A propos du théorème de Pythagore

Henry Plane

Puisque l'incontournable « théorème de Pythagore » est, de l'avis général, celui qui reste le plus ancré dans les têtes en fin d'études secondaires, peut-être serait-il bon de dire quelques mots de son histoire et de quelques-unes de ses démonstrations.

Il fut, dit-on, appelé « *Théorème de la Mariée* », puis « *Pont aux ânes* » avant d'être associé au grand Grec du V[e] siècle avant J.C. C'est VITRUVE (1[er] siècle) qui l'attribue à Pythagore mais on en trouve trace, du moins dans ses applications, chez les Chaldéens, Egyptiens, voire Chinois et ce, bien antérieurement.

En ce qui concerne les démonstrations :
• on en dénombre une bonne centaine
• elles peuvent être regroupées en trois familles :

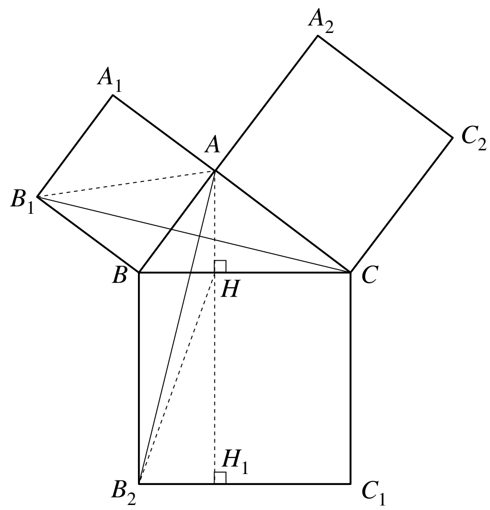
- celles reposant uniquement sur des surfaces d'aires équivalentes et non calculées ;
- celles usant du calcul de ces aires et d'autres propriétés géométriques,
- celles faisant nettement appel à du calcul algébrique.

Pour nous, la plus anciennement connue des démonstrations figure, avec sa réciproque, à la fin du livre I d'Euclide (propositions 47 et 48). L'énoncé, tout géométrique, en est du reste :

Le carré construit sur l'hypoténuse d'un triangle rectangle est égal à ceux construits sur les cathètes.

Cathètes : côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle.

(On notera ($MNPQ$) l'aire de la surface $MNPQ$, et on renverra aux figures pour alléger le discours).



$(AA_1B_1C) = 2(AB_1B) = 2(CB_1B)$

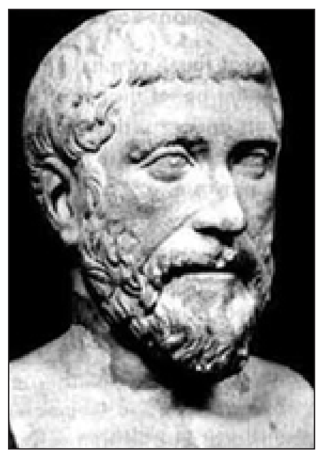
or, tr BB_1C égale tr BAB_2

$(AA_1B_1C) = 2(BAB_2) = 2(BHB_2)$
$= (BHH_1B_2)$

de même :
$(AA_2C_2C) = (HCC_1H_1)$

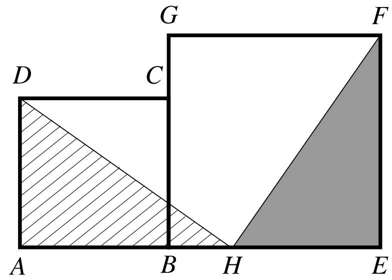
et l'union de BHH_1B_2 et de HCC_1H_1 donne BCC_1B_2.

On associe au nom de CLAIRAUT (1765) cette autre démonstration de la même première famille. On en trouverait l'idée dans des textes sanscrits.

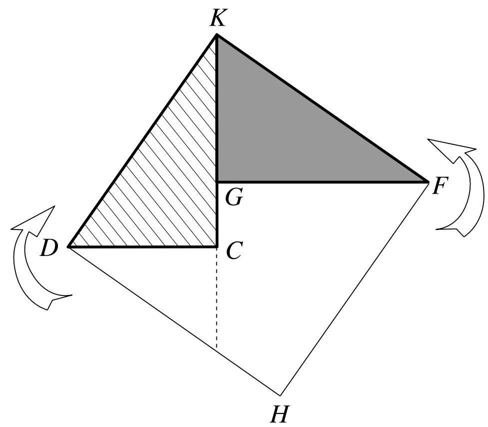


Pythagore

Clairaut



Deux carrés de côtés *AB* et *BE*.
On prend *H* sur [*AE*] tel que *AH* = *BE*, donc *HE* = *AB*. Ces carrés matérialisent les côtés *AD* et *AH* du triangle rectangle *ADH*.



Si on fait pivoter de 90° *ADH* autour de *D* et *FEH* autour de *F*, on obtient *DHFK* carré sur l'hypoténuse.

(*Cela est facile à réaliser en carton, très tôt dans la scolarité ; un carré égal à deux carrés !*).

Un autre exemple de la même famille, sous une forme ou une autre chez divers auteurs arabes ou persans du Moyen-Age

Dans le cas précédent on pouvait parler de rotations, ici, on aura une symétrie.

Adjoignons aux carrés *ABDE* et *ACGF* construits sur *ABC* le triangle *AEF* qui lui est égal. Coupons la figure selon la droite *DAG* (points alignés sur les diagonales des carrés).

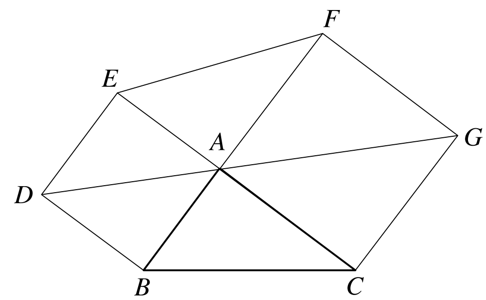
Retournons la « moitié » *DEFG* qui vient en *DF'E'G*.

Les égalités d'angles et de segments montrent que :

tr *GEC'* = tr *ABC* = tr *DBF'*

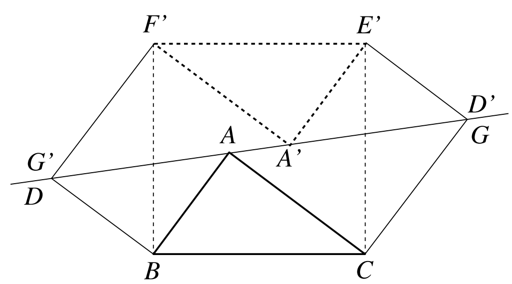
alors :

Première figure :



(*BCGFED*) = (*ACGF*) + (*AEDB*) + 2(*ABC*)

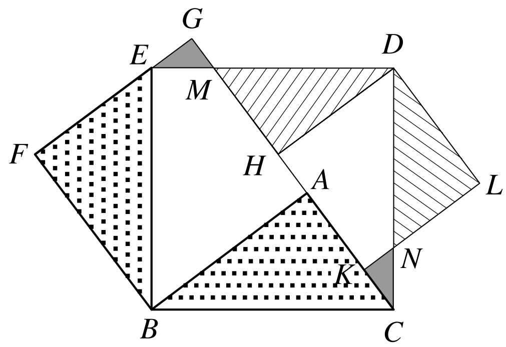
Deuxième figure :



(*BCGE'F'D*) = (*BCE'F'*) + 2(*ABC*)

(*BCE'F'*) = (*ACGF*) + (*ABDE*).

En Chine, puis au Japon, on affectionnait ces découpes-constructions.



Au triangle rectangle *ABC*, on adjoint le carré *BEDC* et les triangles égaux à *ABC*, *FBE* et *DCH*. On complète les carrés *ABFG* et *DHKL*. *E* est sur [*FG*], *G* et *K* sur la droite (*GC*).

(AC) coupe (ED) en M et (KL) coupe (DC) en N.

Le chinois dit : « regarde » :

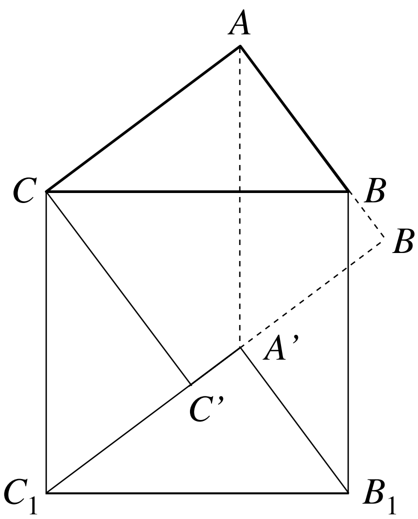
$$(BCDE) = (ABFE) + (KHDL)$$

car tr KNC = tr GME… (voir coloriage)

Passons à la **deuxième famille** avec des calculs d'aires.

Dans une revue de mathématiques du XIXe siècle :

Soient ABC rectangle en A, son carré BCC_1B_1, puis $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB_1}$ (on excusera le néologisme) enfin B' et C' les projetés orthogonaux de A et C sur la droite $(A'C_1)$ (même excuse).



Les triangles ABC, $B'A'A$, $CC'C_1$ et $A'B_1C_1$ sont égaux.

$(ABB_1C_1C) = (ABC) + (BCC_1B_1)$

mais aussi

$$= (ABB_1A') + (AA'C_1C) + (A'B_1C_1).$$

On sait calculer l'aire des parallélogrammes :

(ABB_1A') = base $AB \times$ hauteur $A'B'$

$$= AB \times A'B' = AB^2$$

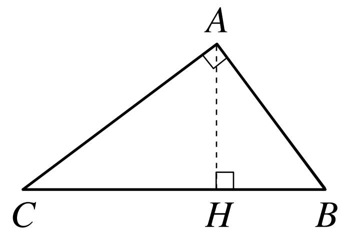
$(ACC_1A') = AC \times CC' = AC^2$.

Donc :

$(ABC) + BC^2 = (A'B_1C_1) + AB^2 + AC^2$

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

Après avoir étudié les figures semblables dont le rapport des aires est égal au carré du rapport des côtés homologues (EUCLIDE : livre VI ou Théorème de COMMANDINO ou autres) :

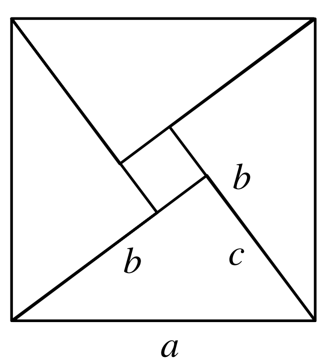


Dans le triangle rectangle ABC, de hauteur AH, sont semblables les triangles ABC, HBA et HAC, donc

$$\frac{(HBA)}{AB^2} = \frac{(HAC)}{AC^2} = \frac{(ABC)}{BC^2}$$

Il ne reste qu'à unir les triangles et à additionner, ce que fit LAMY dans ses « *Eléments de géométrie* » (1680).

Troisième famille avec de l'algèbre ou, au moins, les acquis du livre II d'EUCLIDE, et la formule d'aire.



L'aire du grand carré est égale à l'aire du petit plus l'aire de quatre triangles égaux :

$$a^2 = (b - c)^2 + 4\frac{bc}{2}$$

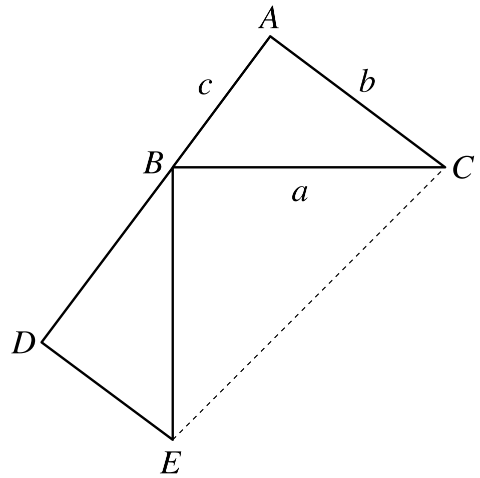
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc + 2bc = b^2 + c^2.$$

Rappelons que :

si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ alors

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$$

Et puis, il y a GARFIELD, assassiné en 1881. Il était Président des Etats-Unis d'Amérique après avoir enseigné les mathématiques.



Si on place deux triangles rectangles égaux ABC et DEB tels que l'angle $\widehat{EBC}$ soit droit, alors A, B et D sont alignés, (AC) et (DE) sont parallèles , $DECA$ est un trapèze rectangle.

$$(DECA) = \frac{DE + AC}{2} . DA$$

$$= \frac{b + c}{2} . (b + c)$$

mais

$$(DECA) = (ABC) + (DEB) + (BEC)$$

$$= \frac{bc}{2} + \frac{bc}{2} + \frac{a^2}{2}$$

$$\frac{(b + c)^2}{2} = bc + \frac{a^2}{2}$$

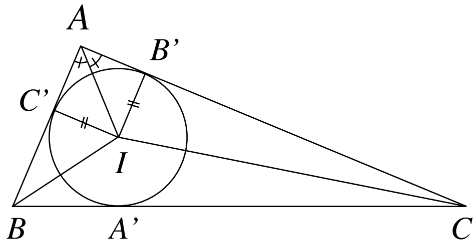
$$b^2 + 2bc + c^2 = 2bc + a^2$$

$$b^2 + c^2 = a^2.$$

Et encore :

Avec le cercle inscrit ! (Faisons de la géométrie !)…

Le triangle étant rectangle :



$$r = IB' = IC' = AB' = AC'$$

et le périmètre :

$$2p = 2r + 2a$$

donc $\quad 2r = b + c - a.$

Comme

$$(ABC) = (IAB) + (IBC) + (ICA)$$

$$\frac{bc}{2} = \frac{ra}{2} + \frac{ra}{2} + \frac{rb}{2} = \frac{r}{2}(a + b + c)$$

$$2bc = (b + c - a)(b + c + a)$$

$$2bc = (b + c)^2 - a^2$$

$$2bc = b^2 + 2bc + c^2 - a^2$$

Toujours le même résultat…

Si après cette petite promenade à travers les siècles, ce sujet vous attire - n'est-il pas source de problèmes pour une ou plusieurs classes ? - alors, rendez-vous avec :

Emile FOURREY - *Curiosités géométriques* (1907)

F.G.M. - *Exercices de géométrie* (1875) chez les vieux bouquinistes ou les rééditeurs.

IREM du Mans : *Démontrer avec des aires* (2000).

IREM Paris Nord : *Tout, ou presque, ce que vous avez voulu savoir sur le théorème de Pythagore, sans jamais oser le demander.*

Cette brochure, ancienne, n'est plus retirée, mais est consultable à la bibliothèque de l'IREM.

Manuscrit de la bibliothèque d'Avranches