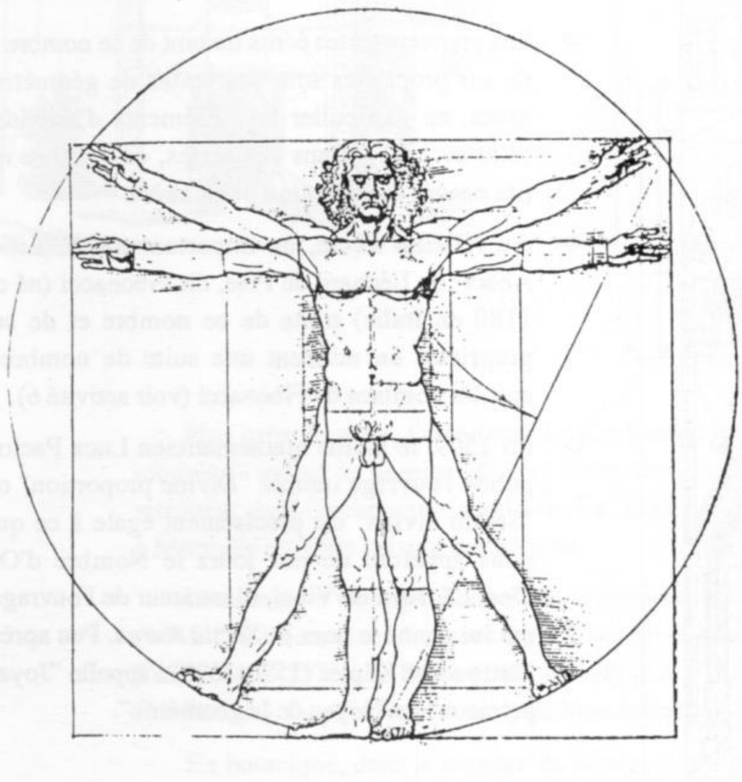
GALION THÈMES

Le Nombre d'Or

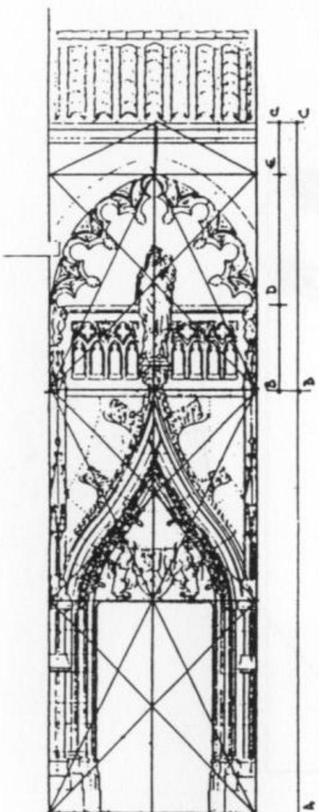


d'après Léonard de Vinci.

C'est un nombre un peu mystérieux que l'on rencontre en mathématiques depuis la plus haute Antiquité, mais aussi très souvent en architecture, en peinture, en biologie, et même en poésie et en musique.

C'est le nombre $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

On le désigne souvent par la lettre grecque Φ. Une valeur approchée de ce nombre est 1,618 033 989.

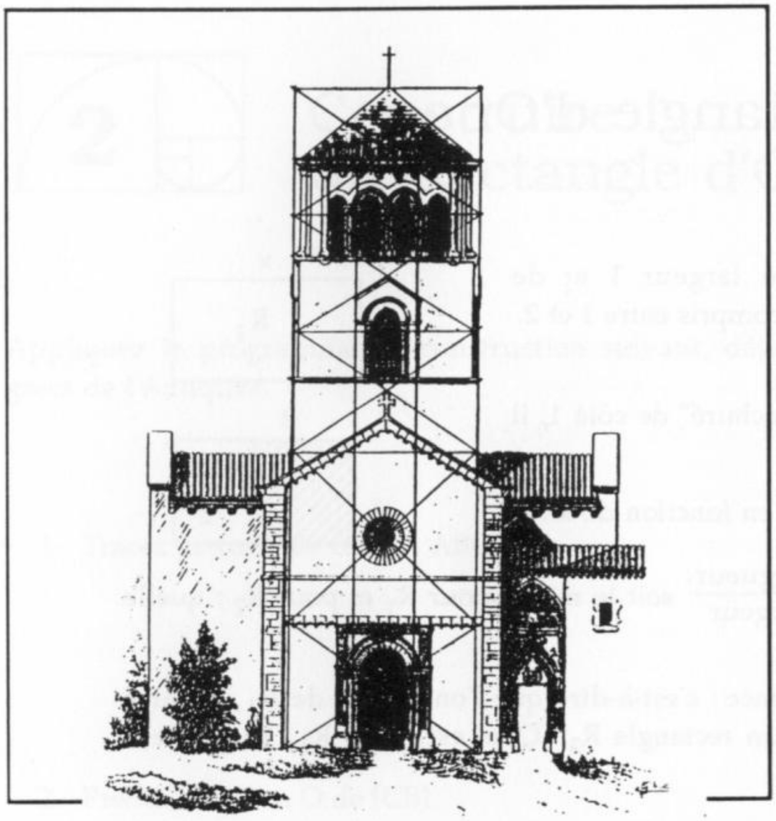


$\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{BD} = \frac{BD}{EC} = 1,618$

- Les premiers textes écrits traitant de ce nombre et de ses propriétés sont des textes de géomètres grecs, en particulier les "Éléments d'Euclide" (300 av.J.-C.). Dans ces textes, ce nombre n'a pas encore d'appellation particulière.
- Au XIIème siècle, un important traité "Liber Abaci" de Léonard de Pise, dit Fibonacci (né en 1180 en Italie) traite de ce nombre et de ses propriétés en utilisant une suite de nombres, appelés nombres de Fibonacci (voir activité 6).
- En 1509, le moine mathématicien Luca Pacioli publie l'ouvrage intitulé "Divine proportion" où "Sectio divina" est précisément égale à ce que nous appelons de nos jours le Nombre d'Or. C'est Léonard de Vinci, illustrateur de l'ouvrage, qui lui donne le nom de *Sectia Aurea*. Peu après, l'astronome Képler (1570-1630) l'appelle "Joyau précieux" ou "Joyau de la géométrie".

En architecture, on le rencontre dans les rapports de certaines dimensions du Parthénon, de la cathédrale de Poitiers, de la cathédrale de Reims, du Palais Saint Pierre à Lyon et même dans l'église de Salles en Beaujolais.

(photos extraites de "Les Amis de Lyon et de Guignol" - octobre 1987).



Plus près de nous, l'architecte Le Corbusier, dans son traité "Le modulor" utilise le nombre d'Or et traite des proportions idéales à retrouver dans l'architecture moderne. La "Cité Radieuse" qu'il réalise à Marseille est bâtie suivant ces normes.

Le nombre d'Or apparaît aussi dans certains tableaux de Botticelli (1445-1510) (certaines fresques de la Chapelle Sixtine à Rome), de Le Titien (1488-1576), de Dürer (1471 - 1528) *(La Mélancolie)*, de Seurat *(La Parade)*, du peintre moderne Piet Mondrian (1872-1944).

En botanique, dans le nombre de pétales de certaines fleurs, dans la position des feuilles le long d'une tige, dans la disposition des écailles des pommes de pins, on retrouve la suite de Fibonacci, donc le nombre d'Or.

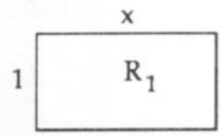
On rencontre même le nombre d'Or dans les proportions du corps humain, comme l'avait déjà fait remarquer Léonard de Vinci.

Enfin, des techniques nouvelles, telles l'informatique, s'appuient sur des algorithmes dont certains, curieusement, sont liés directement aux nombres de Fibonacci, donc au nombre d'Or (algorithme de minimax, algorithme de tri, ...).

1 Rectangle d'Or

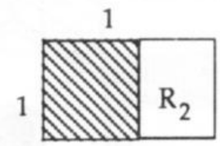
➢ On part d'un rectangle de largeur 1 et de longueur x. On supposera x compris entre 1 et 2.

C'est le rectangle R_1.



➢ De R_1, on enlève le carré "hachuré" de côté 1, il reste alors un rectangle R_2.

Quelles sont ses dimensions en fonction de x ?



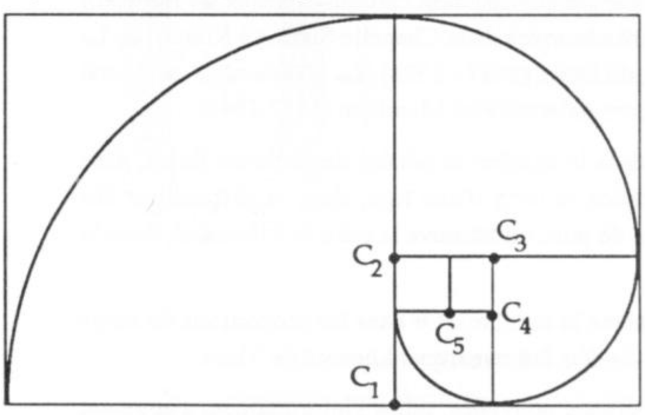
On veut que le quotient $\dfrac{\text{longueur}}{\text{largeur}}$ soit le même pour R_1 et pour R_2 ; quelle relation doit vérifier x ?

➢ A partir de R_2, on recommence : c'est-à-dire que l'on enlève de R_2, le carré de côté (x – 1). On obtient un rectangle R_3. Quel est, pour R_3, le quotient $\dfrac{\text{longueur}}{\text{largeur}}$?

Et vous pouvez continuez ...

Les rectangles R_1, R_2, R_3 ... s'appellent des **rectangles d'Or**.

Activité de dessin. Tracez avec précision un rectangle R_1 de dimensions 150 mm x 243 mm. Construisez, à l'intérieur, les rectangles R_2, R_3, R_4, ... comme l'indique le dessin et, dans chaque carré, tracer un quart de cercle comme il est indiqué : on obtient une spirale.



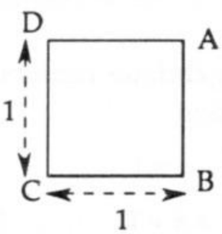
Calculez $\dfrac{\text{longueur}}{\text{largeur}}$ pour chaque rectangle.

	R_1	R_2	R_3	R_4	...
$\dfrac{L}{\ell}$					

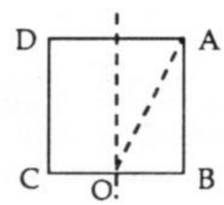
2 Construire un Rectangle d'Or

Appliquez le programme de construction suivant, déjà connu des géomètres grecs de l'Antiquité.

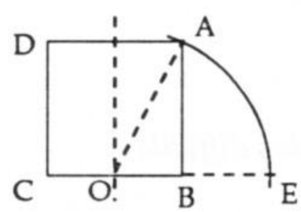
1- Tracez un carré de côté 1 : ABCD



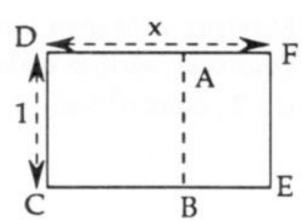
2- Prenez le milieu O de [CB]



3- Tracez le cercle de centre O et de rayon OA qui recoupe (BC) en E.



4- Tracez le rectangle ECDF



Calculez x.

Montrez que x vérifie l'équation écrite dans l'activité 1.

Le rectangle CEFD est-il un rectangle d'Or ?

Et le rectangle ABEF ?

3 Une équation du second degré

Dans un document de géométrie rédigé par des mathématiciens de Mésopotamie dans l'Antiquité, on trouve la phrase suivante :

"J'ai retranché le côté de mon carré de la surface de ce carré : je trouve 1".

En langage algébrique contemporain, si on désigne par x le côté du carré, on obtient l'équation

$$x^2 - x = 1$$

soit $\quad x^2 = x + 1 \qquad (1)$

➡ On pose $\alpha = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$. Vérifiez que ce réel α est solution de cette équation (1).

Démontrez ensuite que l'inverse de l'opposé de α est aussi solution de cette équation.

Question plus difficile

Montrez qu'aucun entier naturel n'est solution de cette équation. Pour cela, vérifiez d'abord pour 0 ; 1 et 2 ... Ensuite, démontrez que si $n > 2$, alors $n^2 > n + 1$.

4 Pas de touche $\boxed{\sqrt{\ }}$!

Avec une machine, si vous tapez 5 puis $\boxed{\sqrt{\ }}$, vous obtenez une approximation de $\sqrt{5}$: 2,236 068

On se propose, dans cette activité de trouver des approximations de $\sqrt{5}$ ***sans utiliser la touche*** $\boxed{\sqrt{\ }}$.

$\sqrt{5}$ est le réel positif dont le carré est 5.

Or $\quad 4 < 5 < 9 \quad$ donc $\quad 2 < \sqrt{5} < 3$.

Prenez le milieu de l'intervalle [2 ; 3] : c'est 2,5

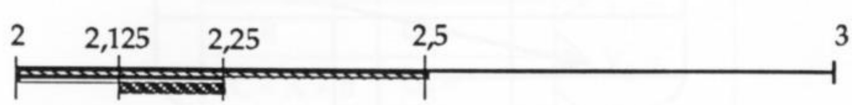
$(2{,}5)^2 = 6{,}25 : \quad 4 < 5 < 6{,}25 \quad$ donc $\quad 2 < \sqrt{5} < 2{,}5$

Prenez alors le milieu de l'intervalle [2 ; 2,5] soit 2,25 et poursuivez la recherche ... jusqu'où vous pourrez !

Disposez clairement vos calculs.

Encadrements de $\sqrt{5}$ ***à chaque étape :***

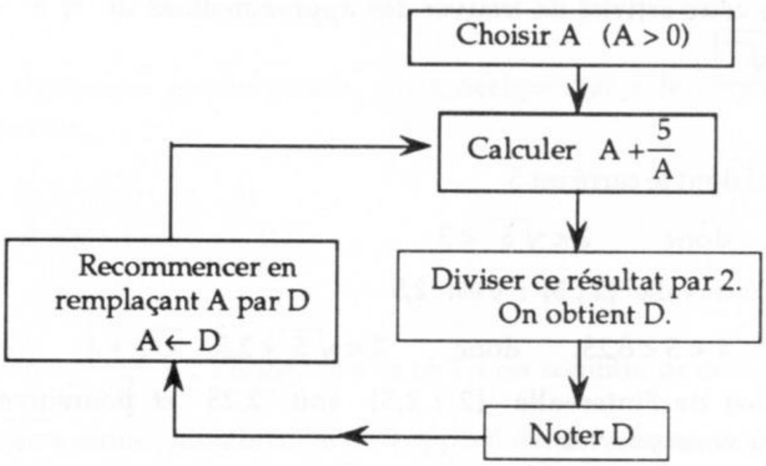
Étape 1	2	$< \sqrt{5} <$	2,5
Étape 2	2	$< \sqrt{5} <$	2,25
Étape 3	...	$< \sqrt{5} <$	...
Étape 4	...	$< \sqrt{5} <$	...
...	...	$< \sqrt{5} <$	...



5 Où l'on retrouve $\sqrt{5}$

Voici une autre façon de trouver des approximations de $\sqrt{5}$.

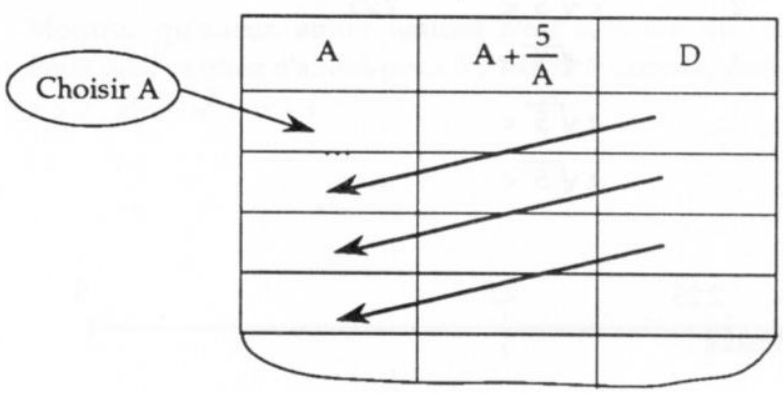
Dans le programme de calcul ci-dessous, c'est vous qui choisissez le nombre A au départ.



Bien noter tous les résultats D et marquer sur un axe les points successifs ayant pour abscisses ces nombres D trouvés.

Que faites-vous si la machine affiche deux fois de suite le même résultat ?

Recommencez avec un autre nombre A au départ ...



Donnez des valeurs décimales approchées de $\alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ puis de $\frac{1}{\alpha}$: observez les décimales, comparez-les ... Pouvez-vous l'expliquer ?

6 Des fractions pour $\sqrt{5}$

Cette activité était chère à Léonard de Pise (appelé encore Fibonacci) (XIIème siècle - Italie).

➡ Au départ, choisir deux nombres A et B, strictement positifs.
Le troisième est la somme des deux premiers : $C = A + B$.
Le suivant est la somme des deux qui le précèdent : $B + C$, etc.
Vous obtenez ainsi une suite telle que chaque terme, à partir du troisième est égal à la somme des deux termes précédents :

$$U_1 = A \ ; \ U_2 = B \ ; \ U_3 = U_1 + U_2 \ ; \ \dots \ ; \ U_n = U_{n-2} + U_{n-1} \ ; \dots$$

Après avoir choisi A et B, écrivez les dix premiers termes de la suite.

➡ On fabrique alors une autre suite à partir de cette suite de Fibonacci : on divise chaque terme par celui qui les précède, à partir du deuxième :

$$U_1 \quad U_2 \quad U_3 \quad U_4 \quad U_5 \quad \dots$$

$$V_1 = \frac{U_2}{U_1} \qquad V_2 = \frac{U_3}{U_2} \qquad V_3 = \frac{U_4}{U_3} \qquad V_4 = \frac{U_5}{U_4} \qquad \dots$$

Trouvez des valeurs décimales approchées des termes V_1, V_2, V_3, ... jusqu'à V_9, avec 7 décimales.

Comparez ces nombres au réel α (activité 5).

Placez sur un axe les points ayant pour abscisses ces réels; examinez la différence entre deux termes consécutifs et prévoyez la position de V_{10}, V_{11}.
Calculez alors V_{10} et V_{11}.

➡ Recommencez avec deux autre nombres positifs A et B.

A	$U_1 =$	
		$V_1 =$
B	$U_2 =$	
		$V_2 =$
$C = A + B$	$U_3 =$	
		$V_3 =$
$D = B + C$	$U_4 =$	
		$V_4 =$
$E = C + D$	$U_5 =$	
		$V_5 =$
$F = D + E$	$U_6 =$	

7 Tracés de courbes

Voici deux fonctions :

$$f : x \mapsto x^2 \qquad\qquad g : x \mapsto 1 + x$$

Tracez avec soin, point par point, une représentation graphique de f (c'est la parabole d'équation $y = x^2$) puis sur le même dessin celle de g (c'est la droite d'équation $y = 1 + x$).

Ces deux courbes se coupent en deux points : l'un d'abscisse positive, c'est A. Comparez f(1) et g(1), puis f(2) et g(2) : en déduire un encadrement de l'abscisse du point A. Affinez cet encadrement.

Démontrez que l'abscisse de A est le réel α (activité 5).
Encadrez l'abscisse de l'autre point B; quel est ce réel ?

Reprendre les activités ci-dessus avec les deux fonctions :

$$F : x \mapsto 1 + \frac{1}{x} \qquad\qquad G : x \mapsto x$$

8 Les puissances de α

On sait que α est solution de l'équation $X^2 = 1 + X$, alors : $\alpha^2 = 1 + \alpha$.

Cherchons α^3 : c'est le produit $\alpha^2 \times \alpha$ donc $\alpha^3 = (1 + \alpha)\,\alpha = \alpha + \alpha^2 = 1 + 2\alpha$

Cherchons α^4 : c'est le produit $\alpha^3 \times \alpha$ donc $\alpha^4 = (1 + 2\alpha)\,\alpha = \alpha + 2\alpha^2 = 2 + 3\alpha$

Continuez jusqu'à α^{10} et essayez d'imaginer une règle de "passage" de α^n à α^{n+1}.

Intéressons-nous maintenant aux puissances d'exposants négatifs de α.

On sait que $\alpha^{-1} = \dfrac{1}{\alpha} = \alpha - 1$

De même : $\alpha^{-2} = \dfrac{\alpha^{-1}}{\alpha} = \dfrac{\alpha - 1}{\alpha} = 1 - \dfrac{1}{\alpha} = 1 - \alpha + 1 = -\alpha + 2$

Continuez jusqu'à α^{-10} et essayez d'imaginer une règle de "passage" de α^{-n} à α^{-n-1}.

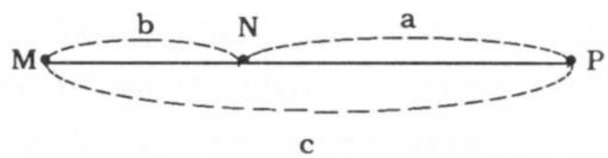
Calculez : $\alpha - \alpha^{-1}$; $\alpha^2 + \alpha^{-2}$; $\alpha^3 - \alpha^{-3}$; $\alpha^4 + \alpha^{-4}$; ...

α^2	$1 + \alpha$
α^3	$1 + 2\alpha$
α^4	
α^5	
α^6	
α^7	
α^8	
α^9	
α^{10}	

α^{-1}	$\alpha - 1$
α^{-2}	$-\alpha + 2$
α^{-3}	
α^{-4}	
α^{-5}	
α^{-6}	
α^{-7}	
α^{-8}	
α^{-9}	

9 Une activité chère à Euclide

[MP] est un segment de longueur c, N est un point de ce segment. a et b sont les longueurs respectives NP et NM. On suppose bien sûr que $a \neq 0$ et $b \neq 0$.



- Écrire tous les quotients $\frac{X}{Y}$ (avec $X \neq Y$) X et Y étant pris dans {a, b, c}. Vous trouverez six quotients.
- En égalant ces quotients deux à deux, écrivez toutes les égalités qui se présentent (il y en a 15, on peut faire un tableau).
- Remplacez chacune des 15 égalités par une relation simple entre a, b et c.
  On rencontrera – des cas particuliers : lesquels ?
  – des impossibilités : lesquelles ?
  On montrera en particulier que l'égalité $c^2 = a.b$ est impossible.
- En éliminant les cas particuliers et les impossibilités, il reste quatre relations : lesquelles ? Vous remarquez qu'elles sont équivalentes deux à deux.
- En posant $a = 1$ et $c = 1 + b$, remplacez chacune de ces deux égalités par une relation ne contenant que b.
  On vérifiera que le nombre α est solution de l'une des équations obtenues et que $\frac{1}{\alpha}$ est solution de l'autre.

La solution α trouvée correspond à la situation :

$$\boxed{\alpha = \frac{\text{grand segment}}{\text{segment moyen}} = \frac{\text{segment moyen}}{\text{petit segment}}}$$

C'est ce que l'on appelle la ***"section dorée"***.

Le nombre α est appelé "nombre d'Or".

Cette étude a déjà été faite par Euclide (Livre VI) :

> *"Une droite est dite coupée en extrême et moyenne raison lorsque la droite entière est au plus grand segment comme le plus grand est au plus petit"* ...

On notera que, dans ce texte, "droite" est pris au sens de "segment de droite".

10 Encore des fractions ...

➡ Simplifiez :

$$2+\frac{1}{2}\quad ;\quad 2+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{2}}\quad ;\quad 2+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{2}}}\quad ;\qquad 2+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{2}}}}$$

Attention au passage d'une fraction à la suivante; écrivez le cinquième terme de cette ***suite***.

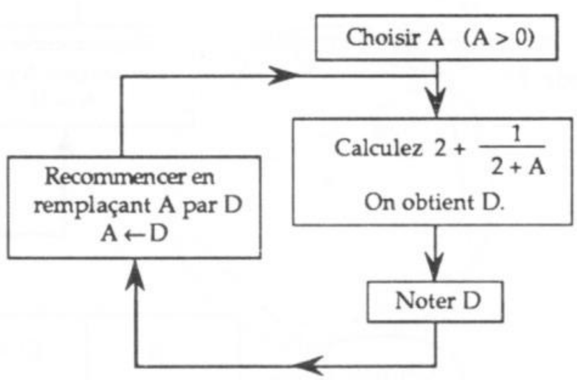
Donnez des valeurs approchées décimales de chaque fraction.

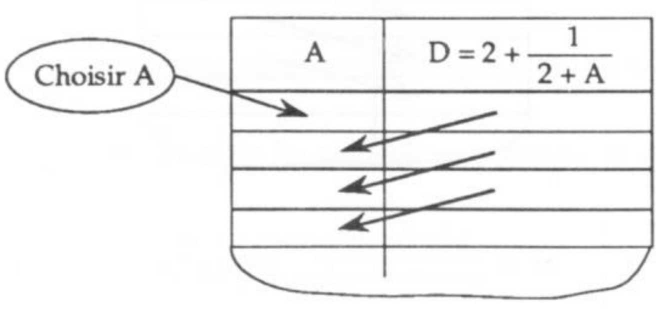
➡ Comparez à $\sqrt{5}$.

1er terme	2ème terme	3ème terme	4ème terme	5ème terme

➡ Faîtes "fonctionner" l'organigramme ci-contre.

Quel est le lien avec ce qui précède ?





11 Toujours des fractions

➡ Simplifiez :

$$1+\frac{1}{2}\ ;\quad 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}}\ ;\quad 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}}}\ ;\quad 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}}}}$$

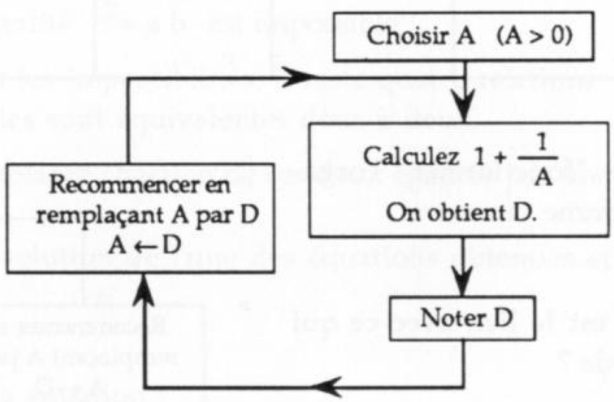
Attention au passage d'une fraction à la suivante; écrivez la cinquième fraction.

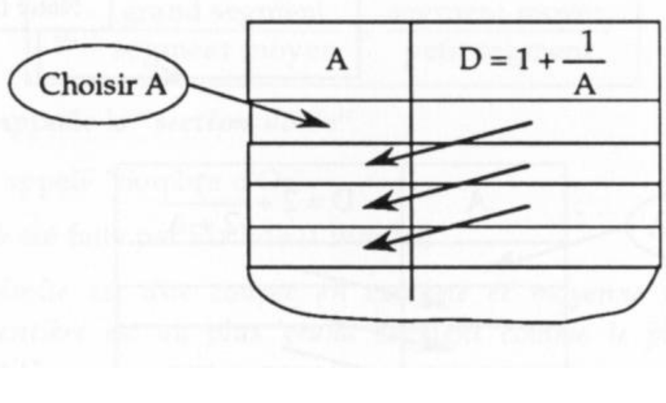
Donnez des valeurs approchées décimales de chaque fraction.

Valeurs approchées successives					

➡ Faîtes "fonctionner" l'organigramme ci-contre.

Quel est le lien avec ce qui précède ?



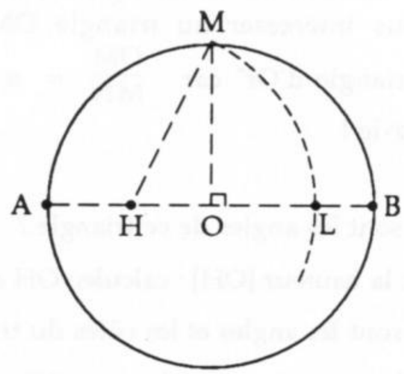


12 Décagones et pentagones réguliers

Du dessin géométrique

(1) Voici un programme de dessin :

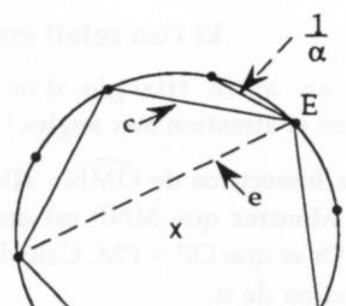
- tracez un cercle de centre O et de rayon égal à 1;
- tracez un diamètre [AB]; H est le milieu de [AO];
- [OM] est un rayon perpendiculaire à [AB];
- le cercle de centre H et de rayon HM coupe (OB) en L.



Démontrez que $AL = \alpha$ et que $OL = \dfrac{1}{\alpha}$.

(2) Voici un autre programme de dessin :

- tracez un autre cercle de même rayon et à partir d'un point E de ce cercle, porter des cordes successives de longueur $OL = \dfrac{1}{\alpha}$:
- au bout de 10 tracés, on retombe sur le point E.



On construit ainsi un **décagone** régulier convexe. Construisez aussi un décagone étoilé.

Construisez ensuite un pentagone régulier convexe de côté c, puis un pentagone régulier étoilé de côté e.

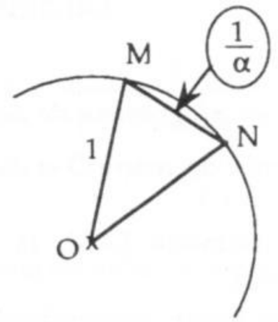
Vous apprendrez peut-être que, pour les pentagones réguliers, le quotient :

$$\boxed{\frac{e}{c} = \frac{\text{côté du pentagone étoilé}}{\text{côté du pentagone convexe}} = \alpha}$$

13 Le triangle d'Or

Reprenons le décagone régulier de l'activité (12).

[MN] est un côté de ce décagone : nous allons nous intéresser au triangle OMN appelé "Triangle d'Or" car $\dfrac{OM}{MN} = \alpha$: démontrez-le !



- Quels sont les angles de ce triangle ?
- Tracez la hauteur [OH] : calculez OH en fonction de α.
- Quels sont les angles et les côtés du triangle OHM ?
- En déduire, en fonction de α, sin 18°, cos 18°, cos 72°, sin 72°.
- Calculez en fonction de α les autres hauteurs de OMN, ainsi que l'aire de ce triangle.

Et l'on refait encore du dessin !

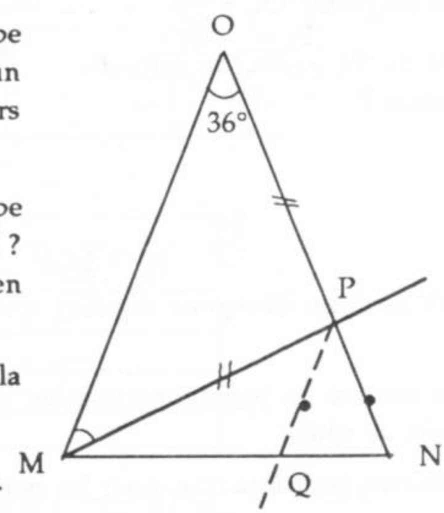
- Dessinez un autre triangle d'or assez grand : prendre par exemple OM = 20 cm et attention aux angles !

  – Tracez la bissectrice de $\widehat{OMN}$: elle coupe ON en P. Montrez que MNP est encore un triangle d'Or et que OP = PM. Calculez alors PN en fonction de α.

  – Tracez la bissectrice de $\widehat{MPN}$ qui coupe MN en Q. Que dire du triangle PQN ? Démontrez que QP = QM. Calculez QN en fonction de α.

  – ... et vous pouvez continuer avec la bissectrice de $\widehat{PQN}$.

  – mettre en évidence des droites parallèles.



- Et en admettant que $\cos 36° = 1 - 2\,(\sin 18°)^2$, calculez $\cos 36°$ en fonction de α.