GALION THÈMES

Arpentage

15, quai André Lassagne - 69001 LYON
1995

ISBN : 2-912209-14-5

1 Arpenter... Pour quoi faire ?

Les activités de ce fascicule sont bâties autour de l'idée d'arpentage.

Recherchez le sens de ce mot dans un dictionnaire, une encyclopédie. Vous y trouverez, entre autres, que, à partir de mesures sur le terrain — longueurs, angles — on peut en déduire d'autres longueurs — parfois inaccessibles — des aires, etc. On peut mesurer sur un plan, réalisé à une échelle appropriée ; on peut aussi obtenir des mesures de manière très précise, à l'aide de formules que vous ne connaissez sans doute pas (pas encore !) et qui sont données en dernière page dans "***Le coin du matheux***".

L'arpentage est en réalité une vieille idée.

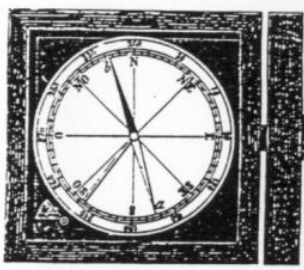
Déjà, dans l'Égypte ancienne, des siècles avant notre ère, le Nil avait régulièrement des crues très importantes qui détruisaient les limites des champs des agriculteurs installés sur ses rives. D'où l'idée de *réaliser des plans* de ces territoires avant la crue afin de les reconstituer lorsque l'eau du Nil se retire …

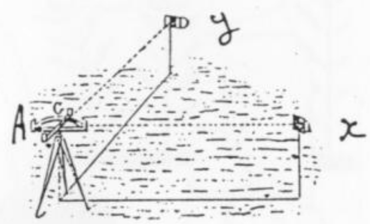
Et c'est ainsi qu'est née la géométrie, qui serait la "fille" de propriétaires terriens d'Égypte, mais aussi du génie de quelques grands esprits de l'époque.

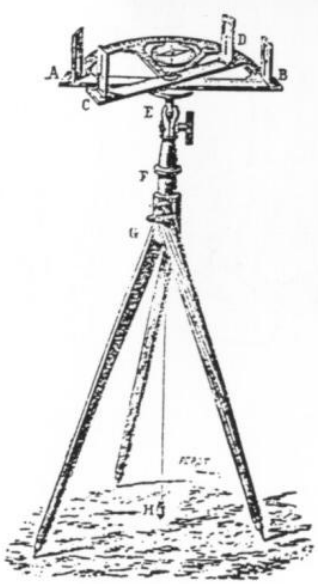
♦ Que faut-il mesurer sur le terrain ?

Pour les **longueurs**, on peut utiliser la *chaîne d'arpenteur*, le *décamètre*.

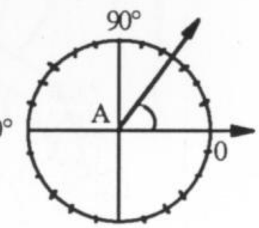
Pour les **angles**, on utilise des appareils comme le *goniomètre* (gonios : angle), la *boussole d'arpenteur* (figure 1) ou le *graphomètre* (figure 2).







Le graphomètre est un appareil posé sur un trépied. Il se compose essentiellement d'un demi-cercle gradué fixe, muni de deux *alidades*, une fixe, une mobile. C'est l'angle de ces deux alidades qui permet de déterminer l'angle de la direction Ax avec une direction Ay.



Fabriquez vous-même un petit goniomètre pour vous exercer à mesurer des angles à partir d'un point.

Découpez un disque assez grand dans un carton fort et graduez-le en degrés, de 0 à 360, comme un grand rapporteur. Il peut être fixé sur un support horizontal, et vous imaginerez un système de visée (aiguilles, flèches, …) vous permettant de repérer, à partir du point A, deux directions sur le terrain. C'est, bien sûr, approximatif, mais c'est un bon entraînement à la "*méthode expérimentale*".

♦ Comment réaliser un plan à l'échelle ?

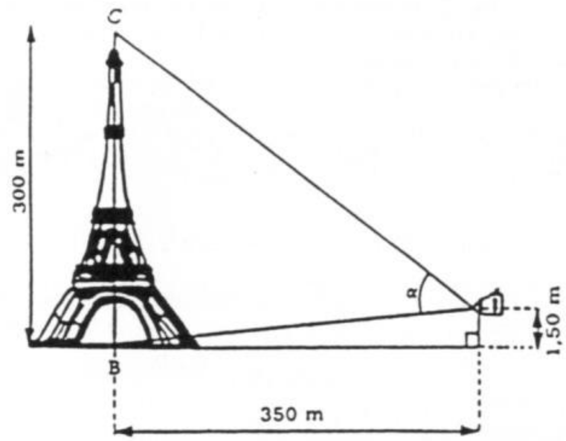
Pour reporter une longueur réelle sur un plan, vous saurez choisir une **échelle** sur ce plan : "1 cm pour x cm ...".

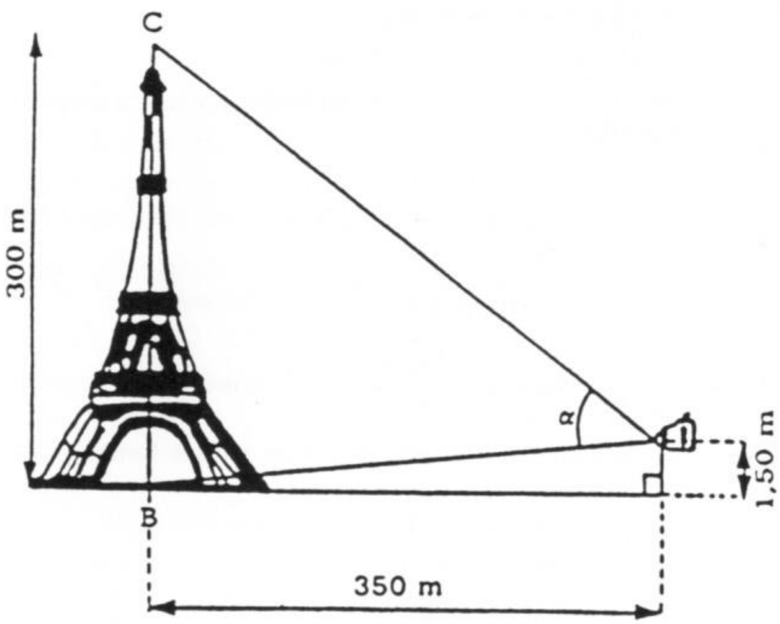
Et pour les angles ?

Voici deux représentations de la Tour Eiffel. Comparez les angles sur ces dessins, en particulier l'angle sous lequel le photographe va "prendre son cliché" ...

Et pourtant, les longueurs ne sont pas les mêmes !...

Quelle est l'échelle utilisée pour chacun des croquis ?





2 Des distances inaccessibles !

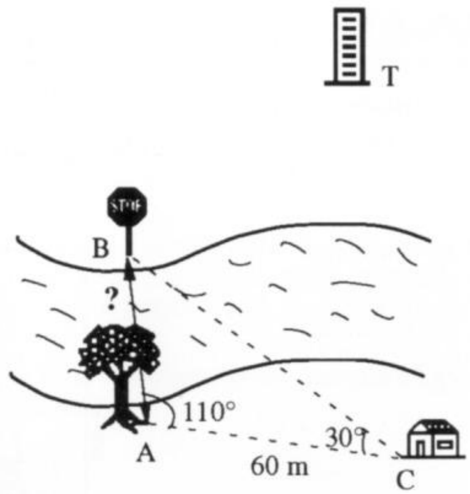
✦ Notre camarade Jacky voudrait connaître la largeur de la rivière, c'est-à-dire la distance de l'arbre A au panneau B, mais il n'a pas les moyens de traverser.

"J'ai une idée géniale", dit Jacky,

"je vais faire une dessin à l'échelle."

Aidé de son frère Jules, il décide de mesurer la distance AC, à l'aide d'un décamètre par exemple :
il trouve $AC = 60$ mètres.

Au moyen de son goniomètre placé en A, il mesure, par visées, l'angle $\widehat{CAB}$, puis en se plaçant en C, il mesure l'angle $\widehat{BCA}$: $\widehat{CAB} = 110°$, $\widehat{ACB} = 30°$.



• Après avoir choisi une échelle convenable, dessinez [AC] à cette échelle, construisez les angles $\widehat{A}$ et $\widehat{C}$ au moyen d'un rapporteur.

• Vous obtenez le point B sur le plan.

• Vérifiez la mesure de l'angle $\widehat{ABC}$.

• Calculez alors la longueur AB *réelle*, sur le terrain.

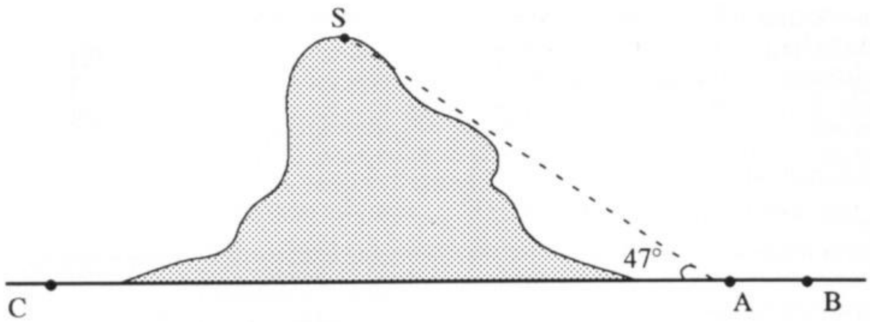
✦ Jacky, virtuose du décamètre, voudrait pouvoir trouver la distance inaccessible BT entre le panneau B et la tour T. Que faire ? … Aidez-le !

✦ Son frère Jules, venu à la rescousse, donne les mesures suivantes, faites au goniomètre : $\widehat{BCT} = 50°$; $\widehat{CAT} = 80°$.

Trouvez alors la longueur inaccessible BT en vous aidant d'un plan complété.

> ▲ Mais des ***formules du matheux*** (page 16) vous permettent de répondre à ces questions sans faire de dessin …
>
> En utilisant votre calculatrice, en et choisissant les bonnes formules, exercez-vous …!

3 Là-haut sur la montagne

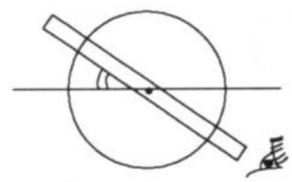


✪ Trois points alignés A, B, C sont à la même altitude (145 m). De chacun de ces points, on vise le sommet S de la montagne. Voici les angles avec l'horizontale donnés par la lunette de visée :

de A : angle 47°

de B : angle 38°

de C : angle 29°



Sachant que la distance AB vaut 360 m, on voudrait connaître la distance AC ainsi que la hauteur de la montage.

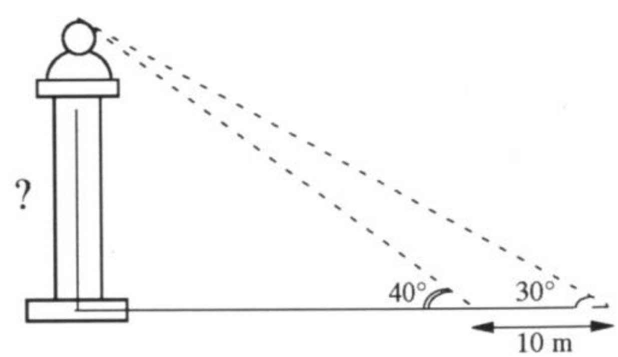
• Posez-vous des questions : – ce qu'on connaît,
– ce qu'on ne connaît pas,
– ce qu'on pourrait évaluer.

• Essayez de faire un dessin précis à l'échelle 1/20 000.

• Trouvez la distance AC.

• À quelle altitude se trouve le sommet S de la montagne ?

✪ Quelle est approximativement la hauteur de cette tour ?



▲ Pour ces activités aussi, le “coin du matheux” de la page 16 peut vous apporter des solutions !

4 Des activités chez vos ancêtres

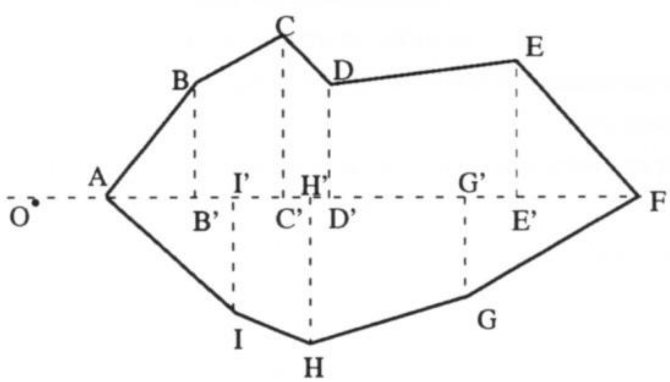
Dans un ouvrage de géométrie d'il y a tout juste cent ans (1895), on trouve l'activité suivante :

"Trouver la surface d'un polygone.

On mène une base AF sur laquelle on abaisse des perpendiculaires ou ***ordonnées*** *de tous les sommets du polygone : on choisit sur cette base un point O qui laisse du même côté toutes les ordonnées, on considère le point O comme l'origine des* ***abscisses****. Ainsi, BB', CC', DD' ... sont les ordonnées et OA, OB', OI' ... sont des abscisses.*

L'arpenteur mesure les ordonnées et les abscisses. les longueurs trouvées s'inscrivent dans un tableau comme celui qui suit. Ce tableau contient toutes les données pour calculer l'aire du polygone ABCDEFGHI."

Sommets	Abscisses (en m)	Ordonnées (en m)
A	3	0
B	16	19
I	24	17
C	35	29
H	40	22
D	49	18
G	68	19
E	80	20
F	98	0



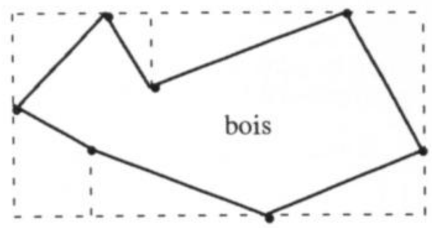
- Comparez le vocabulaire utilisé dans ce texte au vocabulaire actuel.
- Calculez l'aire de ce polygone ABCDEFGHI.

5 Avec un rectangle circonscrit

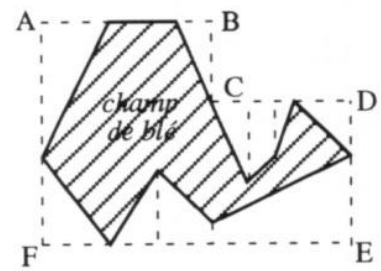
Lecture (extrait de "Manuel d'arpentage" - 1882)

"***Polygone circonscrit.*** On peut avoir à *arpenter* un bois, une propriété qui contient une récolte sur pied, une pièce d'eau, un marais, dans lesquels il est impossible de *jalonner* des lignes, d'élever des perpendiculaires. Dans ce cas, on *circonscrit* au bois, au marais, un triangle, un rectangle ou un trapèze.

Soit à arpenter un bois. On circonscrit un rectangle à ce bois. Chacun des côtés du rectangle sert de directrice. La surface du bois est égale à celle du rectangle circonscrit, diminuée de la somme des parcelles comprises entre le périmètre du bois et les côtés du rectangle.



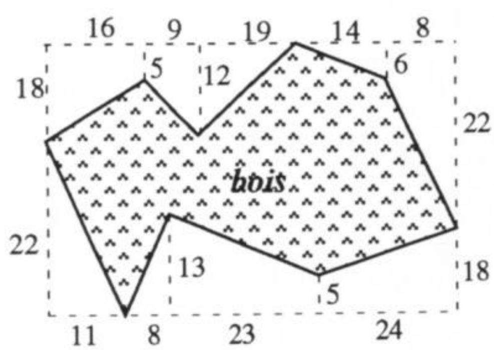
Remarque. Il peut arriver que l'on ne puisse pas construire un rectangle. On circonscrit alors une *figure rectangulaire* ABCDEF ; on évalue la surface du polygone circonscrit ABCDEF et l'on en retranche les parcelles qui ne font point partie du terrain."



• Expliquer le vocabulaire particulier de ce texte, par exemple : *circonscrit*, *arpenter*, *jalonner des lignes*, *directrice*, *figure rectangulaire*.

• ***Application numérique :***

Calculer l'aire du petit bois à partir de ce plan sur lequel les dimensions sont indiquées en mètres.



6 Pour arpenter La Réunion

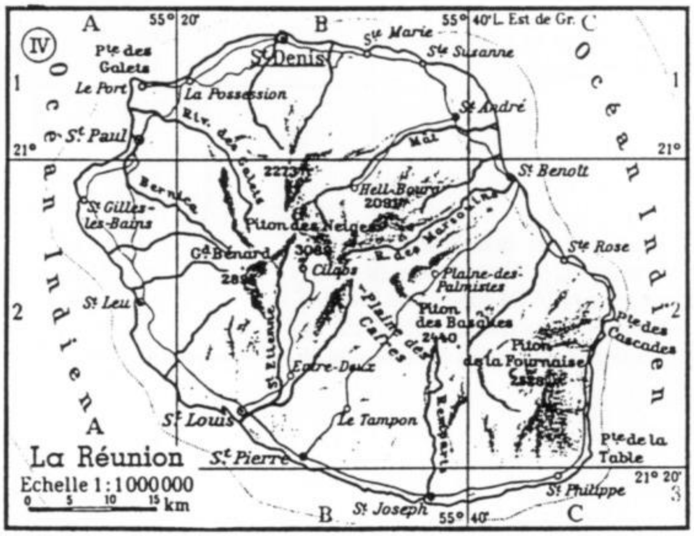
+ L'île de la Réunion est un département français (97.4). Elle est située dans l'Océan Indien, à l'Est de Madagascar.

- Nous vous donnons une carte de La Réunion. Évaluez d'abord le périmètre de cette île en kilomètres, puis son aire en km^2 et en hectares. Vérifiez sur une encyclopédie.

  Toutes les idées sont bonnes …

  Vous pouvez penser à utiliser du fil, des épingles, du papier millimétré transparent, du papier calque …

- Pour l'an 2000, on prévoit une densité de 273 habitants par km^2 : quelle sera la population de l'île à ce moment-là ?



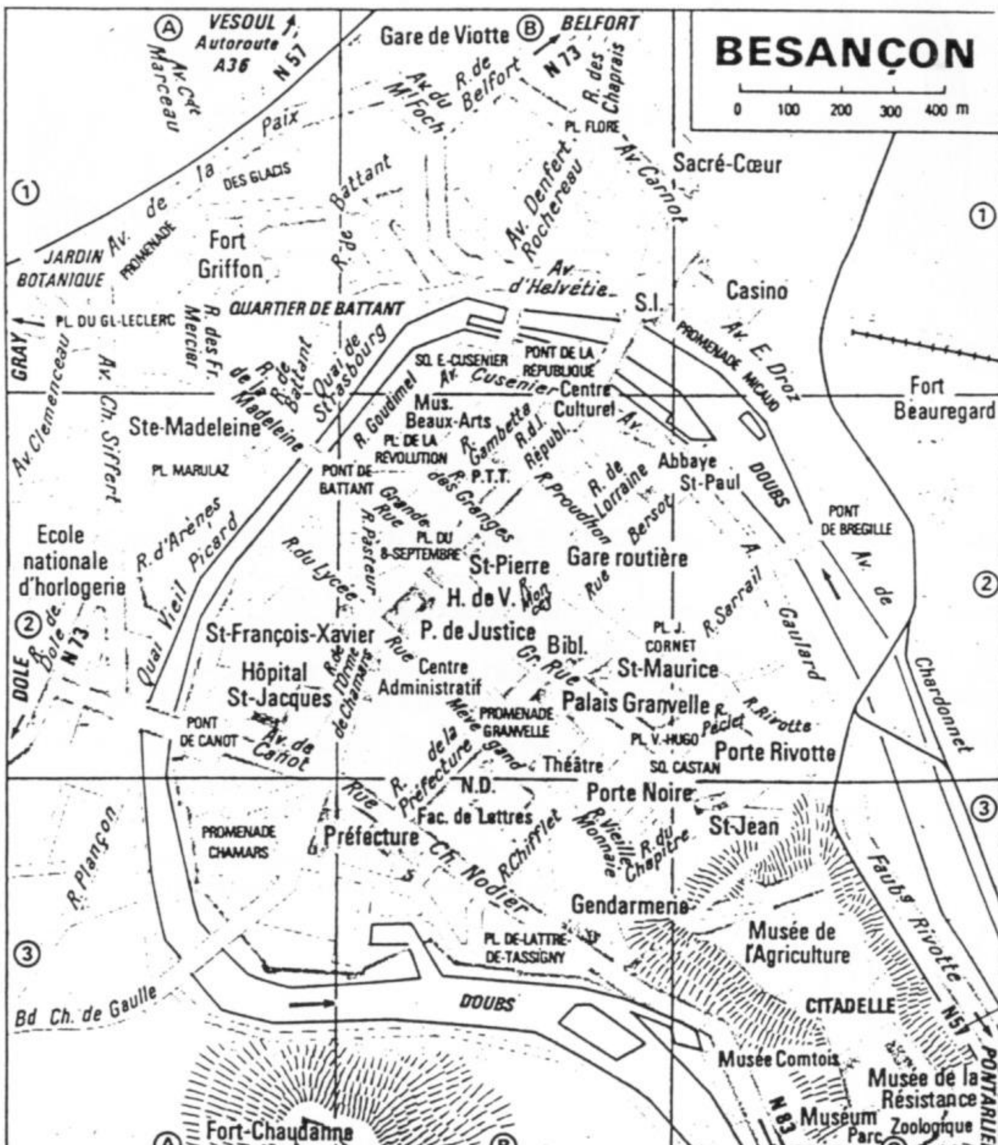
+ Voici une carte de la Nouvelle-Calédonie. L'île principale est-elle plus ou moins étendue que l'île de La Réunion ?

7 C'était dans Besançon, vieille ville espagnole...

Une partie de la ville de Besançon est construite à l'intérieur d'une boucle du Doubs.

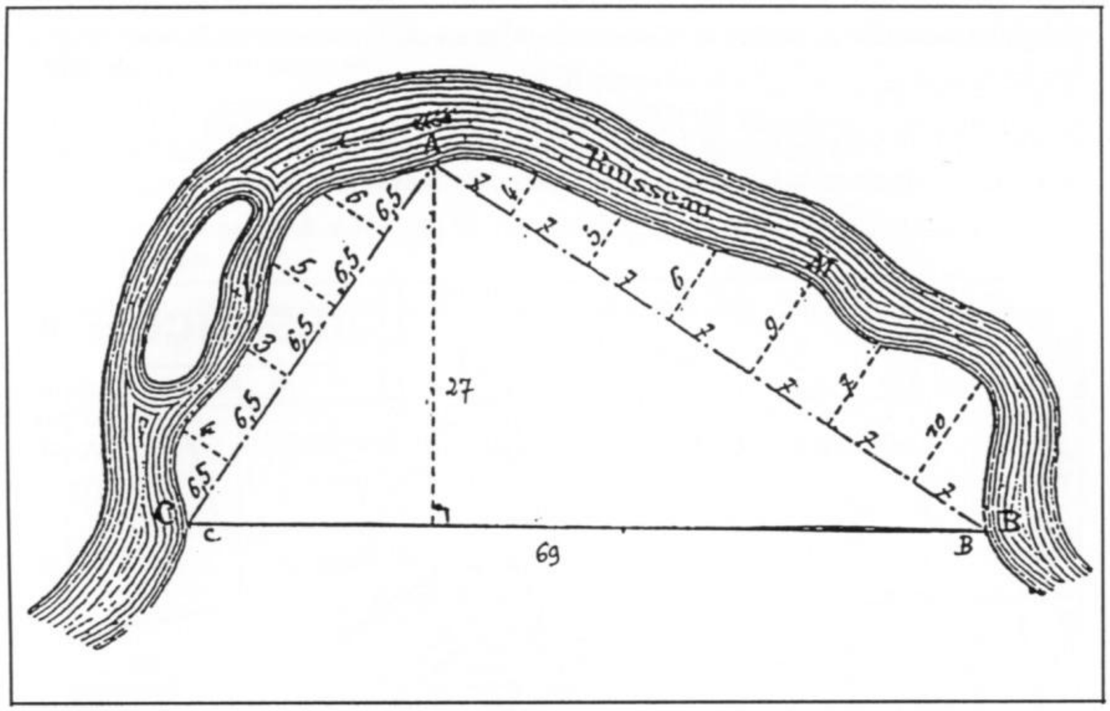
"Ce siècle avait deux ans ..." à la naissance de Victor Hugo.

À l'occasion du bicentenaire de la naissance de l'écrivain, l'association "Les Joyeux Bizontins futés" offre les œuvres complètes du poète à qui trouvera l'aire de la surface intérieure de la partie de la boucle du Doubs représentée dans le plan ci-dessous.



Dans quel poème est évoqué "Ce siècle avait deux ans ..." ?

8 Au fil de l'eau...



Le champ du père Galion est délimité d'une part par le ruisseau, d'autre part par le chemin BC.

Il voudrait connaître son aire pour évaluer le prix du champ.

Il fait dresser un plan par ses petits enfants.

Les relevés sont indiqués en mètres.

- Évaluez cette aire en hectares.
- Évaluez aussi la longueur de la rive bordant son champ pour savoir sur quelle distance il peut aller à la pêche.

9 L'aire du triangle et les trois côtés

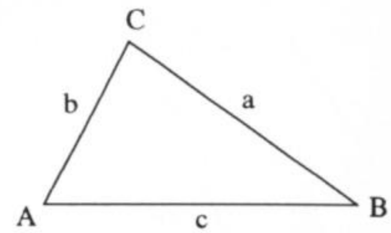
Vous savez calculer l'aire d'un triangle connaissant un côté et la hauteur correspondante. Mais voici une formule remarquable qui permet de calculer l'aire S du triangle ABC connaissant uniquement ses trois côtés.

On pose : $BC = a$; $CA = b$ et $AB = c$

2p est le périmètre : $2p = a + b + c$.

L'aire du triangle est donné par :

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}\ .$$



L'Histoire raconte que cette formule a été découverte par **Héron d'Alexandrie** (1er siècle de notre ère) mais il semble qu'elle était connue d'Archimède (282 av. J.-C.) On ne sait pas très bien comment elle fut découverte. Vous verrez sa démonstration plus tard au cours de vos études.

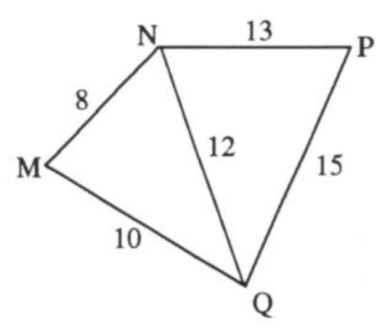
■ Voici quelques triangles dont on donne les trois côtés en centimètres. Calculez l'aire de chacun d'eux en cm^2, puis les trois hauteurs de chaque triangle.

	a	b	c
T1	10	12	18
T2	10	10	10
T3	12	17	11
T4	6	8	10
T5	12	9	22

• Construisez le triangle T4 : contrôlez à l'équerre (ou démontrez-le !) que ce triangle est rectangle et calculez son aire d'une autre façon.

• Pour le triangle T5, le calcul de l'aire n'est pas possible : pourquoi ? Pouvez-vous construire ce triangle ?

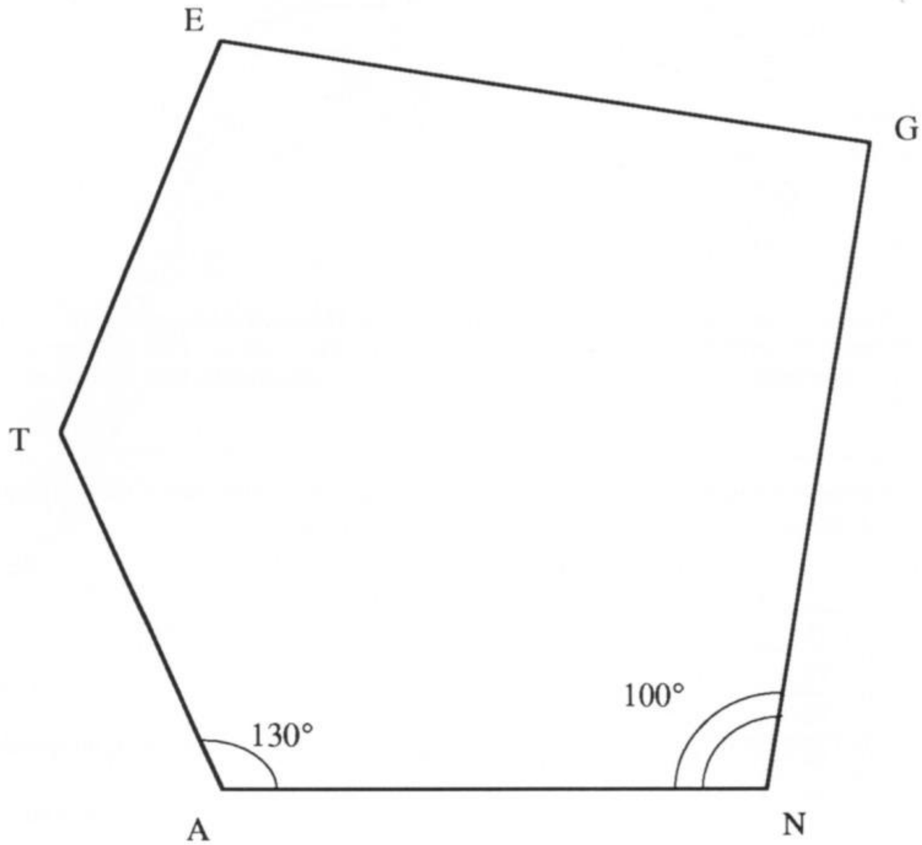
■ Calculez l'aire du quadrilatère MNPQ ci-contre : les dimensions sont données en centimètres.



▲ Pensez, si vous avez du courage, au “Coin du matheux” (page 16).

En choisissant les bonnes “formules” vous pourrez calculer les angles de chacun des triangles au moyen de leur cosinus.

10 L'étang de la grand' mère



Voici un plan de l'étang de la grand'mère avec les longueurs suivantes en mètres :

AN = 75

NG = 90

GE = 105

ET = 78

TA = 60

L'oncle Jules parie que l'aire de cet étang vaut au moins 1 hectare …

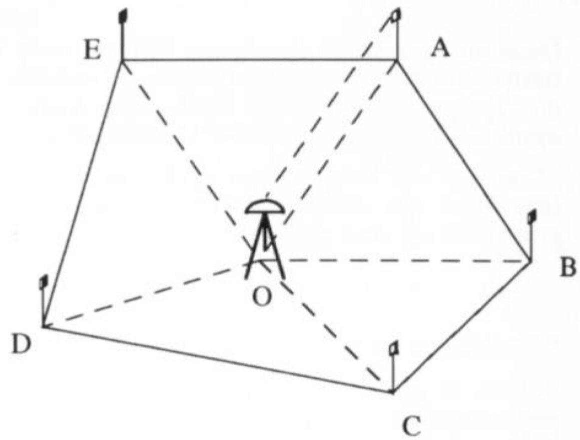
La grand'mère est sceptique …!

Qui a raison ?

Pensez à un dessin à l'échelle, ou au coin du matheux …

11 Repérage par rayonnement

Côtés	Angles
AO … 47 m	$\widehat{AOB}$ … 70°
BO … 64 m	$\widehat{BOC}$ … 47°
CO … 56 m	$\widehat{COD}$ … 115°
DO … 64 m	$\widehat{DOE}$ … 72°
EO … 64 m	$\widehat{EOA}$ … ?



Le repérage par "rayonnement" consiste à mesurer des angles et des longueurs à partir du même point O.

Sur un terrain, on a procédé à des relevés de distances et d'angles, à partir du point O, intérieur au polygone ABCDE. Les résultats de ces relevés figurent sur le tableau.

• Retrouvez la mesure de l'angle $\widehat{EOA}$ qui est effacée.

• Reproduire ABCDE a une échelle convenablement choisie afin d'obtenir un dessin assez grand et aussi précis que possible.

• Trouver un moyen pour calculer l'aire totale du pentagone ABCDE sur le terrain.

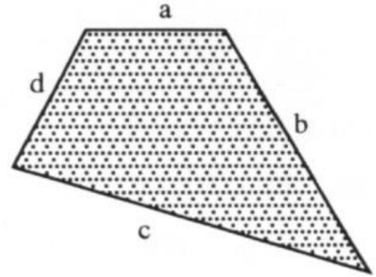
▲ Si vous voulez obtenir des résultats plus précis, reportez-vous au "Coin du matheux" (page 16).

Vous y trouverez la formule qui vous permettra de calculer facilement l'aire de chacun des triangles, au moyen de votre calculatrice.

12 Arpentage sur un “papyrus”

Dans un papyrus de l'ancienne Égypte, on a trouvé une méthode utilisée par les géomètres de l'époque pour calculer l'aire d'un champ ayant la formule d'un quadrilatère quelconque :

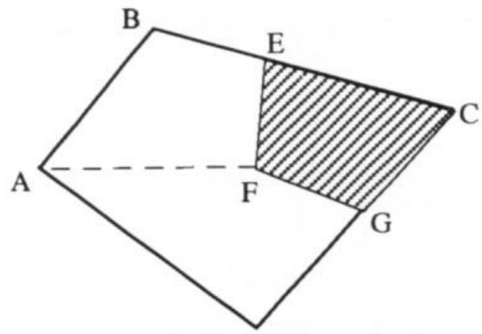
“*Calculer les moyennes arithmétiques des longueurs des côtés opposés puis faire le produit de ces deux moyennes*”.



* Traduire ce calcul avec les lettres a, b, c et d..

* Voici le plan d'un champ ABCD dont la partie hachurée comporte un bosquet, le reste étant un jardin cultivable. Voici des longueurs en mètres :

AB = 40 ;	BE = 28 ;	EF = 19 ;
FG = 25 ;	GD = 32 ;	AD = 55 ;
EC = 35 ;	CG = 30 ;	AF = 47.

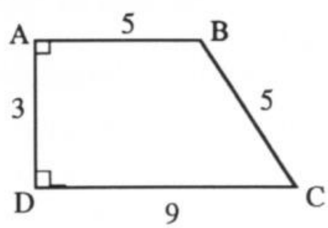


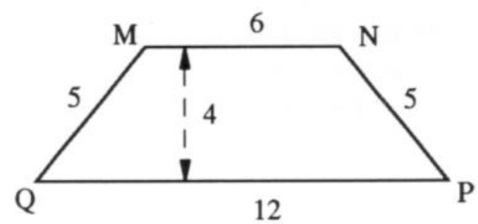
Utilisez la formule égyptienne pour évaluer, de deux façons (addition d'aires ou différence d'aires) l'aire de la partie cultivable.

Alors, qu'en pensez-vous ?

* Et pourtant, assurez-vous que ça marche pour un rectangle ? pour un carré …

* Et pour un trapèze ? Appliquez cette méthode pour l'aire du trapèze rectangle ABCD, puis pour l'aire du trapèze isocèle MNPQ …



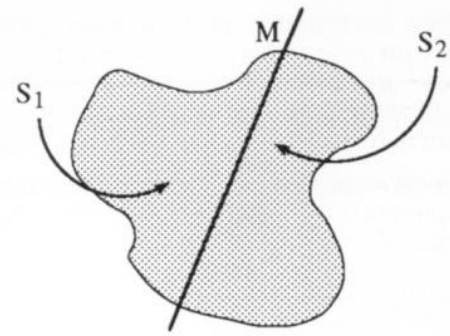


Et pourtant, quel est le bon résultat … ?

Quelle est votre conclusion ?

13 Partager en deux aires égales

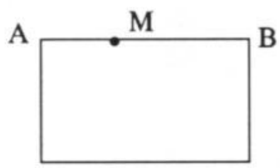
Le père Jules et son frère Hector héritent d'un champ. Il faut le couper en deux surfaces de même aire c'est-à-dire équivalentes en traçant une droite passant par un point M situé sur le pourtour de cette surface.



aires (S_1) = aire (S_2)

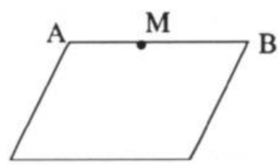
✦ Expliquez comment faire dans les cas suivants où le champ a une forme simple :

Cas 1



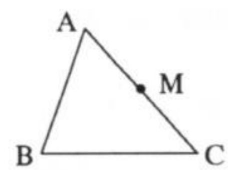
Le champ est rectangulaire et M est un point quelconque du côté [AB].

Cas 2



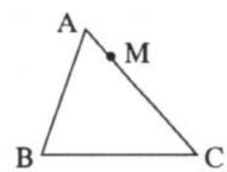
Le champ a la forme d'un parallélogramme et $M \in [AB]$.

Cas 3



Le champ est un triangle et M est le milieu d'un côté [AC].

✦ **Cas 4** : Le champ est un triangle. Mais cette fois M est un point quelconque de [AC] avec $AM < \frac{1}{2} AC$.



C'est plus difficile ! mais voici des indications des constructions.

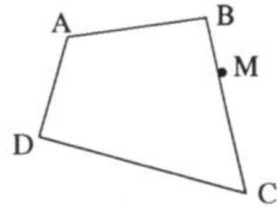
– Tracer (MB) : la parallèle (MB) passant par A coupe (BC) en E.
– D est le milieu de [CE].
– La droite (MD) coupe le triangle en deux surfaces équivalentes.

Comment faire dans le cas où $AM > \frac{1}{2} AC$?

Justification : les aires de (MDC) et de (MDE) sont égales (voir cas n° 3) :; les aires (MDE) et (MAEB) sont égales puisque les triangles (MEB) et (AMB) ont la même aire.

✦ **Cas 5** : Plus difficile !

Résoudre le même problème avec un quadrilatère quelconque, M étant un point quelconque d'un côté du quadrilatère.



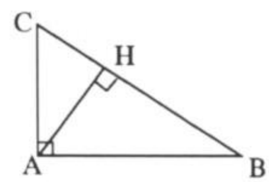
14 Le coin du "MATHEUX"

Voici des formules que vous pouvez utiliser.

Dans le triangle ABC rectangle en A : $BC^2 = AB^2 + AC^2$ (théorème de Pythagore)

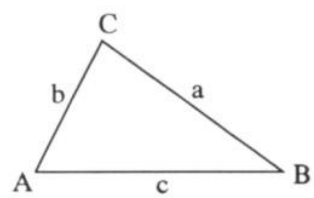
$$\cos \hat{B} = \sin \hat{C} = \frac{BA}{BC} \qquad \sin \hat{B} = \cos \hat{C} = \frac{CA}{CB}$$

$$\tan \hat{B} = \frac{1}{\tan \hat{C}} = \frac{AC}{AB} \qquad \begin{cases} BA^2 = BC \times BH \\ CA^2 = CB \times CH \end{cases}$$



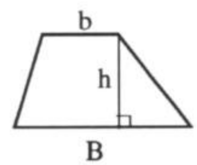
Dans le triangle quelconque ABC : on pose AB = c, BC = a et CA = b

- La somme des angles est 180° : $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180°$
- $\dfrac{a}{\sin \hat{A}} = \dfrac{b}{\sin \hat{B}} = \dfrac{c}{\sin \hat{C}}$
- $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$



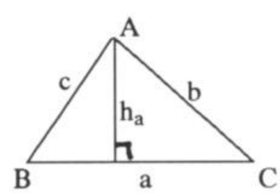
Calculs d'aires

- Le carré de côté a : $S = a^2$
- Le rectangle de côtés a et b : $S = a \times b$
- Le trapèze de bases B, b et de hauteur h : $S = \dfrac{1}{2}\, h(B + b)$



- Le disque de rayon R : $S = \pi R^2$
- Le triangle : $S = \dfrac{1}{2} a \times h_a = \dfrac{1}{2} b \times h_b = \dfrac{1}{2} c \times h_c$

$$S = \frac{1}{2} bc \sin \hat{A} = \frac{1}{2} ca \sin \hat{B} = \frac{1}{2} ab \sin \hat{C}$$



- **Aire d'un quadrilatère convexe :** Elle est égale au produit des diagonales par le sinus de l'angle qu'elles forment :

$$S = d \times d' \times \sin \alpha$$