GALION THÈMES

Autour de la Moyenne

Le volume d'une barrique

$$V \approx \frac{h}{3}\left(B + \sqrt{BB'} + B'\right)$$

15, quai André Lassagne – 69001 LYON
1993

ISBN 2-912209-11-0

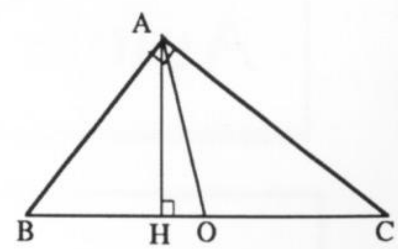
1 Les présentations

Des relations utiles dans un triangle rectangle

Le triangle ABC est rectangle en A.

[AH] est la hauteur issue de A.

O est le milieu de [BC]



(1) $AB^2 + AC^2 = BC^2$ (théorème de Pythagore)

(2) $BA^2 = BH \times BC$ et $CA^2 = CH \times CB$

(3) $AH^2 = HB \times HC$

(4) $OA = \frac{1}{2} BC$

(5) Aire de ABC : $S = \frac{1}{2} AB \times AC = \frac{1}{2} AH \times BC$

➪ Sur un premier croquis

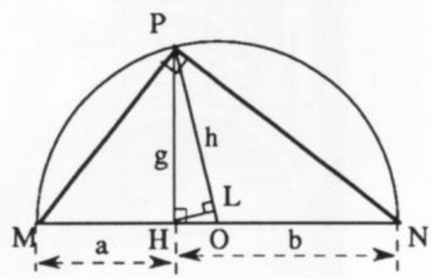
PMN est un triangle rectangle en P, (PH) ⊥ (MN) et O est le milieu de [MN].

On pose HM = a et HN = b en supposant ici a < b.

Observez bien cette figure.

Vous allez calculer, en fonction de a et b, les longueurs suivantes :

OP désignée par m
PH désignée par g
PL désignée par h



Quelle formule permet de calculer OP ? ..... → m= ......

Quelle formule permet de calculer PH ? ..... → g= ......

Quelle formule permet de calculer PL ? ..... → h= ......

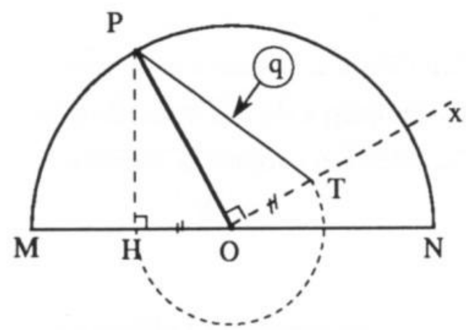
Quelle relation simple y a-t-il entre g^2, h et m ? ..... → g^2= ......

m est appelée **moyenne arithmétique** de a et b; g est la **moyenne géométrique** et h la **moyenne harmonique** de ces deux nombres.

➪ Sur un second croquis

La demi-droite [Ox) est perpendiculaire en O à (OP). Sur cette demi-droite [Ox) on place le point T tel que OT = OH.

La longueur TP est désignée par q : vous allez calculer q en fonction de a et de b.



• Comment s'expriment OH et OT, longueurs égales, en fonction de a et b ?

OT = ...

• Quelle formule utiliser pour obtenir TP ?

q= ......

Ce nombre q est la **moyenne quadratique** de a et b.

➪ ... et des calculs ...

Si, au départ, vous connaissez les longueurs a et b, vous pouvez calculer m, g, h et q.

Faites-le dans les cas suivants, et classez chaque fois tous ces nombres du plus petit au plus grand.

	a	b	m	g	h	q	ranger a, b, m, g, h, q dans l'ordre croissant
(1)	3	5					...<...<...<...<...<...
(2)	300	500					
(3)	8	32					
(4)	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$					

➪ Des comparaisons

On suppose toujours a < b.

Les calculs qui précèdent vous ont conduit à un **ordre** entre les nombres a, b, g, h, m, q.

Vous avez sans doute fait une remarque sur cet ordre ... En vous aidant de propriétés géométriques et en observant les figures, retrouvez cet ordre, et énoncez ce résultat.

Nous reviendrons d'ailleurs sur cette question en utilisant l'algèbre.

2 La loi "TRUC" ...

Pour deux nombres a et b quelconques, le nombre $\frac{a+b}{2}$ s'appelle **moyenne arithmétique** de a et b, ou simplement **moyenne** de a et b.
On décide d'adopter la notation suivante :

$$\frac{a+b}{2} \quad \text{sera écrit} \quad \mathbf{a \perp b} \ \text{(lire : "a truc b")}$$

➪ Entraînez-vous à l'utilisation de cette écriture en calculant :

$$10 \perp 24 \ ; \quad (10 \perp 24) \perp 85 \ ; \quad 10 \perp (24 \perp 85) \ ; \quad \big((-5) \perp (5)\big) \perp 8 \ ;$$
$$(a \perp a) \perp a \ ; \quad (a \perp 0) \perp a \ .$$

➪ Les égalités suivantes sont-elles vraies *quels que soient les nombres a, b, c, d* ?

(1) $a \perp a = a$

(2) $a \perp b = b \perp a$

(3) $a \perp (b \perp c) = (a \perp b) \perp c$

(4) $a \perp 0 = a$

(5) $a \perp (-a) = 0$

(6) $a \perp (b \perp c) = (a \perp b) \perp (a \perp c)$

(7) $(a + c) \perp (b + c) = (a \perp b) + c$

(8) $(ac) \perp (bc) = (a \perp b)\, c$

(9) $a^2 \perp b^2 = (a \perp b)^2$

(10) $(a \perp b) \perp (c \perp d) = (a \perp c) \perp (b \perp d)$

➪ **VRAI ou FAUX ?**

(1) • Si on ajoute le même nombre c aux nombres a et b, leur moyenne arithmétique augmente de c.

(2) • Si on multiplie les deux nombres a et b par k, leur moyenne arithmétique est multipliée par k.

(3) • La moyenne des carrés de deux nombres est égale au carré de leur moyenne.

(4) • On peut trouver deux nombres dont le carré de la moyenne est égal à la moyenne de leurs carrés.

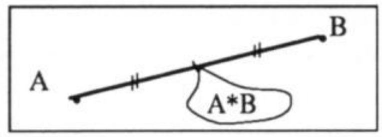
➪ **Équations :** résoudre les équations suivantes d'inconnue x :

$(2x) \perp 3 = 5$	$x \perp 4 = 6x$	$2\,(x \perp 3) = 5$
$(6x) \perp (8x) = 0$	$(6x) \perp (8x) = -1$	$x^2 \perp 8 = 1$
$x^2 \perp 4 = 2x$	$(2x) \perp (-1) = \frac{x^2}{2}$	$x \perp x = x$

3 La loi du milieu

A et B étant deux points, le milieu du segment [AB] est noté A * B (lire A *étoile* B).

En particulier : A * A = A.



➪ Sur un axe

Activités

- Placer sur un axe les points A (–9) ; C (–3) ; D (5) . Soit I = A*C ; J = C*D ; M = I*J . Vérifier que (A*D) * C = (A*C) * (D*C) .
- Placer sur un axe les points R (1) ; S (–3) ; U (4) ; Y (–1) . N, P, Q, T sont les points tels que S = R*N ; U = R*P ; Y = N*Q ; T = P*Q .
  Vérifier que S*T = U*Y .

Démonstrations

- A, B, C étant trois points quelconques d'un axe, démontrer que :

$$\boxed{A * (B*C) = (A*B) * (A*C)} \qquad (P1)$$

- A, B, C, D étant quatre points quelconques d'un axe, démontrer que :

$$\boxed{(A*B) * (C*D) = (A*C) * (B*D)} \qquad (P2)$$

Montrer que (P1) peut se déduire de (P2).

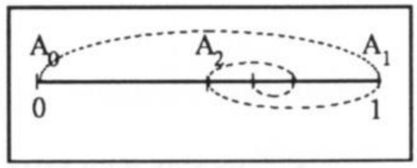
➪ Dans le plan

- Dessiner un triangle ADF. Est-ce que (E*D) * F = E * (D * F) ?
  A-t-on E * (D*F) = (E*D) * (E*F) ?
- Dans un repère placer les points A (–2 ; 1) ; B (6 ; 3) ; C (5 ; –1) ; D (–3; –3) et dessiner le quadrilatère ABCD.
  – Que pouvez-vous dire de A*C et de B*D ?
  – Que pouvez-vous conclure ?
  – Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$. Que constatez-vous ? Ce résultat vous surprend-il ?
- Démontrer que dans tout quadrilatère MNPQ :
  (M*N) * (Q*P) = (M*Q) * (N*P) .
- D'autres problèmes :
  1- A, B, C, D sont les sommets d'un parallélogramme. Trouver les points M, N, P, Q tels que : M*N = A ; N*P = B ; P*Q = C et Q*M = D.
  2- Marquer quatre points A', B', C', D' et placer le point X tel que : (A'*X) * (B'*C') = D' .
  3- Marquer des points U, V, W et construire des points Y et Z tels que (U*Y) * (V*Z) = W .

4 De milieu en milieu ... vers $\frac{2}{3}$!

Dans cette activité, vous aurez à organiser de nombreux résultats de calculs. Soyez astucieux pour les présenter de façon claire !

Tracer un segment $[A_0A_1]$ aussi grand que possible. On prend (A_0, A_1) comme repère de l'axe : A_0 est l'origine et A_1 , le point d'abscisse 1.



- **Marquer des points.**

  Placer A_2 milieu de $[A_1A_0]$; A_3 milieu de $[A_2A_1]$; A_4 milieu de $[A_3A_2]$.

  Avec la même règle : **A_p est le milieu de $[A_{p-1}A_{p-2}]$** . Placer A_5, A_6, A_7, A_8.

  … et taillez bien votre crayon … Que se passe-t-il … ?

  Essayons d'y voir plus clair !

- **Calculer des abscisses.**

  On désigne par x_p l'abscisse du point A_p : $x_0 = 0$; $x_1 = 1$.

  Calculer $x_2, x_3, \ldots, x_8$ d'abord sous forme de fraction dont le dénominateur est une puissance de 2, puis sous forme décimale exacte.

- **Calculer des écarts.**

  Calculer successivement, sous les deux formes précédentes, les écarts $x_1 - x_0$; $x_2 - x_1$; $x_3 - x_2$; … ; $x_8 - x_7$.

  Comment se déduit un écart du précédent ?

  Que pensez-vous de $x_{100} - x_{99}$?

- **La « distance à $\frac{2}{3}$ »**

  On désigne par I le point d'abscisse $\frac{2}{3}$ sur l'axe. Calculer les distances successives IA_1 , IA_2, IA_3 , …, IA_8 : en donner la valeur exacte sous forme de fraction irréductible.

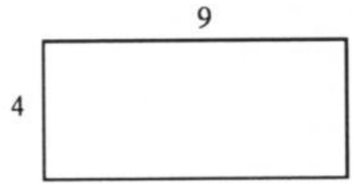
  Comment se déduit une distance de la précédente ?

La morale de l'histoire …

De moitiés en moitiés … on arrive à deux-tiers !

5 La moyenne géométrique $\boxed{g = \sqrt{ab}}$

- Ce rectangle a pour côtés 4 et 9 centimètres. Trouver le côté du carré de même aire.
- Et pour un rectangle de côtés 40 et 90 ?
- Et pour un rectangle de côtés $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{12}$?



> Le côté d'un carré de même aire qu'un rectangle de côtés a et b est le nombre $\sqrt{ab}$. Ce nombre positif désigné par g, s'appelle **moyenne géométrique** des nombres positifs a et b.

■ Vrai ou faux ?

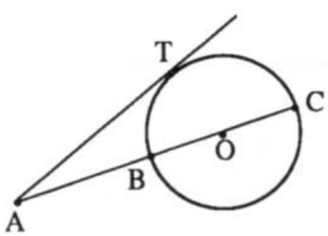
(1) Si a et b augmentent d'un même nombre, g augmente de ce nombre. | Vrai | Faux |

(2) Si a et b sont doublés, g est doublé. | Vrai | Faux |

(3) Si a et b sont triplés, g est triplé. | Vrai | Faux |

(4) Si a et b sont multipliés par k, g est multiplié par k. | Vrai | Faux |

(5)

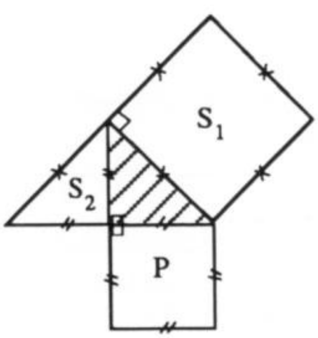


(AT) est tangente en T au cercle dont [BC] est un diamètre.

AT est moyenne géométrique de AB et AC

| Vrai | Faux |

(6)



Cette figure comporte deux carrés et deux triangles rectangles et isocèles.

L'aire de P est moyenne géométrique entre les aires de S_1 et S_2 .

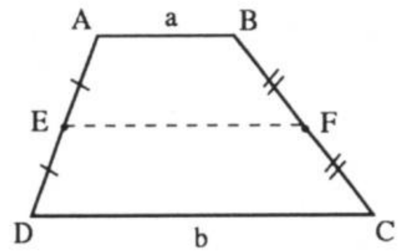
| Vrai | Faux |

6 La moyenne harmonique $\boxed{h = \dfrac{2\,ab}{a+b}}$

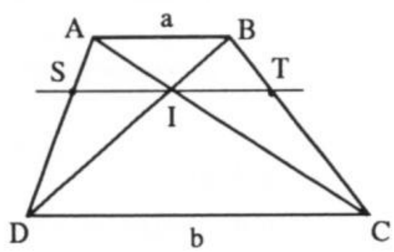
- ABCD est un trapèze de bases [AB] et [DC], AB = a et DC = b.

  E et F sont les milieux des côtés non parallèles.

  Montrez que EF est la **moyenne arithmétique de a et b**.



- Les diagonales se coupent en I; la parallèle aux bases passant par I coupe les côtés non parallèles en S et en T.



On pose $\boxed{ST = h}$

* Montrons que **I est le milieu de [ST]** : pour cela expliquez et complétez les égalités suivantes.

Dans le triangle DAB : $\dfrac{SI}{a} = \dfrac{DS}{\dots}$; dans CAB : $\dfrac{TI}{a} = \dfrac{CT}{\dots}$

Or, $\dfrac{DS}{DA} = \dfrac{CT}{\dots}$ donc $SI = TI$.

* Montrons que : $SI = \dfrac{ab}{a+b}$

$\dfrac{SI}{a} = \dfrac{DS}{\dots}$ et $\dfrac{SI}{b} = \dfrac{AS}{\dots}$ donc $\dfrac{SI}{a} + \dfrac{SI}{b} = \dots$ d'où $SI = \dfrac{ab}{a+b}$.

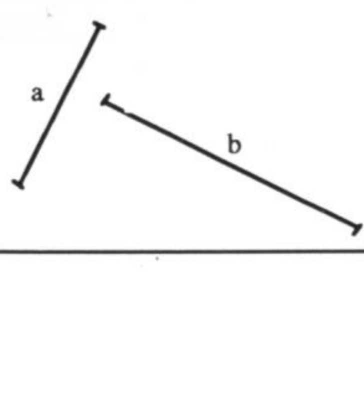
Puisque $ST = 2\,SI$ on a $\boxed{ST = h = \dfrac{2ab}{a+b}}$

Ce nombre h est appelé **moyenne harmonique** de a et de b.

- Vérifiez que $\boxed{\dfrac{2}{h} = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}}$ et que $\boxed{h = \dfrac{g^2}{m}}$

m est la moyenne arithmétique de a et b, g est la moyenne géométrique.

Construction :



Voici deux segments de longueurs a et b.

Construire un segment dont la longueur est la **moyenne harmonique** de ces deux nombres, sans calcul et sans double décimètre : vous avez droit à un compas et une règle non graduée.

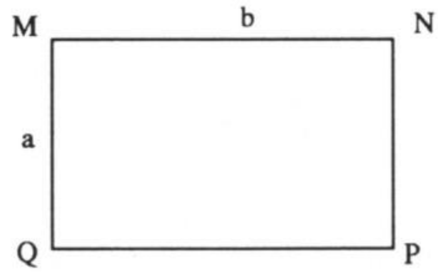
7

Le puzzle de Liu-Hui

Voici un rectangle de côtés a et b.

On suppose a < b.

- Comment s'exprime, en terme de moyenne, le côté du carré ayant le même périmètre que ce rectangle ?
- Même question pour le côté du carré de même aire.



Découpage

Tracer la diagonale [MP] puis les bissectrices des angles $\widehat{N}$ et $\widehat{Q}$ qui coupent (MP) en J et en I.

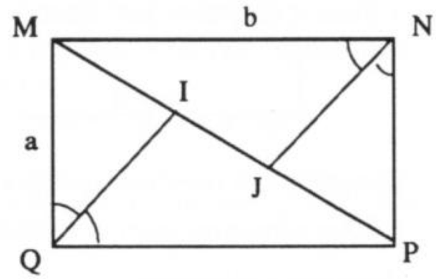
On trace alors deux carrés marqués ✪ : l'un de diagonale [QI], l'autre de diagonale [NJ].

On peut alors découper le rectangle MNPQ en six morceaux et les assembler comme sur la figure (2).

- Quelle est la longueur L du rectangle (figure 2) en fonction de a et de b ?

- Que pouvez-vous dire des aires du rectangle MNPQ et du rectangle de la figure (2) ?

- En déduire que 2x est la moyenne harmonique des longueurs a et b.



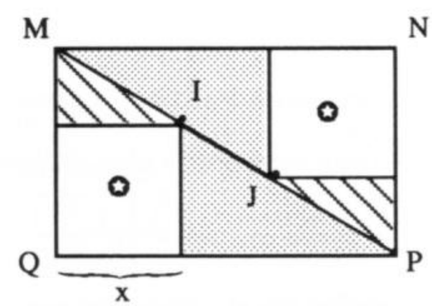


figure (1)

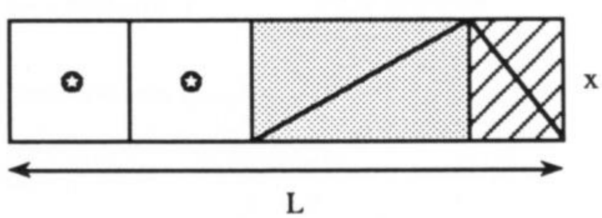


figure (2)

Ce procédé de construction de la moyenne harmonique était utilisé au IIIème siècle par le géomètre chinois Liu-Hui.

8 Comparer les moyennes

On suppose toujours $a < b$.

On a déjà montré géométriquement que $a < h < g < m < q < b$.

C'est un ordre remarquable. Nous allons essayer de prouver cet ordre par des procédés algébriques. Vous avez vu que tous ces nombres sont positifs.

Étape 1 **Nous allons d'abord montrer que les 4 moyennes sont comprises entre les deux nombres a et b.**

(1) Comparer m à a et b

• Pour comparer les deux nombres m et a étudions le signe de leur différence : $m - a$.

$$m - a = \frac{a+b}{2} - a = \dots = \dots$$

Complétez et concluez quant à la comparaison de m et a.

• Pour comparer m et b, calculez $b - m$ et concluez.

Vous avez démontré $\boxed{a < m < b}$.

(2) Comparer h à a et b. Vous savez que $h = \dfrac{ab}{m}$.

• Pour comparer h et a, utilisons le fait que $a < m$.

$$\boxed{a < m} \xrightarrow{?} \boxed{\frac{1}{a} > \frac{1}{m}} \xrightarrow{?} \boxed{\frac{ab}{a} > \frac{ab}{m}} \xrightarrow{?} \boxed{b > h}$$

Justifier chaque étape de cette chaîne.

Prouvez ensuite que $a < h$ en partant de $m < b$.

Vous avez démontré $\boxed{a < h < b}$.

(3) Comparer g à a et b.

• Les deux nombres g et a étant positifs, vous pouvez comparer leurs carrés : $g^2 = ab$. Or

$$\boxed{a < b} \xrightarrow{?} \boxed{a^2 < ab} \xrightarrow{?} \boxed{a^2 < g^2} \xrightarrow{?} \boxed{a < g}$$

Justifier ces étapes. Prouvez de même que $g < b$.

Vous avez démontré $\boxed{a < g < b}$.

(4) Comparer q à a et b. On sait que $q^2 = \dfrac{a^2 + b^2}{2}$.

Pour comparer les nombres positifs a et q, comparons leurs carrés en étudiant le signe de leur différence.

$$q^2 - a^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} - a^2 = \ldots = \ldots$$

Conclure. En calculant $b^2 - q^2$, comparez b et q.

Vous avez démontré $\boxed{a < q < b}$.

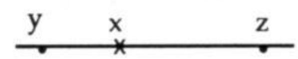
Étape 2 **Nous allons maintenant comparer les moyennes entre elles.**

Pour cela nous allons démontrer un théorème préliminaire, ce qui s'appelle un ***lemme*** en mathématiques :

x, y, z étant des nombres positifs tels que $x^2 = yz$ $x > y$ équivaut à $x < z$.

Démontrons le.

On sait que $x^2 = yz \Leftrightarrow \dfrac{x}{y} = \dfrac{z}{x}$. Dire que $x > y$, c'est dire que $\dfrac{x}{y} > 1$. On a donc aussi $\dfrac{z}{x} > 1$. Soit $z > x$. x est entre y et z.



(5) Comparons les moyennes m, g et h

On sait que $g^2 = mh$ et ces trois nombres sont positifs.

Comparons d'abord m et g en comparant leurs carrés.

$$m^2 - g^2 = \frac{(a + b)^2}{4} - ab = \ldots = \frac{(\qquad)^2}{4}$$

Ainsi $m^2 > g^2$ donc $m > g$. D'après le lemme précédent, on a aussi $g > h$. La moyenne g est entre les moyennes m et h.

Vous avez démontré $\boxed{h < g < m}$ $\Rightarrow$ $\boxed{a < h < g < m < b}$

(6) Il nous reste à situer q ...

Les activités précédentes nous incitent à comparer m et q. Et pour cela comparons leurs carrés ...

$$q^2 - m^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{(a + b)^2}{4} = \ldots = \frac{(\qquad)^2}{4}$$

Vous avez démontré $\boxed{q > m}$ ... et c'est fini !

Conclusion générale : $\boxed{\mathbf{a < h < g < m < q < b}}$

Dresser un bilan des **méthodes** permettant de comparer deux nombres

9 Des moyennes "pondérées"

❖ Qu'est-ce que c'est ?

Pour être admis à l'école KURNONSKY, le candidat doit passer trois épreuves :

- l'épreuve "sauce", note S (coefficient 1),
- l'épreuve "entremets", note E (coefficient 2),
- l'épreuve "dessert", note D (coefficient 3).

Les notes S, E et D sont des entiers compris entre 0 et 20. Ainsi, le candidat Paul a obtenu les notes $S = 11$; $E = 12$; $D = 8$.

La note globale est $N = (\mathbf{1} \times 11) + (\mathbf{2} \times 12) + (\mathbf{3} \times 8) = 49$.

La note moyenne est $m = \dfrac{N}{1+2+3} = \dfrac{49}{6} \approx 8{,}16$ (sur 20).

Cette "moyenne" est la moyenne pondérée des notes S, E, D avec les coefficients 1, 2, 3.

$$\boxed{m = \frac{1\,S + 2\,E + 3\,D}{1+2+3}}$$

Les notes sont données dans l'ordre S, E, D.

✻ Léa a obtenu les notes 12, 10 et 11, calculer sa moyenne.

✻ Même question pour Alain qui a obtenu 10, 12 et 11 puis pour Ginette qui a obtenu 11, 12 et 10.

✻ Hector a obtenu 11 en épreuve "sauce" et 12 en épreuve "entremets"; combien doit-il avoir à la dernière épreuve pour obtenir une moyenne 14 ?

✻ … et Marcello, qui a eu 0 en "sauce" et 16 en "entremets", peut-il espérer avoir un moyenne égale à 10 … ?

❖ La chasse à la moyenne

Un candidat qui se présente à un poste de conseiller en relations publiques doit subir un examen comportant deux épreuves : un entretien, note x (coefficient 3) et une épreuve écrite, note y (coefficient 2).

x et y sont des **nombres entiers** compris entre 0 et 20.

La note moyenne m est la moyenne pondérée $m = \dfrac{3x + 2y}{5}$

* Trouver tous les couples de notes (x, y) pour lesquels la moyenne est 12.

  Comment peut-on représenter graphiquement tous ces couples ?

* Imaginer une méthode pour trouver tous les couples (x, y) pour lesquels la moyenne est strictement supérieure à 12.

* On impose aux candidats les conditions suivantes :
  la moyenne doit être supérieure à 12, la note d'entretien supérieure à 12 et la note d'écrit supérieure à 10.
  Comment trouver tous les couples (x, y) vérifiant ces conditions ?

* On impose maintenant les conditions : $m > 12$ et $x > y$.
  Quels sont les couples (x, y) qui conviennent ?

* y est le double de x et la moyenne est 14.
  Trouver les notes du candidat.

Avec des vecteurs

À cet examen, François a obtenu :
$$x = 8 \text{ et } y = 14.$$

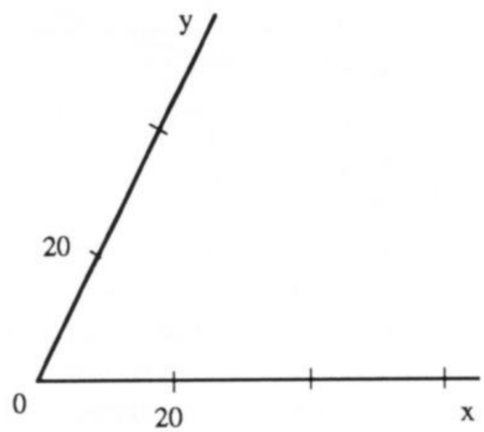
Sur l'axe [Ox), placer A d'abscisse $x = 8$ puis A' d'abscisse 3x.

Sur l'axe [Oy), placer B d'abscisse $y = 14$ puis B' d'abscisse 2y.

Construire C tel que

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'}$$

et M tel que $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{5}\,\overrightarrow{OC}$.



* Contrôler que les points A', B' et M sont alignés.
* Pouvez-vous le démontrer ?
* … et dans le cas général, pour x et y quelconques ?

10 Où l'on encadre $\sqrt{A}$ par des fractions

Évidemment, votre calculatrice peut donner $\sqrt{5}$ … mais notre objectif est ici de l'encadrer par des fractions.

Vous avez vu que, pour deux nombres a et b positifs ($a < b$) on a, entre, les moyennes : $a < h < g < m < b$ et $mh = g^2 = ab$.

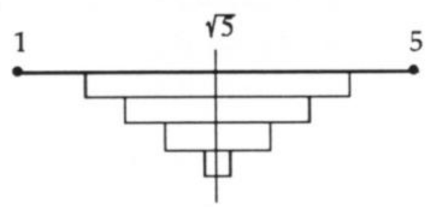
Prenons au départ $a = 1$ et $b = 5$. On a donc : $g = \sqrt{5}$. Calculez h et m sous forme de fraction (ligne 1). Vous obtenez : $\frac{5}{3} < \sqrt{5} < 3$.

	a	b	$h = \frac{2ab}{a+b}$	$m = \frac{a+b}{2}$	
(1)	1	5	$\frac{5}{3}$	3	1 5/3 $\sqrt{5}$ 3 5
(2)	$\frac{5}{3}$	3			1 5
(3)					1 5
(4)					

À la ligne 2, remplacer a et b respectivement par h et m de la ligne 1 et calculez un nouvel encadrement de $\sqrt{5}$.

À la ligne 3, on continue en prenant pour nouvelles valeurs respectives de a et de b les fractions h et m de la ligne 2. Vous avez un nouvel encadrement de $\sqrt{5}$ … Continuer pour les lignes 4, 5, 6 …

• Les encadrements s'emboîtent



$g = \sqrt{ab}$ et $g = \sqrt{mh}$ donc $mh = ab$.

Si on désigne par m' et h' la moyenne arithmétique et la moyenne harmonique de m et h, on a : $m'h' = mh = ab$.

D'autre part : $a < h < g < m < b$

donc $h < \underline{h'} < g < \underline{m'} < m$: expliquez pourquoi.

Et on peut encore poursuivre en remplaçant h' et m' par h" et m" :

$$h < h' < h'' < g < m'' < m' < m$$

Encadrer $\sqrt{21}$ par des suites de fractions.

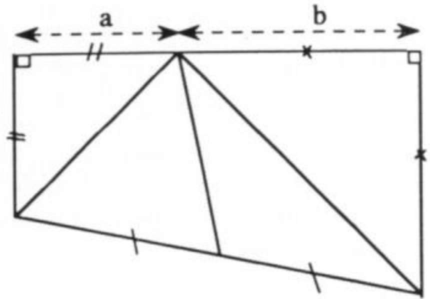
11 Moyenne quadratique $q = \sqrt{\dfrac{a^2 + b^2}{2}}$

Comme l'indique la formule ci-dessus, la ***moyenne quadratique*** q des nombres a et b est la racine carrée de la demi-somme de leurs carrés.

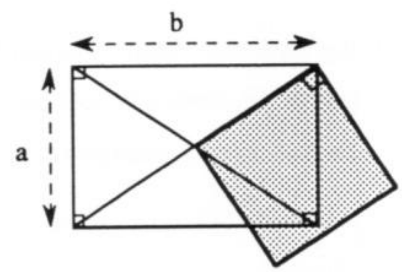
➡ **Chercher** la moyenne quadratique de a et b sur ce premier dessin. Il représente un trapèze rectangle de bases a et b, de hauteur a+b.

Où est q ?

Attention aux égalités de segments !



➡ **Chercher** de même la moyenne quadratique q de a et b sur le dessin ci-contre qui représente un rectangle de côtés a et b et un carré (grisé) construit sur une demi-diagonale du rectangle.



➡ Vrai ou faux ?

(1) 5 est moyenne quadratique de $3\sqrt{2}$ et $4\sqrt{2}$.

(2) 10 est moyenne quadratique de 3 et 4.

(3) Si on multiplie a et b par un nombre, leur moyenne quadratique est multipliée par ce nombre.

(4) Si on ajoute un même nombre à a et b, la moyenne quadratique est augmentée de ce nombre.

(5) Le carré de la moyenne quadratique de a et b est la moyenne arithmétique des carrés de ces deux nombres.

(6) Le double du carré de la moyenne arithmétique m est la somme des carrés de la moyenne géométrique et de la moyenne quadratique.

(7) Si $a = b$ alors $q = a$.

(8) Si $q = a$ alors $a = b$.

12 Utiliser la bonne moyenne ...

(1) Gérard monte à vélo au Ballon d'Alsace. Depuis la vallée jusqu'au col, sa vitesse, supposée constante est de 15 km/h. À la descente, cette vitesse, toujours constante, est de 45 km/h. Quelle est sa vitesse moyenne pour le trajet aller-retour ?

(2) Roulant en 2CV, Ginette va de Lyon à Valence à 60 km/h. Elle veut faire l'aller-retour à une vitesse moyenne de 90 km/h. Quelle doit être sa vitesse au retour, sachant que sa voiture est immatriculée 6269 QQ 69 ... ?

(3) Le 1er janvier, Dédé a changé 1 000 F en dollars au cours de 5,60 F pour 1 dollar. Le 8 décembre de la même année, il a changé la même somme au cours de 6,20 F pour 1 dollar. Quel est le cours moyen pour ces deux transactions ?

(4) Pour remplir le bassin des poissons rouges, Jacky laisse couler un premier robinet pendant 9 heures. S'il utilisait l'autre robinet, il suffirait de 6 heures. Et s'il les ouvre tous les deux en même temps ?

(5) En Papoulie, dans l'entreprise A les $\frac{3}{4}$ des ouvriers sont des hommes, payés 16 sesterces par heure et les femmes sont payées 12 sesterces par heure; dans l'entreprise B, le $\frac{1}{4}$ des ouvriers sont des hommes payés 17 sesterces l'heure, alors que les $\frac{3}{4}$ sont des femmes payées 13 sesterces l'heure.

Comparez les salaires moyens dans ces deux usines.

(6) Le tableau qui suit donne les fréquences des notes de la gamme dite *tempérée*.

numéro d'ordre	1	2	3	4	5	6	7	8	9
note	do	do #	ré	ré #	mi	fa	fa #	sol	sol #
fréquence	261,63	277,18	293,66	311,13	329,63	349,23	370	392	415,30

- Chaque note (sauf 1 et 9) a une fréquence qui est une moyenne des fréquences des deux notes qui l'encadrent : quelle est cette moyenne ? Le vérifier pour toutes les notes de 2 à 8.
- Si cette propriété est vraie pour les autres notes : la (10); la # (11); si (12); do (13), trouver les fréquences de ces notes.
- Vérifier que l'on passe de la fréquence de do (1) à celle de do (13) de l'octave supérieure, en multipliant par 2.

  Comment passe-t-on de la fréquence de la note N à celle de la note N+1 ?