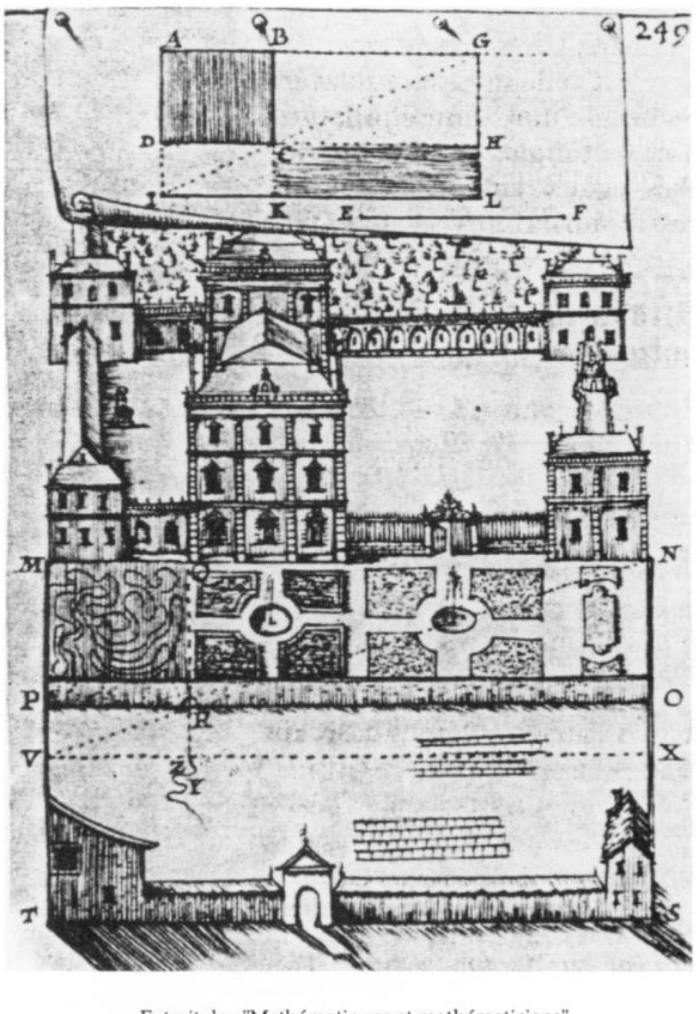
GALION THÈMES

Démontrer avec des aires



Extrait de : "Mathématiques et mathématiciens"
Dedron - Itard (Magnard) p. 62.

15, quai André Lassagne – 69001 LYON
1993

ISBN 2-912209-12-9

Présentation des formules

Vous avez appris à calculer les aires de certains polygones.

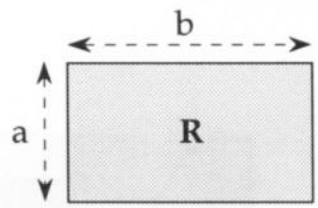
Voici un bilan des formules les plus simples que vous connaissez déjà. Nous les utiliserons souvent dans les activités qui suivent.

Dans cette brochure, l'**aire** d'une surface S est désignée par $\mathcal{A}$ (S).

➨ **Rectangle R**

L'aire d'un rectangle est le produit des côtés a et b.

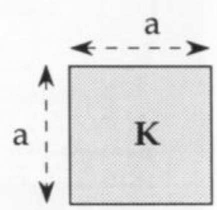
$$\boxed{\mathcal{A}\,(R) = a \times b}$$



➨ **Carré K**

L'aire d'un carré est le carré de son côté a :

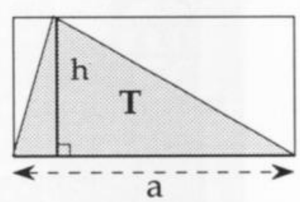
$$\boxed{\mathcal{A}\,(K) = a \times a = a^2}$$



➨ **Triangle T**

L'aire d'un triangle est le demi-produit d'un côté a par la hauteur h relative à ce côté.

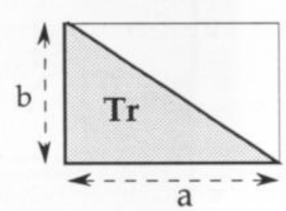
$$\boxed{\mathcal{A}\,(T) = \frac{a \times h}{2}}$$



Puisqu'il y a trois côtés, il y a trois calculs possibles pour obtenir l'aire du triangle.

Dans le cas particulier d'un triangle rectangle, l'aire est le demi-produit des côtés a et b de l'angle droit.

$$\mathcal{A}\,(Tr) = \frac{a \times b}{2}$$

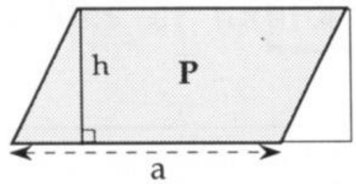


➡ Parallélogramme P

L'aire d'un parallélogramme est le produit d'un côté a par la hauteur h correspondante.

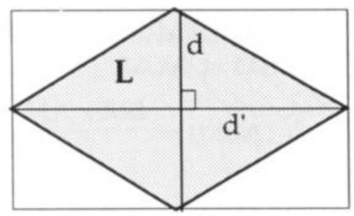
$$\boxed{\mathcal{A}(P) = a \times h}$$

Il y a deux calculs possibles pour obtenir l'aire d'un parallélogramme.



➡ Losange L

L'aire d'un losange peut se calculer comme l'aire d'un parallélogramme mais on peut aussi le considérer comme un demi-rectangle dont les côtés sont les diagonales d et d' du losange.

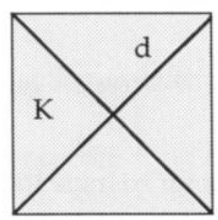


$$\boxed{\mathcal{A}(L) = \frac{d \times d'}{2}}$$

L'aire d'un losange est le demi-produit de ses diagonales d et d'.

Le carré K est un losange dont les diagonales ont même longueur d.

L'aire du carré est donc le demi-carré de sa diagonale.



$$\mathcal{A}(K) = \frac{d^2}{2}$$

Dans les activités qui suivent, vous aurez souvent à utiliser ces formules.

• Les pages marquées $\boxed{P}$ présentent chacune une propriété importante concernant les aires, et plus particulièrement l'aire du triangle. Il vous faut d'abord étudier ces propriétés, qui seront utilisées par la suite.

• Nous vous proposons ensuite des exercices utilisant ces propriétés et les formules que nous venons de rappeler.

Dans certains cas, pour ces activités, nous vous donnons quelques indications – des "**pistes**" –. Pistes

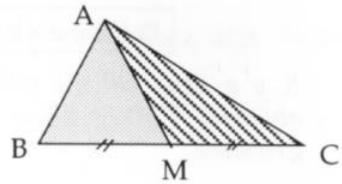
Pour chaque exercice, précisez bien les **propriétés utilisées**, les formules, et l'ordre d'utilisation.

Nous vous souhaitons bon courage !

La propriété de la médiane

P_1

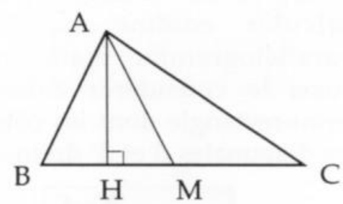
> Une médiane d'un triangle partage ce triangle en deux triangles d'aires égales.



Démontrons cette propriété.

[AM] est la médiane issue de A du triangle ABC. Traçons sa hauteur [AH].

[AH] est aussi la hauteur de chacun des triangles ABM et ACM.



On a : $\mathcal{A}\,(ABM) = \dfrac{BM \times AH}{2}$

et $\mathcal{A}\,(ACM) = \dfrac{CM \times AH}{2}$

Or BM = CM donc on a bien l'égalité : $\mathcal{A}\,(ABM) = \mathcal{A}\,(ACM)$.

Remarquons que l'aire de chaque triangle ABM et ACM est la moitié de celle du triangle ABC.

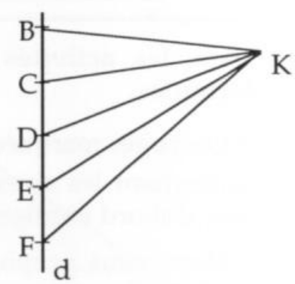
☞ *Pour les exercices qui suivent, utilisez cette propriété P_1* ***et elle seule.***

1 Dessinez un triangle IJK puis sa médiane issue de I.
Coloriez deux triangles d'aires égales.
Même question avec la médiane issue de K.

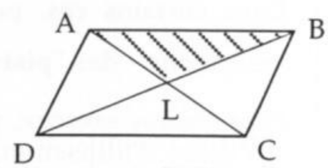
2 On a marqué quatre segments de même longueur sur la droite d :

BC = CD = DE = EF .

Certains triangles de cette figure ont la même aire : trouvez-les en utilisant judicieusement la propriété P_1.



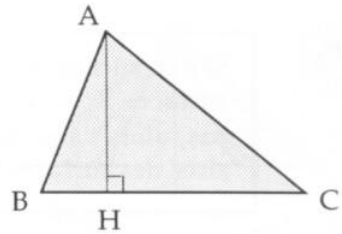
3 ABCD est un parallélogramme dont les diagonales se coupent en L, milieu de chacune d'elles.
Trouvez quatre triangles et leurs médianes, sans tracer d'autres segments.
Trouvez alors trois triangles de même aire que le triangle hachuré, toujours au moyen de P_1.



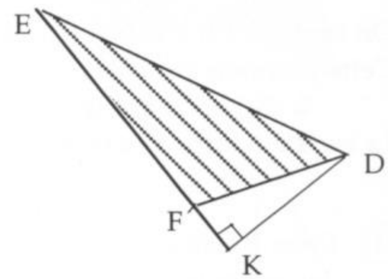
P La propriété "côtés et hauteurs"

P_2

> Pour deux triangles, si un côté de l'un est égal à un côté de l'autre et si les hauteurs relatives à ces côtés sont égales, alors les deux triangles ont la même aire.



Démontrons cette propriété.



Supposons que, pour les deux triangles ABC et DEF de hauteurs respectives [AH] et [DK] on a : BC = EF et AH = DK.

On sait que :

$$\left.\begin{array}{r} \mathcal{A}\,(ABC) = \dfrac{BC \times AH}{2} \\ \text{et} \quad \mathcal{A}\,(DEF) = \dfrac{EF \times DK}{2} \end{array}\right\} \text{ or par hypothèse } BC = EF \text{ et } AH = DK,$$

donc ces deux aires sont égales.

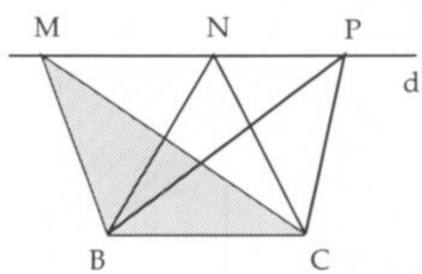
Remarquez que la propriété P_1 n'est qu'un cas particulier de cette propriété P_2.

☞ *Pour les exercices qui suivent, utilisez cette propriété P_2 et* ***elle seule.***

1 La droite d est parallèle à la droite (BC).

M, N, P sont trois points de d.

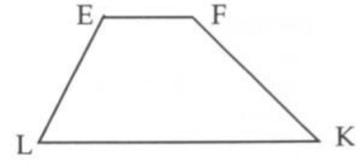
Démontrez que les trois triangles MBC, NBC et PBC ont la même aire.



2 Comment construire facilement d'autres triangles de même aire ? Parmi eux, y a-t-il des triangles rectangles ? des triangles isocèles ?

3 Que se passe-t-il si le point M se déplace sur la droite d ? Et s'il s'éloigne indéfiniment, en restant sur cette droite ?

4 EFKL est un trapèze de bases [EF] et [KL]. En n'utilisant que les points du dessin, dessinez et trouvez des triangles de même aire.
Et si ce trapèze était un parallélogramme ?

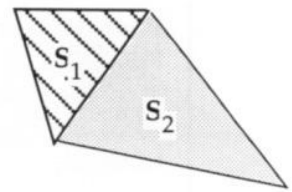


P

La propriété "ajouter ou retrancher des aires"

P_3

> Si une surface S est constituée de deux surfaces S_1 et S_2 qui ne se recouvrent pas, alors l'aire de S est la somme des aires des surfaces S_1 et S_2.



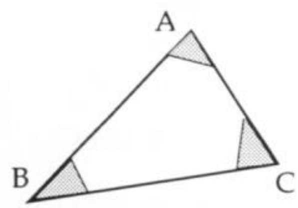
On écrit : $\mathcal{A}(S) = \mathcal{A}(S_1) + \mathcal{A}(S_2)$.

Cette propriété peut servir aussi au calcul d'une aire par **différence** :

$\mathcal{A}(S_1) = \mathcal{A}(S) - \mathcal{A}(S_2)$.

*La surface S est la **réunion** des deux surfaces S_1 et S_2 .*

1 Dans les coins du grand triangle, on a découpé des petits triangles grisés d'aires égales. Nommez trois quadrilatères de la figure qui ont la même aire (on peut donner des noms aux points). Nommez aussi trois pentagones de même aire.



2 Au moyen d'un carré de côté 8 cm, on a fabriqué quatre pièces d'un puzzle et découpé les morceaux (fig. 1).

Jacques : "En les assemblant d'une autre façon, j'obtiens un rectangle comme sur la figure 2".

Paul : "Ce n'est pas possible".

Qu'en pensez-vous ?

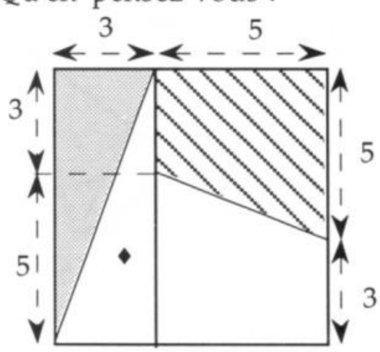


fig.1

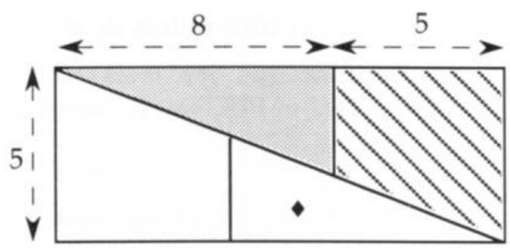
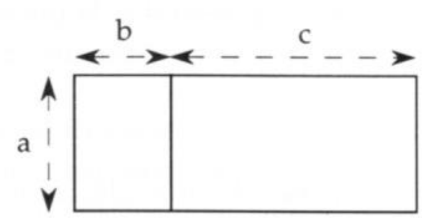


fig. 2

3 En utilisant des aires de rectangle du dessin ci-contre, démontrez la formule :

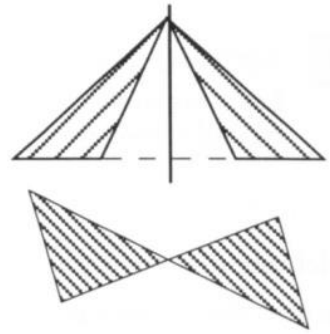
$$a(b + c) = ab + ac.$$

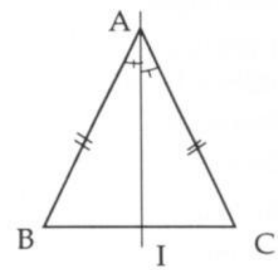


P La propriété "conservation des aires"

P₄

> Deux surfaces **symétriques** par rapport à une droite ou **symétriques** par rapport à un point ont des aires égales.
>
> On dit que ces deux symétries "*conservent les aires*".





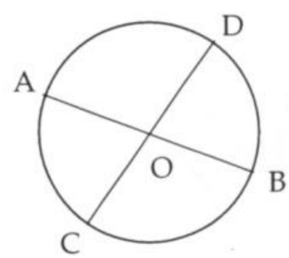
1 Le triangle ABC est isocèle en A : AB = AC.

On a tracé la droite (AI) qui est bissectrice de $\widehat{A}$ et médiatrice de [BC].

Nommez deux triangles de même aire.

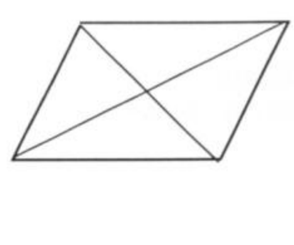
La hauteur [BH] issue de B et la hauteur [CK] issue de C sont symétriques par rapport à (AI).
Trouvez des triangles ayant la même aire.

2 Tracez l'axe de symétrie du trapèze isocèle ci-contre et trouver des triangles de même aire, d'autres polygones de même aire.



3 On a tracé deux diamètres [AB] et [CD] d'un cercle de centre O.

Trouvez des triangles de même aire.

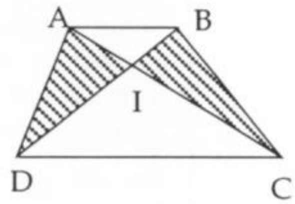


4 On sait que le point d'intersection des diagonales d'un parallélogramme est son centre de symétrie.

En utilisant uniquement la propriété P_4, trouvez des triangles de même aire dans ce parallélogramme.

Dans le trapèze

1 ABCD est un trapèze de bases [AB] et [DC]. Les diagonales se coupent en I. Les deux triangles hachurés ont la même aire.



Voici une démonstration de cette propriété.

Aucune des propriétés P_1, P_2, P_3, P_4 utilisée seule, ne permet de démontrer directement cette égalité.

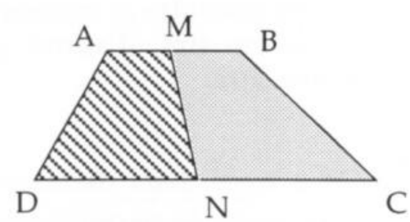
Il n'y a pas de médiane de triangle et pas de symétrie : on ne peut donc pas utiliser P_1 ou P_4.
Essayons d'utiliser P_3.

On a : $\mathcal{A}$ (AID) = $\mathcal{A}$ (ADC) – $\mathcal{A}$ (DIC) et $\mathcal{A}$ (BIC) = $\mathcal{A}$ (BDC) – $\mathcal{A}$ (DIC) .

Or, d'après la propriété P_2, les triangles ADC et BDC ont la même aire car ils ont même base [DC] et des hauteurs égales.
Il en résulte donc : $\mathcal{A}$ (AID) = $\mathcal{A}$ (BIC) .

Propriétés utilisées : $P_3 - P_2$

2 M et N sont les milieux respectifs des bases [AB] et [CD] du trapèze ABCD. Démontrez que les trapèzes AMND et BMNC ont des aires égales.



Pistes

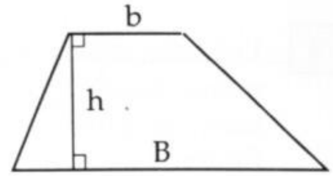
- On peut tracer [AN] et [BN] : chaque trapèze est la réunion de deux triangles.
- Pourquoi a-t-on $\mathcal{A}$ (ADN) = $\mathcal{A}$ (BNC) ?
- Pourquoi a-t-on $\mathcal{A}$ (AMN) = $\mathcal{A}$ (BMN) ?
- Conclure.

Propriétés utilisées :

Essayez de trouver une autre méthode au moyen d'une autre décomposition de ces trapèzes.

3 L'aire d'un trapèze de bases B et b et de hauteur h est calculée au moyen de la formule :

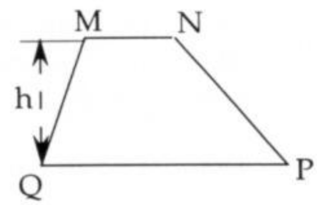
$$\mathcal{A}\,(T) = \frac{h \times (B + b)}{2}$$



Voici des méthodes pour démontrer cette formule.

Méthode 1 :

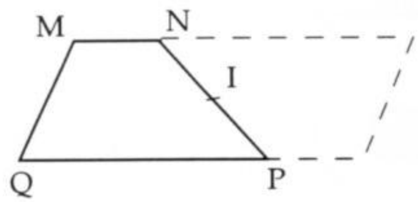
Tracez [NQ] et décomposez le trapèze en deux triangles de même hauteur h, de bases MN = b et PQ = B. Citez les propriétés utilisées.



Méthode 2 :

On a tracé un second trapèze symétrique du premier par la symétrie de centre I milieu de [NP].

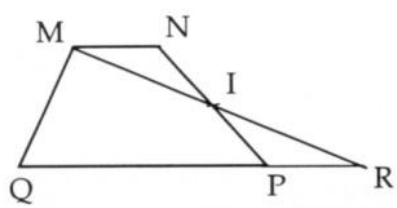
Citez les propriétés utilisées.



Méthode 3 :

On a tracé le triangle IPR, symétrique de IMN par rapport à I.

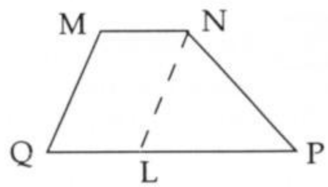
Citez les propriétés utilisées.



Méthode 4 :

Tracez (NL) // (MQ).

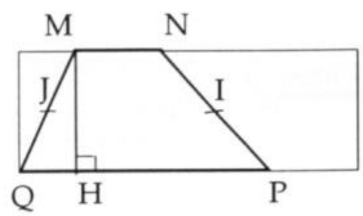
Le trapèze est la réunion d'un triangle et d'un parallélogramme.



Méthode 5 :

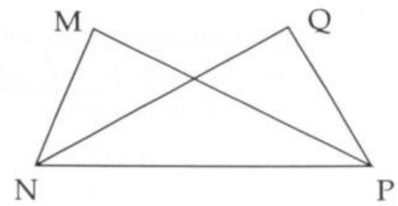
(MH) ⊥ (PQ).

Utilisez le symétrique du triangle rectangle MQH par rapport à J milieu de [MQ] et le symétrique du trapèze rectangle MHPN par rapport à I, milieu de [NP].

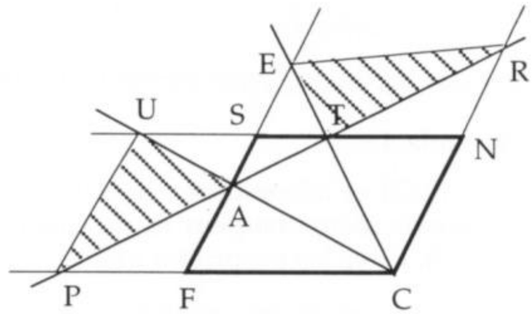


4 Les deux triangles MNP et QNP ont la même base [NP] et la même aire; ils sont disposés comme l'indique la figure ci-contre.

Démontrez que MNPQ est un trapèze.



5 SNCF est un parallélogramme. On place un point A sur [SF] et un point T sur [SN]. La droite (CA) coupe la droite (SN) en U. La droite (CT) coupe la droite (SF) en E. La droite (AT) coupe (FC) en P et (CN) en R.



Démontrez que le triangle UAP a la même aire que le triangle TER.

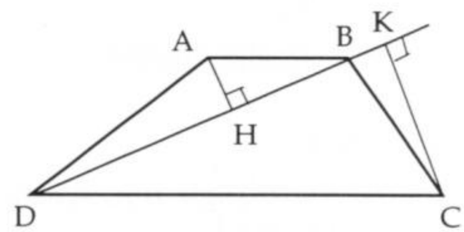
Pistes Utilisez les résultats de l'exercice (1) en choisissant judicieusement deux trapèzes.

6 ABCD est un trapèze de bases [AB] et [CD] tel que : DC = 3 AB.

On a tracé :

(AH) ⊥ (BD) et (CK) ⊥ (BD).

Démontrez que CK est le triple de AH.

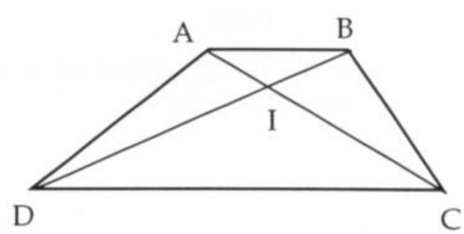


Pistes Écrivez de deux manières l'aire de ABD et celle de BDC.
Montrez que $\mathcal{A}$ (BDC) = 3 x $\mathcal{A}$ (ABD).

7 Le trapèze ABCD a les mêmes caractéristiques que celui de l'exercice (6) ci-dessus : CD = 3 AB.

Les diagonales se coupent en I. Démontrez que :

$\mathcal{A}$ (IDC) = 9 x $\mathcal{A}$ (IAB).



Pistes Utilisez l'exercice (1) et l'exercice (6) pour montrer que ID = 3 IB.

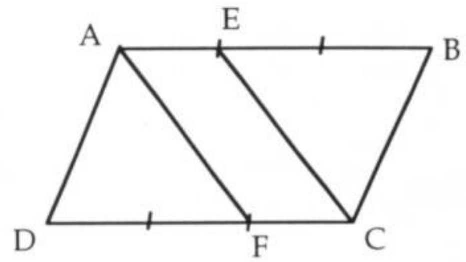
Calculez alors $\mathcal{A}$ (AIB) et $\mathcal{A}$ (DIC) en utilisant IB et ID ainsi que les hauteurs correspondantes.

Dans le parallélogramme

8 ABCD est un parallélogramme.

On a choisi E sur [AB] et F sur [CD] tels que $AE = \frac{1}{3} AB$ et $CF = \frac{1}{3} CD$.

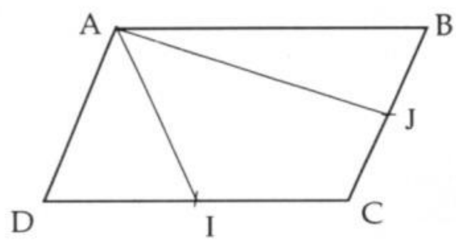
Démontrez que le parallélogramme est ainsi partagé en trois surfaces de même aire.



Pistes Calculez ces trois aires en utilisant la hauteur AH du parallélogramme.

9 Dans le parallélogramme ABCD, I et J sont les milieux respectifs de [DC] et de [CB].

Démontrez que les aires des triangles ADI, IAC, CAJ et JAB sont égales.

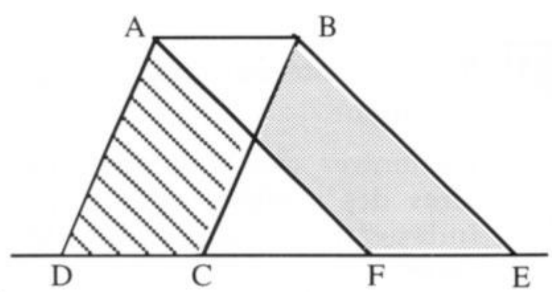


Pistes Comparez $\mathcal{A}$ (ADC) et $\mathcal{A}$ (ACB).
Comparez $\mathcal{A}$ (ADI) et $\mathcal{A}$ (AIC) puis $\mathcal{A}$ (ACJ) et $\mathcal{A}$ (AJB).

10 ABCD et ABEF sont deux parallélogrammes, les points D, C, F et E étant sur une même droite.

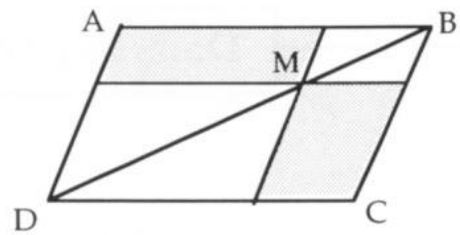
Démontrez que les aires des surfaces hachurée et grisée sont égales.

Trouvez sept triangles de même aire que le triangle ADB.



11 Par le point M situé sur la diagonale [DB] du parallélogramme ABCD, on a tracé les parallèles aux côtés de ce parallélogramme.

Les surfaces sablées ont même aire : Vrai ou Faux ?

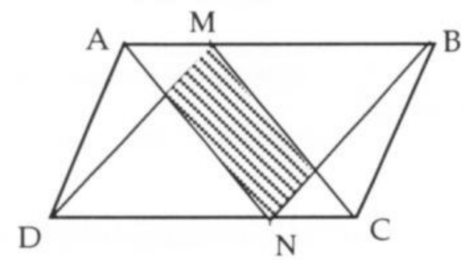


Pistes Utilisez judicieusement la symétrie centrale (P_4) dans trois parallélogrammes puis la propriété P_3.

12 ABCD est un parallélogramme.

M et N sont des points situés respectivement sur [AB] et [CD] tels que AM = CN.

Trouvez deux triangles dont la sommes des aires est égale à l'aire de la surface hachurée.

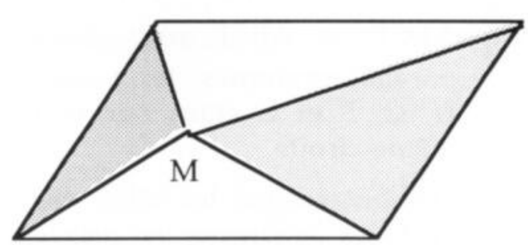


Pistes Introduisez des trapèzes.

13 Démontrez que toute droite qui passe par le centre d'un parallélogramme découpe ce parallélogramme en deux surfaces d'aires égales.

14 M est à l'intérieur d'un parallélogramme.

Démontrez que la somme des aires des surfaces sablées est indépendante du point M choisi.

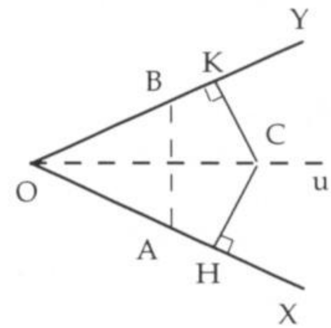


Dans le triangle

Avec les bissectrices

15 [Ou) est bissectrice de l'angle $\widehat{XOY}$: on sait que c'est l'axe de symétrie de cet angle.
A est un point de [OX) et B le point de [OY) symétrique de A par rapport à [Ou).
C est un point quelconque de [Ou).
[CH] est hauteur du triangle OCA et [CK] est hauteur du triangle OCB.

Démontrez que CH = CK.



Pistes

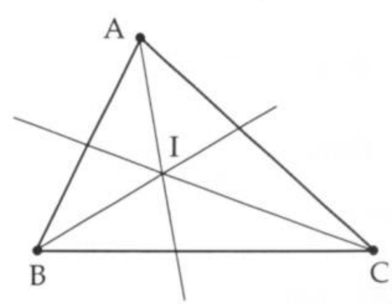
Pourquoi a-t-on $\mathcal{A}$ (OCA) = $\mathcal{A}$ (OCB) ?
Pourquoi a-t-on OA = OB ?
Conclure pour les longueurs CH et CK.
Indiquez les propriétés utilisées.

Vocabulaire

*La longueur CH est appelée **distance** du point C à la droite (OX) et la longueur CK est la distance du point C à la droite (OY).*

Vous venez de démontrer que le point C de la bissectrice de $\widehat{XOY}$ est à égale distance des côtés de cet angle. C'est vrai pour tout autre point de cette bissectrice.
*On dit que tout point de la bissectrice d'un angle est **équidistant** des côtés de l'angle.*

16 Vous savez que, dans un triangle, les bissectrices intérieures des angles sont concourantes en un point que nous désignons par I.
Pourquoi ce point I est-il à égale distance des trois côtés du triangle ?
Pourquoi peut-on tracer un cercle de centre I et tangent aux trois côtés du triangle ?



Pistes

Utilisez l'exercice 15.

Vocabulaire

*Ce cercle est appelé cercle **inscrit** dans le triangle. Le rayon de ce cercle est souvent désigné par r.*

17 On désigne par p le demi-périmètre du triangle ABC et par r le rayon du cercle inscrit dans ce triangle.

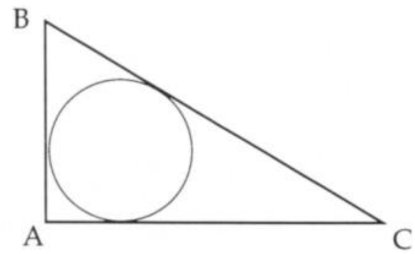
Démontrez que $\mathcal{A}$ (ABC) = p.r

Pistes

Utilisez la figure de l'exercice qui précède.
Décomposez le triangle ABC en trois triangles de sommet I.
Utilisez la propriété P_3 et l'exercice (16).

18 Le triangle ABC est maintenant rectangle en A.

Montrez que le rayon de son cercle inscrit est le quotient du produit des côtés de l'angle droit par le périmètre du triangle.



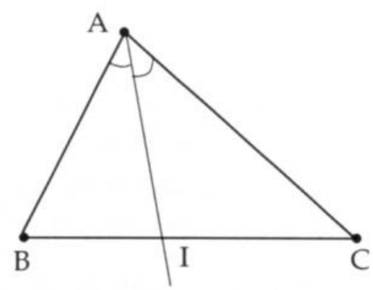
Pistes

Vous pouvez écrire de plusieurs façons l'aire du triangle ABC. Le triangle est rectangle !

19 Dans le triangle ABC, la bissectrice de l'angle $\widehat{A}$ coupe le côté [BC] en I.

Démontrez l'égalité :

$$\frac{IB}{IC} = \frac{AB}{AC}$$



Voici les étapes de cette démonstration que vous rédigerez complètement :

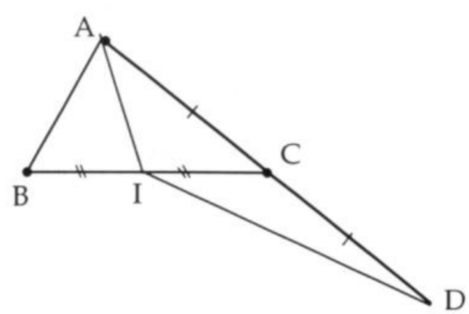
Étape 1- Exprimez chacune des aires des triangles ABI et ACI en utilisant la hauteur AL et les longueurs IB et IC.

Étape 2- Exprimez chacune de ces aires en utilisant les hauteurs issues de I dans chaque triangle : Pourquoi ces hauteurs sont-elles égales ?

Étape 3- Écrivez le quotient de ces deux aires de deux manières différentes.

20 ABC est un triangle quelconque. I est le milieu de [BC]. D est le symétrique du point A autour du point C.

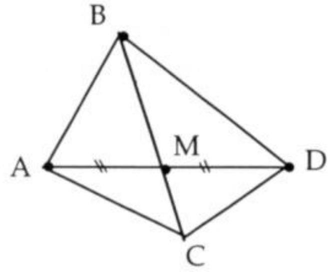
Démontrez que les triangles ABI et ICD ont la même aire.



21 ABC est un triangle quelconque. M est un point quelconque de [BC]. D est le symétrique du point A autour du point M.

Démontrez que les triangles ABC et BCD ont la même aire.

Démontrer que l'aire de BCD ne change pas lorsque M se déplace sur [BC].



Avec les médianes

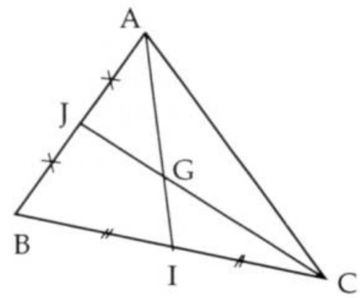
22 ABC est un triangle quelconque. I est le milieu de [BC], J est le milieu de [AB].

Les médianes [AI] et [CJ] se coupent en G.

Vous connaissez peut-être la propriété :

$$AG = \frac{2}{3} AI .$$

En voici une démonstration utilisant les aires.



Voici les étapes de cette démonstration que vous aurez à compléter.

On appelle S l'aire du triangle ABC.

Étape 1- Que vaut l'aire de AJC en fonction de S ?

Étape 2- Pourquoi les triangles AJC et AIC ont-ils la même aire ?

Étape 3- Pourquoi AGJ et BGJ ont-ils la même aire ?

Étape 4- Expliquez pourquoi on a: $\mathcal{A}$ (GBI) = $\mathcal{A}$ (GIC) .

Étape 5- Démontrez que l'aire de ABG est le double de celle de GBI.

Étape 6- Démontrez alors que : AG = 2 GI.

Le but du problème est atteint ! Expliquez pourquoi ...

Pour aller plus loin ...

En utilisant les aires des triangles BGC et BGJ, on démontrerait de la même façon que CG = 2 GJ ou bien $CG = \frac{2}{3} CJ$.

En utilisant les deux médianes [AI] et [CJ], vous venez de voir qu'elles se coupent en un point situé aux deux-tiers de [AI] à partir de A.

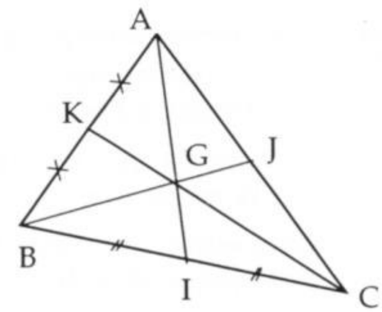
Si l'on utilisait la médiane [AI] et la troisième médiane [BK], on montrerait de la même façon qu'elles se coupent en un point situé aux deux-tiers de [AI].

C'est donc le même point !

Ce point G, commun aux trois médianes d'un triangle, est appelé ***centre de gravité*** *de ce triangle. Peut-être le saviez-vous déjà.*

23 On a tracé les trois médianes du triangle ABC dont l'aire est désignée par S; vous venez de voir que ces médianes sont concourantes en un point G.

Trouvez six triangles de sommet G dont l'aire vaut $\frac{1}{6}$S.

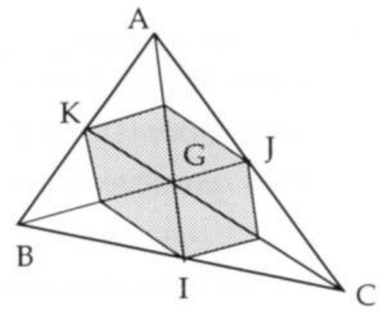


Trouvez six triangles d'aire $\frac{1}{2}$S puis trois triangles d'aire $\frac{1}{3}$S .

24 Reprenez la figure ci-dessus.

On a marqué les milieux des segments [GA], [GB] et [GC].

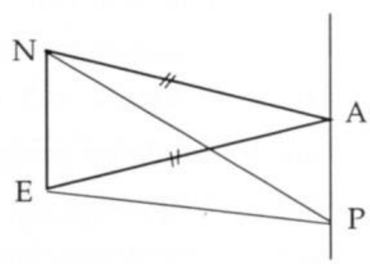
Démontrez que l'aire de l'hexagone sablé est la moitié de l'aire du triangle ABC.



Avec les hauteurs

25 ANE est un triangle isocèle en A. Sur la parallèle à la droite (NE) passant par A, on place un point P.

Démontrez que P est équidistant des droites (AN) et (AE).



Pistes

Utilisez la hauteur issue de P dans chacun des triangle PAN et PAE.

26 Voici les longueurs des côtés d'un triangle : $a = 52$; $b = 41$; $c = 15$ en centimètres.

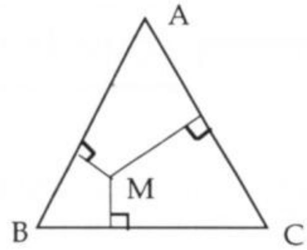
La hauteur relative au côté a mesure 9 cm. Calculez son aire S, les deux autres hauteurs, le demi-périmètre p et le rayon r du cercle inscrit.

Vérifiez la formule : $S^2 = p\,(p - a)\,(p - b)\,(p - c)$.

27 ABC est un triangle équilatéral.

M est un point intérieur à ce triangle.

Démontrez que la somme des distances du point M aux trois côtés est égale à la hauteur issue de A du triangle.



28 ABC est un triangle isocèle : AB = AC.

E est le symétrique de A autour de C.

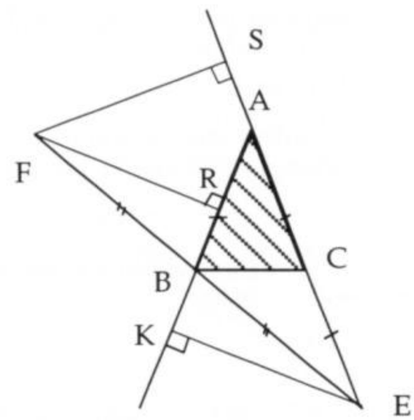
F est le symétrique de E autour de B.

Soit K le pied de la perpendiculaire à (AB) passant par E.

Soit R le pied de la perpendiculaire à (AB) passant par F.

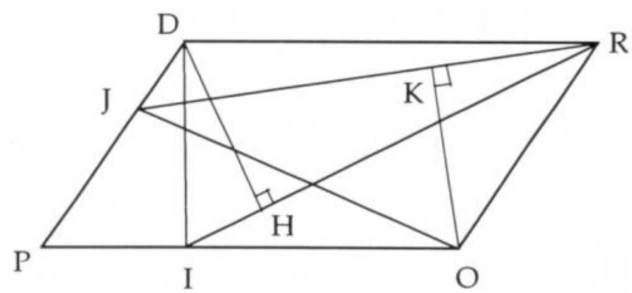
Soit S le pied de la perpendiculaire à (AE) passant par F.

Démontrez que FS = FR = EK.



Pistes Démontrez que $\mathcal{A}$ (AFB) = $\mathcal{A}$ (FAC) = $\mathcal{A}$ (ABE).
Considérez des hauteurs de ces triangles.

29 DROP est un parallélogramme tel que $\widehat{R}$ est un angle aigu et tel que RO < RD. Un cercle de centre R coupe [PO] en I et [DP] en J.



• Démontrez que les triangles RID et JOR ont la même aire.

• Soit H le pied de la hauteur issue de D du triangle DIR et K le pied de la hauteur issue de O du triangle JOR.

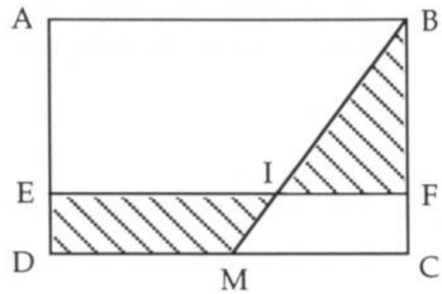
Démontrez que DH = OK .

Pistes Comparez $\mathcal{A}$ (RID) et $\mathcal{A}$ (JOR) à l'aire du parallélogramme.

Dans le rectangle ... ou le carré

30 Le rectangle ABCD a pour côtés a et b. E est le point de [AD] tel que $DE = \frac{1}{4}$ AD . La parallèle à (DC) passant par E coupe (BC) en F. Soit M le milieu de [DC] : (BM) coupe (EF) en I.

Montrez que le trapèze EIMD et le triangle BIF ont la même aire.



Pistes

Exprimez en fonction de a et de b l'aire du rectangle EFCD et celle du triangle BMC.

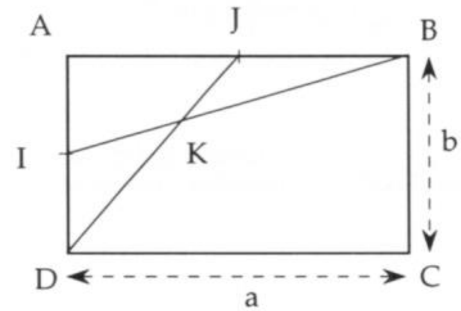
31 ABCD est un rectangle de côtés a et b. I et J sont les milieux respectifs de [AD] et [AB].

(IB) coupe (JD) en K.

Écrivez en fonction de a et de b :

– l'aire de ADJ, celle de ABI;

– l'aire de IKD, de JKB, de AIKJ, celle de DCBK.



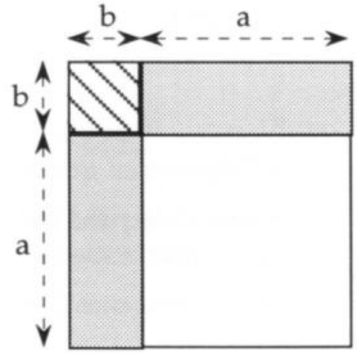
Pistes

Pensez à utiliser P_1.

32 Le carré de côté (a+b) est décomposé en deux carrés et deux rectangles.

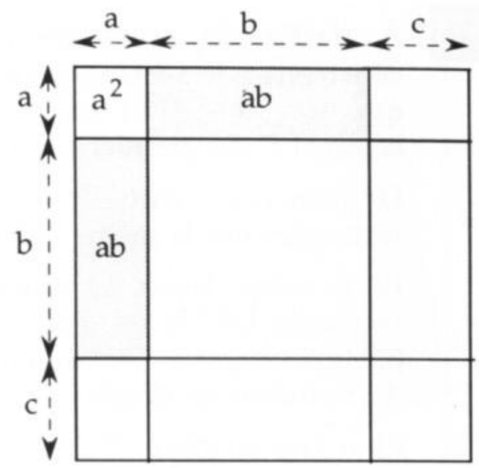
Utilisez cette configuration pour démontrer que :

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$



33 Le carré de côté (a+b+c) est décomposé en neuf surfaces. Complétez l'écriture

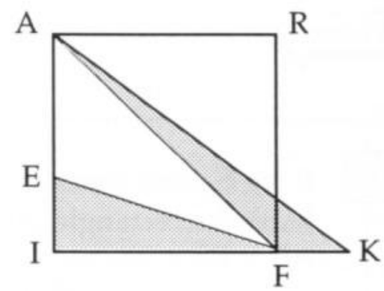
$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + \ldots + 2\,ab + \ldots$



34 ARFI est un carré. E est un point quelconque de [AI]. On prolonge le côté [IF] d'une longueur FK égale à IE.

Démontrez que le triangle AFK a la même aire que celle du triangle EIF.

En déduire que l'aire du quadrilatère AKFE est la moitié de celle du carré ARFI.



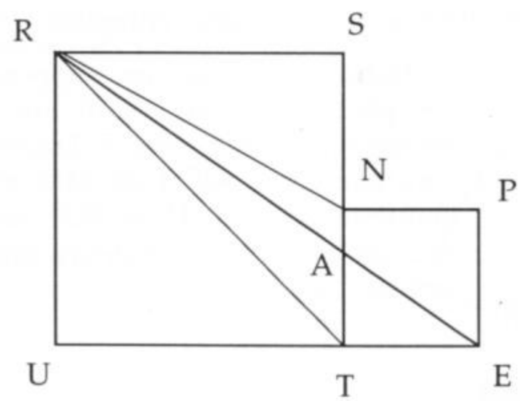
35 RSTU et NPET sont deux carrés disposés comme sur la figure ci-contre.

On trace [RE] qui coupe [ST] en A.

Démontrez que les triangles RTE et RNT ont la même aire.

En déduire que les triangles ATE et RNA ont la même aire. Que peut-on dire des produits TE x AT et NA x RS ?

On suppose maintenant que N est le milieu de [ST]. Démontrez que AT = 2 NA.

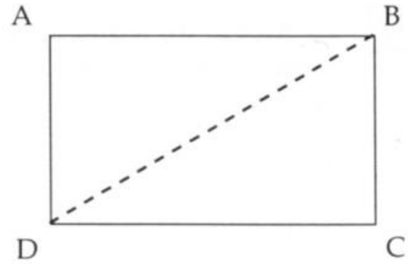


36 À partir du rectangle ABCD, construisez le rectangle DBEF tel que son côté [FE] passe par le sommet C du premier rectangle.

Démontrez que ces deux rectangles ont la même aire.

De la même façon, on construit le rectangle DEGH tel que son côté [GH] passe par F. Que dire de l'aire du nouveau rectangle ?

Et si l'on continue ???



Pistes

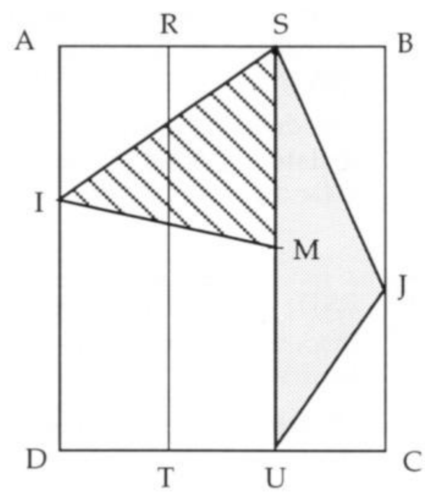
Pensez à utiliser la perpendiculaire à (BD) passant par C.

37 R et S sont deux points du côté [AB] du rectangle ABCD tels que AR = RS = SB.

La parallèle à (AD) passant par R coupe (DC) en T et la parallèle à (AD) passant par S coupe (DC) en U. M est le milieu de [SU]. I est un point de [AD] et J un point de [BC].

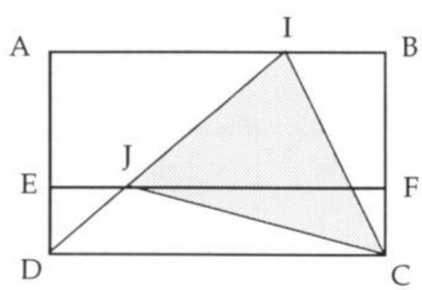
Comparez les aires coloriées.

Refaites une figure en supposant de plus que I et J sont sur un même cercle de centre S. Tracez la hauteur issue de M de SIM et la hauteur issue de U de SUJ. Est-il vrai que ces deux hauteurs ont la même longueur ?



38 Par un point E du côté [AD] du rectangle ABCD, on a tracé la parallèle à (AB) qui coupe (BC) en F. I étant un point quelconque de [AB], on trace (DI) qui coupe (EF) en J.

Démontrez que l'aire de IDC est la moitié de celle du rectangle ABCD.



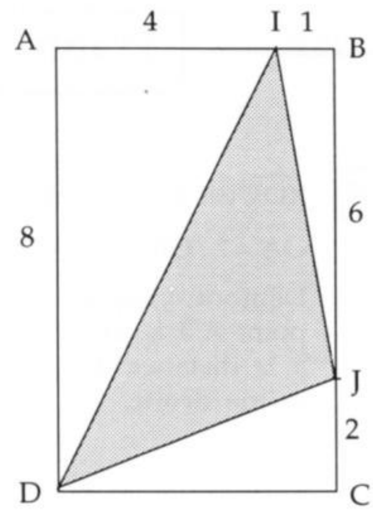
Démontrez que l'aire de DCJ est égale à la moitié de celle d'un rectangle de la figure. En déduire que l'aire de IJC est égale à la moitié de l'aire d'un rectangle de la figure.

39 Dans le rectangle ABCD on a : AB = 5 cm, AD = 8 cm, AI = 4 cm et BJ = 6 cm.

Calculez l'aire du triangle DIJ.

Soit [AH] hauteur de AID et [JK] hauteur de JID. Démontrez sans calcul que : AH = JK.

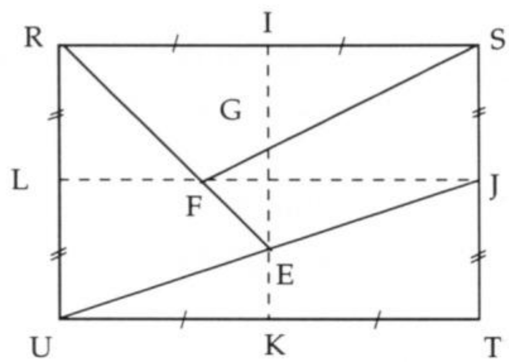
[AJ] coupe [DI] en O. Démontrez que O est le milieu de [KH].



40 RSTU est un rectangle d'aire A. I, J, K, L sont les milieux des côtés comme indiqué sur le dessin.

(UJ) coupe (IK) en E; (RE) coupe (LJ) en F. (SF) coupe (IK) en G.

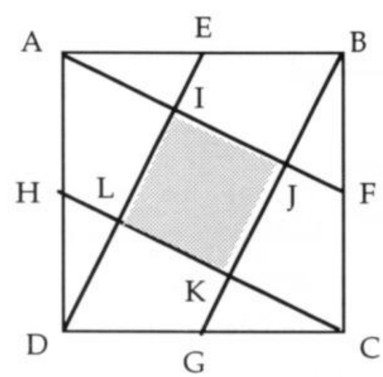
Quelle est l'aire de FEJS en fonction de A ?



Trouvez un segment qui partage ce quadrilatère FEJS en deux triangles de même aire ? Y a-t-il plusieurs possibilités ?

41 Les points E, F, G et H sont les milieux des côtés du carré ABCD de côté 2.

Démontrez que le quadrilatère hachuré IJKL est un carré dont l'aire est le cinquième de l'aire du carré initial.



Pistes

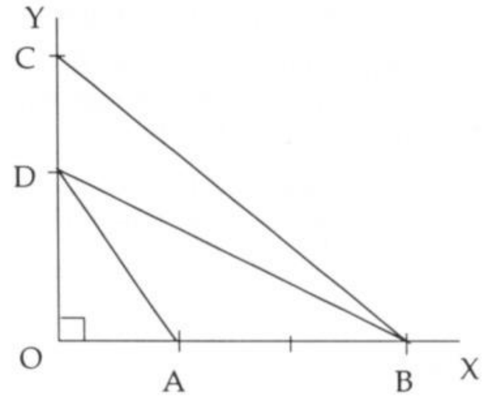
Démontrez d'abord que IJKL est un parallélogramme puis un losange, enfin un carré.

D'autres pour s'exercer ...

42 $\widehat{XOY}$ est un angle droit.

OA = 2 ; OB = 6 ; OD = 3 ; OC = 5.

Démontrez que la distance du point A à la droite (BD) est égale à la distance du point C à cette même droite.



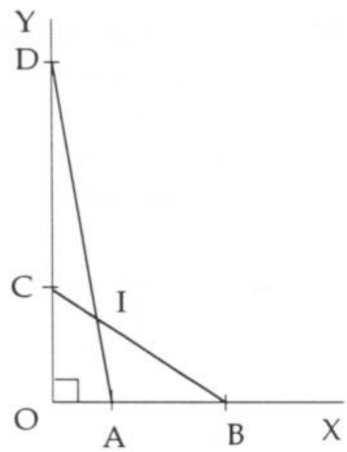
43 OA = 1 ; OB = 3 ; OC = 2 ; OD = 6 .

(CB) coupe (DA) en I

Vrai ou Faux ?

(1) $\mathcal{A}$(IAB) = $\mathcal{A}$(ICD) .

(2) $\mathcal{A}$(OIA) = $\mathcal{A}$(OIC) .



Pistes Pensez à utiliser les hauteurs issues de I des triangles IAB et ICD.

44 Toutes les propriétés sont indiquées sur le dessin.

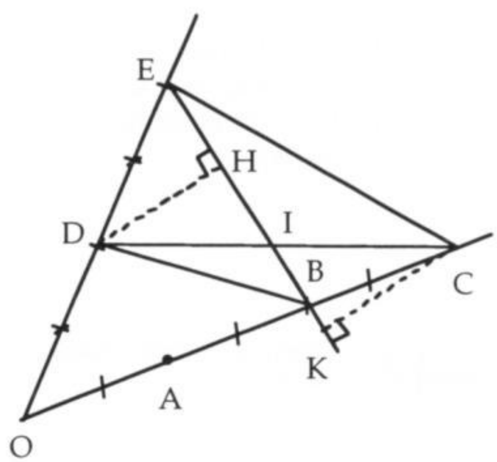
Démontrez :

(1) DH = CK

(2) I est milieu de [DC]

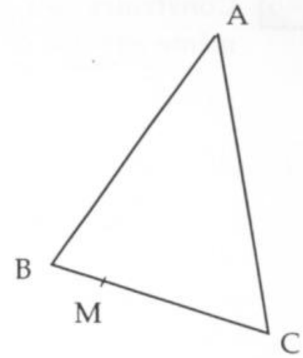
(3) I est milieu de [HK]

(4) (CH) // (DK)



45 ABC est un triangle dont les angles sont aigus.
M étant un point de la base [BC], on construit :
N symétrique de M par rapport à (AB)
P symétrique de M par rapport à (AC).
On trace le pentagone BCPAN.

Démontrez que l'aire de ce pentagone ne change pas si M se déplace sur le côté [BC].

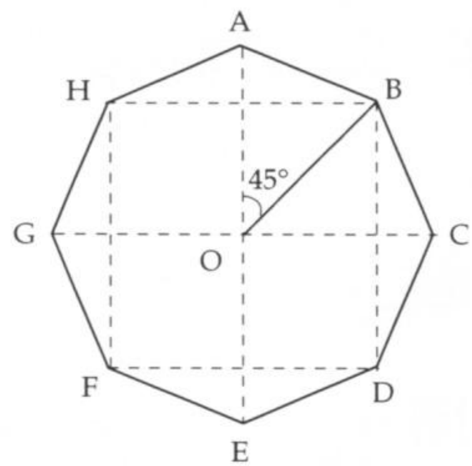


Pistes Comparez l'aire du pentagone et celle du triangle ABC.

46 ABCDEFGH est un octogone régulier : les triangles AOB, BOC, COD, etc. sont des triangles isocèles en O et d'angle $\widehat{AOB} = 45°$.

Calculez l'aire de cet octogone régulier sachant que :

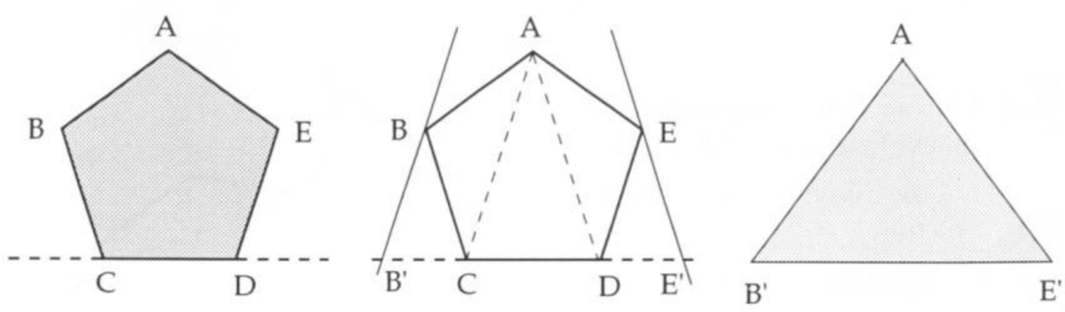
OA = 10 cm.



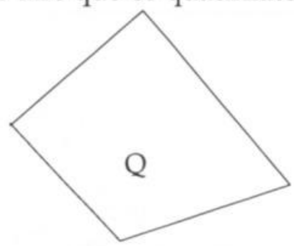
Pistes Tracez la hauteur [AK] dans le triangle AOB.
Calculez AK (théorème de Pythagore ou trigonométrie).

47 ABCDE est un pentagone : la parallèle à (AC) passant par B coupe la droite (CD) en B'. La parallèle à (AD) passant par E coupe (CD) en E'.

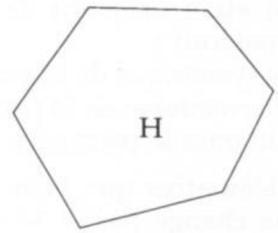
Montrez que l'aire du triangle AB'E' est égale à l'aire du pentagone ABCDE.



48 Construire un triangle ayant même aire que ce quadrilatère Q.



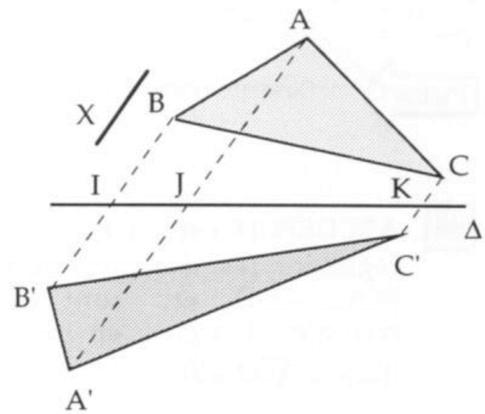
49 Construire un triangle ayant même aire que cet hexagone H.



50 Par chacun des sommets A, B, C d'un triangle, on trace des parallèles à la droite X qui coupent Δ en I, J, K et on construit A', B', C' tels que I, J, et K soient les milieux respectifs de [BB'], [AA'], [CC'].

$\mathcal{A}(ABC) = \mathcal{A}(A'B'C')$

vrai ou faux ?

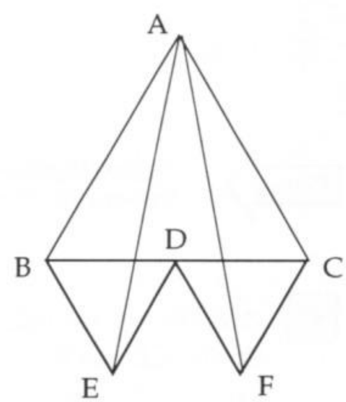


Pistes — Utilisez P_1 ou encore une propriété du trapèze vue à l'exercice 2.

51 Le triangle ABC est équilatéral et D est le milieu de [BC].

À l'extérieur de ABC on construit les triangles équilatéraux BDE et CDF.

Démontrez que les droites (AE) et (AF) partagent ABC en trois triangles d'aires égales



Pistes — Pensez à utiliser des droites parallèles et des trapèzes.

52 On a deux segments de même longueur : AB = CD .

Où se trouvent les points M tels que :

$\mathcal{A}(MAB) = \mathcal{A}(MCD)$?