4ab=n(n-1)=n`2-n$. De plus $a+b=n$.
Ainsi $4ab=(a+b^{)}2-(a+b)$ équivaut à $4ab=a^2+b^2+2ab-a-b$, c'est-à-dire à $a+b=(a?b)^2$ c'est-à-dire $n=(a-b)^2$. n est donc un carré parfait !

c) Réciproquement, soit n un carré parfait. Alors $n=k^2$. Soit a le nombre de mâles et b le nombre de femelles.
A la question précédente, on a montré que : (H) est vérifiée et $n=a+b$ équivaut à $a+b=n$ et $n=(a-b)^2$.
Ainsi $k^2=n=(2a-n)^2$ soit $k=2a-n$ ou $k=n-2a$ soit $a=\frac{n+k}{2}$ ou $a=\frac{n-k}{2}$

RETOUR AU SOMMAIRE

TOULOUSE

Troisième exercice

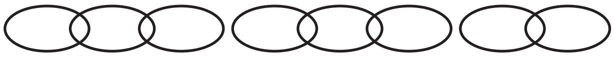
Séries autres que S.

Bracelets

Éléments de solution

Sophie et Martin réalisent des bracelets à partir de morceaux de chaine dont ils peuvent ouvrir et refermer des maillons.

1. Sophie dispose de deux morceaux de chaine comportant chacun trois maillons et d'un autre comportant deux maillons.



   Ouvrant les deux maillons du morceau de deux, Sophie les utilise pour relier les deux morceaux de trois. Elle obtient un bracelet de huit maillons et n'a ouvert et refermé que deux maillons.

2. Martin, lui, dispose uniquement de morceaux de chaine ayant trois maillons.
   Il veut en faire des bracelets en ouvrant le moins possible de maillons et en utilisant tous les maillons.
   a) Ouvrir les maillons d'un morceau et s'en servir pour relier les trois autres. On obtient un bracelet de douze maillons. C'est le mieux : pour défaire le bracelet et retrouver les maillons, on ouvre un maillon, puis en tournant, un autre après trois maillons, un troisième après trois maillons. On a ouvert trois maillons, il y a trois morceaux, et un quatrième avec les trois maillons ouverts.
   b) Avec huit morceaux. Ouvrant les maillons d'un morceau, on relie en chaine quatre morceaux (de douze maillons) ; il reste trois morceaux de trois maillons ; on ouvre les maillons d'un morceau pour relier en bracelet ce qui reste.
   c) Avec sept morceaux, le nombre d'ouvertures est le même.
   d) Pour un nombre de morceaux multiple de 4 (comme 672) ? soit $4a$? on ouvre les maillons de $a-1$ morceaux pour former un chaine avec $3a-1$ morceaux ; avec cette longue chaine, il reste trois morceaux ; trois ouvertures suffisent pour former le bracelet.
   Il y a donc $3a$ ouvertures (c'est-à-dire 504 pour l'exemple).
   e)
   - Pour un nombre de morceaux multiple de 4 plus 3 (comme 671, s'agissant de 2013 maillons), ? soit $4a+3$? on ouvre les maillons de a morceaux pour former un chaine avec $3a+1$ morceaux ; avec cette longue chaine, il reste deux morceaux ; trois ouvertures suffisent pour former le bracelet.
     Il y a donc $3a+3$ ouvertures (c'est-à-dire 504 pour l'exemple).
   - Pour un nombre de morceaux multiple de 4 plus 1 (comme 673), ? soit $4a+1$? on ouvre les maillons de a morceaux pour former un chaine avec $3a+1$ morceaux ; cette longue chaine épuise les maillons, on ouvre l'un d'eux pour la fermer en bracelet.
     Il y a donc $3a+1$ ouvertures (c'est-à-dire 505 pour l'exemple).
   - Pour un nombre de morceaux multiple de 4 plus 2 (comme 674, s'agissant de 2022 maillons), ? soit $4a+2$? on ouvre les maillons de a morceaux pour former une chaine avec $3a+1$ morceaux ; avec cette longue chaine, il reste un morceau ; deux ouvertures suffisent pour former le bracelet.
     Il y a donc $3a+2$ ouvertures (c'est-à-dire 506 pour l'exemple).

Autre proposition d'agencement de la rédaction :
On propose de considérer un bracelet de longueur L obtenu en ouvrant un nombre minimum N de maillons. On distingue donc parmi les maillons du bracelet final ceux qui ont été ouverts pendant la manipulation : pour alléger le discours, on les appelle « de type O », les autres « de type F ».

1. On remarque que sur quatre maillons consécutifs au moins un est de type « O ».
2. On traite seulement le cas $L > 3$. Ainsi il y a au moins un « O », dont on se sert comme référence. Quitte à enlever ce « O »on peut travailler avec une ligne de longueur $L - 1$ plutôt qu'un bracelet de longueur L, et vice-versa : il faut simplement ajouter un maillon pour passer de la ligne au bracelet.
   La question est devenue « quel est le nombre minimum $M = N - 1$ de maillons de type « O »dans une ligne de longueur $L - 1$ » ?
   La réponse est : $M = q$ si $L - 1$ est écrit sous la forme $4q + r$, avec r =0,1,2 ou 3. En effet il faut au minimum ce nombre à cause de la propriété « sur quatre maillons consécutifs au moins un est de type « O » ». Et par ailleurs ce nombre convient en faisant 3F +1O +3F + 1O...
   Ainsi $N = q + 1$

Morceaux	4	8	7	672	671	673	674
Maillons	12	24	21	2016	2013	2019	2022
Nbr ouverts	3	6	6	504	504	505	506

RETOUR AU SOMMAIRE

VERSAILLES

Premier exercice

Série S.

Tant qu'il y aura des sommes

Éléments de solution

On cherche deux ensembles A et B, dont les éléments sont des nombres entiers naturels, tels que tout entier naturel compris entre 0 et 2 016 puisse être écrit comme la somme d'un élément de A et d'un élément de B. De plus, A et B doivent avoir le même nombre d'éléments.

1. 0 est élément de A et de B, car $0+0$ est la seule façon de l'obtenir comme somme. Pour la suite on peut rassembler dans les nombres impairs de 1 à 2 012 et 2 et dans B les nombres pairs de 2 à 2 014. Les seuls nombres qui ne sont pas obtenus comme leur somme avec 0 sont 2 013 (1 006 + 1 007), 2 015 (1 007 + 1 008) et 2 016 (2 + 2 014). Il y a ainsi 1 008 nombres dans A comme dans B.
2. Si A et B ont chacun n éléments, les nombre de couples (a,b) faits d'un élément de A et d'un élément de B est n^2. C'est aussi le nombre maximal de sommes réalisées avec un élément de A et un élément de B. Une condition nécessaire sur n est donc $n^2 \geqslant 2\,016$. Le premier carré d'entier supérieur à 2 016 est 45.
3. On peut composer A avec les entiers compris entre 0 et 44 (ce qui fait 45 éléments) et B avec les multiples de 45, de 0 à $44 \times 45 = 1980$ (ce qui fait aussi 45 éléments). Pour tout entier m compris entre 0 et 2 016, la division euclidienne de m par 45 donne un quotient q et un reste r inférieur strictement à 45. Le nombre $45q$ est un élément de B, le nombre r est un élément de B.

RETOUR AU SOMMAIRE

VERSAILLES

Deuxième exercice

Série S.

La sécurité dans le désordre

Éléments de solution

1. a) Des six nombres constitués des trois chiffres 1, 2 et 3 apparaissant chacun une unique fois, un est le code initial, deux permettent l'ouverture et les trois autres ne la permettent pas. Si 123 permet d'ouvrir, le code initial est 231 ou 312 (les trois sont fabriqués par permutations circulaires) et 132, 213 et 321 conduisent à l'échec.

   b) Les *codes initiaux* ont un chiffre commun avec 123. Ce sont donc 132, 213 et 321.

   c) 123 permet d'ouvrir la porte si le *code initial* est 231 ou 312, 231 « ouvre » 312 et 123, 132 ouvre 321 et 213 et 213 ouvre 132 et 321. Les six *codes initiaux* possibles sont représentés. La porte s'ouvre.

   d) Il y a deux groupes de trois nombres $\{123{,}231{,}312\}$ et $\{132{,}321{,}213\}$ dans lesquels chacun des trois nombres libère les deux autres s'ils sont utilisés comme *codes initiaux*. En prenant un nombre dans chaque, on libère quatre codes, mais les deux restant ne peuvent être libérés par un même nombre. On ne peut donc trouver une liste de trois nombres ouvrant la porte.

On améliore le système : le code initial est un nombre formé avec les quatre chiffres 1, 2, 3 et 4, le mode d'emploi étant le même que précédemment.

2. a) Un *code initial* à quatre chiffres est fixé. Sans perdre la généralité, notons-le 1234. Dans tout nombre ouvrant le code 1234, le « 1 » prend la place d'un autre chiffre, par exemple « 2 ». Soit il échange sa place avec « 2 », et les deux autres chiffres doivent aussi échanger leurs places. Soit il prend la place d'un troisième, par exemple « 3 », et « 4 » doit donner sa place à « 3 ». Pour chaque changement de place du « 1 », il y a trois dispositions possibles. Comme il y a trois choix pour déplacer « 1 », on trouve que la liste des codes ouvrant le code initial 1234 contient 9 nombres de quatre chiffres.

   b) Considérons la suite 1234 – 2341 – 3412 – 4123.

1 2 3 4	**2 3 4 1**	**3 4 1 2**	**4 1 2 3**
2 1 4 3		2 1 4 3	2 3 4 1
2 3 4 1		2 1 3 4	2 4 3 1
2 4 1 3		2 3 4 1	2 3 1 4
3 1 4 2	3 2 1 4		3 2 1 4
3 4 1 2	3 1 2 4		3 2 4 1
3 4 2 1	3 4 1 2		3 4 1 2
4 1 2 3	4 2 3 1	4 3 2 1	
4 3 1 2	4 1 3 2	4 2 3 1	
4 3 2 1	4 1 2 3	4 1 2 3	
	1 4 3 2	1 2 3 4	1 4 3 2
	1 4 2 3	1 3 2 4	1 3 4 2
		1 2 4 3	1 2 3 4

   Le tableau ci-contre montre les ensembles de codes libérés par chacun des 4 nombres proposés. Chacun des termes de la suite se retrouve dans les trois groupes engendrés par les autres. Quatre autres codes sont répétés. Les 24 permutations possibles sont obtenues.

   c) Considérons la suite 12345 – 23415 – 34125 – 41235 – 51234 – 52341 – 53412 – 54123, construite en ajoutant 5 à gauche ou à droite de chacun des quatre motifs précédents.
   Si le code à casser se termine par 5, ses quatre premiers chiffres résultent de l'effet d'une permutation sans point fixe sur un des termes, disons X, de la suite 1234 – 2341 – 3412 – 4123. Il est alors cassé par 5 suivi de X. S'il ne se termine pas par un 5, 5 est un de ses chiffres autre que le dernier et un échange entre 5 et le dernier chiffre ramène à la situation précédente. Cet échange ne nous fait pas sortir de l'ensemble des permutations admissibles. On a donc trouvé une suite de huit combinaisons qui casse tous les codes. Huit n'est cependant pas un minimum…

RETOUR AU SOMMAIRE

VERSAILLES

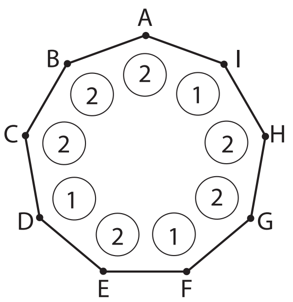
Troisième exercice

Séries autres que S.

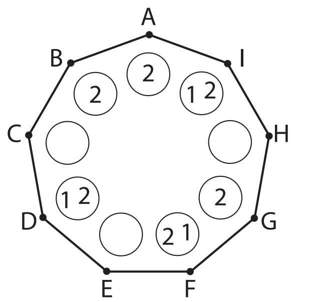
Table tournante

Éléments de solution

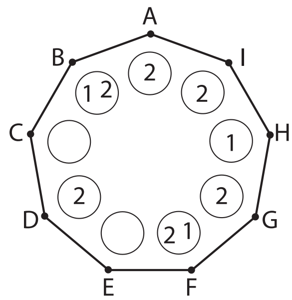
1. Distribution obtenue après les deux mouvements de pièces ?



Distribution initiale



Passage des « 2 euros » à gauche



Passage des « 1 euro » deux fois à droite

2. a) Supposons que A, B et C aient reçu chacun une pièce de 1 euro. Lors des échanges, la pièce détenue par A va à C, celle détenue par B va à D. Si D avait au départ une pièce de 2 euros, elle est passée à C, qui a donc deux pièces à l'issue des échanges. Donc, s'il n'y a pas de « trou », D avait au départ une pièce de 1 euro. De proche en proche, on en déduit que toutes les pièces distribuées étaient des pièces de 1 euro.

Supposons que A et B aient reçu une pièce de 1 euro, et que C et I ont reçu une pièce de 2 euros. Lors des échanges, C reçoit la pièce de 1 euro de A, D celle de B, B reçoit la pièce de 2 euros de C. Si D avait reçu une pièce de 2 euros, elle serait passée à C, qui aurait ainsi 2 pièces. Donc D a reçu une pièce de 1 euro, qu'il a donnée à F. Si E avait reçu une pièce de 2 euros, elle serait passée à D, qui en aurait deux. Donc E a reçu une pièce de 1 euro.

A doit avoir reçu une pièce de 1 euro, qui lui vient donc de H. H reçoit la pièce de 2 euros de I. Mais alors I doit recevoir une pièce de 1 euro, qui lui vient de G. Il ne reste que F à munir, d'ne pièce de 2 euros, le 1 euro étant interdit par ce qui précède.

	I	H	G	F	E	D	C	B	A
Début	2	**1**	**1**	2	**1**	**1**	2	1	1
Echange	**1**	2	1	1	2	1	1	2	**1**

Se peut-il qu'une personne ayant reçu une pièce de 1 euro soit entourée de voisins possédant chacun une pièce de 2 euros ? Le tableau suivant procède à une discussion analogue à celle qui précède :

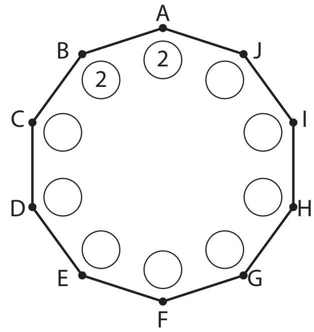
	I	H	G	F	E	D	C	B	A
Début	2	**2**	**1**	2	2	**1**	**2**	2	1
Echange	**1**	2	**2**	**1**	2	2	1	**2**	2

Les distributions qui ne conduisent pas à des « trous » sont faites de paires de pièces de 2 euros séparées par des pièces de 1 euro ou de paires de pièces de 1 euro séparés par des pièces de 2 euros.

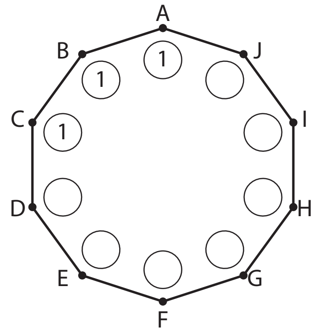
b) Quelles sont les distributions initiales qui permettent que chaque personne ait une pièce à l'issue des mouvements ?

On procède de la même façon avec 10 personnes attablées et un sac contenant 9 pièces de 1 euro et 9 pièces de 2 euros. On fait l'hypothèse qu'après les deux temps de redistribution, chaque personne a au moins une pièce devant elle.

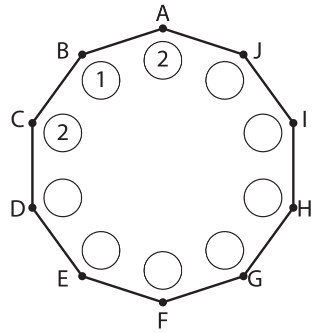
3. a) Montrer que deux voisins ne peuvent pas avoir chacun une pièce de 2 euros.
Si J recevait aussi une pièce de deux euros, la pièce de 1 euro de I irait à A, qui aurait deux pièces. I ne peut en effet recevoir aussi une pièce de 2 euros, car alors de proche en proche il y aurait 10 pièces de 2 euros. Donc J reçoit une pièce de 1 euro. I reçoit une pièce de 2 euros (sa pièce de 1 euro irait à A, nanti déjà par la pièce de 2 euros de B). Cette pièce va à H, et remplace une pièce de 2 euros (une pièce de 1 euro en H ne pourrait aller qu'en J, déjà nanti). La pièce de 1 euro de G va en I. On se retrouve dans la situation de la question précédente, avec des suites de 2 pièces de 2 euros précédant une pièce de 1 euro. Seulement voilà, 10 n'est pas multiple de 3.



b) Montrer qu'il est impossible qu'une personne, son voisin de droite et son voisin de gauche aient chacun une pièce de 1 euro.
D ne peut recevoir une pièce de 2 euros, car alors après les échanges C aurait deux pièces. Il en va de même pour E, et ainsi de suite, tous reçoivent une pièce de 1 euro. Impossible, il n'y en a que 9.

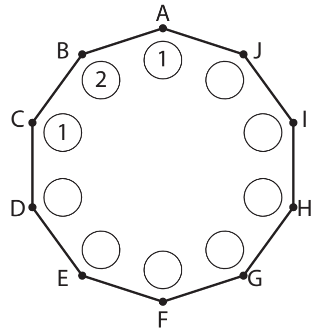


c) Montrer que toute personne ayant une pièce de 1 euro ne peut pas être entourée de voisins ayant chacun une pièce de 2 euros.
J et B héritent des pièces de 2 euros de A et C. La pièce de 1 euro de B va en D. A ne peut que recevoir une pièce de 1 euro provenant de I. Si J avait eu une pièce de 1 euro, elle serait allée en B, qui aurait deux pièces. Donc J avait reçu une pièce de 2 euros, qui va en I.
On retrouve la situation des groupes de 3, et 10 n'est pas multiple de 3.



d) Conclure quant à la validité de l'hypothèse « après les deux temps de redistribution, chaque personne a au moins une pièce devant elle ».
La distribution de peut pas conduire à des suites de trois pièces 1 – 1 – 1, 2 – 1 – 2, ni à la succession 2 – 2. Les cas restant se réduisent à 1 – 2 – 1.
J doit recevoir une pièce de 1 euro, à donner à B et I une pièce de 2 euros.
On se retrouve dans la situation des suites de trois pièces déjà rencontrées.

En conclusion, avec 10 personnes et dans les conditions proposées, une personne au moins est démunie après les échanges (qui n'en sont donc pas).



RETOUR AU SOMMAIRE

VERSAILLES

Quatrième exercice

Séries autres que S.

Éloge de la régularité

Éléments de solution

Appelons m, p et d, respectivement, les distances à parcourir en montée, en terrain plat et en descente, comptées dans le sens A vers B.

L'énoncé donne deux relations : $m+p+d=15$ et $\frac{m}{4}+\frac{p}{5}+\frac{d}{6}=3$, qui peuvent être traduites par

$$\left\{\begin{array}{rcl} m+p+d & = & 15 \\ 5m+2p & = & 30 \end{array}\right. \qquad (*)$$

Le temps mis « à la régulière » pour effectuer le parcours de B vers A s'exprime par $T=\frac{m}{6}+\frac{p}{5}+\frac{d}{4}$.

Soit encore $60T=10m+12p+15d$.

Les trois relations conduisent à $5(d-m)=60T-180$, ou encore $T=3+\frac{1}{12}(d-m)$.

Les relations (*) conduisent à l'expression de m et d en fonction de p :

$$\left\{\begin{array}{l} (m=6-\frac{2p}{5} \\ d=9-\frac{3p}{5} \end{array}\right.$$

Il s'ensuit que $d-m=3-\frac{p}{5}$ et donc que $T=3+\frac{1}{4}-\frac{p}{60}$.

Sous cette dernière forme, on voit que :

1. Le temps « régulier » est supérieur à 3 heures (car $\frac{p}{60}<\frac{1}{4}$), donc Clara a forcé l'allure.
2. Le temps « régulier » est inférieur à 3 heures et quart, donc Isabelle a ralenti ou s'est arrêtée.

RETOUR AU SOMMAIRE