GALION THÈMES

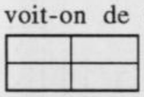
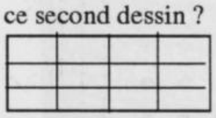
Combien ... ?

Combien de signes sur cette tablette de problèmes
d'origine babylonienne ?

15, quai André Lassagne – 69001 LYON
ISBN : 2-912209-17-X et 2-912209-04-8

Savoir compter !!

Essayez de répondre aux questions qui suivent … la bonne réponse figure dans celles qui vous sont proposées. Ne vous inquiétez pas si vous ne savez pas bien répondre … Nous y reviendrons !

Réponses proposées →	A	B	C	D
(1) Quel est le nombre des côtés d'un dodécagone ?	6	10	24	12
(2) Quel est le nombre des diagonales du dodécagone ?	12	66	54	24
(3) Quel est le nombre des faces d'un icosaèdre ?	24	20	16	8
(4) Madame Digognon a 26 poules et 50 lapins : combien de pattes ?	76	252	152	304
(5) Il y a 12 chevaux au départ d'une course : combien y a-t-il de tiercés possibles ?	36	1 728	144	1 320
(6) Combien de secondes se sont écoulées au mois de janvier ?	44 640	31	1 860	2 678 400
(7) Combien de chiffres pour numéroter les pages d'un livre de 300 pages ?	300	900	792	1000
(8) Combien voit-on de rectangles sur ce dessin ? 	5	9	4	6
(9) … et sur ce second dessin ? 	60	17	25	50
(10) Combien de chiffres pour écrire 2^{80} ?	160	25	80	10
(11) Vous cochez trois nombres sur une grille qui comporte les nombres de 1 à 10 : combien de façons de faire ?	30	300	720	120

Réponses :

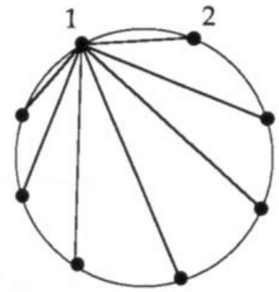
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
D	C	B	B	D	D	C	B	A	B	D

Dans des problèmes de la vie courante et dans les applications des mathématiques, il est souvent nécessaire de compter des objets, de répondre à la question "Combien y en a-t-il …?". C'est pour vous entraîner à résoudre certains de ces problèmes que nous vous proposons ce fascicule : les premiers exercices sont en grande partie résolus.

Nous vous en proposons d'autres à chercher : à vous d'y réfléchir, en essayant de trouver le bon modèle qui pourra vous aider … Toutes les réponses sont données en fin d'ouvrage page 24.

Comptons des cordes

◆ On a marqué 8 points sur un cercle. Essayez de trouver le nombre de cordes que l'on peut tracer en les joignant deux à deux.
Bien sûr, on pourrait les tracer toutes et compter …
Le point (1) est relié à 7 points : 7 cordes.
À partir du point (2) on peut tracer 6 autres cordes : on ne compte pas 2 fois la corde [1-2], etc.



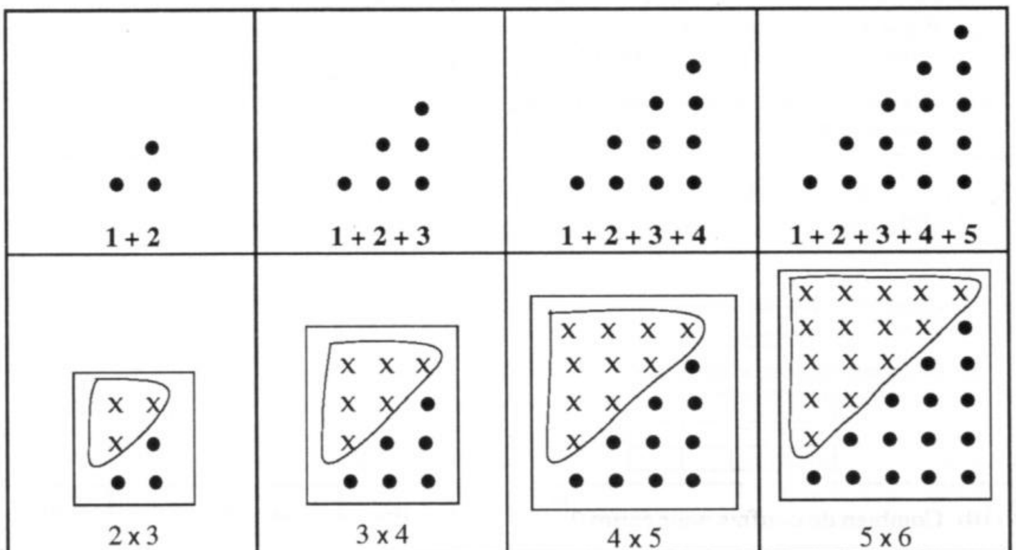
Le nombre de ces cordes est donc :

$$7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 \text{ soit } 28.$$

On peut aussi remarquer que sept cordes passent par chacun des 8 sommets; mais chacune d'elles étant comptée deux dois, le nombre des cordes est

$$\frac{7 \times 8}{2} \text{ soit } 28 .$$

◆ Pour ajouter rapidement tous les entiers de 1 à p, observez les figures suivantes :



1 + 2	**1 + 2 + 3**	**1 + 2 + 3 + 4**	**1 + 2 + 3 + 4 + 5**
2 x 3	3 x 4	4 x 5	5 x 6
donc $1+2 = \frac{2\text{x}3}{2}$	donc $1+2+3 = \frac{3\text{x}4}{2}$	donc $1+2+3+4 = \frac{4\text{x}5}{2}$	donc $1+2+3+4+5 = \frac{5\text{x}6}{2}$

Ainsi, si l'on ajoute tous les entiers de 1 à p, la somme est égale à $\frac{p\,(p+1)}{2}$.

$$1+2+3+ \dots + p = \frac{(\text{le nombre } p) \times (\text{le suivant de } p)}{2}$$

◆ Combien de cordes possibles si l'on place 50 points sur un cercle ? Et si l'on place 10 000 points ?

◆ Calculez la somme de tous les entiers de 1 à 1000. Calculez la somme des nombres pairs de 2 à 1000 puis la somme des nombres impairs de 1 à 999.

***R :** ◆ 1225 – 49 995 000 ◆ 500 500 – 250 500 – 250 000*

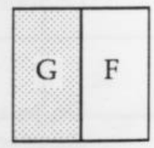
L'anniversaire du Père GALION

À l'occasion de son soixante-dixième anniversaire, le Père GALION a réuni ses 17 petits-enfants, parmi lesquels on compte 10 filles et 8 enfants blonds.

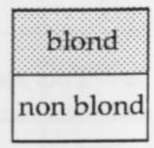
Le père Galion, dont la vue baisse, a tout de même observé qu'il y a trois fois plus de filles blondes que de garçons blonds.

Alors, pouvez-vous trouver le nombre des garçons qui ne sont pas blonds ?

Il est commode de représenter l'ensemble de tous ces petits-enfants par un dessin « **un diagramme** » sur lequel on place d'un côté les garçons – la partie grisée – et de l'autre les filles.

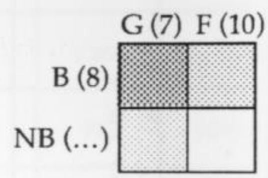


Il convient aussi de mettre en évidence les blonds et ceux – ou celles – qui ne sont pas blonds.



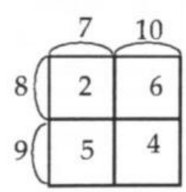
En imaginant une superposition des deux dessins (avec un calque par exemple) on obtient une représentation de la situation par un *diagramme de Carroll.*

Lewis Carroll (1832-1898) est l'auteur de *"Alice au pays des Merveilles".*



- Coloriez en bleu la partie correspondant aux filles blondes puis en vert celle qui correspond aux garçons qui ne sont pas blonds.
- Relisez alors l'énoncé. Il vous dit qu'il y a 17 petits-enfants, dont 10 filles : il y a donc 7 garçons. Reportez ces informations sur le diagramme.
  L'énoncé vous dit aussi qu'il y a 8 enfants blonds : combien d'enfants ne sont pas blonds ? Ces informations sont à reporter aussi sur le diagramme.
  Parmi les 8 blonds, il y a trois fois plus de filles que de garçons. Il n'y a qu'une manière de répartir ainsi les 8 blonds : comment ?

Expliquez alors comment on a marqué tous les nombres figurant dans le dernier diagramme, dans chacune des cases. Vous savez alors répondre à la question posée ...



C'est donc une question ***d'organisation***...!
Sachez vous organiser ; sachez ***représenter*** la situation par un ***diagramme***.
Sachez aussi repérer les ***nombres*** d' éléments donnés par l'énoncé ...
et , enfin , indiquez les nombres correspondants à ***chacune des cases*** de ce diagramme ...
À la fin , tout devient lumineux !!

⇨ POUR CHERCHER

Les exercices qui suivent utilisent le même type de méthode : représenter, interpréter les données ...et conclure avec un peu de bon sens !!

❑ À la sortie du Collège, madame Dupont a fait une enquête sur les goûts des élèves en musique, à propos de deux groupes qui sont au TOP 50. Sur cent élèves interrogés, quatre-vingt élèves déclarent aimer le groupe "DUDULE", cinquante aiment le groupe "PÉPÈRE" et trente-cinq aiment les deux ...

Combien y a-t-il de collégiens qui n'aiment aucun de ces deux groupes ?

Combien n'aiment qu'un seul de ces deux groupes ?

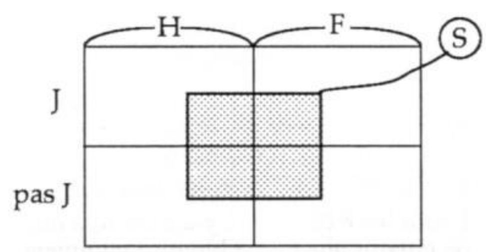
❑ Dans un autre Collège de la région, sur 100 élèves, il y en a encore 80 qui apprécient le groupe "DUDULE", 50 aiment "PÉPÈRE", et 10 qui n'aiment ni l'un ni l'autre.

Parmi ces élèves, combien aiment "DUDULE" et pas "PÉPÈRE, combien aiment le second et pas le premier ? ...

❑ Une maison d'édition publie le journal "JARDIN" (J) et la revue "LA SCIENCE" (S). On interroge 1 000 personnes, dont 480 hommes, à propos de ces publications : 380 personnes lisent le journal, 550 lisent la revue et 100 hommes lisent les deux ; 160 hommes lisent le journal et 180 hommes lisent la revue. Par contre, 50 femmes ne lisent ni l'un ni l'autre.
Combien y a-t-il de femmes qui lisent la revue et pas le journal ?
Combien d'hommes ne lisent ni l'un ni l'autre?

Voici une petite aide pour ce dernier exercice. En effet, c'est un peu plus compliqué !

Sur un diagramme, vous pouvez déjà placer "hommes" et "femmes", puis les lecteurs de J ainsi que ceux qui ne lisent pas J. Mais il vous reste à faire apparaître ceux qui lisent S et ceux qui ne lisent pas S. Pour cela, vous pouvez dessiner un rectangle au "milieu", comme le rectangle hachuré ci-contre :l'intérieur de ce rectangle correspond aux lecteurs de S et le pourtour à ceux qui ne lisent pas S.



Le diagramme complet comporte en définitive 8 cases disjointes.

Coloriez en rouge la partie correspondant aux hommes qui lisent à la fois la revue et le journal, en bleu la région correspondant aux femmes qui lisent J et pas S. etc.

Interprétez bien toutes les données de l'énoncé : il s'agit d'indiquer le nombre des individus dans chacune des 8 cases !

Ce n'est qu'à la fin que vous pouvez conclure !

R : ❑ *5 – 60* ❑ *40 – 10* ❑ *250 – 240*

Comptons les branches

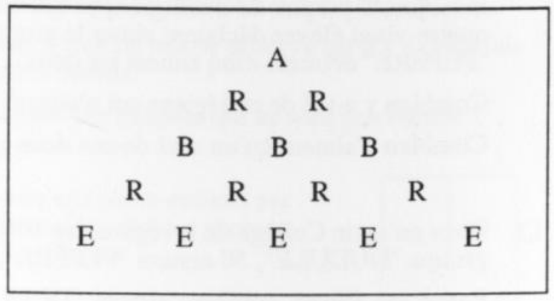
▼ Que d'arbres ...!

Sur le dessin ci-contre, on se propose de lire le mot ARBRE de la façon suivante :

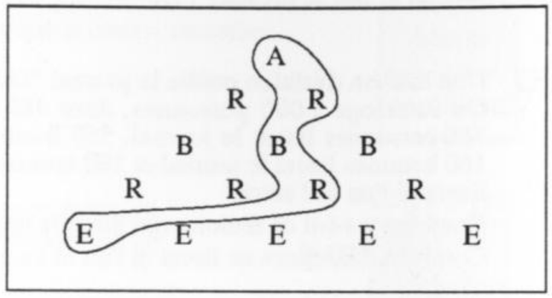
– on part du haut,

– on va uniquement vers le bas,

– on choisit une lettre sur chaque ligne.



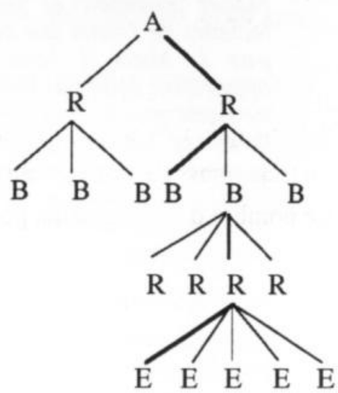
Voici ci-contre un exemple permettant d'atteindre ce but.



Brice affirme qu'il n'y a pas vingt façons d'y parvenir alors que Dominique affirme qu'il y en a au moins une centaine. Qui a raison ?

Nous allons chercher ensemble toutes les façons de lire le mot ARBRE en respectant les consignes.

Lettre choisie	Nombre de choix		Nombre de branches
A	un seul	On commence un arbre.	
R	deux	Chaque choix est matérialisé par une branche.	2
B	trois	Chaque branche se divise en **trois.**	2 x **3**
R	quatre	Chacune des six branches se divise en **quatre.**	(2 x 3) x **4**
E	cinq	Chacune des vingt - quatre branches se divise en **cinq.**	(2 x 3 x 4) x **5**



Il est bien difficile de dessiner entièrement l'arbre ; à chaque niveau nous avons indiqué seulement les subdivisions d'une ou deux branches.
Les branches grasseyées correspondent à l'exemple proposé..
Puisque 2 x 3 x 4 x 5 = 120 c'est donc Dominique qui avait raison.

Le produit des nombres entiers de 1 à 5 se nomme factorielle 5 et se note 5!
5! = 1 x 2 x 3 x 4 x 5 . Pour vous entraîner, calculez 3!, 10! et 12!.

***R** : 6 – 3 628 800 – 479 001 600*

▼ Prêt ? partez !

Cinq coureurs, André (A), Bernard (B), Claude (C), Denis (D) et Etienne (E) disputent une course de cent mètres.

Voici un exemple de classement possible à l'arrivée, du premier au cinquième : B D E C A.

Combien y a-t-il de classements possibles en supposant qu'il n'y a pas d'ex-æquo ?

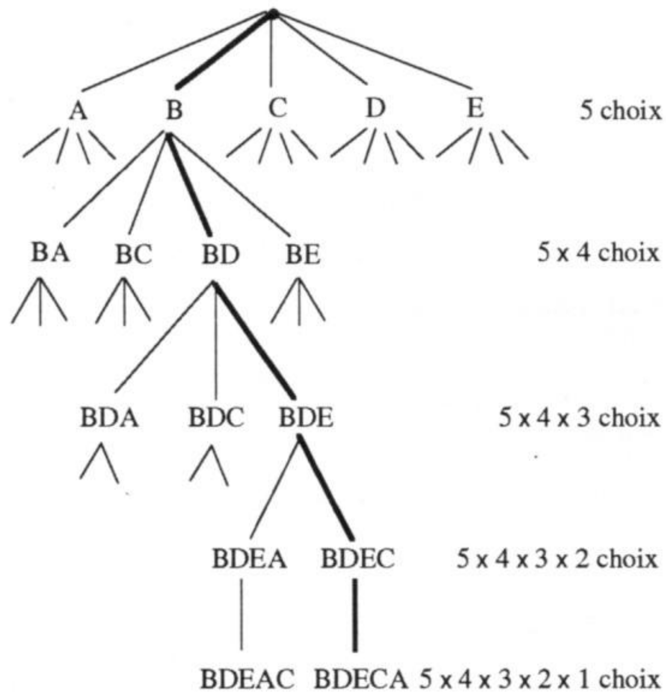
Quel peut être le premier : A, B, C, D ou E ?

Si, par exemple, B est arrivé le premier, quel est le second : A, C, D ou E ?

Si, par exemple, les deux premiers sont B et D, quel est le troisième : A, C ou E ?

Si par exemple, les trois premiers sont B, D, E, quel est le quatrième : A ou C ?

Lorsque les quatre premiers sont choisis, il n'y a plus qu'une seule possibilité pour le cinquième.



Là encore, il est difficile de dessiner entièrement l'arbre ; à chaque niveau nous n'avons dessiné qu'une seule ramification.

Le trajet grasseyé correspond au classement proposé en exemple.

Le nombre de classements possibles est donc 5 x 4 x 3 x 2 x 1 c'est-à-dire 5! soit 120.

▼ Où l'arbre est coupé

Seize chevaux prennent le départ d'une course. Combien y a-t-il de tiercés possibles, c'est-à-dire de choix possibles des trois premiers ? (en supposant qu'il n'y a pas d'ex-æquo).

Même question pour le quarté (quatre premiers) et le quinté (cinq premiers).

En raisonnant comme ci-dessus vous trouverez facilement :

16 x 15 x 14 tiercés c'est-à-dire 3 360 tiercés.

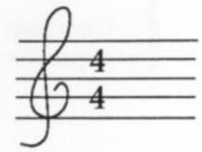
Puisque ici on ne s'intéresse qu'aux trois premiers, l'arbre est "coupé" après le troisième niveau.

De même il y a : 16 x 15 x 14 x 13 quartés c'est-à-dire 43 680 quartés
et 16 x 15 x 14 x 13 x 12 quintés c'est-à-dire 524 160 quintés.

Il y a donc bien peu de chances de gagner en remplissant, au hasard, un bulletin du PMU.

En avant la musique !

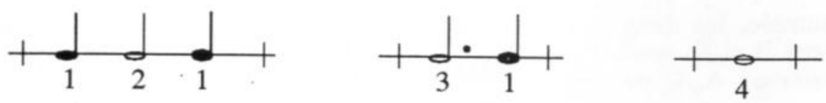
▼ Des mesures à quatre temps



On veut écrire une mesure à 4 temps en utilisant les **figures de notes** suivantes dont nous rappelons les durées :

noire	blanche	blanche pointée	ronde
♩	𝅗𝅥	𝅗𝅥.	𝅝
1 temps	2 temps	3 temps	4 temps

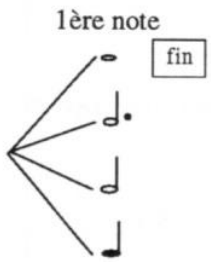
Voici trois exemples :



Nous allons chercher combien on peut écrire de mesures à 4 temps différentes.

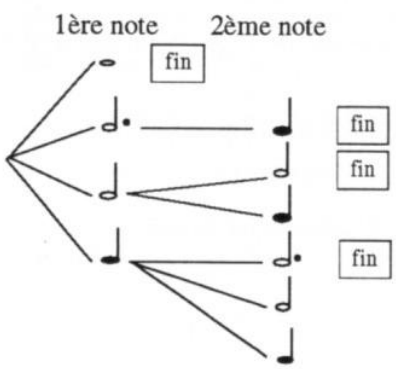
Intéressons-nous d'abord au nombre de notes que peut contenir chaque mesure. Ce nombre est bien évidemment fonction des figures de notes qu'elle contient.

Pour choisir la première note, il y a quatre possibilités que nous pouvons matérialiser par un début d'arbre.



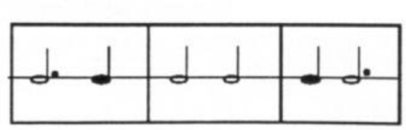
Si on choisit une ronde, elle est seule dans la mesure puisqu'elle dure à elle seule quatre temps. C'est la raison pour laquelle nous avons mis le mot fin qui indique que cette branche s'arrête à ce niveau.

Continuons notre arbre en cherchant quelle peut être la deuxième note.

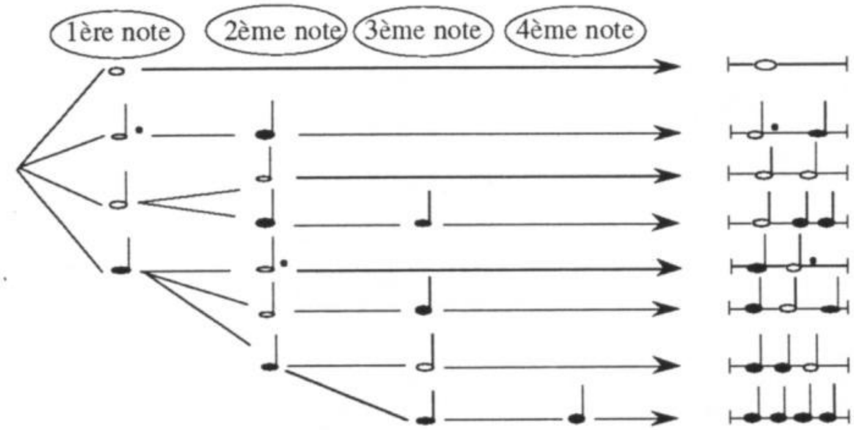


À ce niveau de l'arbre, il y a trois branches qui vont s'arrêter car la mesure est complète.

Nous obtenons trois possibilités de mesures contenant deux notes :



Continuons notre arbre, lorsque cela est possible, en cherchant quelle peut être la troisième et la quatrième note.



En résumé, il y a donc 8 façons de compléter une mesure à 4 temps avec les figures de notes choisies :

1 façon avec 1 note
3 façons avec 2 notes
3 façons avec 3 notes
1 façon avec 4 notes.

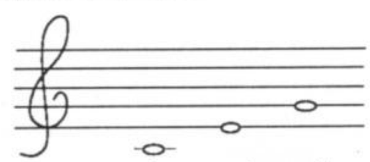
À vous de jouer ! ☆ ☆

Si on décide que dans chaque mesure à quatre temps il peut y avoir aussi des croches (la durée d'une croche est de 1/2 temps), combien peut-on écrire de mesures différentes ?

***R** : 61*

▼ Avec 3 notes et 4 temps

Nous voulons maintenant que les notes qui se trouvent dans chacune des mesures trouvées soient choisies parmi do, mi, sol.



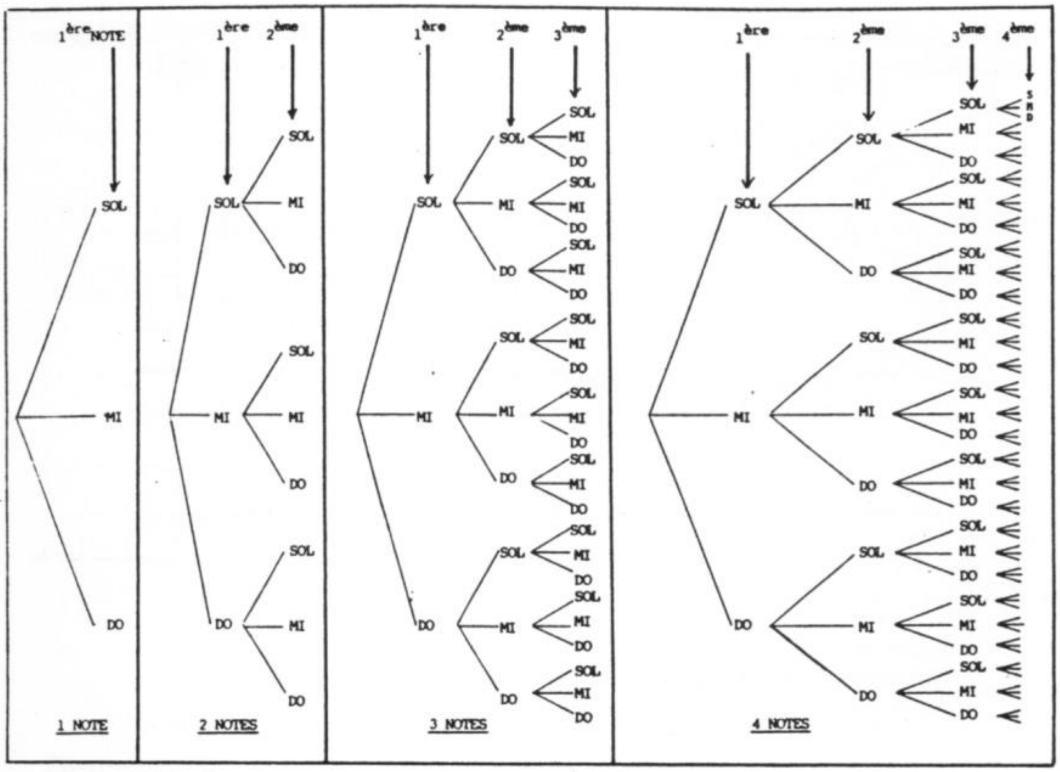
Nous allons étudier combien on peut écrire de mesures différentes. Dans chaque cas, on peut choisir une note de trois façons différentes : soit un do, soit un mi, soit un sol.

Si *la mesure n'a qu'une seule note* (une ronde), il y aura trois façons de la choisir.

Si *la mesure contient deux notes*, le nombre de possibilités est de $3 \times 3 = 3^2 = 9$.

Si *la mesure contient trois notes*, le nombre de possibilités est $3 \times 3 \times 3 = 3^3 = 27$.

Enfin, *avec quatre notes,* le nombre de possibilités est $3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^4 = 81$.



En regroupent les deux études précédentes, nous allons maintenant pouvoir calculer le nombre de mesures différentes à 4 temps que l'on va pouvoir écrire avec trois notes et les quatre figures de notes (ronde, blanche pointée, blanche, noire) :

$$\begin{aligned}(1 \times 3^4) + (3 \times 3^3) + (3 \times 3^2) + (1 \times 3^1) &= 3^4 + 3^4 + 3^3 + 3 \\ &= 81 + 81 + 27 + 3 \\ &= 192\end{aligned}$$

▼ À vous de jouer de nouveau !

- Si on décide de choisir les notes parmi do, mi, fa, sol, combien de mesures à quatre temps différentes pourra-t-on écrire ?
- Combien de mesures différentes peut-on écrire avec les cinq figures de notes : ronde, blanche pointée, blanche, noire, croche et les trois notes : do, mi, sol ?
- Même exercice que le précédent, mais avec cette fois les quatre notes : do, mi, fa, sol.

***R** : 500 – 37 695 – 260 788*

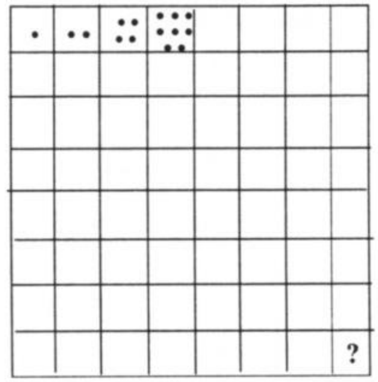
Cette étude nous montre le nombre important de possibilités d'écrire une seule mesure avec seulement trois notes et quatre figures de notes. On comprend alors aisément qu'avec toutes les notes de la gamme et les nombreuses possibilités de rythmes, il y a un nombre très grand de façons d'écrire un morceau de musique.

Le jeu d'échec et les grains de blé

On raconte que le jeu d'échec a été inventé par le Brahmane Sissa qui le présenta un jour au Roi du lieu. Le Roi, émerveillé, lui propose un cadeau en récompense : le jeune homme peut choisir lui-même son cadeau.

« C'est simple, dit-il, placez un grain de blé sur la première case du jeu, 2 sur la suivante, puis 4, puis 8 et ainsi de suite en doublant jusqu'à la 64ème case ».

Le roi sourit devant cette proposition modeste et s'aperçut vite qu'il allait se ruiner pour satisfaire l'inventeur.



Essayons d'y voir clair !

❖ Le nombre de grains sur la dernière case s'écrit 2^{63}. Expliquez pourquoi.
Combien faut-il de chiffres pour écrire ce nombre, sachant de 2^{10} vaut environ 10^3 ?

❖ Si on estime que l'on compte 10 grains à la seconde, combien de temps faudrait-il pour compter les grains de la dernière case ?

R : 19 – 2,92 x 10^{10} années

❖ Pour calculer le nombre total des grains sur l'échiquier, c'est plus difficile. Cette somme est $A = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{62} + 2^{63}$.

Doublons tous les nombres de grains sur les cases :

$$2A = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \ldots + 2^{63} + 2^{64}$$

Dans ces deux sommes, on trouve les mêmes termes, sauf 1 et 2^{64}.

Par différence, on obtient : $2A - A$ soit A. Ainsi : $A = 2^{64} - 1$.

> Ce qui fait un nombre de grains impressionnant, que nous pouvons tenter d'évaluer en sacs de blés, en wagons … et en trains.
>
> Estimons que 1 gramme équivaut à 40 grains, ce qui fait 40 000 dans un kilo donc 4 000 000 dans un sac de 100 kg. On peut estimer qu'un wagon contient 4 000 sacs et que ce wagon mesure 25 m de long, soit 25×10^{-3} km …
>
> C'est un train de 28 millions de km qu'il faudrait pour transporter le cadeau princier …
>
> Si l'on sait que la distance Terre-Lune est de 380 000 km, c'est plus de 75 trains de cette longueur qu'il nous faudra ! Et plusieurs siècles de la production mondiale n'y suffiraient pas …
>
> Un plaisantin, cet inventeur !

Jeux de pions

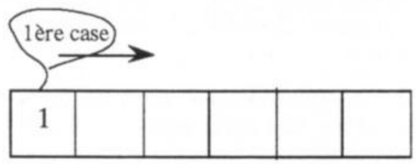
▼ Avec six pions

Vous disposez de trois pions marqués $\boxed{0}$ et de trois pions marqués $\boxed{1}$ et du casier à six cases disposées côte à côte.

On doit placer les six pions, de la gauche vers la droite en respectant la règle suivante :

– la première case à gauche contient $\boxed{1}$

– si on lit de gauche à droite, le nombre de $\boxed{0}$ placés n'est **jamais supérieur** au nombre de $\boxed{1}$ qui le précède.



Par exemple : $\boxed{1}$ $\boxed{1}$ $\boxed{0}$ $\boxed{0}$ $\boxed{0}$ $\boxed{1}$ est à exclure car les trois $\boxed{0}$ sont précédés de deux $\boxed{1}$.

Combien de manière y a-t-il de disposer nos six pions en respectant les règles du jeu ?

R : 5

▼ Avec huit pions

Recommencez avec un casier à huit cases, quatre pions $\boxed{0}$ et quatre pions $\boxed{1}$ et la même règle du jeu.

1							

Combien de façons différentes pour remplir le casier ?

R : 14

▼ Compétition !

Vous disposez de 20 pions marqués $\boxed{0}$ et 20 pions marqués $\boxed{1}$.

Vous devez remplir les cinq casiers ci-contre, en temps limité, et de manières différentes, en respectant les règles ci-dessus avec quatre $\boxed{0}$ et quatre $\boxed{1}$ par casier. C'est parti !

→	1							
→	1							
→	1							
→	1							
→	1							

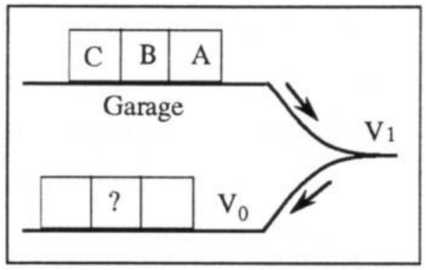
À celui d'entre vous qui ira le plus vite !

Manœuvres de wagons

▼ Trois wagons, C ,B ,A sont au garage dans cet ordre: on désire les amener sur la voie V_0 dans un certain ordre en les faisant transiter par la voie V_1.

Il y a des *sens uniques* pour les wagons :
du garage **à** V_1 et de V_1 **à** V_0.

Voici un exemple de déplacement pour amener les wagons $\boxed{C}\boxed{B}\boxed{A}$ en V_0 dans l'ordre $\boxed{B}\boxed{C}\boxed{A}$.

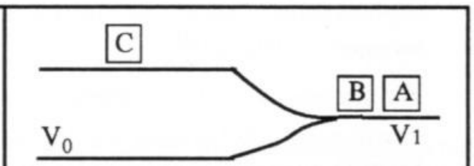
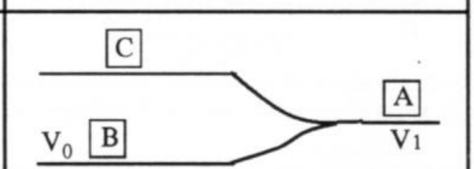
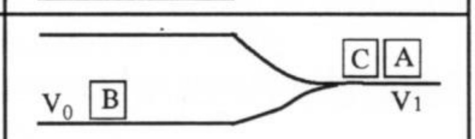
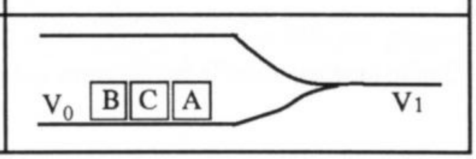


Chaque manoeuvre sera représentée par un **code** avec des **0** et des **1**.

♦ Un code de déplacement se lit de **gauche à droite.**

Chiffre $\boxed{1}$: il indique une manœuvre du garage vers V_1 ; autant de wagons que de chiffres $\boxed{1}$

Chiffre $\boxed{0}$: il indique une manoeuvre de V_1 vers V_0 ; autant de wagons que de chiffres $\boxed{0}$

➧ $\boxed{B}\boxed{A}$ sont amenés du garage en V_1: codage $\boxed{11}$.	
➧ puis $\boxed{B}$ est amené de V_1 en V_0 : codage $\boxed{11}\boxed{0}$.	
➧ puis $\boxed{C}$ est amené du garage en V_1 : codage $\boxed{110}\boxed{1}$.	
➧ enfin $\boxed{C}\boxed{A}$ sont amenés de V_1 en V_0 : codage $\boxed{1101}\boxed{00}$.	

En définitive, on obtient la disposition $\boxed{B}\boxed{C}\boxed{A}$ sur V_0 par les manoeuvres successives qui correspondent au **code de déplacement**: $\boxed{110100}$

♦ **Les codes de déplacements ne sont pas faits n'importe comment !**

- Le code $\boxed{101100}$ conduit à la disposition $\boxed{A}\boxed{C}\boxed{B}$ à l'arrivée : vérifiez-le !
- Le code $\boxed{111100}$ n'est pas possible : un code contient autant de 0 que de 1 !
- Le code $\boxed{011100}$ n'est pas possible : pourquoi ?
- Le code $\boxed{101001}$ n'est pas possible : expliquez pourquoi !
- Le code $\boxed{100110}$ n'est pas possible : pourquoi ?

Énoncez de manière précise les règles de formation d'un codage :

Quel premier chiffre ? Quel dernier ? etc.

Trouvez tous les codes possibles, donc toutes les manœuvres possibles : elles sont au nombre de 5. Voici les dispositions finales pour lesquelles vous trouverez les codes de déplacement :

$\boxed{C}\boxed{B}\boxed{A}$; $\boxed{B}\boxed{C}\boxed{A}$; $\boxed{B}\boxed{A}\boxed{C}$; $\boxed{A}\boxed{B}\boxed{C}$; $\boxed{A}\boxed{C}\boxed{B}$

▼ **Avec quatre wagons**

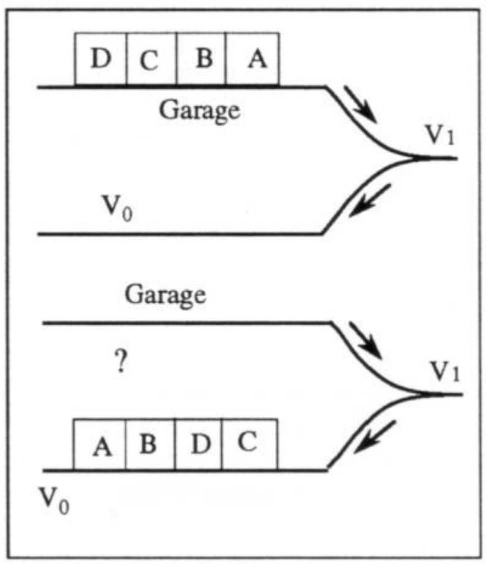
Prenons maintenant quatre wagons au départ du garage dans la disposition $\boxed{D}\boxed{C}\boxed{B}\boxed{A}$.

En utilisant le même codage avec des 0 et des 1, et, bien sûr, la même règle du jeu, appliquons par exemple, les déplacements codés de la façon suivante : $\boxed{10101100}$.

Vérifiez que ce code est correct !

Vérifiez que, à l'arrivée en V_0, on obtient les wagons dans l'ordre

$\boxed{A}\boxed{B}\boxed{D}\boxed{C}$.



♦ Alors, combien de codes de déplacements dans ce cas ?

$\boxed{\textit{R : 14}}$

♦ Quelle analogie avec le jeu de pions qui précède ?

Immatriculation de voitures

L'immatriculation d'une voiture, vous l'avez remarqué, change d'un pays à l'autre, voire d'un département à l'autre.

Voici quelques activités pour vous initier à ce problème.

➨ Pour immatriculer une voiture, on doit écrire un alignement de huit caractères au maximum, chiffres ou lettres. Par exemple :

2389 GB 69 **ou encore** **137 AJY 75**

Les deux derniers chiffres sont réservés au code du département: nous ne nous en occuperons pas .

Pour le reste, on a deux possibilités :

• soit on écrit un nombre compris entre 1 et 9999 puis une ou deux lettres de l'alphabet sauf les lettres I et O ;

• Soit on écrit un nombre compris entre 1 et 999 puis une, deux ou trois lettres de l'alphabet sauf I et O.

> Donner des exemples pour l'une et l'autre des possibilités.
>
> Combien les services de la Préfecture pourront-ils fournir de "numéros" différents pour l'une ou l'autre des possibilités ?

➨ La voiture de monsieur Dupont est immatriculée 2389 GB 69 .

Dans cette partie on ne s'occupera que du nombre 2389 .

Monsieur Dupont envisage un long voyage avec ses enfants Sylvain et Valérie. Afin qu'ils se tiennent tranquilles pendant ce long voyage, il leur propose le concours suivant :

- Valérie gagnera un point lorsqu'elle verra un numéro de voiture ayant **trois chiffres exactement** pris parmi les quatre chiffres du nombre 2389, peu importe la place de ces chiffres.
  Par exemple, si elle voit une voiture portant le n° 3822 ou 3817 ou 3829 elle ne gagne pas de point ; mais elle gagne un point si elle voit le n° 3852 .
- Sylvain gagne un point lorsqu'il verra une voiture portant un numéro où **deux chiffres exactement** de 2389 sont à leur place.
  Par exemple, le n° 2787 lui fera gagner un point, 2789 ne lui en fera pas gagner, pas plus que 2717.

> Combien y a-t-il de numéros entre 1 et 9999 qui peuvent faire gagner Valérie ?
>
> Combien qui peuvent faire gagner Sylvain ?

R : *➨ (1) 5 999 400 – 14 409 576 ➨ (2) 1536 – 486*

Mini LOTO

❑ Cocher des numéros sur une grille

Une grille comporte dix cases numérotées de 0 à 9.

0	1	2	~~3~~	4
5	~~6~~	7	8	9

➩ On demande à Véronique de cocher deux cases de cette grille. Combien y a-t-il de façons différentes de le faire ?

On est tenté de raisonner ainsi :

Combien de façons de cocher la première case ? évidemment 10.
Combien de façons de cocher la deuxième ? évidemment 9

ce qui donnerait 10 x 9 c'est-à-dire 90 façons.
Ce résultat n'est pas correct.

En effet, cocher en premier la case 3 et en second la case 6 conduit au même résultat que cocher en premier la case 6 et en second la case 3. Parmi les 90 façons trouvées plus haut, chacune d'elles est comptée deux fois.

Le nombre cherché est donc en réalité 90 : 2 qui est égal à 45.

➩ **Et si l'on demandait de cocher 3 cases ?**

Un raisonnement trop superficiel conduirait à :

10 x 9 x 8 = 720 façons.

Mais le ticket ci-contre est compté plusieurs fois :

0	~~1~~	2	3	~~4~~
5	6	~~7~~	8	9

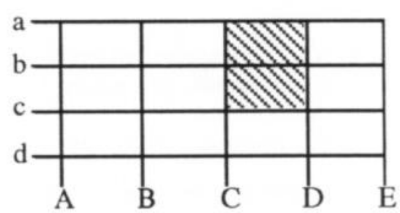
1 - 4 - 7 , 1 - 7 - 4 , 4 - 1 - 7 , 4 - 7 - 1 , 7 - 1 - 4 , 7 - 4 - 1

c'est-à-dire 6 fois.

Comme il en est de même pour chaque ticket, le nombre cherché est : 720 : 6 = 120.

❑ Comptons des rectangles

Reprenons l'exercice 9 de la page 2. Combien voit-on de rectangles sur le dessin ci-contre ?



Obtenir un rectangle revient à choisir :
– deux côtés horizontaux parmi {a, b, c, d}
– deux côtés verticaux parmi {A, B, C, D, E}.

Comme vous l'avez vu ci-dessus :

- le nombre des choix des deux côtés horizontaux parmi 4 possibles est $\frac{4 \times 3}{2}$ soit 6 choix ;
- le nombre des choix des 2 côtés verticaux parmi 5 possibles est $\frac{5 \times 4}{2}$ soit 10 choix.

Le nombre total des choix pour obtenir un rectangle est donc 6 x 10 soit 60 rectangles.

> Quelle est votre réponse si on trace un trait vertical de plus et un trait horizontal de plus ?

R : *150*

Le Tournoi de tennis par élimination

Dans un tournoi de tennis, après chaque match, le perdant est éliminé.

♦ ***32 joueurs sont inscrits. Comment organiser le tournoi ?***
Combien y aura-t-il de matchs au total ?

Remarquons que $32 = 2^5$. L'organisation est alors très simple.

Les 32 inscrits disputent un premier tour :

Au 1er tour :	16 matchs donnent	16 vainqueurs et 16 éliminés

Les 16 vainqueurs disputent le deuxième tour :

Au 2ème tour :	8 matchs donnent	8 vainqueurs et 8 éliminés
Au 3ème tour :	4 matchs donnent	4 vainqueurs (quarts de finale)
Au 4ème tour :	2 matchs donnent	2 vainqueurs (demi-finale)
Au 5ème tour :	1 match donne	le vainqueur (la finale).

Le nombre total de matchs est $m = 16 + 8 + 4 + 2 + 1$ soit $m = 31$.

Remarquons que $31 = 32 - 1$.

L'organisation est simple chaque fois que le nombre d'inscrits est une puissance de 2.

♦ ***Supposons que pour un autre tournoi on a 28 inscrits. Posons-nous les mêmes questions.***

Ici 28 n'est pas une puissance de 2, mais il est encadré par 2^4 et 2^5 : $16 < 28 < 32$.
En vue d'obtenir 16 joueurs pour le tour suivant, on organise un premier tour dans lequel :

$$\begin{cases} \text{x joueurs disputent } \frac{x}{2} \text{ matchs donnant } \frac{x}{2} \text{ vainqueurs} \\ \text{y joueurs sont } \textbf{qualifiés d'office} \text{ par tirage au sort} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 28 & \text{car il y a 28 joueurs} \\ \frac{x}{2} + y = 16 & \text{car il faut 16 joueurs pour le tour suivant} \end{cases}$$

La résolution de ce système donne : $x = 24$ et $y = 4$

Le 1er tour comprend donc :

$$\begin{cases} \text{24 joueurs disputant 12 matchs} \\ \text{4 joueurs qualifiés d'office} \end{cases}$$

Le tournoi se poursuit comme dans le premier exemple avec 16 joueurs au deuxième tour.

Le nombre m des matchs est donc : $m = 12 + (8 + 4 + 2 + 1)$ soit $m = 27$

Remarquons encore que $m = 28 - 1$.

♦ ***Combien de matchs et combien de tours si 135 joueurs sont inscrits à un tournoi de tennis par élimination ?***

$\boxed{\textbf{\textit{R}} : 134 - 8}$

En général, on peut démontrer que si n joueurs sont inscrits à ce type de tournoi par élimination, le nombre de matchs, au total, est $n - 1$.

D'autres exercices pour chercher

Les exercices plus difficiles sont marqués : ☆☆

0 ▸ Jacky vient de découvrir le "TAPIS VERT". Pour jouer, il lui suffit de cocher une case sur chacune des quatre lignes du tableau : 1 Pique,1 Cœur, 1 Trèfle et 1 Carreau.

Un Dimanche d'hiver, il décide de remplir tous les tableaux possibles ; il commence à 9 heures ; aura-t-il terminé le soir, sachant qu'il lui faut en moyenne 15 secondes pour tracer les 4 croix sur un tableau ?

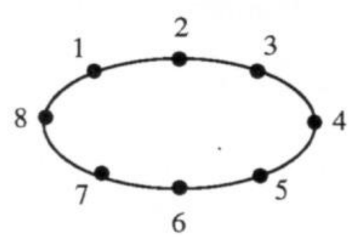
Pique	♠	1	R	D	V	10	9	8	7
Cœur	♥	1	R	D	V	10	9	8	7
Carreau	♦	1	R	D	V	10	9	8	7
Trèfle	♣	1	R	D	V	10	9	8	7

1 ▸ Neufs élèves veulent jouer une pièce de Molière. Il s'agit de distribuer les rôles de Tartuffe. Cléante et Orgon parmi les neuf élèves ; combien de choix possibles ? Et si l'un des élèves, Baptiste, refuse de jouer Orgon ?

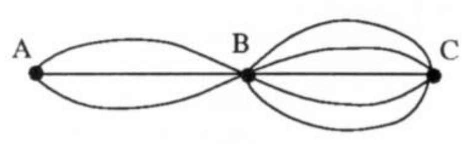
2 ▸ On dispose d'un meuble de rangement comprenant 10 casiers et on veut ranger 10 disques compacts. Combien y a-t-il de façons de les placer à raison de 1 disque par case ? Et si l'on s'interdit de placer le disque "***Polygone***" dans le premier casier ?

3 ▸ Huit copains décident de faire un repas chaque semaine. Ils se rangent autour d'une table dont les places sont numérotées de 1 à 8 et changent à chaque fois la disposition autour de la table.

Combien d'années devraient-ils se réunir ainsi pour épuiser toutes les possibilités ?



4 ▸ On part de A pour aller à C en passant par B. Combien y a-t-il d'itinéraires possibles et différents ? Et pour le retour ? Combien d'itinéraires pour un aller-retour si le retour ne se fait pas par le même itinéraire qu'à l'aller ?



5 ▸ Il y a 31 inscrits à un club sportif. Parmi les inscrits, 17 font du vélo, 13 de la natation et 8 font du ski. Aucun ne pratique à la fois les trois sports.
6 élèves ne font aucun de ces trois sports ; 2 skieurs qui pratiquent aussi la natation ne font pas de vélo et 2 skieurs qui font du vélo ne font pas de natation.
Combien de cyclistes font aussi de la natation ?

6 ▸ Combien peut-on écrire de nombres de quatre chiffres avec les chiffres 1, 2, 3 et 4 ?
Parmi ces nombres, combien se terminent par 4?
Parmi ces nombres, combien ont des chiffres tous différents ? Combien sont formés de 4 chiffres tous identiques ? Combien n'ont que trois chiffres identiques ?

$\boxed{\star\star}$ Combien comportent deux paires de chiffres identiques ?

7 ➧ $\boxed{\star\star}$ On dispose de 9 pions : 3 rouges, 3 bleus et 3 verts. On les dispose sur les cases du rectangle ci-contre.

Combien y a-t-il de façons de les disposer pour que l'on trouve un pion de chaque couleur sur chaque ligne et dans chaque colonne ?

8 ➧ Combien y a-t-il de nombres de deux chiffres dont le chiffre des dizaines est supérieur au chiffre des unités ?

9 ➧ On a tracé un polygone convexe de 50 côtés. Combien a-t-il de diagonales ?

10 ➧ Une fourmi se déplace sur un cube en fil de fer en suivant les arêtes et sans passer deux fois par le même sommet. Elle part d'un sommet A pour aller au sommet B.
Combien de trajets possibles si A et B sont des sommets d'une diagonale du cube ?
Et si A et B sont les sommets d'une diagonale d'une face ?

11 ➧ Le Docteur Petiot a trouvé une carte bancaire dont le code comporte 4 chiffres. À un distributeur, il veut essayer tous les codes possibles. Combien de temps lui faudrait-il au plus s'il met 10 secondes pour composer un code ?

12 ➧ Une loterie comporte 100 000 billets, tous vendus. Il se trouve que le 1er avril 2010, le billet gagnant comporte un numéro de cinq chiffres différents.
Laetitia s'exclame : "Quelle malchance, mon numéro possède bien les cinq chiffres, mais hélas dans un ordre qui n'est pas le bon !"
Combien d'autres personnes peuvent faire la même réflexion que la pauvre Laetitia ?

13 ➧ Le menu : Entrée : Langoustine mayonnaise **ou** Ballotine de canard
Viande : Gigot d'agneau **ou** Poulet aux écrevisses **ou** Lapin chasseur
Dessert : Vacherin glacé **ou** Poire Belle Hélène

Combien de menus pouvez-vous composer sachant que vous devez choisir une entrée, une viande et un dessert ?

14 ➧ Les voitures PAPY sortent un nouveau modèle révolutionnaire avec les options suivantes :

- **Modèle : berline** ou commerciale
- **Carrosserie** : tourisme ou grand luxe
- **Couleur** : blanc, bleu, rouge
- **Carburant :** essence ou diesel
- **Sièges :** velours, cuir ou tissu

Le garage "Richard" décide de commander tous les modèles possibles. Combien au total ?

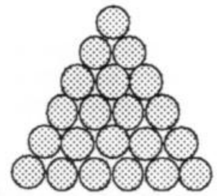
15 ➧ Ginette a invité à déjeuner quatre amies : Andréa, Béatrice, Cécile et Désirée, mais aucune n'a vraiment promis de venir. Quelles sont les différentes possibilités ?

16 ➧ Monsieur David a une voiture à cinq places. Il va se balader en Périgord avec son épouse et ses trois amis. Il est le seul à savoir conduire.
De combien de façons les passagers peuvent-ils s'installer dans la berline ?
Et si Madame David refuse d'être à l'avant ?

17 ▸ Pour numéroter les pages d'un dictionnaire, le typographe Durand a utilisé 2 989 caractères. Quel est le nombre des pages du dictionnaire ?

☆☆ Combien de chiffres 3 sont utilisés ? Et combien de chiffres 9 ?

18 ▸ On a empilé des bouteilles de Beaujolais comme ci-contre. D'abord 6 sur la rangée du bas, puis 5 au-dessus, puis 4 , 3 , 2 et 1 en haut : au total 21 bouteilles.



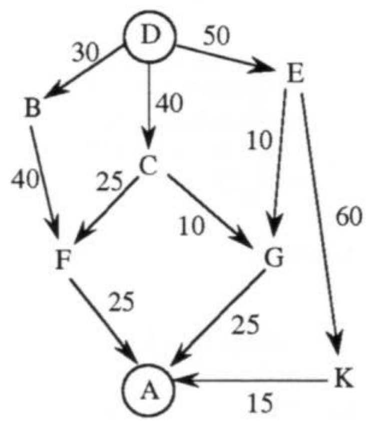
Combien y a-t-il de bouteilles si on commence la rangée du bas avec 10 bouteilles ? Et avec 30 ? Et avec n bouteilles ?

19 ▸ Une machine à calculer dispose de deux touches spéciales A et B. Quand on appuie sur A, la machine ajoute 3 et quand on appuie sur B elle ajoute 5.
Au départ, elle marque 18. Est-il possible, en appuyant sur l'une ou l'autre touche autant de fois que l'on veut, d'obtenir le nombre 45 ? De combien de façons différentes ?

20 ▸ Le 19 octobre, j'apprends un secret :"Valéry a gagné au loto". Le lendemain, je dis ce secret à trois personnes de la ville. Chaque jour, chaque nouvelle personne connaissant ce secret le dit à trois autres qui ne le connaissent pas.
Combien de personnes seront au courant le 25 octobre au soir ? Et le 31 octobre ?

☆☆ Et le 8 novembre au soir ?

21 ▸ Un voyageur veut se rendre de la ville D pour aller à la ville A. Pour cela il emprunte différents itinéraires possibles et passe éventuellement par d'autres villes B, C, E, F, …
Sur le schéma ci-contre sont indiqués les routes et les sens uniques avec les temps de parcours en minutes.
Combien d'itinéraires sont possibles ?
Quel est le plus rapide ?



22 ▸ ☆☆ Parmi 343 personnes de nationalité française,

17 ne parlent que l'anglais.
20 parlent l'anglais et l'allemand mais pas l'italien
33 parlent l'anglais et l'italien mais pas l'allemand
45 parlent l'allemand et l'italien mais pas l'anglais
88 parlent l'anglais,
97 l'allemand
103 l'italien.

Combien de personnes ne parlent aucune de ces trois langues ?

23 ▸ Dans le charmant village de Sainte Julie, monsieur le comte vient de mourir. Il a décidé de léguer ses biens aux nécessiteux du village avec les indications suivantes :

"Je donne 400 F aux ménages avec enfants qui ont une belle-mère à charge. Je lègue 300 F aux ménages sans enfant qui ont une belle-mère à charge et 200 F aux ménages avec enfant sans belle-mère. Je donne 100 F aux ménages qui n'ont ni belle-mère ni enfant."

Le notaire doit faire ce partage : il y a 305 ménages dans le village, 199 avec enfants, 112 avec une belle-mère à charge. Parmi les ménages avec enfant, il y a 31 ménages de plus sans belle-mère que de ménages avec belle-mère. Quelle est la fortune du comte ?

24 ▶ Voici les ventes de trois quotidiens régionaux :

(1) :	La Voix du Nord :	387 000
(2) :	Nord Matin :	132 000
(3) :	Nord-Éclair :	101 000

On estime que 25 000 lecteurs achètent à la fois (1) et (2) et que 5 000 achètent à la fois les trois journaux .Par ailleurs, 61 000 ne lisent que (3) et 80 000 que (2).

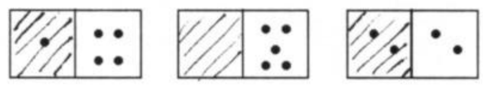
Chaque journal n'est lu que par une personne.

Une publicité paraît dans les trois journaux. Combien touche-t-elle de lecteurs ?

25 ▶ Je peux monter un escalier soit une marche à la fois, soit deux marches à la fois, en sautant une marche.

Combien y a-t-il de manières de monter un escalier de 4 marches ? Et un escalier de 5 marches ? Et un escalier de 8 marches ?

26 ▶ Combien y a-t-il de dominos dans un jeu de dominos ?



27 ▶ L'alphabet morse utilise deux signes : le point (•) et le trait (–). Avec cet alphabet, combien peut-on former de mots de quatre signes ? de cinq signes ? de quatre au plus ?

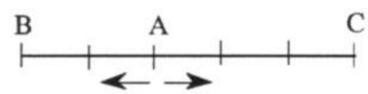
Combien de mots de quatre signes comportent exactement deux traits.

Combien de mots de cinq signes comportent exactement trois traits ?

28 ▶ Le petit frère de Katia est désœuvré, sans doute parce que la télé est en panne ... Il compose au hasard des numéros de téléphone de 8 chiffres. Combien de temps lui faudrait-il pour les composer tous s'il met en moyenne 20 secondes par numéro composé ?

Combien de numéros comportent 8 chiffres pairs ? Combien comportent 8 chiffres tous différents ?

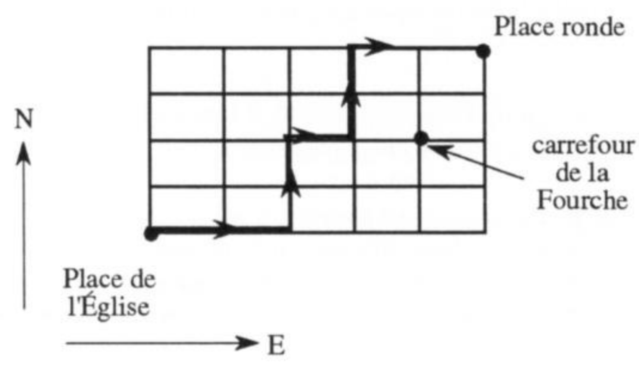
29 ▶ Une puce se trouve en A .Elle saute d'une case à l'autre, à gauche ou à droite, au hasard. Elle s'arrête au bout de 5 sauts ou bien si elle parvient en B ou en C. Combien y a-t-il de déplacements possibles ?



30 ▶ Voici le plan d'un quartier d'une ville où toutes les rues sont à sens unique. On ne peut se déplacer que vers le Nord ou vers l'Est. Sur le plan est dessiné un itinéraire pour aller de la place de l'Église à la Place Ronde.

Combien y a-t-il d'itinéraires différents possibles pour effectuer ce trajet ?

Le carrefour de la Fourche est en travaux et il est impossible d'y passer. Combien y a-t-il alors d'itinéraires pour effectuer le même trajet ?



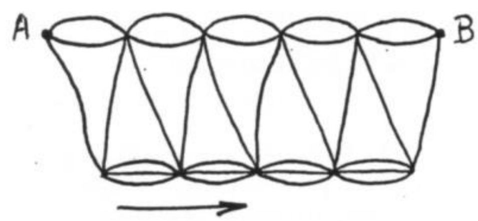
31 ♦ La Père Galion fait du voilier. Pour envoyer des signaux, il dispose de quatre pavillons: deux rouges, un bleu et un vert. Il doit les disposer l'un au dessous de l'autre. Combien de signaux différents peut-il envoyer ainsi ?
Et s'il peut utiliser 3 rouges , 2 bleus et 1 vert ?

32 ♦ Toto veut connaître le nombre de ses ancêtres qui vivaient en 1610 à la mort de Henri IV. Aidez-le. On estime qu'il y a un décalage de 25 ans entre deux générations. Et quel est le nombre de tous ses ascendants depuis cette époque ?

33 ♦ L'école d'Athènes "Le Sphinx" a 100 élèves. On a prévu pour cette année scolaire trois visites : Delphes, Thèbes et Rhodes. Mais l'école n'a pas les moyens d'emmener tous les élèves aux trois sorties. Il s'agit de faire une bonne répartition. L'organisateur décide que 52 iront à Thèbes, 47 à Rhodes et 32 à Delphes. Le total étant supérieur à 100, certains participeront à deux excursions : 10 à Rhodes et à Delphes, 8 à Rhodes et Thèbes et 14 à Delphes et Thèbes. Le professeur Socrate affirme : "Aucun des 100 élèves n'est oublié !". Mais Zénon n'est pas d'accord :"Il y a un pauvre élève qui n'ira nulle part !".
Mettez-les d'accord.

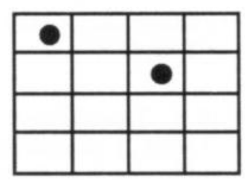
34 ♦ Une fourmi part de A et se déplace de **gauche à droite** en suivant les fils de la dentelle, pour parvenir en B.

Combien de chemins différents peut-elle prendre ?



35 ♦ Le code d'un coffre comporte 4 chiffres tous différents, mais pas de chiffre 9. La somme du chiffre des unités et du chiffre des milliers est égale à 9.
Combien y a-t-il de codes possibles ?

36 ♦ Je dispose d'un carré divisé en 16 cases : 4 x 4 .
Je place deux pions noirs sur deux cases et des pions blancs sur les 14 autres cases.
Combien y a-t-il de manières de le faire ?



37 ♦ Trois messieurs munis de chapeaux entrent au restaurant et déposent leurs couvre-chefs au vestiaire. La dame de l'endroit, distraite, mélange les chapeaux et les rend au hasard à la fin du repas. De combien de façons peut-elle les rendre ? Combien de convives retrouvent leur chapeau ?

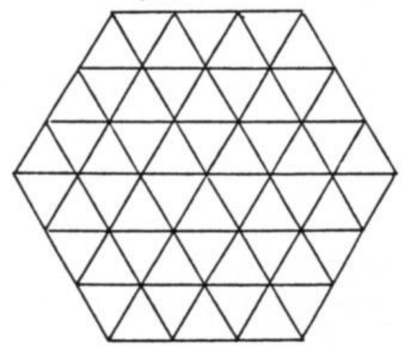
38 ♦ [☆☆] Pour jouer au loto, il faut cocher 6 numéros sur une liste de 49 nombres.
Combien y a-t-il de choix possibles ?

39 ♦ On dispose de deux dés à jouer : un rouge et un vert. On lance les deux dés et on ajoute les nombres obtenus sur le dé rouge et sur le dé vert. On note A le total obtenu. Combien y a-t-il de façons d'obtenir A = 5 ? A = 7 ? A = 9 ?
On recommence avec trois dés de couleurs différentes. De combien de manières peut-on obtenir un total égal à 8 ? à 9 ? à 10 ? à 12 ?

40 ➧ En arrivant à une réunion, chaque participant serre la main de tous les autres. Le petit-fils du Président a compté 66 poignées de mains. Combien de personnes viennent assister à la réunion ?

41 ➧ On dispose de cubes de couleurs : des dés rouges et des dés verts. On les empile pour former des "tours" de deux étages. Combien y a-t-il de tours différentes ?
Et avec des cubes de trois couleurs ?
Reprendre ces questions avec des tours de 3 étages, des tours de 4 étages.

42 ➧ Combien d'hexagones réguliers sur cette figure ?



43 ➧ $\boxed{\star\star}$ Prenez une bande de papier assez longue (40 centimètres au moins). Faites , dans cet ordre, les trois gestes suivants :

p : pliez la bande en deux parties égales
c : coupez en deux par le milieu la liasse obtenue
s : superposez pour obtenir une nouvelle liasse.

La première fois, on obtient ainsi un morceau plié en deux et deux morceaux droits. Recommencez les trois gestes (p-c-s) avec la nouvelle liasse.
Combien de morceaux pliés ? Combien de morceaux droits ?
Recommencez encore avec la nouvelle laisse. Comptez les morceaux. Et au bout de trois, de quatre, de cinq, … fois ?

Réponses aux exercices

0 ➧ 4 096 grilles – 17 heures environ

1 ➧ 504 – 448

2 ➧ 3 628 800 – 3 265 920

3 ➧ 40 320 soit plus 775 ans

4 ➧ 15 à l'aller – 15 au retour – 210

5 ➧ 9

6 ➧ 256 – 64 – 24 – 4 – 48 – 36

7 ➧ 12

8 ➧ 45

9 ➧ 1 175

10 ➧ 18 – 16

11 ➧ Plus de 27 heures

12 ➧ 118 personnes

13 ➧ 12 menus

14 ➧ 72 modèles

15 ➧ 16

16 ➧ 24 – 18

17 ➧ 1024 pages – 303 chiffres 3 et 302 chiffres 9

18 ➧ 55 – 465 – $\frac{n(n+1)}{2}$

19 ➧ 36

20 ➧ 1093 – 797 161 – 5 230 176 645

21 ➧ 5 itinéraires – DCGA

22 ➧ 189

23 ➧ 72 800 F

24 ➧ 550 000

25 ➧ 5 – 8 – 34

26 ➧ 28

27 ➧ 16 – 32 – 30 – 6 – 10

28 ➧ Plus de 63 ans – 390 625 – 1 814 400

29 ➧ 20

30 ➧ 126 – 61

31 ➧ 12 – 60

32 ➧ 32 768 – 65 534

33 ➧ Zénon a raison !

34 ➧ 1188

35 ➧ 336

36 ➧ 120

37 ➧ 6 façons – 0,1 ou 3

38 ➧ 13 983 816

39 ➧ 4 – 6 – 4 – 21 – 25 – 27 – 25

40 ➧ 12

41 ➧ (4 - 9) – (8 - 27) – (16 - 81)

42 ➧ 27

43 ➧ (P : 1 ; D : 2) ; (P : 5 ; D : 6)
(P : 21 ; D : 22) ; (P : 85 ; D : 86)
(341 ; 342) ; etc ...